

# Solución positiva minimal de $-\operatorname{div} A(x, \operatorname{grad} u) + b(x, u) = \lambda g(x, u)$ Vía iteraciones monótonas<sup>\*o</sup>

M. A. Astaburuaga E.\*\* y J. Figueroa N.\*\*

**RESUMEN:** Se considera la ecuación elíptica no lineal  $F(u) = -\operatorname{div} A(x, \operatorname{grad} u) + b(x, u) = \lambda g(x, u)$  con condiciones de frontera de tipo Dirichlet. El campo de vectores  $A$  y las funciones  $b$  y  $g$  son monótonas con respecto a la segunda variable. Si  $\lambda$  es menor que el primer autovvalor del problema linealizado, las iteraciones de Newton dadas por:  $v_0 = 0$  y  $F(v_{n+1}) = \lambda[g(x, v_n) + g_u(x, v_n)(v_{n+1} - v_n)]$  convergen uniformemente a la solución positiva minimal. Si  $g$  es convexa (Cónvexa) entonces la convergencia es desde abajo (arriba). La Concavidad implica unicidad.

**SUMMARY:** We consider the nonlinear elliptic equation  $F(u) = -\operatorname{div} A(x, \operatorname{grad} u) + b(x, u) = \lambda g(x, u)$  with Dirichlet boundary conditions. The vector field  $A$  and the functions  $b$  and  $g$  are monotone with respect to the second variable. Then, if  $\lambda$  is less than the first eigenvalue of the linearized problem, the Newton iterates given by  $v_0 = 0$  and  $F(v_{n+1}) = \lambda[g(x, v_n) + g_u(x, v_n)(v_{n+1} - v_n)]$  converge uniformly to the minimal positive solution. If  $g$  is convex (concave), then the convergence is from below (above). Concavity implies uniqueness.

## I. INTRODUCCION

El punto de partida de este artículo es la ecuación de difusión estacionaria

$$Lu = -\operatorname{div} (A(x) \operatorname{grad} u) = \lambda g(x, u)$$

con condiciones de Dirichlet en la frontera,  $g$  denota una función monótona creciente con respecto a  $u$ ,  $A(x)$  es una matriz positiva definida de modo que el operador  $L$ , es lineal uniformemente elíptico. En el año 1967 H. Keller y D. Cohen inician el estudio de esta clase de problemas no

lineales, usando métodos iterativos. Se define iteraciones de Picard  $u_n(x)$  por  $u_0 = 0$  y  $L u_{n+1} = \lambda g(x, u_n)$  y se demuestra que la existencia de solución positiva es equivalente a que estas iteraciones converjan uniformemente de manera creciente a la solución positiva minimal del problema. En el mismo año, D. Cohen define iteraciones de Newton por la fórmula.

$$L v_{n+1} = \lambda (g(x, v_n) + g_u(x, v_n)(v_{n+1} - v_n))$$

y se estudia la convergencia de éstas a una solución del problema en el caso que  $g$  es cóncava con respecto de  $u$ . Entretanto surgen nuevos resultados debidos a H. Amann, D. Cohen, H. Keller, T. Laetsch, J.W. Mooney, D.H. Sattinger, L.F. Shampine y otros.

Posteriormente J. Weyer inicia el estudio de un problema similar pero doblemente no lineal del tipo

$$F(u) = -\operatorname{div} A(x, \operatorname{grad} u) + b(x, u) = \lambda g(x, u) \quad (1)$$

con condiciones de Dirichlet en la frontera.  $A$  denota un campo de vectores monótono con respecto a la segunda variable y  $b, g$  son funciones monótonas crecientes en la variable  $u$ .

