



(Cahiers Mathématiques de l'Université de Sherbrooke)

**Titre :** Frises alternées

**Auteur(s) :** David Racicot-Desloges

**Revue :** CaMUS (Cahiers Mathématiques de l'Université de Sherbrooke)

**Volume :** 4

**Année :** 2013

**Pages :** 27-47

**Éditeur :** Université de Sherbrooke. Département de Mathématiques

**URI :** Repéré à : <http://camus.math.usherbrooke.ca/revue.html>

*Page vide laissée intentionnellement*

# Frises alternées

David Racicot-Desloges

**RÉSUMÉ** Les *frises* telles qu'introduites par Conway et Coxeter peuvent être définies alternativement en utilisant la notion de répétition de carquois de type  $\mathbb{A}_n$ . Cet article propose une définition semblable pour un sous-cas non trivial de *c-frises* (telles qu'introduites dans [BRS13]). Ces frises, dites *frises alternées*, possèdent certaines propriétés particulières qui sont exposées. Il est aussi expliqué de quelle manière les frises alternées sont liées aux frises de Conway et Coxeter (et, par le fait même, aux triangulations de polygones).

## 1 Introduction

Les frises sont introduites comme objet mathématique par Coxeter dans [Cox71] et sont étudiées par Conway et Coxeter dans [CC73a, CC73b]. Elles connaissent un regain d'intérêt au début des années 2000 avec l'introduction des algèbres amassées par Fomin et Zelevinsky (voir [FZ02, FZ03]), puisqu'elles permettent de calculer les variables amassées des algèbres amassées de type  $\mathbb{A}_n$  (voir [ARS10] pour plus de détails). Les frises de Conway et Coxeter sont un cas particulier de *c-frises*, introduites dans [BRS13] dans le but d'étudier une nouvelle classe d'algèbres amassées à coefficients.

L'objectif de cet article est d'étudier un autre cas particulier des *c-frises* : les frises alternées. Afin de définir adéquatement ces frises, certaines notions sur les carquois sont d'abord rappelées. La suite de l'article est consacrée à expliciter les principales propriétés des frises alternées, particulièrement une condition suffisante pour qu'une frise alternée soit uniquement composée d'éléments non nuls, ainsi qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une frise alternée soit uniquement composée d'entiers. La dernière section est consacrée à expliquer les liens qui existent entre les frises alternées et les frises de Conway et Coxeter et, par le fait même, entre les frises alternées et les triangulations de polygones convexes (au sens de [CC73a, CC73b]).

---

Cet article a été rédigé dans le cadre d'un stage de recherche de premier cycle à l'Université de Sherbrooke. Je remercie la Faculté des sciences de l'Université de Sherbrooke pour le financement, ainsi que le professeur Ibrahim Assem pour le financement et sa supervision vivement appréciée. Je tiens aussi à remercier chaleureusement Véronique Bazier-Matte et Tanna Sánchez, avec qui ce travail a été effectué.

## 2 Carquois

L'objectif de cette section est de rappeler au lecteur certaines notions sur les carquois, afin d'établir un cadre adéquat pour définir les frises alternées.

**Définition 2.1.** Un carquois  $Q$  est un quadruplet  $(Q_0, Q_1, s, b)$ , où  $Q_0$  est un ensemble dont les éléments sont appelés *sommets*,  $Q_1$  est un ensemble dont les éléments sont appelés *flèches* et  $s$  et  $b$  sont des fonctions  $Q_1 \rightarrow Q_0$  qui associent respectivement une *source* et un *but* à chaque flèche de  $Q$ .

**Définition 2.2.** Un carquois est *fini* s'il admet un nombre fini de sommets et de flèches.

**Définition 2.3.** Dans un carquois, un *chemin*  $c$  est une suite finie de flèches  $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$  telles que  $s(\alpha_{k+1}) = b(\alpha_k)$  pour tout  $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ .

**Définition 2.4.** Un *cycle orienté* est un chemin  $c = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$  tel que  $s(\alpha_1) = b(\alpha_n)$ . Un carquois sans cycle orienté est dit *acyclique*.

**Exemple 2.5.** Le célèbre carquois de Kronecker,

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} 2 ,$$

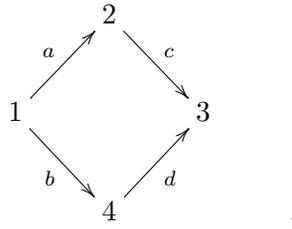
est tel que  $Q_0 = \{1, 2\}$ ,  $Q_1 = \{\alpha, \beta\}$ ,  $s(\alpha) = s(\beta) = 1$  et  $b(\alpha) = b(\beta) = 2$ . Ce carquois est fini et acyclique.

**Exemple 2.6.** Par exemple, le carquois

$$Q = \alpha \curvearrowright 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta} \\ \xleftarrow{\gamma} \end{array} 2 \curvearrowleft \delta$$

est tel que  $Q_0 = \{1, 2\}$  et  $Q_1 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ . On a aussi  $s(\alpha) = s(\beta) = 1$ ,  $s(\gamma) = s(\delta) = 2$ ,  $b(\alpha) = b(\gamma) = 1$  et  $b(\beta) = b(\delta) = 2$ . Ce carquois est fini, mais n'est pas acyclique. En particulier, le chemin  $c = \beta\gamma$  est un cycle orienté.

**Exemple 2.7.** Le carquois  $Q$ , donné par



est tel que  $Q_0 = \{1, 2, 3, 4\}$  et  $Q_1 = \{a, b, c, d\}$ . Il est fini et acyclique.

*Remarque 2.8.* Soit  $Q$  un carquois tel que  $|Q_0| = n$ . Pour le reste de l'article, on conviendra de numéroter les sommets de  $Q$  de 1 à  $n$ , afin d'uniformiser la notation.

