

**POLYTECHNIQUE MONTRÉAL**

affiliée à l'Université de Montréal

**Optimisation de la planification stratégique d'une mine à ciel ouvert en tenant  
compte de l'incertitude géologique**

**ZAYNEB BRIKA**

Département de mathématiques et de génie industriel

Thèse présentée en vue de l'obtention du diplôme de *Philosophiae Doctor*

Génie industriel

Août 2019

© Zayneb Brika, 2019.

# **POLYTECHNIQUE MONTRÉAL**

affiliée à l'Université de Montréal

Cette thèse intitulée:

## **Optimisation de la planification stratégique d'une mine à ciel ouvert en tenant compte de l'incertitude géologique**

présentée par **Zayneb BRIKA**

en vue de l'obtention du diplôme de *Philosophiae Doctor*

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

**Issmail EL HALLAOUI**, président

**Michel GAMACHE**, membre et directeur de recherche

**Roussos DIMITRAKOPOULOS**, membre et codirecteur de recherche

**François SOUMIS**, membre

**Mikael RONNQVIST**, membre externe

## DÉDICACE

*À mes parents exceptionnels, Sonia et Daoud, pour leur amour inconditionnel et leur support  
inégalable;*

*Et à mes deux chères jumelles Assya et Fatima, pour m'avoir donné la force de mener à terme  
cette aventure, maman vous aime plus que tout.*

## REMERCIEMENTS

Je tiens à adresser ici mes plus sincères remerciements aux personnes sans lesquelles l'élaboration de cette thèse n'aurait pas pu être menée au bon port.

Tout d'abord, un merci tout particulier respectivement à mon directeur et codirecteur de thèse Michel Gamache et Roussos Dimitrakopoulos. Je suis honorée d'avoir été encadrée par deux professeurs aussi compétents et expérimentés et qui ont toujours su, malgré leurs emplois du temps surchargés, se rendre disponibles et à l'écoute. Ils ont surtout aussi fait preuve de beaucoup de compréhension et d'humanité tout au long de ma thèse en comprenant qu'une jeune maman avait d'autres responsabilités qu'il fallait quelquefois prioriser aux dépens de ma thèse.

Je remercie également les partenaires industriels, par l'intermédiaire de l'École Polytechnique de Montréal et le COSMO de l'Université McGill, pour le soutien financier tout au long de mon programme de doctorat.

Ensuite, merci à Renaud Chicoisne pour ton précieux temps et ta patience. Tu en as écrit des pages et des pages pour m'expliquer la magie derrière l'algorithme de Bienstock-Zuckerberg. Je t'en serais toujours reconnaissante. De même, je tenais à remercier Serge Bisailon pour sa disponibilité et la porte de son bureau toujours grande ouverte pour accueillir les étudiants en détresse. Bien du temps fut sauvé grâce à lui tant en débogage qu'en temps de résolution, merci!

Sur un plan un peu plus personnel, je tenais à remercier ma mère d'avoir traversé l'Atlantique maintes fois pour « voler à mon secours » pendant les périodes de grand stress et ainsi me dépanner avec mes filles. Je le dois aussi à mon cher père qui a accepté, sans trop rechigner, de rester seul pendant de longs mois sans ma mère « partie en mission ».

Ensuite, mes remerciements s'étendent à tous mes collègues de la chaire de recherche de l'Université McGill, COSMO : Daniel, Fernanda, Amina, Matheus, João, Luiz, Ashish, Mélanie, Christian, Amir et Lingqing; qui ont été une deuxième famille pour moi et que je peux maintenant fièrement appeler amis. Nos discussions philosophiques souvent épineuses à l'heure du dîner vont beaucoup me manquer. Je remercie aussi mes chers amis Myriam, Souha, Adrien, Safae, Jem et Cherifa qui ont été d'un grand support moral. Je n'oublie pas non plus mon frère Salah-Eddine et ma sœur Abir qui ont dû faire du baby-sitting bénévolement pendant toutes ces années. Une pensée

à ma grande sœur Myriam qui a su, malgré la distance, m'apporter ses encouragements et ses prières.

Enfin, merci à mes chères filles Assya et Fatma sans vous, j'aurais sûrement fini ma thèse beaucoup plus tôt mais je n'en aurais pas été aussi fière. Je vous demande aussi pardon d'avoir sacrifié beaucoup du temps qui vous revenait devant mon code, j'espère vous le rendre un jour.

## RÉSUMÉ

Pour l'industrie minière, la planification est une étape critique impliquant plusieurs niveaux de décisions. Ces décisions se prennent à chaque maillon de la chaîne d'approvisionnement d'un complexe minier à savoir l'extraction, le transport, le stockage, le concassage, le traitement, etc. La complexité des problèmes de planification est modulable selon le degré de détails qu'on veut considérer et le nombre de composantes de la chaîne qu'on veut intégrer. Cette thèse s'intéresse aux problèmes de planification stratégique des mines à ciel ouvert dans un contexte d'incertitude géologique. L'objectif principal porte sur le développement d'un outil mathématique efficace et robuste pour soutenir les compagnies minières dans leurs processus de prise de décision. Pour ce faire, différentes variantes du problème ont été à l'étude, considérant, entre autres, plusieurs destinations et plusieurs éléments géologiques d'intérêt et incluant aussi des options d'investissement.

Dans le premier article, un modèle de base est présenté. À partir d'une représentation du gisement discrédité en blocs, on cherche à déterminer quand, le cas échéant, extraire chaque bloc et où l'envoyer : vers le stérile ou les usines de traitement. Cet ordonnancement doit être choisi de sorte que les profits générés par l'exploitation du gisement soient maximisés tout en minimisant les déviations des objectifs de production et en respectant les liens de préséance existants entre les blocs ainsi que les contraintes de ressources. Pour cet article, l'emphase est surtout mise sur la méthode de résolution qui servira de gabarit pour les autres variantes. Il s'agit d'une méthode de décomposition (basée sur l'approche de Bienstock et Zuckerberg) combinée avec une heuristique d'arrondissement et une recherche Tabou (RT). Les résultats obtenus, tant au niveau de la qualité de la solution que le temps de résolution, ont motivé l'extension du modèle en deux variantes dans les articles 2 et 3 tout en conservant plus ou moins la même stratégie de résolution.

Le deuxième article intègre les piles de minerai au modèle précédent. Le défi était de correctement modéliser le flux de matière au niveau des piles en considérant les limitations des méthodes d'optimisation existantes. Pour ce faire, un nouveau modèle linéaire a été développé. Ce dernier rompt avec les modèles classiques qui assument une homogénéisation parfaite des matériaux une fois arrivés dans la pile et propose une toute nouvelle approche permettant une estimation exacte du contenu des piles. Les limitations de cette formulation sont discutées et des recommandations pour y remédier sont aussi suggérées.

Comme troisième objectif, une certaine forme de flexibilité est rajoutée au modèle en intégrant des options d'investissement sur de nouveaux équipements. On montre que cette flexibilité permet d'augmenter la production et générer ainsi plus de profits. Pour résoudre cette variante, des adaptations ont dû être apportées à la méthode de résolution initiale. Une parallélisation au niveau de la RT a notamment été implémentée afin d'améliorer les temps de calcul de cette étape.

## ABSTRACT

In the mining industry, planning is a critical step involving multiple decision levels. These decisions are made at each stage of the mineral value chain in a mining complex, namely extraction, transportation, storage, crushing, processing, etc. The complexity of scheduling problems can be varied according to the degree of details we want to consider and the number of components of the chain we want to integrate. This thesis addresses the open pit mine strategic planning problem under geological uncertainty. The main objective is to develop an effective and robust mathematical tool to support mining companies in their decision-making processes. In order to achieve this, different variants of the problem have been studied, considering, among others, several destinations and multiple geological elements of interest and including investment options.

In the first paper, a basic model is presented. Given a three-dimensional representation of the deposit discretized into blocks, the model seeks to determine when, if ever, to extract each block and where to send it: towards waste dump or processing facilities. This scheduling must be chosen in a way that the profits generated by the deposit exploitation are maximized while minimizing the deviations from the production targets and respecting the slope constraints as well as the resource constraints. For this paper, the emphasis is mainly on the solution approach that will be used as a template for the next variants. It is based on a decomposition method (originally presented by Bienstock and Zuckerberg) combined with a rounding heuristic and a Tabu search. The results obtained, both in terms of solution quality and running time, motivated the extension of the model to two variants in papers 2 and 3 while retaining the same resolution strategy's structure.

The second paper integrates stockpiling as part of the optimization process. The challenge was how to correctly model the material flow inside the stockpiles considering the limitations of existing optimization methods. To tackle that, a new linear model has been developed. The latter breaks with the classic models that assume homogeneous mixing of the material once arrived in the stockpile and proposes a new approach for an accurate estimation of the stockpile content. The limitations of this formulation are discussed and recommendations to bypass them are also suggested.

As third objective, some form of flexibility is added to the model by including capital expenditure options. This flexibility allowed to increase production tonnage and thus generate more profits. To solve this variant, some adaptations had to be made to the initial solution approach. In particular, a



parallelization at the level of the Tabu search heuristic was implemented in order to speed-up this step.

## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE.....	III
REMERCIEMENTS .....	IV
RÉSUMÉ.....	VI
ABSTRACT .....	VIII
TABLE DES MATIÈRES .....	X
LISTE DES TABLEAUX.....	XV
LISTE DES FIGURES .....	XVI
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS .....	XVII
LISTE DES ANNEXES .....	XVIII
CHAPITRE 1 INTRODUCTION.....	1
1.1 Généralités.....	1
1.2 Définitions et concepts de base .....	1
1.2.1 Mine à ciel ouvert / Mine souterraine .....	1
1.2.2 Complexe minier .....	2
1.2.3 Modèle de blocs .....	2
1.2.4 Contour final d'une exploitation .....	2
1.2.5 Stérile/Minerai.....	2
1.2.6 Horizons de planification : Long, moyen et court terme.....	3
1.2.7 Optimisation stochastique .....	3
1.3 Description de la problématique .....	3
1.3.1 Contraintes de pente (ou d'antériorité).....	4
1.3.2 Sources d'incertitude.....	4
1.3.3 Piles de minerai .....	5

1.3.4	Équipements .....	6
1.4	Projet de recherche .....	6
1.5	Plan de la thèse .....	7
CHAPITRE 2 REVUE DE LA LITTÉRATURE.....		8
2.1	Recherche opérationnelle appliquée au domaine minier : .....	8
2.1.1	Problèmes de contours finaux : .....	8
2.1.2	Problème de la planification de l'exploitation : .....	9
2.2	Modèles stochastiques : .....	12
2.2.1	Importance de l'incertitude : .....	12
2.2.2	Apports de la programmation stochastique : .....	13
2.2.3	Modèles stochastiques : .....	14
2.3	Modélisation des piles de minerai: .....	17
2.4	Équipements : .....	18
2.5	Constats: .....	20
CHAPITRE 3 ORGANISATION DE LA THÈSE.....		21
CHAPITRE 4 ARTICLE 1: MULTI-PRODUCT MINE SCHEDULING OPTIMIZATION UNDER MULTI-ELEMENT GEOLOGICAL UNCERTAINTY .....		23
	Abstract .....	23
4.1	Introduction .....	23
4.2	Mathematical Formulation .....	27
4.2.1	Variables: .....	28
4.2.2	Parameters: .....	28
4.2.3	Objective function: .....	29
4.2.4	Constraints: .....	29
4.3	Solution Approach.....	31

4.3.1	Solving the Linear Relaxation.....	32
4.3.2	Rounding Heuristic .....	33
4.3.3	Tabu Search.....	35
4.4	Numerical Results .....	38
4.4.1	Benchmark instances.....	38
4.4.2	Parameters .....	39
4.4.3	Implementation.....	40
4.4.4	Numerical Results .....	41
4.4.5	Risk Profiles .....	42
4.5	Conclusions .....	44
	Acknowledgments .....	44
CHAPITRE 5 ARTICLE 2: SOLVING THE MIXED-INTEGER LINEAR PROGRAMMING PROBLEM FOR MINE PRODUCTION SCHEDULING WITH STOCKPILING UNDER MULTI-ELEMENT GEOLOGICAL UNCERTAINTY .....		45
	Abstract: .....	45
5.1	Introduction .....	46
5.1.1	Models without stockpiling.....	46
5.1.2	Models with stockpiling.....	48
5.2	Mathematical Formulation .....	50
5.2.1	Open pit mine production scheduling without stockpiling .....	50
5.2.2	A new linear model that considers stockpiling .....	53
5.3	Reformulation.....	56
5.4	Solution Approach.....	59
5.4.1	Solving the Linear Relaxation.....	59
5.4.2	Rounding Heuristic .....	60

5.4.3	Tabu Search.....	61
5.5	Numerical Results .....	61
5.5.1	Instances and parameters.....	62
5.5.2	Implementation.....	64
5.5.3	Numerical Results .....	64
5.6	Limitation and Recommendation .....	66
5.7	Conclusions .....	67
	Acknowledgments.....	68
	Disclosure statement .....	68
CHAPITRE 6 INTÉGRATION DES OPTIONS D'INVESTISSEMENT .....		69
6.1	Introduction .....	69
6.2	Formulation mathématique .....	70
6.2.1	Notation.....	70
6.2.2	Modèle mathématique .....	73
6.3	Méthode de résolution.....	76
6.3.1	Résoudre la relaxation linéaire .....	77
6.3.2	Trouver une solution entière réalisable .....	78
6.3.3	Améliorer la qualité de la solution .....	79
6.4	Résultats numériques.....	81
6.4.1	Implémentation.....	81
6.4.2	Cas d'étude .....	81
6.4.3	Options d'investissement considérées.....	82
6.4.4	Résultats .....	83
6.5	Conclusions .....	87

CHAPITRE 7	DISCUSSION GÉNÉRALE .....	89
CHAPITRE 8	CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS .....	92
8.1	Limitations de la solution proposée .....	92
8.2	Avenues de recherches .....	93
RÉFÉRENCES	.....	94

## LISTE DES TABLEAUX

Table 4-1 Overview of the five instances.....	39
Table 4-2 Economic parameters.....	40
Table 4-3 Costs of deviation from production targets (\$/tonne).....	40
Table 4-4 Summary of the average gaps and running times of the solutions found by the Bienstock-Zuckerberg extension and the different heuristics .....	41
Table 5-1. Overview of the five instances.....	62
Table 5-2. Overview of the constraints for each instance .....	63
Table 5-3. Economic parameters.....	63
Table 5-4. Costs of deviation from production targets (\$/tonne).....	64
Table 5-5. Summary of the average gaps and running times of the solutions found by Cplex, the Bienstock-Zuckerberg extension and the different heuristics. ....	65
Tableau 6-1 Paramètres miniers et économiques relatif au complexe étudié .....	82
Tableau 6-2 Exigences sur les produits.....	82
Tableau 6-3 Informations à propos des options d'investissement .....	83
Tableau 6-4 Temps de résolution et gap d'optimalité.....	84

## LISTE DES FIGURES

Figure 2-1 Les contours stochastiques de fosses sont plus larges que ceux obtenus par les méthodes conventionnelles (Dimitrakopoulos 2011).....	14
Figure 4-1. 2D block model and its corresponding graph.....	28
Figure 4-2. (a) represents the original graph $G$ containing only the slope constraints, (b) is obtained by duplicating $T$ times the graph $G$ and adding the inter-period arcs. (c) represents the graph $G$ and it is derived from (b) by duplicating each node $D$ times and adding the inter-destination arcs. ....	30
Figure 4-3 Current solution and corresponding neighborhood illustrated by $Bp -$ (blocks can be removed from $Sp$ ) and $Bp +$ (block can be added to $Sp$ ).....	36
Figure 4-4 Results of stochastic scheduling in terms of risk profiles for Fe, SiO <sub>2</sub> , Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> , P, and LOI .....	42
Figure 4-5 Results of stochastic scheduling in terms of risk profiles for Fe, SiO <sub>2</sub> , Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> , P, and LOI .....	43
Figure 5-1 Precedence constraints.....	58
Figure 6-1 Contraintes de précédence représentées dans un graphe orienté.....	77
Figure 6-2 Réparation de la solution par le report d'extraction de certains blocs .....	79
Figure 6-3 Parallélisation de la RT .....	80
Figure 6-4 Effet de la parallélisation.....	84
Figure 6-5 Production de minerai de l'usine 1 .....	85
Figure 6-6 Production de minerai de l'usine 2.....	86
Figure 6-7 VAN cumulative espérée avec et sans option d'investissement .....	87



**LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS**

VAN Valeur Actuelle Nette

BZ Bienstock-Zuckerberg

RT Recherche Tabou

**LISTE DES ANNEXES**

Annexe A DESCRIPTION DE L'ALGORITHME DE BIENSTOCK-ZUCKERBERG .....	103
Annexe B CHANGEMENTS POSSIBLES .....	106

## **CHAPITRE 1 INTRODUCTION**

### **1.1 Généralités**

L'industrie minière occupe une place de taille à l'échelle de l'économie mondiale. En effet, celle-ci fournit l'essentiel de nos besoins en minéraux et métaux qui constituent la matière première de nombreux biens d'équipements et de consommation. Par ailleurs, les compagnies minières doivent faire face à des enjeux multiples et souvent contradictoires tels que le besoin de répondre à une demande sans cesse grandissante tout en composant avec la raréfaction des ressources facilement accessibles d'une part et la pression exercée par les actionnaires pour l'obtention de profits à court terme d'autre part. La pérennité de ces compagnies dépendra alors en grande partie de leur capacité à réduire leurs coûts de production et à maximiser la rentabilité de leurs investissements. Cela va de pair avec l'efficacité de la planification puisque c'est de cette étape que découleront toutes les activités d'exploitation et de production. Il devient donc crucial de développer des outils d'aide à la décision qui permettent d'établir des planifications réalistes et visant la maximisation des profits. Néanmoins, ces outils se doivent d'être robustes compte tenu du caractère incertain de plusieurs paramètres notamment les données géologiques ou le cours des minéraux. Le moindre écart peut se chiffrer en millions de dollars et mettre en péril la faisabilité même d'un projet (Vallée 2000) d'où l'importance de considérer l'incertitude quitte à complexifier davantage le problème de planification. C'est dans ce contexte que s'inscrit la présente étude qui portera sur le développement d'un outil mathématique répondant aux besoins cités ci-dessus.

### **1.2 Définitions et concepts de base**

Cette section regroupe les définitions de certains concepts indispensables à la compréhension du document notamment pour un lecteur non familier au domaine minier.

#### **1.2.1 Mine à ciel ouvert / Mine souterraine**

Le choix de la méthode de minage est l'une des étapes les plus critiques lors de l'étude de rentabilité d'un projet minier. Ce choix est grandement influencé par l'emplacement du gisement. En effet, un gisement proche de la surface justifierait des opérations à ciel ouvert pour l'extraction. À

l'opposé, un gisement plus profond mènerait à des actions souterraines. Dans d'autres cas, plusieurs méthodes peuvent être combinées selon les zones et leurs spécificités propres.

### **1.2.2 Complexe minier**

Il s'agit d'une entreprise qui intègre à la fois les phases d'extraction du minerai à partir d'un groupe de mines, de transport, de stockage ainsi que les phases de traitement de la matière extraite au sein des différentes installations du site pour en faire un produit propre à la vente.

### **1.2.3 Modèle de blocs**

Ce modèle a été introduit par les ingénieurs miniers pour représenter en trois dimensions le gisement minier sous forme de blocs de mêmes dimensions. Il n'existe pas de dimensions standards puisque celles-ci varient selon la nature et l'ampleur du gisement. C'est la représentation la plus commune dans la littérature. En général, on associe à chaque bloc des informations sur sa composition géologique, sa position relative dans le gisement ainsi que les coûts de son extraction et ses revenus espérés. Ses informations sont des estimations obtenues grâce à des opérations de forage.

### **1.2.4 Contour final d'une exploitation**

Il permet de délimiter l'ensemble de blocs à exploiter durant la vie économique d'un gisement donné dans le but de maximiser les revenus totaux espérés.

### **1.2.5 Stérile/Minerai**

Lors d'une exploitation minière, on distingue deux types de matériaux dépendamment de leur devenir à la suite de leur extraction. Les stériles sont les matériaux qui présentent peu d'intérêts économiques. Ils sont alors mis de côté dans des bassins ou terrils sans être exploités. En règle générale, ils sont caractérisés par des teneurs faibles ou nulles en minéraux utiles. Les minerais, quant à eux, sont les roches contenant suffisamment de minéraux et métaux pour justifier leur exploitation.

Les méthodes classiques définissent un seuil pour distinguer les blocs stériles des blocs de minerai. En dessous d'une certaine teneur en minerai, un bloc est considéré comme stérile et économiquement non profitable. En effet, les métaux qu'il contient rapportent moins que ce que

son extraction entraîne comme coût. En revanche, au-dessus de ce seuil, un bloc est considéré comme profitable. Dans le cadre de cette thèse, aucune teneur de coupure ne sera utilisée. Le choix est laissé au solveur.

### **1.2.6 Horizons de planification : Long, moyen et court terme**

La planification minière se fait généralement en considérant trois différents horizons : le long terme (correspondant à la vie économique de la mine), le moyen terme (trois années en général) et le court terme (une année, des plans mensuels, hebdomadaires voire journaliers). Chaque terme a une fonction particulière. La planification à long terme définit les objectifs globaux de la compagnie et élabore, en conséquence, un plan pour les atteindre. Cela passe par la prise d'un ensemble de décisions stratégiques qui affecteront les différentes activités minières au long de son exploitation en l'occurrence, le choix de la teneur de coupure, les ressources disponibles ou encore l'organisation des activités. La planification à moyen terme s'intéresse à l'ordonnancement des activités sur une période de temps relativement réduite (un à trois ans typiquement pour des mines avec des durées de vie à plus d'une dizaine d'années). À cette étape, des nouvelles contraintes seront introduites telle la répartition des équipements sur le terrain, l'accessibilité, etc. Enfin, le court terme détaille l'ensemble des opérations à faire sur des horizons réduits à un mois voire une journée. Le plan de production en découle directement. Bien qu'intégrant certaines contraintes tactiques se rattachant notamment aux équipements, le sujet de cette thèse s'insère plutôt sous le volet de la planification stratégique.

### **1.2.7 Optimisation stochastique**

L'optimisation stochastique est une manière d'optimiser des problèmes où les décisions sont prises en présence d'incertitude contrairement à l'optimisation déterministe qui suppose une connaissance parfaite de tous les paramètres. Cette incertitude émane souvent du caractère aléatoire de certains paramètres ou alors une source d'information incomplète.

## **1.3 Description de la problématique**

Le problème de planification minière multi-périodes est connu pour être un problème très complexe dont la difficulté de résolution augmente rapidement avec la taille du gisement et le niveau de détail

recherché. Il incombe alors au planificateur de composer avec plusieurs niveaux de décision qu'il se doit de coordonner afin de livrer, en temps et lieu et au meilleur prix, les produits demandés.

La complexité de cette tâche ainsi que les enjeux qu'elle implique ont motivé cette présente étude. Le but sera d'élaborer un outil d'aide à la décision afin d'assister les gestionnaires et les planificateurs miniers. Le problème à l'étude considérera des mines à ciel ouvert impliquant plusieurs modes de traitement et plusieurs éléments géologiques d'intérêt. Il faudra élaborer une planification qui puisse satisfaire les objectifs de production, tout en maximisant les profits et respectant les ressources disponibles. Les prochaines sous-sections présentent certains aspects problématiques inhérents au sujet traité ainsi que les hypothèses utilisées.

### **1.3.1 Contraintes de pente (ou d'antériorité)**

Ce sont les contraintes imposées par la disposition des blocs dans le gisement. Un bloc ne peut être exploité que s'il est à découvert, i.e. tous les blocs qui sont directement au-dessus de lui ont été préalablement extraits, le rendant ainsi accessible par la surface.

### **1.3.2 Sources d'incertitude**

Une des problématiques rencontrées lors de toute planification, peu importe le projet, réside dans l'incertitude des données. Dans le domaine minier, les données géologiques représentent la source d'incertitude la plus importante par son impact sur la rentabilité du projet, d'où l'intérêt que lui ont porté les travaux de recherche en dépit de l'incertitude sur les prix des métaux ou sur les coûts de production.

La composition des blocs est en effet fournie par des modélisations réalisées à partir des échantillons recueillis par les opérations de forage d'exploration. Conventionnellement, des interpolations et moyennes sont utilisées pour attribuer une valeur moyenne à chaque bloc. Ces méthodes ont tendance à lisser la distribution des teneurs et ce, en éliminant les valeurs extrêmes. Dans ce cas, l'incertitude est ignorée et on suppose, à tort, une connaissance parfaite du profil géologique de la mine. À l'opposé, les simulations géologiques permettent de reproduire la distribution originale des teneurs et conserver la variabilité *in situ* du gisement. L'idée est que la teneur du bloc soit aléatoirement choisie parmi les données de forages réalisés aux alentours. Les modèles d'optimisation stochastiques utilisent ce genre de simulations comme données d'entrée pour réduire l'impact de l'incertitude (Godoy et Dimitrakopoulos 2011). Dans le cadre de cette

thèse, la deuxième approche sera adoptée. Le modèle mis en place devra optimiser la planification stratégique d'une mine à ciel ouvert en considérant simultanément plusieurs scénarios possibles du profil géologique du gisement.

### **1.3.3 Piles de minerai**

La plupart des complexes miniers disposent de piles de minerai (*stockpiles* en anglais) afin de répondre à des besoins divers (Kuchling 2018). L'utilité première comme son nom l'indique est le stockage d'une partie du minerai pour des utilisations futures. Dans le cas des mines ayant une demande fluctuante, les stocks permettent de réguler la production et servent également de réserves pour faire face à des interruptions intempestives. De plus, les piles de minerai peuvent se révéler très utiles voire essentielles dans le cas de mines qui traitent différents types de minerai parfois incompatibles lorsque mélangés ensemble dans certaines concentrations. Le minerai problématique est alors stocké jusqu'à temps qu'on ait suffisamment de stock pour pouvoir le traiter à l'usine. Ensuite, l'utilisation des piles de minerai favorise l'utilisation immédiate du minerai de meilleure qualité tout en permettant le stockage du minerai dont la qualité est inférieure, mais économiquement assez intéressante pour ne pas être traité comme du stérile. Enfin, avoir recours aux piles de stockage est important lorsqu'une usine a certaines exigences par rapport aux teneurs des métaux ou contaminants présents dans le gisement. S'approvisionner auprès de différents stocks permet alors de s'assurer que la qualité du mélange envoyé à l'usine réponde aux critères prédéfinis. C'est surtout ce dernier avantage qui motivera la volonté d'intégrer cette composante dans une des variantes de cette étude.

Bien que stocker est dans la plupart bénéfique, le considérer s'accompagne de plusieurs défis autant sur le plan pratique que théorique. En effet, ces stocks peuvent quelquefois atteindre une taille énorme s'ils sont accumulés pendant de nombreuses années, il faudra alors penser à rajouter des contraintes par rapport à leur nombre et leurs tailles. Aussi, faut-il faire attention à la dégradation due à l'oxydation qui peut être un problème à long terme. Enfin, modéliser correctement le flux de matière au niveau des piles est en soi problématique. Tous ces éléments devront être pris en compte lors de la modélisation.

### **1.3.4 Équipements**

Plusieurs équipements interviennent dans la chaîne d'approvisionnement du complexe minier. Les pelles chargent la matière dans les camions afin de les transporter vers les décharges, les usines ou encore les piles de minerai. Au niveau des usines, le minerai passe d'abord par les concasseurs (et éventuellement par les broyeurs situés à l'intérieur de l'usine de traitement) qui en réduisent la taille de sorte que ses différents composants puissent être séparés. Les modèles conventionnels portant sur la planification stratégique intègrent rarement le facteur équipement dans le processus d'optimisation. Dans le cas échéant, on le remplace par des capacités d'extraction ou de traitement fixes. Dans le contexte de cette dissertation, la possibilité d'acheter de nouveaux équipements sera rajoutée à la formulation. Seront considérés les temps requis pour charger et déplacer la matière extraite en tenant compte de la disponibilité et capacités des pelles et des camions respectivement. La capacité des concasseurs limitera aussi la production. Néanmoins, seront exclus de cette étude tous les détails affectant le routage, les rampes ou l'affectation des équipements à des zones de minage particulière, etc. Aussi, bien que cela ne reflète pas toujours la réalité, les flottes seront considérées homogènes pour des soucis de simplification.

## **1.4 Projet de recherche**

L'objectif visé par le projet de recherche est de créer un outil mathématique pour concevoir la planification stratégique d'une mine à ciel ouvert en tenant compte de l'incertitude géologique et des contraintes opérationnelles. Bien que faisant l'objet de plusieurs travaux dans la littérature, la tâche reste fastidieuse et aucune solution jusque-là proposée ne semble répondre de façon satisfaisante aux attentes de l'outil.

Cet outil est développé en trois grandes étapes. D'abord, est proposée une nouvelle approche de résolution pour le problème de la planification stratégique de production d'une mine à ciel ouvert dans un contexte d'incertitude à éléments multiples. Le modèle comprend les contraintes classiques de réserve et de préséance, mais aussi des contraintes de mélange et de capacité. Testée sur des cas d'étude réels, la méthode réussit à fournir des solutions de très bonne qualité en termes de gap d'optimalité mais aussi de capacité à atteindre les objectifs quantitatifs et qualitatifs de production et ce, en un temps de calcul raisonnable.



Ensuite, ce même modèle est modifié de sorte qu'il se rapproche plus de la réalité en y intégrant les piles de minerai (*stockpiling*). Le défi est de trouver un bon compromis entre les limitations des méthodes d'optimisation et le désir de modéliser le plus précisément possible le flux de matière au niveau des ces piles. Une nouvelle formulation est donc développée de sorte que le modèle reste linéaire et la méthode de résolution, moyennant quelques changements mineurs, toujours applicable. Les limitations de cette formulation sont discutées et quelques recommandations pour les contourner sont suggérées.

Enfin, le modèle est encore une fois modifié pour y inclure des options d'investissement et ainsi offrir une certaine flexibilité à la planification. Les options comprennent l'achat de nouveaux pelles, camions et concasseurs. Des contraintes viennent se rajouter telles que la capacité sur les équipements ou encore le temps machine disponible. L'impact sur le plan de production est étudié à travers des cas d'étude

Pour les trois variantes, les simulations des instances utilisées pour les tests numériques représentent de vrais gisements et sont fournis par les partenaires industriels du centre de recherche COSMO. Seules les données sur les équipements sont définies en se basant sur des sources externes pour les besoins de l'étude.

## **1.5 Plan de la thèse**

Cette thèse est organisée en huit chapitres. Dans ce premier chapitre, quelques définitions des concepts de base sont présentées en vue de familiariser le lecteur à certains termes et faciliter la compréhension du sujet. S'ensuit une brève présentation de la problématique du projet ainsi que les différentes approches adoptées pour la résoudre. Le second chapitre passera en revue les différents travaux réalisés jusqu'à ce jour autour du sujet afin d'établir une frontière des connaissances. Le troisième chapitre introduit les trois contributions majeures de la thèse en décrivant la démarche de l'ensemble du travail de recherche et l'organisation générale du document. Ces contributions seront décrites en détails dans les chapitres 4, 5 et 6 respectivement. Le chapitre 7 synthétise quant à lui les différentes contributions de la thèse. Enfin, le dernier chapitre en définit les limites et propose quelques avenues de recherche en lien avec les problèmes traités dans cette thèse.

## CHAPITRE 2 REVUE DE LA LITTÉRATURE

Malgré une réticence qui a longtemps duré, les vingt dernières années ont connu l'ouverture progressive du domaine minier réputé conservateur à la recherche opérationnelle. En effet, la taille des problèmes, la complexité des activités, les nombreuses contraintes ainsi qu'un souci de rentabilité grandissant ont fait du recours aux outils d'aide à la décision une nécessité. Dans ce qui suit, une revue de littérature répartie sur quatre grandes sections. La première évoquera sommairement un historique des plus grandes avancées de la recherche opérationnelle dans le domaine de la planification minière. S'ensuivra un retour sur l'introduction de l'incertitude lors de cette étape. Ensuite, on recensera les approches jusque-là développées pour inclure les piles de minerai dans le processus d'optimisation. Enfin, un volet sera consacré aux tentatives de rajouter une forme de flexibilité aux modèles. Pour un aperçu général de l'application de la recherche opérationnelle dans le domaine minier, le lecteur est invité à consulter les articles de Osanloo *et al.* (2008), Newman *et al.* (2010) et Lamghari (2017).

### 2.1 Recherche opérationnelle appliquée au domaine minier :

#### 2.1.1 Problèmes de contours finaux :

Les premiers travaux apparus dans les années soixante se sont intéressés au problème de contours finaux d'exploitation qui consiste à définir pour une mine à ciel ouvert l'ensemble des blocs à exploiter en vue de maximiser le revenu total et ce, en respectant uniquement les contraintes de préséance.

On a d'abord eu recours à des méthodes heuristiques dont les plus connues sont celle du cône mobile et celle de la programmation dynamique. La première est un processus itératif qui évalue plusieurs contours possibles et ce, en déplaçant le sommet d'un cône d'un bloc de minerai à un autre. L'algorithme prend fin quand tous les blocs à valeur économique positive ont été testés. Il existe plusieurs variantes qui diffèrent par leur mise en œuvre, citons celles de Lemieux (1979), Korobov (1974) et Philips (1973). La deuxième catégorie d'heuristiques a certes prouvé sa supériorité par rapport à la méthode du cône mobile, néanmoins elle a eu beaucoup moins de succès auprès des industriels la jugeant complexe et peu intuitive. Les variantes les plus connues de cette méthode ont été développées par Johnson (1971) et Koenigsberg (1982).

À la même période, les méthodes exactes ont fait leur apparition. La méthode de Lerchs et Grossmann (1965) se base sur la théorie des graphes en proposant un algorithme résolvant le problème de contours finaux comme un problème de fermeture maximale dans un graphe orienté où les nœuds représentent des blocs et les arcs les relations de préséance. Picard (1976), quant à lui, propose de résoudre le problème avec un algorithme de flot maximum en rajoutant une source reliée à tout nœud dont la valeur est positive ou nulle et un puit relié à tout nœud dont la valeur est négative ou nulle. La fermeture maximale est alors formée par l'ensemble des nœuds se situant du côté de la source dans la coupe minimale. Ces deux méthodes sont encore d'actualité et restent les plus utilisées en pratique. Elles ont l'avantage d'être faciles à implémenter et intuitives. Pour de plus amples informations, l'article de Hochbaum et Chen (2000) présente une analyse critique des différentes méthodes utilisées pour définir le contour final.

### **2.1.2 Problème de la planification de l'exploitation :**

Une fois le contour final défini, il importe de définir pour chaque année l'ensemble des blocs à extraire de sorte que le profit total actualisé soit maximisé. Dagdeleen et Johnson (1986) proposent de décomposer le problème de sorte qu'on se ramène à la résolution de plusieurs problèmes des contours finaux, un pour chaque année. Ils préconisent l'algorithme de Lerchs et Grossman (1965) pour la résolution. Il s'agit d'une heuristique ne garantissant donc pas l'optimalité d'autant plus qu'elle ne prend pas en considération les contraintes de ressources.

