

modelo analítico para predecir el comportamiento de mechas arteriales*

César E. Rosas Z.**

RESUMEN: Un análisis matemático para predecir el comportamiento de mechas arteriales, para uso en tubos de calor, es presentado. El estudio está basado en el análisis del problema de penetración capilar bajo las consideraciones de flujo laminar paralelo de un fluido Newtoniano incomprensible en un conducto circular, lo cual conduce a una ecuación diferencial no-lineal cuya integración se obtuvo numéricamente. El análisis es primero restringido a mechas arteriales inclinadas, respecto a la horizontal, trabajando en un medio ambiente de un-g y bajo el efecto adverso de una aceleración constante; enseguida éste es generalizado a mechas arteriales que trabajan horizontalmente, o en un medio ambiente de cero-g.

Las soluciones de la ecuación gobernante, la cual depende de los parámetros Ω , M y N , son presentadas para diferentes situaciones físicas y comparadas con soluciones correspondientes obtenidas a partir de modelos conocidos para el problema de penetración capilar.

Finalmente, la aplicabilidad del análisis a mechas arteriales de sección no-circular es discutida.

SUMMARY: A mathematical analysis to predict the performance of artery wicks for use in heat pipes is presented. The study is based on the analysis of the capillary penetration problem under the assumptions of laminar parallel flow of an incompressible Newtonian fluid in a circular conduit, which leads to a non-linear differential equation requiring numerical integra-

* Manuscrito revisado y aprobado en forma definitiva en noviembre de 1983.

** Departamento de Ingeniería Mecánica, Facultad de Ingeniería, Universidad de Santiago de Chile (USACH).

tion. The analysis is first restricted to inclined artery wicks working in an one-g environment and under the adverse effect of a constant acceleration. Then it is generalized to horizontal artery wicks, i.e., to artery wicks working in a zero-g environment.

Solutions of the governing equation, which depend on the parameters Ω , M and N , are presented for different physical situations and are compared with corresponding solutions obtained from known models for the capillary penetration problem.

Finally, the applicability of the analysis to artery wicks with a non-circular cross-section is discussed.

1. INTRODUCCION

Desde que los tubos de calor atrajeron la atención pública en 1964, cuando Grover y sus colaboradores, en el laboratorio científico de Los Alamos, Estados Unidos de Norteamérica, demostraron su efectividad como dispositivos de alta capacidad de transmisión de calor¹, éstos han sido desarrollados como importantes elementos de control térmico para variadas aplicaciones aeroespaciales y terrestres.

Un tubo de calor es una estructura autocontenedora de sus componentes, la cual posee una conductancia térmica mucho mayor que aquella factible de ser obtenida por medio de un trozo homogéneo de cualquier metal conocido. Esta propiedad es lograda por evaporación, en su interior, de un líquido de trabajo, transporte del vapor a otra zona del tubo, condensación de éste y retorno del condensado a la zona de evaporización a través de una mecha de estructura porosa apropiada.

La figura 1 muestra un tubo de calor en su forma más simple; en ella se indican las principales partes estructurales y funcionales.

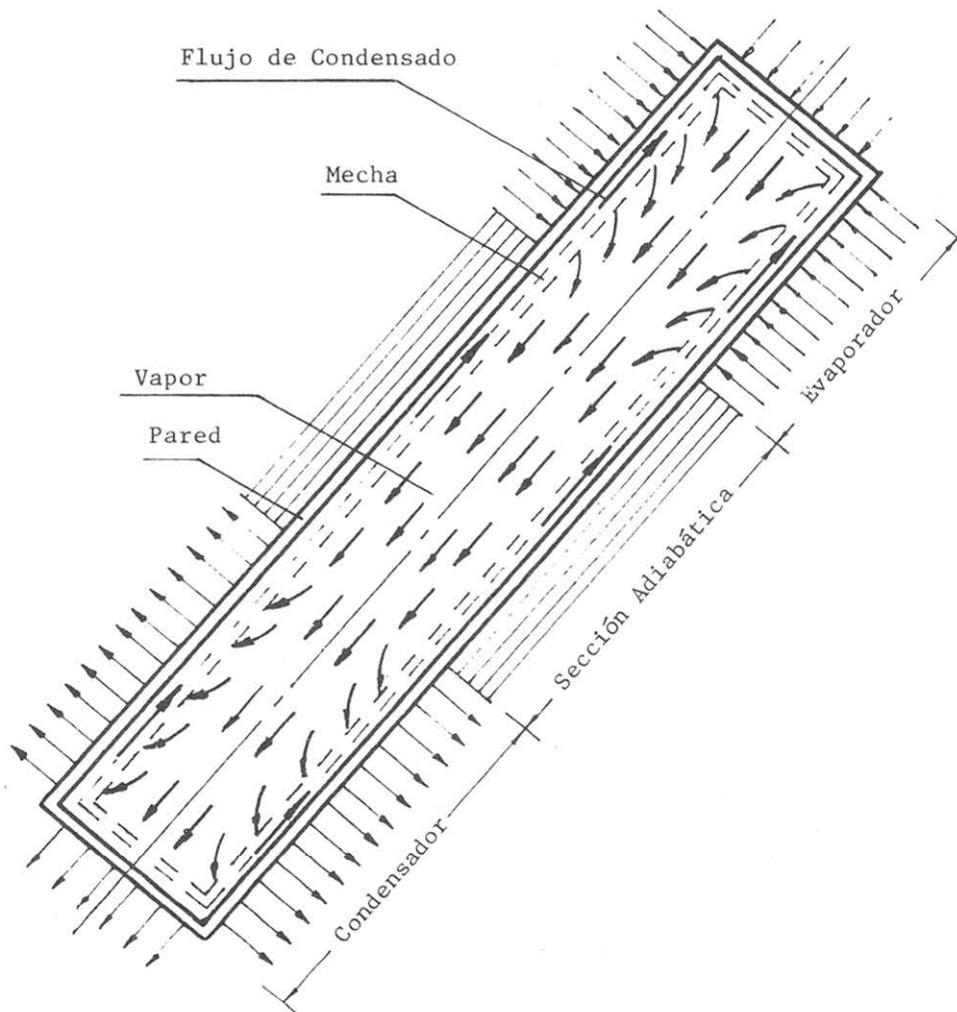


Figura 1. Configuración Esquemática de un Tubo de Calor.

El comportamiento de un tubo de calor está asociado, principalmente, con la capacidad de transporte de calor, lo cual a su vez depende de la capacidad de bombeo de la estructura porosa interna, o mecha. A fin de incrementar la capacidad de transporte de líquido de trabajo, y consecuentemente la capacidad de transporte de calor, importantes avances han sido logrados mediante el uso de variados tipos de mechas.

Katzoff² encontró que una arteria, o tubo de pequeño diámetro, para el transporte de líquido de trabajo a través de la estructura porosa, lo cual constituye una mecha arterial, hace posible el diseño de tubos de calor de alta capacidad.

Los tubos de calor con mechas arteriales tienen un potencial de alta capacidad de transporte de calor y alta conductancia térmica, por lo que son particularmente atrayentes para trabajar en el rango ambiental de temperaturas, situación en la cual los aspectos antes señalados normalmente presentan bajos valores.

Las ventajas relativas de las mechas arteriales están basadas en la existencia de la arteria, cuyo diámetro hidráulico es grande comparado con el tamaño de los poros de la estructura circundante, y en la combinación de bajas pérdidas de energía por fricción con altas fuerzas de origen capilar.

Para que la arteria trabaje eficientemente es necesario que ésta permanezca saturada de líquido; esto no es problema en un medio ambiental de cero-g, pero sí puede serlo en un medio de un-g, cuando por algún efecto externo la arteria es vaciada total o parcialmente y las fuerzas asociadas a la tensión superficial son incapaces de superar las fuerzas debidas a la acción del campo gravitacional. Por lo tanto, en tubos de calor que poseen alguna forma de mechas arteriales es necesario asegurar que ante la eventualidad de un vaciado, total o parcial, de la arteria, ésta se llene automáticamente de líquido de trabajo.