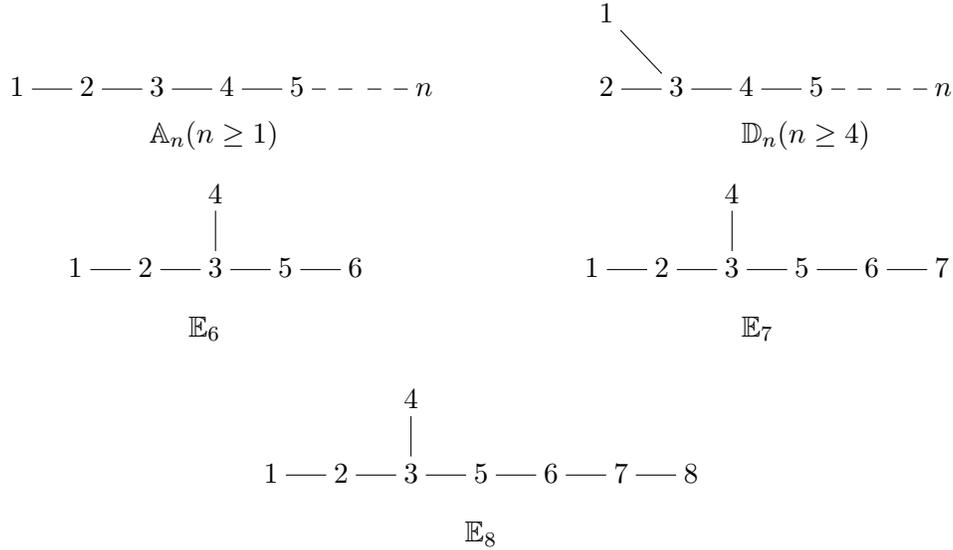


FIGURE 1 – Graphes de type Dynkin  $A_n$ ,  $D_n$ ,  $E_6$ ,  $E_7$  et  $E_8$

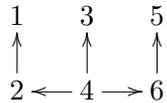
On rappelle au lecteur qu’un graphe est de type Dynkin  $A_n$ ,  $D_n$ ,  $E_6$ ,  $E_7$  ou  $E_8$ , respectivement, s’il est tel qu’explicité dans la figure 1.

*Remarque 2.9.* L’indice d’un graphe de type Dynkin indique son nombre de sommets.

**Définition 2.10.** Un carquois est de *type Dynkin* si et seulement si il est une orientation des graphes  $A_n$ ,  $D_n$ ,  $E_6$ ,  $E_7$  ou  $E_8$ .

**Exemple 2.11.**

a) Le carquois donné par



est de type Dynkin, puisqu’il est une orientation de  $E_6$ .

b) Les carquois linéairement orientés,

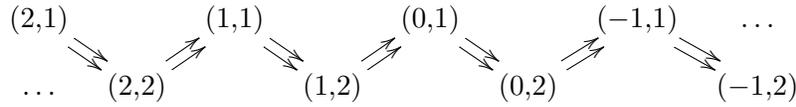
$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \cdots \longrightarrow n ,$$

sont de type Dynkin, puisqu’ils sont une orientation d’un graphe de type  $A_n$ . Dans le reste de l’article, ces carquois sont notés  $\overrightarrow{A}_n$  (à la manière de [Cha12]). On convient de numérotter les sommets d’un carquois linéairement orienté comme dans l’exemple ci-dessus.

**Définition 2.12.** On définit la *répétition*  $\mathbb{Z}Q = ((\mathbb{Z}Q)_0, (\mathbb{Z}Q)_1)$  d'un carquois  $Q = (Q_0, Q_1, s, b)$ , par :

$$\begin{aligned} (\mathbb{Z}Q)_0 &= \mathbb{Z} \times Q_0 = \{(k, i) \mid k \in \mathbb{Z}, i \in Q_0\} \text{ et} \\ (\mathbb{Z}Q)_1 &= \{(k, \alpha) : (k, i) \rightarrow (k, j) \mid k \in \mathbb{Z}, \alpha : i \rightarrow j\} \cup \\ &\quad \{(k, \alpha') : (k, j) \rightarrow (k-1, i) \mid k \in \mathbb{Z}, \alpha : i \rightarrow j\}. \end{aligned}$$

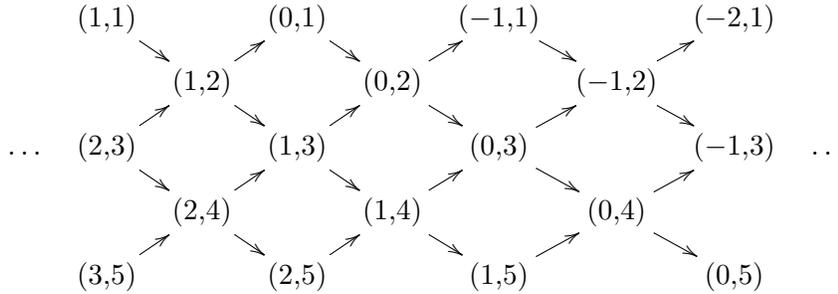
**Exemple 2.13.** La répétition du carquois de Kronecker est :



**Exemple 2.14.** La répétition du carquois

$$\overrightarrow{\mathbb{A}}_5 = 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$$

est :



### 3 Fonction de frises alternées

Cette section est consacrée à la construction de la fonction de frises alternées. Afin d'y parvenir, il est préalablement abordé la notion de fonction de frises monotones (dans le sens de [BRS13]), un cas général des frises alternées.

#### 3.1 Frises monotones

**Définition 3.1.** Soit  $Q$  un carquois fini et acyclique,  $K$  un corps ordonné et  $c \in K_*$  une constante telle que  $|c|^{\frac{n+1}{2}} \in K_*$ . Une *fonction de frise monotone*  $f$  est une fonction  $f : (\mathbb{Z}Q)_0 \rightarrow K$ , telle que :

$$f(k, i)f(k+1, i) = \begin{cases} (-c)^i + \prod_{(l, j) \rightarrow (k, i)} f(l, j) & \text{pour tout } i < n \\ (-c)^i + (-\text{signe}(c))^{\mu(k)} |c|^{\frac{n+1}{2}} \prod_{(l, j) \rightarrow (k, i)} f(l, j) & \text{pour } i = n, \end{cases}$$



*Remarque 3.4.* Dans la suite de l'article, seules les frises monotones sur les carquois  $\vec{\mathbb{A}}_n$  sont considérées. Ainsi, l'appellation *frise monotone* désigne automatiquement une frise monotone obtenue à partir d'un tel carquois. Puisqu'il n'y a plus d'ambiguïté, il est dorénavant omis de dessiner les flèches dans les frises. Ainsi, la frise monotone de l'exemple précédent est maintenant représentée par :

