Contribuciones Científicas y Tecnológicas N° 66 - Area Matemática VI, Mayo 1984

Singularidad centro-foco en R^3*

J. Billeke**, A.M. Urbina***

RESUMEN: En este artículo se estudian las singularidades de campos vectoriales X en el origen de R^3 (con coordenadas (x_1, x_2, x_3)) tales que

$$DX(0) = -bx_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + bx_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + \lambda x_3 \frac{\partial}{\partial x_3},$$

$b, \lambda \neq 0$.

La conducta de estas singularidades corresponde al centro-foco en R^3 con un eje hiperbólico. El conjunto de gérmenes de tales campos vectoriales es un conjunto estratificado, cuyas estratas son conjuntos localmente cerrados y de codimensión creciente en el espacio de gérmenes de singularidades en R^3.

Además estas singularidades son localmente C^0 estables y se bifurcan a n-parámetros colapsando n-cilindros concéntricos invariantes, es decir, una bifurcación de Hopf cilindrar generalizada.

SUMMARY: We study singularities of Vector Fields X at the origin in R^3 (with coordinates (x_1, x_2, x_3)) such that

$$DX(0) = -bx_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + bx_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + \lambda x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad b, \lambda \neq 0$$

These singularities behave as Center-Focus in R^3 with a hyperbolic axis. The set of germs of such vector fields is a stratified set, with locally closed strata and increasing codimension in the space of germs of singularities in R^3.

We also show that these singularities are locally C^0 stables and bifurcate depending upon n-parameters, collapsing invariant n-concentric cylinders; that is, a generalized cylindrical Hopf bifurcation.

1. FORMA NORMAL Y DESCRIPCION TOPOLOGICA DE LA SINGULARIDAD

1.1. Consideremos el campo vectorial X en R^3 de clase C^k $k \geq 1$ con parte lineal $DX(0) = -bx_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + bx_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + \lambda x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$, $b, \lambda \neq 0$ y (x_1, x_2, x_3) las coordenadas de R^3. Si $V_{ij} = \frac{1}{2}\left[x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i}\right]$; $R_i = x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ $i = 1, 2, 3$ tenemos $DX(0) = 2b\, V_{12} + \lambda R_3$

1.2. Forma Normal: Sea X como en 1.1. Entonces existe $\varphi: (R^3, 0) \circlearrowleft$ un C^∞ difeomorfismo tal que $\varphi_* X = d\varphi \cdot X \cdot \varphi^{-1} = X'$ con $X' = f(x_1^2 + x_2^2)\, V_{12} + g(x_1^2 + x_2^2)\, [R_1 + R_2] + h(x_1^2 + x_2^2)\, R_3 + P_k(x_1, x_2, x_3)$ donde f, g, h son funciones reales de clase C_k con $f(0) = 2b$, $g(0) = 0$, $h(0) = \lambda$ y el k-jet de P_k en 0, $j_k(P_k)(0) = 0$ $k = \infty$ no está excluido.

Demostración:

Sea $H^\ell = \{Y \in \aleph^\infty (R^3) / Y = Y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + Y_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + Y_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$

con Y_i polinomios homogéneos de grado ℓ en las variables $(x_1, x_2, x_3)\}$. El corchete de Lie en el Algebra de polinomios induce $[DX(0), -]_\ell : H^\ell \to H^\ell$ definida por $Y \to [DX(0), Y]$.

Sea B^ℓ = Imagen de H_ℓ por $[DX(0), -]_\ell$ y K^ℓ un complementario de B^ℓ en H^ℓ.

Para determinar la forma Normal de Takens [3] de X debemos encontrar una base de K^h y para ello usemos el método de complejificación.

Sea $H^\ell \otimes \mathbb{C} = [Y^1 + iY^2 / Y^1, Y^2 \in H^\ell\}$, entonces la acción de Lie es $[DX(0), Y^1 + iY^2] := [DX(0), Y^1] + i\,[DX(0), Y^2]$.

Sean $Z_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2}$, $Z_{-1} = \frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2}$, $Z = \frac{\partial}{\partial x_3}$ campos vectoriales de clase C^∞ sobre $R^3 \otimes \mathbb{C}$.

