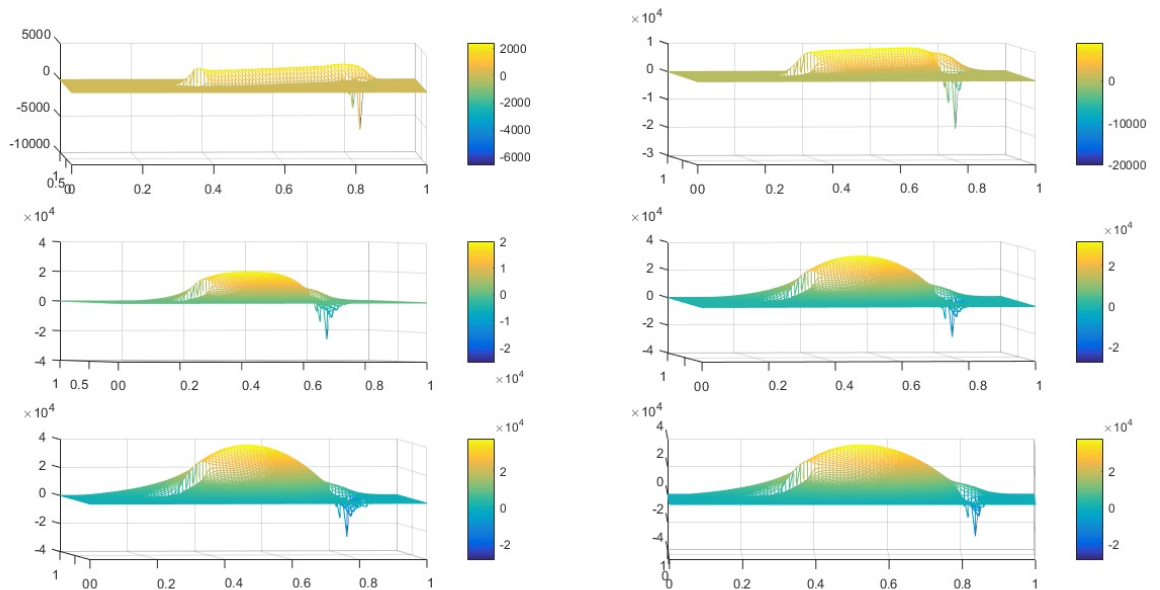


Modelo y solución del fenómeno electrohidrodinámico en campos inducidos por fluidos en movimiento a través del método de elementos finitos



Guillermo Villa Martínez

Modelo y solución del fenómeno electrohidrodinámico en campos inducidos por fluidos en movimiento a través del método de elementos finitos

Guillermo Villa Martínez

Trabajo presentado como requisito
parcial para optar por el título de
Magister en Ingeniería Eléctrica

Pereira, 21 Agosto 2019
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
Maestría en Ingeniería Eléctrica



Modelo y solución del fenómeno electrohidrodinámico en campos inducidos por fluidos en movimiento a través del método de elementos finitos
©Guillermo Villa Martínez

Director: Carlos Alberto Ramírez Vanegas, Universidad Tecnológica de Pereira.

Codirector: Oscar Danilo Montoya Giraldo, Universidad Tecnológica de Bolívar.

Pereira, 21 Agosto 2019

Maestría en Ingeniería Eléctrica.

Universidad Tecnológica de Pereira

La Julita. Pereira(Colombia)

TEL: (+57)(6)3137122

www.utp.edu.co

Versión web disponible en: *<http://recursosbiblioteca.utp.edu.co/tesisd/index.html>*

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi familia y las personas que emprendieron junto a mi esta etapa académica.