En la literatura técnica (^{3, 4, 5}) existen numerosos trabajos en relación a la predicción del comportamiento de mechas arteriales. Sin embargo, prácticamente todos ellos consideran el análisis de éstas orientando a su uso en tubos de calor horizontales, u operando en un medio ambiente de cero-g solamente. Además en el análisis, en general, está ausente la consideración de efectos perturbadores que inducen el vaciamiento total o parcial de la arteria.

Considerando el estado del arte acerca de este problema, y que existen variadas aplicaciones terrestres de interés para tubos de calor con mechas arteriales, el presente trabajo tiene como objetivo principal desarrollar un criterio de análisis para predecir el comportamiento de dicho tipo de mechas en tubos de calor que trabajen con un ángulo de inclinación variable respecto a la horizontal, y bajo el efecto adverso de una aceleración constante como causante de un eventual vaciamiento de la arteria.

2. ANALISIS

2.1. Descripción General de una Mecha Arterial

La forma más común de mechas arteriales es aquella de un conducto de sección circular. Este tipo de arteria puede ser compuesta por un solo tubo, o por un arreglo de varios tubos de pequeño diámetro colocados dentro de otro diámetro mayor, tal como se muestra en la figura 2.1.

Un tubo de calor con mecha arterial requiere de una estructura porosa exterior a la arteria, con el objeto de coleccionar el líquido de trabajo en el condensador y distribuirlo circunferencialmente para su posterior evaporación en el evaporador. Por lo tanto, ni evaporización ni condensación tiene lugar en la arteria, la cual tiene como única función el transporte de condensado entre el condensador y el evaporador del tubo de calor.

Las paredes de la arteria pueden ser permeables o impermeables. Para tubos de calor que trabajan horizontalmente, o en un medio de cero-g, es ventajoso el uso de arterias con paredes porosas, puesto que en este caso las fuerzas capilares dependen inversamente del tamaño de sus poros; mientras que si el tubo de calor trabaja en forma inclinada, en un medio ambiente de

un-g, dichas fuerzas dependen del radio interno de la arteria, independientemente de la estructura de la pared.

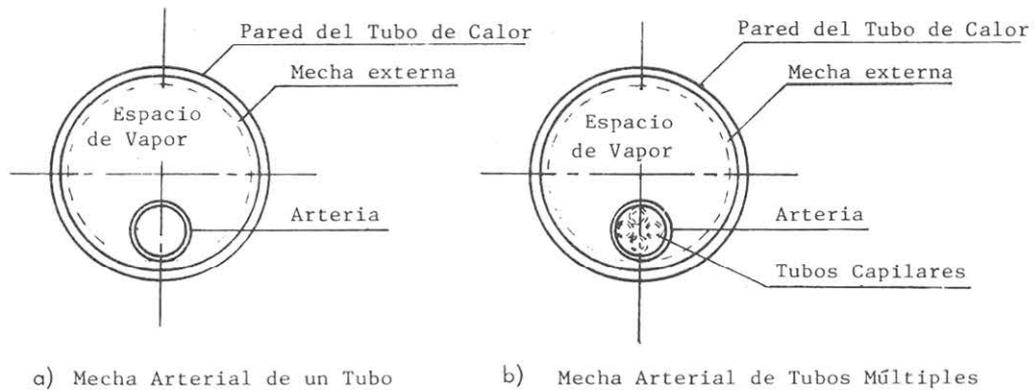


Figura 2.1. Arreglos de Mechas Arteriales Circulares.

2.2. Formulación del Problema

Para llevar a cabo el análisis para predecir el comportamiento de mechas arteriales se considera como modelo físico un tubo capilar con ambos extremos abiertos y en una posición tal que su eje axial forma un ángulo α con respecto a la horizontal. La atención es centrada en el proceso de flujo desarrollado por la acción de bombeo capilar dentro del tubo cuando el extremo inferior de éste, en el instante $t = 0$, es puesto en contacto con una superficie líquida. La figura 2.2 muestra la situación física como función del tiempo.

Con el objeto de representar la situación física en un modelo matemático conveniente, las siguientes restricciones son asumidas:

1. La arteria es un conducto recto, de sección circular y de pared rígida e impermeable.
2. El líquido de trabajo es isotérmico, incompresible y Newtoniano con viscosidad constante.
3. El flujo es laminar y paralelo.

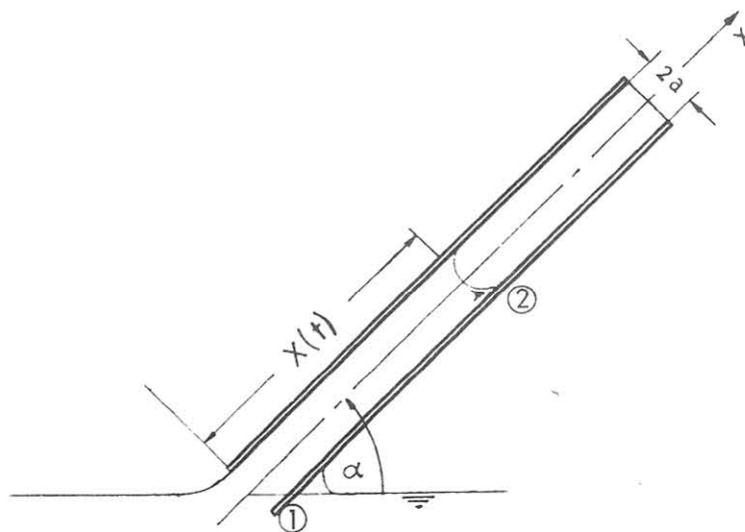


Figura 2.2. Diagrama de Definición.

2.2.1. Proceso de Bombeo Capilar

El proceso de bombeo capilar desarrollado dentro de la arteria, o proceso de penetración de ésta por el líquido de trabajo, es de principal importancia en el análisis del comportamiento de la mecha, porque su conocimiento permite predecir las limitaciones de un tubo de calor.

Para que un tubo de calor opere debe satisfacerse la relación

$$\Delta P_{c\text{máx}} \geq \Delta P_1 + \Delta P_v + \Delta P_g, \quad (1)$$

la cual es conocida como la condición límite de bombeo, y donde $\Delta P_{c\text{máx}}$ = máxima diferencia de presión desarrollada en el proceso de bombeo capilar, ΔP_1 = caída de presión en la fase líquida, ΔP_v = caída de presión en la fase vapor, y ΔP_g = diferencia de presión debida al efecto del campo gravitacional.

De la ecuación (1), en la situación límite se tiene

$$\Delta P_1 = \Delta P_c - \Delta P_v - \Delta P_g, \quad (2)$$

la cual representa una condición necesaria para que un tubo de calor opere apropiadamente.

La diferencia de presión desarrollada en el proceso de bombeo capilar, o diferencia de presión existente en la interfase líquido-vapor, puede ser descrita por la ecuación de Young-Laplace,

$$\Delta P_c = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (3)$$

donde γ es la tensión superficial y R_1 y R_2 son los radios principales de curvatura de la interfase líquido-vapor.

Si el tubo es de sección circular, como lo es en el presente caso, R_1 y R_2 son iguales y la ecuación (3) queda

$$\Delta P_c = \frac{2 \gamma}{R}. \quad (4)$$

El radio de curvatura en un tubo de sección circular, puede ser expresado como una función del diámetro del tubo, $D = 2a$, y el ángulo de contacto líquido-sólido como sigue

$$R = \frac{D}{2 \cos \theta} = \frac{a}{\cos \theta}. \quad (5)$$

Sustitución de esta ecuación en la (4) da

$$\Delta P_c = \frac{2 \gamma}{a} \cos \theta. \quad (6)$$

Si el líquido moja perfectamente las paredes del tubo, es decir si $\theta = 0^\circ$, la ecuación (6) queda

$$\Delta P_c = \frac{2 \gamma}{a} \quad (7)$$

En tubos de calor que trabajan en los rangos de baja y media temperatura la velocidad del flujo de vapor es muy pequeña, por lo que la caída de presión en la fase vapor puede ser despreciada, es decir,

$$\Delta P_v \approx 0. \quad (8)$$

La diferencia de presión debida a la altura estática instantánea de la columna de líquido, en general puede ser positiva, negativa o cero, dependiendo de las disposiciones relativas del evaporador y condensador del tubo de calor. De la figura 2.2 esta diferencia de presión está dada por

$$\Delta P_g = \rho g x(t) \text{ sen } \alpha, \quad (9)$$

donde ρ = densidad del líquido, g = aceleración de gravedad, $x(t)$ = longitud instantánea de la columna de líquido, y α = ángulo de inclinación con respecto a la horizontal.