Plusieurs essais pour résoudre le problème de planification avec les techniques d'optimisation ont depuis été réalisés en intégrant ces contraintes. Les premières tentatives ont formulé le problème sous forme de modèles en nombres entiers (Gershon 1983), ces modèles ne sont pas utilisés en pratique car non adaptés à la taille des problèmes réels qui comportent des milliers de variables et des millions de contraintes pour des mines de taille moyenne.

Outre la méthode de décomposition introduite par Dagdeleen et Johnson (1986), plusieurs autres méthodes ont été proposées par la suite pour tenter de réduire la taille du problème. La méthode d'agrégation des blocs a été assez populaire et beaucoup d'auteurs s'y sont intéressés. Ramazan (2007) a, par exemple, développé l'algorithme « Fundamental Tree Algorithm » qui agrège de façon optimale les blocs et ce, en se basant sur la programmation linéaire sans passer par des variables entières. Des méthodes heuristiques pour agréger les blocs de minerai ont aussi été proposées par Ramazan (1996) ou encore Whittle (1988).

D'autres ont combiné les contraintes de production et de précédence pour identifier la période de temps pendant laquelle chaque bloc peut être extrait. Le calcul de ces périodes peut être réalisé en temps polynomial. Topal (2003) fut l'un des premiers à adopter cette approche en vue de réduire le nombre de variables binaires requises et ce, en définissant pour chaque bloc au plus tôt et au plus tard quand ce dernier pourra être extrait. Les variables associées aux périodes en dehors de cet intervalle sont éliminées ou fixées à 0 pour signifier une extraction impossible. Bien qu'initialement appliquée à une mine souterraine, cette approche peut très bien être adaptée aux mines à ciel ouvert comme le démontrent Bley *et al.* (2010), Jélvez *et al.* (2016) et Rimélé *et al.* (2018). En plus de réduire la taille du problème, cette méthode a l'avantage de garantir l'optimalité des solutions.

La relaxation des contraintes d'intégralité a aussi été largement abordée dans la littérature. Ramazan et Dimitrakopoulos (2013) relaxent uniquement les variables associées aux blocs considérés comme stériles et conservent l'intégralité des blocs de minerai. Une autre approche consiste à utiliser une fenêtre de temps coulissante. Cette heuristique fut initialement utilisée dans des problèmes d'ordonnancement (Bilge et Ulusoy 1995) ou encore des problèmes de tournées de véhicules (Ferland et Fortin 1989) avant d'être adaptée au problème de planification minière et démontrer son efficacité en résolvant des problèmes à moins de 2% de l'optimalité. Lamghari et Dimitrakopoulos (2014) et Cullenbine (2011) adoptent cette approche pour résoudre le problème de planification stratégique des mines à ciel ouvert. L'Heureux *et al.* (2013) l'adaptent pour une planification à moyen terme. Enfin, Collard (2013) utilise la même idée mais l'applique à la planification stratégique d'une mine souterraine. Quel que soit le type de mine à l'étude ou l'horizon de planification, l'idée de la fenêtre coulissante est de définir, résoudre et corriger partiellement et de façon récursive un modèle approximatif se composant de variables fixées pour les premières périodes de temps, un sous-modèle exact défini sur une « fenêtre » réduite de périodes intermédiaires et, enfin, un sous-modèle relaxé pour les périodes ultérieures.

Récemment, De Lara *et al.* (2017) ont développé une approche basée sur la programmation dynamique. Ils introduisent quatre différentes stratégies pour attribuer un indice de priorité à chaque opération; ce qui a pour effet de réduire la complexité du problème. Pour ce faire, ils définissent la localisation d'un bloc en fonction de la colonne à laquelle il appartient et à quelle profondeur il se situe. Ensuite, chaque colonne est modélisée comme étant une tâche à exécuter, sa profondeur indique son état de progression et son indice de priorité est proportionnel à la valeur

économique des blocs autour et en dessous du bloc situé au top de la colonne. Une séquence d'extraction est ensuite construite en priorisant les tâches ayant les indices les plus élevés et en respectant les contraintes de précédence. Bien que les solutions obtenues soient sous-optimales, les temps de résolution réduits rendent la méthode intéressante.

Une autre méthode qui a aussi fait ses preuves et qui semble pour l'instant être la plus efficace pour des problèmes de grande taille : la décomposition Lagrangienne. Celle-ci se démarque par le fait de fournir rapidement des solutions grâce à l'exploitation de la structure particulière du problème de planification. La convergence peut toutefois être lente, ce qui se traduit par des solutions dont la qualité n'est pas garantie pour cause d'arrêt prématuré des algorithmes. Pour pallier cela, Tachefine (1997) propose la relaxation lagrangienne des contraintes de ressources pour se ramener à un problème de fermeture maximale qu'il propose de résoudre avec l'algorithme des pré-flots. Il innove surtout par rapport à l'utilisation de la méthode des faisceaux pour ajuster les multiplicateurs de Lagrange plutôt que la méthode classique du sous-gradient. Pour réparer les solutions obtenues par la relaxation, il incorpore en premier lieu une heuristique simple qui permet d'obtenir des solutions satisfaisant les contraintes de ressource. En second lieu, il fait appel à une RT afin d'améliorer la valeur de la solution. Les gaps obtenus varient de 0.1% à 3%, néanmoins les instances utilisées pour faire les tests numériques demeurent expérimentales et l'heuristique développée n'est plus valide dans un contexte où le problème est restreint par des bornes inférieures.

Plus tard, Boland *et al.* (2009) proposent une méthode de désagrégation itérative qui affine les agrégats jusqu'à ce que ce que ceux-ci produisent la même solution optimale avec la relaxation linéaire du problème mixte en nombre entiers qu'avec la relaxation linéaire d'un modèle sans agrégation. Dans l'article, les auteurs présentent plusieurs stratégies pour la création des agrégats raffinés et ce, en utilisant principalement les résultats du problème dual et l'exploitation de la structure du problème.

Bienstock et Zuckerberg (2009, 2010), quant à eux, développent un algorithme itératif se basant sur la décomposition lagrangienne pour résoudre la relaxation linéaire du problème avec un nombre arbitraire mais relativement réduit de contraintes de ressource. Cet algorithme, appliqué à des problèmes avec des millions de variables et des dizaines de millions de contraintes de précédence, converge vers l'optimalité avec moins de 20 itérations sachant que chaque itération ne dure que

quelques secondes. Munoz *et al.* (2018) prouvent l'exactitude de leur approche en la classant comme un algorithme de génération de colonnes. Ils présentent aussi une forme plus générale du modèle et proposent quelques techniques pour améliorer la performance de l'algorithme.

Chicoisne *et al.* (2012) utilisent aussi la décomposition pour résoudre la relaxation linéaire du problème de planification ayant une seule contrainte de capacité par période de temps. Ils tirent profit de la structure du problème similaire à celle du problème de sac à dos. Combinant cela à une heuristique se basant sur le tri topologique et une recherche locale, les solutions présentent des gaps de moins de 3% de l'optimalité au bout d'une heure pour des problèmes de taille réelle (jusqu'à 5 millions de blocs et une vie économique de 20 ans). Les auteurs expliquent aussi comment généraliser leur méthode pour supporter plusieurs contraintes de ressource par période.

Enfin, plusieurs travaux ont tenté de résoudre le problème de planification, en ayant recours aux heuristiques classiques. Parmi les plus populaires, on retrouve le recuit simulé qui imite le processus utilisé en métallurgie, où une maîtrise du refroidissement lent permet de réorganiser la structure moléculaire d'un solide et l'amener vers une configuration stable. Transposée en optimisation, cette méthode est utilisée pour trouver les optimums d'une fonction (Kirkpatrick *et al.* 1983). Kumral et Dowd (2005) et Sari et Kumral (2014) adoptent cette approche pour résoudre des instances larges du problème de planification minière. D'autres heuristiques ont aussi été largement utilisées telles que l'algorithme génétique (Denby et Schofield 1994, 1995, Milani 2016) ou encore l'algorithme de colonie de fourmis (Sattarvand et Niemann-Delius 2013, Shishvan et Sattarvand 2015). D'autres ont combiné efficacement les heuristiques et les méthodes d'optimisation tel que présenté dans l'article de Lamghari *et al.* (2015) qui propose une méthode hybride basée sur la programmation linéaire et la recherche locale à voisinage variable.

## **2.2 Modèles stochastiques :**

### **2.2.1 Importance de l'incertitude :**

Bien que les modèles déterministes soient de plus en plus performants, une lacune de taille subsiste. En effet, les approches traditionnelles notamment celles adoptées par les modèles déterministes considèrent les complexes miniers de façon statique sans une considération explicite des sources d'incertitude et des risques menant ainsi à des évaluations et des performances sous-optimales du complexe minier dans son ensemble. L'incertitude entourant certains paramètres est, en fait,

connue pour être la cause principale pour laquelle les objectifs de production ne sont pas atteints. Baker and Giacomo (1998) démontrent que les écarts émanent notamment de la mauvaise représentation du gisement. Sur 48 projets miniers en Australie, 13 révèlent avoir 20% de réserves de plus que prévu alors que 9 obtiennent 20% de moins que ce qui était espéré. De plus, Vallée (2000) mentionne une étude faite par la Banque Mondiale au Canada et aux États-Unis révélant que 73% des projets miniers ont été abandonnés prématurément en raison de gros écarts dans leurs estimations de réserves en minerai qui se sont traduits par des pertes colossales.

Outre les données géologiques, d'autres paramètres sont concernés par l'incertitude et jouent aussi un rôle dans la VAN espérée du projet. Parmi ces paramètres, citons la fluctuation de la demande en matières premières et en métal (Sabour et Dimitrakopoulos 2011, Asad et Dimitrakopoulos 2013) qui affecte, conséquemment, les prix de vente (Evatt et al. 2012) mais aussi les coûts de production, de traitement, etc. Néanmoins, seule l'incertitude géologique a réellement joui de l'intérêt des chercheurs compte tenu de son impact majeur sur la rentabilité des projets miniers d'estimation. Grâce à une analyse de sensibilité sur l'impact de plusieurs facteurs financiers (VAN, taux de recouvrement et de rendement interne, etc.), Dowd (1994) démontre que la performance d'un projet est substantiellement affectée par l'incertitude géologique.

### **2.2.2 Apports de la programmation stochastique :**

Lors de la planification, plusieurs données essentielles manquent ou sont partiellement connues. Les méthodes conventionnelles choisissent en général d'ignorer cette inexactitude ou alors essaient de la réduire. En ce qui concerne les données géologiques, par exemple, les ingénieurs se fient à des représentations utilisant la technique dite d'interpolation. À la suite d'opérations de forage, un modèle de gisement unique est réalisé en utilisant la moyenne des données locales. Ceci a évidemment pour effet de lisser la distribution, d'ignorer les valeurs extrêmes et de fournir de ce fait, des représentations erronées du gisement qui sur ou sous évaluent le potentiel minier réel (Ravenscroft 1992).

La simulation stochastique (Boucher et Dimitrakopoulos 2009) est venue remédier à cette problématique en étant capable de reproduire la distribution des teneurs et de conserver ainsi la variabilité *in situ* du gisement. L'idée est d'associer à chaque bloc, avec une probabilité d'occurrence proportionnelle aux données recueillies, une valeur aléatoire parmi les teneurs obtenues grâce au forages effectués dans cette aire. Le caractère aléatoire rend aussi ces simulations

équiprobables. Celles-ci sont utilisées comme données d'entrée et permettent d'obtenir des résultats plus proches de la réalité et ultimement meilleurs.

En effet, le recours à l'optimisation stochastique augmente la fiabilité de la planification et ses chances d'atteindre les objectifs de production grâce à une modélisation plus fidèle à la réalité et une meilleure gestion du risque notamment en ce qui concerne la demande en minerai. La considération de l'incertitude a aussi permis d'obtenir des VAN meilleures (15-30% de plus en moyenne) que celles obtenues par les modèles déterministes (Albor Consuegra et Dimitrakopoulos 2010, Leite et Dimitrakopoulos 2014). Cela s'explique, entre autres, par le fait que, pour un contour ultime de fosse donné, l'optimisation stochastique est capable de déterminer quels groupes de blocs qui, extraits ensemble, ont de fortes chances d'améliorer le tonnage et la qualité du minerai (10-15% de métal extrait de plus). Ceci est un résultat direct d'un mélange plus efficace et d'une meilleure compréhension de la distribution spatiale et de la relation entre les blocs de qualité supérieure. En revanche, les modèles conventionnels, en se basant sur une représentation unique du gisement estimé à partir de moyennes et d'interpolations, estiment à la baisse ou la hausse la composition géologique des blocs, ce qui donne lieu à une sous-évaluation du potentiel économique du projet minier comme l'explique Dimitrakopoulos (2011). L'intégration de l'incertitude lors de la phase de définition du contour ultime permet d'obtenir des fosses plus larges comme le montre la Figure 2-1:



Figure 2-1 Les contours stochastiques de fosses sont plus larges que ceux obtenus par les méthodes conventionnelles (Dimitrakopoulos 2011)

### 2.2.3 Modèles stochastiques :

La combinaison de ces améliorations justifie l'intérêt qu'ont porté les auteurs à l'optimisation stochastique ces dix dernières années. Différentes approches pour aborder l'incertitude ont été proposées. On retrouve d'abord les modèles robustes et averses au risque qui visent à obtenir des planifications générant des profits acceptables dans le pire des scénarios et ce, dans le but de



garantir un revenu minimum avec une certaine probabilité (Espinoza *et al.* 2013, Amankwah *et al.* 2013).

Ensuite, viennent les modèles risque-neutres qui optimisent la planification en tenant compte de tous les scénarios simultanément sans pour autant donner plus de poids à un scénario en particulier. On distingue dans la littérature deux principales approches utilisant ces modèles. La première utilise un modèle de programmation stochastique multi-étapes proposé pour la première fois par Boland *et al.* (2008). Leur modèle définit différents niveaux de décisions qui sont prises en fonction des informations révélées sur les paramètres incertains. À chacune des périodes de la planification, une décision peut être modifiée en se basant sur les décisions prises dans des périodes antérieures. Néanmoins, vu la complexité du problème, les auteurs ont dû avoir recours à l'agrégation des blocs et de scénarios pour pouvoir résoudre problème; ce qui mène à des solutions sous optimales. Plus tard, Moreno *et al.* (2017) ont proposé un modèle à deux étapes où la première étape représente les décisions sur l'extraction, tandis que la deuxième étape définit pour chaque scénario la destination de chaque bloc en supposant qu'à ce stade, les attributs géologiques deviennent connus. Pour résoudre le problème, ils utilisent l'algorithme de Bienstock-Zuckerberg (Bienstock et Zuckerberg 2010) suivie d'une heuristique basée sur un ordonnancement topologique (Chicoisne 2012).

L'autre option consiste à minimiser les écarts par rapport aux objectifs de production. La planification optimale est celle qui maximise la VAN tenant compte de l'incertitude décrite par l'ensemble des simulations considérées (Ramazan et Dimitrakopoulos 2004b). Ce modèle s'écrit sous forme d'un modèle stochastique à deux étapes où les différentes variables de décision sont prises à la première étape et les variables quantifiant les écarts représentent les variables de recours. La formulation originale a depuis été étendue pour supporter des problèmes plus complexes. Benndorf et Dimitrakopoulos (2013) s'intéressent à un gisement de fer où l'incertitude géologique touche plusieurs éléments à la fois. De plus, les auteurs introduisent dans la fonction Objectif un terme pénalisant une activité non lissée. Ramazan et Dimitrakopoulos (2013) prennent en compte dans leur modèle la lixiviation, ainsi que l'option de stockage dans des piles de minerai. Les auteurs appliquent également un taux d'actualisation sur le risque géologique qui a pour effet d'augmenter le coût des déviations sur les premières années d'exploitation et le diminuer vers la fin de vie économique de la mine. Afin de réduire les temps de calcul lors de la résolution, les variables relatives aux blocs de stériles sont considérés comme des variables continues et seules celles relatives aux blocs de minerai sont entières. Lamghari *et al.* (2013) utilisent, quant à eux, une

métaheuristique basée sur une recherche à voisinage variables. Lamghari *et al.* (2015) ont ensuite développé une méthode hybride à deux phases pour optimiser la planification d'une mine à ciel ouvert en utilisant une série de modèles de programmation linéaire appliqués de façon séquentielle pour générer une solution initiale. Cette solution initiale est ultérieurement par la suite améliorée en appliquant une heuristique de recherche à trois voisinages. Les résultats numériques prouvent que la formulation proposée est capable de résoudre un problème NP-difficile et de grande échelle en quelques minutes, avec un gap d'optimalité inférieur à 3,2% par rapport à la solution optimale de la relaxation linéaire. Rimélé *et al.* (2018) proposent un modèle qui prend en considération l'élimination du stérile et des résidus dans les fosses, ce qui assure la durabilité environnementale des opérations minières. Pour résoudre leur modèle, les auteurs adaptent une heuristique utilisant une fenêtre coulissante proposée par Dimitrakopoulos et Ramazan (2008). Le modèle proposé par Ben-Awuah *et al.* (2018) optimise simultanément le plan de production de la mine ainsi que la gestion du déversement du stérile dans des fosses. L'objectif est de maximiser la VAN tout en minimisant les coûts relatifs à la construction des fosses ainsi que les déviations des objectifs. La méthode de résolution implique une étape de prétraitement visant à réduire le nombre de variables de décision par la création d'un contour final et l'agrégation de blocs miniers en coupes minières à chaque niveau ou banc situé à l'intérieur du contour final du gisement.

Cependant, toutes les études mentionnées ci-haut visent à optimiser la planification minière en tant que composant indépendant du complexe minier et ne tiennent pas compte de la totalité de la chaîne d'approvisionnement et des synergies qui puissent exister entre ses différentes composantes. Toujours dans l'esprit de proposer des modèles de plus en plus réalistes et précis, la tendance actuelle s'oriente vers des modèles d'optimisation dite globale. Ces derniers s'intéressent aux phases d'extraction mais aussi de traitement, considèrent plusieurs métaux et minéraux et traitent à la fois les options de mélange et les traitements alternatifs menant à des produits distincts (Pimentel *et al.* 2010, Bodon *et al.* 2011). Montiel et Dimitrakopoulos (2013) ont été parmi les premiers à proposer un modèle d'optimisation globale appliquée dans un contexte stochastique. Les auteurs considèrent plusieurs types de minerai qui peuvent être traités différemment dépendamment de leurs caractéristiques. Appliquée à un complexe minier de cuivre, leur méthode a pu réduire les déviations à moins de 5% par rapport à la planification originale tout en augmentant la VAN de 4%. Montiel et Dimitrakopoulos (2015, 2017) étendent la formulation pour y inclure les piles de minerai et proposent différentes heuristiques comme approche de résolution.

Goodfellow et Dimitrakopoulos (2015, 2017) proposent un modèle stochastique d'optimisation globale avec recours. Ils y combinent trois métaheuristiques en l'occurrence le recuit simulé, l'optimisation par essais particuliers et les évolutions différentielles. Leur méthode inclue une politique pour le choix des destinations des blocs une fois extraits. Les résultats obtenus sont très prometteurs.

### **2.3 Modélisation des piles de minerai:**

Malgré tous les progrès réalisés les dernières années en termes de modélisation des complexes miniers, une composante demeure problématique en l'occurrence les piles de minerai qui ont longtemps été exclues du processus d'optimisation de la planification minière. En effet, modéliser correctement le flux de matière au niveau des piles se heurte aux limitations des méthodes d'optimisation conventionnelles. Des progiciels considérant le stockage comme partie intégrante du processus d'optimisation existent dans l'industrie (Whittle 2010, Mintec 2013, MineMax 2016) néanmoins la nature de leur modélisation et de résolution en limite l'intérêt. Pour remédier à cela, les chercheurs ont dû émettre certaines hypothèses pour faciliter la modélisation du flux de matière.

L'approche la plus commune assume que le matériau, une fois envoyé aux piles de minerai, est automatiquement mélangé et ce, de façon homogène. Par conséquent, une fois récupéré, le matériau a désormais une teneur égale à la teneur moyenne de la pile. Cette hypothèse combinée au principe de conservation de matière crée des contraintes non linéaires non convexes. Les efforts pour résoudre ce modèle se sont alors résumés à des solutions sous-optimales ou encore des linéarisations souvent impliquant des hypothèses irréalistes ou très simplistes. Smith (1999) utilise un modèle linéaire par morceaux pour représenter le produit de la teneur moyenne au sein de la pile du minerai par la quantité retirée pour une période de temps donnée. Il s'agit d'une des premières tentatives pour modéliser « correctement » la teneur des piles, mais l'exactitude des approximations utilisées ne peut être quantifiée ou vérifiée. Akaike et Dagdelen (1999) supposent qu'il existe une infinité de stocks/piles; en d'autres termes, chaque bloc a son stock associé. On préserve ainsi la traçabilité de chaque bloc de son extraction jusqu'à sa destination finale, en passant par les piles de minerai. Cette hypothèse est évidemment irréaliste, même si elle contourne le problème de non-linéarité. Ramazan et Dimitrakopoulos (2013) et Smith et Wicks (2014) adoptent la même hypothèse, mais dans deux contextes différents. Le premier article considère un cadre stochastique pour refléter l'incertitude géologique et économique. Le deuxième article considère

plutôt un contexte déterministe dans lequel le modèle est résolu à l'aide d'une méthode heuristique à fenêtre de temps glissante. Asad (2005) décrit un modèle d'optimisation conçu pour évaluer les teneurs de coupure optimales en incluant l'option de stockage. Le modèle omet néanmoins les décisions sur l'extraction et la production. Koushavand *et al.* (2014) prennent aussi en compte l'incertitude géologique et utilisent une pile de minerai pour traiter le problème de sur/sous-production. Les auteurs imposent un niveau minimal et maximal pour la pile en termes de tonnage et définissent a priori sa teneur. Yarmuch et Ortiz (2011) définissent deux stocks, l'un pour le minerai à haute teneur et l'autre pour le minerai à faible teneur, puis résolvent le problème, période par période, en réajustant la teneur à l'intérieur des stocks à la fin de chaque période. Lamghari et Dimitrakopoulos (2016) introduisent une nouvelle formulation dans des conditions d'incertitude liée aux métaux et prenant en compte plusieurs destinations, y compris les piles de minerai. La non-linéarité est évitée en estimant la teneur moyenne correspondante pour chaque pile et en l'ajustant successivement. Tabesh *et al.* (2015) linéarisent la formulation en définissant un nombre « suffisant » de piles de minerai et en attribuant à chaque pile une certaine qualité en termes de teneur. Malheureusement, les auteurs ne fournissent aucun résultat numérique. Bley *et al.* (2012) relaxent les contraintes non-linéaires mais en limitent la violation à l'aide d'une méthode dite de séparation et évaluation (*branch and bound*) qui vient d'une part, obliger la violation de ces contraintes à être arbitrairement proche de zéro et d'autre part, brancher sur la variable représentant la portion de métal (par rapport au minerai) qui a été retirée de la pile de minerai à chaque période. Moreno *et al.* (2017) passent en revue les principaux modèles intégrant des piles de minerai, dont la plupart sont mentionnés ci-dessus, et proposent des nouvelles variantes linéaires. Ils montrent que la variante la plus performante et qui se rapproche le plus du modèle non-linéaire proposé par Bley *et al.* (2012) est celle qui utilise une seule pile et qui assure le maintien d'une certaine teneur moyenne au sein de celle-ci. Les auteurs finissent par conclure qu'au moment d'écrire leur article, les modèles les plus précis disponibles dans la littérature sont non linéaires et entiers mais ils admettent que ceux-ci utilisent des hypothèses irréalistes, en particulier le mélange homogène au sein des piles de minerai.

## 2.4 Équipements :

Bien que de plus en plus précis, la plupart des modèles d'optimisation stratégique existants offrent peu ou pas de flexibilité par rapport aux capacités d'extraction ou de production, ce qui conduit

souvent à des planifications sous-évaluées. En effet, connaître à l'avance tous les développements possibles relatifs aux opérations de minage permet aux gestionnaires de bénéficier de ces opportunités et être mieux préparés à d'éventuels changements. Il est important d'intégrer explicitement ces alternatives dans le processus d'optimisation pour générer des planifications réalisables qui prennent en compte les contraintes opérationnelles. Cependant, la flexibilité a un prix. Avec les outils de prise de décision actuels et une volonté de réduire le coût des investissements initiaux, il est souvent difficile de justifier de gros investissements au moment où la planification stratégique est faite et cette flexibilité est alors supprimée. Quelques chercheurs ont tenté d'y remédier (de Neufville *et al.* 2005, de Neufville 2006; Wang et de Neufville 2005, 2006, Groeneveld *et al.* 2009). Ahmed et al. 2003 et Boland *et al.* 2008 proposent des modèles stochastiques multi-étapes qui permettent une certaine flexibilité opérationnelle en générant pour chaque scénario une solution différente. Néanmoins, en pratique, cette approche présente peu d'intérêt. Il est toujours souhaitable d'obtenir un seul plan stratégique afin de faciliter la prise de décision. Groeneveld et al. (2012) insistent sur le fait de produire des plans stratégiques opérationnels capables de fournir une évaluation financière fiable. Les auteurs proposent une méthode qui s'adapte aux éventuelles fluctuations des prix. Cependant, leur approche est appliquée dans un contexte déterministe ignorant l'incertitude géologique. Goodfellow et Dimitrakopoulos (2016), quant à eux, étendent le modèle proposé par Godoy et Dimitrakopoulos (2004) pour y rajouter des variables de décision sur les investissements à faire durant la vie économique de la mine dans un contexte stochastique. Le solveur décide alors de la taille de la flotte des pelles ainsi que celle des camions; ceci a un impact direct sur la capacité d'extraction du complexe minier. Farmer (2016) vise aussi à optimiser cette capacité et montre à travers un cas d'étude que la VAN augmente de 12% par rapport à la version déterministe. Récemment, Del Castillo et Dimitrakopoulos (2019) proposent un modèle stochastique multi-étapes qui considèrent plusieurs mines et différents types de matériaux et modes de traitement. Les auteurs rajoutent de la flexibilité au modèle en rajoutant de façon dynamique des alternatives d'investissement dans de nouveaux équipements, en l'occurrence des pelles, des camions et des concasseurs. La méthode de résolution est basée sur un recuit simulé. Les résultats montrent l'obtention de gains considérables grâce à l'incorporation de cette flexibilité. Bien que cette méthode ait l'avantage de proposer des plans non statiques pouvant s'adapter au fur et à mesure des informations révélées, les paramètres utilisés restent abstraits et difficiles à jauger.

## 2.5 Constats:

À la lumière de ce tour d'horizon, nous constatons l'absence d'un outil répondant à toutes les problématiques citées précédemment. Premièrement, bien que la planification stratégique ait largement été documentée, les modèles s'appliquant à des problèmes de gisement multiproduits dans un contexte stochastique sont peu nombreux. Même lorsque cette problématique est considérée, le traitement s'intéresse à des produits naturellement distincts plutôt que des produits différenciés par leur teneur. Seules quelques références récentes pour des problèmes d'optimisation globale semblent s'intéresser à cette spécificité (Goodfellow et Dimitrakopoulos 2015, 2017). De plus, les méthodes de résolution proposées s'apparentent souvent à des heuristiques dont la qualité de solution est difficilement quantifiable.

Deuxièmement, des améliorations sont encore à prévoir au niveau de la modélisation des piles de minerai. La plupart des modèles proposés jusqu'à maintenant utilise l'hypothèse de mélange homogène. Outre le fait que cela apporte de la non-linéarité au modèle, cette hypothèse est aussi irréaliste puisque le matériau est plutôt empilé en couches successives et non pas mélangé. Les autres modèles passés en revue assument une parfaite traçabilité des blocs à travers les différents maillons de la chaîne d'approvisionnement, ce qui est loin de la réalité.

Enfin, inclure les équipements dans la planification stratégique n'est pas encore très répandu dans la littérature. Non seulement cette dimension rapproche le modèle de la réalité en y rajoutant des contraintes opérationnelles, mais en plus, elle offre plus de flexibilité aux gestionnaires en leur permettant de faire des investissements qui, à long terme, conduisent à des exploitations plus profitables des gisements.

Malgré ces lacunes, cette revue de littérature révèle plusieurs points intéressants qui pourraient être repris et adaptés au présent projet de recherche. L'idée de décomposition Lagrangienne introduite par Bienstock et Zuckerberg (2010) constitue une piste intéressante à considérer. Cependant, il faudra l'adapter pour y inclure l'incertitude et surtout prévoir une méthode d'arrondir la solution obtenue. Pour ce faire, on pourra utiliser certaines heuristiques citées plus haut qui ont prouvé leur efficacité notamment l'ordonnancement topologique de Chicoisne *et al.* (2012) mais aussi d'autres heuristiques plus classiques telles que la RT ou autres heuristiques de recherche locale.

### CHAPITRE 3 ORGANISATION DE LA THÈSE

Comme en atteste la revue de la littérature, l'optimisation de la planification minière se heurte à plusieurs obstacles qui rendent son aboutissement difficile voire impossible dans certains cas. La contribution principale de cette thèse est de proposer une formulation mathématique et des méthodes de résolution efficaces qui permettront d'outrepasser certaines des lacunes relevées; en l'occurrence : la taille du problème, l'incertitude inhérente à la composition géologique du gisement, la modélisation des réserves et enfin la question des dépenses d'investissement.

Ces objectifs seront abordés à travers trois chapitres principaux. Le quatrième chapitre illustre la première contribution de cette thèse par le biais de l'article Brika *et al.* (2019) soumis au journal *European Journal of Operation Research* en Juillet 2019. Un premier modèle linéaire à variables mixtes y est proposé. Il sert à l'élaboration des plans d'extraction pour toute la durée de vie économique de la mine et doit tenir compte de l'incertitude géologique. Le but est de maximiser les profits tout en minimisant les écarts par rapport aux objectifs de production. L'approche de résolution repose sur une extension de l'algorithme de Bienstock et Zuckerberg (2010) à l'optimisation stochastique afin de résoudre la relaxation linéaire du problème à l'optimalité. En effet, cet algorithme a déjà prouvé son efficacité à résoudre des problèmes similaires dans un contexte déterministe mais n'avait jusqu'alors jamais été utilisé dans un contexte incertain. Utiliser la solution optimale de la relaxation comme point de départ est justifié par le fait que pour cette classe de problèmes, celle-ci est peu fractionnaire et peut donc être facilement transformée en solution entière. Pour ce faire, une heuristique de type glouton basée sur un ordonnancement topologique vient arrondir la solution obtenue par la relaxation et qui est à son tour modifiée par une RT appliquée de façon itérative pour en améliorer la qualité. La méthode est testée sur différentes instances afin d'en valider l'efficacité et pouvoir l'utiliser pour d'autres variantes plus complexes du modèle.

Dans les chapitres 5 et 6, la même approche de résolution sera conservée tout en apportant quelques adaptations nécessaires et des nouvelles composantes, telles que les piles de minerai ou encore la considération d'options d'investissement, viendront ensuite s'intégrer, au fur et à mesure, au modèle. Pour sa part, le chapitre 5 présente le problème traité dans le deuxième article, qui est sous révision dans la revue internationale *Journal of Operational Research Society*. Il s'agit d'une extension du problème traité au chapitre 4 où la notion de piles de minerai est prise en compte dans

la stratégie de planification de la mine, ajoutant ainsi de la complexité au problème et ce, dû à la difficulté de modéliser correctement la notion de mélange une fois le matériau arrivé dans les piles. Dans cet article, l'hypothèse utilisée dans les modèles conventionnels et qui sous-entend une parfaite homogénéisation des matériaux au sein des piles n'est pas retenue. Cette hypothèse ne reflète en effet pas la réalité et de surcroît apporte de la non linéarité au problème. L'idée est de développer un nouveau modèle linéaire qui permet une estimation précise de la teneur résultante du stockage dans les piles tout en conservant une structure qui soit adéquate pour l'application de la méthode de résolution proposée ci-haut. L'article passe aussi en revue les propriétés et les limites du modèle et inclut des recommandations pour les contourner.

Enfin, au chapitre 6, une nouvelle forme de flexibilité est introduite au modèle et ce, en considérant l'option d'investir dans des nouveaux équipements. Trois types d'équipement sont alors considérés: pelles, camions et concasseurs. Les coûts associés à ces trois types d'équipement sont parmi les plus importants pour une mine à ciel ouvert. L'achat des deux premiers a un impact direct sur la capacité d'extraction, alors que le dernier permet d'augmenter la capacité de traitement. Une telle flexibilité assure une meilleure exploitation des ressources et donc des opportunités de profit supplémentaires. Quant à l'approche de résolution, bien que la structure générale de la méthodologie employée dans les deux précédents chapitres soit conservée, différents changements devront être apportés. En effet, en introduisant les équipements, des contraintes opérationnelles viennent se rajouter telles que la capacité sur les équipements ou encore le temps machine disponible. Celles-ci étant des contraintes dures, une étape de réparation doit être rajoutée à l'heuristique d'arrondissement pour rendre la solution arrondie réalisable. Ensuite, bien que la troisième étape soit toujours une RT, la structure ainsi que les voisinages sont repensés pour pouvoir bénéficier de la parallélisation qui exige une parfaite indépendance des tâches à exécuter simultanément.

Avant de s'intéresser plus en détails aux différentes contributions de la thèse, les lecteurs non familiers avec l'algorithme de Bienstock-Zuckerberg sont invités à se référer à l'Annexe A.



# CHAPITRE 4    ARTICLE 1: MULTI-PRODUCT MINE SCHEDULING OPTIMIZATION UNDER MULTI-ELEMENT GEOLOGICAL UNCERTAINTY

Cet article a été soumis à *European Journal of Operational Research* en Juillet, 2019

Zeyneb Brika<sup>a,b,c\*</sup>, Michel Gamache<sup>a,c</sup>, and Roussos Dimitrakopoulos<sup>b,c</sup>

<sup>a</sup> *Department of Mathematics and Industrial Engineering, Polytechnique Montréal, Montreal, Qc, Canada;*

<sup>b</sup> *COSMO – Stochastic Mine Planning Laboratory & Department of Mining and Materials Engineering, McGill University, Montreal, Qc, Canada*

<sup>c</sup> *GERAD – Groupe d'Études et de Recherche en Analyse des Décisions, Montréal, Qc, Canada*

\*E-mail: [zayneb.brika@polymtl.ca](mailto:zayneb.brika@polymtl.ca)

## Abstract

A new solution approach is developed herein to address the topic of multi-product open-pit mine production scheduling with multi-element uncertainty. The method is based on extending the Bienstock-Zuckerberg (BZ) algorithm to the stochastic optimization. The purpose of the BZ algorithm is to exploit the structure of the problem to solve its linear programming relaxation (LP) efficiently. Numerical results on a real-size instance show that the LP can be solved to optimality in few minutes. Following this with a rounding heuristic based on topological sorting and a second heuristic based on Tabu Search, a feasible integer solution is then obtained within 1-3.5 % of optimality.