Se define iteraciones de Picard:

$$u_0 = 0 \quad \text{y} \quad F(u_{n+1}) = \lambda g(x, u_n) \quad (2)$$

y J. Weyer obtiene resultados análogos a los de Keller y Cohen. En este artículo se estudia las iteraciones de Newton y se obtiene resultados para el problema (1) análogos a los de D. Cohen, y además resultados sobre unicidad de soluciones que permiten obtener resultados especiales de unicidad para ecuaciones del tipo  $Lu = \lambda h(x, u)$  donde  $h$  no es necesariamente monótona con respecto de  $u$ .

Estos métodos iterativos son útiles para obtener resultados de existencia y unicidad y también estimaciones *a priori* de los valores admisibles del parámetro  $\lambda$ . El problema (1) se reemplaza por una sucesión de problemas no lineales, por lo tanto para obtener soluciones numéricas uno preferiría tener un método directo; sin embargo existen situaciones en que las condiciones numéricas de (1) son singulares y los métodos directos fallan mientras que las iteraciones llevan a la solución. Un ejemplo donde esto sucede puede verse en Astaburuaga, Figueroa, Weyer [6].

\* Manuscrito revisado y aprobado en forma definitiva en marzo de 1984.

\*\* Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación, Facultad de Ciencia, Universidad de Santiago de Chile (USACH).

<sup>o</sup> Clasificación Temática AMS (1980) 35J25-35J65-35P30-47H15-65J15.

A continuación fijaremos la notación y las hipótesis bajo las cuales desarrollaremos este trabajo.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , denota un dominio abierto, convexo acotado con frontera de clase  $C^3$ .

$$L(u) = -\operatorname{div}(C(x) \operatorname{grad} u(x)) + C_0(x)u$$

denota un operador diferencial lineal de segundo orden uniformemente elíptico.

$C(x) = (C_{ij}(x))$  es una matriz  $n \times n$  con coeficientes de clase  $C^1$  en  $\bar{\Omega}$  y simétrica estrictamente positiva.

$C_0(x)$  es continua y no negativa en  $\bar{\Omega}$ .

$K(x, p): \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , es de clase  $C^1$ , y es monótona en  $\mathbb{R}^n$  con respecto a  $p$  para cada  $x$  fijo en  $\bar{\Omega}$ , es decir

$$\langle K(x, p) - K(x, \bar{p}), p - \bar{p} \rangle \geq 0$$

$b(x, u)$  y  $g(x, u)$  son funciones de  $\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con las propiedades siguientes  $b$  es continua, y monótona creciente con respecto a  $u$  para  $x$  fijo en  $\bar{\Omega}$ ,  $g$  es de clase  $C^2$  para  $u \geq 0$   $g(x, 0) > 0$  en  $\bar{\Omega}$ , y  $g_u(x, u) > 0$  para  $u \geq 0$ .

$$N(u) = -\operatorname{div} K(x, \operatorname{grad} u).$$

Definimos el operador  $F$  como  $F(u) = Lu + N(u) + b(x, u)$  con dominio  $D(F)$  donde

$$D(F) = \{u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \mid u = 0 \text{ en } \partial\Omega\}$$

finalmente suponemos que  $F(0) \leq 0$  bajo estas hipótesis Weyer demostró en [6] las siguientes propiedades del operador  $F$

- i)  $u \in D(F)$ ,  $F(u) > 0$  puntualmente en  $\Omega \Rightarrow u > 0$  en  $\Omega$
- ii)  $u, v \in D(F)$ ,  $F(u) > F(v)$  puntualmente en  $\Omega \Rightarrow u > v$  en  $\Omega$

## II. PRINCIPIOS DE COMPARACION E ITERACIONES DE NEWTON

En [4] se demuestra un lema de positividad para el operador  $L$  el cual permite en [3] definir las iteraciones de Newton y obtener las propiedades requeridas para sus soluciones. En este artículo necesitamos una versión no lineal de este resultado.

