Contribuciones Científicas y Tecnológicas Nº 50 - Area Física VI - Septiembre de 1981.

nuevas soluciones exactas en gravedad fuerte*

Roberto Hojman**

RESUMEN: En el presente artículo se exhiben nuevas soluciones exactas de Gravedad Fuerte (teoría f-g).

SUMMARY: In the present, article new exact solutions of Strong Gravity (f-g theory) are exhibited.

* Manuscrito revisado y aprobado en forma definitiva en Agosto de 1981.
** Departamento de Física, Facultad de Ciencia, Universidad de Santiago de Chile, Santiago de Chile.

1. INTRODUCCION

En este trabajo se examina la teoría de Gravedad Fuerte elaborada por Isham, Salam y Strathdee[1] cuando ambas métricas (g y f) son invariantes bajo el mismo grupo continuo de transformaciones de tres parámetros. En una situación como la descrita, el grupo tiene tres generadores infinitesimales que denotaremos ξ^{σ}_{a} ($\sigma = 0, 1, 2, 3; a = 1, 2, 3$). Se considera el caso en que la matriz $M = \| \xi^{\sigma}_{a} \|$ es de rango dos, de modo que las mínimas variedades invariantes son superficies bidimensionales de curvatura constante. En tales circunstancias hay que distinguir tres casos, según la curvatura sea positiva, nula o negativa. El primer caso corresponde a métricas con simetría esférica y su solución general (en Gravedad Fuerte) fue encontrada por Isham y Storey.[2] Considerando una situación particular del caso anterior, Salam y Strathdee[3] analizaron la posibilidad de confinamiento de quarks.

En la próxima sección se describe brevemente las simetrías mencionadas y se deduce a partir de las ecuaciones de Killing, la forma más general de sus elementos de línea asociados.

En la última sección se encuentran nuevas soluciones exactas correspondientes a simetría plana e hiperbólica respectivamente.

La relevancia de las nuevas soluciones encontradas será discutida en una extensión del presente artículo que está en preparación.[4]

2. LAS SIMETRIAS Y SUS METRICAS ASOCIADAS

Como se sabe, la forma más general del elemento de línea de un espacio esféricamente simétrico está dada por[5]

$$ds^2 = C(r,t)\,dt^2 - 2D(r,t)\,dt\,dr - A(r,t)\,dr^2 - B(r,t)(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\phi^2) \qquad (1)$$

con la interpretación usual de t, r, θ y ϕ

Consideremos ahora el caso en el cual las mínimas variedades invariantes tienen curvatura nula. Se dice entonces que el espacio tiempo tiene simetría plana y admite un grupo de tres parámetros generados por las transformaciones

$$\begin{aligned} \bar{y} &= y + a \\ \bar{z} &= z + b \end{aligned} \qquad (2a)$$

y

$$\begin{aligned} \bar{y} &= y \cos\theta + z \operatorname{sen}\theta \\ \bar{z} &= -\, y \operatorname{sen}\theta + z \cos\theta \end{aligned} \qquad (2b)$$

Los generadores infinitesimales de este grupo son:

$$\| \xi^{\sigma}_{a} \| = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -z \\ 0 & 1 & y \end{bmatrix}$$

De las ecuaciones de Killing

$$\xi^{\mu}_{a}\, g_{\sigma\tau},_{\mu} + g_{\mu\sigma}\, \xi^{\mu}_{a},_{\tau} + g_{\mu\tau}\, \xi^{\mu}_{a},_{\sigma} = 0$$

se deduce fácilmente que el elemento de línea más general que admite al grupo continuo definido por las transformaciones (2) puede escribirse así:

$$ds^2 = C(w,x)\,dw^2 - 2D(w,x)\,dw\,dx - A(w,x)\,dx^2 - B(w,x)(dy^2 + dz^2) \qquad (3)$$

Del mismo modo, cuando los generadores infinitesimales del grupo están dados por

$$\| \xi^{\sigma}_{a} \| = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & z \\ 1 & -z & \frac{1}{2}(e^{-2y} - z^2) \end{bmatrix}$$

es decir cuando las mínimas variedades invariantes del grupo de tres parámetros son superficies bidimensionales de curvatura negativa, se obtiene para el correspondiente elemento de línea

$$ds^2 = C(w,x)\, dw^2 - 2D(w,x)\, dw\, dx - A(w,x)\, dx^2 - B(w,x)\,(dy^2 + e^{2y} dz^2) \tag{4}$$

La expresión de los elementos de línea así obtenidos puede abreviarse poniendo

$$ds^2 = C(w,x)\, dw^2 - 2D(w,x)\, dw\, dx - A(w,x)\, dx^2 - B(w,x) \left\{ dy^2 + F(y)\, dz^2 \right\} \tag{5}$$

reemplazando $F(y)$ por $\mathrm{sen}^2\, y$, 1 ó e^{2y} según se desee reproducir (1), (3) ó (4), respectivamente.