*Keywords: Open-pit optimization, Stochastic programming, Bienstock-Zuckerberg algorithm, Multi-element deposit, Long-term production planning, Tabu Search.*

## 4.1 Introduction

The mining industry is a major player in the global economy, providing most of the mineral and metal that is essential to not only construction activities related to economic development and urbanization, but also to both conventional and new high-tech industries, including green technologies and communication. To meet an ever-increasing demand for metal supplies, millions

of dollars are invested each year by mining companies in new projects and the development of mining operations. The profitability of these investments goes hand-in-hand with efficiency in mine planning, as all operating and production performance depends on it. It is crucial to develop decision-making tools that aim to maximize the economic value of a mining project and meet customer requirements in terms of metal product tonnage and grade quality to be delivered. For these reasons, mine production scheduling (MPS) has received much attention in the technical literature.

As starting point for optimization, a three-dimensional model of blocks was introduced very early to represent mineral deposits. This block model subdivides the mineral deposit into mining blocks in the form of parallelepipeds and associates with each block a set of pertinent geological attributes, such as metal grades and material types, obtained from the available drill-hole data. At the time that mine planning is undertaken, the actual values of each mining block are never exactly known due to the limited drilling information. Values of pertinent geological attributes are interpolated with a certain degree of accuracy, given the data available. Once the orebody model is created, mine production scheduling involves the determination of which mining blocks should be extracted during each time period, and what is to be done with them once they are extracted, choosing from a given set of possible destinations.

The conventional approaches to solve the MPS use a single deposit model created as a weighted average of local data. They are thus, deterministic in the sense that they consider all the information utilized as precise and well known, ignoring the sources of uncertainty and risks. The first attempts date back to Johnson (1969) who applied the Dantzig-Wolfe decomposition to reduce the resolution of the problem to the resolution of several subproblems of reasonable size. Subsequently, Dagdeleen and Johnson (1986) propose an exact method based on the Lagrangian relaxation of resource constraints. The results were promising, but still not applicable on realistic size instances. To alleviate this problem and make large instances computationally tractable, several methods have been suggested. Heuristic methods for aggregating ore blocks have been proposed by Ramazan (1996) and Whittle (1988, 1999), while Ramazan (2007) has developed the Fundamental Tree Algorithm (FTA), which optimally aggregates blocks based on exploiting the structure of the problem. To reduce the number of required binary variables, Topal (2003) define, for each block, the earliest and the latest period when it can be extracted. Dimitrakopoulos and Ramazan (2008), Cullenbine *et al.* (2011), and Lamghari and Dimitrakopoulos (2014) use the sliding time window

by fixing some variables and relaxing the integrity of some others temporarily. Heuristics have been widely proposed. Some works use classical heuristics such as swarm optimization (Khan and Niemann-Delius, 2014) or genetic algorithms (Denby and Schofield, 1994). Others combine heuristics and optimization methods as presented in the paper by Lamghari *et al.* (2015), which proposes a hybrid method based on linear programming and variable neighborhood local search. Some other efficient approaches relying on decomposition techniques have been proposed. Tachefine (1997) uses in his thesis the Lagrangian relaxation of the resource constraints to be reduced to a maximum closure problem. He innovates by using the bundle method to adjust the Lagrange multipliers, rather than the classical sub-gradient method. Later, Chicoisne *et al.* (2012) propose a decomposition algorithm to solve, in polynomial time, the LP of the MPS considering one single resource (mining capacity) by a period. Bienstock and Zuckerberg (2009, 2010) develop a new algorithm based on a Lagrangian decomposition to solve also the LP of the problem, but with an arbitrary number of renewable or non-renewable resources. Recently, Munoz *et al.* (2018) extend the template of the Bienstock-Zuckerberg (BZ) algorithm to handle more problems arising in the context of mine planning.

Nevertheless, there is one critical issue remaining in deterministic optimization methods: ignoring the uncertainty present in several parameters, such as the metal content, and the lack of robustness that it creates. The deterministic approach has the effect of smoothing the representation of the pertinent attributes of the mineral deposit considered (an average of a range of possible values), and thus, misrepresenting the deposit by over or underestimating the actual mining potential (Ravenscroft, 1992; Dowd, 1994, 1997). In addition to the metal content, other parameters are affected by the uncertainty and directly influence the expected net present value (NPV) of a project. These parameters include the fluctuation of demand on metal products (Sabour and Dimitrakopoulos, 2011; Asad and Dimitrakopoulos, 2013), which consequently affects not only selling prices, but also costs of production, processing, etc. Nevertheless, only the geological uncertainty has really aroused the interest of researchers given its major impact on the profitability of mining projects. Through a sensitivity analysis on the effect of several financial factors (NPV, recovery rate, etc.), Dowd (1994, 1997) demonstrates that geological uncertainty substantially affects the performance of a project and Baker and Giacomo (1998) shows that ignoring it is the main cause of not meeting production forecasts.

Stochastic simulation (David, 1988; Goovarets, 1997; Boucher and Dimitrakopoulos, 2009) addresses these problems by reproducing the distribution of the grades and spatial statistics of available data and information, and thus, preserves the *in-situ* variability of the deposit. For that, several equiprobable realizations of pertinent attributes of the mineral deposit are simulated. They are then used simultaneously as inputs for the MPS to provide results closer to reality along with risk quantification on production forecasts. Stochastic programming increases the reliability of planning and its chances of achieving production targets through more realistic modeling and risk management. Considering uncertainty also leads to better expected NPVs (15-30% more on average) than those obtained by deterministic models (Godoy, 2002; Leite and Dimitrakopoulos, 2007, 2014; Albor and Dimitrakopoulos, 2010). This improvement is due in part to the fact that the stochastic programming approach facilitates the elimination of the effects of smoothing while managing the related risk, and, by construction, leads to higher chances of meeting forecasts, higher metal production and higher NPV. In addition, case studies show that stochastic optimal pit limits generate 10-15% additional metal extracted when compared to the traditional optimal limits (Dimitrakopoulos, 2011). This is a direct result of a better understanding of the spatial distribution and the relationship between high-quality grade blocks.

All this has led to the stochastic approach's emergence in the last two decades. The optimal scheduling is now the one that maximizes the expected NPV taking into account the uncertainty described by different equiprobable simulations of the orebody model. Risk management is reflected through the penalization, in the Objective function, of deviating from the targets. Different methods have been suggested to solve this problem. Lamghari and Dimitrakopoulos (2012) suggested an efficient metaheuristic solution approach based on a diversified Tabu search while Godoy and Dimitrakopoulos (2004), and Albor and Dimitrakopoulos (2009) use the simulated annealing. Stochastic integer programming (SIP) has also been adopted by several authors for the optimization of mining production planning considering uncertainty (Ramazan and Dimitrakopoulos, 2007, 2013, Leite and Dimitrakopoulos, 2014). One of the applications that particularly interests this current study is proposed by Benndorf and Dimitrakopoulos (2013) who deal with an iron deposit where geological uncertainty affects several elements at once. Also, the authors introduce the objective function a term penalizing an unsmoothed activity. The current trend is towards global optimization models that focus not only on the extraction, but also on processing, consider several metals and minerals, and deal with both blending options and

alternative treatments leading to separate products (Whittle, 2009). Goodfellow and Dimitrakopoulos (2016, 2017) and Montiel and Dimitrakopoulos (2015, 2017) have recently proposed a stochastic global optimization model with recourse. They combine three metaheuristics, namely simulated annealing, particle swarm optimization and differential evolutions. Their method includes a policy for choosing the destinations of the blocks once extracted. The results obtained are very promising. Moreno et al. (2017) adopt another approach to handle the geological uncertainty in their two-stage production scheduling model. Rather than using deviations as recourse variables, the model finds the mining sequence in a first stage and then, in a second stage, when the uncertain grades become known, it assigns to each block a destination. They also formulate the problem as a precedence constrained knapsack problem that they manage to solve near-optimally using a modified version of the BZ algorithm.

This paper proposes a new efficient solution method to solve long-term MSP of an open-pit multi-product mine under multi-element geological uncertainty. The method is based on applying the BZ algorithm (Bienstock and Zuckerberg, 2009) in a stochastic context. The mathematical formulation is presented in Section 2. Section 3 presents the solution approach, more specifically how the BZ algorithm is adapted to stochastic optimization along with the two heuristics proposed to make the solution integer. An application on a multi-product iron ore deposit is reported as a case study in Section 4. Implementation details, computational results on a multi-product iron ore deposit and some conclusions are drawn in Section 5.

## 4.2 Mathematical Formulation

Given a 3D block model of an ore body, the relationships among the blocks can be represented through a directed graph  $G = (\mathcal{B}, \mathcal{A})$  where the nodes are the mining blocks and an arc  $(a,b)$  from a to b means that the block a cannot be extracted before the block b. This category of constraints is termed the slope constraints. They are essential to maintain the stability of the orebody during extraction operations and they imply that a block is accessible only after all its overlying blocks are already extracted. Figure 4-1 shows a simple 2D block model and its corresponding graph if a 45-degree slope must be respected.



Figure 4-1. 2D block model and its corresponding graph

Let suppose that the blocks  $\mathcal{B}$  should be scheduled over  $T$  the lifetime of the mine and sent to one destination (processing plant, waste, etc.) among a given set  $\mathcal{D} = \{1 \dots D\}$ . Let  $\mathcal{R} = \{1, \dots, R\}$  be the mineral resources, and  $\mathcal{S} = \{1 \dots S\}$  the set of equally probable scenarios of the unknown orebody used to capture geological uncertainty. The following notation is also defined to be used in the formulation of the scheduling problem and next sections.

#### 4.2.1 Variables:

- $y_{b,d,t}$  is the activity variable which takes the value 1 if mining block  $b$  is extracted and sent to destination  $d$  by period  $t$  and 0, otherwise.
- $qu_{d,t,s}^r$  and  $ql_{d,t,s}^r$  are respectively the upper and lower deviation in terms of tons from production target of resource  $r$  at period  $t$  sent to destination  $d$  under scenario  $s$ .
- $qu_{d,t,s}$  and  $ql_{d,t,s}$  are respectively the upper and lower deviation in terms of tons from the ore tonnage production target at period  $t$  for destination  $d$  under scenario  $s$ .

#### 4.2.2 Parameters:

- $p_{b,d,t,s}$  is the discounted profit obtained, if block  $b$  is sent to destination  $d$  in period  $t$  under scenario  $s$ .
- $g_{b,s}^r$  is the grade of block  $b$  for element  $r$  under scenario  $s$ .
- $Gmax_{d,t}^r$  and  $Gmin_{d,t}^r$  are respectively the maximum and minimum accepted grades for resource  $r$  that may be sent to destination  $d$  at period  $t$ .
- $Tmax_{d,t}$  and  $Tmin_{d,t}$  are respectively the maximum and minimum accepted ore tonnage that may be sent to destination  $d$  at period  $t$ .
- $cu_t^r$  and  $cl_t^r$  are respectively the discounted unit cost of upper and lower deviation from  $Gmax_{d,t}^r$  and  $Gmin_{d,t}^r$
- $cu_t$  and  $cl_t$  are respectively the discounted unit cost of upper and lower deviation from  $Tmax_{d,t}$  and  $Tmin_{d,t}$

- $Q_b$  is the tonnage of block  $b$ .
- $M_{max}$  is the maximum mining capacity per period.
- $\Gamma_b^+$  and  $\Gamma_b^-$  are respectively the successors and the predecessors of block  $b$  defined by:  $\Gamma_b^+ = \{j \in \mathcal{B} \mid (j, b) \in \mathcal{A}\}$  and  $\Gamma_b^- = \{j \in \mathcal{B} \mid (b, j) \in \mathcal{A}\}$

Using this notation, the objective function can be formulated as a two-stage stochastic integer programming model (Birge and Louveaux, 1997) as follows:

### 4.2.3 Objective function:

$$\max \frac{1}{S} \sum_{b=1}^B \sum_{d=1}^D \sum_{t=1}^T \left( \sum_{s=1}^S \tilde{p}_{b,d,t,s} y_{b,d,t} \right) - \frac{1}{S} \sum_{d=1}^D \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S \sum_{r=1}^R (cu_t^r qu_{d,t,s}^r + cl_t^r ql_{d,t,s}^r)$$

where:

$$\tilde{p}_{b,d,s,t} = \begin{cases} p_{b,d,t,s} - p_{p,(d+1),t,s} & \forall b \in \mathcal{B}, \quad d < D, \quad t = 1 \dots T, \quad s = 1 \dots S \\ p_{b,D,t,s} - p_{b,1,t+1,s} & \forall b \in \mathcal{B}, \quad t < T, \quad s = 1 \dots S \\ p_{b,D,T,s} & \forall b \in \mathcal{B}, \quad s = 1 \dots S \end{cases}$$

The objective function is a combination of two parts. Each one represents a different goal. The first part indicates that discounted operating income is to be maximized considering all the scenarios. The second part manages the deviations from production targets over the simulated orebody models. This part ensures the consideration and the management of uncertainty and variability since the optimization is done over  $S$  equally probable scenarios. Note that the corresponding cost parameters determine the weight of the two parts in the objective function.

### 4.2.4 Constraints:

The reserve constraint assures that each block  $b$  cannot be extracted and processed more than once overall periods and is defined by:

$$\bullet \quad y_{b,D,t} \leq y_{b,1,t+1} \quad \forall b \in \mathcal{B}, \quad t = 1 \dots T - 1 \quad (1)$$

$$\bullet \quad y_{b,(d-1),t} \leq y_{b,d,t} \quad \forall b \in \mathcal{B}, \quad d = 2 \dots D, \quad t = 1 \dots T \quad (2)$$

Before a block  $i$  can be extracted, all the overlaying blocks  $j$  must be extracted in the same period or earlier:

$$\bullet \quad y_{i,D,t} \leq y_{j,D,t} \quad \forall t = 1 \dots T, (i, j) \in \mathcal{A} \quad (3)$$

Figure 4-2 shows the steps to introduce, respectively, the notion of multi-period and multi-destinations scheduling into the graph  $G = (\mathcal{B}, \mathcal{A})$  to obtain a new directed graph  $\bar{G} = (\bar{\mathcal{B}}, \bar{\mathcal{A}})$  where for each period  $t$  and destination  $d$ , a block  $b$  is represented by a vertex  $(b/d/t)$ .  $\bar{G}$  also represents the constraints (1), (2) and (3) by three different categories of arcs: the inter-period arcs for the constraints (1) represented by dashed lines, the inter-destination arcs for the constraints (2) represented by thick lines and finally, the slope-constraint arcs for the constraints (3) represented by thin lines.

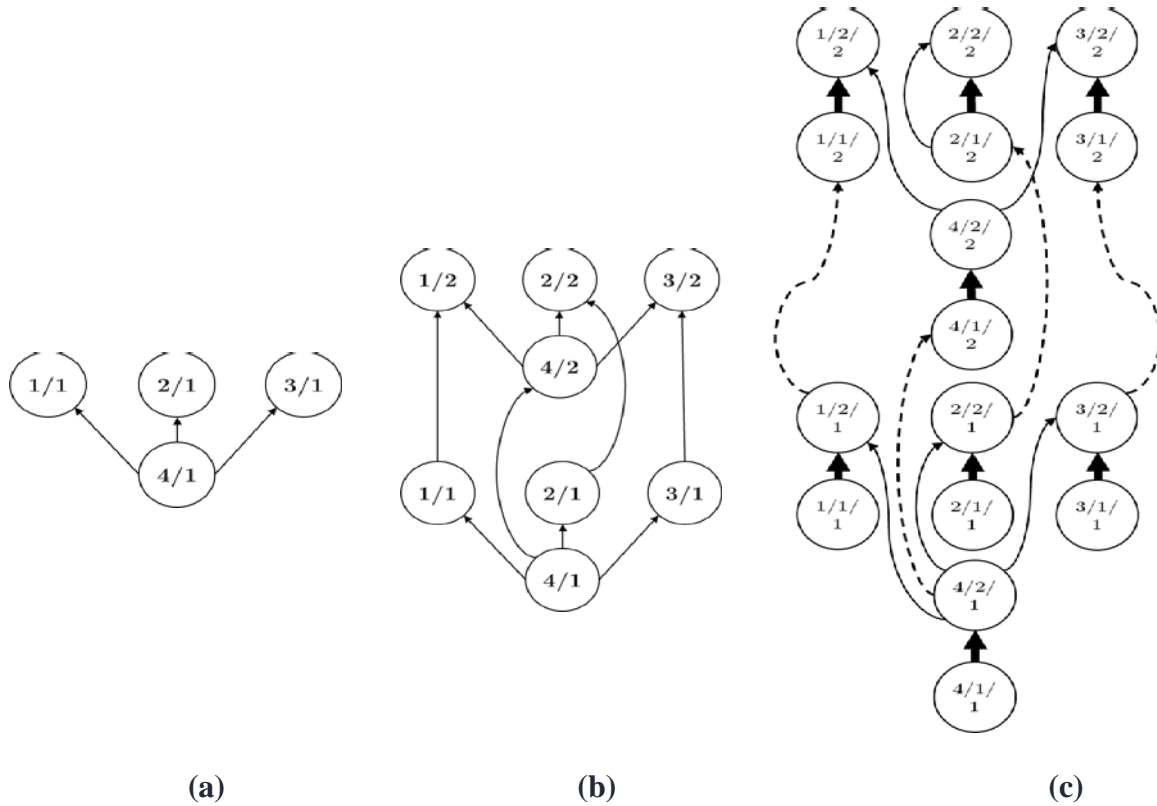


Figure 4-2. (a) represents the original graph  $G$  containing only the slope constraints, (b) is obtained by duplicating  $T$  times the graph  $G$  and adding the inter-period arcs. (c) represents the graph  $\bar{G}$  and it is derived from (b) by duplicating each node  $D$  times and adding the inter-destination arcs.

In what follows, a new variable  $\check{y}_{bdt}$  is used to simplify the constraints expressions and defined by:

$$\check{y}_{b,d,t} = \begin{cases} y_{b,d,t} - y_{p,(d-1),t} & \forall b \in \mathcal{B}, \quad d = 2 \dots D, \quad t = 1 \dots T, \quad s = 1 \dots S \\ y_{b,1,t} - y_{b,D,t-1} & \forall b \in \mathcal{B}, \quad t = 2 \dots T, \quad s = 1 \dots S \\ y_{b,1,1} & \forall b \in \mathcal{B}, \quad s = 1 \dots S \end{cases}$$



Grade deviations  $qu_{d,t,s}^r$  and  $ql_{d,t,s}^r$  for each destination  $d$ , period  $t$ , element  $r$  and under scenario  $s$  are defined by blending constraints formulated in inequations (4) and (5) for the upper and lower deviations respectively and for each  $(s, r) \in \mathcal{S} \times \mathcal{R}$ :

- $\sum_{b=1}^B (g_{bs}^r - Gmax_{d,t}^r) \cdot Q_b \cdot \tilde{y}_{b,d,t} - qu_{d,t,s}^r \leq 0 \quad \forall t = 1 \dots T, d = 1 \dots D \quad (4)$

- $\sum_{b=1}^B (g_{bs}^r - Gmin_{d,t}^r) \cdot Q_b \cdot \tilde{y}_{b,d,t} + ql_{d,t,s}^r \geq 0 \quad \forall t = 1 \dots T, d = 1 \dots D \quad (5)$

Note here that the constraints (4) and (5) allow to quantify deviations from the grade targets in terms of tons. Expressing the deviations in terms of tons rather than grades makes it possible to penalize proportionally to the quantities extracted, and it keeps the model linear. Similarly, ore tonnage deviations  $qu_{d,t,s}$  and  $ql_{d,t,s}$  are defined in inequations (6) and (7):

- $\sum_{b=1}^B Q_b \cdot \tilde{y}_{b,d,t} - qu_{d,t,s} \leq Tmax_{d,t} \quad \forall t = 1 \dots T, d = 1 \dots D, s = 1 \dots S \quad (6)$

- $\sum_{b=1}^B Q_b \cdot \tilde{y}_{b,d,t} + ql_{d,t,s} \geq Tmin_{d,t} \quad \forall t = 1 \dots T, d = 1 \dots D, s = 1 \dots S \quad (7)$

Then, the constraints (8) limit the total tonnage of handled material at period  $t$  subject to maximum mining capacity:

- $\sum_{b=1}^B Q_b \times y_{b,D,1} \leq M_{max} \quad (8a)$

- $\sum_{b=1}^B Q_b \times (y_{b,D,t} - y_{b,D,t-1}) \leq M_{max} \quad \forall t = 2 \dots T \quad (8b)$

Finally, the integrity constraints (9) and the non-negativity constraints (10):

- $y_{b,d,t} \in \{0,1\} \quad \forall b \in \mathcal{B}, d \in \mathcal{D}, t = 1 \dots T \quad (9)$

- $qu_{d,t,s}^r, ql_{d,t,s}^r \geq 0 \quad \forall d \in \mathcal{D}, t = 1 \dots T, s \in \mathcal{S}, r \in \mathcal{R} \quad (10a)$

- $qu_{d,t,s}, ql_{d,t,s} \geq 0 \quad \forall d \in \mathcal{D}, t = 1 \dots T, s \in \mathcal{S} \quad (10b)$

### 4.3 Solution Approach

The proposed methodology consists of three steps. The first step is an adaptation of the algorithm initially introduced in Bienstock and Zuckerberg (2009). In Section 3.1, a description of how this algorithm was extended to the stochastic optimization is presented. The second one is a rounding heuristic to the fractional solution obtained in the first step. This heuristic described in Section 3.2 takes up ideas from the TopoSort Heuristic proposed by Chicoisne *et al.* (2012), but some changes

are introduced to handle the stochastic aspect. The third step is to apply a TabuSearch iteratively to improve the quality of the solution obtained by the rounding heuristic.

### 4.3.1 Solving the Linear Relaxation

The formulation described in Section 2 can be represented in a more compact form as follows where  $q$  represents the deviation variables, and  $c$  the discounted unit cost of deviation:

$$\begin{aligned} Z &= \max p^t y + c^t q \\ s. t. \quad & y_i \leq y_j \quad \forall (i, j) \in \bar{\mathcal{A}} \\ & My + Hq \leq d \\ & y \in \{0,1\}^n \end{aligned}$$

This formulation is more general than the General Precedence Constrained Problem (GPCP) presented in Bienstock and Zuckerberg (2011), and that doesn't consider the variables  $q$ . Munoz et al. (2018) proved the correctness of the BZ algorithm even under this form with these extra variables. The authors suggested that these variables could be used for several modeling purposes (stockpiles, variable capacities, etc.). The idea proposed in this paper is to use the  $q$  variables to model the deviations from production targets, and thus, extend it to the stochastic formulation.

Recall that the BZ algorithm efficiency lies in three main ideas. First, the algorithm takes advantage of the problem structure once the side constraints  $My + Hq \leq d$  are relaxed. Indeed, the resulted problem is the well-known maximum closure problem which can be solved quite efficiently using appropriate algorithms such as the Pseudoflow Algorithm proposed by Hochbaum (2008). Second, for this class of problem, the integrality gap remains small in practice. Thus, the optimal solution of the linear programming relaxation (LP) obtained by the BZ algorithm represents a tight upper bound for the integer problem all the more so that traditional methods often fail to solve even the linear relaxations of real size instances. Third, unlike traditional Lagrangian relaxation methods that require many iterations and converge very slowly with no satisfying accuracy, the BZ approach uses the dual information to reduce efficiently the size of the LP. In fact, Bienstock and Zuckerberg (2010) proved that the optimal solution of any instance of GPCP attains no more than  $l+2$  distinct values with  $l$  being the number of linearly independent rows in the matrix  $D$ , this number remains relatively small for this class of problem. Thus, in each iteration  $k$ , the original feasible region of

the problem can be restricted to the linear space spanned by a generator matrix  $G^k$  that forces variables corresponding to the non-zero entries of each column to be equal. This resembles an aggregation operation in the sense that it leads to a significant reduction of variables, but it differs in preserving the individual properties of the blocks.  $G^k$  is updated at each iteration after solving the maximum closure problem to generate  $G^{k+1}$ , this procedure is called “refining”. For further details, the reader is referred to Munoz et al. (2018).

### 4.3.2 Rounding Heuristic

The rounding heuristic, as its name implies, makes the optimal solution of the LP integer. It is an adaptation of the TopoSort Heuristic proposed in Chicoisne *et al.* (2012). Some changes are introduced to handle the stochastic aspect and discussed later in this section. This heuristic takes as input a topological ordering of the blocks. This ordering defines a feasible extraction sequence in the sense that it satisfies the slope constraints. This way, a block appears in the sequence after all its predecessors. Because there are many possible topological orderings, associating a “weight” to each block leads to finer orderings. Thus, blocks with lower weights will be scheduled earlier in the sequence. In this paper, the same type of weight function proposed by Chicoisne *et al.* (2012) is retained. It uses the LP solution. For each  $b \in \mathcal{B}$ , the weight is calculated as follows:

$$w_b = x_{b,D,1} + \sum_{t=2}^T t \times (x_{b,D,t} - x_{b,D,t-1}) + (T + 1) \times (1 - x_{b,D,T}).$$

The weight  $w_b$  can be interpreted as the probability that block  $b$  will be extracted in time  $t$ . Blocks not extracted by time  $T$  will be assumed to be extracted in time  $T+1$ . Then, let  $G = (\mathcal{B}, \mathcal{A})$  be the graph defined in Section 2. Given this graph and a weight vector  $\mathbf{w}$ , the blocks are classified according to the topological sorting to obtain a feasible extraction sequence  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  where  $b_i$  represents a block member. This procedure is described in Algorithm 1. To summarize, a block  $b_i$  will appear before  $b_j$  in the sequence, if it satisfies either 1)  $b_i$  is a predecessor of  $b_j$  or 2)  $w_i < w_j$ .

#### 4.3.2.1 Algorithm 1: TopoSorting (Tsort( $G, \mathbf{w}$ ))

**Inputs:** An acyclic directed graph  $G = (\mathcal{B}, \mathcal{A})$ ,  $\mathcal{N}$  a set of nodes, a weight vector  $\mathbf{w}$ , and  $\forall b \in \mathcal{N}$ , a set  $\Omega_b^-$  is defined by  $\Omega_b^- = \{j \in \mathcal{N} \mid (b, j) \in \mathcal{A}\}$ :

1.  $i \leftarrow 1, \mathcal{N} \leftarrow \mathcal{B}, n \leftarrow |\mathcal{N}|$
2. **while**  $i < n$  **do**
  - 2.1.  $b \leftarrow \mathit{argmin}_{b \in \mathcal{N}} \{w_b \mid \Omega_b^- = \emptyset\}$
  - 2.2.  $\mathcal{N} \leftarrow \mathcal{N} \setminus \{b\}$
  - 2.3.  $b_i \leftarrow b$  and  $i \leftarrow i + 1$**end while**
3. **return** topological ordering  $b_1, b_2, \dots, b_n$  in  $G$  that is weighted with respect to  $w$ .

Once the topological ordering of the blocks is obtained, a rounding heuristic (RH) is applied. Unlike the heuristic proposed in Chicoisne *et al.* (2012) where the model is deterministic, and there are only hard constraints that represent upper bounds to satisfy, the stochastic model allows the violation of some constraints by penalizing the objective function and makes them soft. Also, the model contains both upper and lower bounds for each target.

More specifically, first, given the fractional solution of the LP previously obtained by applying the BZ algorithm, two categories of blocks are created. The set  $\mathcal{F}$  formed by the blocks that have been completely extracted in one single period (i.e.  $\mathcal{F} = \{b \in \mathcal{B} \mid \exists t \leq T, y_{bDt} - y_{bDt-1} = 1\}$ ) is considered fixed. The remaining blocks  $\bar{\mathcal{F}}$  are considered flexible, in the sense that the extraction time as well as the destination can be modified. Then, the values of the fractional solution are rounded to the closest integers. The new solution  $X^i$  does not violate the precedence constraints and is used as an initial solution to the rounding heuristic. Next, based on the topological sorting, all the blocks, except for those that have been fixed, may be moved (i.e. advanced, postponed, or simply have their destinations changed) one by one if it leads to a better solution. A block can be scheduled at any period and any destination as long as that occurs between the earliest period of extraction (after all its predecessors) and the latest one (before all its successors). The move that leads to the best solution is always selected. Starting from a solution  $X = \{x_{b,d,t}\}_{b \in \mathcal{B}, d \in \mathcal{D}, t \in \mathcal{T}}$ , the solution resulting from moving the extraction of block  $b$  to period  $t$  and to destination  $d$  can be represented by  $X \oplus (b, t, d)$ . The heuristic ends when all the blocks are scheduled and their times of extraction  $\{t_1, t_2 \dots t_{|\mathcal{B}|}\}$  are defined. This procedure is summarized in Algorithm 2.

### 4.3.2.2 Algorithm 2: RH (Rounding Heuristic)

**Inputs:** An acyclic directed graph  $G=(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ , a weight  $w_b$  for each block  $b \in \mathcal{B}$ ,  $T$  periods,  $R$  resources,  $X^i$  the initial solution,  $\mathcal{F}$  the set of blocks that are considered fixed, and finally  $\{t_1, t_2 \dots t_{|\mathcal{B}|}\}$  is initialized to the extraction times determined by  $X^i$ .

1.  $i \leftarrow 1$
2.  $\{b_1, \dots, b_n\} \leftarrow \mathbf{Tsort}(G, w)$
3. **while**  $i < n$  **do**
  - 3.1. Let  $u = b_i$  and let  $i \leftarrow i + 1$
  - 3.2. **if**  $u \notin \mathcal{F}$ 
    - $t_{earliest} \leftarrow \mathbf{max}\{t_j \mid j \in \Gamma_u^-\}$
    - $t_{latest} \leftarrow \mathbf{min}\{t_j \mid j \in \Gamma_u^+\}$
    - $t_u \leftarrow \mathbf{argmax}\{value(X \oplus (u, t, d)) \mid t_{earliest} \leq t \leq t_{latest}\}$
    - $X \leftarrow X \oplus (u, t, d)$
  - endif**
- end while**
4. **return**  $t_b \forall b \in \mathcal{B}$

### 4.3.3 Tabu Search

A Tabu Search is then applied considering successively periods  $p=1, \dots, T$  to improve the solution obtained by the Rounding Heuristic. At iteration  $p$ , blocks scheduled in earlier periods are considered fixed, and only the remaining blocks can be moved. This approach uses the cost structure in the mine planning problems by preferring the extraction of a profitable block as soon as possible, rather than delaying its extraction at future periods. Next, this heuristic is described more specifically.

At the  $p^{\text{th}}$  iteration, let  $S^p$  be the set of blocks  $b \in \mathcal{B}$  scheduled in periods  $t_b \leq p$  (i.e.  $b \in S^p \Leftrightarrow \sum_{d=1}^D y_{bdp} = 1$ ) defined by the current solution  $X^p$ , and let  $\bar{S}^{p-1}$  be the set of blocks  $b \in \mathcal{B}$  scheduled and fixed in periods  $t_b \leq p-1$  and obtained after applying the Tabu Search the  $p-1$  previous iterations. Also, the two sets  $B_p^-$  and  $B_p^+$  are defined as follows:

$$B_p^- = \{i \in \mathcal{B} \mid t_i = p \text{ and } j \notin S^p \forall j \in \Gamma_i^+\}$$

$$\text{and } B_p^+ = \{i \in \mathcal{B} \mid t_i = p + 1 \text{ and } j \in S^p \forall j \in \Gamma_i^-\}$$

The first set represents the blocks located on the “inner” border of  $S^p$ . They can be removed from  $S^p$  (i.e., their extraction can be delayed to a later period or cancelled). The second set represents the blocks located on the “outer” border of  $S^p$ . They can be added to  $S^p$  (i.e., pushing forward their extraction or including new ones if they weren’t scheduled in the current solution) without violating the precedence constraints. Figure 4-3 schematizes these two sets  $B_p^-$  and  $B_p^+$ .

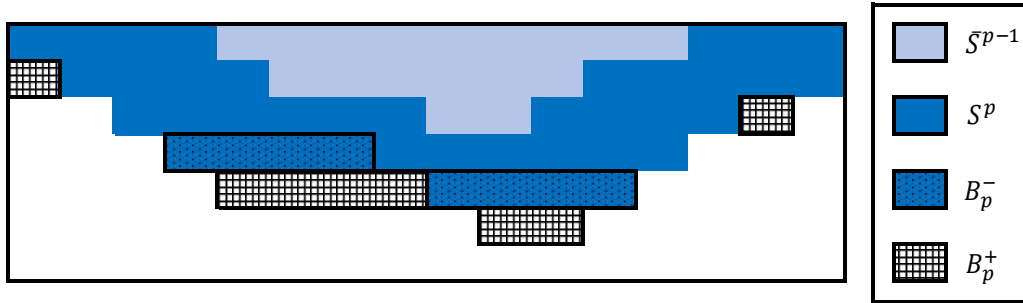


Figure 4-3 Current solution and corresponding neighborhood illustrated by  $B_p^-$  (blocks can be removed from  $S^p$ ) and  $B_p^+$  (block can be added to  $S^p$ )

The neighborhood of the solution  $X^p$  is represented by all the solutions generated either by removing a block from  $B_p^-$  or by adding a block from  $B_p^+$ . Algorithm 3 shows how to find all these neighbors given an initial solution  $X$  and a period  $p$ . In this algorithm,  $X \oplus (i, t, d)$  represents the solution obtained by moving a block  $i$  from  $t_i$  to  $t$  and from  $d_i$  to  $d$

#### 4.3.3.1 Algorithm 3: getNeighbors( $X, p$ ): building the neighborhood of a given solution

**Inputs:** A feasible solution  $X$ , a period  $p$

1.  $neighbors \leftarrow \emptyset$
2. **for** (block  $i$  in  $\mathcal{B}$  )
  - 2.1.  $test \leftarrow true$
  - 2.2. **if** ( $t_i = p$ )
    - $t_{min} \leftarrow \min\{t_j \mid j \in \Gamma_i^+\}$
    - if** ( $t_{min} > t_i$ )
      - for** ( $d=1 \dots D$ )
        - $neighbors \leftarrow neighbors \cup (X \oplus (i, p + 1, d))$  (i.e. postpone the extraction to  $p + 1$ )
    - end for**
  - endif**
- endif**

```

2.3. if ( $t_i = p + 1$ )
     $t_{max} \leftarrow \mathbf{max}\{t_j \mid j \in \Gamma_i^-\}$ 
    if ( $t_{max} \leq p$ )
        for ( $d=1 \dots D$ )
             $neighbors \leftarrow neighbors \cup (X \oplus (i, p, d))$  (i.e. advancing the extraction to period  $p$ )
        end for
    endif
endif
end for
3. return  $neighbors$ 

```

Given the neighbors, the best solution among them is selected even if it leads to a worsening move and it is automatically added to what it is denoted as Tabu-list. This list regroups all the temporary prohibited moves. Thus, cycling and coming back to previously-visited solutions are avoided. If the Tabu-list reaches its maximum size  $maxTabuSize$ , some elements are no longer considered Tabu following the rule of FIFO (First In First Out). However, exceptionally, a Tabu move can be accepted if it generates a better solution than the best feasible solution known so far. The algorithm will continue searching for an optimal solution until  $nitermax$  successive non-improving iterations are reached. The best solution found so far is then returned and used as an initial solution for the next period. Algorithm 4 summarizes how the Tabu Search is applied. Note that the value of a solution  $X$  will be noted  $Z_X$ .

