CAMUS

(Cahiers Mathématiques de l'Université de Sherbrooke)

Titre : Quaternions et rotations

Auteur(s) : Francis Dusseault-Bélanger

Revue : CaMUS (Cahiers Mathématiques de l'Université de Sherbrooke)

Volume : 1

Année : 2010

Pages : 91-98

Éditeur : Université de Sherbrooke. Département de Mathématiques

URI : Repéré à : http://camus.math.usherbrooke.ca/revue.html

Page vide laissée intentionnellement

CaMUS 1 (2010), 91–98

Quaternions et rotations

Francis Dusseault-Bélanger

Résumé.
Les quaternions sont un outil fort utile pour représenter les rotations dans l'espace. On expliquera donc pourquoi et comment ils sont passés maîtres des mouvements de l'espace allant même surpasser leurs prédecesseurs. Toutefois, on traitera a priori de la construction des quaternions pour en déduire les différentes propriétés analytiques et algébriques de ceux-ci ainsi que leurs différentes représentations.

1. Introduction

L'ensemble des quaternions, noté $\mathbb{H}$, a été introduit au beau milieu du 19^e siècle par le mathématicien irlandais Sir William Rowan Hamilton afin de présenter un moyen plus efficace de manipuler les vecteurs dans l'espace à trois dimensions. En fait, par ses travaux, Hamilton tentait de bâtir une structure permettant de travailler avec les points dans l'espace comme on travaille avec les nombres complexes pour représenter des points sur un plan. Cependant, il n'a pas obtenu trop de succès puisque, même s'il savait comment additionner ou multiplier des triplets de nombres, il était incapable de trouver une manière de les diviser. D'ailleurs, Frobenius prouva en 1877 que cela était même impossible.

C'est pendant qu'il marchait avec sa femme le long du Canal Royal de Dublin le 16 octobre 1843, qu'il a eu l'éclair de génie qui allait plus tard devenir le fondement des quaternions. En effet, c'est lorsqu'il se tenait sur le pont de Brougham qu'il a compris que bien qu'il lui était impossible de trouver un moyen de diviser des triplets de nombres, il pouvait diviser des quadruplets de nombres. La légende dit qu'il s'est même arrêté pour graver les règles de base de la multiplication de son nouveau système sur le pont, c'est-à dire $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. D'ailleurs, une plaque commémorative est toujours affichée sur le pont de Brougham de nos jours pour immortaliser l'anecdote puisqu'aucune trace de la gravure initiale de Hamilton n'est apparente aujourd'hui.

Hamilton appela ces quadruplets de nombres des quaternions et dévoua le reste de sa vie à l'étude et à l'enseignement de ceux-ci. Il a même fondé une école de *quaternionistes* qu'il a dirigée jusqu'à sa mort. L'école ne mourra cependant pas avec lui puisque Peter Tait, pionnier de la thermodynamique et élève émérite de Hamilton, continua à promouvoir les quaternions. Toutefois, il n'a pas eu de succès puisque Gibbs et Heaviside attiraient la majorité de l'intérêt mathématique avec leurs travaux sur les fondements de l'analyse vectorielle, ce qui a fait sombré les quaternions dans l'oubli. Par contre, l'utilité et la simplicité de la structure des quaternions est telle que plusieurs mathématiciens ont recommencé à travailler avec ceux-ci vers la fin du 20^e siècle avec l'arrivée de l'ère informatique. Certains ont même poussé leurs études jusqu'à généraliser les travaux de Hamilton à d'autres ensembles semblables comme les octonions pour travailler avec l'espace à quatre dimensions. [1]

On traite donc dans ce présent article des différents travaux de Hamilton sur les quaternions. On présente, entre autres, le groupe à la base de la structure des quaternions pour ensuite exposer les différentes propriétés analytiques et algébriques dérivant de celui-ci. On expose aussi les différents liens unissant les quaternions à d'autres structures algébriques telles les matrices et ceux unissant ces mêmes quaternions avec les rotations dans l'espace. Enfin, on explique pourquoi les quaternions sont un des meilleurs outils disponibles à ce jour pour représenter les mouvements dans l'espace.