**Lema 1.** (Lema de monotonicidad).

Sea  $r(x) > 0$

y continua en  $\bar{\Omega}$ ; sean  $u, v \in D(F)$

sea  $\mu_1\{r(x)\}$  el primer autovalor del problema

$$\begin{cases} L\varphi = \mu r(x)\varphi & \text{en } \Omega \\ \varphi = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Entonces si:

- a)  $0 < \lambda < \mu_1\{r(x)\}$
- b)  $F(u) - \lambda r(x)u > F(u) - \lambda r(x)v$  en  $\Omega$

se tiene que  $u > v$  en  $\Omega$

**Demostración:** Sea  $f(x) = F(u)(x) - F(v)(x) - \lambda r(x)(u(x) - v(x))$  entonces  $f(x) \in C^0(\bar{\Omega})$  y  $f(x) > 0$  en  $\Omega$

Descomponemos  $F$  y tenemos

$$F(u) - F(v) = L(u-v) + N(u) - N(v) + b(x, u) - b(x, v)$$

Si llamamos  $w = u-v$  tenemos

$$L(w) - \lambda r(x)w = q(x)$$

donde

$$q(x) = f(x) - [N(u) - N(v)] - [b(x, u) - b(x, v)]$$

como  $\lambda < \mu_1\{r(x)\}$   $w$  minimiza el funcional

$$\begin{aligned} J(z) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j} C_{ij}(x) \frac{\partial z}{\partial X_i} \frac{\partial z}{\partial X_j} \right. \\ &\quad \left. + C_0(x)z^2 - \lambda r(x)z^2 - 2q(x)z \right\} dx \end{aligned}$$

en la clase de funciones  $C_p^1$  que se anulan en  $\partial\Omega$  (ver[4])

Como  $w \in C^2$  entonces  $|w| \in C_p^1$

luego

$$\begin{aligned} J(w) - J(|w|) &= \int_{\Omega} \{f(x)(|w| - w) + \\ &\quad (b(x, u) - b(x, v))(w - |w|)\} dx \\ &\quad + \int_{\Omega} [K(x, \operatorname{grad} u) - K(x, \operatorname{grad} v)] \cdot \\ &\quad \operatorname{grad}(w - |w|) dx \end{aligned}$$

Si para algún  $x_0 \in \Omega$   $w(x_0) < 0$ ,

$\Omega^- = \{x \in \Omega \mid w(x) < 0\}$  tiene medida positiva.

$$w - |w| = 2(u - v) < 0 \text{ en } \Omega^-$$

$$\text{en } \Omega \setminus \Omega^- \quad w - |w| = 0.$$

Usando la monotonicidad de  $b$  y  $K$  se concluye

$$J(w) - J(|w|) > 0 \text{ contradiciendo la minimalidad de } w \\ \therefore w \geq 0 \text{ en } \Omega$$

Luego

$$F(u) - F(v) = \lambda r(x)w + f(x) > 0 \text{ en } \Omega$$

$$\therefore u > v \text{ en } \Omega$$

**Lema 2.** Si  $u \in D(F)$  y  $F(u) - \lambda r(x)u > 0$  en  $\Omega$  entonces  $u > 0$  en  $\Omega$  si  $0 < \lambda < \mu_1\{r(x)\}$ . Este es un corolario del lema 1 ya que por hipótesis  $F(0) \leq 0$ .

Para definir las iteraciones es necesario una hipótesis de regularidad similar a la hecha en [6] que permite usar los principios de comparación establecidos en los lemas 1 y 2.

**Hipótesis H.**

1) El operador  $F$  admite una extensión maximal monótona univaluada.

$\tilde{F} : D(\tilde{F}) \subset L^p(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$  donde  $1/p + 1/q = 1$  tal que cada solución  $v(x)$  de  $\tilde{F}(v) = \lambda g(x, v)$  satisfaga  $v \in D(F)$ ;

2) Si  $\lambda < \mu_1\{r(x)\}$  entonces las iteraciones Newton

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ F(v_n) = \lambda [g(x, v_{n-1}) + g_u(x, v_{n-1})(v_n - v_{n-1})] ; n \geq 1 \end{cases}$$

están bien definidas.