#### 4.3.3.2 Algorithm 4: TabuSearch( $X0, p$ ): Improving the initial solution $X0$ considering all blocks scheduled before $p$ as fixed.

**Inputs:** A feasible solution  $X0$ , a period  $p$ ,  $nitermax$  the maximum number of iterations without improving the solution, and  $maxTabuSize$  the size of the Tabu list.

```

1.  $sBest \leftarrow X0, bestCandidate \leftarrow X0, tabuList \leftarrow \emptyset, niter \leftarrow 0$ 
2. while ( $niter < nitermax$ )
    2.1.  $sNeighborhood \leftarrow \mathbf{getNeighbors}(bestCandidate, p)$ 
    2.2.  $bestCandidate \leftarrow sNeighborhood[1]$ 
    2.3. for ( $sCandidate$  in  $sNeighborhood$ )
        if ( $(sCandidate \notin tabuList)$  and ( $Z_{sCandidate} > Z_{bestCandidate}$ )) or ( $(sCandidate \in tabuList)$ 
        and ( $Z_{sCandidate} > Z_{sBest}$ )))

```

```

        bestCandidate ← sCandidate
    endif
end for
2.4. if ( $Z_{bestCandidate} > Z_{sBest}$ )
    sBest ← bestCandidate
    niter ← 0
end if
2.5. tabuList ← tabuList ∪ bestCandidate
2.6. if ( $|tabuList| > maxTabuSize$ )
    tabuList ← tabuList \ tabuList[1] (the first element of the list was considered tabu for
    maxTabuSize iterations)
end if
2.7. niter ← niter+1
end while
3. return sBest

```

## 4.4 Numerical Results

The numerical tests presented in this section have three objectives: (a) assess the performance of the extended version of the BZ algorithm, (b) discuss the quality of the solutions provided by the two heuristics proposed herein and (c) evaluate the results in terms of risk profiles of produced grades per period.

### 4.4.1 Benchmark instances

The algorithm is applied to six different deposits. The main objective of these deposits is to meet, at lowest costs, the customer requirements in terms of quality and quantity of the different geochemical elements. Table 4-1 provides an overview of the instances separated into three benchmark datasets. The first set S1 comprises a small, a medium and a large size instances from multi-element iron deposits that contain two processing plants each: one for the high-grade and another one for the low-grade. All must satisfy minimum and maximum expected grades for each geological element. The second set S2 consists of two instances representing two different actual



deposits: a copper (Cu) deposit and a gold (Au) deposit. These instances also consider two processors. As opposed to the first set, only one geological element is considered, and for each processor, there is a minimum expected grade to be satisfied. The third set S3 also consists of one medium-size copper deposit. The only difference with the second set is the fact that the instance considers a single processor. To depict the *in-situ* variability and uncertainty of these parameters in the scheduling, 10 stochastically simulated orebody models for each instance are considered. They are obtained from the computationally joint direct block simulation approach proposed by Boucher and Dimitrakopoulos (2012).

Table 4-1 Overview of the five instances

Instances		Number of blocks	Number of periods (T) in years	Destinations	Nature of the deposit	Number of side constraints
S1	I1	33,168 Block size: 25 x 25 x 2 meters Block weight: 3125 tonnes	5	2 processors, 1 waste dump	Multi-element iron ore deposits: iron content (Fe), silica content (SiO <sub>2</sub> ), alumina content (Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> ), phosphorus content (P), and the loss on ignition (LOI).	1025
	I2	4,734 Block size: 25 x 25 x 12 meters Block weight: 18750 tonnes	5	2 processors, 1 waste dump		1025
	I3	132,672 Block size: 25 x 25 x 2 meters Block weight: 3125 tonnes	5	2 processors, 1 waste dump	Iron ore deposit considering a contaminant SiO <sub>2</sub>	420
S2	C1	22,549 Block size: 20 x 20 x 10 meters Block weight: 10000 tonnes	12	2 processors, 1 waste dump	Copper deposit	276
	G1	48,821 Block size: 15 x 15 x 10 meters Block weight: 5625 tonnes	10	2 processors, 1 waste dump	Gold deposit	230
S3	C2	20,626 Block size: 20 x 20 x 10 meters Block weight: 10800 tonnes	10	1 processor, 1 waste dump	Copper deposit	120

#### 4.4.2 Parameters

Table 4-2 summarizes the economic parameters used to calculate the objective function coefficients. These parameters were discussed with industrial partners. Table 4-3 presents the parameters used to calculate the penalties for deviating from the production targets. They were chosen after trying several combinations and making trial-and-error so that there is a balance

between a very high selectivity and a permissive one that would affect the products' homogeneity. Furthermore, no cut-off grade is used, therefore the solver is free to consider a block as ore or waste.

Table 4-2 Economic parameters

		Iron	Copper	Gold
Mining cost		\$5/tonne	\$1/tonne	\$1/tonne
Low-grade processor	Processing cost	\$5/tonne	\$2.25/tonne	\$6/tonne
	Recovery	100 percent	55 percent	45 percent
High-grade processor	Processing cost	\$6/tonne	\$9/tonne	\$15/tonne
	Recovery	100 percent	90 percent	95 percent
Metal revenue		\$26/tonne for the low-grade and \$30/tonne for the high-grade	\$1.7/pound	\$28.2/gram
Discount rate		10 percent	10 percent	10 percent

Table 4-3 Costs of deviation from production targets (\$/tonne)

	Fe	SiO <sub>2</sub>	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	P	LOI	Cu	Au	Ore production
S1	10	20	20	10	1			25
S2 and S3						20	2,000	25 or Copper/100 for Gold deposit

### 4.4.3 Implementation

All the algorithms were developed in the C++ programming language, and all the computational tests were carried out on an Intel Core i5 computer (2.3 GHz) with 8.00 GB of RAM running under Windows 10. The extended version of the BZ algorithm, the Rounding Heuristic, and the Tabu Search will be referred as ExBZ, RH and TS, respectively. Before presenting the results, the different parameter values are first explained.

**ExBZ.** To solve maximum-flow subproblems, the pseudoflow algorithm presented in Hochbaum (2008) is used, and the LP is solved using Cplex with the default settings.

**RH.** No parameters needed.

**TS.** For the tabu search, there are two major parameters. They were defined based on preliminary tests:

- The maximum size of the TabuList or in other terms, the number of iterations during which a move remains tabu or forbidden is fixed at 1000 iterations which is, in average, nearly equal to

0.6N where N is the number of blocks that can be moved at each iteration or, in other words, the size of the neighborhood at each iteration.

- Stop criterion: Maximum number of successive non-improving iterations: 0.3N.

#### 4.4.4 Numerical Results

Table 4-4 provides a summary of the running times and a comparison of %**Gap** used to assess the quality of solutions. The measure %**Gap<sub>final</sub>** is the gap calculated with respect to the upper bound provided by ExtBZ:  $\%Gap_{final} = \frac{Z_{LR} - Z^*}{Z_{LR}}$  where  $Z^*$  and  $Z_{LR}$  are respectively the value of the solution provided by the algorithm evaluated and the linear relaxation optimal value obtained by ExtBZ. Another measure %**Diff** is used to represent the percent difference between the value of the solution produced by the initial solution used as input and produced by the previous heuristic, and that produced by each improvement heuristic X (SR, RH and TS) to assess their efficiencies.

Table 4-4 Summary of the average gaps and running times of the solutions found by the Bienstock-Zuckerberg extension and the different heuristics

Instances		ExtBZ	SR			RH			TS		
		Time	Time	Gap (%)	Diff (%)	Time	Gap (%)	Diff (%)	Time	Gap (%)	Diff (%)
S1	I1	18 mn	3 s	55.3	-	4 s	6.7	48.6	13 mn	1.2	5.5
	I2	2 mn 49 s	2 s	3.2	-	3 s	0.3	2.9	11 mn	0.3	~0
	I3	1h 12 mn*	20 s	22.1	-	2 mn	2.2	19.9	29 mn	1.7	0.5
S2	C1	10 mn 2 s	4 s	11	-	10 s	5.2	5.8	7 mn	3	2.8
	G1	28 mn 48 s	20 s	55.9	-	22 s	4.6	51.3	9 mn	1.7	2.9
S3	C2	3 mn 50 s	3 s	30	-	3 s	8	22	10 mn	3.5	4.5

\*time to solve to  $10^{-5}$ % of optimality

Results in Table 4-4 indicate that, for all instances, ExtBZ was able to solve the LP relaxation to optimality in reasonable time. However, the largest instance S1:I3 took more than 2 hours and half to be solved to optimality and 1h 12 min to reach a gap of  $10^{-5}$ %. It will be interesting to investigate deeper the reasons behind this regression of convergence. On the other hand, despite its greedy nature, RH seems to perform very well regardless of the quality of the initial solution provided by the SR heuristic and the time to run it is negligible. On the other hand, the running time of TS is large compared to its efficiency to improve the solution provided by RH. This is because evaluating the solution value of all the neighbors using this method is very time-consuming, especially for the instances that have a long lifetime of mine. The improvement obtained by TS is limited but still

worth it since all the instances reached a gap smaller than 3.5% after applying it. Overall, the table shows that, combined, the three heuristics do a good job of improving the solution obtained by ExtBZ.

#### 4.4.5 Risk Profiles

For the sake of brevity, in this section, only the results of instance S1:I1 will be evaluated regarding risk profiles of produced grades for the critical elements Fe, SiO<sub>2</sub>, P, Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> and LOI. Figure 4-5 shows risk profiles for produced grades. Each point represents a grade for a given period and a given simulation. A point outside the bounds reflects a deviation from production targets.

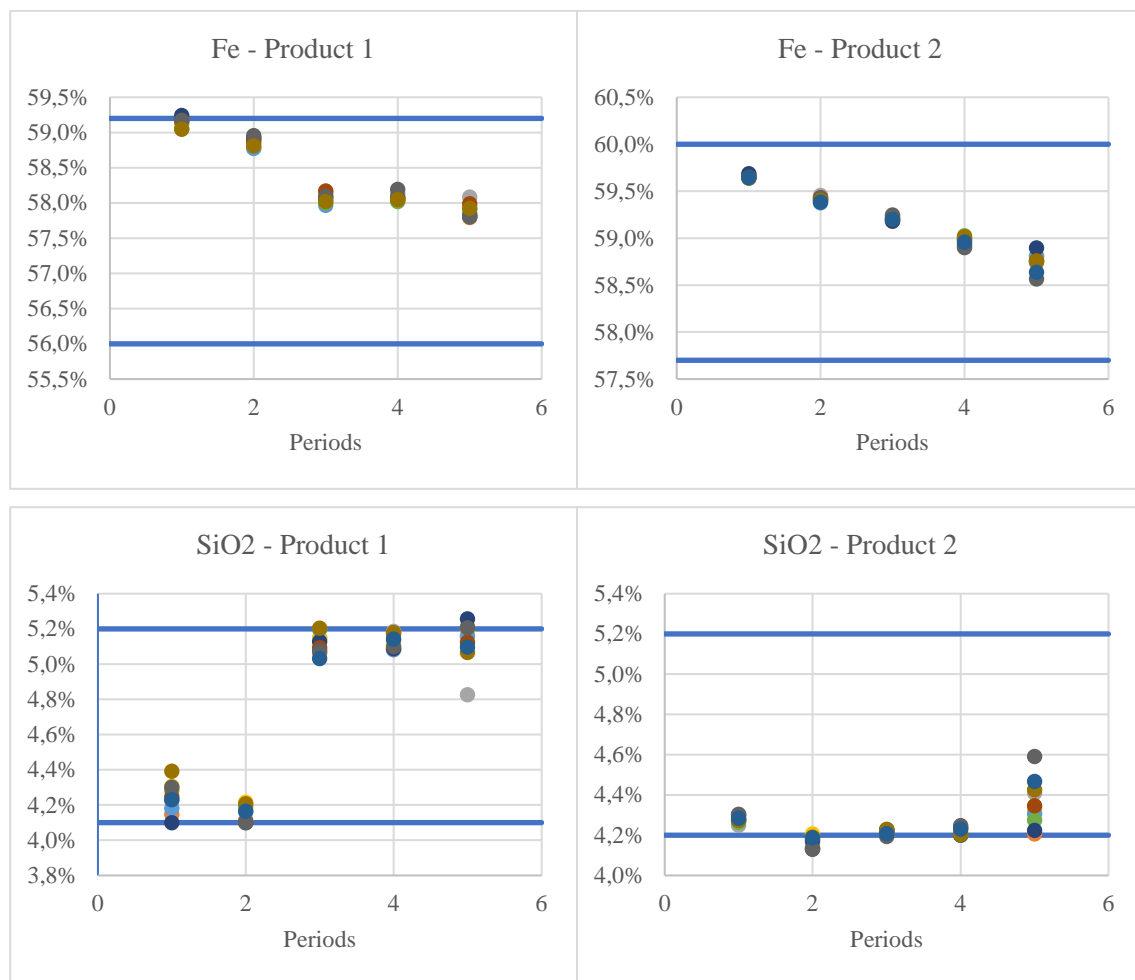


Figure 4-4 Results of stochastic scheduling in terms of risk profiles for Fe, SiO<sub>2</sub>, Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, P, and LOI

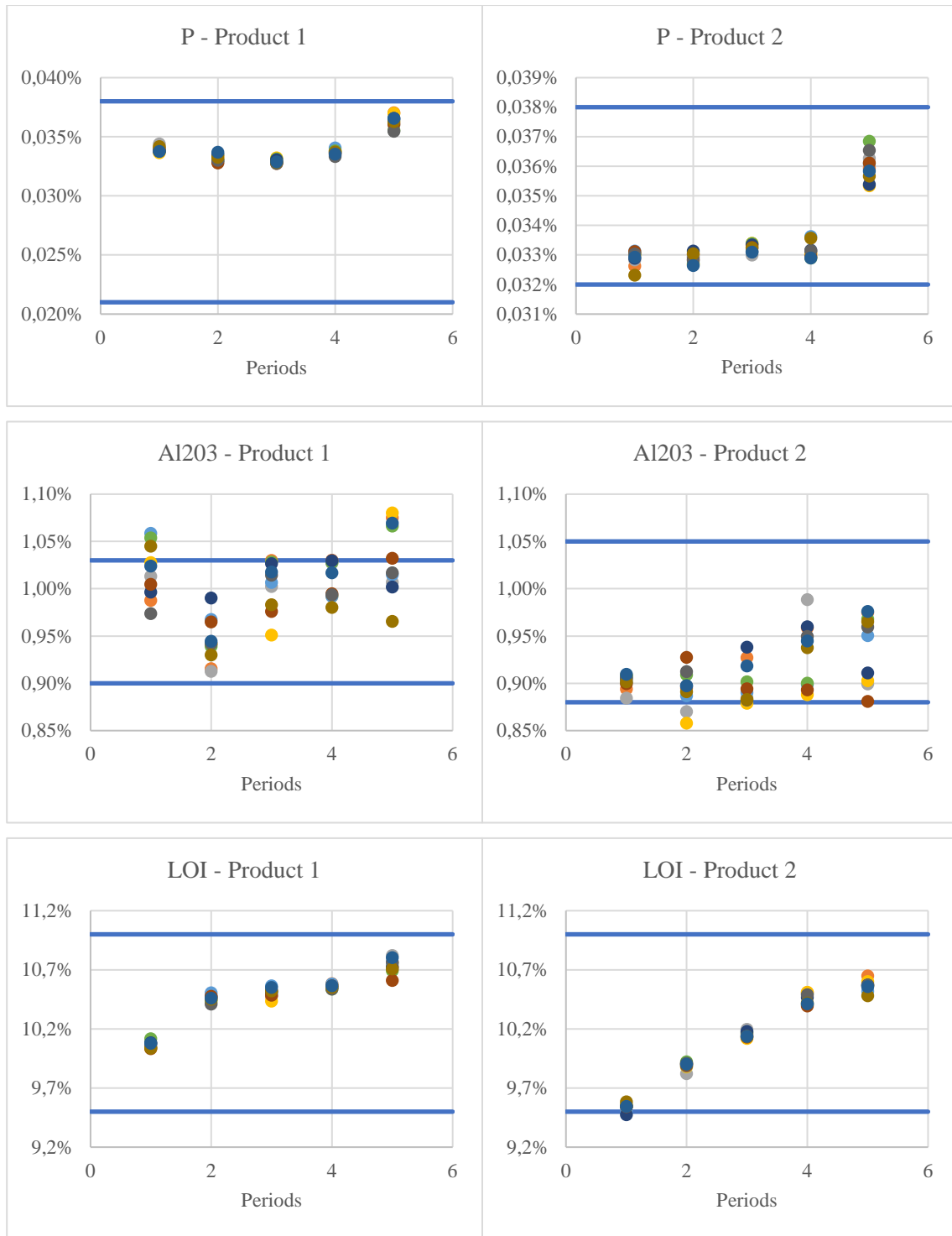


Figure 4-5 Results of stochastic scheduling in terms of risk profiles for Fe, SiO<sub>2</sub>, Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, P, and LOI (cont'd and end)

The risk profiles of Fe, P and LOI content lead to the conclusion that there is no risk of deviating from production targets. However, it is more critical with SiO<sub>2</sub> and Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> that failed to meet the targets for at least one period and one simulation. The deviations of SiO<sub>2</sub> remain very limited. The most important deviation is observed at Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> grades of Product 1 with a chance of 30% at period 1 and 50% at period 5. Higher penalties were tested to decrease this risk, but that improved the result only marginally. A high in-situ variability and uncertainty of the element can explain it, and blending cannot bypass this issue.

## 4.5 Conclusions

In this paper, a method based on a stochastic adaptation of the BZ algorithm, a rounding heuristic and a Tabu search has been proposed to solve real cases of an open-pit mine production scheduling problem with multi-destination and under multi-element geological uncertainty. The first heuristic used aims to round the fractional solution obtained by the BZ algorithm adaptation. It is a greedy heuristic based on topological sorting techniques. The second one is a Tabu search that improves the quality of the solution. Results show that the method performs very well, and the running times are reasonable. Indeed, the gap between the solution obtained and the upper bound is smaller than 3.5 %.

A natural next step would consist of finding finer decision-making criteria to accept or reject a block in the rounding heuristic and, thus, have better solutions to provide the Tabu search with. Another interesting work will consist of adding mid-short-term constraints for consideration.

## Acknowledgments

The work in this paper was funded by FRQNT Grant and the industry members of the COSMO Stochastic Mine Planning Laboratory: AngloGold Ashanti, Barrick Gold, BHP, De Beers, IAMGOLD, Kinross Gold, Newmont, and Vale.

**CHAPITRE 5    ARTICLE 2: SOLVING THE MIXED-INTEGER LINEAR  
PROGRAMMING PROBLEM FOR MINE PRODUCTION  
SCHEDULING WITH STOCKPILING UNDER MULTI-ELEMENT  
GEOLOGICAL UNCERTAINTY**

Cet article a été soumis à *Journal of the Operational Research Society* en Janvier, 2019

Zeyneb Brika<sup>a,b,c\*</sup>, Michel Gamache<sup>a,c</sup>, and Roussos Dimitrakopoulos<sup>b,c</sup>

<sup>a</sup> *Department of Mathematics and Industrial Engineering, Polytechnique Montréal, Montreal, Qc, Canada;*

<sup>b</sup> *COSMO – Stochastic Mine Planning Laboratory & Department of Mining and Materials Engineering, McGill University, Montreal, Qc, Canada*

<sup>c</sup> *GERAD – Groupe d'Études et de Recherche en Analyse des Décisions, Montréal, Qc, Canada*

\*E-mail: zayneb.brika@polymtl.ca

**Abstract:**

The open-pit mine production scheduling problem aims to optimize the net present value of a mining asset. Several solution methods have been proposed to find the most profitable mining sequence. Such methods entail determining which mining blocks from those used to represent the related mineral deposit should be extracted and when. However, little is reported in the technical literature that considers the material flow once mined and, more specifically, incorporating stockpiling as part of the mine scheduling strategy, thus adding technical intricacies due to the difficulty of correctly modeling the materials' blending once sent into a stockpile.

In this paper, a new model is provided to address the topic of open-pit mine production scheduling considering multiple destinations for the mined material, including stockpiles, and accounting for multi-element uncertainty. Unlike conventional models, the proposed model allows for an accurate estimation of the resulting grade of the stockpile without using unrealistic assumptions or non-linear constraints. A solution approach based on extending the Bienstock and Zuckerberg algorithm to the stochastic optimization and two heuristics is presented and applied to different real-size instances. Results show that this approach provides a feasible integer solution within less than 1.7% of optimality in a reasonable time. Properties and limitations of the model presented are also discussed, and recommendations for further research are made.

*Keywords: open-pit optimization; stochastic mathematical programming; Lagrangian relaxation; stockpile; multi-element mineral deposit; long-term production planning*

## **5.1 Introduction**

The long-term production scheduling of open pit mines seeks to find an optimal mining sequence, which means determining when, if ever, to extract each portion of the mineral deposit and where to send it among a given set of possible destinations (waste dump, processing plants, leach pads, stockpiles, and so on), so that the total net present value (NPV) of the operation is maximized. This scheduling is subject to some restrictions such as limited resources, production requirements or spatial precedence constraints. This decision problem, also called the open-pit mine production scheduling problem (OPMPSP), has been studied during the last fifty years not only due to its complexity since it implies large data sets and multiple constraints, but also due to its direct impact on a mining project's profitability and success. Through the development of optimization methods, researchers are trying to propose models that are increasingly accurate and close to reality on the ground. However, efforts to include stockpiles in the optimization process are limited, as it is mathematically challenging to assess the grade of the material inside the stockpile appropriately.

### **5.1.1 Models without stockpiling**

Early attempts to solve the OPMPSP do not consider stockpiles as part of the problem and focus instead on the extraction sequence. At that time, a three-dimensional model of blocks was already introduced to represent deposits and discretize them into mining blocks. Drilling operations allow associating a set of attributes to each block, such as metal grades, material type, density, etc. These attributes are estimated based on interpolation using available surrounding samples. Conventional approaches reinforce their inaccuracy by considering a single estimated value for each attribute and hence ignore both uncertainty and in-situ variability. Such methods are said to be deterministic in the sense that they consider all attribute values as exact, ignoring the related uncertainty and its sources. Johnson (1968) relaxes the integrity constraints and takes advantage of the particular structure of the problem to apply the Dantzig-Wolfe decomposition. Dagdeleen and Johnson (1986) propose an exact method based on the Lagrangian relaxation of resource constraints and use the sub-gradient method to adjust the multipliers. Many authors have since then proposed methods to



make large instances computationally tractable. While Ramazan (2007) developed the Fundamental Tree Algorithm to optimally aggregate blocks into groups, Whittle (1988) and Tabesh and Askari-Nasab (2011) use different aggregation heuristics to reduce the size of the problem. However, aggregation often leads to infeasible solutions once the disaggregation is done and original variables are restored (Boland et al., 2009), and thus, compromises the usefulness itself of the methods. Topal (2003) eliminates some binary variables by defining the earliest and the latest time of extraction for each block. Caccetta and Hill (2003) use the ultimate pit limit for preprocessing and apply a branch-and-cut algorithm to solve the problem. Ramazan and Dimitrakopoulos (2004) relax the integrity of the variables associated with waste blocks. Using a sliding time window was also a popular method (Dimitrakopoulos and Ramazan, 2008; Cullenbine et al., 2011; Lamghari and Dimitrakopoulos, 2016). Other approaches rely on heuristics and metaheuristics. Denby and Schofield (1994) use a genetic algorithm, while Shishvan and Sattarvand (2015) present a metaheuristic based on an ant colony optimization. Lamghari et al. (2015) propose a hybrid method based on linear programming (LP) and variable neighborhood local search. Decomposition methods also seem to be particularly efficient when applied to OPMPSP (Tachefine, 1997; Chicoisne et al., 2012; Bienstock and Zuckerberg, 2009, 2010). The Bienstock-Zuckerberg (BZ) algorithm, in particular, proved its efficiency to solve optimally the LP relaxation of the OPMPSP. Taking advantage of the special structure of the problem, their decomposition method can tackle large instances with an arbitrary number of side constraints. Munoz et al. (2018) document proves the correctness of the BZ algorithm and shows that it can be generalized to handle more problems arising in the context of mine planning.

Despite considerable advances in deterministic optimization methods, ignoring the uncertainty present in several parameters, especially in the metal content, severely compromises the robustness of these methods and directly affects the mining project's performance (Dowd, 1994; Baker and Giacomo, 1998). To address the geological uncertainty and represent the in-situ variability of the grades, multiple equally probable scenarios of the orebody's geological profile are used simultaneously as inputs for the OPMPSP (Goovarets, 1997; Boucher and Dimitrakopoulos, 2009). Accounting for metal uncertainty adds a level of complexity to the optimization process but presents also many benefits discussed, *inter alia*, by Ravenscroft (1992), Dowd (1994, 1997), Godoy and Dimitrakopoulos (2004), Menabde et al. (2007), Albor and Dimitrakopoulos (2010), Ramazan and Dimitrakopoulos (2013), Marcotte and Caron (2013), and Behrang et al. (2014).

Overall, the stochastic optimization increases the reliability of scheduling and its chances of meeting production targets through more realistic modeling and risk management. It also leads to higher NPVs (in the order of 15-30%) compared to those obtained by deterministic models (Dimitrakopoulos, 2011). Different approaches to handle metal uncertainty have been proposed in the literature. Formulations minimizing deviations from production targets over multiple orebody simulations have been introduced for example by Godoy (2002), Albor and Dimitrakopoulos (2009) and Goodfellow and Dimitrakopoulos (2013). Menabde et al. (2007) add to their model constraints to ensure that the production targets are met on average. Boland et al. (2008) propose a multistage stochastic programming approach. Benndorf and Dimitrakopoulos (2013) adopt a stochastic integer mathematical programming (SIP) to deal with multi-element uncertainty. The authors also manage to minimize deviation from production requirements. Lamghari and Dimitrakopoulos (2012) suggest an efficient metaheuristic solution approach based on a diversified Tabu search while Lamghari et al. (2014) propose a variable neighborhood descent heuristic and Albor and Dimitrakopoulos (2010) generate a set of nested pits, group these pits into pushbacks and then produce the long-term production scheduling based on the pushback designs obtained. Brika et al. (2018) propose an adaptation of the BZ algorithm to the stochastic optimization combined with two heuristics to solve efficiently an OPMPS problem under multi-element uncertainty and dealing with different destinations. The work presented herein is an extension of the later paper.

### **5.1.2 Models with stockpiling**

Stockpiles have long been excluded from the mine planning optimization process, despite their significant role in the material flow post-extraction and the different advantages they provide for mining companies. Indeed, it is mathematically challenging to correctly model the material-flow inside the stockpile considering the limitation of conventional optimization methods. Some mine planning software packages (Whittle, 2010; Mintec, 2013, MineMax, 2016) consider stockpiling as part of open pit mine scheduling. However, due to their modeling techniques, they do not provide optimal solutions.

In this context, academic researchers have proposed different models to remedy the identified deficiencies. To model the grade within the stockpile, it is typically assumed that material, once sent to the stockpile, is mixed automatically and homogeneously, and when reclaimed, it no longer

has the quality that it entered the stockpile, but henceforth the current average quality of the stockpile. This assumption implies constraints to ensure the preservation of material regarding tonnage and quality grade and thus, often results in models with non-convex nonlinear constraints. However, it is important to stress that this assumption of homogeneous mixing is unrealistic; rather, the material is stacked into successive layers. Bley et al. (2012) propose exact algorithmic approaches to solve two different nonlinear integer models considering one stockpile and taking advantage of the special structure of such specific models. They relax the nonlinear stockpiling constraints and introduce an aggressive branching pattern to limit their violation to be arbitrarily close to zero. Then, they apply a primal heuristic to repair the solution and make it a fully feasible solution. Goodfellow and Dimitrakopoulos (2016, 2017) and Montiel and Dimitrakopoulos (2015) propose global optimization models that consider all the interrelated aspects of the mineral value chain simultaneously in a stochastic context. Their method combines different metaheuristics such as simulated annealing, particle swarm optimization, and differential evolutions. They also develop a policy to select the destination of each block once it is extracted. Comparisons with the deterministic equivalent of the proposed optimizer and a commercial mine planning software show the outperformance of their method.

Although correctly capturing the material flow inside a stockpile with respect to the homogeneous mixing assumption requires nonlinear models, due to their inherent complexity, researchers prefer to have recourse to linear models at the expense of solution accuracy. Smith (1999) solves a short-term production scheduling considering stockpiling and blending. He approximates, with a piecewise linear formulation, the quadratic terms in the original model representing the product of the grade inside a stockpile and the quantity withdrawn from it in each period. Akaike and Dagdelen (1999) do not consider blending in stockpiles and assume that there is an infinity of stockpiles; in other terms, that each block has its associated stockpile and thus, the trackability of each block is preserved from its extraction to its final destination, through to stockpile. This assumption is unrealistic, though it alleviates the nonlinearity. Later, Ramazan and Dimitrakopoulos (2013) and Smith and Wicks (2014) adopt the same assumption but in two different contexts. The first paper uses a stochastic framework to reflect uncertainty in the geological and economic input data. Instead, the second paper considers a deterministic context in which the model is solved using a sliding time window heuristic. Yarmuch and Ortiz (2011) define two stockpiles, one for the high-grade ore and another for the low-grade, and then solve the problem period by period, readjusting

the grade inside the stockpiles at the end of each period. Tabesh et al. (2015) linearize the problematic constraints by defining a “sufficient” number of stockpiles, where each stockpile covers material within a tight grade range. Unfortunately, the authors do not provide any numerical results. Lamghari and Dimitrakopoulos (2016) introduce a new formulation to solve the OPMPSP under metal uncertainty and considers multiple destinations, including stockpiles. The nonlinearity is avoided by estimating the corresponding average grade for each stockpile and adjusting it successively. To manage geological risk, the surplus over ore production targets is indirectly penalized through the costs imposed by sending ore material to the stockpiles. Moreno et al. (2017) analyze different stockpiling models, most of which are aforementioned, and propose a new linear-integer model. The authors show that this model is a close approximation of the nonlinear-integer equivalent model presented by Bley et al. (2012). However, they also assume homogeneous mixing of the material in a single stockpile in each period.

In this context, the objective of this paper is to propose a new linear mixed integer model that can tackle large instances of the OPMPSP with stockpiling (OPMPSP+S) and under metal uncertainty. This model does not consider the homogeneous mixing assumption and does not require approximations to handle the blending constraints properly. The remainder of the paper is organized as follows: Section 2 presents an existing model to solve the OPMPSP that does not incorporate stockpiles before introducing a new model with stockpiling. Section 3 outlines a reformulation of the proposed model to fit the Bienstock-Zuckerberg algorithm’s framework. In Section 4, a three-step solution approach is described. Computational results of application on actual case studies are presented in Section 5. Section 6 explains the limitations of the proposed model and suggests recommendations to address them. Conclusions follow in Section 7.

## **5.2 Mathematical Formulation**

This section first presents a mathematical formulation of a model that does not incorporate stockpiling before introducing stockpiles in a new model.

### **5.2.1 Open pit mine production scheduling without stockpiling**

The first subsection brings in notation and the following section introduces the mathematical model.

### 5.2.1.1 Notations

#### 5.2.1.1.1 Sets:

- $\mathcal{B} = \{1 \dots B\}$ : set of blocks
- $\mathcal{T} = \{1 \dots T\}$ : set of time periods, which discretize the life of the mine
- $\mathcal{M} = \{1 \dots M\}$ : set of processing plants.
- $\mathcal{W} = \{1 \dots W\}$ : set of waste dumps
- $\mathcal{D} = \mathcal{M} \cup \mathcal{W} = \{1 \dots D\}$ : set of destinations including the waste dumps and the processing plants
- $\mathfrak{R} = \{1 \dots R\}$ : set of ore properties (i.e. geological elements).
- $\mathcal{S} = \{1 \dots S\}$ : set of possible scenarios of the orebody. Each scenario has the same probability of occurrence and represents a different simulation of the geological profile of each block.
- $\Gamma_b^+$  and  $\Gamma_b^-$ : respectively the set of immediate successors and predecessors of block  $b$ .

#### 5.2.1.1.2 Parameters:

- $p_{b,d,t,s}$  is the discounted profit obtained, if block  $b$  is sent to destination  $d$  in period  $t$  under scenario  $s$ . If the destination is a processing plant, the profit is equal to the value of the metal content recovered of the block less the processing and selling costs. If the block is sent to the waste dump, it is equal to 0. Note here that the mining cost of the block is computed separately.
- $g_{b,s}^r$  is the grade of block  $b$  for element  $r$  under scenario  $s$ .
- $Tmax_{m,t}$  and  $Tmin_{m,t}$  are respectively the expected maximum and minimum ore tonnages sent to processing plant  $m$  at period  $t$ .
- $Gmax_{m,t}^r$  and  $Gmin_{m,t}^r$  are respectively the expected maximum and minimum grades for resource  $r$  sent to processing plant  $m$  at period  $t$ .
- $mc_{b,t}$  is the discounted cost of extracting a block  $b$  at period  $t$ .
- $cu_t$  and  $cl_t$  are respectively the discounted unit costs of upper and lower deviations from  $Tmax_{m,t}$  and  $Tmin_{m,t}$ .
- $cu_t^r$  and  $cl_t^r$  are respectively the discounted unit costs of upper and lower deviations from  $Gmax_{d,t}^r$  and  $Gmin_{d,t}^r$ .

- $Q_b$  is the tonnage of block  $b$ .
- $M_{max}$  is the maximum mining capacity per period.

### 5.2.1.1.3 Variables:

- $y_{b,d,t}^{at}$  is a binary variable which takes 1 if the block  $b$  is completely extracted and sent to destination  $d$  at time  $t$ , 0 otherwise.
- $qu_{m,t,s}$  and  $ql_{m,t,s}$  are continuous variables representing respectively the upper and lower deviation from ore tonnage production target at period  $t$  sent to processing plant  $m$  under scenario  $s$ .
- $qu_{m,t,s}^r$  and  $ql_{m,t,s}^r$  are continuous variables representing respectively the upper and lower deviation from production target  $r$  at period  $t$  sent to processing plant  $m$  under scenario  $s$ .

### 5.2.1.2 Mathematical model

Following the description and the notation given in the previous sections, the problem can be formulated as a two-stage stochastic mixed integer programming model (Birge and Louveaux, 1997).