Sustituyendo de las ecuaciones (6), (8) y (9) en la (2) da

$$\Delta P_1 = \frac{2 \gamma}{a} \cos \theta - \rho g x(t) \text{ sen } \alpha. \quad (10)$$

Por otro lado se tiene que la caída de presión en la fase líquida depende del movimiento de la columna líquida, es decir, del proceso de penetración capilar.

Este problema ha sido estudiado por varios investigadores, entre otros se cuenta los trabajos de Washburn⁶, Bosanquet⁷, Szequely *et al.*⁸ y Letelier *et al.*⁹. De éstos, el trabajo más reciente y riguroso es el debido a Letelier *et al.*, por lo que es tomado como base para el análisis de este proceso.

Las ecuaciones gobernantes para este problema son las de Navier-Stokes, en las cuales no se considera el efecto del campo gravitacional ya que éste es incluido a través de la ecuación (2), y de continuidad, las cuales bajo las restricciones asumidas, en coordenadas cilíndricas, son, respectivamente,

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_1}{\partial x} - Ng = \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad (11)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_1}{\partial r} = 0, \text{ y} \quad (12)$$

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 0, \quad (13)$$

donde

$$u(a, t) = 0 \quad (14)$$

es la condición de borde de no deslizamiento, P_1 = presión del fluido, N = número que representa la magnitud de la aceleración adversa expresada como función de g , u = velocidad axial local en la posición radial r , a = radio del conducto, t = tiempo, $\nu = \mu/\rho$ = viscosidad cinemática, μ = viscosidad dinámica.

La ecuación de continuidad (13) establece que, en flujo paralelo, u puede ser función de r y t solamente. Consecuentemente, las ecuaciones de Momentum (11) y (12) sugieren que $\partial P_1/\partial x$ no puede ser función de x ni de r . Además

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_1}{\partial x} - Ng = \phi \quad (15)$$

e integrando

$$-\frac{P_1}{\rho} = (\phi + Ng) x + C \quad (16)$$

donde ϕ , Ng y C son funciones del tiempo solamente. De esto se deduce que en estado

estacionario P_1 varía linealmente con x en cualquier instante.

La función ϕ representa la llamada función forzante del sistema. Con esta terminología la ecuación (11) puede ser escrita en la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \phi. \quad (17)$$

Con el objeto de hacer el análisis de aplicación general es conveniente trabajar en términos de variables adimensionales, como sigue

$$u^* = \frac{u}{U_o}; \quad t^* = \frac{t}{T_o}; \quad r^* = \frac{r}{a}; \quad x^* = \frac{x}{L_o} \quad (18)$$

donde U_o , L_o y T_o representan valores de referencia disponibles de la velocidad, longitud y tiempo, respectivamente, y los asteriscos denotan cantidades adimensionales.

Las ecuaciones (17) y (14) pueden ser transformadas en sus contrapartes adimensionales, las cuales son, respectivamente,

$$\Omega \frac{\partial u^*}{\partial t^*} - \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right) = \phi^* \quad (19)$$

y

$$u^*(1, t^*) = 0 \quad (20)$$

donde

$$\phi^* = \phi \frac{a^2 \rho}{\mu U_o} \quad (21)$$

ϕ^* representa la forma adimensional de la función forzante, y

$$\Omega = \frac{a^2 \rho}{\mu T_o} \quad (22)$$

denota un número de Reynolds temporal, el cual mide la importancia relativa de las fuerzas de inercia respecto a las viscosas.

Con las ecuaciones (19) a (22) establecidas no existe necesidad de mantener una notación especial para las cantidades adimensionales, por lo que los asteriscos pueden ser omitidos, y en lo sucesivo los mismos símbolos son usados para las cantidades dimensionales como para sus contrapartes adimensionales.

Siguiendo el método de Letelier y Leutheusser¹⁰ la solución de la ecuación (19) sujeta a la condición de borde (20) puede ser expresada por una expansión en serie de la forma

$$A(1 - r^2) + \frac{\Omega}{4^2} \frac{dA}{dt} (1 - r^4) + \frac{\Omega^2}{4^2 \cdot 6^2} \frac{d^2 A}{dt^2} (1 - r^6) + \dots = u \quad (22)$$

en la cual A es una función del tiempo dada por

$$A + \frac{\Omega}{2^2} \frac{dA}{dt} + \frac{\Omega^2}{2^2 \cdot 4^2} \frac{d^2 A}{dt^2} + \dots = \frac{\phi}{4} \quad (23)$$

La forma unidimensional equivalente de la ecuación (19) es obtenida promediando dicha ecuación sobre la sección transversal del conducto circular con la ayuda del operador

$$2 \int_0^1 (\dots) r \, dr. \quad (24)$$

Así,

$$\Omega \frac{dU}{dt} + 2 \tau_a = \phi \quad (25)$$

donde

$$\tau_a = \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=1} \quad (26)$$

representa el esfuerzo de corte adimensional en la pared, y U es la velocidad media adimensional del flujo. Combinando las ecuaciones (13), (16) y (17) se obtiene la ecuación generalizada unidimensional del movimiento,

$$8U + \frac{4}{3} \Omega \frac{dU}{dt} - \frac{\Omega^2}{144} \frac{d^2U}{dt^2} + \dots = \phi \quad (27)$$

La función forzante aplicable para este proceso puede ser formulada escribiendo la forma dimensional, dada por la ecuación (15), como la ecuación de diferencias

$$\phi = -\frac{1}{\rho} \frac{\Delta P_1}{\Delta x} - Ng = -\frac{1}{\rho} \frac{P_2 - P_1}{x_2 - x_1} - Ng. \quad (28)$$

donde los subíndices 1 y 2 se refieren a los puntos extremos de la columna de líquido.

Definiendo

$$x_2 - x_1 = X \quad (29)$$

y combinando las ecuaciones (10) y (27) se obtiene

$$\phi = \frac{2 \gamma \cos \theta}{\rho a X} - g(\sin \alpha + N), \quad (30)$$

cuya contraparte adimensional, de acuerdo a la ecuación (21), es

$$\phi^* = \frac{a^2 \rho g / \mu}{U_o} \left\{ \frac{2 \gamma \cos \theta / (a \rho g)}{X} - (\sin \alpha + N) \right\} \quad (31)$$

Esta ecuación sugiere las siguientes expresiones para los valores de referencia aplicables de U_o , L_o y $T_o = L_o/U_o$.

$$U_o = \frac{a^2 \rho g}{\mu}, \quad (32)$$

$$L_o = \frac{2 \gamma \cos \theta}{a \rho g}, \quad (33)$$

$$T_o = \frac{2 \mu \gamma \cos \theta}{a^3 \rho^2 g^2}. \quad (34)$$

La ecuación (33) representa el límite del proceso de levantamiento capilar, es decir, la máxima altura estática obtenible.

Sustitución de las ecuaciones (32), (33) y (34) en (31), omitiendo el asterisco, produce

$$\phi = \frac{1}{X} (\text{sen } \alpha + N) . \quad (35)$$

El número de Reynolds temporal, definido por la ecuación (22), queda expresada por

$$\Omega = \frac{a^5 \rho^3 g^2}{2 \mu^2 \gamma \cos \theta} . \quad (36)$$

Con la relación entre la velocidad media del flujo y la longitud de la columna de líquido, definida por

$$U = \frac{dX}{dt} , \quad (37)$$

y la combinación de las ecuaciones (27) y (35), resulta la siguiente expresión

$$1 = X(\text{sen } \alpha + N + 8 \frac{dX}{dt} + \frac{4}{3} \Omega \frac{d^2X}{dt^2} - \frac{\Omega^2}{144} \frac{d^3X}{dt^3} + \dots) \quad (38)$$

la cual es la ecuación diferencial unidimensional que describe el proceso de bombeo, o levantamiento, capilar.