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & & -12 & & 1 & & -12 & & 3 & & -2 & & \\ \dots & & -8 & & -8 & & -8 & & -32 & & -2 & & \dots & & \\ & 64 & & -4 & & 48 & & -20 & & 16 & & -16 & & \\ & & 24 & & 16 & & 112 & & 8 & & 96 & & & & \end{array}$$

**Exemple 3.5.** Voici une frise monotone sur le corps  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ , obtenue avec  $c = 2$  :

$$\begin{array}{cccccccc} & 3 + \sqrt{2} & & & -3 & & & 4 & & -1 & & & 5 + \frac{\sqrt{2}}{2} & & \\ \dots & & -7 - 3\sqrt{2} & & & -10 & & -2 & & & -3 - \frac{\sqrt{2}}{2} & & \dots & & \\ & 1 + 3\sqrt{2} & & -22 - 10\sqrt{2} & & & 4 & & -2 - \sqrt{2} & & & 6 + 7\sqrt{2} & & \\ & & 2 + 10\sqrt{2} & & & 8 + 4\sqrt{2} & & 2\sqrt{2} & & & 4 + 6\sqrt{2} & & & & \end{array}$$

*Remarque 3.6.* Dans le cas présent, la fonction de frise monotone peut être réécrite comme suit (pour  $n \geq 2$ ) :

$$f(k,i)f(k+1,i) = \begin{cases} (-c) + f(k+1,i+1) & \text{pour } i = 1 \\ (-c)^i + f(k+1,i+1)f(k,i-1) & \text{pour } 1 < i < n \\ (-c)^n + (-\text{signe}(c))^{\mu(k)}|c|^{\frac{n+1}{2}}f(k,i-1) & \text{pour } i = n. \end{cases}$$

*Remarque 3.7.* Lorsque  $c = -1$ , la fonction de frise monotone est beaucoup plus simple. Elle peut être réécrite comme suit (pour  $n \geq 2$ ) :

$$f(k,i)f(k+1,i) = \begin{cases} 1 + f(k+1,i+1) & \text{pour } i = 1 \\ 1 + f(k+1,i+1)f(k,i-1) & \text{pour tout } 1 < i < n \\ 1 + f(k,i-1) & \text{pour } i = n. \end{cases}$$

Ces frises sont celles de Conway et Coxeter (voir [CC73a] et [CC73b]), aussi étudiées par Fraser Martineau et Lavertu (voir [FL10]).

### 3.2 Frises alternées

**Définition 3.8.** Une frise monotone sur  $\mathbb{Q}$  est dite *alternée* si et seulement si  $c = 1$ . Une frise alternée obtenue à partir d'un carquois  $\mathbb{A}_n$  (c'est-à-dire ayant  $n$  sommets) sera dite d'*ordre*  $n$ .

**Exemple 3.9.** Voici un exemple de frise alternée :

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \dots & & 1 & & 1 & & -1 & & -3 & & \frac{2}{5} & & -5 & & \frac{2}{5} & & -1 & & -1 & & & & \\ & \frac{3}{5} & & 2 & & 0 & & 4 & & -\frac{1}{5} & & -\frac{2}{5} & & -1 & & -1 & & \frac{3}{5} & & 2 & & 0 & & \dots \\ & & \frac{1}{5} & & -1 & & 1 & & \frac{3}{5} & & -2 & & 0 & & 4 & & -\frac{1}{5} & & 1 & & & & \\ & & 3 & & \frac{2}{5} & & 5 & & \frac{2}{5} & & 1 & & -1 & & -1 & & 3 & & \frac{2}{5} & & 1 & & \end{array}$$

**Exemple 3.10.** Voici un autre exemple de frise alternée :

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & 1 & -2 & 3 & -1 & 4 & -1 & 2 & -4 & 1 & & \\
 & -3 & -1 & -5 & -2 & -3 & -3 & -1 & -7 & -3 & -1 & \\
 \dots & 2 & -2 & 3 & -5 & 2 & -2 & 3 & -5 & 2 & \dots & \\
 & 3 & 3 & 1 & 7 & 3 & 1 & 5 & 2 & 3 & 3 & \\
 & 4 & -1 & 2 & -4 & 1 & -2 & 3 & -1 & 4 & & 
 \end{array}$$

*Remarque 3.11.* La fonction de frise alternée est la suivante (pour  $n \geq 2$ ) :

$$f(k,i)f(k+1,i) = \begin{cases} -1 + f(k+1,i+1) & \text{pour } i = 1 \\ (-1)^i + f(k+1,i+1)f(k,i-1) & \text{pour tout } 1 < i < n \\ (-1)^n + (-1)^{\mu(k)}f(k,i-1) & \text{pour } i = n, \end{cases}$$

$$\text{où } \mu(k) = \begin{cases} 0 & \begin{array}{l} \text{si } n \equiv 0 \pmod{4} \text{ et } k \text{ est impair} \\ \text{si } n \equiv 2 \pmod{4} \text{ et } k \text{ est pair} \\ \text{si } n \equiv 3 \pmod{4} \end{array} \\ 1 & \begin{array}{l} \text{si } n \equiv 0 \pmod{4} \text{ et } k \text{ est pair} \\ \text{si } n \equiv 1 \pmod{4} \\ \text{si } n \equiv 2 \pmod{4} \text{ et } k \text{ est impair.} \end{array} \end{cases}$$

*Remarque 3.12.* Comme conséquence directe de cette fonction de frise, les frises alternées contenant des zéros (par exemple celle de l'exemple 3.9) ne possèdent pas toutes les mêmes propriétés que les frises alternées sans zéros. Ainsi, le présent article n'est consacré qu'aux frises alternées ne contenant aucun zéro. Dans la suite, lorsque l'appellation *frise alternée* est utilisée, c'est donc pour désigner une frise alternée sans zéros. Un des résultats principaux de cet article est une condition suffisante pour construire des frises alternées sans zéros. Pour plus de détails concernant les frises alternées avec zéros, on réfère le lecteur à [BRS13].