Resumen

El fenómeno electrohidrodinámico modela la interacción de los fluidos con campos eléctricos. La dinámica de esta interacción viene dada por las ecuaciones de Navier – Stokes y la distribución de cargas (ecuaciones de Maxwell) en el medio de un potencial eléctrico debido al campo eléctrico, esto es, tensiones causadas en fluidos en presencia de campos eléctricos y magnéticos. Por otro lado, la manifestación de las ecuaciones de Maxwell depende de la densidad de carga; que a su vez depende del movimiento de un fluido, de esta manera se interrelacionan la difusión de un fluido en un campo que da lugar a un sistema de ecuaciones intrincadamente acoplado y no lineal que gobierna el estado dinámico. Este tipo de interacciones dan lugar a los siguientes casos: El primer caso en el que la aplicación de un campo eléctrico conduce a la generación de un flujo denominado electrosmosis (separación de cargas positivas de las negativas) para agrupar las cargas negativas formando un flujo de electrones en una dirección específica, el segundo caso se da en el fenómeno en el que el flujo de un fluido en contacto con un sustrato cargado en ausencia de cualquier campo eléctrico, conduce a la generación de una diferencia de potencial conocido como potencial de transmisión, mientras el tercer caso se presenta para convertir energía potencial mecánica en energía eléctrica en filamentos porosos debido a la interacción del flujo de un fluido con un campo eléctrico.

La propuesta presentada en este anteproyecto plantea en estudio del comportamiento de un fluido inmerso en un campo eléctrico con el fin de entender el comportamiento de este. El modelo matemático propuesto resulta de un estudio de ecuaciones diferenciales de tipo parabólica con constante de Reynolds finita. La ecuación que gobierna el fenómeno electrohidrodinámico se solucionará numéricamente por medio del método de elementos finitos. Con la solución numérica se estudia la evolución del flujo del fluido en medio homogéneos y en secciones transversales no homogéneas, de esta manera cuando los electrones de un fluido se exponen a un campo eléctrico, se presenta un desajuste de las propiedades dieléctricas de este y se generan esfuerzos eléctricos que permiten conocer la deformación y el movimiento de tal forma que se puedan estimar los perfiles de velocidad, presión y potencial. Por otro lado, se investiga la evolución de la energía cinética del campo de flujo en términos del tiempo y se exploran las correlaciones entre la energía cinética mínima y máxima.

Abstract

The electrohydrodynamic phenomenon models the interaction of fluids with electric fields. Dynamics of this interaction is given by the Navier – Stokes equations and the distribution of charges (Maxwell equations) in the space due to electric field, that is, voltages caused in fluids in the presence of electric and magnetic fields. On the other hand, the manifestation of Maxwell’s equations depends on the charge density; which in turn depends on the movement of a fluid, in this way the diffusion of a fluid is interrelated in a field that gives rise to an intricately coupled and non-linear system of equations that governs the dynamic state. These types of interactions give rise to the following cases: The first case in which the application of an electric field leads to the generation of a flow called electroosmosis (separation of positive charges from negative ones) to group the negative charges forming a flow of electrons in a specific direction, the second case occurs in the phenomenon in which the flow of a fluid in contact with a charged substrate in the absence of any electric field, leads to the generation of a potential difference known as transmission potential, while that the third case is presented to convert potential mechanical energy into electrical energy into porous filaments due to the interaction of the flow of a fluid with an electric field.

This research raises the study of the behavior of a fluid immersed in an electric field in order to understand it. The proposed mathematical model results from a study of differential equations of parabolic type with finite Reynolds constant. The equation that governs the electrohydrodynamic phenomenon is solved numerically by means of the finite element method. With the numerical solution, the evolution of the fluid flow in homogeneous media and in non-homogeneous cross sections is studied, in this way when the electrons of a fluid are exposed in an electric field, there is a mismatch of the dielectric properties of this and get electrical stresses that can know the deformation and movement in the way that the velocity, pressure and potential profiles can be estimated. On the other hand, the evolution of the kinetic energy of the flow field is investigated in terms of time and the correlations between the minimum and maximum kinetic energy and the state of the deformation of the fluid were explored.