Demostraremos que $\{V^{r,s,t} Z_j, V^{r,s,t} Z\}$ $r \geq 0$, $t \geq 0$, $j = \pm 1$, $\ell = 2r + |s| + t$ es una base de $H^\ell \otimes \mathbb{C}$ donde las funciones complejas $V^{r,s,t}$ están definidas por

$$V^{r,s,t}(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} (x_1^2 + x_2^2)^r (x_1 + ix_2)^s x_3^t & r \geq 0,\ s \geq 0,\ t \geq 0 \\ (x_1^2 + x_2^2)^r (x_1 - ix_2)^{-s} x_3^t & r \geq 0,\ s \geq 0,\ t \geq 0 \end{cases}$$

i) $[DX(0), Z_1] = ib\, Z_1$

ii) $[DX(0), Z_{-1}] = -ib\, Z_{-1}$

iii) $[DX(0), Z] = -\lambda Z$

iv) $DX(0) \cdot V^{r,s,t} = (\lambda t + ibs)\, V^{r,s,t}$

* Manuscrito revisado y aprobado en forma definitiva en marzo de 1984.

** Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación, Facultad de Ciencia, Universidad de Santiago de Chile (USACH).
***Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María.

Por propiedades del corchete de Lie, se tiene que:

$$[DX(0),\, V^{r,s,t}Z_{\pm1}] = V^{r,s,t}\,[DX(0),\, Z_{\pm1}] + DX(0)\cdot V^{r,s,t}Z_{\pm1}$$
$$= \pm ibV^{r,s,t}Z_{\pm1} + (\lambda t + ibs)\, V^{r,s,t}Z_{\pm1}$$
$$= \{\lambda t + ib\,(s \pm 1)\}\, V^{r,s,t}Z_{\pm1}$$
$$[DX(0),\, V^{r,s,t}Z] = -\,\lambda V^{r,s,t}Z + (\lambda t + ibs)\, Z$$
$$= \{\lambda(t-1) + ibs\}\, Z$$

Luego $V^{r,s,t}Z_{\pm1}$ y $V^{r,s,t}Z$ son vectores propios de $[DX(0), -]_\ell$ con valores propios $\lambda t + ib\,(s \pm 1)$ y $\lambda(t-1) + ibs$, por lo tanto $\{V^{r,s,t}Z_1, V^{r,s,t}Z_{-1}, V^{r,s,t}Z\}$ $r \geq 0$, $t \geq 0$, $\ell = 2r + |s| + t$ base de $H^\ell \otimes \mathbb{C}$. Calculemos el núcleo de $[DX(0), -]_\ell$. $[DX(0), V^{r,s,t}Z_{\pm1}] = \{\lambda t + ib\,(s \pm 1)\}\, V^{r,s,t}Z_{\pm1} = 0$ como b, $\lambda \neq 0$, se tiene $t = 0$ y $s = \mp 1$, por lo tanto $\ell = 2r + 1$ $[DX(0), V^{r,s,t}Z] = \{\lambda(t-1) + ibs\}\, V^{r,s,t}Z = 0$ como b, $\lambda \neq 0$, se tiene $t = 1$ y $s = 0$, por lo tanto $\ell = 2r + 1$.

Entonces si ℓ es par, Núcleo $[DX(0), -]_\ell = \{0\}$ y si ℓ es impar K^ℓ está generado por

$$\{V^{\frac{\ell-1}{2},1,0}Z_{-1},\ V^{\frac{\ell-1}{2},-1,0}Z_1,\ V^{\frac{\ell-1}{2},0,1}Z\}$$

Recordemos que si V es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, $W \subset V$ subespacio tal que $W = \langle f, \bar{g}\rangle$, entonces $W = \langle \frac{1}{2}(f + g), \frac{i}{2}(f + g)\rangle$. En nuestro caso:

$$W^\ell_+ := \frac{1}{2}\,[V^{\frac{\ell-1}{2},1,0}Z_{-1} + V^{\frac{\ell-1}{2},-1,0}Z_1]$$

$$W^\ell_- := \frac{i}{2}\,[V^{\frac{\ell-1}{2},1,0}Z_{-1} - V^{\frac{\ell-1}{2},-1,0}Z_1]$$

$$W^\ell := V^{\frac{\ell-1}{2},0,1}Z$$

Es decir

$$W^\ell_+ = \frac{1}{2}\,(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{\ell-1}{2}}\,(2x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_2\frac{\partial}{\partial x_2})$$
$$= (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{\ell-1}{2}}\,(R_1 + R_2)$$

$$W^\ell_- = \frac{i}{2}\,(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{\ell-1}{2}}\,(2ix_2\frac{\partial}{\partial x_1} - 2ix_1\frac{\partial}{\partial x_2})$$
$$= 2\,(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{\ell-1}{2}}\,V_{12}$$

$$W^\ell = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{\ell-1}{2}}\,x_3\frac{\partial}{\partial x_3} = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{\ell-1}{2}}\,R_3$$