#### 5.2.1.2.1 Objective Function:

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{P}) \max Z = & \frac{1}{S} \sum_{b=1}^B \sum_{d=1}^D \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S (p_{b,d,t,s} - mc_{b,t}) y_{b,d,t} \\
 & - \sum_{m=1}^M \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S (cu_t qu_{m,t,s} + cl_t ql_{m,t,s}) \\
 & - \frac{1}{S} \sum_{m=1}^M \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S \sum_{r=1}^R (cu_t^r qu_{m,t,s}^r + cl_t^r ql_{m,t,s}^r)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

#### 5.2.1.2.2 Constraints:

$$\sum_{p=1}^T \sum_{d=1}^D y_{b,d,p}^{at} \leq 1 \quad \forall b \in \mathcal{B} \tag{2.2}$$

$$\sum_{p=1}^t \sum_{d=1}^D y_{b,d,p}^{at} \leq \sum_{p=1}^t \sum_{d=1}^D y_{a,d,p}^{at} \quad \forall (a, b) \in \mathcal{B}^2 \text{ where } a \in \Gamma_b^-, t \in \mathcal{T} \tag{2.3}$$

$$\sum_{b=1}^B Q_b \cdot y_{b,m,t,s}^{at} - qu_{m,t,s} \leq Tmax_{m,t} \quad \forall b \in \mathcal{B}, m \in \mathcal{M}, t \in \mathcal{T}, s \in \mathcal{S} (2.4)$$

$$\sum_{b=1}^B Q_b \cdot y_{b,m,t,s}^{at} + ql_{m,t,s} \geq Tmin_{m,t} \quad \forall b \in \mathcal{B}, m \in \mathcal{M}, t \in \mathcal{T}, s \in \mathcal{S} (2.5)$$

$$\sum_{b=1}^B Q_b \cdot (g_{bs}^r - Gmax_{m,t}^r) \cdot y_{b,m,t}^{at} - qu_{m,t,s}^r \leq 0 \quad \forall m \in \mathcal{M}, t \in \mathcal{T}, s \in \mathcal{S}, r \in \mathcal{R} (2.6)$$

$$\sum_{b=1}^B Q_b \cdot (g_{bs}^r - Gmin_{m,t}^r) \cdot y_{b,m,t}^{at} + ql_{m,t,s}^r \geq 0 \quad \forall m \in \mathcal{M}, t \in \mathcal{T}, s \in \mathcal{S}, r \in \mathcal{R} (2.7)$$

$$\sum_{b=1}^B Q_b \cdot (\sum_{d=1}^D y_{b,d,t}^{at}) \leq M_{max} \quad \forall t \in \mathcal{T} (2.8)$$

$$y_{b,d,t}^{at} \in \{0,1\} \quad \forall b \in \mathcal{B}, d \in \mathcal{D}, t \in \mathcal{T} (2.9)$$

$$qu_{m,t,s}, ql_{m,t,s} \quad \forall m \in \mathcal{M}, t \in \mathcal{T}, s \in \mathcal{S} (2.10a)$$

$$qu_{m,t,s}^r, ql_{m,t,s}^r \geq 0 \quad \forall m \in \mathcal{M}, t \in \mathcal{T}, s \in \mathcal{S}, r \in \mathcal{R} (2.10b)$$

The objective function (2.1) combines two goals. The first aims to maximize the discounted profit generated by the deposit exploitation over the simulated orebody models. The second one aims to minimize deviations from production targets considering all the scenarios.

The first constraint (2.2) ensures that each block cannot be extracted more than once. Constraint (2.3) represents the precedence constraints and ensures that a block cannot be mined if not all the overlaying blocks are already mined. Ore tonnage deviations from ore production targets are defined in inequations (2.6) and (2.7). Similarly, constraints (2.4) and (2.5) compute the grade deviations from respectively the maximum and minimum expected grades. The constraint (2.8) limits the mining capacity. Finally, constraint (2.9) and constraints (2.10) represent the integrity and the non-negativity constraints respectively.

## 5.2.2 A new linear model that considers stockpiling

In this section, a new model OPMPS+S that considers stockpiling is presented. Unlike conventional models, this model doesn't assume that material in the stockpile is automatically mixed and becomes homogeneous. Instead of that and due to new variables introduced in Section 2.2.1, each block is tracked from its extraction to its final destination. The same notation presented in Section 2.1 is used, and some additional notation is defined in what follows:

### 5.2.2.1 Notation

#### 5.2.2.1.1 Parameters:

- $rc_{b,m,t}$  is the discounted cost of rehandling a block  $b$  from stockpiles to processing plant  $m$  at time  $t$

### 5.2.2.1.2 Variables:

- $z_{b,m,t_0,t_1}^{at}$  is a binary variable that takes 1 if  $b$  extracted and sent to stockpile at time  $t_0$  and then sent to processing plant  $m$  at time  $t_1$  with  $(t_0 < t_1)$ .

With this new formulation, a stockpile is created for and associated with each period  $t_1$  and each processing plant  $m$ . All the ore stocked in this stockpile during periods anterior to  $t_1$  will be completely sent to processing plant  $m$  only in period  $t_1$ .

### 5.2.2.2 Mathematical model

The OPMPS+S model is obtained from the formulation in Section 2.1.2 by adding terms (written between “{ }”) associated with new variables. The numbers of equivalent constraints in both models are preserved. Those of the new model are differentiated by an apostrophe.

#### 5.2.2.2.1 Objective Function:

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{P}^S) \quad & \max \frac{1}{S} \sum_{b=1}^B \sum_{d=1}^D \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S (p_{b,d,t,s} - mc_{b,t}) \times y_{b,d,t} \\
 & - \sum_{m=1}^M \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S (cu_t qu_{m,t,s} + cl_t ql_{m,t,s}) - \frac{1}{S} \sum_{m=1}^M \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S \sum_{r=1}^R (cu_t^r qu_{m,t,s}^r + cl_t^r ql_{m,t,s}^r) \\
 & + \left\{ \frac{1}{S} \sum_{b=1}^B \sum_{m=1}^M \sum_{t_0=1}^{T-1} \sum_{t_1=t_0+1}^T \sum_{s=1}^S (p_{b,m,t_1,s} - mc_{b,t_0} - rc_{b,m,t_1}) \times z_{b,m,t_0,t_1} \right\}
 \end{aligned} \tag{2.1'}$$

#### 5.2.2.2.2 Constraints:

For each  $b \in \mathcal{B}$ :

$$\sum_{t_0=1}^T \sum_{d=1}^D y_{b,d,t_0}^{at} + \left\{ \sum_{t_0=1}^{T-1} \sum_{t_1=t_0+1}^T \sum_{m=1}^M z_{b,m,t_0,t_1}^{at} \right\} \leq 1 \tag{2.2'}$$

For each  $(a, b) \in \mathcal{B}^2$  where  $a \in \Gamma_b^-$  and  $t \in \{1 \dots T - 1\}$ :



$$\sum_{t_0=1}^t \sum_{d=1}^D y_{b,d,t_0}^{at} + \left\{ \sum_{t_0=1}^t \sum_{t_1=t_0+1}^T \sum_{m=1}^M z_{b,m,t_0,t_1}^{at} \right\} \leq \sum_{t_0=1}^t \sum_{d=1}^D y_{a,d,t_0}^{at} + \left\{ \sum_{t_0=1}^t \sum_{t_1=t_0+1}^T \sum_{m=1}^M z_{a,m,t_0,t_1}^{at} \right\} \quad (2.3a')$$

For each  $(a, b) \in \mathcal{B}^2$  where  $a \in \Gamma_b^-$  and  $t = T$ :

$$\sum_{t_0=1}^T \sum_{d=1}^D y_{b,d,t_0}^{at} + \left\{ \sum_{t_0=1}^{T-1} \sum_{t_1=t_0+1}^T \sum_{m=1}^M z_{b,m,t_0,t_1}^{at} \right\} \leq \sum_{t_0=1}^T \sum_{d=1}^D y_{a,d,t_0}^{at} + \left\{ \sum_{t_0=1}^{T-1} \sum_{t_1=t_0+1}^T \sum_{m=1}^M z_{a,m,t_0,t_1}^{at} \right\} \quad (2.3b')$$

For each  $m \in \mathcal{M}, s \in \mathcal{S}$  and  $t = 1$ :

$$\sum_{b=1}^B Q_b \times y_{b,m,1}^{at} - qu_{m,1,s} \leq T \max_{m,1} \quad (2.4a')$$

$$\sum_{b=1}^B Q_b \times y_{b,m,1}^{at} + ql_{m,1,s} \geq T \min_{m,1} \quad (2.5a')$$

For each  $m \in \mathcal{M}, s \in \mathcal{S}$  and  $t \in \{2 \dots T\}$ :

$$\sum_{b=1}^B Q_b \times (y_{b,m,t}^{at} + \left\{ \sum_{t_0=1}^{t-1} z_{b,m,t_0,t}^{at} \right\}) - qu_{m,t} \leq T \max_{m,t} \quad (2.4b')$$

$$\sum_{b=1}^B Q_b \times (y_{b,m,t}^{at} + \left\{ \sum_{t_0=1}^{t-1} z_{b,m,t_0,t}^{at} \right\}) + ql_{m,t} \geq T \min_{m,t} \quad (2.5b')$$

For each  $m \in \mathcal{M}, t = 1, s \in \mathcal{S}$  and  $r \in \mathcal{R}$ :

$$\sum_{b=1}^B Q_b \times (g_{bs}^r - G \max_{m,t}^r) \times y_{b,m,1}^{at} - qu_{m,1,s}^r \leq 0 \quad (2.6a')$$

$$\sum_{b=1}^B Q_b \times (g_{bs}^r - G \min_{m,t}^r) \times y_{b,m,1}^{at} + ql_{m,1,s}^r \geq 0 \quad (2.7a')$$

For each  $m \in \mathcal{M}, t \in \{2 \dots T\}, s \in \mathcal{S}$  and  $r \in \mathcal{R}$ :

$$\sum_{b=1}^B Q_b \times (g_{bs}^r - G \max_{m,t}^r) \times (y_{b,m,t}^{at} + \left\{ \sum_{t_0=1}^{t-1} z_{b,m,t_0,t}^{at} \right\}) - ql_{m,t}^r \leq 0 \quad (2.6b')$$

$$\sum_{b=1}^B Q_b \times (g_{bs}^r - G \min_{m,t}^r) \times (y_{b,m,t}^{at} + \left\{ \sum_{t_0=1}^{t-1} z_{b,m,t_0,t}^{at} \right\}) + ql_{m,t,s}^r \geq 0 \quad (2.7b')$$

For each  $t \in \{1 \dots T-1\}$ :

$$\sum_{b=1}^B Q_b \times \left( \sum_{d=1}^D y_{b,d,t}^{at} + \left\{ \sum_{p=t+1}^T \sum_{m=1}^M z_{b,d,t,p}^{at} \right\} \right) \leq M_{\max} \quad (2.8a')$$

For  $t = T$ :

$$\sum_{b=1}^B Q_b \times \sum_{d=1}^D y_{b,d,T}^{at} \leq M_{\max} \quad (2.8b')$$

For each  $b \in \mathcal{B}, d \in \mathcal{D}, t \in \mathcal{T}$ :

$$y_{b,d,t}^{at} \in \{0,1\} \quad (2.9a')$$

For each  $b \in \mathcal{B}, m \in \mathcal{M}, t_0 \in \{1 \dots T-1\}$  and  $t_1 \in \{t_0+1, \dots, T\}$

$$z_{b,m,t_0,t_1}^{at} \in \{0,1\} \quad (2.9b')$$

For each  $m \in \mathcal{M}, s \in \mathcal{S}$  and  $t \in \mathcal{T}$ :

$$qu_{m,t,s}, ql_{m,t,s} \geq 0 \quad (2.10a')$$

For each  $m \in \mathcal{M}, t \in \mathcal{T}, s \in \mathcal{S}$  and  $r \in \mathcal{R}$ :

$$qu_{m,t,s}^r, ql_{m,t,s}^r \geq 0 \quad (2.10b')$$

The objective function (2.1') remains the same but the profit generated by the blocks sent from the stockpile to the processing plants is added, and rehandling costs are also subtracted. The reserve constraint (2.2') considers now the possibility of sending the block to the stockpile. Constraints (2.4') – (2.7') have two different expressions to embrace the fact that rehandling material from the stockpile cannot occur in the first period. Similarly, constraints (2.3') and (2.8') have two expressions since sending material to the stockpile in the last period is impossible. Constraint (2.9'b) also forces the new variables  $z_{b,m,t_0,t_1}^{at}$  to be binary. Constraints (2.10') remain unchanged.

### 5.3 Reformulation

In this section, a reformulation of the model described in Section 2.2 is presented. This step is essential to apply the Bienstock-Zuckerberg algorithm that will be discussed in the next section. Two new binary variables are defined as follows:

- $y_{b,d,t}^{by} = \sum_{p=1}^t y_{b,d,p}^{at}$ . This variable takes 1 if block  $b$  is extracted and sent to destination  $d$  by time  $t$  (at  $t$  or earlier), 0 otherwise.
- $z_{b,m,t_0,t_1}^{by} = \sum_{p=1}^{t_0} z_{b,m,p,t_1}^{at}$ . By definition, it takes the value of 1 if block  $b$  is extracted and sent to stockpile by time  $t_0$  (at  $t_0$  or earlier) and then sent to processing plant  $m$  at time " $t_1$ " with ( $t_0 < t_1$ ), 0 otherwise.

Then, variables  $y^{at}$  and  $z^{at}$  can be eliminated and replaced respectively by variables  $y^{by}$  and  $z^{by}$  considering the following system of equalities

- $y_{b,1,1}^{at} = y_{b,1,1}^{by} \quad \forall b \in \mathcal{B}$
- $y_{b,1,t}^{at} = y_{b,1,t}^{by} - z_{b,M,t-1,T}^{by} \quad \forall b \in \mathcal{B}, t = 2 \dots T$
- $y_{b,d,t}^{at} = y_{b,d,t}^{by} - y_{b,d-1,t}^{by} \quad \forall b \in \mathcal{B}, d = 2 \dots D, t = 1 \dots T$
- $z_{b,1,t_0,t_0+1}^{at} = z_{b,1,t_0,t_0+1}^{by} - y_{b,D,t_0}^{by} \quad \forall b \in \mathcal{B}, t_0 = 1 \dots T - 1$
- $z_{b,1,t_0,t_1}^{at} = z_{b,1,t_0,t_1}^{by} - z_{b,M,t_0,t_1-1}^{by} \quad \forall b \in \mathcal{B}, t_0 = 2 \dots T - 1, t_1 = t_0 + 2 \dots T$
- $z_{b,m,t_0,t_1}^{at} = z_{b,m,t_0,t_1}^{by} - z_{b,m-1,t_0,t_1}^{by} \quad \forall b \in \mathcal{B}, m = 2 \dots M, t_0 = 1 \dots T - 1, t_1 = t_0 + 1 \dots T$

Using this transformation, an equivalent formulation can be obtained. In what follows and for reasons of brevity, only the reformulations of reserve constraints and slope constraints are shown. The substitution of the objective function and remaining constraints is trivial and will not, therefore,

be detailed herein. Also, henceforth, the “by” index will be omitted to simplify notation and  $y$  and  $z$  will refer to  $y^{by}$  and  $z^{by}$  respectively,

- $z_{b,M,t-1,T} \leq y_{b,1,t} \quad \forall b \in \mathcal{B}, t = 2 \dots T \quad (3.2a)$

- $y_{b,d-1,t} \leq y_{b,d,t} \quad \forall b \in \mathcal{B}, d = 2 \dots D, t = 1 \dots T \quad (3.2b)$

- $y_{b,D,t} \leq z_{b,1,t,t+1} \quad \forall b \in \mathcal{B}, t = 1 \dots T - 1 \quad (3.2c)$

- $z_{b,m-1,t_0,t_1} \leq z_{b,m,t_0,t_1} \quad \forall b \in \mathcal{B}, m = 2 \dots M, t_0 = 1 \dots T - 1, t_1 = t_0 + 1 \dots T \quad (3.2d)$

- $z_{b,M,t_0,t_1-1} \leq z_{b,1,t_0,t_1} \quad \forall b \in \mathcal{B}, m = 2 \dots M, t_0 = 1 \dots T - 1, t_1 = t_0 + 2 \dots T \quad (3.2e)$

Constraints (3.2a) - (3.2e) correspond to reserve constraint (3.2') in the original formulation. Slope constraints (2.3') are replaced by constraints (3.3a) and (3.3b).

- $z_{b,M,t,T} \leq z_{a,M,t,T} \quad \forall (a,b) \in \mathcal{B}^2, a \in \Gamma_b^-, t = 1 \dots T - 1 \quad (3.3a)$

- $y_{b,D,T} \leq y_{a,D,T} \quad \forall (a,b) \in \mathcal{B}^2, a \in \Gamma_b^- \quad (3.3b)$

Due to the reformulation introduced above, the reserve constraints (3.2) and the slope constraints (3.3) can be represented as precedence relationships in a directed graph  $G = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$  where the set of nodes  $\mathcal{V}$  corresponds to the decision variables “y” and “z” and an arc  $(a, b) \in \mathcal{A}$  means the value of the decision variable associated with node “a” should be equal or lower than that of node “b”. Figure 5-1 illustrates the different type constraints for a given time of extraction  $t$  and a pair of blocks  $(a, b)$  where the block  $b$  is a predecessor of the block  $a$ .

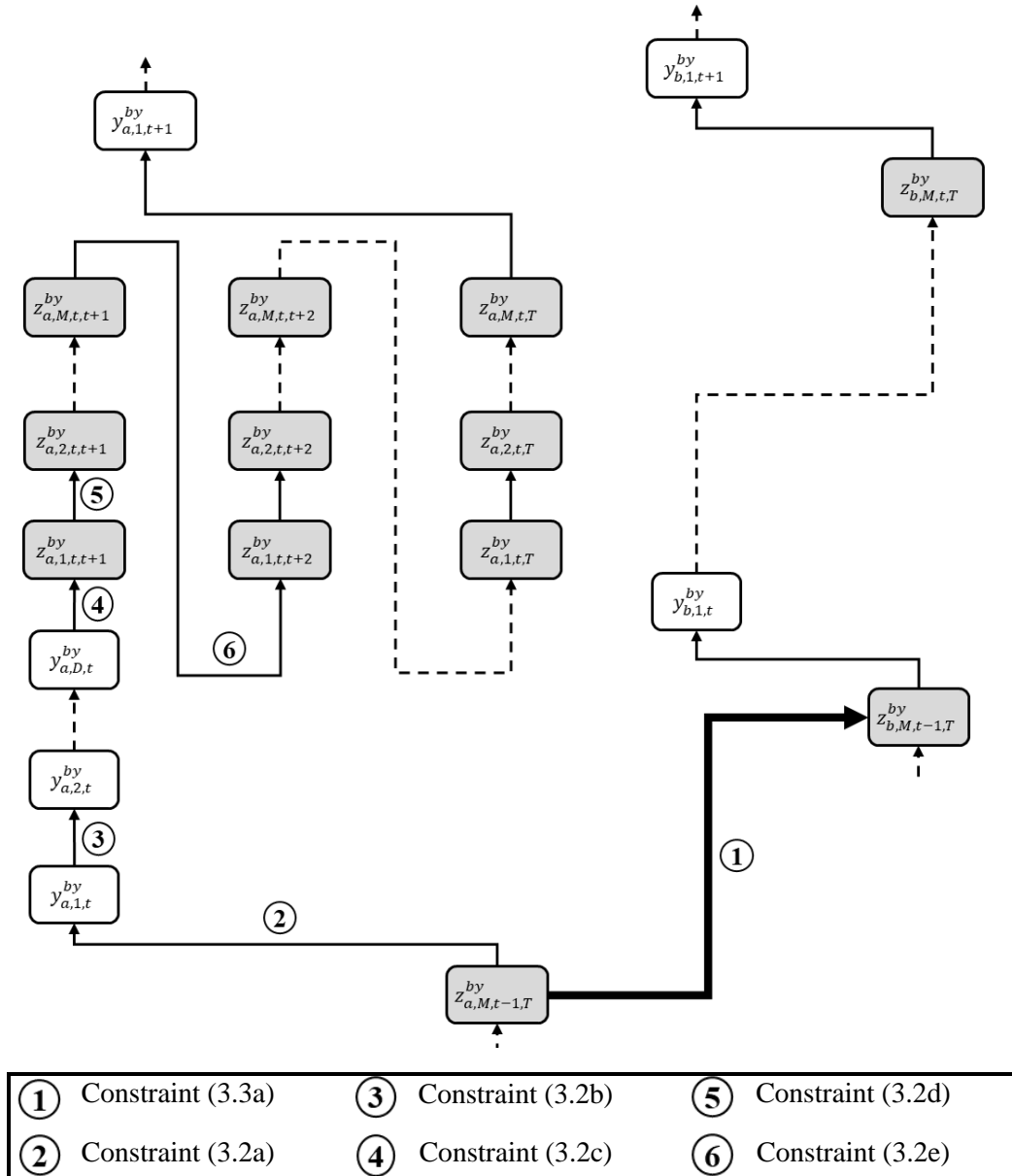


Figure 5-1 Precedence constraints

## 5.4 Solution Approach

The solution approach adopted herein is a three-step method. It is an adaptation of the algorithm presented in Brika et al. (2018) to handle the stockpiling. In what follows, a general description of the methodology is presented. Section 5.4.1 describes the first step which is an extension of the algorithm introduced in Bienstock and Zuckerberg (2009) to the stochastic optimization. It aims to solve optimally the linear relaxation of the problem. Then, a greedy heuristic illustrated in Section 5.4.2 is applied to round the fractional solution previously obtained and make it integer. Finally, in Section 5.4.3, a Tabu search heuristic allows to improve the quality of this new integer solution. Since no major changes are added to the method introduced in Brika et al. (2018), only a brief description of the three algorithms will be presented. For further details, the reader is referred to the latter paper.

### 5.4.1 Solving the Linear Relaxation

The mathematical formulation of the problem described in Section 3 can be illustrated in a more compact form as follows

$$Z = \max p^t y + c^t q$$

$$s. t. \quad y_i \leq y_j \quad \forall (i, j) \in \mathcal{A} \quad (4.1)$$

$$My + Hq \leq d \quad (4.2)$$

$$y \in \{0,1\}^n, q \geq 0 \quad (4.3)$$

where “ $p$ ” represents the vector of the discounted profit, “ $c$ ” the vector of the discounted unit cost of deviation, “ $y$ ” both the “ $y$ ” and the “ $z$ ” variables for the sake of simplicity and “ $q$ ” the deviation variables. Constraints (4.1) represent all the precedence constraints (both slope and reserve constraints), while constraints (4.2) regroup the different side constraints (blending constraints, mining capacity constraints, etc.). The efficiency of the Bienstock-Zuckerberg algorithm lies on this particular structure. Indeed, once the resource constraints are relaxed, the problem boils down to a maximum closure problem, which can be solved in polynomial time (Hochbaum, 2001). Nevertheless, there is one critical issue remaining: relaxing the side constraints is insufficient since it leads to infeasible solutions. Instead of that, the algorithm uses the Lagrangian relaxation that limits the violation of the relaxed constraints by adding appropriate penalties in the objective

function. These penalties are continuously adjusted until the algorithm converges. More formally, at each iteration, a maximum closure problem is solved, and the solution provides a new partition that, when intersected with the previous partition, allows one to model some constraints of the LP as one. Indeed, the algorithm forces the variables in the same group of the partition to be equal, thereby considerably reducing the size of the problem. It can be compared to an aggregation, but the main difference is the fact that individual properties of the blocks over all scenarios are preserved. The solution of the LP, in turn, aims to update the penalties by replacing them with the new dual variables of the side constraints, and so on, until the algorithm converges, and an optimal solution is obtained. However, this solution is fractional and needs to be rounded.

## 5.4.2 Rounding Heuristic

Once a fractional solution is obtained, a rounding heuristic is applied to make it integer. It is a greedy two-step heuristic that takes up ideas from the TopoSort heuristic proposed in Chicoisne *et al.* (2012) and extends the rounding heuristic introduced in Brika *et al.* (2018) to handle the stockpiling. The first step consists in sorting the blocks according to a topological ordering with respect to a weight vector  $\mathbf{w}$ . This ordering defines a feasible extraction sequence  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  where  $b_i$  represents a mining block and where a block  $b_i$  will appear before  $b_j$  in the sequence, if it satisfies either  $b_i$  is a predecessor of  $b_j$  or  $w_i < w_j$ . To calculate the weights, a function equivalent to the one proposed by Chicoisne *et al.* (2012) is adopted. For each  $b \in \mathcal{B}$ , the weight is estimated as follows

$$w_b = \bar{z}_{b,M,1,T} + \sum_{t=2}^{T-1} t \times (\bar{z}_{b,M,t,T} - \bar{z}_{b,M,t-1,T}) + T \times (\bar{y}_{b,D,T} - \bar{z}_{b,M,T-1,T}) + (T + 1) \times (1 - \bar{y}_{b,D,T}),$$

where  $\bar{y}$  and  $\bar{z}$  are the values of the LP solution obtained by the decomposition method. The weight  $w_b$  can be interpreted as the estimated extraction time of the block  $b$ . A weight equal to  $T + 1$  corresponds to a block that will not be extracted. The second step consists in rounding the fractional solution following the weighted topological ordering. From this point, the heuristic proposed herein is completely different by nature from the one proposed in Chicoisne *et al.* (2012). The latter one is a constructive heuristic suitable only for a deterministic context where there are only hard constraints that represent upper bounds to satisfy. For its part, the current stochastic model handles

soft constraints by allowing their violation and contains both upper and lower bounds for each production target. Also, instead of starting from an empty solution, the algorithm starts from an initial feasible solution obtained by simply rounding the fractional LP solution. The blocks that were completely extracted in the same period are by now fixed. Only the extraction and processing times and the destinations of the remaining blocks can be modified. Then, the algorithm tries to improve the current solution by moving a non-fixed block at once following the topological ordering. The only difference with the algorithm introduced in Brika et al. (2018) is the fact that the option of sending a block to different stockpiles should now be considered.

### 5.4.3 Tabu Search

The last step of the method consists in applying successively  $T$  times a Tabu search to improve the quality of the integer solution obtained by the Rounding Heuristic. Starting from the first period, once iteration  $t$  is reached, all blocks scheduled in earlier periods (i.e.  $\{b \in \mathcal{B} | t_0^b < t\}$ ) are considered fixed, and only the remaining blocks can be rescheduled. A neighborhood is then formed by all the solutions obtained from the current solution by either postponing to  $t + 1$  the extraction of one block originally scheduled in period  $t$  or pushing forward to  $t$  the extraction of one block originally scheduled in period  $t + 1$ . However, it is important to stress the fact that only candidates that do not violate the precedence constraints are retained.

## 5.5 Numerical Results

This section presents the numerical experiments achieved to assess the efficiency and robustness of the solution approach introduced in this paper. This method has been tested on six instances with sizes ranging between 4,734 blocks and five periods and 132,672 blocks and 12 periods. For each one of them, ten equiprobable scenarios are used to represent their geological profiles, and thus, illustrate the in-situ variability and metal uncertainty. In what follows, the instances and the different parameters used in the tests are first described. Then, the computational results are provided.

## 5.5.1 Instances and parameters

### 5.5.1.1 Benchmark instances

Table 5-1 and

Table 5-2 provide an overview of the instances and the main differences between them. The six instances are grouped into three benchmark datasets. The first set S1 comprises three small to large size instances from multi-element iron deposits that contain two processing plants each. All must satisfy minimum and maximum expected grades for each geological element. The second set S2 consists of two instances representing two different actual deposits: a copper (Cu) deposit and a gold (Au) deposit. These instances consider two processors: one for the high-grade and another one for the low-grade. As opposed to the first set, only one geological element is considered, and for each processor, there is a minimum expected grade to be satisfied. The third and last set S3 also consists of one medium-size copper deposit. The only difference with the second set is the fact that the instance considers a single processor.

Table 5-1. Overview of the five instances

Instances		Number of blocks	Number of periods (T) in years	Destinations	Nature of the deposit
S1	I1	33,168 Block size: 25 x 25 x 2 meters Block weight: 3125 tonnes	5	2 processors, 1 waste dump	Multi-element iron ore deposits: iron content (Fe), silica content (SiO <sub>2</sub> ), alumina content (Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> ), phosphorus content (P), and the loss on ignition (LOI).
	I2	4,734 Block size: 25 x 25 x 12 meters Block weight: 18750 tonnes	5	2 processors, 1 waste dump	
	I3	132,672 Block size: 25 x 25 x 2 meters Block weight: 3125 tonnes	5	2 processors, 1 waste dump	Iron ore deposit considering a contaminant SiO <sub>2</sub>
S2	C1	22,549 Block size: 20 x 20 x 10 meters Block weight: 10000 tonnes	12	2 processors, 1 waste dump	Copper deposit
	G1	48,821 Block size: 15 x 15 x 10 meters Block weight: 5625 tonnes	10	2 processors, 1 waste dump	Gold deposit
S3	C2	20,626 Block size: 20 x 20 x 10 meters Block weight: 10800 tonnes	10	1 processors, 1 waste dump	Copper deposit



Table 5-2. Overview of the constraints for each instance

Instances	Mining Capacity	Ore production target		Side constraints		Number of side constraints	Number of arcs in the maximum closure problem
		Lower Bound	Upper Bound	Lower Bound	Upper Bound		
S1	I1	✓	✓	✓	✓	1025	3,588,082
	I2	✓	✓	✓	✓	1025	326,646
	I3	✓		✓	✓	420	12,144,028
S2	C1	✓		✓		276	8,777,675
	G1	✓		✓		230	13,913,619
S3	C2	✓		✓		120	3,591,254

### 5.5.1.2 Parameters

The economic parameters used to calculate the objective function coefficients are presented in Table 5-3. They were discussed a priori with industrial partners. Those used to calculate the penalties for deviating are presented in

Table 5-4 and were chosen after trying several combinations so that there is a balance between a very high selectivity and a permissive one that would affect the products' homogeneity. Furthermore, no cut-off grade is used, therefore the solver is free to consider a block as ore or waste.

Table 5-3. Economic parameters

		Iron	Copper	Gold
Mining cost		\$5/tonne	\$1/tonne	\$1/tonne
Low-grade processor	Processing cost	\$5/tonne	\$2.25/tonne	\$6/tonne
	Recovery	100 percent	55 percent	45 percent
	Cost of taking ore from the stockpile	\$0.50/tonne	\$0.45/tonne	\$0.45/tonne
High-grade processor	Processing cost	\$6/tonne	\$9/tonne	\$15/tonne
	Recovery	100 percent	90 percent	95 percent
	Cost of taking ore from the stockpile	\$0.5/tonne	\$0.45/tonne	\$0.45/tonne
Metal revenue		\$26/tonne for the low-grade and \$30/tonne for the high-grade	\$1.7/pound	\$28.2/gram
Discount rate		10 percent	10 percent	10 percent

Table 5-4. Costs of deviation from production targets (\$/tonne)

	Fe	SiO2	Al2O3	P	LOI	Cu	Au	Ore production
S1	10	20	20	10	1			25
S2 and S3						20	2,000	25 for Copper/100 for Gold deposit

### 5.5.2 Implementation

All algorithms were coded in C++ and the tests were run on an Intel (R) Core(TM) i5-8250U CPU computer (1.60 GHz) with 8 GB of RAM operating under Windows 10. Recall that, before obtaining an integer solution, the first step consists in applying an extended version of the BZ algorithm (ExtBZ) to solve iteratively a maximum-flow subproblem then a reduced LP. The pseudoflow algorithm of Hochbaum (2008) is used for solving maximum-flow subproblems, and the LP is solved using Cplex 12.7 with the default settings. The second step consists in simply rounding (SR) the fractional solution as described above in Section 5.4.2 and then using the integer solution obtained as an initial solution for the rounding heuristic (RH). The later heuristic does not have any parameters. Finally, for the Tabu search (TS), two parameters were defined based on preliminary tests. The number of iterations during which a move remains tabu is fixed at N where N is the number of blocks that can be moved at each iteration. The second parameter is the stop criterion. It represents the maximum number of successive non-improving iterations and was fixed to 0.5N.

### 5.5.3 Numerical Results

In this section, the performance of the proposed method is tested on the six benchmark instances described earlier. Table 5-5 provides a summary of the running times and a comparison of %*Gap* used to assess the quality of solutions. The measure %*Gap<sub>final</sub>* is the gap calculated with respect to the upper bound provided by ExtBZ:  $\%Gap_{final} = \frac{Z_{LR} - Z^*}{Z_{LR}}$  where  $Z^*$  and  $Z_{LR}$  are respectively the value of the solution provided by the algorithm evaluated and the linear relaxation optimal value obtained by ExtBZ. Another measure %*Diff* is used to represent the percent difference between the value of the solution produced by the initial solution used as input and produced by

the previous heuristic, and that produced by each improvement heuristic X (SR, RH and TS) to assess their efficiencies.

Table 5-5. Summary of the average gaps and running times of the solutions found by Cplex, the Bienstock-Zuckerberg extension and the different heuristics.

Instances		ExtBZ		SR			RH			TS		
		Time	Gap (%)	Time	Gap (%)	Diff (%)	Time	Gap (%)	Diff (%)	Time	Gap (%)	Diff (%)
S1	I1	23 mn	0	3 s	45.3	-	6 s	0.6	44.7	12 mn	0.2	0.4
	I2	3 mn 44 s	0	1 s	2.2	-	2 s	0.4	1.8	4 mn 30 s	0.3	0.1
	I3	1h 30 mn*	10 <sup>-5</sup>	1 mn	18.1	-	2 mn	0.3	17.7	45 mn	0.2	0.1
S2	C1	13 mn	0	9 s	12.7	-	8 s	1.6	11.1	15 mn	1.2	0.4
	G1	28 mn 48 s	0	20 s	55.9	-	22 s	4.6	51.3	7 min	1.7	2.9
S3	C2	4 mn 33 s	0	3 s	98.8	-	5 s	13.9	84.9	5 mn 15 s	1.5	12.4

Results in Table 5 indicate that, for all instances except the largest one, ExtBZ was able to solve the LP relaxation to optimality in a few minutes. For the largest instance S1:I3, after a certain point, the convergence went very slowly, and it took one hour and a half to reach 10<sup>-5</sup>% of optimality, and then, more than four hours to reach optimality. On the other hand, the time required to run RH after getting the optimal LP relaxation solution is relatively negligible. Despite its greedy nature, the heuristic performs very well (all instances were within 1,7% of optimality) even when the initial solution provided by SRH is very bad. Finally, the running time of TS is large compared to its efficiency to improve the solution provided by RH. This is because evaluating the solution value of all the neighbors using this method is very time-consuming, especially for the instances that have a long lifetime of mine. The improvement obtained by TS is limited but still merits consideration. Overall, the table shows that, combined, the two heuristics do a very good job of improving the solution obtained by ExtBZ.

