

potencia en flujo laminar impermanente en tuberías*

M. Letelier S.**, A. Russo A.** y P. Durán B.**

RESUMEN: Se deducen expresiones para las componentes viscosa e inercial de la potencia en flujo laminar impermanente en tubos rectos, circulares, para fluidos newtonianos incompresibles. Se evalúan dichas componentes para flujo unidireccionalmente acelerado y flujo oscilatorio, como ilustración del método. Se discute la importancia relativa de las componentes de la potencia para los ejemplos analizados.

SUMMARY: Analytical expressions are presented for the viscous and inertial components of pipe flow power for laminar unsteady flow in straight, circular tubes when the fluid is Newtonian incompressible. These components are evaluated for unidirectionally accelerated flow and for oscillatory flow. The relative importance of the power components are discussed for the examples herein analysed.

* Manuscrito revisado y aprobado en forma definitiva en noviembre de 1983.

** Departamento de Ingeniería Mecánica, Facultad de Ingeniería, Universidad de Santiago de Chile (USACH).

1. INTRODUCCION

El conocimiento de la potencia requerida por un sistema fluido-tubería es importante para el diseño de ductos y sistemas de impulsión, y también para el entendimiento de escurrimientos complejos como los que, por ejemplo, se encuentran en forma natural en arterias y otros conductos fisiológicos.

Para los fines de este trabajo, se definirá la potencia específica consumida por una cañería como la diferencia de energía en el fluido por unidad de tiempo y peso entre los extremos de la cañería, para una longitud de ésta dada. La potencia así definida es, en general, sólo una parte de la potencia que debe aportar el sistema de impulsión.

Si el flujo es isotérmico, incompresible, y la sección de la tubería es constante, la variación de energía específica H entre los extremos de entrada (1) y salida (2) de la cañería está dada por la variación de la suma de energías específicas de presión y potencial, a saber

$$H = \frac{P_1}{\gamma} + h_1 - \left(\frac{P_2}{\gamma} + h_2 \right), \quad (1)$$

donde p es la presión, h es la altura y γ es el peso específico del fluido.

La potencia consumida W , para un caudal volumétrico Q , es

$$W = \gamma Q H \quad (2)$$

Cuando el flujo es temporalmente permanente, la energía y potencia gastadas son utilizadas exclusivamente en vencer el roce viscoso en el interior de la cañería. Un balance de cantidad de movimiento indica que, en este caso, para una cañería recta, circular de radio a y longitud L , existe la relación

$$H = \frac{2L}{a\gamma} \tau_o, \quad (3)$$

donde τ_o es el esfuerzo cortante en la pared del ducto. La relación (3) permite expresar alternativamente la potencia como

$$W = \frac{2L}{a} Q\tau_o. \quad (4)$$

La energía específica H puede ser también descrita por la ecuación de Darcy-Weisbach, a saber

$$H = f \frac{L}{2a} \frac{U^2}{2g}, \quad (5)$$

en la cual f es el coeficiente de fricción, U es la velocidad media ($U = Q/\pi a^2$) y g es la aceleración de gravedad. De (5) y (2) resulta

$$W = \frac{\pi a \rho L f U^2}{4g}, \quad (6)$$

expresión que es válida tanto para flujo laminar como turbulento y en la cual ρ es la densidad. Para flujo laminar, con $f = 64\nu/2aU$ (ν = viscosidad cinemática), se tiene

$$W = 8\pi L \mu U^2, \quad (7)$$

siendo μ la viscosidad dinámica.

Si el flujo es impermanente, es decir, si la velocidad varía temporalmente, expresiones universales similares a (4) y (7), son más difíciles de obtener aun en el caso más simple de flujo, esto es, laminar y paralelo.

Es el objetivo de este trabajo presentar algunas expresiones originales válidas para flujo laminar impermanente que expresan la potencia consumida en términos de diversas variables del flujo. Los resultados que se plantean en lo que sigue se han derivado del modelo general de análisis para flujo laminar impermanente en ductos circulares publicado en referencia¹.