Índice general

| | |
|---|-----------|
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1. Planteamiento del problema | 1 |
| 1.2. Estado del arte | 2 |
| 1.3. Objetivos | 5 |
| 1.3.1. General | 5 |
| 1.3.2. Especificos | 5 |
| 1.4. Estructura del documento | 5 |
| 2. Modelo: Electrohidrodinámica (EHD) | 7 |
| 2.1. Formas diferenciales | 7 |
| 2.1.1. 1-Formas: | 8 |
| 2.1.2. 2-Formas: | 9 |
| 2.1.3. k-Formas: | 10 |
| 2.1.4. Derivada exterior | 11 |
| 2.1.5. Componentes Espacio-Temporales | 11 |
| 2.2. Ecuaciones de Maxwell | 12 |
| 2.3. Dinámica del fenómeno EHD | 16 |
| 2.3.1. Navier-Stokes no lineal | 17 |
| 2.3.2. Condiciones de Frontera | 19 |
| 3. Conceptos Método de Elementos Finitos | 21 |
| 3.1. Aproximación de Galerkin | 21 |
| 3.1.1. Teorema de Lax-Milgram | 23 |
| 3.2. Montaje de los elementos finitos | 26 |
| 3.2.1. Caso Unidimensional | 27 |
| 3.2.2. Caso Bidimemsional | 30 |
| 3.3. Planteamiento de la solución numérica para EHD | 34 |

| | |
|---|-----------|
| 4. Análisis Numérico: Solución EHD con FEM | 37 |
| 4.1. Estrategia de Solución | 37 |
| 4.2. Resultados | 39 |
| 4.2.1. Electrodo | 39 |
| 4.2.2. Velocidad Navier-Stokes | 54 |
| 5. Conclusiones | 73 |
| 5.1. Trabajos futuros. | 74 |
| 5.2. Productos relacionados | 75 |
| A. Anexos | 81 |
| A.1. Operaciones con k-Formas en \mathbb{R}^n | 81 |
| A.1.1. Suma | 81 |
| A.1.2. Producto Exterior | 81 |
| A.1.3. Propiedades de la derivada exterior | 82 |

Capítulo 1

Introducción

1.1. Planteamiento del problema

Gran cantidad de fenómenos físicos, modelos matemáticos (optimización) y disciplinas derivadas como la ingeniería buscan entender dichos fenómenos por medio de la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO, ODE) y ecuaciones diferenciales parciales (EDP, PDE). Algunas de estas ecuaciones diferenciales tienen soluciones en dominios espaciales complejos, dificultando la solución de las ecuaciones diferenciales. Por otro lado, las soluciones analíticas de las ecuaciones diferenciales ordinarias y de las ecuaciones diferenciales parciales no se calculan con éxito debido a la no linealidad y la limitación de técnicas para encontrar una solución en términos de las variables espaciales (dominio) y dinámica en el tiempo, en este orden de ideas es necesario recurrir al análisis numérico para encontrar una solución que permita conocer las características y desempeño de las variables de interés en materiales y dominios complejos.

Entre los métodos que hacen parte del análisis numérico se destacan los métodos numéricos que discretizan dominios espaciales (una dimensión, dos dimensiones y tres dimensiones), como lo es el método de elementos finitos, permitiendo realizar una combinación de funciones seccionadas obteniendo gran precisión y de sencilla implementación computacional. La solución numérica de la ecuación diferencial parcial que modela el fenómeno electrohidrodinámico consiste en el estudio de las ecuaciones de Maxwell y de las ecuaciones de Navier Stokes en dominios donde se encuentra aplicado un campo eléctrico. La interacción de campos eléctricos con fluidos permite comprender las trayectorias del flujo bajo diferentes parámetros de descarga e interacción de partículas de tal forma que los efectos de propagación de corriente continua se colecten en un electrodo a causa de la separación de estas partículas, ya sea por el arrastre de partículas o debido a la ionización.

Existen varias soluciones numéricas obtenidas por medio de experimentos en de laboratorio como se proponen en [1], [2], [3] donde se modifican parámetros como velocidad y presión del agua en un tanque a diferentes longitudes de onda, o el estudio de varios tipos de fluidos a través de microcanales y su aplicación en el transporte de líquidos ionizados debido a la densidad de carga superficial de un campo eléctrico variable, y el estudio en la industria de mecanismos de impresión por inyección de tintas en diferentes escalas de diámetro gracias a concentración de corrientes y la consecuencia de un campo magnético. Por otro lado, con esta investigación se busca solucionar la ecuación diferencial parcial del fenómeno electrohidrodinámico y estudiar las variables eléctricas con fluidos como lo son el aire y el agua del mar en orden de conocer la posible conversión de energía mecánica en energía eléctrica y la cantidad de potencia que se puede generar como se menciona en [4] y [5] por medio de los perfiles de presión, velocidad y potencial del fluido.