## 5.6 Limitation and Recommendation

The model proposed considers neither a homogeneous mixing of the material inside a stockpile nor approximations of its grade. However, the current formulation can give rise to questions about its practicality. It allows having several stockpiles in operation at the same period. For example, if  $T$  is the lifetime of the mine and  $M$  the number of processing plants, the number of stockpiles by the end of period  $t$  with ( $t < T$ ) can reach a maximum of  $M \times (T - t)$ . Even if some mines can hold a large number of stockpiles simultaneously, it is not necessarily always the case. This section proposes three solutions to address this issue, which can be adopted either jointly or separately.

The first option is appropriate for a context in which the material degradation is important. Indeed, the material within the stockpile undergoes time-dependent changes that affect its properties and decrease its value (Rezakhah and Newman, 2018). To reduce the degradation, the model can be modified so that the duration of stockpiling for each block is limited. Indeed, the variables associated with stockpiles presented in Section 5.3 have two indexes for the time; one for the extraction time ( $t_0$ ) and another for the processing time ( $t_1$ ). Removing variables associated with ( $t_0, t_1$ ) where  $t_1 - t_0 > D_{max}$  implicitly forces the blocks to not be stockpiled longer than  $D_{max}$  periods. This solution significantly reduces the size of the problem and, therefore, facilitates its resolution.

The second option would consist of limiting the number of stockpiles in operation per period. For this option, some constraints and variables should be added to the model presented in Section 3. Let  $N_{max}^t$  be the maximum number of stockpiles that can be open simultaneously by the end of period  $t$  where ( $1 \leq t \leq T - 1$ ) and  $w_{m,t_0,t_1}$  be a binary variable that takes 1 if the stockpile corresponding to the material intended to be sent at period  $t_1$  to processing plant  $m$  is in operation during period  $t_0$ , 0 otherwise. The following constraints are added:

$$\bullet \quad w_{m,t_0-1,t_1} \leq w_{m,t_0,t_1} \quad \forall m = 1 \dots M, t_0 = 1 \dots T - 1, t_1 = t_0 + 1 \dots T \quad (6.1)$$

$$\bullet \quad \sum_{m=1}^M \sum_{t=t_0+1}^T w_{m,t_0,t} \leq N_{max}^{t_0} \quad \forall t_0 = 1 \dots T - 1 \quad (6.2)$$

$$\bullet \quad \sum_{b=1}^B \tilde{z}_{b,m,t_0,t_1} \leq N \times w_{m,t_0,t_1} \quad \forall m \in M, t_0 = 1 \dots T - 1, t_1 = t_0 + 1 \dots T \quad (6.3)$$

where  $N$  is a big number and:

$$\tilde{z}_{b,m,t_0,t_1} = \begin{cases} z_{b,m,t_0,t_1} - z_{b,m-1,t_0,t_1} & \forall b \in \mathcal{B}, m = 2 \dots M, t_0 = 1 \dots T-1, t_1 = t_0 + 1 \dots T \\ z_{b,1,t_0,t_1} - z_{b,M,t_0,t_1-1} & \forall b \in \mathcal{B}, m = 1, t_0 = 2 \dots T-1, t_1 = t_0 + 2 \dots T \\ z_{b,1,t_0,t_0+1} - y_{b,D,t_0} & \forall b \in \mathcal{B}, m = 1, t_0 = 1 \dots T-1, t_1 = t_0 + 1 \end{cases}$$

The constraints (6.1) can be interpreted as precedence constraints and constraints (6.2) and (6.3) as side constraints. There will be  $(T-1)$  constraints (6.2) and  $M \times \sum_{t=1}^{T-1} (T-t) = M \times \frac{(T-1) \times T}{2}$  constraints (6.3). However, if  $T$  is big, adopting this option is no more interesting since the side constraints' number can quickly become too large and question the proposed method's usefulness. The third option would consist of limiting to  $N_{max}$  the number of the stockpiles that have been opened during the lifetime of the mine no matter if they were in operation simultaneously or not. For that, new binary variables  $w_{m,t}$  are introduced. They take 1 if the stockpile of material intended to be sent to processing plant  $m$  at period  $t$  has been opened, 0 otherwise. The following constraints are also added:

$$\bullet \sum_{m=1}^M \sum_{t=2}^T w_{m,t} \leq N_{max} \quad (6.4)$$

$$\bullet \sum_{b=1}^B \sum_{t_0=1}^{t-1} \tilde{z}_{b,m,t_0,t} \leq N \times w_{m,t} \quad \forall m = 1 \dots M, t = 2 \dots T \quad (6.5)$$

Unlike the second option, the number of the additional side constraints remains limited. There will be only one constraint of type (6.4) and  $M \times (T-1)$  constraints of type (6.5).

## 5.7 Conclusions

The paper proposes a new method for integrating stockpiles into strategic mine planning. This approach is completely different from those proposed in the literature. It has the advantage of maintaining the program linear. Moreover, the proposed modeling allows to preserve the structure of a precedence graph, which makes the use of the BZ algorithm possible. By introducing new variables, the formulation proposed bypasses the unrealistic assumption of homogeneous mixing of the material in a single stockpile in each period, and the non-linearity of the most precise models thus far in the literature. A solution approach has also been presented, it consists in applying first an adaptation of the BZ algorithm to obtain an optimal solution of the linear relaxation, and then applying successively a greedy rounding heuristic (RH) and a Tabu search (TS). The method is an extension of the one recently proposed in Brika et al. (2018) for another variant of the problem, without stockpiling. Numerical results show that the proposed method managed to solve all the instances within 1,7% of optimality in a reasonable time and in a notably shorter period required

by CPLEX to solve only the linear relaxation of the problem. Recommendations were provided to reduce further the running times and respond to some limitations of the model. An interesting step for future research would involve integrating some preprocessing techniques to fix some variables and using stabilization methods to accelerate the convergence of the BZ algorithm, thereby reducing significantly the running time.

## **Acknowledgments**

The work in this paper was funded from the Fonds de recherche du Québec-Nature et technologies (FQRNT) Grant G240453 FRQNT MI-181547 with New Millennium Iron Corporation being the industry collaborator, and NSERC Discovery Grant 239019, and the industry members of the COSMO Stochastic Mine Planning Laboratory: AngloGold Ashanti, Barrick Gold, BHP, De Beers, IAMGOLD, Kinross Gold, Newmont, and Vale. This support is gratefully acknowledged.

## **Disclosure statement**

No potential conflict of interest was reported by the authors.

## CHAPITRE 6 INTÉGRATION DES OPTIONS D'INVESTISSEMENT

Ce chapitre propose une extension du modèle précédemment présenté afin d'intégrer des options d'investissement au processus d'optimisation de la planification stratégique de la production d'une mine à ciel ouvert dans un contexte d'incertitude géologique. Dans ce qui suit, la section 6.1 décrit les motivations derrière cette extension. La section 6.2 présente, quant à elle, le modèle mathématique. Ensuite, la section 6.3 décrit l'approche de résolution adoptée ainsi que la procédure de parallélisation implémentée. S'ensuit une application sur une mine de fer à produits multiples présentée dans la section 6.4. Enfin, la section 6.5 conclut le chapitre en revenant sur les principaux résultats observés.

### 6.1 Introduction

La chaîne de valeur minérale représente les différentes étapes et les transformations subies par la matière à travers le complexe minier en commençant par le gisement, en passant par les piles de minerai et les différentes stations de traitement avant d'être transformée en produits prêts à être délivrés aux clients. Tous les maillons de la chaîne sont interdépendants et l'efficacité du complexe minier dépend de leurs synergies. Ainsi, lorsqu'il est question d'optimiser la planification stratégique d'un projet minier, ces derniers doivent être modélisés et pris en compte simultanément. Ce type d'approche a été qualifié d'optimisation globale ou simultanée et son importance a été largement discutée dans la littérature technique (Bodon *et al.*, 2018; Hoerger *et al.*, 1999; Pimentel *et al.*, 2010; Whittle, 2018). Aussi, toujours dans la perspective de développer des modèles mathématiques plus proches de la réalité et plus flexibles, il est important de rappeler que chaque étape de la chaîne de valeur minérale dans un complexe minier représente une valeur ajoutée par rapport à la précédente. Il est donc intéressant de considérer les différentes opportunités d'investissement à chacune des grandes étapes et de tirer par conséquent le meilleur parti de l'exploitation minière.

Ainsi, le présent chapitre propose un modèle offrant des solutions pratiques pour la planification à long terme de la production des complexes miniers à ciel ouvert dans une incertitude géologique multi-éléments, où les options CapEx sont prises en compte dans la formulation. L'incertitude représente dans le contexte de cette étude celle liée aux teneurs en éléments d'intérêt et est illustrée par un ensemble de scénarios géologiques équiprobables du gisement. Le modèle proposé est une

extension du modèle présenté au Chapitre 5 pour inclure des alternatives d'investissement et est résolu en utilisant une méthode de décomposition combinée avec des méthodes heuristiques.

## 6.2 Formulation mathématique

Pour quantifier l'incertitude géologique, on considère comme données d'entrée un ensemble fini de scénarios équiprobables. Chaque scénario représente une représentation potentielle des caractéristiques géologiques pertinentes du gisement. Le problème est ensuite formulé sous forme d'un problème stochastique en nombres entiers à deux étapes (Birge et Louveaux, 1997). Lors de la première étape, la séquence d'extraction sera définie ainsi que la destination de chaque bloc. Les décisions sur les investissements seront aussi prises à cette étape. À la seconde étape, une fois l'incertitude levée, certaines violations peuvent survenir en termes de respect des objectifs de production. À ce stade, des actions correctives peuvent être mises en place comme recours moyennant toutefois des coûts supplémentaires. Par conséquent, l'objectif est de trouver à la première étape une solution qui minimise le coût de la solution de seconde étape. Dans ce qui suit, la notation et le modèle mathématique utilisés pour formuler le problème:

### 6.2.1 Notation

#### 6.2.1.1 Ensembles:

$\mathcal{B} = \{1 \dots B\}$	Ensemble des blocs
$\mathcal{T} = \{1 \dots T\}$	Ensemble des périodes de temps qui discrétisent la vie de la mine
$\mathcal{M} = \{1 \dots M\}$	Ensemble des usines de traitement du minerai
$\mathcal{W} = \{1 \dots W\}$	Ensemble des haldes de stérile
$\mathcal{D} = \mathcal{M} \cup \mathcal{W}$ $= \{1 \dots D\}$	Ensemble des destinations incluant les haldes de stérile et les usines de traitement. Par définition, les $M$ premiers éléments de $\mathcal{D}$ correspondront aux usines de traitement $\{1 \dots M\}$ et le reste des éléments aux haldes de stérile. Ainsi, $\mathcal{D} = \{1 \dots M, M + 1, \dots, M + W\}$ .
$\mathcal{S} = \{1 \dots S\}$	Ensemble de scénarios ayant la même probabilité d'occurrence et représentant chacun une simulation différente du profil géologique des blocs.



$\mathcal{K} = \{1 \dots K\}$	Ensemble des différentes options d'investissement. Les $M$ premières options correspondent à la possibilité d'investir dans de nouveaux concasseurs. À chaque usine de traitement $m$ , correspond un type particulier de concasseurs $m$ . Deux autres options d'investissement supplémentaires viennent se rajouter, correspondant respectivement à l'achat de nouvelles pelles et de nouveaux camions. Il est tout de même important de mentionner que les flottes seront considérées homogènes.
$\mathfrak{R} = \{1 \dots R\}$	Ensemble des caractéristiques du minerai (i.e. éléments géologiques d'intérêt)
$\Gamma_b^+, \Gamma_b^-$	Ensemble des successeurs et prédécesseurs immédiats du bloc $b$ , respectivement.

### 6.2.1.2 Paramètres

$p_{b,d,t,s}$	Profit actualisé obtenu si le bloc $b$ est envoyé à la destination $d$ à la période $t$ sous le scénario $s$ . Si la destination en question est une usine de traitement, le profit sera équivalent à la valeur du métal récupéré moins les coûts de traitement et des frais de vente. Par ailleurs, si le bloc est envoyé à la halde des stériles, ce profit sera égal à 0. Il est à noter que les coûts d'extraction seront calculés à part étant donné que l'extraction et le traitement peuvent se faire à deux périodes différentes impliquant des facteurs d'actualisation économique différents.
$g_{b,s}^r$	Concentration de l'élément $r$ du bloc $b$ considérant le scénario $s$
$Gmax_{m,t}^r$	La concentration maximale et minimale espérée de l'élément $r$ du matériel envoyé à l'usine de traitement $m$ à la période $t$
$Gmin_{m,t}^r$	
$mc_{b,t}$	Coût actualisé pour extraire le bloc $b$ à la période $t$
$rc_{b,m,t}$	Coût actualisé pour récupérer le bloc $b$ des piles de minerai associées à l'usine de traitement $m$ à la période $t$
$cu_t$ and $cl_t$	Coûts unitaires actualisés des déviations supérieures et inférieures par rapport aux objectifs de production en termes de tonnage à la

	période $t$
$cu_t^r$ and $cl_t^r$	Coûts unitaires actualisés des déviations supérieures et inférieures par rapport $Gmax_{d,t}^r$ et $Gmin_{d,t}^r$ à la période $t$
$Q_b$	Tonnage du bloc $b$ .
$d_{b,d}$	Distance approximative entre le bloc $b$ et la destination $d$ .
$ds_{b,m,t}$	Distance approximative entre le bloc $b$ et la pile de minerai associée à l'usine de traitement $m$ et la période de traitement $t$ .
$C_t^k$	Coût unitaire actualisé de choisir l'option d'investissement $k$ à la période $t$ .
$\kappa^k$	Capacité unitaire rajoutée par un investissement de type $k$ .
$\tau^k, \lambda^k$	Délai de livraison et durée de vie de l'équipement de type $k$ , respectivement. Le délai de livraison représente la durée entre le moment où l'équipement est acheté et celui où il devient opérationnel.
$N^k$	Nombre maximal d'équipements de type $k$ qui peuvent être achetés durant la vie de la mine
$tonnage_t^k$	Capacité disponible initialement en termes de tonnage pour la flotte d'équipements de type $k$ au début de la période $t$ .
$time_t^k$	Temps disponible initialement pour la flotte d'équipements de type $k$ à la période $t$ .
$h^k$	Nombre d'heure-machines disponibles par année pour un équipement de type $k$
$vf, ve$	Vitesses des camions quand ils sont chargés et vides, respectivement
$loadtime$	Temps nécessaire pour charger une tonne de roche dans le camion

### 6.2.1.3 Variables:

$y_{b,d,t} \in \{0,1\}$	Prend 1 si le bloc $b$ est ou a déjà été complètement extrait et envoyé à la destination $d$ à la période $t$ , 0 sinon.
$z_{b,m,t_0,t_1} \in \{0,1\}$	Prend 1 si le bloc $b$ est ou a déjà été complètement extrait et envoyé à une pile de minerai à la période $t_0$ avant d'être traité au niveau de

l'usine  $m$  à la période  $t_1$  avec ( $t_0 < t_1$ ), 0 sinon.

$w_{i,t}^k \in \{0,1\}$	Prend 1 si l'équipement $i$ de type $k$ est ou a déjà été acheté à la période $t$ , 0 otherwise.
$qu_{m,t,s}, ql_{m,t,s} \in \mathbb{R}_+$	Variables continues représentant respectivement les déviations supérieures et inférieures par rapport à la demande en termes de tonnage à la période $t$ au niveau de l'usine de traitement $m$ en considérant le scénario $s$ .
$qu_{m,t,s}^r, ql_{m,t,s}^r \in \mathbb{R}_+$	Variables continues représentant respectivement les déviations supérieures et inférieures par rapport à l'objectif de production $r$ à la période $t$ au niveau de l'usine de traitement $m$ en considérant le scénario $s$ .

## 6.2.2 Modèle mathématique

### 6.2.2.1 Fonction objectif

$$(\mathcal{P}) \quad \max \frac{1}{S} \sum_{b=1}^B \sum_{d=1}^D \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S (p_{b,d,t,s} - mc_{b,t}) \times \check{y}_{b,d,t} \quad (\text{i})$$

$$+ \left\{ \frac{1}{S} \sum_{b=1}^B \sum_{m=1}^M \sum_{t_0=1}^{T-1} \sum_{t_1=t_0+1}^T \sum_{s=1}^S (p_{b,m,t_1,s} - mc_{b,t_0} - rc_{b,m,t_1}) \times \check{z}_{b,m,t_0,t_1} \right\} \quad (\text{ii})$$

$$- \frac{1}{S} \sum_{m=1}^M \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S \sum_{r=1}^R (cu_t^r qu_{m,t,s}^r + cl_t^r ql_{m,t,s}^r) \quad (\text{iii})$$

$$- \frac{1}{S} \sum_{m=1}^M \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S (cu_t qu_{m,t,s} + cl_t ql_{m,t,s}) \quad (\text{iv})$$

$$- \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{N_k} \sum_{t=1}^T c_t^k \check{w}_{i,t}^k \quad (\text{v})$$

avec:

$$\check{y}_{b,d,t} = \begin{cases} y_{b,1,1}, & \forall b \in \mathcal{B}, d = 1, t = 1 \\ y_{b,1,t} - z_{b,M,t-1,T}, & \forall b \in \mathcal{B}, d = 1, t = 2 \dots T \\ y_{b,d,t} - y_{b,d-1,t}, & \forall b \in \mathcal{B}, d = 2 \dots D, t = 1 \dots T \end{cases}$$

$$\check{z}_{b,m,t_0,t_1} = \begin{cases} z_{b,1,t_0,t_0+1} - y_{b,D,t_0}, & \forall b \in \mathcal{B}, m = 1, t_0 = 1 \dots T - 1, t_1 = t_0 + 1 \\ z_{b,1,t_0,t_1} - z_{b,M,t_0,t_1-1}, & \forall b \in \mathcal{B}, m = 1, t_0 = 2 \dots T - 1, t_1 = t_0 + 2 \dots T \\ z_{b,m,t_0,t_1} - z_{b,m-1,t_0,t_1}, & \forall b \in \mathcal{B}, m = 2 \dots M, t_0 = 1 \dots T - 1, t_1 = t_0 + 1 \dots T \end{cases}$$

et:

$$\check{w}_{i,t}^k = \begin{cases} w_{i,1}^k, & \forall k = 1 \dots K, i = 1 \dots N^k, t = 1 \\ w_{i,t}^k - w_{i,t-1}^k, & \forall k = 1 \dots K, i = 1 \dots N^k, t = 2 \dots T \end{cases}$$

La fonction objectif présentée ci-dessus se divise en cinq parties; chacune représentant un objectif différent:

- (i) La première partie vise à maximiser les profits générés par la vente des matériaux traités directement après leurs extractions (i.e. sans passer par une pile de minerai)
- (ii) La seconde partie représente les profits générés par la vente des matériaux qui ont été d'abord extraits et envoyés à une pile de minerai avant d'être traités à des périodes ultérieures
- (iii) La troisième partie se concentre sur la minimisation des déviations par rapport aux concentrations cibles et ce, en les pénalisant, un facteur d'actualisation géologique (Ramazan et Dimitrakopoulos, 2013) est appliqué sur les coûts  $cu_t^r$  et  $cl_t^r$  afin de différer les risques aux futures périodes
- (iv) Similairement, la quatrième partie vise à minimiser les déviations par rapport à la demande en termes de tonnage. Un facteur d'actualisation est aussi appliqué aux coûts  $cu_t$  et  $cl_t$ .
- (v) La cinquième partie assure la minimisation des coûts d'investissement.

### 6.2.2.2 Contraintes:

$$z_{b,M,t-1,T} \leq y_{b,1,t}, \quad \forall b \in \mathcal{B}, t = 2 \dots T \quad (1a)$$

$$y_{b,d-1,t} \leq y_{b,d,t}, \quad \forall b \in \mathcal{B}, d = 2 \dots D, t = 1 \dots T \quad (1b)$$

$$y_{b,D,t} \leq z_{b,1,t,t+1}, \quad \forall b \in \mathcal{B}, t = 1 \dots T - 1 \quad (1c)$$

$$z_{b,m-1,t_0,t_1} \leq z_{b,m,t_0,t_1}, \quad \forall b \in \mathcal{B}, m = 2 \dots M, t_0 = 1 \dots T - 1, t_1 = t_0 + 1 \dots T \quad (1d)$$

$$z_{b,M,t_0,t_1-1} \leq z_{b,1,t_0,t_1}, \quad \forall b \in \mathcal{B}, m = 2 \dots M, t_0 = 1 \dots T - 1, t_1 = t_0 + 2 \dots T \quad (1e)$$

La contrainte (1) représente les contraintes de réserve. Elles assurent qu'un bloc ne soit pas miné plus qu'une fois durant la vie de la mine.

$$w_{i,t-1}^k \leq w_{i,t}^k, \quad \forall k = 1 \dots K, i = 1 \dots N^k, t = 2 \dots T \quad (2)$$

De même, la contrainte (2) assure qu'un équipement donné ne peut être acheté plus que deux fois.

$$z_{b,M,t,T} \leq z_{a,M,t,T}, \quad \forall (a,b) \in \mathcal{B}^2, a \in \Gamma_b^-, t = 1 \dots T - 1 \quad (3a)$$

$$y_{b,D,T} \leq y_{a,D,T}, \quad \forall (a,b) \in \mathcal{B}^2, a \in \Gamma_b^- \quad (3b)$$

Les contraintes (3) représentent les contraintes de pente qui garantissent qu'un block ne peut être miné sans que tous les blocs directement au dessus de lui (i.e. ses prédécesseurs) n'aient été extraits.

$$\sum_{b=1}^B Q_b \times \check{y}_{b,m,1} - qu_{m,1,s} \leq \text{tonnage}_t^m + \sum_{i=1}^{N_m} \sum_{p=\max(1,t-(\tau^m+\lambda^m))}^{t-\tau^m} \kappa^m \check{w}_{i,p}^m, \quad (4a)$$

$$\forall m = 1 \dots M, t = 1, s = 1 \dots S$$

$$\sum_{b=1}^B Q_b \times (\check{y}_{b,m,t} + \{\sum_{t_0=1}^{t-1} \check{z}_{b,m,t_0,t}\}) - qu_{m,t} \leq \text{tonnage}_t^m + \quad (4b)$$

$$\sum_{i=1}^{N_m} \sum_{p=\max(1,t-(\tau^m+\lambda^m))}^{t-\tau^m} \kappa^m \check{w}_{i,p}^m, \quad \forall m = 1 \dots M, t = 2 \dots T, s = 1 \dots S$$

$$\sum_{b=1}^B Q_b \times \check{y}_{b,m,1} + ql_{m,1,s} \geq \text{tonnage}_t^m + \sum_{i=1}^{N_m} \sum_{p=t-(\tau^m+\lambda^m)}^{t-\tau^m} \kappa^m \check{w}_{i,p}^m, \quad (5a)$$

$$\forall m = 1 \dots M, t = 1, s = 1 \dots S$$

$$\sum_{b=1}^B Q_b \times (\check{y}_{b,m,t} + \{\sum_{t_0=1}^{t-1} \check{z}_{b,m,t_0,t}\}) + ql_{m,t} \geq \text{tonnage}_t^m + \quad (5b)$$

$$+ \sum_{i=1}^{N_m} \sum_{p=t-(\tau^m+\lambda^m)}^{t-\tau^m} \kappa^m \check{w}_{i,p}^m, \quad \forall m = 1 \dots M, t = 2 \dots T, s = 1 \dots S$$

Les contraintes (4) et (5) assurent que le tonnage total du minerai extrait, plus ou moins les déviations, respecte les bornes supérieures et inférieures des objectifs de production. Si des concasseurs sont achetés, une capacité marginale vient se rajouter aux bornes.

$$\sum_{b=1}^B Q_b \times (g_{bs}^r - Gmax_{m,t}^r) \times \check{y}_{b,m,1} - qu_{m,1,s}^r \leq 0, \quad \forall \quad (6a)$$

$$m = 1 \dots M, t = 1, s = 1 \dots S, r = 1 \dots R$$

$$\sum_{b=1}^B Q_b \times (g_{bs}^r - Gmax_{m,t}^r) \times (\check{y}_{b,m,t} + \{\sum_{t_0=1}^{t-1} \check{z}_{b,m,t_0,t}\}) - ql_{m,t,s}^r \leq 0 \quad (6b)$$

$$\forall m = 1 \dots M, t = 2 \dots T, s = 1 \dots S, r = 1 \dots R$$

$$\sum_{b=1}^B Q_b \times (g_{bs}^r - Gmin_{m,t}^r) \times \check{y}_{b,m,1} + ql_{m,1,s}^r \geq 0, \quad \forall m = 1 \dots M, t = 1, s = 1 \dots S, r = 1 \dots R \quad (7a)$$

$$\sum_{b=1}^B Q_b \times (g_{bs}^r - Gmin_{m,t}^r) \times (\check{y}_{b,m,t} + \{\sum_{t_0=1}^{t-1} \check{z}_{b,m,t_0,t}\}) + ql_{m,t,s}^r \geq 0, \quad \forall m = 1 \dots M, t = 2 \dots T, s = 1 \dots S, r = 1 \dots R \quad (7b)$$

De même, les contraintes (6) et (7) assurent que la concentration du minerai envoyé aux usines de traitement, plus ou moins les déviations, reste à l'intérieur des bornes.

$$\sum_{b=1}^B Q_b \times (\sum_{d=1}^D \check{y}_{b,d,t} + \{\sum_{p=t+1}^T \sum_{m=1}^M \check{z}_{b,m,t,p}\}) \leq tonnage_t^{shovel} + \quad (8a)$$

$$\sum_{i=1}^{N_{shovel}} \sum_{p=\max(1,t-(\tau^{shovel} + \lambda^{shovel}))}^{t-\tau^{shovel}} \kappa^{shovel} \check{w}_{i,p}^{shovel}, \quad \forall t = 1 \dots T - 1$$

$$\sum_{b=1}^B Q_b \times \sum_{d=1}^D \check{y}_{b,d,t} \leq tonnage_t^{shovel} + \quad (8b)$$

$$\sum_{i=1}^{N_{shovel}} \sum_{p=\max(1,t-(\tau^{shovel} + \lambda^{shovel}))}^{t-\tau^{shovel}} \kappa^{shovel} \check{w}_{i,p}^{shovel}, \quad t = T$$

Les contraintes (8) assurent que le tonnage total de la matière extraite ne dépasse pas la capacité d'extraction disponible. Si des pelles sont achetées, cette dernière se voit augmenter.

$$\sum_{b=1}^B \sum_{d=1}^D Q_b \times \left[ \frac{1}{\kappa^{truck}} \times d_{b,d} \times \left( \frac{1}{v_f} + \frac{1}{v_e} \right) + loadtime \right] \times \check{y}_{b,d,t} \leq time_t^{truck} + \quad (9a)$$

$$h^{truck} \times \sum_{i=1}^{N_{truck}} \sum_{p=\max(1,t-(\tau^{truck} + \lambda^{truck}))}^{t-\tau^{truck}} \check{w}_{i,p}^{truck}, \quad t = T$$

$$\sum_{b=1}^B \sum_{d=1}^D Q_b \times \left[ \frac{1}{\kappa^{truck}} \times d_{b,d} \times \left( \frac{1}{v_f} + \frac{1}{v_e} \right) + loadtime \right] \times \check{y}_{b,d,t} + \quad (9b)$$

$$\sum_{b=1}^B \left( \left\{ \sum_{p=t+1}^T \sum_{m=1}^M Q_b \times \left[ \frac{1}{\kappa^{truck}} \times ds_{b,m,p} \times \left( \frac{1}{v_f} + \frac{1}{v_e} \right) + loadtime \right] \times \check{z}_{b,m,t,p} \right\} \right) \leq$$

$$time_t^{truck} + h^{truck} \times \sum_{i=1}^{N_{truck}} \sum_{p=\max(1,t-(\tau^{truck} + \lambda^{truck}))}^{t-\tau^{truck}} \check{w}_{i,p}^{truck}, \quad \forall t = 1 \dots T - 1$$

Les contraintes (9) assurent que le temps requis pour charger les blocs et les envoyer à leurs destinations respectives ne dépasse pas le temps disponible offert par les camions.

### 6.3 Méthode de résolution

La méthode de résolution adoptée se divise en trois étapes. La sous-section 6.3.1 illustre la première étape qui consiste à résoudre à l'optimalité la relaxation linéaire du problème décrit plus haut et ce, en utilisant l'algorithme de Bienstock-Zuckerberg. La deuxième étape est décrite dans la sous-

section 6.3.2. Il s'agit d'une heuristique gloutonne qui part de la solution fractionnaire fournie par la première étape pour ensuite l'arrondir tout en s'assurant que les contraintes strictes (« *hard constraints* ») soient respectées. La troisième et dernière étape présentée dans la sous-section 6.3.3, consiste à appliquer une RT afin d'améliorer la qualité de la dernière solution entière obtenue. Afin d'explorer les différents voisinages, des techniques de parallélisation sont mises en place pour réduire les temps de calcul.

### 6.3.1 Résoudre la relaxation linéaire

La définition des variables de décision permet de représenter les contraintes de réserve et de pente comme des contraintes de précédence dans un graphe orienté où chaque nœud est associé à une variable de décision ( $y$ ,  $z$  ou  $w$ ). Chaque contrainte de type  $\{a \leq b\}$  est traduite par un arc  $(a, b)$  tel qu'illustré dans la Figure 6-1 :

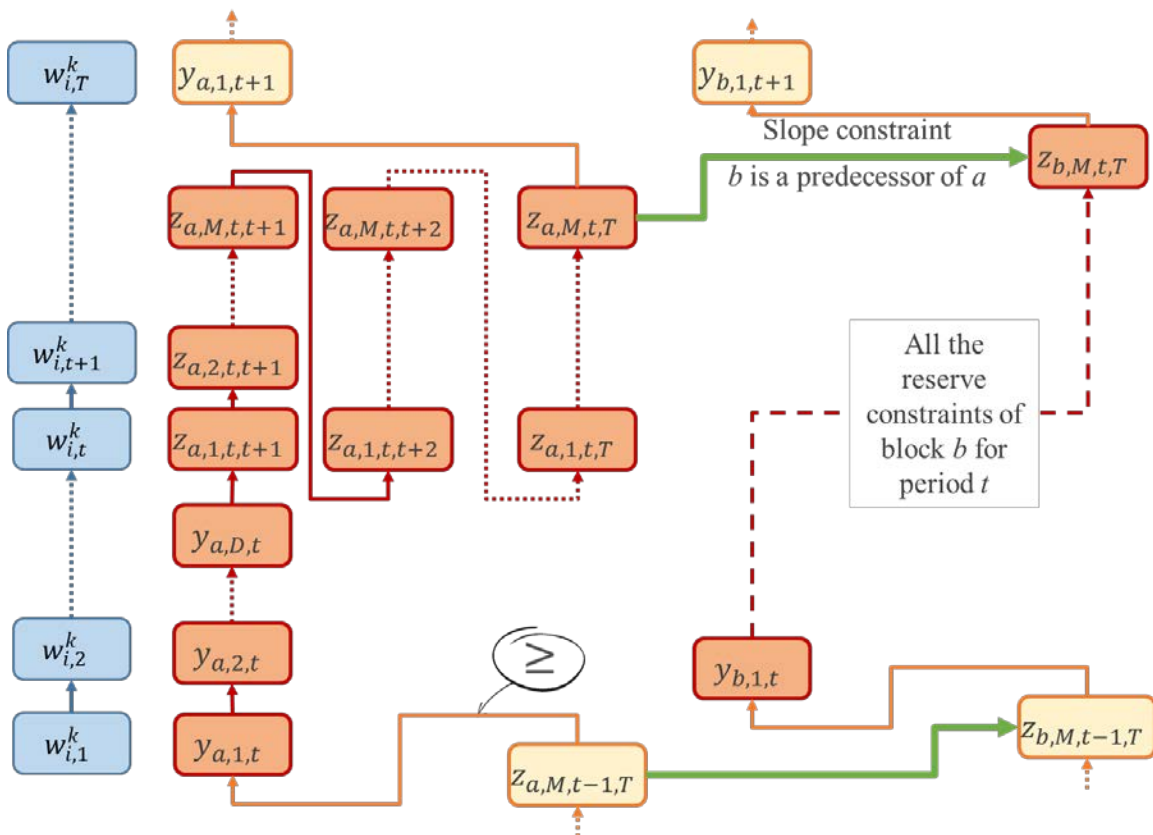


Figure 6-1 Contraintes de précédence représentées dans un graphe orienté

Ainsi, tel que vu dans les précédents chapitres, l'algorithme de Bienstock-Zuckerberg (Bienstock et Zuckerberg, 2010) peut être utilisé pour résoudre à l'optimalité la relaxation linéaire du problème en un temps polynomial.

### 6.3.2 Trouver une solution entière réalisable

À partir de la solution fractionnaire obtenue à la section 6.3.1, la seconde étape consiste à trouver une solution entière réalisable et de bonne qualité. Nous décrivons dans ce qui suit les détails de ce processus:

Étape 0: - Un tri topologique pondéré est appliqué pour obtenir une séquence d'extraction. Cela se traduit par l'ordonnancement des blocs sous forme de séquence  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  en respectant un vecteur de poids  $w$  où toute paire  $(b_i, b_{i+1})$  satisfait une des conditions suivantes :  $\{b_i \text{ prédécesseur de } b_{i+1}\}$  ou  $\{w_i < w_{i+1}\}$ . Le vecteur de poids  $w$  peut être interprété comme étant le temps d'extraction "espéré" du bloc  $b$  et ce, en se basant sur la solution optimale fournie par la relaxation linéaire à la première étape. Pour plus de détails, le lecteur peut se référer au chapitre 5.

Étape 1: - La solution fractionnaire est d'abord simplement arrondie aux entiers les plus proches. Ainsi, une nouvelle solution entière est obtenue. Les variables sur les équipements sont aussi arrondies. Cependant, si celles-ci n'étaient, à la base, pas entières, les deux valeurs entières les plus proches sont testées. Étant donné que cette étape est très rapide (quelques secondes) et le nombre de combinaisons demeure limité, on peut se permettre de tester différentes combinaisons afin de retenir finalement que la meilleure parmi elles. Une fois les valeurs arrondies, la solution obtenue à ce stade respecte les contraintes de précédence mais pas forcément celles des ressources. Pour chaque bloc, les temps d'extraction et de traitement ainsi que la destination, obtenus par ce premier arrondissement sont assignés comme valeurs par défaut.

Étape 2: - À partir de la première période jusqu'à la dernière, du moment qu'au moins une contrainte stricte est violée, l'extraction de certains blocs est reportée tout en favorisant le report des blocs qui arrivent dans les dernières positions dans la séquence topologique, tel que montré dans la

Figure 6-2:



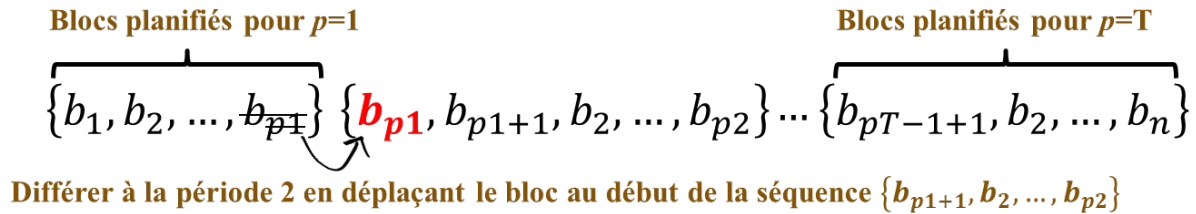


Figure 6-2 Réparation de la solution par le report d'extraction de certains blocs

Étape 3: - Un second tour est effectué pour améliorer la qualité de la solution courante. Suivant le même ordre topologique, les blocs sont bougés, un à un, d'une période à l'autre et d'une destination à une autre de sorte que la valeur de fonction objectif soit maximisée tout en respectant les contraintes strictes.