2. EXPRESIONES PARA LA POTENCIA CONSUMIDA EN FLUJO IMPERMANENTE LAMINAR EN TUBOS CIRCULARES

El movimiento impermanente de un fluido incompresible newtoniano, en régimen laminar, a través de un tubo recto y largo, de sección constante, es gobernado por la siguiente forma de las ecuaciones de Navier-Stokes, en coordenadas cilíndricas,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad (8)$$

en la cual r , x , t son las coordenadas radial, axial y temporal, respectivamente, u es la velocidad axial y $p = p + \gamma h =$ presión piezométrica.

Dado que el flujo es paralelo, la presión piezométrica no varía espacialmente en la sección transversal del ducto y sólo es función del tiempo. La potencia total es ahora también función del tiempo y obedece a la relación

$$W(t) = \pi a^2 (P_1 - P_2) U. \quad (9)$$

combinando (8) y (9) se obtiene

$$W = 2\pi \rho L \int_0^a u \frac{\partial u}{\partial t} r dr - 2\pi \mu L \int_0^a u \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) dr. \quad (10)$$

La ecuación (10) indica que en flujo impermanente la potencia tiene una componente inercial y otra viscosa, en contraste al movimiento estacionario, donde sólo existe la segunda²; dichas componentes son, respectivamente,

$$W_I = 2\pi \rho L \int_0^a u \frac{\partial u}{\partial t} r dr, \quad (11)$$

$$W_V = -2\pi \mu L \int_0^a u \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) dr. \quad (12)$$

Se definirán, por conveniencia, variables adimensionales en lo que sigue. Sean U_0 y T_0 valores constantes de referencia para la velocidad y el tiempo; con esto se tiene

$$t^* = t/T_0; \quad r^* = r/a; \quad u^* = U/U_0$$

$$W^* = W/\pi \mu L U_0^2; \quad \phi^* = a^2 (P_1 - P_2)/\mu U_0 L;$$

$$\Omega = a^2/\nu T_0. \quad (13)$$

En lo anterior, la misma adimensionalización vale para W_I y W_V , ϕ^* es la llamada función forzante y Ω es el número de impermanencia.

De acuerdo a¹, y respetando la condición de no-deslizamiento en la pared del ducto, la velocidad se puede expresar como

$$u = A(1-r^2) + \frac{\Omega}{4^2} \frac{dA}{dt} (1-r^4) + \frac{\Omega^2}{4^2 6^2} \frac{d^2A}{dt^2} (1-r^6) + \dots, \quad (14)$$

A es una función del tiempo relacionada con ϕ a través de la ecuación

$$A + \frac{\Omega}{2^2} \frac{dA}{dt} + \frac{\Omega^2}{2^2 4^2} \frac{d^2A}{dt^2} + \dots = \frac{\phi}{4} \quad (15)$$

A partir de la ecuación (14) sólo se utilizarán variables adimensionales, razón por la cual se omitirán los asteriscos en lo que resta de este trabajo.

Las formas adimensionales del esfuerzo cortante en la pared y de la velocidad media son, respectivamente,

$$\tau_o = - \frac{\partial u}{\partial r} (1), \quad (16)$$

$$U = 2 \int_0^a u r dr, \quad (17)$$

las cuales, cuando deducidas de (14), se convierten en

$$\tau_o = 2 A + \frac{\Omega}{4} \frac{dA}{dt} + \dots, \quad (18)$$

$$U = \frac{A}{2} + \frac{\Omega}{24} \frac{dA}{dt} + \dots \quad (19)$$

Series del tipo (15), (18) y (19) pueden ser invertidas para expresar A en función de ϕ , τ_o y U. Si estas nuevas series se introducen en las formas adimensionales de (11) y (12), se obtienen series para W_I y W_V en términos de ϕ , τ y U. Las fórmulas que se plantean a continuación son el resultado de esta operación, donde también se ha incluido como variable dependiente la velocidad en el centro del tubo u_c , la cual se obtiene de (14) poniendo $r = 0$. Así se encuentra