2. Groupe quaternionique

Le groupe quaternionique, que l'on note Q_8, est un groupe non abélien d'ordre 8 défini par les règles de multiplication de Hamilton, c'est-à-dire

$$\begin{gathered} i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \\ ij = -ji = k \\ jk = -kj = i \\ ki = -ik = j \end{gathered}$$

En effet, si on définit Q_8 comme l'ensemble engendré par 1, i, j et k, on peut facilement démontrer avec les règles évoquées plus haut que la structure est bel et bien un groupe pour la multiplication. Pour le prouver, associons par exemple les éléments 1, i, j et k aux éléments du sous-groupe de $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ engendré par les éléments suivants respectant les règles de multiplication de Hamilton.

$$\begin{gathered} 1 \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, j \to \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \\ i \to \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, k \to \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{gathered}$$

De plus, on remarque que les images des éléments 1, i, j et k sont linéairement indépendants, ce qui nous amène éventuellement à la construction des quaternions.

3. Quaternions

3.1. Définition

Commençons maintenant à étudier les quaternions, notamment leur édification à l'aide de la construction de Cayley-Dickson.

3.1.1. *Construction.* La construction des quaternions à partir des nombres complexes est tout à fait identique à la construction des nombres complexes à l'aide des nombres réels. C'est d'ailleurs à cause de cette construction que les quaternions et les octonions, qui se construisent identiquement à l'aide des quaternions, sont souvent appelés des nombres hypercomplexes.

Prenons un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{C}$ admettant comme base l'élément 1 et j du groupe quaternionique. Un vecteur de cet espace peut donc être écrit sous la forme

$$(a + bi)1 + (c + di)j$$

ou, grâce à la loi de distributivité, comme

$$a1 + bi + cj + dij = a + bi + cj + dk$$

où 1, i, j, et k sont les éléments de Q_8 et a, b, c et d des nombres réels quelconques. Le nombre $a + bi + cj + dk$ ainsi défini se nomme donc quaternion en vertu de ce que Hamilton a exposé. On peut aussi noter les quaternions comme (a, b, c, d) où a, b, c et d sont les coefficients définis plus haut ou comme

$$q = q_0 + \vec{q}$$

où q_0 est un nombre réel et $\vec{q}$ un vecteur (q_x, q_y, q_z) de $\mathbb{R}^3$.

Enchaînons maintenant avec quelques définitions :

Définition 1. *Le nombre réel q_0 est appelé* ***partie réelle*** *du quaternion. On le note $Re(q)$.*

Définition 2. *Le vecteur $\vec{q}$ est appelé* ***partie imaginaire*** *du quaternion. On le note $Im(q)$.*

Définition 3. *Un nombre de la forme $q = q_0$ est appelé* ***quaternion scalaire****.*

Définition 4. *Un nombre de la forme $q = \vec{q}$ est appelé* ***quaternion pur****.*

Définition 5. *Un quaternion ayant une norme de 1 sera appelé* ***quaternion unitaire****. La norme sera définie dans la section 3.2.2.*

3.1.2. *Opérations.* Pour compléter, nous définissons trois opérations sur les quaternions : l'addition, la multiplication scalaire et la multiplication quaternionique.