W^ℓ_+, W^ℓ_-, W^ℓ generan el núcleo de $[L, -]_\ell$ en $H^\ell \otimes \mathbb{C}$ y son reales por lo tanto generan el núcleo de $[L, -]_\ell$ en H^ℓ.

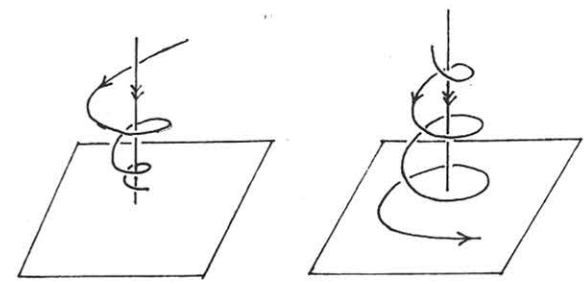
Ahora por Teorema de la forma Normal de Takens, existe un C^∞-difeomorfismo φ: $(R^3, 0) \to (R^3, 0)$ tal que para $s \geq k$ $\varphi_* X = DX(0) + g_2 + g_3 + \ldots + g_s + P_s$ con $g_\ell \in K^\ell$, $2 \leq \ell \leq s$ y $j_s(P_s)(0) = 0$

como $g_\ell \equiv 0$ si ℓ es par, tenemos

$$X' \underset{s'}{=} \varphi_* X = [2b + \sum_{j=1}^{s'} a_{2j+1}\,(X_1^2 + X_2^2)^j]\, V_{12} +$$
$$+ [\sum_{j=1}^{s'} b_{2j+1}\,(X_1^2 + X_2^2)^j]\,(R_1 + R_2)$$
$$+ [\lambda + \sum_{j=1}^{s'} C_{2j+1}\,(X_1^2 + X_2^2)^j]\, R_3 + P_s(X_1, X_2, X_3) \ldots (*)$$

con $s' \leq \dfrac{s-1}{2}$

1.3 *Proposición:* Sea X' como en 1.2 en coordenadas (X_1, X_2, X_3). Entonces λ y el primer b_ℓ no nulo determinan el comportamiento topológico de la singularidad.



Demostración: Nuestra singularidad es parcialmente hiperbólica, entonces determinemos una Variedad Central [2], que es el siguiente Lema.

Lema: Sea $X \in \mathfrak{X}^k(R^3)$ tal que $j_1(X)(0) = j_1(L)(0)$ donde $L = 2bV_{12} + \lambda R_3$. Entonces dado $s \leq k$, existen un C^∞ difeomorfismo φ: $(R^3, 0) \circlearrowleft$ y g: $(R^2, 0) \to (R, 0)$ función real de clase C^∞ tales que

$$\varphi_* X_{|W^C} \underset{s'}{=} \{2b + \sum_{j=1}^{s'} a_{2j+1}\,(X_1^2 + X_2^2)^j\}\, V_{12} +$$
$$+ \{\sum_{j=1}^{s'} b_{2j+1}\,(X_1^2 + X_2^2)^j\}\,(R_1 + R_2) + Q_s(X_1, X_2, g(X_1, X_2))$$

con W^C variedad central de X, $j_s(Q_s)(0) = 0$, $s' \leq \dfrac{s-1}{2}$

Prueba: Por el teorema de la forma local de Superficies existen U vecindad de (0, 0) en R^2 y g: $U \to R$ de clase C^∞, $g(0, 0) = 0$ tal que W^C es de la forma
$W^C = \{(X_1, X_2, g(X_1, X_2)) \,/\, Dg(0, 0) = 0\}$. Entonces el vector (Y_1, Y_2, Y_3) de R^3 está en $T_{(X_1, X_2, g(X_1, X_2))}W^C$ si y solamente si $Y_3 = Y_1 \dfrac{\partial g}{\partial x_1}(X_1, X_2) + Y_2 \dfrac{\partial g}{\partial x_2}(X_1, X_2,)$ .... (**) Por Teorema 1.2 existen coordenadas (X_1, X_2, X_3) donde el campo X tiene la expresión (*).