### 6.3.3 Améliorer la qualité de la solution

L'objectif de cette dernière étape est d'améliorer la qualité de solution obtenue à la section 6.3.2 et ce, en appliquant une RT à voisinage multiple (MNTS pour « Multi-Neighborhood Tabu Search ») pour chaque période. À une itération  $p$  donnée, un voisinage possible consisterait à reporter à la période  $p + 1$  l'extraction des blocs initialement prévus pour la période  $p$ . Un autre voisinage s'intéresserait plutôt à avancer à la période  $p$  l'extraction de blocs initialement prévus pour la période  $p + 1$ . Des changements similaires pourraient s'appliquer aux périodes de traitement. En plus de changer les périodes, chaque voisinage se voit élargir les frontières par la possibilité de changer de destination. Il va de soi que seules les solutions qui respectent les contraintes strictes (contraintes de priorité et de disponibilité des équipement) sont retenues.

Créer les différents voisinages est une tâche fastidieuse qui requiert de lourds temps de calcul et le faire pour chaque période ne fait qu'aggraver les choses. Une stratégie de parallélisation est alors mise en œuvre pour réduire le temps de calcul consacré à la création des voisinages. Cela consiste à lancer simultanément plusieurs tâches dans différentes branches de calcul. Ces tâches doivent être parfaitement indépendantes l'une de l'autre. Une synchronisation a ensuite lieu pour une mise en commun des meilleurs changements trouvés jusqu'à présent. Pour garantir l'indépendance des tâches, les voisinages sont définis de sorte qu'on ne puisse pas affecter une période donnée dans plus d'une branche à la fois. Plus formellement, chaque branche ( $TST$ ) est associée à deux périodes successives ( $p, p + 1$ ). La première branche  $TST_{(1,2)}$  effectuera des échanges entre les périodes (1,

2),  $TST_{(3,4)}$  entre les périodes (3,4), et ainsi de suite jusqu'aux deux dernières périodes. De plus, à  $TST_{(p,p+1)}$ , un changement de destination ne peut pas être effectué si les temps d'extraction et de traitement ne sont pas tous deux compris entre  $p$  et  $p + 1$ . L'Annexe B récapitule tous les voisins pouvant être explorés au sein d'une même branche  $TST_{(p,p+1)}$ . Chaque TST part de la même solution initiale et exécute ensuite une RT explorant leurs voisinages respectifs associés jusqu'à l'atteinte d'un critère d'arrêt. Une fois que toutes les branches TST aient terminé leur exécution, tous les changements retenus sont appliqués à la solution initiale. Ensuite, pour explorer plus de solutions, un second tour est effectué avec les branches  $TST_{(2,3)}$ ,  $TST_{(4,5)}$ , etc. La Figure 6-3 schématise ce processus de parallélisation:

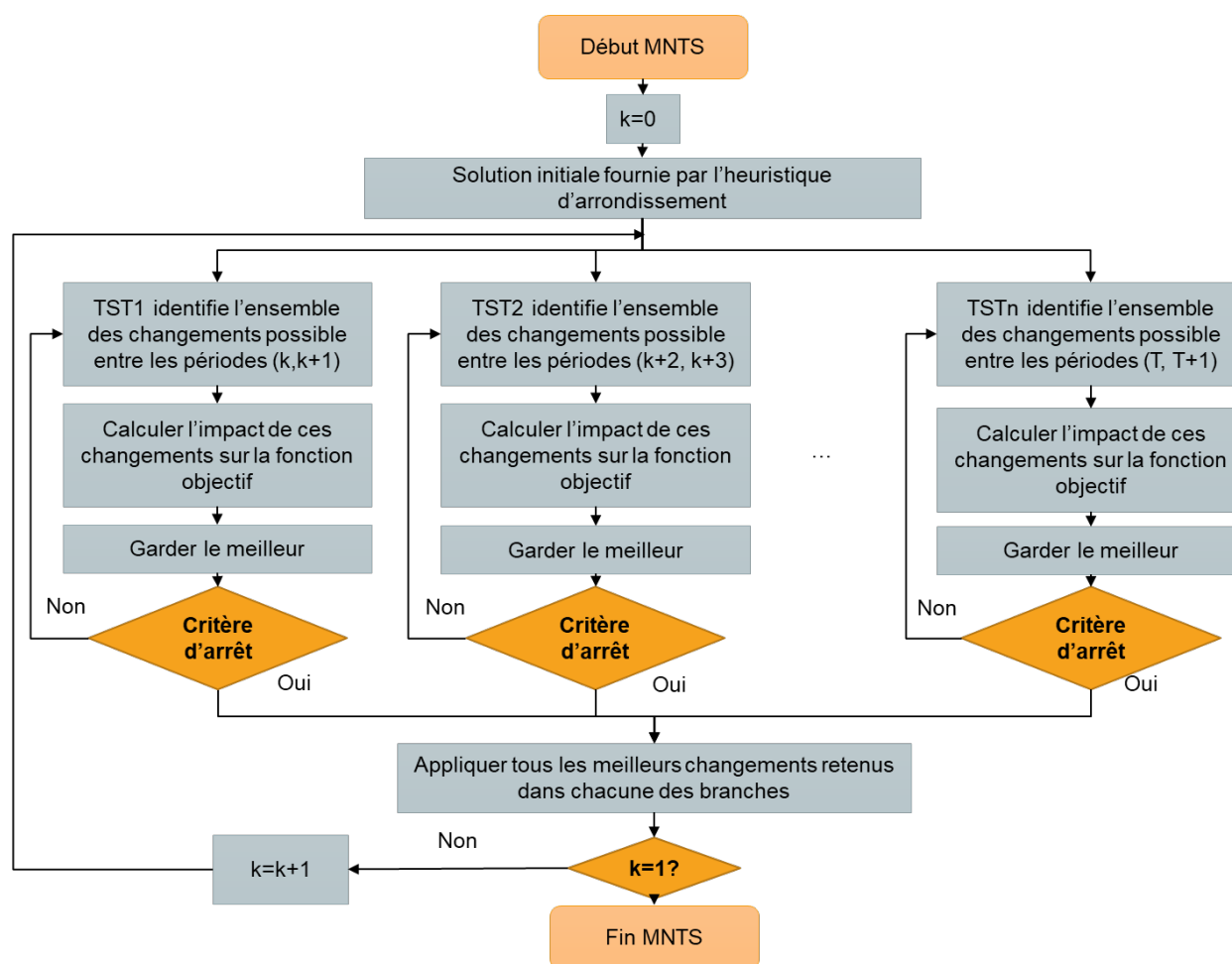


Figure 6-3 Parallélisation de la RT

## 6.4 Résultats numériques

### 6.4.1 Implémentation

Le modèle susmentionné a été codé en C++ et les tests ont été exécutés sur un ordinateur avec un processeur Intel (R) Core (TM) i5-8250U (1,60 GHz) avec 8 Go de RAM fonctionnant sous un environnement Windows 10. Rappelons que la première étape consiste à résoudre à l'optimalité la relaxation linéaire. Cette étape alterne entre la résolution d'un problème linéaire avec le solveur CPLEX 12.7 en utilisant les paramètres par défaut et la résolution du problème de fermeture maximale avec l'algorithme de pseudo-flot introduit par Hochbaum, 2008. La seconde étape, l'heuristique d'arrondissement, ne nécessite aucun paramètre. Enfin, comme troisième étape, la recherche Tabou nécessite la définition de trois paramètres : la taille de la liste Tabou est fixée à  $0.6 N$ ,  $N$  étant le nombre approximatif de blocs pouvant être déplacés à chaque itération (c'est-à-dire les blocs situés dans les bordures intérieure et extérieure pour une période de planification donnée). Le deuxième paramètre représente le critère d'arrêt. Dans le cadre de cette application, celui-ci se traduit par l'atteinte d'un nombre maximal d'itérations successives sans aucune amélioration de la valeur de la solution. Ce nombre a été fixé à  $N$ . Ces deux dernières valeurs ont été définies à partir de tests préliminaires. Le troisième paramètre représente quant à lui le nombre de branches à utiliser lors de la parallélisation. Différentes valeurs ont été testées afin d'évaluer les effets de la parallélisation sur le temps de calcul. Il est à noter toutefois qu'avoir plus de branches que de cœurs disponibles sur l'ordinateur utilisé n'a aucun intérêt.

### 6.4.2 Cas d'étude

Le banc d'essai comprend un gisement de mine à ciel ouvert comprenant 33168 blocs ( $25 \times 25 \times 2$  mètres). Deux éléments d'intérêt sont considérés : le Fer (Fe) et le Silicium ( $\text{SiO}_2$ ). Le complexe minier comprend plusieurs destinations incluant des piles de minerai, des décharges à stérile et deux différentes usines de traitement. Par ailleurs, aucune teneur de coupure n'est utilisée, l'optimiseur décide où envoyer chaque bloc. Les exigences en matière de teneur ont été définies par la compagnie minière, ainsi que la capacité d'extraction initiale et les objectifs en termes de tonnage du minerai. Pour illustrer la variabilité *in situ*, 10 simulations géologiques équiprobables ont été utilisées (Boucher et Dimitrakopoulos, 2009; Godoy, 2003). En ce qui concerne les sanctions, elles ont été fixées par une méthode d'essais et erreurs. Le Tableau 6-1 présente les

paramètres miniers et économiques utilisés et le Tableau 6-2 illustre les différents objectifs de production et les exigences propres à chaque usine de traitement.

Tableau 6-1 Paramètres miniers et économiques relatif au complexe étudié

Paramètres	Valeur
Coût d'extraction (\$/t)	5.0
Coût de réclamation à partir d'une pile de minerai (\$/t)	0.5
Capacité d'extraction initiale (Mt)	16
Facteur d'actualisation économique (%)	10
Coût de déviation par rapport aux objectifs de production en termes de tonnage (\$/t)	25.0
Coût de déviation par rapport aux exigences sur le SiO <sub>2</sub> (\$/t)	10.0
Coût de déviation par rapport aux exigences sur le Fe (\$/t)	10.0
Vie de la mine (années)	5

Tableau 6-2 Exigences sur les produits

Paramètres	Usine 1	Usine 2
Profit de produit final (\$/t)	30.00	26.00
Coût de traitement (\$/t)	6.00	5.00
Teneur en Fe (%)	[57.7, 59.6]	[56.0, 58.7]
Teneur en SiO <sub>2</sub> (%)	[4.6, 5.2]	[4.1, 5.0]
Taux de recouvrement (%)	100	

### 6.4.3 Options d'investissement considérées

Intégrer des options d'investissement dans le processus décisionnel rajoute une certaine flexibilité au modèle en offrant la possibilité d'augmenter autant la capacité d'extraction que celle de traitement. Ainsi, dans ce cas d'étude, on considérera:

- 1) Investir dans de nouveaux camions pour augmenter la capacité d'extraction
- 2) Investir dans de nouvelles pelles pour augmenter la capacité d'extraction
- 3) Investir dans un nouveau concasseur au niveau de l'usine 1 pour en augmenter la capacité de traitement
- 4) Investir dans un nouveau concasseur au niveau de l'usine 2 pour en augmenter la capacité de traitement

Quelques informations concernant les options citées ci-dessus sont résumées dans le Tableau 6-3:

Tableau 6-3 Informations à propos des options d'investissement

	Camion	Pelle	Concasseur à l'usine 1	Concasseur à l'usine 2
Prix d'achat (\$)	480,000.00	3,200,000.00	4,500,000.00	4,500,000.00
Durée de vie de l'équipement (années)	6	10	15	15
Délai de livraison (années)	1	1	2	2
Nombre maximum à acheter	5	2	1	1
Capacité initiale	22,000 machine-heure/année	16Mt par année	8; 6; 6; 3.3; 4.2 Mt pour les années 1, 2, ... 5 respectivement	6; 4; 4; 5; 2.5 Mt pour les années 1, 2, ... 5 respectivement
Capacité en extra par achat d'un nouvel équipement	180t par chargement, 7,300 machine-heure/année	10 Mt	1 Mt	1 Mt
Vitesse (km/h)	40 plein /30 vide	-	-	-

## 6.4.4 Résultats

### 6.4.4.1 Temps de résolution et gap d'optimalité

Le Tableau 6-4 montre les résultats de la méthodologie proposée sur l'étude de cas présentée précédemment. La résolution de la relaxation linéaire avec l'algorithme Bienstock-Zuckerberg (BZ) converge rapidement et atteint l'optimalité au bout de 6 minutes. Ensuite, la solution fractionnelle obtenue est arrondie en appliquant deux heuristiques d'arrondissement consécutives. Les deux sont très rapides (quelques secondes). La première heuristique (SR pour « *simple rounding* »), qui rappelle le arrondit au plus proche entier et reporte à la prochaine période l'extraction de certains blocs au cas où il y a violation, produit une solution entière ayant un très grand gap de 64,5% par rapport à la solution optimale de la relaxation linéaire. La deuxième heuristique d'arrondissement (RH pour « *rounding heuristics* »), quant à elle, se montre beaucoup plus efficace en améliorant la solution et réduisant son gap à 2%. Après application de la recherche Tabou (MNTS), l'écart final est d'environ 1,5%. La durée d'exécution de ce dernier dépend du nombre de branches utilisées dans le processus de parallélisation.

Tableau 6-4 Temps de résolution et gap d'optimalité

BZ		SR			RH			MNTS		
Temps	Gap (%)	Temps	Gap (%)	Diff (%)	Temps	Gap (%)	Diff (%)	Temps	Gap (%)	Diff (%)
6 min	0.0	4 s	64.5	-	5 s	2.0	62.5	6 – 16 min	1.5	0.5

Le tableau précédent indique que la seconde heuristique d'arrondissement a l'impact le plus important en termes d'amélioration de la qualité de la solution. En revanche, la recherche Tabou semble avoir un impact très limité tout étant celle qui prend le plus de temps. Sa mauvaise performance peut être expliquée par deux raisons. Tout d'abord, la solution fournie par l'étape d'arrondissement présente déjà un très petit gap. Il devient plus facile de rester coincé dans des optima locaux. Deuxièmement, pour ne pas exclure de bonnes solutions potentielles, le voisinage à chaque itération est maintenu très grand et l'explorer dans sa totalité prend du temps.

#### 6.4.4.2 Effet de la parallélisation

Les gains obtenus en ajoutant la parallélisation à l'algorithme de recherche Tabou en termes de temps d'exécution sont illustrés à la Figure 6-4:

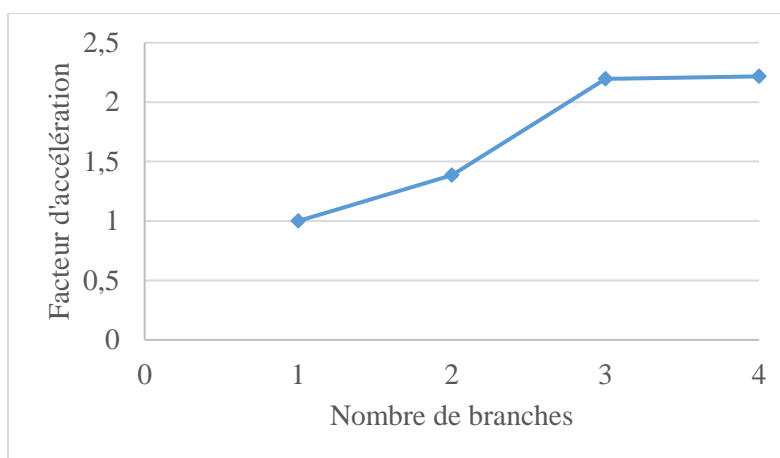


Figure 6-4 Effet de la parallélisation

Tel que mentionné à la section 6.4.1, l'ordinateur utilisé ne possède que 4 cœurs. Pour cette raison, le nombre maximal de branches testé est de quatre. De plus, étant donné que seulement cinq années de production sont considérées et que chaque branche affecte une paire d'années distincte, le nombre maximal de paires à évaluer simultanément est de trois. Ainsi, considérer plus de trois fils

devient insignifiant. Pour résumer, considérant l'implémentation proposée, la recherche Tabou est exécutée deux fois plus rapidement quand trois branches sont utilisées plutôt qu'une seule.

#### 6.4.4.3 Effet du rajout des options d'investissement

Le solveur a décidé d'investir dans deux nouveaux concasseurs à la première période: un pour chaque usine. Les effets de cette acquisition en termes de tonnage de minerai peuvent être observés à la Figure 6-5 et à la Figure 6-6 à partir de la troisième année, compte tenu du délai de livraison de deux ans. Dans l'ensemble, au niveau des deux usines, la production de tonnage de minerai augmente de 16 à 40% par rapport au modèle de base qui ne considère pas des options d'investissement dans le processus d'optimisation.

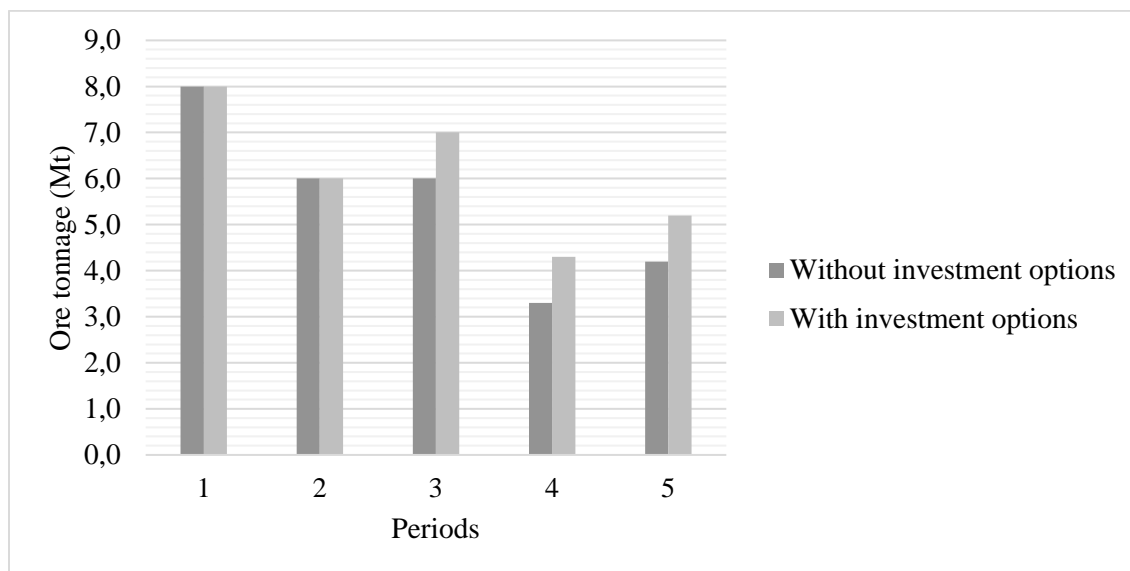


Figure 6-5 Production de minerai de l'usine 1

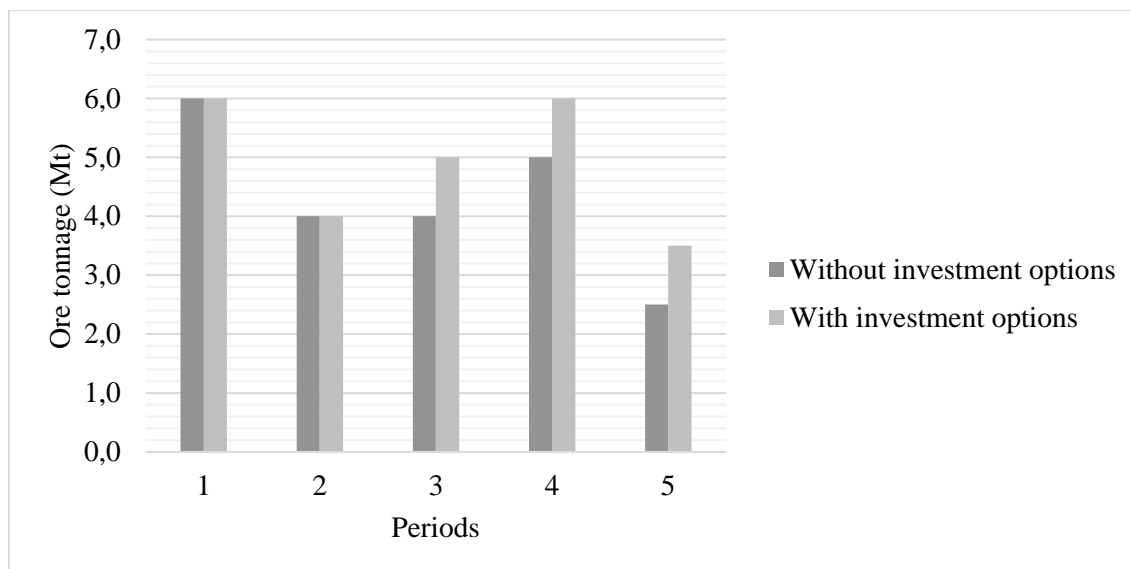


Figure 6-6 Production de minerai de l'usine 2

Les avantages se reflètent également au niveau de la VAN cumulative du projet, comme le montre la Figure 6-7. Les deux courbes représentent les VAN cumulatives des modèles avec et sans options d'investissement. On peut constater que pendant les trois premières années, la courbe du modèle considérant les options est en dessous de celle du modèle de base. Cela s'explique par le coût d'acquisition des deux concasseurs. Cette différence est ensuite compensée par une production plus importante. L'ajout de flexibilité au modèle a finalement abouti à une VAN cumulative espérée supérieure de 6%.



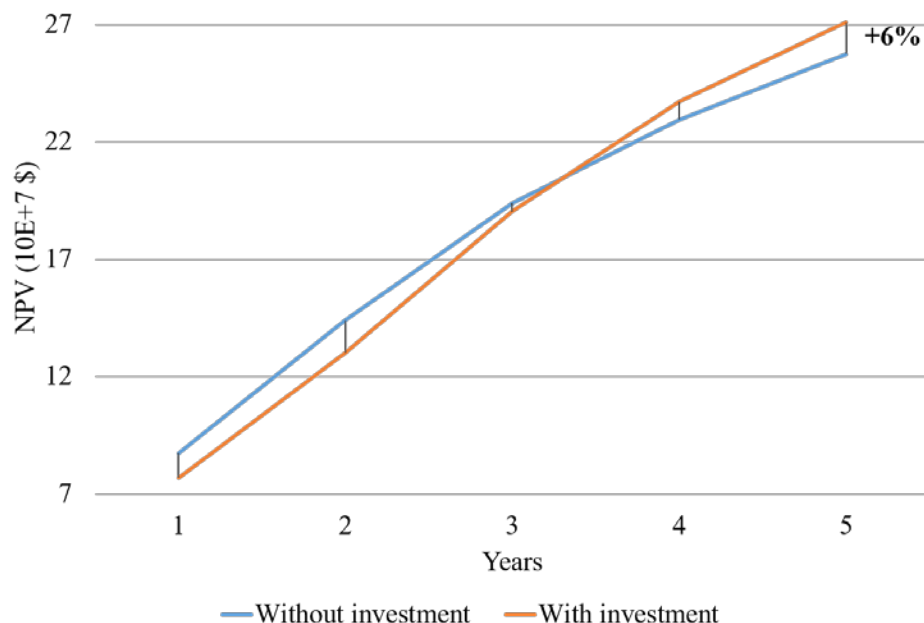


Figure 6-7 VAN cumulative espérée avec et sans option d'investissement

## 6.5 Conclusions

Dans cet article, un nouveau modèle stochastique est développé pour intégrer de la flexibilité dans le processus d'optimisation de la planification à long terme des gisements à ciel ouvert. Cette flexibilité se traduit par la possibilité d'augmenter la capacité d'extraction à travers l'achat de nouveaux camions et pelles et/ou augmenter la capacité de traitement par l'acquisition de nouveaux concasseurs. La solution proposée dans le Chapitre 4 et le Chapitre 5 a été adaptée pour prendre en compte les options d'investissement. Entre autres, des étapes de réparation ont été ajoutées à l'heuristique d'arrondissement pour gérer les contraintes strictes induites par l'inclusion des équipements. Un algorithme de recherche Tabou à voisinages multiples a également été mis en œuvre en utilisant un processus de parallélisation pour améliorer la solution fournie par l'heuristique d'arrondissement tout en réduisant les temps de calcul.

Une étude de cas est appliquée à un complexe minier comprenant une mine à ciel ouvert avec deux usines de traitement, une décharge et des piles de minerai. Les résultats montrent que l'algorithme a été performant et efficace une fois appliqué sur cette instance. Une solution entière ayant un gap d'optimalité de 1,5% a pu être obtenue en un temps raisonnable (12-22 minutes au total). La parallélisation a également réussi à réduire le temps d'exécution proportionnellement au nombre

de branches utilisées. En termes d'exploitation minière, les résultats montrent qu'investir dans un concasseur secondaire dès la première année pour les deux usines représente une augmentation globale de la VAN supérieure à 6% par rapport au modèle de base sans options d'investissement.

Dans le futur, la méthode proposée devrait être testée sur des instances plus larges afin de mieux évaluer sa robustesse. De plus, la performance de la recherche Tabou étant discutable, il serait intéressant d'affiner la définition des voisinages afin de réduire leurs tailles et d'accélérer ainsi le processus. Ne pas fixer les variables de décision relatives aux investissements à cette étape pourrait également être envisagé pour observer des effets plus significatifs sur la valeur de la solution. Enfin, les travaux futurs porteront également sur l'extension de la formulation à des flottes d'équipement hétérogènes.

## CHAPITRE 7 DISCUSSION GÉNÉRALE

Cette thèse vise à répondre à quelques problématiques rencontrées par l'industrie minière. Les objectifs principaux portent sur la modélisation et la définition de méthodes de résolution pour la planification stratégique des mines à ciel-ouvert et ce, dans un contexte stochastique. Ce problème reconnu comme très complexe, intègre, dans le contexte de cette thèse, des décisions sur les séquences d'extraction, le choix des destinations ainsi que sur les investissements.

L'objectif est de maximiser les profits générés durant la durée de vie de la mine, tout en minimisant les déviations par rapport aux objectifs de production. Trois variantes du problème ont été présentées et un modèle mathématique linéaire ainsi qu'une approche de résolution ont été proposés pour chacune d'entre elles. Pour attester de la robustesse et la performance des modèles proposés, différentes instances ont été testées.

La première contribution discutée dans le chapitre 4, considérait une variante de base du problème de planification dans laquelle on considère les contraintes classiques de préséance et de réserve mais aussi de capacité et de mélange. L'emphase a été mise sur l'approche de résolution plutôt que sur la modélisation, le but étant surtout de développer un algorithme performant qui puisse facilement être adaptable à d'autres variantes du problème notamment celles présentées au chapitre 5 et 6. Un des premiers constats fut que le problème étudié pouvait s'apparenter au problème de sac à dos avec contraintes de précédence. Présentant une matrice unimodulaire, cette classe de problème a l'avantage d'avoir des solutions optimales peu fractionnaires, d'où l'intérêt de passer par la relaxation linéaire en premier lieu et d'essayer d'en arrondir la solution par la suite. En ce qui concerne la méthode de résolution, l'idée a été d'étendre l'algorithme de Bienstock et Zuckerberg (2010) à l'optimisation stochastique, celui-ci ayant déjà prouvé son efficacité à résoudre des grandes instances du même problème dans sa version déterministe. Afin d'obtenir une solution entière, deux heuristiques sont appliquées successivement. La première heuristique est une heuristique gloutonne d'arrondissement se basant sur l'ordonnement topologique des blocs. Cet ordonnancement prend en compte les contraintes de préséance mais aussi le temps d'extraction probable déduit à partir de la solution optimale de la relaxation linéaire. Tout en suivant l'ordre, l'heuristique décide d'avancer ou retarder l'extraction de certains blocs de sorte que la VAN soit maximisée et ce, tout en respectant les contraintes de préséance. Une RT est ensuite appliquée de façon itérative pour chacune des périodes afin d'améliorer la valeur de la solution. Les deux

heuristiques combinées ont permis d'obtenir, dans des délais de temps raisonnables, des solutions entières avec des gaps d'optimalités inférieurs à 2% même si la contribution marginale de l'heuristique gloutonne en termes d'amélioration de la VAN est plus conséquente que celle du Tabou. Ces résultats ont ensuite motivé la conservation de la même approche de résolution pour tester d'autres variantes du problème.

Dans le chapitre 5, le défi à relever était d'inclure les piles de minerai dans la formulation tout en gardant une structure adaptée pour l'application de la méthode décrite plus haut. Pour ce faire, il a fallu développer un nouveau modèle qui fait fi de l'hypothèse utilisée dans les formulations conventionnelles. En effet, celle-ci assume une parfaite homogénéisation du matériau une fois arrivé dans les piles d'entreposage et apporte, par ce fait, de la non-linéarité. Le modèle proposé introduit des nouvelles variables qui non seulement contournent la non-linéarité mais aussi permettent, en tout temps de la vie de la mine, une estimation exacte de la composition des piles évitant ainsi tout type d'approximation. De surcroît, la façon dont sont définies les variables permet d'avoir un contrôle sur la durée d'entreposage, la taille des piles et leurs nombres et ce, pour répondre à certaines limitations rencontrées sur le terrain. Malgré l'ajout de cette composante à savoir les piles de minerai, la méthode décrite au chapitre 4 à quelques modifications près demeure tout aussi performante et encourage l'enlignement vers des modèles reflétant de mieux en mieux la réalité.

Enfin, le chapitre 6 intègre à la formulation des variables de décisions quant à l'achat de nouveaux équipements introduisant ainsi une certaine flexibilité par rapport aux capacités d'extraction et de traitement. Des contraintes relatives à la disponibilité et la capacité des équipements ont aussi été ajoutées au modèle. Cette intégration a tout de même nécessité de nombreux changements au niveau des heuristiques. En effet, précédemment, l'arrondissement initial permettait déjà d'obtenir une solution entière et réalisable, étant donné que les contraintes de précédence étaient par défaut respectées et les autres contraintes étaient souples grâce aux variables de déviation. Désormais, certaines contraintes liées entre autres aux temps-machine disponibles et aux capacités d'extraction peuvent être violées lors de l'arrondissement. Des étapes supplémentaires de réparation sont alors nécessaires. Aussi, faut-il désormais vérifier la faisabilité de toute nouvelle solution obtenue à la suite d'une perturbation, ce qui n'était pas le cas avec les autres variantes. Quant à la RT, l'idée était de pouvoir profiter des effets de parallélisation pour accélérer les temps de calcul. En effet, la recherche de meilleures solutions dans différents voisinages indépendants pouvait se faire

simultanément chacune dans un nœud, résultant en un partage plus efficient de la mémoire. Les résultats obtenus ont montré que l'introduction de ce type de flexibilité permet d'augmenter considérablement la capacité totale de production du complexe minier ce qui se traduit par un gain en termes économiques. De façon plus globale, tous les gains rapportés dans cette thèse ne sont qu'un incitatif à s'orienter vers des modèles qui offrent flexibilité, qui prennent en considération l'incertitude mais aussi qui incluent le plus de composants possibles.

## CHAPITRE 8 CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS

### 8.1 Limitations de la solution proposée

Les données dont on disposait pour cette étude ne concernaient pas des gisements de très grande taille, ce qui aurait été intéressant de tester pour mieux attester de la performance de la méthodologie proposée. Néanmoins, il est contraignant d'accéder à de telles instances qui répondent aux besoins de l'étude en l'occurrence l'accès à plusieurs simulations du profil géologique du même gisement idéalement comportant plus d'un élément. À titre d'exemple, les instances disponibles dans les bibliothèques libres d'accès en vue de tests pour des problèmes de planification minière telles que MineLib (Espinoza et al., 2013) ne peuvent pas être utilisées dans le contexte de cette thèse.

Ensuite, la modélisation proposée au chapitre 5 risque d'être moins efficace et inappropriée pour des complexes miniers avec des durées d'exploitation prolongées (plus qu'une vingtaine d'années) et un nombre élevé des modes de traitements. Dans ces cas-ci, le nombre de piles ainsi que celui des variables explosent rapidement et il devient donc impératif d'avoir recours aux recommandations données dans ce même chapitre.

Concernant les données relatives aux équipements, celles-ci étaient inexistantes. La taille de la flotte initiale a dû être établie pour le besoin de l'étude et ce, en se basant sur des données réelles venant de sources externes telles que les capacités, les prix d'achat, les vitesses et les durées de vie moyennes. De plus, par souci de simplification, la flotte de chaque type d'équipement est supposée homogène, ce qui ne reflète pas forcément la réalité. Néanmoins, une extension du modèle pour supporter différents types d'équipement sans pour autant changer la structure du problème est toujours possible. Les distances parcourues par les camions ne tiennent pas non plus compte de l'existence d'éventuelles routes ou de rampes; il s'agit plutôt de simples distances euclidiennes reliant le bloc à sa destination finale.

Enfin, il est important de mentionner qu'aucune contrainte de lissage n'a été ajoutée au problème ce qui peut se traduire par des planifications avec un effet gryère. Malheureusement, l'efficacité de l'algorithme Bienstock et Zuckerberg (2010) repose sur le fait d'avoir un problème avec un nombre relativement limité de contraintes autres que les contraintes de précédence et dans le cadre

de cette thèse, aucune formulation convenable rajoutant une notion de lissage tout en respectant la structure du problème n'a pas eu être trouvée.

## 8.2 Avenues de recherches

Cette thèse a porté sur l'étude de la planification stratégique d'une mine à ciel ouvert dans un contexte d'incertitude géologique. Bien que les instances étudiées considèrent des mines isolées, la formulation présentée peut être en théorie utilisée dans un contexte plus global de complexe minier comprenant plusieurs gisements, des tests numériques seraient en revanche nécessaires pour en attester et étudier les effets d'une optimisation simultanée. Par ailleurs, vu les résultats prometteurs, il serait intéressant d'investiguer l'intégration d'autres contraintes qui rapprocheraient davantage le modèle de la réalité notamment des contraintes opérationnelles telles que l'affectation des équipements à des zones de minage en particulier, la pénalisation des déplacements de ceux-ci en y imputant des coûts ou encore la considération de périmètres d'opération sécuritaires pour chaque équipement. Peu importe la dimension qu'on désire rajouter, le plus grand défi au niveau de la modélisation restera de formuler les contraintes de sorte que la structure du problème ne soit pas affectée.