L'addition et la multiplication scalaire s'effectue de la même manière que dans $\mathbb{R}^4$ et possède ainsi les mêmes propriétés. Par exemple, si $q_n = a_n + b_n i + c_n j + d_n k$ pour $n = 1, 2$, alors

$$\alpha q_1 = (\alpha a_1) + (\alpha b_1)i + (\alpha c_1)j + (\alpha d_1)k$$
$$q_1 + q_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k$$

Enfin, la multiplication de quaternions est définie à la manière des complexes, c'est-à-dire que l'on applique la loi de distributivité. Par contre, il existe un moyen plus simple de noter le résultat sous forme scalaire-vecteur $q_0 + \vec{q}$. En effet, on remarque que le produit quaternionique de p et q peut se représenter par

$$pq = (p_0 q_0 - \vec{p} \cdot \vec{q}) + (p_0 \vec{q} + q_0 \vec{p} + \vec{p} \times \vec{q})$$

où $\cdot$ est le produit scalaire et $\times$ le produit vectoriel tels que définis en analyse multidimensionnelle réelle.

Il est important de noter que la multiplication quaternionique n'est pas commutative, notamment dû au produit vectoriel la composant. La notation $\frac{q_1}{q_2}$ est donc à éviter pour représenter la multiplication par l'inverse de q_2 puisqu'elle engendre une ambiguïté : multiplication à gauche ou à droite ?

3.2. Propriétés analytiques

3.2.1. *Conjugaison.* On définit le conjugué d'un quaternion :

DÉFINITION 6. *Le **conjugué** d'un quaternion* $q = q_0 + \vec{q}$ *est* $\overline{q} = q_0 - \vec{q}$.

La conjugaison des quaternions est donc tout à fait analogue à celle des complexes : il ne suffit que de changer le signe de la partie imaginaire. Par contre, quelques propriétés sont différentes comme le fait que le conjugué d'un produit est le produit renversé des conjugués, c'est-à-dire que :

PROPOSITION 1. *Soit* $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$, *alors* $\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2 q_1}$.

Autres faits intéressants concernant la conjugaison de quaternions : elle peut être représentée comme une fonction de q, c'est-à-dire que :

PROPOSITION 2. *Soit* $q \in \mathbb{H}$, *alors* $\overline{q} = -\frac{1}{2}(q + iqi + jqj + kqk)$

De plus, les parties imaginaire et réelle d'un quaternion peuvent être extraites à l'aide de :

PROPOSITION 3. *Soit* $q \in \mathbb{H}$, *alors* $Im(q) = \frac{q - \overline{q}}{2}$ *et* $Re(q) = \frac{q + \overline{q}}{2}$.

3.2.2. *Norme.* Ensuite, avec la conjugaison ainsi définie, on définit la norme d'un quaternion comme la racine carrée du produit du quaternion par son conjugué, c'est-à-dire :

DÉFINITION 7. *La **norme** d'un quaternion* q *est* $\|q\| = \sqrt{q\overline{q}}$.

Cette norme n'est rien de moins que la norme euclidienne de $\mathbb{H}$ puisque, après quelques calculs, on voit que

$$\|q\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Donc, en vertu de ce qui a été énoncé $\mathbb{H}$ est un espace métrique admettant, entre autres, comme métrique la norme euclidienne.

De plus, la norme euclidienne d'un quaternion est nécessaire à la construction de l'inverse multiplicatif de celui-ci. En effet, ce dernier est tout simplement le conjugué du quaternion divisé par sa norme au carré, c'est-à-dire que :

DÉFINITION 8. *L'**inverse** d'un quaternion* q *est défini comme* $q^{-1} = \frac{\overline{q}}{\|q\|^2}$

On remarque deux choses à partir de cette définition. Premièrement, on voit que l'inverse d'un produit de quaternions est le produit inversé des inverses, c'est-à-dire :

PROPOSITION 4. *Soient* $p, q \in \mathbb{H}$, *alors* $(pq)^{-1} = q^{-1}p^{-1}$

Enfin, l'inverse d'un quaternion unitaire est tout simplement son conjugué :

PROPOSITION 5. *Soit* $p \in \mathbb{H}$ *unitaire, alors* $(p)^{-1} = \overline{p}$