Consideremos el siguiente cambio de coordenadas

$$\psi(X_1, X_2, X_3) = (u, v, w) \text{ con } u = X_1,\quad v = X_2,\quad W = X_3 - g(X_1, X_2)$$

Sea $X' = \psi_* X$, entonces $X'|_{W^C}$ es:

$X'(u, v, 0) = [d\psi]\Psi^{-1}(x_1, x_2, g(x_1, x_2))\ \ X(x_1, x_2, g(x_1, x_2))$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2) & -\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, x_2) & 1 \end{bmatrix} X(x_1, x_2, g(x_1, x_2))$$

$$= \{2b + \sum_{j=1}^{s'} a_{2j+1} (u^2+v^2)^j\} V_{12} +$$

$$+ \{ \sum_{j=1}^{s} b_{2j+1} (u^2 + v^2)^j\} (R_1 + R_2) + Q_s (u, v, g(u, v))$$

por (**)

Entonces el campo $X(u, v, 0)$ está determinado por el primer b_{2j+1} no nulo pues; si $r^2 = u^2 + v^2$ y $\theta = \text{tag } v/u$

$$X|_{W^C}(r, \theta) = ' \{2b + \sum_{j=1}^{s'} a_{2j+1} r^{2j}\} \frac{\partial}{\partial \theta}$$
$$+ \{ \sum_{j=1}^{s'} b_{2j+1} r^{2j+1} \} \frac{\partial}{\partial r}$$
$$+ R(r, \theta) \text{ con } j_s (R(r, \theta) \} = 0$$

Si para todo s, $b_{2j+r} = 0$, para todo $j \leqslant \frac{s-1}{2}$, X no es finitamente determinado pues $r = 0$, es decir, un centro.

En caso contrario tenemos un foco:

$\dot{r} > 0$ si el primer b_{2j+1} es positivo, por lo tanto foco repulsor

$\dot{r} < 0$ si el primer b_{2j+1} es negativo, por lo tanto foco atractor.

Luego $X(u, v, w)$ está topológicamente determinado por (λ, b_{2j+1}) con b_{2j+1} el primer b_ℓ no nulo.

2. ESTRATIFICACION Y ESTABILIDAD DEBIL

Denotaremos por G^3 el espacio de gérmenes de campos vectoriales X en R^3 con $X(0) = 0$; $j_k (X) (0)$ el k-jet de X en 0, y las aplicaciones canónicas:

$j_k : G^3 \to J_k^3$ (espacio de k-jet); $X \leftrightarrow j_k (X) (0)$

$\pi_{\ell k} : J_\ell^3 \to J_k^3$; $j_\ell (X) (0) \leftrightarrow j_k (X) (0)$ si $\ell \geqslant k$

Recordemos que un conjunto se dice semialgebraico si está definido por igualdades y desigualdades polinomiales. Su codimensión está dada por la parte algebraica [2].

2.1. Proposición: Existe una estratificación de G^3 inducida por la Singularidad Centro-Foco definida en 1.1.

$G^3 : = V_0 \supset V_1 \supset V_3 \supset \ldots \supset V_{2j-1} \supset V_{2j+1} \supset \ldots$

donde

i) $V_1 = \{X \epsilon G^3$ / Existe φ: $(R^3, 0)$ 1-jet de difeomorfismo tal que $j_1 (\varphi_* X) (0) = j_1 (L) (0)$ con $L = 2bV_{12} + \lambda R_3$; $b \neq 0, \lambda \neq 0]$ es una subvariedad diferenciable de codimensión 1 de G^3.

ii) V_{2j-1} es un conjunto semialgebraico localmente cerrado de codimensión j en G^3; $j = 1, 2, \ldots$

iii) $V_{2j-1} \setminus V_{2j+1}$ es una subvariedad diferenciable localmente cerrada de codimensión j en G^3; $j = 1, 2, \ldots$

iv) Todo $X \epsilon V_{2j-1} \setminus V_{2j+1}$ es $Z^j_{\text{sgn}(\lambda), \text{sgn}(b_{2j+1})}$ – C^0-Estable donde $Z^j_{\epsilon, \delta} = ' \{X \epsilon V_{2j-1} \setminus V_{2j+1}$ / X en la forma Normal 1.2 tiene $\text{sgn}(b_{2j+1}) = \delta$, $\text{sgn}(\lambda) = \epsilon$ con b_{2j+1} el primer b_ℓ no nulo$\}$

Demostración: Construyamos primeramente los conjuntos semialgebraicos V_{2j-1} de codimensión j en G^3, $j = 1, 2, \ldots$

Sea $M_3 : = \{A \epsilon M(3, R)$ / A

$$= \begin{bmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \} \text{ Subespacio de } M(3, \mathbb{R}),$$

matrices reales de 3×3.