$$W_I = \frac{4}{3} \Omega U \frac{dU}{dt} - \frac{\Omega^2}{144} \left[U \frac{d^2U}{dt^2} + \left(\frac{dU}{dt} \right)^2 \right] + \frac{\Omega^3}{4320} \left[U \frac{d^3U}{dt^3} + 2 \frac{dU}{dt} \frac{d^2U}{dt^2} \right] + \dots, \quad (20)$$

$$W_V = 8 U^2 + \frac{\Omega^2}{144} \left(\frac{dU}{dt} \right)^2 - \frac{\Omega^3}{2160} \frac{dU}{dt} \frac{d^2U}{dt^2} + \dots, \quad (21)$$

$$W = 8 U^2 + \frac{4}{3} \Omega U \frac{dU}{dt} - \frac{\Omega^2}{144} U \frac{d^2U}{dt^2} + \dots, \quad (22)$$

$$W_I = \frac{\Omega}{48} \phi \frac{d\phi}{dt} - \frac{11\Omega^2}{3072} \left[\phi \frac{d^2\phi}{dt^2} + \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] + \dots, \quad (23)$$

$$W_v = \frac{\phi^2}{8} - \frac{\Omega}{24} \phi \frac{d\phi}{dt} + \frac{11\Omega^2}{3072} \left[\left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + 2\phi \frac{d^2\phi}{dt^2} \right] + \dots, \quad (24)$$

$$W = \frac{\phi^2}{8} - \frac{\Omega}{48} \phi \frac{d\phi}{dt} + \frac{11\Omega^2}{3072} \phi \frac{d^2\phi}{dt^2} + \dots, \quad (25)$$

$$W_I = \frac{\Omega}{12} \tau_o \frac{d\tau_o}{dt} - \frac{\Omega^2}{256} \left[\left(\frac{d\tau_o}{dt} \right)^2 + \tau_o \frac{d^2\tau_o}{dt^2} \right] + \dots, \quad (26)$$

$$W_v = \frac{\tau_o^2}{2} - \frac{\Omega}{24} \tau_o \frac{d\tau_o}{dt} + \frac{\Omega^2}{768} \left[\left(\frac{d\tau_o}{dt} \right)^2 + 2 \frac{d^2\tau_o}{dt^2} \tau_o \right] + \dots, \quad (27)$$

$$W = \frac{\tau_o^2}{2} + \frac{\Omega}{24} \tau_o \frac{d\tau_o}{dt} - \frac{\Omega^2}{768} \left[2 \left(\frac{d\tau_o}{dt} \right)^2 + \tau_o \frac{d^2\tau_o}{dt^2} \right] + \dots, \quad (28)$$

$$W_I = \frac{\Omega}{3} u_c \frac{du_c}{dt} + \frac{\Omega^2}{192} \left[\left(\frac{du_c}{dt} \right)^2 + u_c \frac{d^2u_c}{dt^2} \right] + \dots, \quad (29)$$

$$W_v = 2 u_c^2 + \frac{\Omega}{12} u_c \frac{du_c}{dt} - \frac{\Omega^2}{1152} \left[2u_c \frac{d^2u_c}{dt^2} - 3 \left(\frac{du_c}{dt} \right)^2 \right] + \dots, \quad (30)$$

$$W = 2u_c^2 + \frac{5\Omega}{12} u_c \frac{du_c}{dt} + \frac{\Omega^2}{1152} \left[9 \left(\frac{du_c}{dt} \right)^2 + 4 u_c \frac{d^2u_c}{dt^2} \right] + \dots \quad (31)$$

Las fórmulas (25), (28) y (31) se han obtenido haciendo $W = W_I + W_v$.