OBS. Condiciones suficientes están dadas en [6]

**Lema 3.** Bajo las hipótesis ya mencionadas, si suponemos además que  $g_{uu}(x, u) < 0$ ,  $y$   $0 < \lambda < \mu_1\{g_u(x, 0)\}$  entonces las iteraciones de Newton

$$(*) \begin{cases} v_0 = 0 \\ F(v_n) = \lambda [g(x, v_{n-1}) + g_u(x, v_{n-1})(v_n - v_{n-1})] ; n \geq 1 \end{cases}$$

satisfacen  $v_n > 0 \forall n \geq 1$

**Demostración:** Por inducción en  $n$  Si  $n = 1$  queremos encontrar  $v_1 \in D(F)$ ,  $v_1 > 0$  solución del problema

$$F(v_1) = \lambda [g(x, 0) + g_u(x, 0)v_1] \text{ como } 0 < \lambda < \mu_1\{g_u(x, 0)\}$$

el problema  $F(v_1) - \lambda g_u(x, 0)v_1 = \lambda [g(x, 0)]$  admite solución  $V_1 \in D(F)$  ya que  $g(x, 0) \in C^0(\bar{\Omega})$  como  $g(x, 0) > 0$  lema 1 implica  $v_1 > 0$ . Si suponemos que existen  $v_r \in D(F)$  para  $r \leq n-1$ ,  $v_1 > 0$  que satisfacen (\*) queremos encontrar  $v_n \in D(F)$ ,  $v_n > 0$  tal que  $F(v_n) - \lambda g_u(x, v_{n-1})v_n = \lambda [g(x, v_{n-1}) - g_u(x, v_{n-1})v_{n-1}] = h(x)$  debido a que  $v_{n-1} > 0$  y  $g$  es cóncava  $h(x) > 0$  y  $h(x) \in C^0(\bar{\Omega})$ .  $g_u(x, v_{n-1})$  es positiva y continua en  $\bar{\Omega}$

$$\text{además } \mu_1\{g_u(x, 0)\} < \mu_1\{g_u(x, v_{n-1})\}$$

luego existe  $v_n > 0$ ,  $v_n \in D(F)$  que satisface (\*)

**Lema 4.** Bajo las hipótesis del Lema 3, las iteraciones de Newton  $V_n$  satisfacen

$$v_{n+1} \leq v_n \text{ en } \Omega \text{ para } n = 1, 2, \dots$$

**Demostración:** Usando el hecho de que  $g(x, v_n) \leq g(x, v_{n-1}) + g_u(x, v_{n-1})(v_n - v_{n-1})$  obtenemos de (\*)  $F(v_n) \geq \lambda g(x, v_n)$   $F(v_{n+1}) = \lambda [g(x, v_n) + g_u(x, v_n)(v_{n+1} - v_n)]$  luego

$$F(v_n) - F(v_{n+1}) \geq \lambda g_u(x, v_n)(v_n - v_{n+1})$$

$$\text{y puesto que } 0 < \lambda \mu_1\{g_u(x, 0)\} < \mu_1\{g_u(x, v_n)\}$$

obtenemos  $v_n \geq v_{n+1}$ ,

**Teorema 1.** Si  $F, g$  satisfacen las hipótesis de Lemas 3 y 4, las  $v_n(x)$  convergen uniformemente y de manera decreciente a una solución positiva de  $F(u) = \lambda g(x, u)$  para  $0 < \lambda < \mu_1\{g_u(x, 0)\}$