$W_1 : = \{A \epsilon M_3 / b \neq 0, \lambda \neq 0, a = 0\}$ es un conjunto semialgebraico de codimensión 1 en M_3.

$W_1^* : = GL(3, \mathbb{R})_* W_1 : = \{PAP^{-1} \epsilon M(3, \mathbb{R}) / A \epsilon W_1, P \epsilon W_1, P \epsilon GL (3, \mathbb{R}) \}$

Recordemos que $W \subset V \subset E$, E espacio vectorial, entonces por definición W es semialgebraico en V si W es semialgebraico en $<V>$, el subespacio generado por V en E.

Observemos que si V semialgebraico de codim k en E esto implica que $<V>$ es de codim k en E.

Luego considerando que $<GL(3, R)_* E_{pq}> = M(3, R)$ donde E_{pq} es la matriz (e_{ij}) con $e_{ij} = 0$ si $(i, j) \neq (p, q)$ y $e_{ij} = 1$ si $(i, j) = (p, q)$, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} W_1^* & \hookrightarrow & M_3^* & \hookrightarrow & <M_3^*> = M(3, R) \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ W_1 & \hookrightarrow & M_3 & & \end{array}$$

donde las flechas verticales son la acción del grupo GL $(3, \mathbb{R})$.

Entonces por Teorema de Tarski-Seidenberg [3], W_1^* es un conjunto semialgebraico de codimensión 1 en $M(3, R)$, ya que W_1 es semialgebraico de codimensión 1 en M_3. Usando la identificación canónica $M(3, R) \to J_1^3$

$A = (a_{ij}) \mapsto j_1 (\ell (A)) (0)$ donde $\ell (A) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_j \frac{\partial}{\partial x_i}$

tenemos que $\partial(W_1^*)$ es un conjunto semialgebraico de codimensión 1 en J_1^3, llamémoslo $\bar{V}_1$. Entonces podemos definir $V_1 := j_1^{-1} (\bar{V}_1)$ que es semialgebraico de codimensión 1 en G^3, por definición de semialgebraicos en G^3. Es decir

$V_1 := \{X \epsilon G^3$ / Existe $\varphi: (R^3, 0) \circlearrowleft$ 1-jet de difeomorfismo tal que $j_1(\varphi_* X) (0) = j_1 (L) (0)$ con $L = 2bV_{12} + \lambda R_3, b \neq 0, \lambda \neq 0\}$

Por 1.2, para todo $X \epsilon V_1$, existe $\psi: (R^3, 0) \circlearrowleft C^\alpha$-difeomorfismo tal que $\psi_* X$ está en la forma Normal (*). Veamos $\bar{V}_1$ en J_3^3, es decir definamos $\bar{V}_3 = \pi_{3,1}^{-1} (\bar{V}_1)$ semialgebraico de codimensión 1 en J_3^3, y considerando la forma normal podemos suponer

$\bar{V}_3 = \{\alpha \epsilon J_3^3$ / Existe $\varphi: (R^3, 0) \circlearrowleft$ 3-jet de difeomorfismo tal que $\varphi_* \alpha = [2b + a_3 (x_1^2 + x_2^2)] V_{12} + b_3 (x_1^2 + x_2^2) (R_1 + R_2) + [\lambda + c_3 (x_1^2 + x_2^2)] R_3\}$

Sea $\bar{\bar{V}}_3 = \{\alpha \epsilon \bar{V}_3 / b_3 = 0\}$, es un conjunto semialgebraico de codimensión 1 en $\bar{V}_3$ y por consecuencia conjunto semialgebraico de codimensión 2 en J_3^3.

Entonces definimos $V_3 = j_3^{-1} (\bar{\bar{V}}_3)$ que es un conjunto semialgebraico y de codimensión 2 en G^3.