3.2.3. *Forme polaire et exponentiation.* Tout comme un nombre complexe $a+bi$ possède une forme polaire $r(cos(\theta)+isin(\theta))$, on peut définir une forme polaire pour les quaternions. En effet, on peut décomposer un quaternion quelconque $q = q_0 + \vec{q}$ sous la forme

$$q = \rho(cos(\theta) + \vec{v}sin(\theta))$$

où $\rho = \|q\|$ et θ sont des nombres réels et $\vec{v}$ est un quaternion pur unitaire. Ainsi, pour tout quaternion non scalaire, la forme polaire des quaternions est, à l'instar de son équivalent complexe, unique à $2k\pi$ près pour θ.

On peut même pousser un peu plus loin la similitude en définissant la fonction exponentielle avec la série usuelle pour obtenir le développement quaternionique suivant :

DÉFINITION 9. *L'**exponentiel** d'un quaternion q est définie comme $e^q = e^{q_0}(cos(\|\vec{q}\|) + \frac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|}sin(\|\vec{q}\|))$.*

Une forme équivalente se déduit aussi de la fome polaire d'un quaternion :

PROPOSITION 6. *Soit $q \in \mathbb{H}$ tel que sa forme polaire est $q = \rho(cos(\theta) + \vec{v}sin(\theta))$ où $\rho = \|q\|$. Alors, $e^q = \rho e^{\theta\vec{v}}$.*

3.2.4. *Racines de -1.* Pour illustrer le résultat, étudions l'équation $q^2 = (a + bi + cj + dk)^2 = -1$. Ainsi, on espère avoir :

$$\begin{cases} a^2 \quad -b^2 \quad -c^2 \quad -d^2 & = & -1 \\ 2ab & = & 0 \\ 2ac & = & 0 \\ 2ad & = & 0 \end{cases}$$

Donc, pour satisfaire aux trois dernières équations, il faut que $a = 0$ ou bien que $b = c = d = 0$. Or, si $b = c = d = 0$, alors la première équation indique que $a^2 = -1$, mais $a \in \mathbb{R}$. Ainsi, $a = 0$ et $b^2 + c^2 + d^2 = 1$. En d'autre mots, l'ensemble des racines de -1 peut être représenté par la sphère unitaire de $\mathbb{R}^3$.

3.3. Propriétés algébriques

L'ensemble des quaternions $\mathbb{H}$ est un espace vectoriel réel de dimension 4 admettant $(1, i, j, k)$ comme base. En guise de comparaison, les réels sont de dimension 1 admettant 1 comme base, les complexes sont de dimension 2 avec $(1, i)$ comme base et les octonions sont de dimension 8. Tous comme les réels et les complexes, les quaternions admettent une multiplication associative et distributive sur l'addition, mais diffèrent de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ en ce sens que sa multiplication n'est pas commutative. Ainsi, cela fait de $\mathbb{H}$ une algèbre associative non-commutative sur les réels, mais non une algèbre associative sur les complexes.

De plus, puisqu'il est possible de diviser des quaternions, l'ensemble $\mathbb{H}$ peut aussi être considéré comme une algèbre de division sur les nombres réels. Ce qui rend la chose intéressante par contre, c'est que Frobenius a démontré en 1877 qu'il n'existait qu'exactement trois de ces algèbres engendrés par un nombre fini d'éléments à isomorphisme près, soit $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{H}$. De plus, dans le même ordre d'idées, Hurwitz a aussi prouvé qu'il n'existait que quatre algèbres normés sur les réels, soit $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ et $\mathbb{O}$, les octonions.

Enfin, notons que $\mathbb{H}$ admet une infinité de sous-algèbres. En effet, on peut démontrer que ces sous-algèbres sont les sous-algèbres triviales $\mathbb{R}$ et $\mathbb{H}$ ainsi qu'une infinité de plans isomorphes au corps des complexes.