La integración espacial de la forma adimensional de (8) conduce a la ecuación unidimensional de movimiento, a saber

$$\Omega \frac{dU}{dt} + 2 \tau_o = \phi \quad (32)$$

Si (32) se multiplica por U resulta

$$W = \phi U = \Omega U \frac{dU}{dt} + 2 \tau_o U \quad (33)$$

donde ϕU es la potencia total exacta pero $\Omega U dU/dt$ y $2 \tau_o U$ representan solamente aproximaciones para las potencias inicial y viscosa. En particular, si $\Omega \rightarrow 0$, $2 \tau_o U$ es exactamente la forma adimensional de (4). Combinando (18) y (19) resulta

$$\tau_o = 4 U + \frac{\Omega}{6} \frac{dU}{dt} - \frac{\Omega^2}{288} \frac{d^2U}{dt^2} + \dots \quad (34)$$

expresión que, al ser sustituida en (33), genera la fórmula para la potencia viscosa aproximada según (33). Así se tiene

$$W_I' = \Omega U \frac{dU}{dt} \quad (35)$$

$$W_v' = 2 \tau_o U = 8 U^2 + \frac{\Omega}{3} U \frac{dU}{dt} - \frac{\Omega^2}{144} U \frac{d^2U}{dt^2} + \dots \quad (36)$$

Las ecuaciones (35) y (36) representan, respectivamente, las potencias inercial y viscosa asociadas directamente a la velocidad media, en tanto (20) y (21) entregan estas magnitudes referidas a la velocidad local u .

3. EVALUACION DE LA POTENCIA CONSUMIDA EN FLUJO UNIDIRECCIONALMENTE ACELERADO Y EN FLUJO OSCILATORIO

Se considerarán dos casos especiales de flujo impermanente con el objeto de ilustrar algunas de las fórmulas deducidas en el párrafo precedente.

Flujo unidireccionalmente acelerado:

Se definirá por la expresión

$$U = 1 + t \quad (37)$$

Las formas apropiadas para determinar la potencia están dadas por (20), (21), (22), (35) y (38).

Dado que en este ejemplo U tiene un número finito de derivadas no nulas, las expresiones para la potencia son válidas para todo valor de Ω . En la figura 1 se describe la evolución temporal de las potencias inercial (20), viscosa (21) y total (22) exactas para $\Omega = 3$ y $\Omega = 20$.