Inductivamente podemos definir; $\bar{V}_{2j-1} = \pi_{2j-1,2j-3}^{-1} (\bar{V}_{2j-3})$ $\bar{V}_{2j-1} = \{\alpha \epsilon J_{2j-1}^3$ / Existe $\varphi: (R^3, 0) \circlearrowleft (2j-1)$-jet de difeomorfismo tal que

$$\varphi_* \alpha = [2b + \sum_{i=1}^{j-1} a_{2i+1} (x_1^2 + x_2^2)^i] V_{12} + [b_{2j-1} (x_1^2 + x_2^2)^j] (R_1 + R_2) + [\lambda + \sum_{i=1}^{j-1} C_{2i+1} (x_1^2 + x_2^2)^i] R_3\}$$

semialgebraico de codimensión $j-1$ en J_{2j-1}^3 $\bar{\bar{V}}_{2j-1} = \{\alpha \epsilon \bar{V}_{2j-1} / b_{2j-1} = 0\}$ semialgebraico de codimensión 1 en $\bar{V}_{2j-1}$ y por consecuencia, conjunto semialgebraico de codimensión j en J_{2j-1}^3, luego $V_{2j-1} = j_{2j-1}^{-1} (\bar{\bar{V}}_{2j-1})$ semialgebraico de codimensión j en G^3.

Sea $P_3 = \{p \epsilon R[x]$ / grad $p = 3\}$ y definamos las aplicaciones continuas:

$\sigma: M(3, R) \to P_3$, $\sigma(A) = \det (A - xI)$ y $\tau: P_3 \to \mathbb{C}^3$, $\tau(p) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ donde $p(\lambda_i) = 0$ $i = 1, 2, 3$.

Sea $H = H_a \cap H_c$ con $H_a = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \epsilon \mathbb{C}^3 / \lambda_1 \lambda_3 \neq 0\}$ abierto en $\mathbb{C}^3$ y $H_c = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \epsilon \mathbb{C}^3 / \lambda_1 = \bar{\lambda}_2, \mathrm{Re}(\lambda_1) = \mathrm{Im}(\lambda_3) = 0\}$ cerrado en $\mathbb{C}^3$ es decir H es localmente cerrado en $\mathbb{C}^3$, luego $W_1^* = (\tau \circ \sigma)^{-1}(H)$ es localmente cerrado en $M(3, R)$ por lo tanto $\bar{V}_1$ es localmente cerrado en J_1^3 por consecuencia V_1 es localmente cerrado en G^3. $\bar{V}_3 = \pi_{3,1}^{-1} (\bar{V}_1)$ localmente cerrado en J_3^3 y $\bar{\bar{V}}_3$ es cerrado en $\bar{V}_3$, luego $\bar{\bar{V}}_3$ localmente cerrado en J_3^3. Entonces

$V_3 = J_3^{-1}(\bar{\bar{V}}_3)$ es localmente cerrado en G^3.

Continuando el proceso obtenemos ii).

Para demostrar que V_1 es una subvariedad diferenciable de condimensión 1 en G^3, basta demostrar (por definición) que W_1^* es subvariedad diferenciable de condimensión 1 en $M(3,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^9$.

Sea $f: M(3,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ con $f(A) = (a_0, a_1, a_2)$ donde $a_0 = -\det A$, $a_1 = C_{11} + C_{22} + C_{33}$, $a_2 = -\mathrm{tr}\, A$ y C_{ii} = cofactor de $A = (a_{ij})$. f es diferenciable $W_1^* = f^{-1}(S)$ donde $S = \{(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3 / a_1 > 0, a_2 \neq 0$ y $a_0 = a_1 a_2\}$

Es evidente que S es una subvariedad de codim 1 en $\mathbb{R}^3$. Sean $V = \{(x, y, z) | y > 0, z \neq 0\}$ abierto de $\mathbb{R}^3$ y $g: V \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ difeomorfismo con $g(x, y, z) = (x, y, x - yz)$.

$\therefore g(V \cap S) \subset \mathbb{R} \times \{0\}$

Sea $U = f^{-1}(V)$ abierto en $\mathbb{R}^9$

W_1^* es subvariedad diferenciable de codimensión 1 en $\mathbb{R}^9$ ssi $f \cap S$ ssi 0 es un valor regular de $\phi = \pi \circ g \circ f$ donde $\pi: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$((x, y), z) \mapsto z$

Sean $(x_1, x_2, \ldots, x_9)$ las coordenadas de $\mathbb{R}^9$. Si $d\phi(A) \equiv 0$ $\forall A \in W_1^* \cap U$, se tiene que $(\frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi}{\partial x_3})(A) = 2[(\mathrm{tr}\, A)^2 + a_1] = 0$ y esto es una contradicción pues tr $A \neq 0$ y $a_1 > 0$ si $A \in W_1^*$, es decir ϕ tiene rango máximo. Luego, tenemos i)

iii) es trivial después de i) e ii).