À partir de la définition de la fonction de frise alternée, il est possible de déduire que chaque losange, ou *maille*, de la forme

$$\begin{array}{ccc}
 & f(k,i-1) & \\
 f(k+1,i) & & f(k,i) \\
 & f(k+1,i+1) & 
 \end{array} ,$$

est tel que  $f(k,i)f(k+1,i) = f(k,i-1)f(k+1,i+1) + (-1)^i$ . Cette règle est appelée *règle unimodulaire*, puisqu'elle peut être écrite comme étant le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} f(k,i) & f(k,i-1) \\ f(k+1,i+1) & f(k+1,i) \end{vmatrix} = (-1)^i,$$

soit le déterminant d'une matrice de  $GL_2(\mathbb{Q})$ . À partir de la règle unimodulaire, il est possible d'étendre la fonction de frises alternées de deux lignes vers le haut et vers le bas.

**Proposition 3.13.** *On a que :*

a)  $f(k, -1) = 0$  pour tout  $k$  ;

b)  $f(k,0) = 1$  pour tout  $k$  ;

$$c) f(k, n + 1) = \begin{cases} 1 & \begin{array}{l} \text{si } n \equiv 0 \pmod{4} \text{ et } k \text{ est pair} \\ \text{si } n \equiv 2 \pmod{4} \text{ et } k \text{ est impair} \\ \text{si } n \equiv 3 \pmod{4} \end{array} \\ -1 & \begin{array}{l} \text{si } n \equiv 0 \pmod{4} \text{ et } k \text{ est impair} \\ \text{si } n \equiv 1 \pmod{4} \\ \text{si } n \equiv 2 \pmod{4} \text{ et } k \text{ est pair ;} \end{array} \end{cases}$$

d)  $f(k, n + 2) = 0$  pour tout  $k$ .

*Démonstration.* On montre d'abord b) à partir de la règle unimodulaire appliquée à la maille

$$\begin{array}{ccccc} & & f(k,0) & & \\ & & & & \\ f(k+1,1) & & & & f(k,1) \\ & & f(k+1,2) & & \end{array}$$

Pour tout  $k$ , on a que

$$f(k,1)f(k+1,1) = f(k,0)f(k+1,2) - 1,$$

qui peut se réécrire, à partir de la définition de la fonction de frise alternée, comme

$$-1 + f(k+1,2) = f(k,0)f(k+1,2) - 1$$

et cette égalité n'est vérifiée que si  $f(k,0) = 1$ . On montre ensuite a). La règle unimodulaire stipule que, pour tout  $k$ ,

$$f(k,0)f(k+1,0) = f(k, -1)f(k+1,1) + 1.$$

Or, en appliquant la partie b), on a que, pour tout  $k$ ,

$$1 = f(k, -1)f(k+1,1) + 1,$$

d'où

$$f(k, -1) = 0.$$

Les preuves des parties c) et d) sont semblables et sont omises.  $\square$

Ainsi, la frise alternée de l'exemple 3.10 peut être représentée par :

	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		1	-2	3	-1	4	-1	2	-4	1		
-3	-1	-5	-2	-3	-3	-1	-7	-3	-1			
...	2	-2	3	-5	2	-2	3	-5	2	...		
	3	3	1	7	3	1	5	2	3	3		
		4	-1	2	-4	1	-2	3	-1	4		
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

Cette représentation est appelée *frise alternée étendue* dans [FL10]. La même appellation est utilisée dans le présent article.

*Remarque 3.14.* La proposition 3.13 n'est pas vraie si l'on considère les frises alternées avec zéros.

## 4 Propriétés des frises alternées

L'objectif de cette section est d'explicitier les propriétés principales des frises alternées. Celles-ci permettent d'énoncer, dans la section suivante, les résultats principaux pour construire une frise alternée sans zéros et une frise alternée d'entiers. Les résultats suivants sont en majorité des applications de ceux de [BRS13].

### 4.1 Construction

**Définition 4.1.** [ASS06, p. 302] Une *section*  $\Sigma$  d'un carquois  $\mathbb{A}_n$  est un sous-ensemble des sommets de  $\mathbb{A}_n$  tel que  $|\Sigma| = n + 4$  et tel que si  $(k, i) \in \Sigma$ , alors :

- a)  $(k, i - 1) \in \Sigma$  ou bien  $(k - 1, i - 1) \in \Sigma$  et
- b)  $(k + 1, i + 1) \in \Sigma$  ou bien  $(k, i + 1) \in \Sigma$ ,

lorsque ces sommets sont définis.

Une section  $\Sigma$  est dite *diagonale* (dans le sens de [CC73a, CC73b, FL10]) si tous ses éléments sont de la forme  $(k_0, i)$ , avec  $k_0$  fixé.

**Exemple 4.2.** Voici l'image d'une section non diagonale par la frise de l'exemple 3.10 :

				0								
									1			
									-2			
									-1			
		...		2					...			
									3			
									-1			
									-1			
									0			

Voici l'image d'une section diagonale par la même frise :

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 0 & & & & \\
 & & & & & 1 & & & \\
 & & & & & & -2 & & \\
 & & & & & & & -5 & \\
 \dots & & & & & & & & 3 & & \dots \\
 & & & & & & & & & 7 & \\
 & & & & & & & & & & -4 & \\
 & & & & & & & & & & & -1 & \\
 & & & & & & & & & & & & 0
 \end{array}$$

Pour le reste de l'article, l'image d'une section par une frise est simplement appelée la *section* d'une frise.

**Proposition 4.3.** *Une frise alternée est entièrement déterminée par une de ses sections.*

*Démonstration.* Soit  $\Sigma$  cette section. On trace entre deux sommets adjacents de  $\Sigma$  une flèche, orientée de la gauche vers la droite. Le carquois résultant est une orientation de  $\mathbb{A}_n$  et admet par conséquent au moins une source  $(k, i)$ . Puisque  $f(-1, i)$  et  $f(n+1, i)$  sont connus pour tout  $i$ , l'élément  $f(k-1, i)$  est déduit de la règle unimodulaire. En utilisant successivement le même raisonnement sur la nouvelle section  $\Sigma' = (\Sigma \setminus \{(k, i)\}) \cup \{(k-1, i)\}$ , on trouve tous les éléments à droite de la section initiale  $\Sigma$ . En utilisant le même raisonnement avec les puits, on trouve tous les éléments à gauche de  $\Sigma$ .  $\square$

## 4.2 Polynômes continnants d'Euler

**Définition 4.4.** Soit  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}_*}$  une famille dénombrable d'indéterminées. Le  $n^e$  polynôme continuant d'Euler (avec  $n \geq 1$ ) est défini par

$$p_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_n p_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) + p_{n-2}(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}),$$

avec les conditions initiales  $p_{-1} = 0$  et  $p_0 = 1$ .