3. ECUACIONES DE CAMPO

Las ecuaciones de campo para $g_{\mu\nu}$ y $f_{\mu\nu}$ son[2]

$$R^{g}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, R^{g} = k_g\, T^{g}_{\mu\nu}$$

$$R^{f}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, f_{\mu\nu}\, R^{f} = k_f\, T^{f}_{\mu\nu}$$

$$R^{g}_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} R^{g}_{\alpha\mu\beta\nu}, \qquad R^{g} = g^{\mu\nu} R^{g}_{\mu\nu}$$

$$R^{f}_{\mu\nu} = f^{\alpha\beta} R^{f}_{\alpha\mu\beta\nu}, \qquad R^{f} = f^{\mu\nu} R^{f}_{\mu\nu}$$

$$T^{g}_{\mu\nu} = \frac{M^2}{8\pi k_f} \left(\frac{f}{g}\right)^{v} (f-g)^{\alpha\beta} \Big[(f-g)^{\rho\tau} \Big\{ u\, g_{\mu\nu} (g_{\alpha\rho}\, g_{\beta\tau} - g_{\alpha\beta}\, g_{\rho\tau}) + $$
$$+ 2 g_{\alpha\mu} (g_{\beta\rho}\, g_{\nu\tau} - g_{\beta\nu}\, g_{\rho\tau}) \Big\} + 2 (g_{\mu\alpha}\, g_{\nu\beta} - g_{\mu\nu}\, g_{\alpha\beta}) \Big]$$

$$T^{f}_{\mu\nu} = \frac{M^2}{8\pi k_f} \left(\frac{g}{f}\right)^{u} (f-g)^{\alpha\beta} \Big[(f-g)^{\rho\tau}\, v\, f_{\mu\nu} (g_{\alpha\rho}\, g_{\beta\tau} - g_{\alpha\beta}\, g_{\rho\tau})$$
$$- 2 (g_{\mu\alpha}\, g_{\nu\beta} - g_{\mu\nu}\, g_{\alpha\beta}) \Big]$$

con

$$u + v = \frac{1}{2}$$

En el presente artículo la búsqueda de soluciones exactas será restringida a considerar sólo coeficientes métricos en (5) que dependan exclusivamente de una variable (en vez de dos).

Para fijar ideas, x será dicha variable y de este modo $g_{\mu\nu}$ y $f_{\mu\nu}$ están dados por

$$\begin{aligned} ds_g^2 &= g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu \\ &= \gamma(x) dw^2 - 2\delta(x)\, dw\, dx - \alpha(x)\, dx^2 - \beta(x) \left\{ dy^2 + F(y)\, dz^2 \right\} \end{aligned} \tag{6a}$$

$$\begin{aligned} ds_f^2 &= f_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu \\ &= C(x)\, dw^2 - 2D(x) dw\, dx - A(x) dx^2 - B(x) \left\{ dy^2 + F(y)\, dz^2 \right\} \end{aligned} \tag{6b}$$

Estas expresiones pueden simplificarse haciendo una transformación apropiada de coordenadas, sin olvidar sin embargo, que dichas transformaciones deben realizarse simultáneamente en ambas métricas para preservar la invariancia de la teoría.

Es fácil comprobar que el término cruzado en la primera de las ecuaciones (6), desaparece si se define la nueva coordenada

$$\widetilde{w} = w + \psi(x) \text{ con } \frac{d\psi}{dx} = -\frac{\delta}{\gamma}$$

En estas nuevas coordenadas la métrica f toma la forma:

$$ds_f^2 = C\, d\widetilde{w}^2 - 2\overline{D}\, d\widetilde{w}\, dx - \overline{A}\, dx^2 - B(dy^2 + F\, dz^2)$$

donde $\overline{D}$ y $\overline{A}$ pueden ser calculados fácilmente. Sin embargo, su expresión explícita carece de relevancia a este punto.

Poniendo $\widetilde{x} = \sqrt{\beta}$, las métricas g y f devienen, después de eliminar tildes y barras, en:

$$ds_g^2 = \gamma dw^2 - \alpha dx^2 - x^2(dy^2 + F\, dz^2)$$

$$ds_f^2 = C\, dw^2 - 2D dw\, dx - A\, dx^2 - B(dy^2 + F\, dz^2)$$

respectivamente.