Para demostrar iv) supongamos X, $Y \in Z_{\epsilon,\delta}^j$ $\epsilon = \pm 1$ $\delta = \pm 1$. Por Teorema [2] basta construir una conjugación local entre las variedades centrales de X e Y.

Por la Proposición 1.3, sabemos que existe un cambio de coordenadas $\psi: (R^3, 0) \circlearrowleft$ tal que

$$X^C = \psi_* X \mid_{W_X^c} = [2b + \sum_{i=1}^{\infty} a_{2i+1} (x^2 + y^2)^i] V_{12} + [\sum_{i=j}^{\infty} b_{2i+1} (x^2 + y^2)^i] (R_1 + R_2)$$

Análogamente para Y

$$Y^C = \varphi_* Y \mid_{W_Y^c} = [2b' + \sum_{i=1}^{\infty} a'_{2i+1} (u^2 + v^2)^i] V_{12} + [\sum_{i=j}^{\infty} b'_{2i+1} (u^2 + v^2)^i] (R_1 + R_2)$$

Se tiene que

$$\langle X^C (x, y), (x, y) \rangle = \langle (\dot{x}, \dot{y}), (x, y) \rangle =$$

$$= b_{2j+1} (x^2 + y^2)^{j+1} + b_{2j+3} (x^2, y^2)^{j+2} + \ldots$$

Luego $\exists \epsilon > 0$ tal que

$\langle X^C (x, y), (x, y) \rangle > 0$ si $b_{2j+1} > 0$ y < 0 si $b_{2j+1} < 0$ $\forall (x, Y) \in S_\epsilon^1$

Análogamente para Y^C.

Sean U y V vecindades del origen, $S^1_\epsilon \subset U \cap V$ de tal forma que $\varphi Y^C(-t_{(x,y)}, \varphi_{X^C}(t_{(x,y)}, (x,y))) \in V$, $\forall (x,y) \in U \setminus \{(0,0)\}$ donde $t_{(x,y)}$ es tal que $\varphi_{X^C}(t_{(x,y)}, (x,y)) \in S^1_\epsilon$.

Sea $h: U \to V$ definido por $h(0,0) = (0,0)$ y $h(x,y) = \varphi_{Y^C}(-t_{(x,y)}, \varphi_{X^C}(t_{(x,y)}, (x,y))$ si $(x,y) \neq (0,0)$. Para probar que h es una C^o-conjugación entre X^C e Y^C, basta demostrar que h es continua en el origen.

Sin pérdida de generalidad supongamos $b_{2j+1} < 0$ por la compacidad de S^1_ϵ y transversalidad de Y^C con S^1_ϵ, dado $\epsilon > 0$ $\exists t_\epsilon$ tal que $\| \varphi_{Y^C}(t, (u,v)) \| \leqslant \epsilon$ si $t \geqslant t_\epsilon$. Además existe $\delta > 0$ tal que si $\| (x,y) \| < \delta$ y $\varphi_{X^C}(-t, (x,y)) \in S^1_\epsilon$, entonces $t \geqslant t_\epsilon$.

3. BIFURCACIONES

Usaremos el concepto de C^o-C^∞ – desdoblamento versal para singularidades explicitado en [2].

3.1. Teorema. En las notaciones del punto 2 sea $X \in V_{2N-1} \setminus V_{2N+1}$ tal que existe $\varphi: (R^3, 0) \circlearrowleft C^\infty$-difeomorfismo con

$$\varphi_* X = [2b + \sum_{i=1}^{k} a_{2i+1}(x^2+y^2)^i] V_{12} +$$

$$+ [\sum_{i=N}^{k} b_{2i+1}(x^2+y^2)^i](R_1 + R_2)$$

$$+ [\lambda + \sum_{i=1}^{k} C_{2i+1}(x^2+y^2)^i] R_3 + P_k(x, y, z);\ k \leqslant N$$