Par exemple, les premiers polynômes continnants d'Euler sont :

$$\begin{aligned}
 p_1(x_1) &= x_1; \\
 p_2(x_1, x_2) &= x_1 x_2 + 1; \\
 p_3(x_1, x_2, x_3) &= x_1 x_2 x_3 + x_1 + x_3; \\
 p_4(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 + x_1 x_4 + x_3 x_4 + 1.
 \end{aligned}$$

Les résultats suivants montrent que les éléments d'une frise alternée peuvent être exprimés comme l'évaluation de polynômes continnants d'Euler en les éléments sur la première rangée (sans compter les rangées de 0 et de 1).

**Proposition 4.5.** *Pour tout  $k$  et pour tout  $i \geq -1$ , les éléments d'une frise alternée sont tels que*

$$f(k, i) = p_i(x_{k-i+1}, x_{k-i+2}, \dots, x_k),$$

où  $x_l = f(l, 1)$  pour tout  $l$ .

*Démonstration.* Selon la proposition 3.13, on a bien que  $f(k, 0) = 1 = p_0$  pour tout  $k$  et  $f(k, -1) = 0 = p_{-1}$  pour tout  $k$ . La preuve se fait alors par récurrence d'ordre 2 sur  $i$ . Pour  $i = 1$ , on a directement que

$$f(k, 1) = x_k = p_1(x_k) \text{ pour tout } k.$$

Pour  $i = 2$ , on utilise la règle unimodulaire, de sorte que :

$$f(k-1, 1)f(k, 1) = f(k-1, 0)f(k, 2) - 1$$

et, puisque  $f(k, 0) = 1$  pour tout  $k$  et  $f(k-1, 0) = 1$  pour tout  $k$ , on en déduit que

$$\begin{aligned} f(k, 2) &= f(k-1, 1)f(k, 1) + f(k, 0) \\ &= x_{k-1}p_1(x_k) + p_0 \\ &= p_2(x_{k-1}, x_k). \end{aligned}$$

On suppose alors l'énoncé vérifié pour un  $i \geq 2$  et pour  $i-1$ . On veut alors montrer que

$$f(k, i+1) = p_{i+1}(x_{k-i}, x_{k-i+1}, \dots, x_k).$$

En vertu de la règle unimodulaire, on a que

$$f(k, i+1) = \frac{f(k-1, i)f(k, i) + (-1)^{i-1}}{f(k-1, i-1)}$$

qui, en vertu de l'hypothèse de récurrence et de la définition des polynômes continnants d'Euler, donne

$$\begin{aligned} f(k, i+1) &= \frac{p_i(x_{k-i}, \dots, x_{k-1})p_i(x_{k-i+1}, \dots, x_k) + (-1)^{i-1}}{p_{i-1}(x_{k-i+1}, \dots, x_{k-1})} \\ &= \frac{x_k p_{i-1}(x_{k-i+1}, \dots, x_{k-1}) p_i(x_{k-i}, \dots, x_{k-1})}{p_{i-1}(x_{k-i+1}, \dots, x_{k-1})} \\ &\quad + \frac{p_{i-2}(x_{k-i+1}, \dots, x_{k-2}) p_i(x_{k-i}, \dots, x_{k-1}) + (-1)^{i-1}}{p_{i-1}(x_{k-i+1}, \dots, x_{k-1})} \\ &= x_k p_i(x_{k-i}, \dots, x_{k-1}) + \frac{f(k-2, i-2)f(k-1, i) + (-1)^{i-1}}{f(k-1, i-1)}. \end{aligned}$$

En utilisant de nouveau la règle unimodulaire, on obtient que

$$f(k, i+1) = x_k p_i(x_{k-i}, \dots, x_{k-1}) + f(k-1, i-1)$$

qui, en utilisant l'hypothèse de récurrence et la définition des polynômes continnants d'Euler, donne

$$\begin{aligned} f(k, i + 1) &= x_k p_i(x_{k-i}, \dots, x_{k-1}) + p_{i-1}(x_{k-i}, \dots, x_{k-2}) \\ &= p_{i+1}(x_{k-i}, \dots, x_k), \end{aligned}$$

d'où l'énoncé.  $\square$

**Corollaire 4.6.** *Les éléments d'une frise alternée sont tels que*

$$f(k, i) = f(k - i + 1, 1)f(k, i - 1) + f(k, i - 2) \text{ pour tout } i \in \{1, 2, 3, \dots, n + 2\}.$$

*Démonstration.* Il suffit d'utiliser la définition des polynômes continnants d'Euler à la proposition 4.5.  $\square$

*Remarque 4.7.* Les  $c$ -frises sont définies à partir d'une généralisation des polynômes continnants d'Euler dans [BRS13]. Cette définition permet de considérer les frises alternées avec zéros aussi bien que les frises alternées sans zéros.

**Corollaire 4.8.** *Les éléments d'une frise alternée sont tels que*

$$f(k, i) = \begin{vmatrix} f(k, 1) & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & f(k - 1, 1) & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & f(k - 2, 1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(k - i + 1, 1) \end{vmatrix}.$$

*Démonstration.* La preuve se fait par récurrence d'ordre 2 sur  $i$ . Pour  $i = 1$ , l'énoncé est trivial. Pour  $i = 2$ , il suffit d'utiliser la règle unimodulaire pour montrer que

$$f(k, 1)f(k - 1, 1) - f(k, 2)f(k, 0) = -1$$

et, puisque  $f(k, 0) = 1$ , on a bien que

$$f(k, 2) = \begin{vmatrix} f(k, 1) & -1 \\ 1 & f(k - 1, 1) \end{vmatrix}.$$

On suppose alors l'énoncé vérifié pour un  $i \geq 2$  et pour  $i - 1$ . En vertu du

corollaire 4.6, on a que

$$\begin{aligned}
f(k, i + 1) &= f(k - i, 1)f(k, i) + f(k, i - 1) \\
&= f(k - i, 1) \begin{vmatrix} f(k, 1) & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & f(k - 1, 1) & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & f(k - 2, 1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(k - i + 1, 1) \end{vmatrix} \\
&\quad + \begin{vmatrix} f(k, 1) & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & f(k - 1, 1) & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & f(k - 2, 1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(k - i + 2, 1) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} f(k, 1) & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & f(k - 1, 1) & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & f(k - 2, 1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(k - i, 1) \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

d'où l'énoncé.  $\square$

**Corollaire 4.9.** *Les éléments d'une frise alternée sont tels que*

$$f(k, i) = f(k, 1)f(k - 1, i - 1) + f(k - 2, i - 2) \text{ pour tout } i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}.$$