Como fue establecido anteriormente, el problema de penetración capilar, el cual corresponde al proceso de bombeo capilar de interés en este trabajo, ha sido estudiado por varios investigadores. De éstos, los modelos más conocidos pueden ser derivados del presente modelo. Así si en el presente modelo los efectos temporales son despreciados, es decir si $\Omega = 0$, la ecuación (38) se reduce a

$$1 = X (\text{sen } \alpha + N + 8 \frac{dX}{dt}) , \quad (39)$$

expresión que corresponde al modelo encontrado por Washburn⁶.

Una mejor aproximación, respecto al modelo de Washburn, fue encontrada por Bosanquet⁷ e, independientemente, por Szekely *et al.*⁸. Sin embargo, mientras estas aproximaciones toman en cuenta los efectos de inercia, ellos emplean la aproximación cuasipermanente, para la fricción, basada en la Ley de Hagen-Poiseuille para estado estacionario. En la presente terminología estos modelos quedan expresados por

$$1 = X (\text{sen } \alpha + N + 8 \frac{dX}{dt} + \Omega \frac{d^2X}{dt^2}) . \quad (40)$$

La comparación de esta ecuación con la (38) identifica la incorrección del coeficiente del término de segundo orden y la ausencia de términos de orden superior a 2 como errores resultantes.

En el proceso de bombeo capilar el aspecto más importante para la predicción del comportamiento de la mecha arterial es la determinación del flujo másico de líquido, el cual está definido por

$$\dot{m} = \rho Q , \quad (41)$$

donde Q = flujo volumétrico de líquido.

Como el flujo de líquido en la arteria es asumido ser isotérmico, a causa del vapor circundante, la densidad del líquido es constante. Entonces por continuidad

$$Q = UA , \quad (42)$$

donde U es la velocidad media del flujo, y $A = \pi a^2$ es el área de la sección transversal interna de la arteria. Así, el flujo másico queda expresado por

$$\dot{m} = \rho U \pi a^2 . \quad (43)$$

Esta ecuación muestra que el flujo másico de líquido depende sólo de la variable U , la cual puede ser determinada como una función de la longitud X de la columna de líquido dentro de la arteria, resolviendo la ecuación (38), o (39) y (40) para $U = dX/dt$. De éstas la (39), correspondiente al modelo de Washburn, puede ser resuelta directamente, dando

$$U = \frac{dX}{dt} = \frac{1}{8} \left[\frac{1}{X} - (\sin \alpha + N) \right]. \quad (44)$$

Las soluciones de las ecuaciones diferenciales (38) y (40), dada su característica no-lineal, son encontradas numéricamente haciendo uso de una subrutina computacional llamada SYSIM (Systems Simulation)¹¹, la cual emplea la técnica de integración de Runge-Kutta de cuarto orden.

2.3. Generalización del Análisis a Mechas Arteriales Horizontales

El análisis presentado en las secciones anteriores ha sido desarrollado para predecir el comportamiento de mechas arteriales trabajando en forma inclinada respecto a la horizontal, en un medio ambiente de un-g. Este análisis, en general, también es aplicable al caso de mechas arteriales horizontales, o trabajando en un medio ambiente de cero-g, pero como fue establecido al principio, en este caso específico es más ventajoso el empleo de arterias de paredes permeables o porosas en vez de las arterias de paredes impermeables consideradas en el análisis previo. La razón para ello es que en las arterias horizontales de paredes porosas el proceso de bombeo capilar depende del tamaño de los poros de la pared, y no del tamaño de la arteria. En virtud de este hecho es posible diseñar arterias de mayor diámetro, y por lo tanto de mayor capacidad de transporte de líquido.

El radio, y por lo tanto el diámetro, de una arteria horizontal de paredes porosas está definido bajo el criterio de que ante un eventual vaciamiento, total o parcial, la arteria debe tener la habilidad de rellenarse automáticamente de líquido. Así, por ejemplo, Johnson y Saasky³, para arterias con ambos extremos abiertos, recomiendan determinar su radio por

$$\rho g(h_s + a) = \frac{\gamma}{a} , \quad (45)$$

y para arterias con ambos extremos cerrados, por

$$\rho g(h_s + 2 a) = \frac{2\gamma}{a} \quad (46)$$

donde h_s = altura de la mecha que conecta la arteria con el baño de líquido, tal como se muestra en la figura 2.3.

El análisis que permite predecir el comportamiento de mechas arteriales inclinadas puede ser fácilmente extendido a mechas arteriales horizontales, considerando que para este caso la ecuación (6) queda expresada por

$$\Delta P_c = \frac{2\gamma}{r_c} \cos \Theta, \quad (47)$$

donde r_c = radio medio de los poros de la pared, y definiendo

$$M = \frac{r_c}{a} < 1, \quad (48)$$

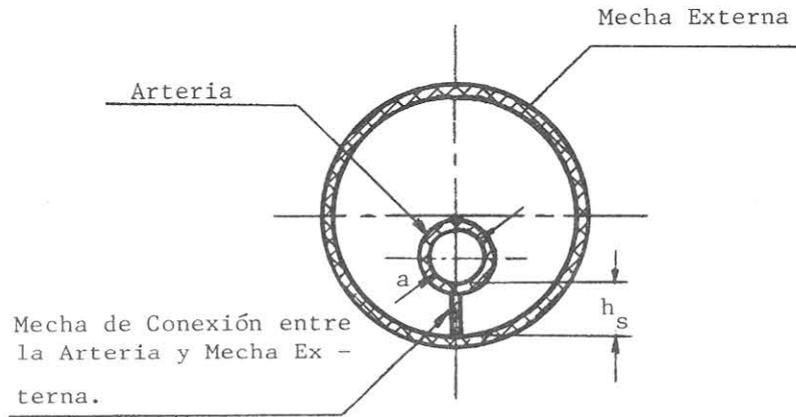


Figura 2.3. Esquema de Definición para Mecha Arterial Horizontal.

parámetro que es la razón entre el radio medio de los poros de la pared y el radio interno de la arteria.

El reemplazo de la ecuación (48) en (47) produce

$$\Delta P_c = \frac{2 \gamma}{M a} \cos \theta. \quad (49)$$

con esta ecuación y haciendo $\alpha = 0$, el análisis de la sección 2.2 permite encontrar

$$1 = MX \left(N + 8 \frac{dX}{dt} + \frac{4}{3} \Omega \frac{d^2X}{dt^2} - \frac{\Omega^2}{144} \frac{d^3X}{dt^3} + \dots \right) \quad (50)$$

$$1 = MX \left(N + 8 \frac{dX}{dt} \right) \quad (51)$$

y

$$1 = MX \left(N + 8 \frac{dX}{dt} + \Omega \frac{d^2X}{dt^2} \right) \quad (52)$$

como contrapartes de las ecuaciones (38), (39) y (40), respectivamente.

Obviamente, las soluciones de estas ecuaciones son encontradas empleando las mismas técnicas descritas en la sección anterior.

2.4. Aplicación del Análisis a Arterias de Sección Transversal No-Circular

El análisis desarrollado en el presente trabajo ha sido basado en la consideración de una arteria de sección transversal circular. Existen, por supuesto, otras formas de secciones transversales, las cuales también son frecuentemente usadas en el diseño de mechas arteriales, como por ejemplo las rectangulares y elípticas.

En esta sección se discute la aplicabilidad del presente análisis a arterias de secciones transversales de dichas formas.

Usualmente la teoría desarrollada para flujo viscoso en conductos circulares es extendida a flujo en conductos de sección transversal no-circular por medio de la aproximación del radio hidráulico, la cual es definida por

$$R_h = \frac{A}{P} \quad (53)$$

donde A = Área de la sección transversal y P = perímetro mojado.