Las componentes no nulas de $R^f_{\mu\nu}$ son

$$R^f_{00} = \frac{C}{2\Delta} \left\{ C'' + \frac{B'C'}{B} - \frac{C'\Delta'}{2\Delta} \right\}; \qquad \Delta \equiv A\,C - D^2$$

$$R^f_{01} = -\frac{D}{2\Delta} \left\{ C'' + \frac{B'C'}{B} - \frac{C'\Delta'}{2\Delta} \right\}$$

$$R^f_{11} = -\frac{B''}{B} + \frac{B'^2}{2B^2} + \frac{B'\Delta'}{2B\Delta} - \frac{A}{2\Delta} \left\{ C'' + \frac{B'C'}{B} - \frac{C'\Delta'}{2\Delta} \right\}$$

$$R^f_{22} = R_{33}/F = \epsilon(F) - \frac{C}{2\Delta} \left\{ B'' + \frac{B'C'}{C} - \frac{B'\Delta'}{2\Delta} \right\}$$

con

$$\epsilon(F) \equiv \left(\frac{\dot{F}}{2F}\right)^2 - \frac{\ddot{F}}{2F} = \begin{cases} 1 & \text{para } F = \text{sen}^2\, y \\ 0 & \text{para } F = 1 \\ -1 & \text{para } F = e^{2y} \end{cases} \tag{7}$$

donde las primas y los puntos representan derivación con respecto a x e y respectivamente.

Además

$$R^f = \frac{1}{\Delta}\left(C'' + \frac{B'C'}{B} - \frac{C'\Delta'}{2\Delta}\right) + \frac{C}{\Delta B}\left(B'' - \frac{B'^2}{2B} - \frac{B'\Delta'}{2\Delta}\right) +$$
$$+ \frac{2}{B}\left\{\frac{C}{2\Delta}\left(B'' + \frac{B'C'}{C} - \frac{B'\Delta'}{2\Delta}\right) - \epsilon(F)\right\}$$

Las componentes no nulas de $R^g_{\mu\nu}$ y R^g se calculan directamente a partir de las ecuaciones anteriores realizando el siguiente reemplazo

$$A \to \alpha,\ B \to \beta,\ C \to \gamma,\ D \to 0$$

Para $T^g_{\mu\nu}$ y $T^f_{\mu\nu}$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
T^g_{00} &= \frac{M^2}{4\pi k_f}\left(\frac{4\Delta}{9\alpha\gamma}\right)^v \gamma\left\{u\,\Theta - \frac{\gamma}{\Delta}\left[\alpha + A\left(\frac{2\beta}{B} - 3\right)\right]\right\} \\
T^g_{01} &= \frac{M^2}{4\pi k_f}\left(\frac{4\Delta}{9\alpha\gamma}\right)^v \frac{\alpha\gamma D}{\Delta}\left(3 - \frac{2\beta}{B}\right) \\
T^g_{11} &= -\frac{M^2}{4\pi k_f}\left(\frac{4\Delta}{9\alpha\gamma}\right)^v \alpha\left\{u\,\Theta - \frac{\alpha}{\Delta}\left[\gamma + C\left(\frac{2\beta}{B} - 3\right)\right]\right\} \\
T^g_{22} &= -\frac{M^2}{4\pi k_f}\left(\frac{4\Delta}{9\alpha\gamma}\right)^v \beta\left\{u\,\Theta - \frac{\beta}{B}\left(\frac{A\gamma + C\alpha}{\Delta} + \frac{\beta}{B} - 3\right)\right\} \\
T^f_{00} &= \frac{M^2}{4\pi k_f}\left(\frac{9\alpha\gamma}{4\Delta}\right)^u \left\{v\,C\,\Theta + \gamma\left(\frac{C\alpha}{\Delta} + \frac{2\beta}{B} - 3\right)\right\} \\
T^f_{01} &= -\frac{M^2}{4\pi k_f}\left(\frac{9\alpha\gamma}{4\Delta}\right)^u \left\{v\,D\,\Theta + \frac{\alpha\gamma D}{\Delta}\right\} \\
T^f_{11} &= -\frac{M^2}{4\pi k_f}\left(\frac{9\alpha\gamma}{4\Delta}\right)^u \left\{v\,A\,\Theta + \alpha\left(\frac{A\gamma}{\Delta} + \frac{2\beta}{\Delta} - 3\right)\right\} \\
T^f_{22} &= -\frac{M^2}{4\pi k_f}\left(\frac{9\alpha\gamma}{4\Delta}\right)^u \left\{v\,B\,\Theta + \beta\left(\frac{A\gamma + C\alpha}{\Delta} + \frac{\beta}{B} - 3\right)\right\}
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\text{donde } \Theta \equiv \left[-\frac{\alpha\gamma}{\Delta} + \frac{A\gamma + C\alpha}{\Delta} \left(3 - \frac{2\beta}{B}\right) + \frac{\beta}{B}\left(6 - \frac{\beta}{B}\right) - 6 \right]$$

Como $R^g_{01} - \frac{1}{2} g_{01}\ R^g = k_g\ T^g_{01}$ y como el miembro izquierdo de esta ecuación es idénticamente nulo, se puede deducir de la expresión (8) para T^g_{01} que: o bien $D = 0$ ó $3 - \frac{2\beta}{B} = 0$.