*Démonstration.* La preuve se fait par récurrence d'ordre 2 sur  $i$ , en développant le déterminant du corollaire 4.8 selon la première colonne, puis selon la première ligne.  $\square$

**Lemme 4.10.** *Pour tout  $k$  et pour tout  $i \in \{1, 2, 3, \dots, n + 2\}$ , on a :*

$$a) f(k, 1) = \frac{f(k+i-1, i) - f(k+i-1, i-2)}{f(k+i-1, i-1)},$$

$$b) f(k, 1) = \frac{f(k, i) - f(k-2, i-2)}{f(k-1, i-1)}.$$

*Démonstration.* Pour la partie a), on utilise le corollaire 4.6, de sorte que

$$\begin{aligned}
&\frac{f(k+i-1, i) - f(k+i-1, i-2)}{f(k+i-1, i-1)} \\
&= \frac{f(k, 1)f(k+i-1, i-1) + f(k+i-1, i-2) - f(k+i-1, i-2)}{f(k+i-1, i-1)} \\
&= f(k, 1).
\end{aligned}$$

Le preuve de la partie b) est semblable et est omise.  $\square$

### 4.3 Périodicité des frises alternées

Le résultat suivant stipule qu'une frise alternée est toujours périodique. Pour le démontrer, il faut d'abord prouver les trois lemmes suivants.

**Lemme 4.11.** *Dans une frise alternée, les éléments de la première et de la dernière rangée (sans compter les rangées de 0 et de 1) sont liés entre eux de la manière suivante :*

$$f(2k+n+1,n) = \begin{cases} f(2k,1) & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4} \\ f(2k,1) & \text{si } n \equiv 1 \pmod{4} \\ -f(2k,1) & \text{si } n \equiv 2 \pmod{4} \\ -f(2k,1) & \text{si } n \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

et

$$f(2k+n+2,n) = \begin{cases} -f(2k+1,1) & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4} \\ f(2k+1,1) & \text{si } n \equiv 1 \pmod{4} \\ f(2k+1,1) & \text{si } n \equiv 2 \pmod{4} \\ -f(2k+1,1) & \text{si } n \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

*Démonstration.* En utilisant le lemme 4.10 a), on a que

$$f(2k,1) = \frac{f(2k+n+1,n+2) - f(2k+n+1,n)}{f(2k+n+1,n+1)}.$$

Or, puisque

$$f(2k+n+1,n+2) = 0$$

et

$$f(2k+n+1,n+1) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 2 \pmod{4} \text{ ou si } n \equiv 3 \pmod{4} \\ -1 & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4} \text{ ou si } n \equiv 1 \pmod{4}, \end{cases}$$

on a bien que

$$f(2k+n+1,n) = \begin{cases} f(2k,1) & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4} \\ f(2k,1) & \text{si } n \equiv 1 \pmod{4} \\ -f(2k,1) & \text{si } n \equiv 2 \pmod{4} \\ -f(2k,1) & \text{si } n \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

La preuve est semblable pour  $f(2k+n+2,n)$  et est omise.  $\square$

**Lemme 4.12.** *Dans une frise alternée, les éléments de la première et de la dernière rangée (sans compter les rangées de 0 et de 1) sont liés entre eux de la manière suivante :*

$$f(2k-2,n) = \begin{cases} f(2k,1) & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4} \\ f(2k,1) & \text{si } n \equiv 1 \pmod{4} \\ -f(2k,1) & \text{si } n \equiv 2 \pmod{4} \\ -f(2k,1) & \text{si } n \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

et

$$f(2k-1, n) = \begin{cases} -f(2k+1, 1) & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4} \\ f(2k+1, 1) & \text{si } n \equiv 1 \pmod{4} \\ f(2k+1, 1) & \text{si } n \equiv 2 \pmod{4} \\ -f(2k+1, 1) & \text{si } n \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

*Démonstration.* La démonstration est semblable à celle du lemme 4.11, mais on utilise la partie b) du lemme 4.10, plutôt que la partie a).  $\square$

**Corollaire 4.13.** *Les éléments de la première rangée d'une frise (sans compter les 0 et les 1) sont tels que*

$$f(k+n+3, 1) = \begin{cases} -f(k, 1) & \text{si } n \text{ est pair} \\ f(k, 1) & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

*Démonstration.* L'énoncé découle directement des lemmes 4.11 et 4.12.  $\square$

**Théorème 4.14.** *Toute frise alternée est périodique et sa période est un diviseur de  $2n+6$ .*

*Démonstration.* Comme conséquence directe du corollaire 4.13, on trouve que

$$f(k+2n+6, 1) = f(k, 1) \text{ pour tout } k,$$

ce qui montre que la première rangée est périodique et que sa période est un diviseur de  $2n+6$ . La règle unimodulaire permet de montrer récursivement, en commençant par la deuxième rangée, que la frise en entier est périodique et que sa période est un diviseur de  $2n+6$ .  $\square$

**Proposition 4.15.** *Une frise alternée est entièrement déterminée par  $n+3$  éléments consécutifs sur la première rangée.*

*Démonstration.* Comme conséquence directe du corollaire 4.13, tous les éléments de la première rangée sont déterminés à partir de  $n+3$  éléments consécutifs. Les autres éléments sont déduits à partir du corollaire 4.8.  $\square$

**Corollaire 4.16.** *Une frise alternée est entièrement déterminée par  $n+3$  éléments consécutifs sur la dernière rangée.*

*Démonstration.* À partir du lemme 4.11,  $n+3$  éléments consécutifs de la première rangée sont déterminés à partir de  $n+3$  éléments consécutifs sur la dernière rangée. L'énoncé découle alors de la proposition 4.15.  $\square$



**Théorème 5.4.** *Une frise alternée est composée uniquement d'entiers si et seulement s'il existe une section diagonale de cette frise qui est telle que, pour tout  $i \in \{1, 2, 3, \dots, n + 2\}$ ,*

a)  $f(k_0, i) \in \mathbb{Z}_*$  et

b)  $f(k_0, i - 1) \mid (f(k_0, i) - f(k_0, i - 2))$ .