En general, la aproximación del radio hidráulico es mucho mejor para flujo turbulento que para flujo laminar, este último de interés en el presente trabajo. La razón de este hecho está basada en la presencia de un flujo turbulento secundario, lo cual implica la existencia de velocidades medias no-nulas en el plano de la sección transversal del conducto. El flujo secundario arrastra al flujo principal hacia las esquinas produciendo una distribución de la velocidad axial de forma similar a la de la sección transversal, lo cual a su vez produce un esfuerzo de corte en la pared aproximadamente constante.

En flujo laminar en conductos rectos de sección no-circular no se producen flujos secundarios, y en conductos de sección rectangular o triangular, por ejemplo, el esfuerzo de corte en la pared varía considerablemente, siendo mayor en las proximidades de los puntos medios de los lados y cero en las esquinas.

Para flujo laminar en conductos de sección no-circular White¹² presenta una correlación gráfica del error entre la aproximación del radio hidráulico y el radio hidráulico exacto, basado en soluciones exactas, y la razón entre las dos principales dimensiones de diferentes formas de sección transversal. La figura 2.4 muestra tales gráficos para los casos de secciones transversales rectangulares y elípticas.

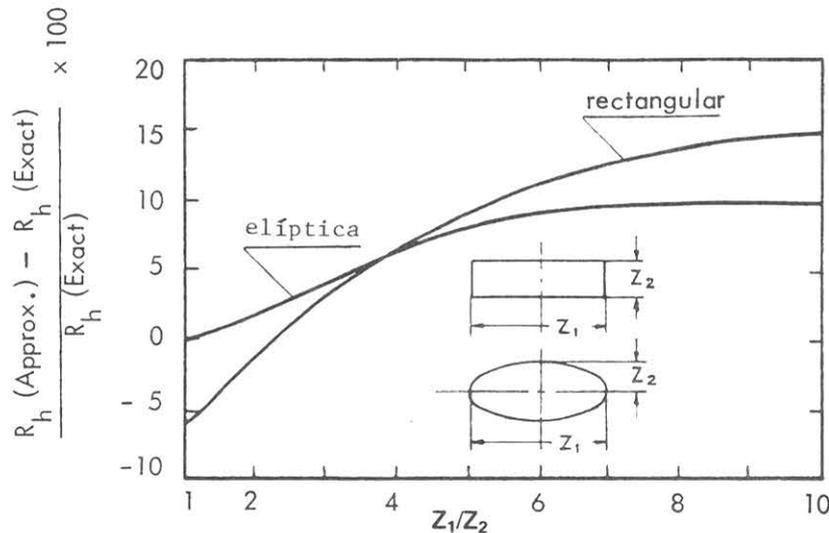


Figura 2.4. Error entre la aproximación del Radio Hidráulico Exacto como Función de la Razón de Forma.

De estos gráficos puede ser concluido que el presente análisis puede ser aplicado, usando la aproximación del radio hidráulico, a mechas arteriales de sección transversal rectangular con una razón Z_1/Z_2 alrededor de 2,25, y de sección transversal ligeramente elíptica. Esto es porque bajo estas condiciones, el error entre la aproximación del radio hidráulico y el radio hidráulico exacto es mínimo.

Otro método para aplicar la teoría desarrollada para flujo laminar en conductos circulares a flujo en conductos de secciones transversales no-circulares es el uso del coeficiente de forma. McAdams¹³ presenta una ecuación para la caída de presión, para flujo laminar de conductos de sección transversal rectangular basada en el coeficiente de forma representado gráficamente en la figura 2.5.

La ecuación es

$$-\frac{dP_1}{dx} = \frac{4 \mu U}{Z_1 Z_2 \phi_c} \quad (54)$$

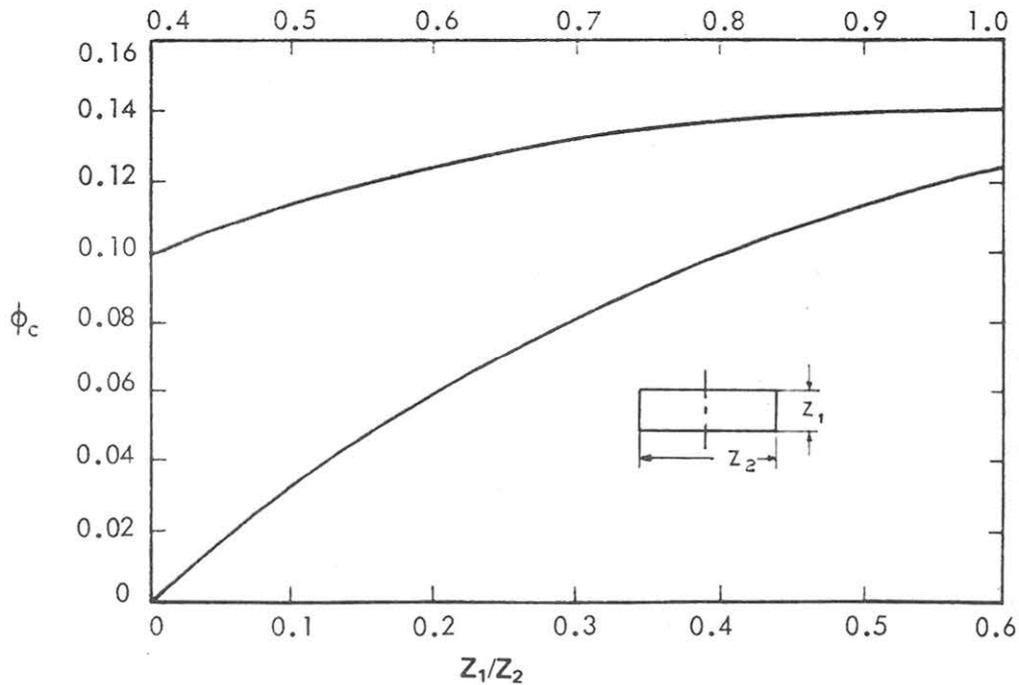


Figura 2.5. Coeficiente de Razón de Forma.

donde ϕ_c es el coeficiente de forma, Z_1 y Z_2 son los lados del rectángulo.

Comparando la ecuación (54) con la Ley de Hagen Poiseuille para flujo laminar en un conducto circular de radio interno a , la relación entre el coeficiente de forma ϕ_c y el radio del conducto está dado por

$$a = \sqrt{2 Z_1 Z_2 \phi_c} \quad (55)$$

Por lo tanto el presente análisis puede ser aplicado a mechas arteriales de sección transversal rectangular simplemente reemplazando el radio interno a de acuerdo a la ecuación (55).

3. RESULTADOS

Los resultados correspondientes a las soluciones, en términos de la velocidad media del flujo $U = dX^*/dt$, de las ecuaciones gobernantes para mechas arteriales inclinadas y horizontales son presentados en esta sección.

3.1. Mechas Arteriales Inclinadas

Las ecuaciones gobernantes fueron resueltas para diferentes situaciones a objeto de visualizar la influencia de los parámetros gobernantes del fenómeno físico.