**Demostración.** Por lema 4 tenemos que  $v_n(x) \geq v_{n+1}(x) > 0$  luego existe  $v(x) \geq 0$  tal que  $v_n(x)$  converge puntualmente a  $v(x)$ . Como  $v_n(x) \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  y  $v_n \leq v_1$  obtenemos por lema de Fatou que  $v_n \rightarrow v$  en  $L^p(\Omega)$ . Por razones similares tenemos  $g(x, v_n)$  converge a  $g(x, v)$  puntualmente  $g(x, v_n) \leq g(x, v_1)$ ,  $g(x, v_n) \in C^0(\bar{\Omega})$  luego  $g(x, v_n) \rightarrow g(x, v)$  en  $L^q(\Omega)$ . Si llamamos  $d_n(x) = g_u(x, v_n)(v_{n+1} - v_n)$  entonces  $|d_n(x)| \leq g_u(x, v_0)(v_n - v_{n+1})$  luego  $d_n \rightarrow 0$  en  $L^q(\Omega)$  Ahora, si  $\tilde{F}$  es la extensión monótona maximal de  $F$   $\tilde{F}$  es un operador cerrado y como:

$$v_n \rightarrow v \text{ en } L^q(\Omega)$$

$$\tilde{F}(v_n) = F(v_n) \rightarrow \lambda g(x, v) \text{ en } L^q(\Omega)$$

tenemos  $v \in D(\tilde{F})$ ,  $\tilde{F}(v) = \lambda g(x, v)$  por (H).  $v \in D(F)$  y  $F(v) = \lambda g(x, v) \therefore v \in C^0(\bar{\Omega})$  y luego  $v_n \rightarrow v$  uniformemente. como  $v \geq 0$   $\lambda g(x, v) > 0$ , luego

$$F(v) > 0 \therefore v > 0 \text{ en } \Omega.$$

**Teorema 2.** Si en lema 3 reemplazamos la hipótesis  $g_{uu} < 0$  por la siguiente hipótesis:  $g_{uu} < 0$ , y  $g_u \leq r(x) \in C^0(\bar{\Omega})$ ; obtenemos lo siguiente: Si  $0 < \lambda < \mu_1\{r(x)\}$  las iteraciones de Newton  $v_n$  definidas como en lema 3 satisfacen (\*)  $u_n < v_n < v_{n+1} < u_-$ ;  $v_n \rightarrow u_-$  uniformemente donde  $u_-$  es la solución positiva minimal y  $u_n$  denota las iteraciones de Picard definidas en [6]

**Demostración.** En [6] se demuestra que  $u_n < u_{n+1}$  y que  $u_n \rightarrow u_-$  uniformemente, luego si demostramos que para  $n \geq 1$ :  $u_n < v_n < v_{n+1} < u_-$ , tendremos  $v_n \rightarrow u_-$  unif. el hecho que  $v_n < v_{n+1} < u_-$  se demuestra en forma análoga a la demostración dada en [5]; usando en este caso la propiedad  $\mu_1\{g_u(x, v_n)\} > \mu_1\{r(x)\}$  y el lema 1. Demostraremos por inducción  $u_n < v_n$ ,  $n \geq 1$   $F(v_1) - F(u_1) = \lambda v_1 g_u(x, 0) > 0$  luego  $v_1 > u_1$

Si suponemos  $v_n > u_n$

$$F(v_{n+1}) - F(u_{n+1}) = \lambda [g(x, v_n) - g(x, u_n) + g_u(x, v_n)(v_{n+1} - v_n)]$$

$$> \lambda g_u(x, v_n)(v_{n+1} - v_n) > 0$$

$$\text{luego } v_{n+1} > u_{n+1}$$

### III. ALGUNOS RESULTADOS SOBRE UNICIDAD.

**Lema 5.** Si bajo las hipótesis de lema 3, reemplazamos la condición  $g_{uu} < 0$  por la condición " $g_u \leq r(x) \in C^0(\bar{\Omega})$ " entonces si  $0 < \lambda < \mu_1\{r(x)\}$  la solución es única, no es necesario suponer concavidad o convexidad.