3.4. Représentations alternatives

Les quaternions ont acquis à leur création une forme très précise, soit $q = a + bi + cj + dk$ où a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ et i, j, $k \in Q_8$, mais les mathématiciens ont transformé en quelque sorte cette représentation en introduisant certains homomorphismes injectifs utiles des quaternions vers d'autres structures. De ces relations sont nées des représentations alternatives qui, à défaut de révolutionner les quaternions, réduisent les opérations quaternioniques à des opérations bien connues sur les ensembles de matrices $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ et $\mathbb{M}_4(\mathbb{R})$.

En premier lieu, le quaternion $q = a + bi + cj + dk$ peut être représenté dans $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ comme la matrice

$$\begin{bmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{bmatrix}$$

Dans cette situation bien précise, l'addition et la multiplication deviennent tout simplement l'addition et la multiplication de matrices. De même, la norme se transforme en la racine carrée du déterminant et la conjugaison en matrice adjointe.

En deuxième lieu, on peut construire un homomorphisme entre $\mathbb{H}$ et $\mathbb{M}_4(\mathbb{R})$ de sorte que le quaternion $q = a + bi + cj + dk$ peut être représenté comme la matrice

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix}$$

Dans ce cas, l'addition et la multiplication sont équivalentes à l'addition et la multiplication matricielle, la norme devient la racine quatrième du déterminant et la conjugaison devient la transposition.

4. Rotations

4.1. Définition et propriétés

Étudions maintenant le comportement des quaternions en relation avec les rotations dans $\mathbb{R}^3$.

DÉFINITION 10. *Soient $\theta \in [0, 2\pi]$ et $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tel que $\|\vec{v}\| = 1$, on nommera **quaternion de rotation** ou q_r l'élément de $\mathbb{H}$ tel que $q_r = cos(\frac{\theta}{2}) + \vec{v}sin(\frac{\theta}{2})$.*

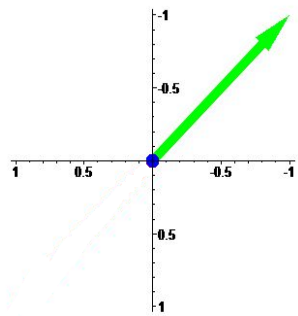
PROPOSITION 7. *Un quaternion de rotation est un quaternion unitaire.*

Certes, on n'appelle pas q_r quaternion de rotation que pour le plaisir. On le nomme ainsi à cause de son implication dans le calcul de rotations dans l'espace. En effet, si on multiplie un quaternion pur $\vec{x}$ correspondant à un vecteur de $\mathbb{R}^3$ par q_r à gauche et par $\overline{q_r}$ à droite, on obtient le vecteur $\vec{x'}$ qui résulte d'une rotation de $\vec{x}$ de θ degrés autour de l'axe de rotation $\vec{v}$. On définit donc la fonction

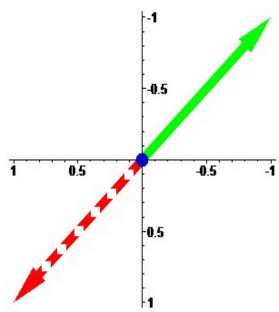
$$R_{q_r}(\vec{x}) = q_r(0 + \vec{x})\overline{q_r} = q_r(0 + \vec{x})q_r^{-1}$$

comme la fonction de rotation par le quaternion q_r. [2]

En guise d'exemple, illustrons la rotation de π radians du vecteur $(1,1,0)$ autour de l'axe $(0,0,1)$. À la base, nous avons donc le vecteur suivant :