Entonces $(R^N \times R^3, \pi, R^N, 0, Y)$ es un $C^o - C^\infty$ –desdoblamiento versal para $(R^3, 0, X)$, donde

$$Y(\mu_1, \ldots, \mu_N, x, y, z) = 2bV_{12} + \sigma \left[(x^2+y^2)^N\right.$$

$$\left.+ \mu_1 (x^2+y^2)^{N-1} + \quad + \ldots + \mu_N\right](R_1 + R_2) + \epsilon R_3$$

con σ = signo de b_{2N+1} y ϵ = signo de λ

Demostración: Si $(R^N \times R^2, \pi, R^N, 0, \widetilde{X}^C)$ es $C^o - C^\infty$ –desdoblamiento versal para $(R^2, 0, X^C)$ entonces $(R^N \times R^3, \pi, R^N, 0, \widetilde{X}^C - z\frac{\partial}{\partial z})$ es $C^o - C^\infty$ –desdoblamiento versal para $(R^3, 0, X)$ con

$$X = X^C - z\frac{\partial}{\partial z}$$

por Teorema [2] pág. 158.

Si $X^C = [2b + \sum_{i=1}^{k} a_{2i+1}(x^2+y^2)^i] V_{12} +$

$+ [\sum_{i=N} b_{2i+1}(x^2+y^2)^i](R_1 + R_2) + Q_k(x, y, g(x,b))$

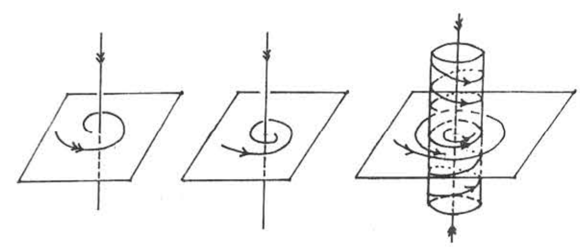
es el campo $\varphi_* X|_{W^C}$, entonces por [2] pág. 176 se tiene que un $C^o - C^\infty$ –desdoblamiento versal de X está dado por

$$\widetilde{X}^C(\mu_1, \ldots, \mu_N, x, y) = 2bV_{12} + \sigma\left[(x^2+y^2)^N +\right.$$

$$\left.+ \mu_1(x^2+y^2)^{N-1} + \ldots + \mu_N\right](R_1 + R_2)$$

con σ = signo de b_{2N+1}.

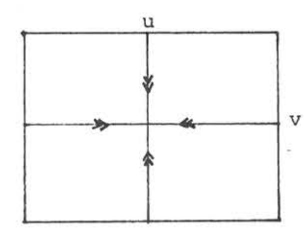
3.2. Debido a 3.1 el análisis geométrico de las bifurcaciones a n-parámetros es esencialmente el realizado en [1] y [4], en la variedad central de dimensión dos. Notemos que aparece, por ejemplo, a 1-parámetro un cilindro invariante que colapsa al eje hiperbólico y luego desaparece. Es decir, en un modelo;



$\mu > 0$ $\quad\quad$ $\mu = 0$ $\quad\quad$ $\mu < 0$

Las órbitas en el cilindro invariante atractor, que aparece en $\mu < 0$, tienen como ω-límite la órbita periódica que aparece por Hopf en la variedad central.

Observemos además que la transformación de Poincaré de la órbita periódica hiperbólica en la variedad central es:



donde el eje u se puede tomar en el cilindro invariante. Las ecuaciones de este cilindro no revisten mayor importancia desde el punto de vista cualitativo y para codimensión uno se obtienen del 2-jet.

Análogamente a lo ocurrido en [4], a n-parámetros obtenemos una bifurcación de Hopf generalizada que es esencialmente el colapso de n cilindros concéntricos invariantes, cuyas ecuaciones se obtienen en el n-jet.

REFERENCIAS

[1] J. Billeke-R. Bamón: *Clasificación de Singularidades de Campos Vectoriales en el plano. Parte I.* Contribuciones Científicas y Tecnológicas Nº 56, 1982.

[2] F. Dumortier: *Singularities of vector fields.* Monografías del IMPA, Nº 32, 1978.

[3] F. Takens: *Singularities of vector fields.* IHES, Nº 43, 1974.

[4] F. Takens: *Unfoldings of certain singularities of vector fields: Generalized Hopf Bifurcations.* Journal of differential equations Nº 14, 1973.