**Dem.**  $g(x, u) \leq g(x, 0) + r(x)u$ ; en [6] se demostró que existe  $u$ , solución positiva minimal si

$$0 < \lambda < \mu_1\{r(x)\}$$

Si  $v$  es otra solución positiva, entonces  $v \geq u$  y:

$$F(v) - F(u) = \lambda [g(x, v) - g(x, u)] \leq \lambda r(x)(v - u)$$

por Lema 1.  $v \leq u \therefore v \equiv u$

*Corolario:* Bajo las hipótesis de lema 3, podemos tomar  $r(x) = g_u(x, Q)$ ; luego por lema 5 sigue unicidad si  $0 < \lambda < \mu_1$ ,  $d_u(x, 0)$

*Corolario.* Si las funciones  $b$  y  $g$  dependen sólo en  $u$ , y si  $N(u) \equiv 0$  entonces el problema se transforma en

$$F(u) = L + b(u) = \lambda g(u)$$

Si  $g'(u) \leq r$  y  $b'(u) \geq b'(0)$  entonces la solución es única si

$$0 < \lambda g'(0) \leq \mu_1 + b'(0)$$

$$\mu_1 \text{ es el primer autovalor de } \begin{cases} Lh = \mu h \text{ en } \Omega \\ h = 0 \text{ en } \partial\Omega \end{cases}$$

*Dem.*  $F(u) = \lambda g(u)$  es equivalente con  $Lu + b'(0)u + [b(u) - b'(0)u] = \lambda g(u)$  que escribimos en la forma

$$L_1 u + b_1(u) = \lambda g(u)$$

$$L_1 u = L_u + b'(0) u$$

$$b_1(u) = b(u) - b'(0) u$$

por lema 5, tenemos solución única si  $0 < \lambda < \bar{\mu}_1$ ,  $\bar{\mu}_1$  es el primer autovalor de  $L_1$   $h = \mu g'(0) h$ .

$$\text{pero } \bar{\mu}_2 = \frac{(\mu_1 + b'(0))}{g'(0)}$$

#### IV. CONCLUSIONES Y COMENTARIOS

Este trabajo y [2], [6] generalizan a problemas doblemente no lineales los trabajos de Keller y Cohen [4] y Cohen [3];

Actualmente está en vías de desarrollo el estudio de soluciones múltiples, bifurcación, subsoluciones y supersoluciones, estabilidad de soluciones; Por el momento nos hemos limitado a obtener resultados para valores de  $\lambda$  controlados por los autovalores del operador  $L$ . Ejemplos han sido tratados en [2]. En numerosos artículos hay ejemplos interesantes semi-no lineales que pueden transformarse mediante perturbaciones en doblemente no lineales del tipo estudiado, y aplicarles estos resultados.

#### REFERENCIAS

- (1) AMANN H., *Existence of multiple solutions for nonlinear elliptic boundary problems*, Indiana Univ. Math. J. 21 (1972), 925-935.
- (2) ASTABURUAGA, M.A., FIGUEROA, J.; WEYER, J., *Newton Iterates for Positive Solutions of a Class of Nonlinear Eigenvalue Problems*. (Por aparecer en Numerical Methods of Bifurcation Problems, Birkhauser-Verlag).
- (3) COHEN D.S., *Positive solutions of a class of nonlinear eigenvalue problems*, J. Math. Mech 17 (1967), 209-215.
- (4) KELLER H.G. & COHEN D.S., *Some positive problems suggested by nonlinear heat generation*, J. Math. Mech. 16 (1967), 1361-1367.
- (5) MOONEY J.W. & ROACH G.F., *Iterative bounds for the stable solutions of convex nonlinear boundary value problems*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh (A) 76 (1976), 81-94.
- (6) WEYER J., *Picard iterates for positive solutions of a class of nonlinear eigenvalue problems*, J. Appl. Math. Phys., to appear