En primer lugar, las ecuaciones gobernantes fueron resueltas asumiendo $N = 0$ y tres diferentes ángulos de inclinación α (90° , 45° y 5°); además en cada caso se consideraron tres valores para Ω (0, 1 y 5). Los resultados obtenidos para U se muestran gráficamente en las figuras 3.1, 3.2 y 3.3, en función de X^* . De estos gráficos puede observarse que la velocidad

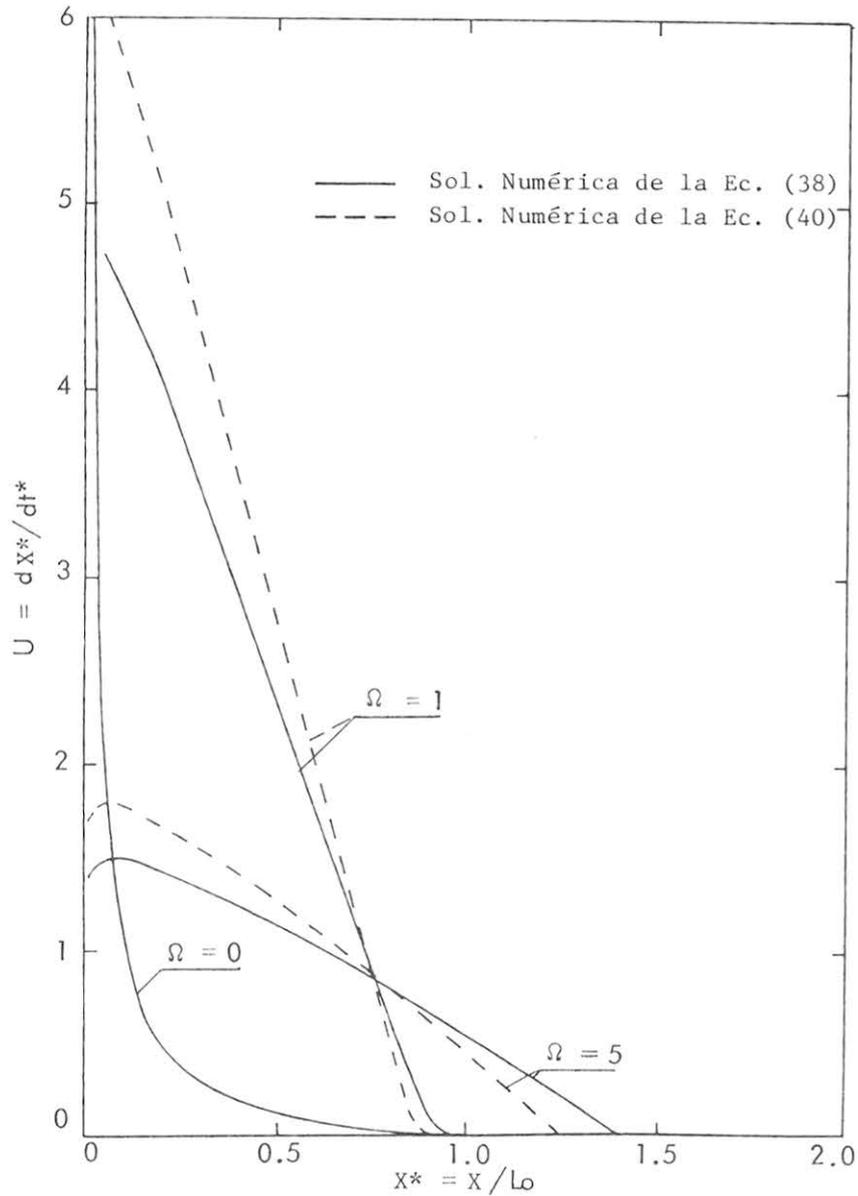


Figura 3.1. Velocidad Media para $\alpha = 90^\circ$.

media del flujo predicha por el modelo del presente análisis (Ecuación (38)) depende fuertemente del parámetro Ω , y que su dependencia del ángulo de inclinación α está relacionada a Ω y X^* . Así, para un valor fijo de Ω se observa que la influencia de α sobre la velocidad media del flujo tiene pequeña significación para valores de X^* relativamente pequeños, sin embargo ésta adquiere importancia a medida que X^* crece.

También puede ser observado que la solución de la ecuación gobernante basada en el modelo de Szequely *et al.* (ecuación (40)) tiene, en general, similar comportamiento a la del modelo desarrollado en el presente trabajo, existiendo un punto de coincidencia absoluta. Pero, a medida que X^* se aleja de dicho punto (punto de intersección de las curvas correspondientes) la diferencia entre las velocidades medias predichas por estos modelos llega a ser significativa.

3.2. Mechas Arteriales Horizontales

Asumiendo que en este caso la influencia del parámetro Ω es similar a la que tiene en mechas arteriales inclinadas, la ecuación gobernante correspondiente al modelo desarrollado en este trabajo (ecuación (50)) es solucionada, asumiendo $N = 0$, para dos diferentes valores de M , con el objeto de observar la influencia de este parámetro en la velocidad media del flujo. Los resultados obtenidos para U se muestran gráficamente, en la figura 3.4, en función de X^* . De este gráfico puede observarse que para un valor fijo de M existe un rango, a partir de $X^* \approx 0$, sobre el cual U varía prácticamente en forma lineal, y fuera de él U tiende asintóticamente a cero. También se observa que para un valor fijo de X^* , U aumenta a medida que el valor de M decrece, lo que tiene un claro sentido físico, puesto que si se asume fijo el

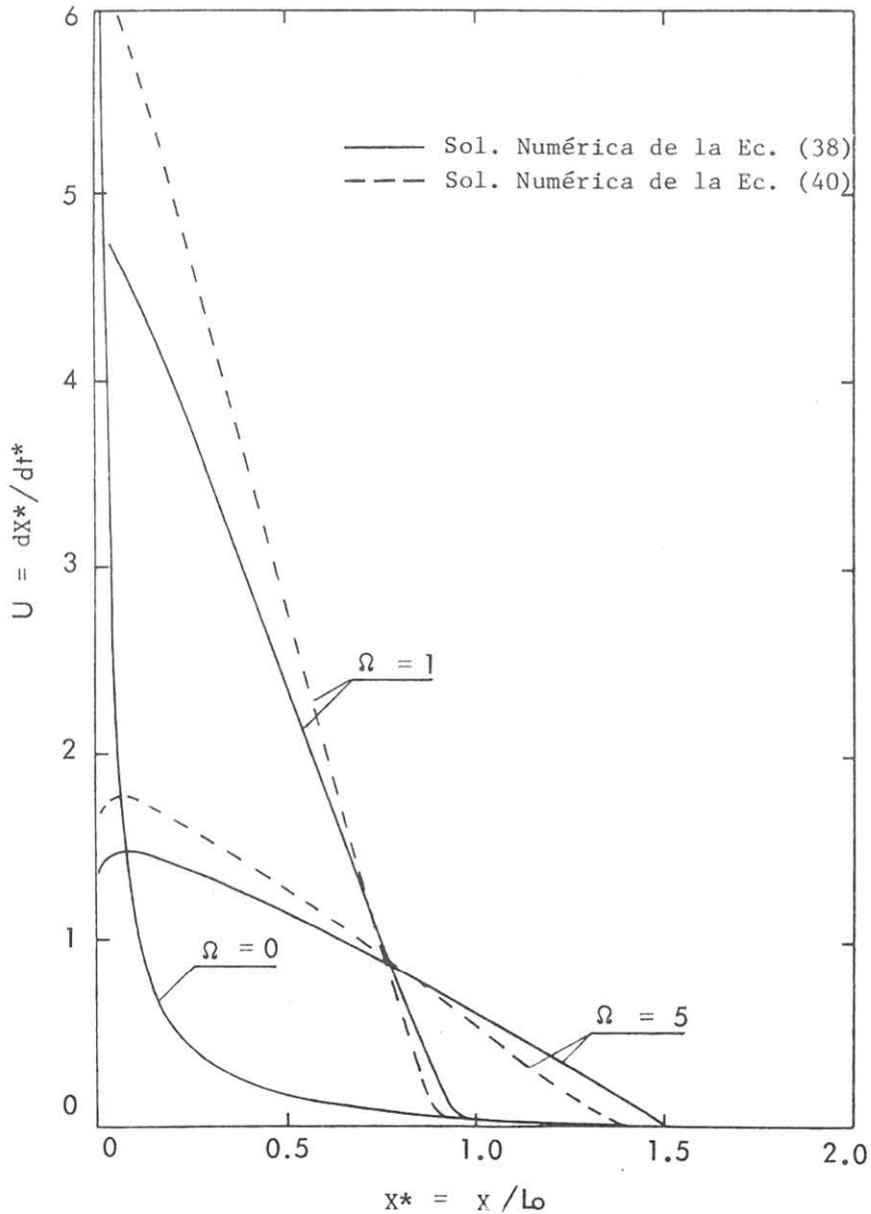


Figura 3.2. Velocidad Media para $\alpha = 45^\circ$.

radio de la arteria, esto implica que necesariamente el tamaño de los poros de la pared decrece, lo cual implica, finalmente, que la función forzante del fenómeno aumenta su magnitud.