En ce qui concerne l'approche de résolution, beaucoup d'améliorations peuvent être apportées. Une étape de prétraitement pourrait par exemple limiter considérablement le nombre de variables en déterminant pour chaque bloc, la période d'extraction au plus tôt et au plus tard et ce, en se basant sur la capacité d'extraction par période. Représentant un goulet d'étranglement dans le processus d'optimisation et indépendamment des variantes étudiées, la RT s'est avérée la moins efficace en termes de contribution marginale. Il faudrait éventuellement trouver une façon de réduire la taille des voisinages explorés sans pour autant exclure de potentielles bonnes solutions ou alors ajouter des techniques de diversification pour éviter de rester bloqué dans des optimaux locaux. Aussi, tel que mentionné au chapitre 6, les variables relatives aux équipements sont considérées fixes lors de cette étape, cette hypothèse pourrait être remise en question pour avoir plus de latitude au niveau de l'espace solution. Cela étant dit, au vu des résultats obtenus, l'algorithme proposé a prouvé son potentiel et mériterait de faire l'objet de plus d'investigation dans le futur.

## RÉFÉRENCES

- Ahmed, S., King, A., Parija, G.: A multi-stage stochastic integer programming approach for capacity expansion under uncertainty. *Journal of Global Optimization* 26:3–24. DOI: 10.1023/A:1023062915106 (2003).
- Ajak, A.D, Lilford, E., Topal, E.: Application of predictive data mining to create mine plan flexibility in the face of geological uncertainty. *Resources Policy*, 55 (2018): 62-79. DOI: 10.1016/J.RESOURPOL.2017.10.016 (2018).
- Akaike, A., Dagdelen, K.: A strategic production scheduling method for an open pit mine. *Proceedings, 28th International APCOM symposium; Computer applications in the minerals industries; Golden, CO*, 729–738 (1999).
- Albor, F., Dimitrakopoulos, R.: Algorithmic approach to pushback design based on stochastic programming: method, application and comparisons. *IMM Transactions, Mining Technology*, 119 (2): 88–101 (2010).
- Albor, F., R. Dimitrakopoulos, R.: Stochastic mine design optimization based on simulated annealing: Pit limits, production schedules, multiple orebody scenarios and sensitivity analysis, *Transactions of the Institution of Mining and Metallurgy, Section A: Mining Technology*, 118 (2): 79-90. DOI: 10.1179/037178409X12541250836860 (2009).
- Amankwah, H., Larsson, T., Textorius, B.: Open-pit mining with uncertainty: a conditional value-at-risk approach. *Optimization Theory, Decision Making, and Operations Research Applications*, 31: 117–139. *Springer Proceedings in Mathematics & Statistics* (2013)
- Asad, M.W.A., Dimitrakopoulos, R.: Implementing a parametric maximum flow algorithm for optimal open pit mine design under uncertain supply and demand. *Journal of the Operational Research Society*, 64: 185-197 (2013).
- Asad, M.W.A.: Cutoff grade optimization algorithm with stockpiling option for open pit mining operations of two economic minerals. *International Journal of Surface Mining, Reclamation and Environment*, 19(3): 176-187, DOI: 10.1080/13895260500258661 (2005).
- Baker, C.K., Giacomo, S.M.: Resource and reserves: their uses and abuses by the equity markets. *Ore reserves and Finance: A Joint Seminar between Australasian Institute of Mining and Metallurgy and ASX*, Sydney (1998).
- Ben-Awuah, E., Askari-Nasab, H., Maremi, A., Sayed Hosseini, N.: Implementation of a goal programming framework for production and dyke material planning, *International Journal of Mining, Reclamation and Environment*, 32(8): 536-563. DOI: 10.1080/17480930.2017.1331082 (2018).
- Ben-Awuah, E., Askari-Nasab, H.: Oil sands mine planning and waste management using mixed integer goal programming, *International Journal of Mining, Reclamation and Environment*, 25(3): 226-247, DOI: 10.1080/17480930.2010.549656 (2011).
- Benndorf, J., Dimitrakopoulos, R.: Stochastic long-term production scheduling of iron ore deposits: integrating joint multi-element geological uncertainty. *Journal of Mining Science*, 49 (1): 68–81. DOI: 10.1134/S1062739149010097.pdf (2013).



- Bienstock, D., Zuckerberg, M.: A new LP algorithm for precedence constrained production scheduling. *Optimization Online* (2009).
- Bienstock, D., Zuckerberg, M.: Solving LP relaxations of large-scale precedence constrained problems. *Proceedings from the 14th conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization (IPCO)*. *Lecture Notes in Computer Science*, 6080: 1–14. DOI: 10.1007/978-3-642-13036-6\_1 (2010).
- Bilge, U., Ulusoy, G.: A time window approach to simultaneous scheduling of machines and material handling system in an FMS. *Operations Research*, 43 (6): 1058–1070 (1995).
- Birge, J.R., Louveaux, F.: *Introduction to Stochastic Programming*. Springer (1997).
- Bley, A., Boland, N., Fricke, C., Froyland, G.: A strengthened formulation and cutting planes for the open pit mine production scheduling problem. *Computers & Operations Research*, 37(9): 1641-1647. DOI: 10.1016/j.cor.2009.12.008 (2010).
- Bley, A., Boland, N., Froyland, G., and Zuckerberg, M.: Solving mixed integer nonlinear programming problems for mine production planning with stockpiling. *Journal of Mining Science*, 47 (3): 338-359. [http://www.optimization-online.org/DB\\_FILE/2012/11/3674.pdf](http://www.optimization-online.org/DB_FILE/2012/11/3674.pdf). Visited 19 July 2019 (2012).
- Bley, A., Boland, N., Fricke, C., Froyland, G.: A strengthened formulation and cutting planes for the open pit mine production scheduling problem. *Computers & Operations Research*, 37 (9): 1641-1647 (2010).
- Bodon, P., Fricke, C., Sandeman, T., Stanford, C.: Modeling the mining supply chain from mine to port: A combined optimization and simulation approach. *Journal of Mining Science*, 47:202–211. DOI: 10.1134/S1062739147020079 (2011).
- Bodon, P., Fricke, C., Sandeman, T., Stanford, C.: Combining optimisation and simulation to model a supply chain from pit to port. *Advances in Applied Strategic Mine Planning*, Springer International Publishing, Cham, 251-267. DOI: 10.1007/978-3-319-69320-0\_17 (2018).
- Boland, N., Dimitrescu, I., Froyland, G.: A multistage stochastic programming approach to open pit mine production scheduling with uncertain geology. *Optimization Online*, [http://www.optimization-online.org/DB\\_FILE/2008/10/2123.pdf](http://www.optimization-online.org/DB_FILE/2008/10/2123.pdf). Visited 19 July 2019 (2008).
- Boland, N., Dumitrescu, I., Froyland, G., Gleixner, A.: LP-based disaggregation approaches to solving the open pit mining production scheduling problem with block processing selectivity. *Computers and Operations Research*, 36 (4): 1064–1089 (2009).
- Boucher, A., Dimitrakopoulos, R.: Block simulation of multiple correlated variables. *Mathematical Geosciences*, 41(2): 215-237 (2009).
- Boucher, A., Dimitrakopoulos, R.: Multivariate Block-Support Simulation of the Yandi Iron Ore Deposit, Western Australia. *Mathematical Geosciences*, 44(4): 449–468 (2012).
- Brika, Z., Gamache, M., Dimitrakopoulos, R.: Multi-Product Mine Scheduling Optimization under Multi-Element Geological Uncertainty. *Cahier du GERAD*. G-2018-72 (2018).
- Caccetta, L., Hill, S. P.: An application of branch and cut to open pit mine scheduling. *Journal of Global Optimization*, 27 (2–3), 349–365 (2003).

- Chicoisne, R., Espinoza, D., Goycoolea, M., Moreno, E., Rubio, E.: A new algorithm for the open-pit mine production scheduling problem. *Operations research*, 60 (3): 517–528 (2012).
- Collard, J., Martinelli, R., Gamache, M.: Strategic Planning of an Underground Mine with Variable Cut-off Grades. *Les Cahiers du GERAD*. G–2013–86 (2013).
- Cullenbine, C., Wood, R.K., Newman, A.: A sliding time window heuristic for open pit mine block sequencing. *Optim Lett*, 5 (3): 365–377. DOI: 10.1007/s11590-011-0306-2 (2011).
- Dagdelen, K., Johnson, T.B.: Optimum open pit mine production scheduling by lagrangian parameterization. *Proceedings of 19th International APCOM Symposium*, Littleton, CO, 127–142 (1986).
- David, M.: *Handbook of applied advanced geostatistical ore reserve estimation*. Elsevier, Amsterdam (1988).
- De Lara, M., Morales, N., Beeker, N.: Adaptive strategies for the open-pit mine optimal scheduling problem. Available at: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01542705/document> (Accessed: 17 July 2019) (2017).
- De Neufville, R., Scholtes, S., Wang, T.: Real options by spreadsheet: parking garage case example, *J. Infrastruct. Syst.*, 12(2): 107–111 (2005).
- De Neufville, R.: *Analysis methodology for the design of complex systems in uncertain environment: application to mining industry*, Unpublished internal report, Engineering Systems Division, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, USA (2006)
- Del Castillo, M.F., Dimitrakopoulos, R.: Dynamically optimizing the strategic plan of mining complexes under supply uncertainty. *Resources Policy*, 60: 83-93 (2019).
- Del Castillo, M.F., Dimitrakopoulos, R.: Dynamically optimizing the strategic plan of mining complexes under supply uncertainty. *Resources Policy*. Pergamon, 60: 83-93. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.resourpol.2018.11.019> (2019).
- Denby, B., Schofield, D.: Open-pit design and scheduling by use of genetic algorithms. *Transactions of the Institutions of Mining and Metallurgy*, 1 (103): A21–A26 (1994)
- Dimitrakopoulos, R., Farrelly, C. T., Godoy, M. C.: Moving forward from traditional optimization: grade uncertainty and risk effects in open-pit design, *Transactions of the Institutions of Mining and Metallurgy*, Section A: Mining Technology, 111 (2002).
- Dimitrakopoulos, R., Ramazan, S.: Stochastic integer programming for optimizing long-term production schedules of open pit mines: methods, application and value of stochastic solutions. *Min. Technol.* 117 (4), 155–160. DOI: 10.1179/174328609X417279 (2008).
- Dimitrakopoulos, R.: Stochastic optimization for strategic mine planning: A decade of developments. *Journal of Mining Science*, 84: 138–150 (2011).
- Dowd, P.: Risk assessment in reserve estimation and open-pit planning. *Transactions of the Institution of Mining and Metallurgy (Section A: Mining Industry)*, 103, A148–A154 (1994).
- Dowd, P.: Risk in minerals projects: analysis, perception and management. *Transactions of the Institutions of Mining and Metallurgy*, Section A: Mining Technology, 106 (1997).
- Espinoza, D., Goycoolea, M., Moreno, E., Muñoz, G., Queyranne, M.: Open pit mine scheduling under uncertainty: a robust approach. *Proceedings of the 36th International Symposium on*

- the Applications of Computers and Operations Research in the Mineral Industry (APCOM), 433–444 (2013).
- Evatt, G.W., Soltan, M.O., Johnson, P.V.: Mineral reserves under price uncertainty. *Resources Policy*, 37(3): 340-345. DOI: 10.1016/j.resourpol.2012.03.004 (2012).
- Farmer, I.: Stochastic mining supply chain optimization: A study of integrated capacity decisions and pushback design under uncertainty. Thesis, McGill University (2016).
- Ferland, J., Fortin, L.: Vehicle scheduling with sliding time windows. *European Journal of Operational Research* 38 (2), 213–226 (1989).
- Ferland, J.A., Amaya, J., Djuimo, M.S.: Application of a particle swarm algorithm to the capacitated open pit mining problem, S. Mukhopadhyay, G. Sen Gupta (Eds.), *Autonomous Robots and Agents*, Springer-Verlag.127-133 (2007).
- Godoy, M., Dimitrakopoulos, R.: A risk quantification framework for strategic mine planning: method and application. *Journal of Mining Science*, 47:235–246 (2011).
- Godoy, M., Dimitrakopoulos, R.: Managing risk and waste mining in long-term production scheduling. *SME Transactions*. 316, 43-50 (2004).
- Godoy, M.: The effective management of geological risk in long-term production scheduling of open pit mines. Ph.D. thesis, University of Queensland, Brisbane (2002).
- Goodfellow, R., Dimitrakopoulos, R.: Algorithmic integration of geological uncertainty in pushback designs for complex multiprocess open pit mines. *Mining Technology*. Taylor & Francis, 122(2): 67-77. DOI: 10.1179/147490013X13639459465736 (2013).
- Goodfellow, R., Dimitrakopoulos, R.: Global Optimization of Open Pit Mining Complexes with Uncertainty. *Applied Soft Computing*. 40: 292-304. DOI: 10.1016/j.asoc.2015.11.038 (2015).
- Goodfellow, R., Dimitrakopoulos, R.: Simultaneous stochastic optimization of mining complexes and mineral value chains. *Mathematical Geosciences*, 49(3): 341–360 (2017).
- Goovaerts, P.: *Geostatistics for Natural Resources Evaluation*. Oxford University Press (1997).
- Groeneveld, B., Topal, E., Leenders, B.: A new methodology for flexible mine design, Proc. Int. Symp. on ‘Orebody modelling and strategic mine planning, Perth, Australia, March 2009, AusIMM, 109 –118 (2009).
- Groeneveld, B., Topal, E., Leenders, B.: Robust, flexible and operational mine design strategies, *Mining Technology*, 121(1): 20-28, DOI: 10.1179/1743286311Y.0000000018 (2012).
- Hochbaum, D.: A new-old algorithm for minimum-cut and maximum-flow in closure graphs. *Networks*, 37 (4): 171–193. DOI: 10.1002/net.1012, MR 1837196 (2001).
- Hochbaum, D.: The pseudoflow algorithm: a new algorithm for the maximum flow problem. *Operations Research*, 58: 992–1009 (2008)
- Hoerger, S., Seymour, F., Hoffman, L.: Mine planning at Newmont’s Nevada operations. *Mining Engineering*, 51 (10), 26–30 (1999).

- Jélvez, E., Morales, N., Nancel-Penard, P., Peypouquet, J., Reyes, P.: Aggregation heuristic for the open-pit block scheduling problem. *European Journal of Operational Research*, 249(3): 1169-1177. DOI: 10.1016/j.ejor.2015.10.044 (2016).
- Johnson, T.B., Sharp, W.R.: A Three-dimensional dynamic programming method for optimal open pit design. U.S. Bureau of Mines, Report of Investigation, 7553 (1971).
- Johnson, T.B.: Improving Returns from Mine Products Through Use of Operation Research Techniques. US Bureau of Mines, Report of investigations 7230, Washington, DC (1969).
- Johnson, T.B.: Optimum open pit mine production scheduling. Ph.D. thesis, University of California, Berkeley (1968).
- Johnson, T.B.: Optimum production scheduling. Proceedings of the 8th International Symposium on Computers and Operations Research, Salt Lake City, 539–562 (1969).
- Kim, Y.C.: Mathematical Programming Analysis of Mine Planning Problems. Ph.D. Thesis, The Pennsylvania State University, University Park, PA (1967).
- Kirkpatrick, S., Gelatt, C.D., Vecchi, M.P.: Optimization by simulated annealing. *Science, New Series*, 20:671–680 (1983).
- Koenigsberg, E.: The optimum contours of an open pit mine: an application of dynamic programming. Proceedings of the 17th APCOM Symposium, 274-287 (1982).
- Korobov, S.: Methods for determining optimal open pit limits. Department of Mineral Engineering, École Polytechnique de Montréal, Paper ED-74-R-4 (1974).
- Koushavand, B., Askari-Nasab, H., Deutsch, C.V.: A linear programming model for long-term mine planning in the presence of grade uncertainty and a stockpile. *International Journal of Mining Science and Technology*, 24 (4): 451-459. DOI: 10.1016/j.ijmst.2014.05.006 (2014).
- Kuchling, K.: Ore Stockpiling – Why are we doing this again? Retrieved from: <https://kuchling.com/53-ore-stockpiling-why-are-we-doing-this-again/> (2018)
- Kumar, A., Dimitrakopoulos, R.: Application of Simultaneous Stochastic Optimization with Geometallurgical Decisions at a Copper-Gold Mining Complex. *Mining Technology*. DOI: 10.1080/25726668.2019.1575053 (2019).
- Kumral, M., Dowd, P. A.: A simulated annealing approach to mine production scheduling. *Journal of the Operational Research Society*, 56(8):922–930 (2005).
- L’Heureux, G., Gamache, M., Soumis, F.: Mixed integer programming model for short term planning in open-pit mines. *Mining Technology - Trans. Inst. Min. Metall. A* 122 (2): 101–109 (2013).
- Lamghari, A., Dimitrakopoulos, R. A diversified Tabu search approach for the open-pit mine production scheduling problem with metal uncertainty. *European Journal of Operational Research*, 222(3): 642-652 (2012).
- Lamghari, A., Dimitrakopoulos, R., Ferland, J.: A Hybrid Method Based on Linear Programming and Variable Neighborhood Descent for Scheduling Production in Open-Pit Mines. *Journal of Global Optimization*, 63(3): 555–582. DOI: 10.1007/s10898-014-0185-z (2015).

- Lamghari, A., Dimitrakopoulos, R.: Progressive hedging applied as a metaheuristic to schedule production in open-pit mines accounting for reserve uncertainty. *European Journal of Operational Research*, 253: 843-855. DOI: 10.1016/j.ejor.2016.03.007 (2016).
- Lamghari, A.: Mine planning and oil field development: a survey and research potentials. *Mathematical Geosciences*, 49(3): 395-437. DOI: 10.1007/s11004-017-9676-z (2017).
- Lane, K.: The economic definition of ore: cut-off grades in theory and practice. *Mining Journal Books*, 0900117451 (1988).
- Leite, A., Dimitrakopoulos, R.: A stochastic optimization model for open pit mine planning: Application and risk analysis at a copper deposit, *IMM Transactions, Mining Technology*, 116 (2007).
- Leite, A., Dimitrakopoulos, R.: Stochastic optimization of mine production scheduling with uncertain ore/metal/ waste supply, *International Journal of Mining Science and Technology*. 24(1): 755–762 (2014).
- Lemieux, M.: Moving cone optimizing algorithm. *Proceedings of the APCOM Symposium, computer methods for the 80's*, 329-345 (1979).
- Lerchs, H., Grossmann, I.: Optimum design of open pit mines. *CIM Bulletin*, 58:47–54 (1965).
- Li, Y., Topal, E., Ramazan, S.: Optimising the long-term mine waste management and truck schedule in a large-scale open pit mine. *Mining Technology*, 125(1): 35-46. DOI: 10.1080/14749009.2015.1107343 (2016).
- Marcotte, D., Caron, J.: Ultimate open pit stochastic optimization. *Computers & Geosciences*, 51: 238–246 (2013).
- Menabde, M., Froyland, G., Stone, P., Yeates, G.: Mining schedule optimization for conditionally simulated orebodies, in: R. Dimitrakopoulos (Ed.), *Orebody Modelling and Strategic Mine Planning: Uncertainty and Risk Management Models*, AusIMM Spectrum Series, 2007, 379–384 (2007).
- Menabde, M., Froyland, G., Stone, P., Yeates, G.: Mining schedule optimization for conditionally simulated orebodies, in: R. Dimitrakopoulos (Ed.), *Orebody Modelling and Strategic Mine Planning: Uncertainty and Risk Management Models*, AusIMM Spectrum Series, 2007, 379–384 (2007).
- Milani, G.: A genetic algorithm with zooming for the determination of the optimal open pit mines layout. *Open Civil Engineering Journal*, 10: 301-322. DOI: 10.2174/1874149501610010301 (2016).
- MineMax. MineMax planner. Retrieved from: <http://www.minemax.com/>. Visited in: 07.09.18 (2016).
- Mintec, Inc. Minesight. Retrieved from: <http://www.minesight.com/>. Visited in 05.09.18 (2013).
- Montiel, L., Dimitrakopoulos, R.: A heuristic approach for the stochastic optimization of mine production schedules. *J. Heuristics*, 23: 397–415 (2017).
- Montiel, L., Dimitrakopoulos, R.: Optimizing mining complexes with multiple processing and transportation alternatives: An uncertainty-based approach. *European Journal of Operational Research*, 247 (1), 166-178. DOI: 10.1016/j.ejor.2015.05.002 (2015).

- Montiel, L., Dimitrakopoulos, R.: Stochastic mine production scheduling with multiple processes: Application at Escondida Norte, Chile. *Journal of Mining Science*, 49:583–597. DOI: 10.1134/S1062739149040096 (2013).
- Moreno, E., Emery, X., Goycoolea, M., Morales, N., Nelis, G.: A two-stage stochastic model for open pit mine planning under geological uncertainty. K. Dagdelen (Ed.), *Proceedings of the 38th International Symposium on the Application of Computers and Operations Research in the Mineral Industry (APCOM)*, 13.27-13.33 (2017).
- Moreno, E., Rezakhah, M., Newman, A., Ferreira, F.: Linear Models for Stockpiling in Open-pit Mine Production Scheduling Problems. *European Journal of Operational Research*, 260 (1): 212-221. DOI: 10.1016/j.ejor.2016.12.014. (2017).
- Munoz, G., Espinoza, D., Goycoolea, M., Moreno, E., Queyranne, M., Rivera, O.: A study of the Bienstock-Zuckerberg algorithm. *Computational Optimization and Applications*, 69(2):501-534. DOI: 10.1007/s10589-017-9946-1 (2018).
- Osanloo, M., Gholamnejad, J., Karimi, B.: Long-term open pit mine production planning: a review of models and algorithms. *International Journal of Mining Reclamation and Environment*. 22(1), 3–35 (2008).
- Philips, D.A.: Optimum design of an open pit. *Proceedings 10th APCOM Symposium, S.A.I.M.M., Johannesburg, S.A* (1973).
- Picard, J.C.: Maximal closure of a graph and applications to combinatorial problems, *Management Science*, 22 (11): 1268–1272. DOI: 10.1287/mnsc.22.11.1268 (1976).
- Pimentel, B., Mateus, G., Almeida, F.: Mathematical models for optimizing the global mining supply chain. *Intelligent Systems in Operations: Methods, Models and Applications in the Supply Chain*, Business Science Reference, 133-163 (2010).
- Ramazan S, Dimitrakopoulos R.: Stochastic optimisation of long-term production scheduling for open pit mines with a new integer programming formulation. *Orebody modelling and strategic mine planning*, Spectrum S. The Australian Institute of Mining and Metallurgy (AusIMM), Victoria, 353–360 (2004c).
- Ramazan, S., Dimitrakopoulos, R.: Production scheduling with uncertain supply: a new solution to the open pit mining problem. *Optimization and Engineering*, 14 (2), 361–380. DOI: 10.1007/s11081-012-9186-2 (2013).
- Ramazan, S., Dimitrakopoulos, R.: Recent applications of operations research in open pit mining. *Transactions of the Society for Mining, Metallurgy*, 316, 73–78 (2004a).
- Ramazan, S., Dimitrakopoulos, R.: Traditional and new MIP models for production scheduling with in-situ grade variability. *International Journal of Surface Mining, Reclamation and Environment*. 18:85–98. DOI: 10.1080/13895260412331295367(2004b).
- Ramazan, S.: A new pushback design algorithm in open pit mining. MSc thesis, Department of Mining Engineering, Colorado School of Mines, Golden, Colorado, USA (1996).
- Ramazan, S.: The new fundamental tree algorithm for production scheduling of open pit mines. *European Journal of Operational Research*, 177 (2): 1153–1166 (2007).
- Ravenscroft, P.: Risk analysis for mine scheduling by conditional simulation. *Transactions of the Institution of Mining and Metallurgy. Section A. Mining Industry*, 101: A104–108 (1992).

- Rezakhah, M., Newman, A.: Open pit mine planning with degradation due to stockpiling, *Computers and Operations Research*. DOI: 10.1016/j.cor.2018.11.009 (2018).
- Rimélé, A., Gamache, M., Dimitrakopoulos, R.: A stochastic optimization method with in-pit waste and tailings disposal for open pit life-of-mine production planning. *Resources Policy*, (57): 112-121. DOI : 0.1016/j.resourpol.2018.02.006 (2018).
- Sabour, S.A., Dimitrakopoulos, R.: Incorporating geological and market uncertainty and operational flexibility into open pit mine design. *Journal of Mining Science*, 47(2): 191-201 (2011).
- Sari, Y.A., Kumral, M.: Mine production scheduling for poly-metallic mineral deposits: Extension to multiple processes, *International Journal of Planning and Scheduling*, 2 (2): 134-153 (2015)
- Sattarvand, J., Niemann-Delius, C.: A new metaheuristic algorithm for long-term open-pit production planning. *Archives of Mining Sciences. Versita*, 58(1): 107-118. DOI: 10.2478/amsc-2013-0007 (2013).
- Shishvan, M.S., Sattarvand, J.: Long-term production planning of open pit mines by ant colony optimization. *European Journal of Operational Research*, 240 (3), 825–836 (2015).
- Smith, M. L., Wicks, S. J.: Medium-term production scheduling of the Lumwana mining complex. *Interfaces, Special Issue: Operations Research in Mining*, 44 (2), 176–194 (2014).
- Smith, M. L.: Optimizing inventory stockpiles and mine production: an application of separable and goal programming to phosphate mining using AMPL/CPLEX. *CIM Bulletin*, 92 (1030): 61–64 (1999).
- Tabesh, M., Askari-Nasab, H., Peroni, R.: A comprehensive approach to strategic open pit mine planning with stockpile consideration. In *Proceedings of the Thirty-seventh international symposium on applications of computers and operations research in mineral industry*, 326–332. Society for Mining, Metallurgy and Exploration (2015).
- Tabesh, M., Askari-Nasab, H.: Two-stage clustering algorithm for block aggregation in open pit mines. *Mining Technology*, 120 : 158–169 (2011).
- Tachefine, B.: Méthode d'optimisation pour la planification de la production dans une mine à ciel ouvert. Ph.D. thesis, École Polytechnique de Montréal, QC (1997).
- Topal, E.: Advanced underground mine scheduling using mixed integer programming. Ph.D. thesis, Colorado School of Mines, Golden, CO (2003).
- Vallée, M.: Mineral resource + engineering, economic and legal feasibility = ore reserve. *CIM Bulletin*, 93(1038): 53-61 (2000).
- Wang, T. and de Neufville, R.: Real options 'in' projects, *Proceedings 9th Real Options Annual International Conference*, Paris, France, June 2005, Real Options Group. Accessed online at: [http://www.realoptions.org/papers2005/Tao\\_Wang\\_RO\\_in\\_projects.pdf](http://www.realoptions.org/papers2005/Tao_Wang_RO_in_projects.pdf) (2005).
- Wang, T., de Neufville, R.: Identification of real options 'in' projects, *Proceedings 16th Annual International Symp. of the International Council on Systems Engineering (INCOSE)*, Orlando, FL, USA, July 2006, INCOSE. Accessed online at: [http://ardent.mit.edu/real\\_options/Real\\_opts\\_papers/Identification%20of%20Real%20Options%20in%20Projects%20INCOSE.pdf](http://ardent.mit.edu/real_options/Real_opts_papers/Identification%20of%20Real%20Options%20in%20Projects%20INCOSE.pdf) (2006).

- Whittle Programming. Gemcom Whittle User Help v4.4, Section: Stockpiles – General discussion (2010).
- Whittle, J.: A decade of open pit mine planning and optimization – the craft of turning algorithms into packages. APCOM'99 Computer Applications in the Minerals Industries 28th International Symposium, Colorado School of Mines, Golden, CO (1999).
- Whittle, J.: Beyond optimization in open pit design. Proceedings Canadian Conference on Computer Applications in the Mineral Industries, Rotterdam, pp 331–337 (1988).
- Whittle, J.: The Global Optimiser Works—What Next? Advances in Applied Strategic Mine Planning, Springer International Publishing, Cham, 31-37. DOI: 10.1007/978-3-319-69320-0\_3 (2018).
- Yarmuch, J., Ortiz, J.: A novel approach to estimate the gap between the middle- and short-term plans. In Proceedings, 35th APCOM symposium 2011 - Application of Computers and Operations Research in the Minerals Industry, 24-30 September 2011, University of Wollongong, WA, Australia. (2011).
- Zhang J., Dimitrakopoulos R.: Optimising a Mineral Supply Chain Under Uncertainty with Long-Term Sales Contracts. In: Dimitrakopoulos R. (eds) Advances in Applied Strategic Mine Planning. Springer, Cham. DOI: 10.1007/978-3-319-69320-0\_45 (2018).
- Zuckerberg, M., Stone, P., Pasyar, R., Mader, E.: Joint ore extraction and in-pit dumping optimization. Orebody Modelling and Strategic Mine Planning: Uncertainty and Risk Management Models (2nd ed), Australasian Institute of Mining and Metallurgy (AusIMM), 137-140 (2007).



## ANNEXE A DESCRIPTION DE L'ALGORITHME DE BIENSTOCK-ZUCKERBERG

Le problème de planification minière peut s'apparenter à un problème d'ordonnancement de la production avec contraintes de ressources. À ce dernier, on peut associer un graphe orienté  $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$  où  $\mathcal{N}$  représente l'ensemble des tâches à planifier et les arcs  $\mathcal{A}$  représentent les relations de précédences existantes entre les différentes tâches. Tout arc  $(i, j)$  se traduit par le fait que la tâche  $i$  ne peut se faire avant la tâche  $j$ .

Soit  $y_{j,t} \in \{0,1\}$  la variable de décision qui prend 1 si la tâche  $j$  est ou a déjà été traitée à la période  $t$ , 0 sinon. Soit  $p^t y$  la fonction objectif du problème et  $Dy \leq d$  les contraintes dites de ressource. Le problème peut alors s'écrire sous une forme compacte telle que présentée dans ce qui suit:

$$(P_1) \left\{ \begin{array}{l} \max p^t y \\ s. t \ y_i \leq y_j, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{A} \\ Dy \leq d \\ y \in \{0,1\}^n \end{array} \right.$$

Ce problème dispose d'une structure particulière qui représente le fondement même de l'algorithme de Bienstock-Zuckerberg. En effet, une fois les contraintes de ressources relaxées, on obtient un problème de fermeture maximale qui peut être efficacement résolu en utilisant un algorithme approprié tel que le pseudo-flot proposé par Hochbaum (2008). Ensuite, pour cette classe de problème le gap d'intégralité reste petit. Ainsi, la solution fractionnaire obtenue par l'algorithme représente une borne supérieure très proche de la solution entière optimale. Enfin, contrairement aux méthodes de relaxation Lagrangienne qui requièrent plusieurs itérations et qui convergent très lentement, l'algorithme de Bienstock-Zuckerberg utilise l'information du dual pour réduire efficacement la taille du problème. En effet, Bienstock et Zuckerberg (2010) prouvent dans leur article que la solution optimale du problème ne peut atteindre plus que  $l+2$  valeurs distinctes,  $l$  étant le nombre de lignes linéairement indépendante dans la matrice des contraintes des ressources  $D$ . Ce chiffre demeure relativement petit pour cette classe de problème. Ainsi, à chaque itération  $k$ , le domaine de solutions du problème peut être restreint à l'espace linéaire généré par une matrice  $G^k$  qui oblige les variables correspondant aux entrées non nulles de chaque colonne à être égales. Cela ressemble à une opération d'agrégation dans le sens que cela entraîne une réduction significative

du nombre de variables, mais en diffère par la conservation des propriétés individuelles de chacune des tâches.  $G^k$  est mise à jour à chaque itération après la résolution du problème de fermeture maximale pour générer  $G^{k+1}$ , cette procédure est appelée «raffinage». L'algorithme 1 reprend plus formellement les étapes de cet algorithme.

### Algorithme 1: Algorithme Bienstock-Zuckerberg

**Input:** un problème linéaire pouvant s'écrire sous cette forme compacte:

$$(P_1) \left\{ \begin{array}{l} \max p^t y \\ s. t. Ay \leq b \\ Dy \leq d \\ 0 \leq y \leq 1 \end{array} \right.$$

Où les contraintes  $Ay \leq b$  représentent les contraintes de précédence et  $Dy \leq d$  les contraintes dites de ressource.

Ensuite,  $S_k$  représentera la partition des nœuds  $\mathcal{N}$  à chaque itération  $k$  où  $|S_k|$  est le nombre d'ensembles qui forment la partition  $S_k$ . Chaque  $S_k^h$  de la partition est un ensemble de nœuds où  $1 \leq h \leq |S_k|$ .

1.  $\lambda_0 \leftarrow 0$ ,  $S_0^1 \leftarrow \mathcal{N}$  et  $S_0 \leftarrow \{S_0^1\}$ ,  $k \leftarrow 1$
2. Résoudre le problème  $L(P_1, \lambda_{k-1})$  qui est une relaxation Lagrangienne du  $P_1$  associée aux multiplicateurs  $\lambda_{k-1}$  et ayant cette forme :

$$L(P_1, \lambda_{k-1}) \left\{ \begin{array}{l} \max p^t y + \lambda_{k-1}(d - Dy) \\ s. t. Ay \leq b \\ 0 \leq y \leq 1 \end{array} \right.$$

3. Soit  $y^k$  la solution optimale de  $L(P_1, \lambda_{k-1})$ . On définit alors deux ensembles:  $I^k = \{i \in \mathcal{N} \mid y_i^k = 1\}$  et  $O^k = \{i \in \mathcal{N} \mid y_i^k = 0\}$
4. Définir la nouvelle partition  $S_k$  qui représente l'union de tous les ensembles non vides dans  $\{S_{k-1}^h \cap I^k \mid 1 \leq h \leq |S_{k-1}|\} \cup \{S_{k-1}^h \cap O^k \mid 1 \leq h \leq |S_{k-1}|\}$ . Si  $k > 1$  et la partition ne change plus, **STOP** et retourner  $x^{k-1}$  comme solution optimale du programme linéaire  $P_1$ .
5. Résoudre  $P_2^k$  qui correspond au problème  $P_1$  auquel on ajoute les contraintes de regroupement  $y_i = y_j$  pour chaque pair  $(i, j)$  dans  $S_k^h$  pour  $1 \leq h \leq |S_k|$ .

6. Soit  $x^k$  la solution optimale de  $P_2^k$  et  $\lambda_k$  les valeurs duales correspondant aux contraintes de ressources  $Dy \leq d$ . Si celles-ci ne changent pas d'une itération à une autre, **STOP** et retourner  $x^k$  comme solution optimale du  $P_1$ .
7.  $k \leftarrow k+1$  et retourner à l'étape 2 après avoir appliqué une *coarsification*<sup>1</sup> si nécessaire.

---

<sup>1</sup> Remarque: pour éviter une croissance intraitable de la taille de la matrice, la « coarsification » de  $S_k$  est appliquée en fusionnant les ensembles  $S_k^h$  avec des valeurs communes dans  $x^k$  uniquement lorsque la taille de  $S_k$  dépasse  $l + 2$  (où  $l$  est le nombre de lignes linéairement indépendantes de la matrice  $D$ ).

## ANNEXE B CHANGEMENTS POSSIBLES