*Démonstration.* Comme conséquence directe du lemme 4.10 b), on a que  $f(k, 1) \in \mathbb{Z}$  pour tout  $k \in \{k_0, k_0 + 1, k_0 + 2, \dots, k_0 + n + 1\}$ . À partir du corollaire 4.8, on déduit alors que  $f(k_0 + 1, n) \in \mathbb{Z}$  et, avec le lemme 4.11, on trouve que  $f(k_0 + n + 2, 1) \in \mathbb{Z}$ . À partir du corollaire 4.13, on a donc que  $f(k_0 + l, 1) \in \mathbb{Z}$  pour tout  $l$ . Le corollaire 4.8 assure que tous les éléments de la frise sont des entiers. Cela montre la nécessité. La suffisance est triviale.  $\square$

## 6 Lien avec les frises de Conway et Coxeter

Comme mentionné auparavant, les frises de Conway et Coxeter (voir [CC73a, CC73b, FL10]) sont les frises monotones obtenues avec  $c = -1$ . Dans cette section, il est exposé en quoi elles sont liées aux frises alternées.

**Lemme 6.1.** *Pour chaque frise de Conway et Coxeter  $f^*$ , il existe une frise alternée  $f$  ayant le même domaine et telle que :*

$$f(k, i) = \begin{cases} & \text{si } i \equiv 0 \pmod{4} \\ f^*(k, i) & \text{si } i \equiv 1 \pmod{4} \text{ et } k \text{ est pair} \\ & \text{si } i \equiv 3 \pmod{4} \text{ et } k \text{ est impair} \\ \\ -f^*(k, i) & \text{si } i \equiv 1 \pmod{4} \text{ et } k \text{ est impair} \\ & \text{si } i \equiv 2 \pmod{4} \\ & \text{si } i \equiv 3 \pmod{4} \text{ et } k \text{ est pair.} \end{cases}$$

*Démonstration.* On réfère le lecteur au théorème 7.3 de [BRS13, p. 18].  $\square$

*Remarque 6.2.* Remarquez que les éléments de la frise de Conway et Coxeter et de sa frise alternée correspondante sont les mêmes, en valeur absolue.

**Théorème 6.3.** *Pour chaque frise d'entiers positifs de Conway et Coxeter  $f^*$ , il existe une frise alternée  $f$  d'entiers non nuls ayant le même domaine et telle que :*

$$f(k, i) = \begin{cases} & \text{si } i \equiv 0 \pmod{4} \\ f^*(k, i) & \text{si } i \equiv 1 \pmod{4} \text{ et } k \text{ est pair} \\ & \text{si } i \equiv 3 \pmod{4} \text{ et } k \text{ est impair} \\ \\ -f^*(k, i) & \text{si } i \equiv 1 \pmod{4} \text{ et } k \text{ est impair} \\ & \text{si } i \equiv 2 \pmod{4} \\ & \text{si } i \equiv 3 \pmod{4} \text{ et } k \text{ est pair.} \end{cases}$$

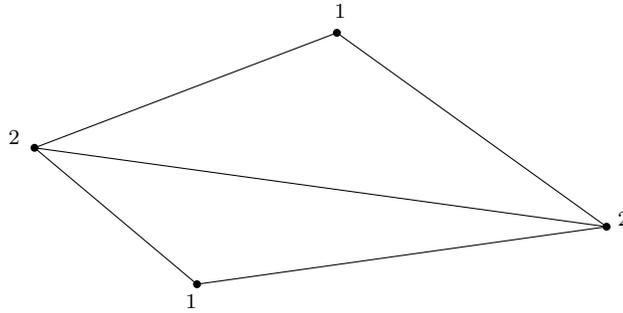
*Démonstration.* Il s'agit d'une conséquence directe du lemme 6.1 et de la remarque précédente.  $\square$

On rappelle au lecteur la définition de triangulation de polygone convexe (au sens de [CC73a, CC73b]).

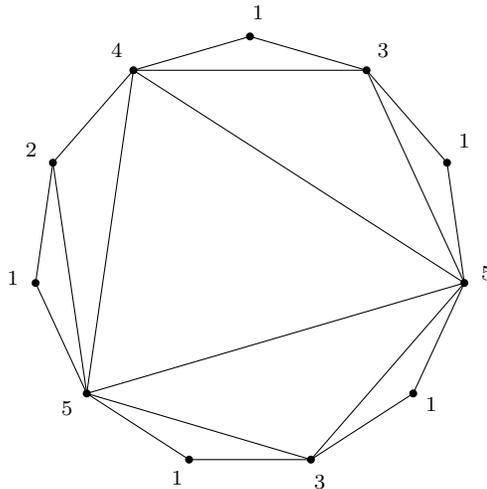
**Définition 6.4.** Soit  $P$  un polygone convexe à  $m \geq 4$  sommets. Une *triangulation* de  $P$  est un découpage de  $P$  en  $m - 2$  triangles par  $m - 3$  diagonales non sécantes (à l'intérieur du polygone).

*Remarque 6.5.* Soit  $S_0$  un sommet quelconque d'un polygone convexe  $P$  à  $m$  sommets et  $S_i$ , avec  $i \in \{1, 2, \dots, m - 1\}$ , les autres sommets de  $P$ , de sorte que  $S_i$  soit adjacent à  $S_{i-1}$  pour tout  $i$ . Dans une triangulation, on étiquette chaque sommet  $S_i$  par le nombre de triangles qui lui sont incidents. On note cette valeur  $\delta_i$ . Deux triangulations sont dites équivalentes s'il existe une numérotation adéquate de leurs sommets respectifs telle qu'elles admettent la même suite d'étiquettes  $(\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{m-1})$ .