3.3. Efecto Adverso de la Aceleración Externa.

Finalmente, en esta subsección se presentan los resultados del efecto adverso de una aceleración externa, efecto que en los casos discutidos anteriormente ha sido considerado nulo.

Considerando que este efecto tiene análoga influencia tanto para los casos de mechas arteriales inclinadas como horizontales, aquí se presentan los resultados sólo para un caso particular. Estos resultados son presentados gráficamente en la figura 3.5, para tres diferentes valores de N , parámetro que representa la magnitud del efecto en cuestión. De este gráfico se

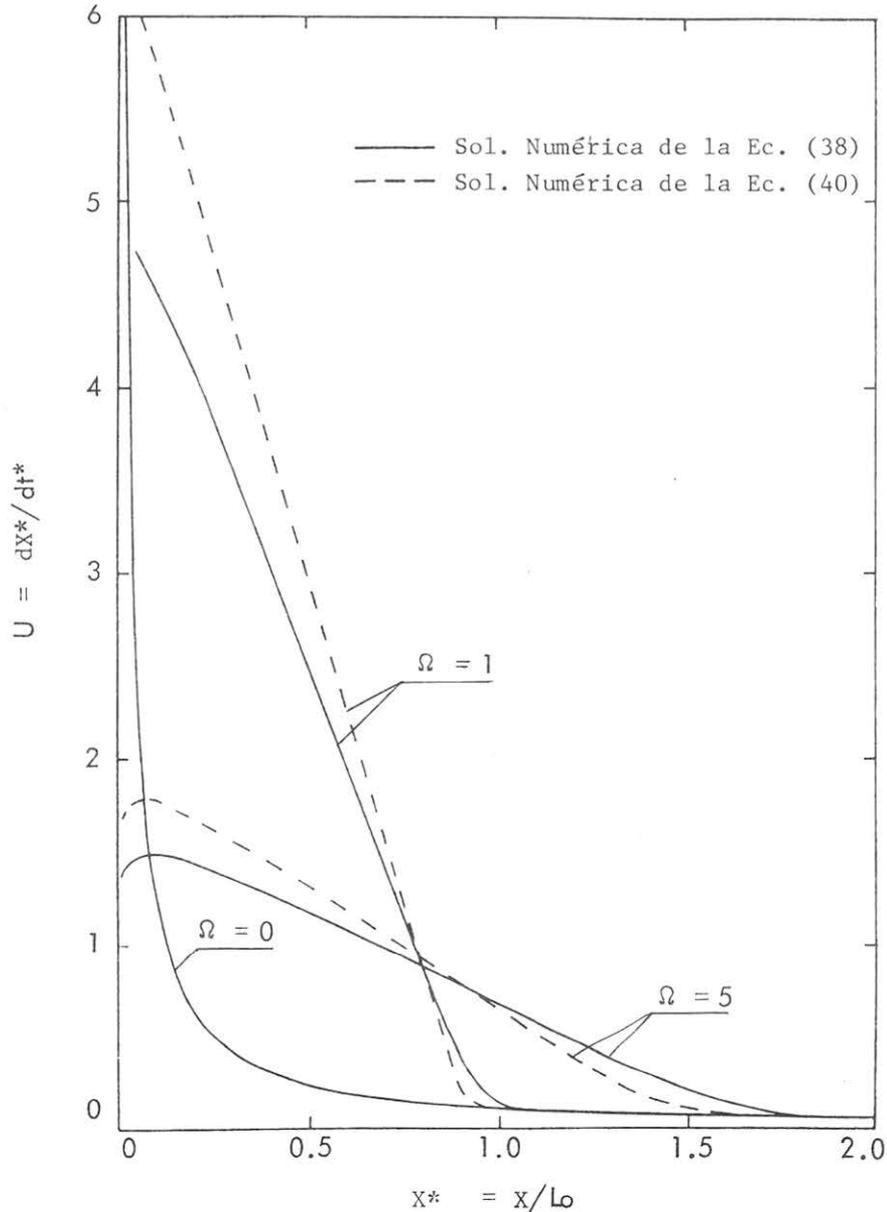


Figura 3.3. Velocidad Media para $\alpha = 5^\circ$.

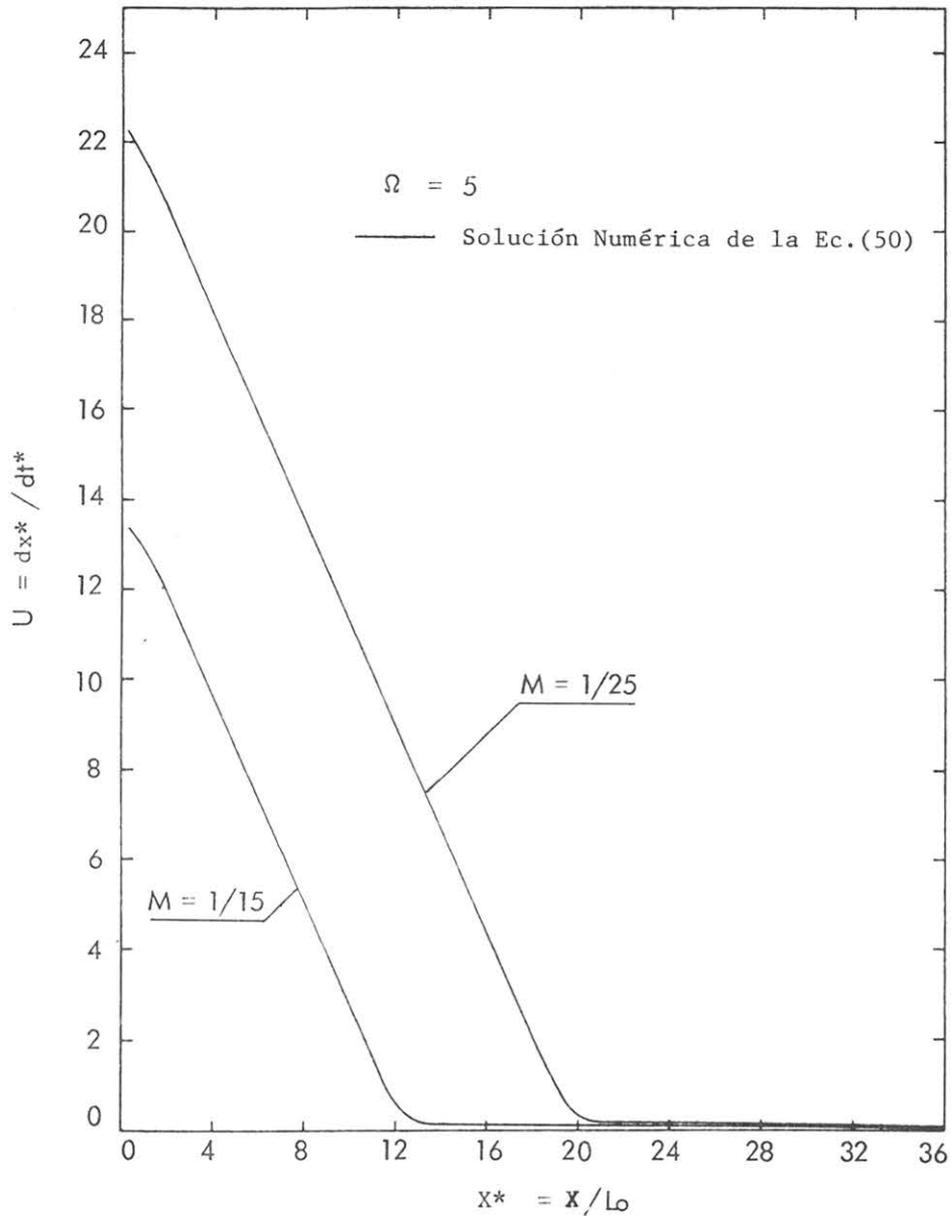


Figura 3.4. Velocidad Media para Mecha Arterial Horizontal.

observa que las diferencias entre las velocidades medias para $N = 0$ y $N > 0$ incrementan desde cero para $X^* \approx 0$ hacia un máximo cuando X^* tiende hacia su valor asintótico final. Además dicha diferencia es mayor mientras mayor es N .