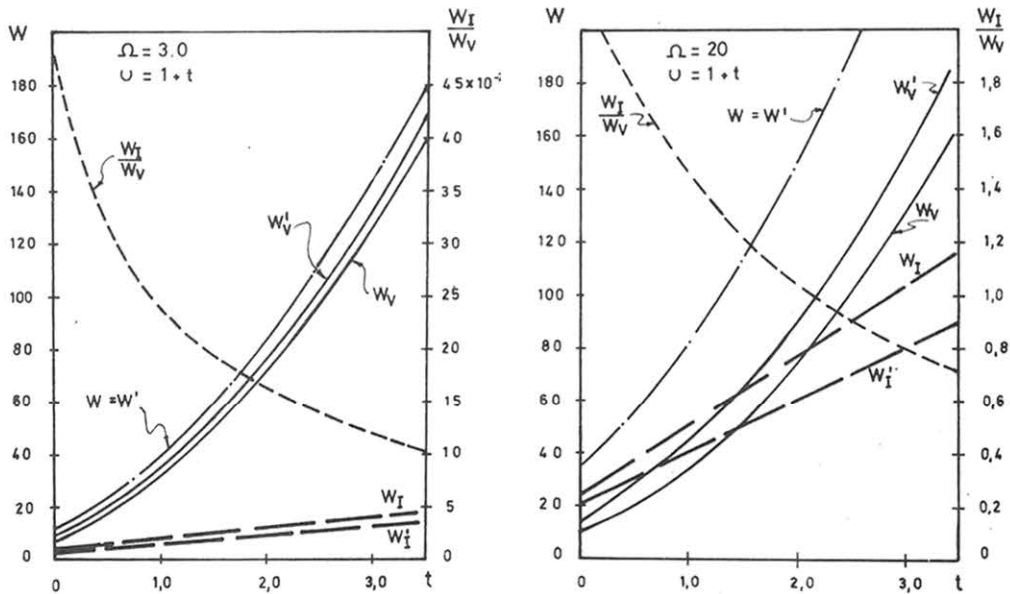


Figura 1. Componentes exactas viscosa (W_v) e inercial (W_I), y aproximadas viscosa (W_v') e inercial (W_I') de la potencia W en flujo unidireccionalmente acelerado.

Se aprecia que para flujo lentamente acelerado ($\Omega = 3$), la potencia viscosa predomina, en tanto la contribución de la potencia inercial es pequeña. Para flujo fuertemente acelerado ($\Omega = 20$) la mayor parte de la potencia se gasta inicialmente en vencer la inercia del fluido.

Las formas aproximadas de las potencias inercial y viscosa entregan valores cercanos a los exactos para $\Omega = 3$, pero existe una discrepancia apreciable entre valores aproximados y exactos para $\Omega = 20$. Debe hacerse resaltar que en este modelo simple de flujo acelerado, la potencia, en todas sus formas, aumenta con el tiempo, lo cual no es necesariamente válido para otros sistemas mecánicos, tales como aquellos compuestos por masas sólidas. En estos últimos, a veces el torque inicial requerido para poner en movimiento el sistema en un tiempo dado, exige que el mayor consumo de potencia se origine al comienzo del movimiento, siendo necesario posteriormente solamente suministrar potencia para vencer las fuerzas de roce, cuando éste es el caso, lo cual exige una magnitud de potencia menor que la inicial. En relación al movimiento de un fluido, el roce viscoso aumenta con la velocidad, por lo cual, al menos la componente viscosa de la potencia, siempre crece con la velocidad.

Flujo oscilatorio:

Se considerará una variación temporal de la velocidad media dada por

$$U = \text{cost} \quad (38)$$

La expresión para U , en este ejemplo, admite infinitas derivadas diferentes de cero, lo que hace a su vez infinitas las series para la potencia. Dichas series, en particular las ecuaciones (20), (21), (22), (35) y (36), fueron evaluadas para $\Omega = 2$, valor del número de impermanencia para el cual existe buena convergencia.

En la figura 2 se han graficado las diversas componentes de la potencia, a partir de la ecuación (38). En el caso cuando $\Omega = 2$, la contribución de la potencia viscosa es fundamental existiendo desfase entre ésta, la potencia inercial y la potencia total. Se ilustra además la discrepancia entre las formas aproximadas y exactas de las componentes de la potencia.