En el presente artículo se considera sólo la segunda posibilidad y consecuentemente B será reemplazado por $\frac{2}{3}\beta (= \frac{2}{3} x^2)$ cada vez que corresponda.

Las ecuaciones de campo se simplifican aún más notando que

$$\left.\begin{array}{l} \alpha T^g_{00} + \gamma T^g_{11} = 0 \\ A T^f_{00} + C T^f_{11} = 0 \end{array}\right. \quad \text{y} \quad \text{idénticamente} \tag{9}$$

En efecto, cuando las ecuaciones (9) son escritas en términos de los respectivos $R_{\mu\nu}$ (haciendo uso de las ecuaciones de movimiento), se descubre que $\alpha\gamma$ y Δ son constantes (También Θ resulta ser constante). Sin pérdida de generalidad puede elegirse $\alpha\gamma = 1$ (Ver Ref. 2 por ejemplo).

Después de algunas manipulaciones algebraicas las ecuaciones independientes que quedan son

$$-\frac{3\epsilon}{2x^2} + \frac{1}{\Delta x^2}(C + xC') = -\frac{M^2}{4\pi}\left(\frac{9}{4\Delta}\right)^u \left\{ \frac{(1-v)}{\Delta} + \frac{3v}{4} \right\} \tag{10a}$$

$$\frac{1}{3\Delta}\left(C'' + \frac{2C'}{x}\right) = -\frac{M^2}{4\pi}\left(\frac{9}{4\Delta}\right)^u \left\{ \frac{2}{3} v\Theta + \frac{A\gamma + C\gamma^{-1}}{\Delta} - \frac{3}{2} \right\} \tag{10b}$$

$$\frac{\epsilon}{x^2} - \frac{1}{x^2}(\gamma + x\gamma') = -\frac{M^2}{4\pi}\frac{k_g}{k_f}\left(\frac{4\Delta}{9}\right)^v \left\{ -\frac{(1+u)}{\Delta} + \frac{3u}{4} \right\} \tag{10c}$$

Integrando la primera de estas ecuaciones

$$C(x) = \frac{3\Delta}{2}\epsilon - \frac{2\mu_f}{x} - \frac{2\lambda}{9} x^2 \tag{11}$$

donde μ_f es una constante de integración, y

$$\lambda = \frac{M^2}{4\pi}\left(\frac{9}{4\Delta}\right)^u \left\{ \frac{(1-v)}{\Delta} + \frac{3v}{4} \right\}$$

Análogamente $\gamma(x)$ puede encontrarse integrando la ecuación (10)

$$\gamma(x) = \frac{2\mu_g}{x} - \frac{\Lambda}{3} x^3 \tag{12}$$

donde μ_g es otra constante de integración,

$$\Lambda = \frac{M^2}{4\pi} \frac{k_g}{k_f} \left(\frac{4\Delta}{9}\right)^v \left\{ \frac{3u}{4} - \frac{(1+u)}{\Delta} \right\}$$

y ϵ está definido por la ecuación (7).

Multiplicando la ecuación (10a) por x^2 y derivando la ecuación resultante respecto a x se encuentra que

$$\frac{1}{\Delta} (C'' + 2C'/x) = -2\lambda$$

Introduciendo este resultado en la ecuación (10b) se obtiene la siguiente relación

$$A\gamma + C\gamma^{-1} = \frac{3}{2}\Delta + \frac{2}{3}$$

la cual junto con la expresión (11) para C y la expresión (12) para γ permite obtener A como función de x.

De este modo se conocen todos los coeficientes métricos ya que $\alpha = \gamma^{-1}$ y $D = (AC - \Delta)^{1/2}$.

En un artículo posterior se discutirá la relación entre estas nuevas soluciones exactas de Gravedad Fuerte y el confinamiento de quarks.

Para tal efecto se estudiarán las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon:

$$\frac{1}{\sqrt{-f}} \partial_\mu (\sqrt{-f}\, f^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) + m^2 \phi = 0$$

para un campo escalar hadrónico ϕ acoplado al campo tensorial (de fondo) $f_{\mu\nu}$.

BIBLIOGRAFIA

1. ISHAM, C.J., SALAM, ABDUS y STRATHDEE, J., Phys. Rev. D 3, 867 (1971).
2. ISHAM, C.J. y STOREY, D., Phys. Rev. D **18**, 1047, (1978).
3. SALAM, ABDUS y STRATHDEE, J., Phys. Lett. **67 B**, 429 (1977).
4. HOJMAN, R. y SMAILAGIC, A., en preparación.
5. WEINBERG, S., Gravitation and Cosmology (Wiley, New York, 1972), Capítulo 8.