**Exemple 6.6.** L'unique triangulation du quadrilatère est étiquetée de la sorte :



**Exemple 6.7.** Une des triangulations de l'hendécagone est telle que :



Dans [CC73b, p. 180-181], il est montré que les frises de Conway et Coxeter d'entiers positifs d'ordre  $n$  sont en bijection avec les triangulations de polygones convexes à  $n + 3$  sommets. À partir du théorème 6.3, il est naturel d'étendre ce résultat aux frises alternées d'entiers non nuls.

**Théorème 6.8.** *Pour chaque triangulation de polygone convexe à  $n + 3$  sommets, il existe une frise alternée d'entiers non nuls d'ordre  $n$ , donnée par :*

$$\begin{cases} f(k,1) = \delta_k & \text{pour tout } k \text{ pair} \\ f(k,1) = -\delta_k & \text{pour tout } k \text{ impair,} \end{cases}$$

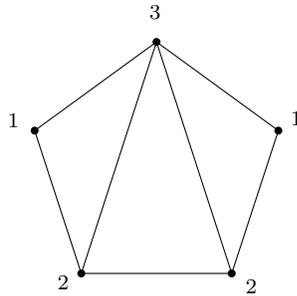
où  $k \in \{0,1,2, \dots, n + 2\}$ .

*Démonstration.* La démonstration découle directement du théorème 6.3 et du résultat de Conway et Coxeter dans [CC73b, p. 180-181]. La frise résultante est uniquement déterminée, selon la proposition 4.15.  $\square$

*Remarque 6.9.* Les frises alternées construites à partir de triangulations de polygones respectent la condition du théorème 5.1 pour avoir une frise alternée d'éléments non nuls.

*Remarque 6.10.* Une triangulation de polygone convexe ayant un nombre impair de sommets n'aura qu'une seule frise alternée associée par le théorème 6.8, alors qu'une triangulation de polygone convexe ayant un nombre pair de sommets en aura deux.

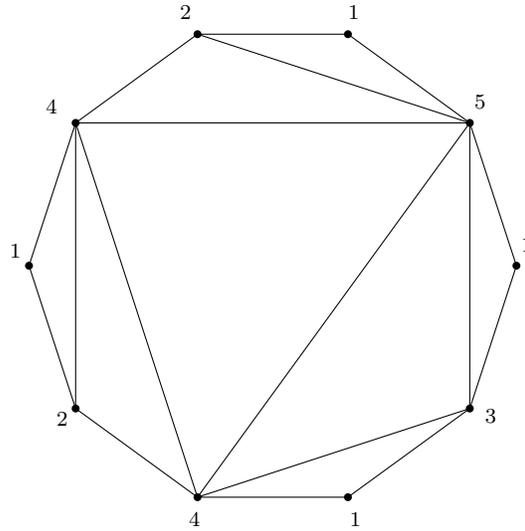
**Exemple 6.11.** À partir de l'unique triangulation du pentagone,



on peut obtenir la frise alternée suivante :

	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
...	1	-2	2	-1	3	-1	2	-2	1	-2	1	...
	-2	-1	-3	-1	-2	-2	-1	-3	-1			
	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1			
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		

**Exemple 6.12.** À partir de la triangulation suivante du décagone :



on peut obtenir les deux frises alternées

	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	-5	1	-3	1	-4	2	-1	4			
	-1	-4	-4	-2	-2	-3	-7	-1	-3	-7		
		3	-3	7	-1	5	-5	3	-2	5		
...	8	2	5	3	2	8	2	5	3	2	...	
		5	-3	2	-5	3	-3	3	-7	1		
	-3	-7	-1	-3	-7	-1	-4	-4	-2	-2		
		4	-2	1	-4	2	-1	5	-1	3		
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		0	0	0	0	0	0	0	0	0		

et

	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	-1	5	-1	3	-1	4	-2	1	-4			
	-1	-4	-4	-2	-2	-3	-7	-1	-3	-7		
		-3	3	-7	1	-5	5	-3	2	-5		
...	8	2	5	3	2	8	2	5	3	2	...	
		-5	3	-2	5	-3	3	-3	7	-1		
	-3	-7	-1	-3	-7	-1	-4	-4	-2	-2		
		-4	2	-1	4	-2	1	-5	1	-3		
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		0	0	0	0	0	0	0	0	0		

Les éléments de ces frises sont les mêmes, en valeur absolue.

## Références

- [ARS10] Ibrahim ASSEM, Christophe REUTENAUER et David SMITH : Friezes. *Adv. Math.*, 225(6):3134–3165, 2010.
- [ASS06] Ibrahim ASSEM, Daniel SIMSON et Andrzej SKOWROŃSKI : *Elements of Representation Theory of Associative Algebras*. London Math. Soc. Student Texts 65, 2006.
- [BRS13] Véronique BAZIER-MATTE, David RACICOT-DESLOGES et Tanna SÁNCHEZ : Friezes and Continuing Polynomials with Parameters. (en préparation), 2013.
- [CC73a] J. H. CONWAY et H. S. M. COXETER : Triangulated polygons and frieze patterns. *Math. Gaz.*, 57(400):87–94, 1973.
- [CC73b] J. H. CONWAY et H. S. M. COXETER : Triangulated polygons and frieze patterns. *Math. Gaz.*, 57(401):175–183, 1973.
- [Cha12] Myriam CHABOT : Fonctions de frises et algèbres amassées. *Revue CaMUS*, 2:78–93, 2012.
- [Cox71] H. S. M. COXETER : Frieze Patterns. *Acta Arith.*, 18:297–310, 1971.
- [FL10] Jean-Sébastien FRASER MARTINEAU et Dominique LAVERTU : Frises et triangulations de polygones. *Revue CaMUS*, 1:39–59, 2010.
- [FZ02] Sergey FOMIN et Andrei ZELEVINSKY : Cluster algebras. I. Foundations. *J. Amer. Math. Soc.*, 15(2):497–529 (electronic), 2002.
- [FZ03] Sergey FOMIN et Andrei ZELEVINSKY : Cluster algebras. II. Finite type classification. *Invent. Math.*, 154(1):63–121, 2003.

DAVID RACICOT-DESLOGES  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE  
Courriel: David.Racicot-Desloges@USherbrooke.ca