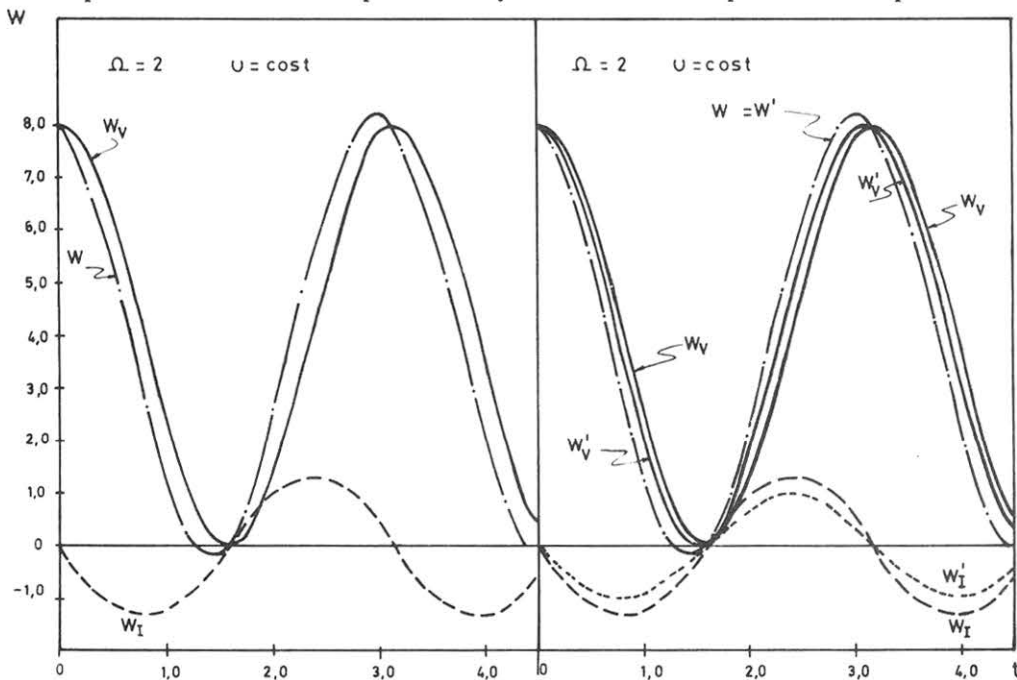


Figura 2. Componentes exactas viscosa (W_v) e inercial (W_I), y aproximadas viscosa (W'_v) e inercial (W'_I) de la potencia W en flujo oscilatorio.

La evaluación de la potencia para valores más altos de Ω se hace bastante más compleja y no es fácil obtener expresiones explícitas como las aquí presentadas. No obstante, cálculos numéricos indican que para valores mayores de Ω la importancia relativa de la potencia inercial aumenta notablemente.

En arterias de seres vivos³ con diámetro superior a 4 mm, por ejemplo, se tiene $\Omega > 10$. En estas condiciones, deberá esperarse que la potencia gastada por el organismo en generar el flujo sanguíneo, en gran medida esté destinada a vencer la inercia de la sangre, al menos en partes del ciclo cardíaco. En arterias de pequeño diámetro, en cambio, la fórmula cuasipermanente (7) de la potencia será una buena aproximación. Si bien el ciclo cardíaco se refleja en una dinámica circulatoria más compleja que la descrita por la ecuación (38), se estima que los resultados predichos por este modelo simple de flujo oscilatorio, son extensibles cualitativamente en cierta medida a aquélla.

4. CONCLUSIONES

Se han obtenido expresiones explícitas para la evaluación de las componentes inercial y viscosa de la potencia en flujo impermanente laminar en tubos circulares rectos con las restricciones adicionales indicadas en el texto.

Las fórmulas se han aplicado a flujo unidireccionalmente acelerado y oscilatorio, lo cual ha permitido poner de manifiesto la importancia relativa de las componentes de la potencia para diferentes valores del número de impermanencia.

Se estima que estos resultados son de interés tanto para el diseño de líneas fluidas como para el conocimiento de la dinámica de flujos fisiológicos, en particular del sistema circulatorio.

REFERENCIAS

1. LETELIER S., M.F. and H.J. LEUTHEUSSER, "Unified Approach to the Solution of Problems of Unsteady Laminar Flow in Long Pipes", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 50, N° 1 (1983).
2. MORAGA B., N., F. ESTEFFAN M. y M. LETELIER S., "Pérdida de energía en flujo laminar transiente", *Contribuciones*, N° 20 (1976).
3. LETELIER S., M.F. and H.J. LEUTHEUSSER, "Analytical Deduction of the Instantaneous Velocity Distribution, Wall Shear Stress and Pressure Gradient from Transcutaneous Measurements of the Time-varying Rate of Blood Flow", *Medical & Biological Engineering & Computing*, Vol. 19 (1981).