4. CONCLUSIONES

En primer lugar, del análisis de los resultados obtenidos se concluye que la solución de las ecuaciones gobernantes, y por lo tanto el proceso de bombeo capilar, depende básicamente del parámetro Ω , el cual toma en cuenta las propiedades físicas del líquido de trabajo y las características geométricas de la arteria.

En segundo lugar se concluye que las soluciones del modelo correspondiente a Szequely

et al., representadas las curvas de trazos en las figuras 3.1, 3.2 y 3.3, dejan de manifiesto el error debido al uso de la aproximación de estado estacionario para la fricción. También debe hacerse notar que las curvas para $\Omega = 0$, en las figuras anteriores, representan las soluciones del modelo correspondiente a Washburn, las cuales son útiles solamente para predecir el comportamiento de mechas arteriales cuando $\Omega \rightarrow 0$, es decir, para arterias de radio interno muy pequeño, lo cual físicamente significa una aproximación a mechas homogéneas, por lo que las ventajas de las mechas arteriales desaparecen.

Finalmente, se concluye que el presente análisis permite predecir, en general, el comportamiento de cualquier combinación de "mecha arterial-líquido de trabajo" caracterizada por un valor particular de Ω . Así mismo este análisis permite determinar las condiciones necesarias para que las mechas arteriales se rellenen automáticamente de líquido de trabajo, cuando por algún efecto externo ésta es vaciada parcial o totalmente de él.

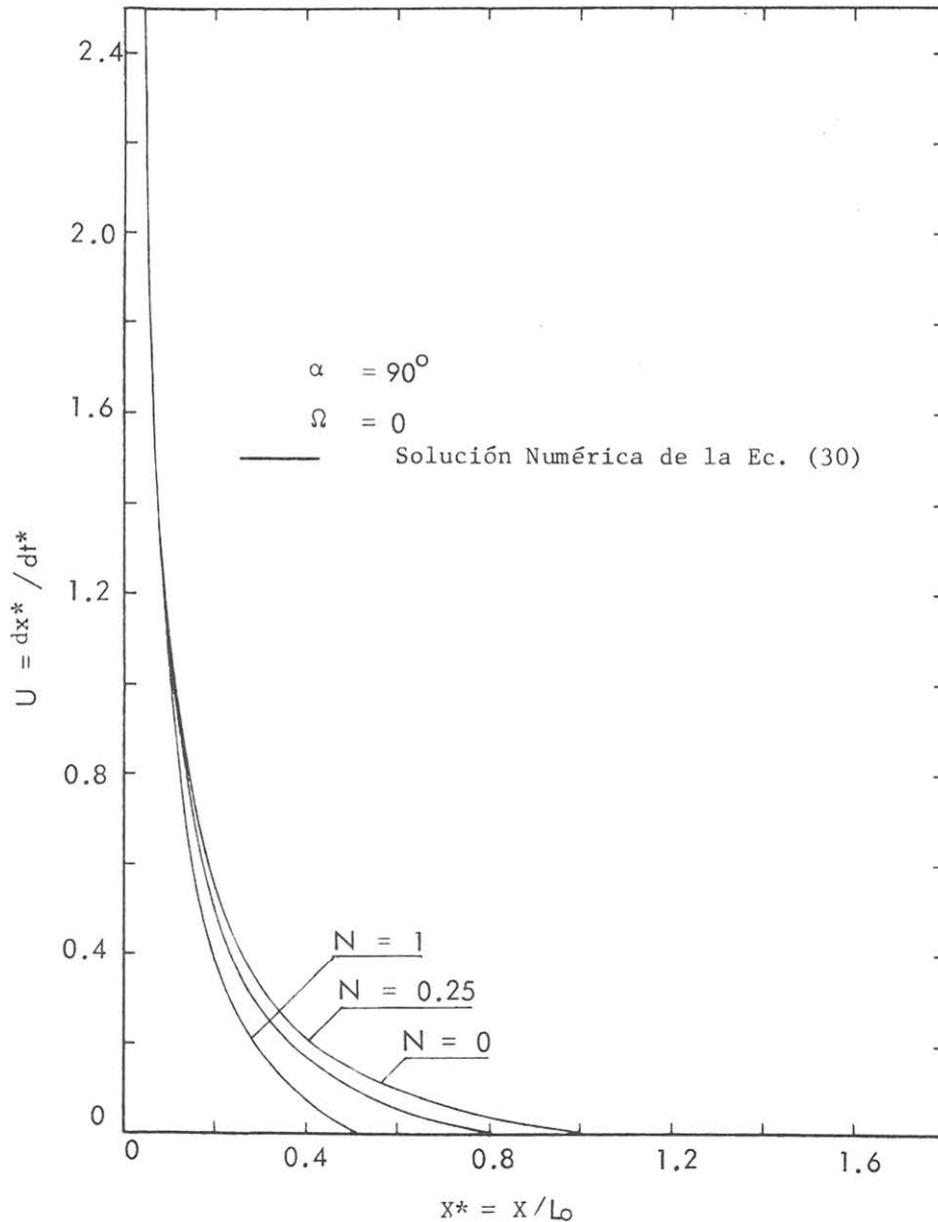


Figura 3.5. Velocidad Media Bajo el Efecto Adverso de una Aceleración Constante.

REFERENCIAS

1. GROVER, G.M., COTTER, T.P. and ERICKSON, G.F., "Structures of Very High Thermal Conductance", *J. Appl. Phys.*, Vol. 35, pp. 1990-1991, 1964.
2. KATZOFF, S., "Heat Pipes and Vapor Chambers for Thermal Control of spacecraft", *AIAA Progress in Astronautics and Aeronautics: Thermophysics of Spacecraft and Planetary Bodies*, Vol. 20, Academic Press, New York, pp. 761-818, 1967.
3. JOHNSON, G.D. and SAASKY, E.W., "Arterial Wick Heat Pipes", *ASME Paper N° 72-WA/HT-36*, 1972.
4. DUNN, P.D., REAY, D.A., *Heat Pipes*, Second Ed., Pergamon Press, Oxford, 1978.
5. EDELSTEIN, F., SWERDLING, B., and KOSSON, R., "Development of a Self-Priming High-Capacity Heat Pipe for Flight on OAC-C", *AIAA Progress in Astronautics and Aeronautics: Thermal Control and Radiation*, Vol. 31, Academic Press, New York, pp. 19-34, 1972.
6. WASHBURN, E.W., "The Dynamic of Capillary Flow", *The Phys. Rev.* Vol. 17, N° 3, pp. 273-283, 1921.
7. BOSANQUET, C.H., "On the Flow of Liquids into Capillary Tubes", *Phil Mag.*, Vol. 45, pp. 525-531, 1923.
8. SZEKELY, J., NEUMANN, A.W. and CHUANG, Y.K., "The Rate of Capillary Penetration and the Applicability of the Washburn Equation", *Colloid Interface Sci.*, Vol. 35, pp. 273-278, 1971.
9. LETELIER S., M.F., LEUTHEUSSER, H.J. y ROSAS Z., C.E., "Refined Mathematical Analysis of the Capillary Penetration Problem", *J. of Colloid and Interface Science*, Vol. 71, N° 3, 1979.
10. LETELIER S., M.F., and LEUTHEUSSER, H.J., "Unified Approach to the Solution of Problems of Unsteady Laminar Flow in Long Pipes", *Fluid Transients and Acoustic in the Power Industry*, The Amer. Soc. of Mech. Engns., New York, 1978.
11. LIMBERT, D.A., *SYSIM, A Program to Integrate a Set of First-Order Ordinary Differential Equations*, Department of Mechanical and Energy Systems Engineering, Arizona State University, 1980.
12. WHITE, F.M., *Viscous Fluid Flow*, McGraw-Hill, New York, 1974.
13. McADAMS, W.H., *Heat Transmission*, Third Ed., McGraw-Hill, New York, 1954.