Calculons donc maintenant, à l'aide de ces données, le vecteur résultant de la rotation. En d'autres mots, on recherche le vecteur résultant de l'opération $R_{q_r}(\vec{x})$ telle que définie en 4.1 où $\vec{x}$ est le vecteur que l'on veut transformer. Ainsi, dans notre cas précis, on a $q_r = (0,0,0,1)$ et $\vec{x} = \overrightarrow{(1,1,0)}$, c'est-à-dire $(0,1,1,0)$ sous forme de quaternions. Or, $R_{(0,0,0,1)}(0,1,1,0) = (0,0,0,1)(0,1,1,0)\overline{(0,0,0,1)} = (0,-1,-1,0)$. Graphiquement, cela correspond au nouveau vecteur pointillé :



Étudions ce qui se passe si on veut composer la rotation par q_r et q_r' par exemple.

$$\begin{aligned} R_{q_r}(R_{q_r'}(\vec{x})) &= R_{q_r}(q_r'(0+\vec{x})\overline{q_r'}) \\ &= q_r q_r'(0+\vec{x})\overline{q_r'}\,\overline{q_r} \\ &= (q_r q_r')(0+\vec{x})(\overline{q_r q_r'}) \\ &= R_{q_r q_r'}(\vec{x}) \end{aligned}$$

Ainsi, la composition de deux rotations générés par q_r et q_r' n'est rien de plus simple que la rotation par le produit de ceux-ci.

Proposition 8. *Soient q_r et q_r' deux quaternions de rotations, alors $R_{q_r}(R_{q_r'}(\vec{x})) = R_{q_r q_r'}(\vec{x})$, c'est-à-dire que la composition de deux rotations correspond à la rotation par leur produit.*

Il faut toutefois encore faire attention à l'ordre de multiplication puisque, on le rappelle, la multiplication de quaternions n'est pas commutative tout comme la composition de rotations dans l'espace d'ailleurs. De plus, notons qu'il est facile de généraliser le résultat à l'aide d'une récurrence simple afin de démontrer que l'énoncé est vrai pour un nombre quelconque de rotations. On peut aussi déduire de cette propriété que la rotation inverse d'une rotation correspondant au quaternion q_r est une rotation par q_r^{-1}.

Enfin, on remarque que

$$\begin{aligned} R_{-q_r}(\vec{x}) &= -q_r(0+\vec{x})\overline{-q_r} \\ &= (-1)q_r(0+\vec{x})(-1)\overline{q_r} \\ &= q_r(0+\vec{x})\overline{q_r} \\ &= R_{q_r} \end{aligned}$$

Ainsi, on remarque que :

PROPOSITION 9. *La rotation par le quaternion de rotation q_r est équivalente à la rotation par $-q_r$.*

4.2. Pourquoi les quaternions ?

La représentation des rotations à l'aide des quaternions représente de nombreux avantages si on la compare avec quelques autres méthodes connues comme les angles d'Euler ou les matrices de rotations. Par exemple, elle est une représentation beaucoup plus compacte que les matrices de rotations puisqu'elle ne comporte que quatre éléments à mettre en mémoire, comparativement à 9 éléments pour une matrice de rotation ou même 16 éléments pour un système de coordonnées homogènes. De plus, comparativement aux angles d'Euler qui comportent certaines singularités (le blocage de cardans ou *gimbal lock* par exemple [3]), la représentation quaternionique n'en comporte aucune et la normalisation de quaternions est beaucoup moins laborieuse que la normalisation de matrices de rotation. Enfin, notons aussi que les rotations peuvent être composés beaucoup plus efficacement à l'aide de quaternions qu'à l'aide de matrices. En d'autre mots, les quaternions sont plus stables numériquement que les matrices.

Références

[1] John H. Conway et Derek A. Smith, *On Quaternions and Octonions.* University of California, Riverside, 2004.

[2] Charles F. F. Karney, *Quaternions in molecular modeling.* Sarnoff Corporation, Princeton, 2005.

[3] *Quaternion.* Wikipedia, the free encyclopedia. http ://en.wikipedia.org/wiki/Quaternion.

FRANCIS DUSSEAULT-BÉLANGER, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Courriel: `francis.dusseault-belanger@usherbrooke.ca`