1.2. Estado del arte

La electrohidrodinámica es un área interdisciplinaria que se encarga de la interacción y de los fenómenos asociados de los fluidos con los campos magnéticos y las cargas. Esta área estudia fluidos sometidos a la acción de campos eléctricos, es decir, electricidad como la acción de campos y corrientes eléctricas, en hidrodinámica movimiento de fluidos y las distribuciones de campo eléctrico y de velocidad están acopladas [6].

Por otro lado, las interacciones de los campos con las partículas de un fluido generan disociación iónica, las impurezas o las propias moléculas del medio líquido se ionizan y la tasa de reacción puede depender del campo eléctrico, de este modo la inyección de carga eléctrica desde los electrodos empuja las cargas (partículas de un fluido) ejerciendo sobre el fluido tensiones superficiales como componentes de arrastre (movimiento de cargas), convección (transferencia de calor entre los electrodos) y difusión (donde la distribución de carga depende de la distribución de velocidades del fluido) como se propone en [7] y [8] respectivamente.

Además, cuando un conductor transporta una corriente en el interior de una región donde actúa un campo eléctrico, éste efectúa sobre el conductor una fuerza que es igual a la suma de las fuerzas sobre las partículas cargadas (fluido) que producen la corriente. Desde el punto de vista de aplicaciones industriales es necesario mencionar tres principales aplicaciones; la primera es la fabricación aditiva, la segunda es la impresión por inyección de tinta bajo los efectos electrohidrodinámicos; de tal forma, que se forme un cono de inyección de tinta; aumentando así la precisión y disminuir la cantidad de materia prima en los procesos de impresión aplicando diferentes cantidades de corriente como se expone en [3]. La tercera

aplicación se presenta en la metalurgia, los metales líquidos tienen ventaja considerable debido a su elevada conductividad eléctrica (10^6 S/m) en comparación con otros líquidos, la facilidad de generación de fuerza electromagnética suficientemente proporcional se evidencia en los hornos de inducción capaces de fundir metal, perturbarlo y mantenerlo en levitación como se propone en [9]; las mejoras de esta aplicación industrial vienen dadas por ausencia de contacto entre la carga (metal a fundir) y el fusor, esto evita contaminación del metal por las paredes de éste, el calentamiento de la carga por efecto Joule provoca fusión del metal y el movimiento interno del fluido produce la mezcla de diversos componentes. La última aplicación, se relaciona con la generación de energía eléctrica; esta trata de la conversión de la energía mecánica del movimiento del fluido en energía eléctrica, el fluido circula a gran velocidad por la expansión de gas caliente en presencia de un campo eléctrico constante (corriente continua). Este mecanismo permite transformar directamente el vapor de agua en electricidad sin pasar por una turbina como las centrales termo eléctricas o formando ciclos combinados, esto es, generación de energía eléctrica con superconductores y captadores solares [6] [10].

El campo de presión y el campo del fluido se modelan con la ecuación Navier-Stokes (1), esto se debe a que existen fluidos que presentan propiedades dieléctricas no homogéneas y estos poseen una gran viscosidad, por lo tanto sus flujos están dominados por tensiones viscosas superficiales; el potencial electrostático (2) tiene una variación de tal manera que la corriente se conserva en todas las partes de dominio, en las interfaces se consideran las condiciones de frontera mientras que el potencial externo se mantiene constante. Las ecuaciones diferenciales parciales que modelan el fenómeno electrohidrodinámico relacionan la ecuación de Navier-Stokes y las ecuaciones de Maxwell, además de las relaciones eléctricas entre el campo eléctrico y las leyes de Ohm. Dentro del sistema de ecuaciones se encuentra una ecuación diferencial parcial de tipo parabólico debido a que incluye un término que hace referencia a la primera derivada parcial de la presión respecto al tiempo. En la literatura, este tipo de EDP permite conocer el comportamiento de problemas denominados de propagación que son problemas transitorios, con una solución que cambia con el tiempo, donde la solución de la EDP es requerida en un dominio, sujeta a condiciones iniciales como se expuso anteriormente. Los métodos usados para conocer la solución de este tipo de EDP se centran en la fragmentación y análisis del dominio en segmentos lineales, este análisis numérico abarca métodos frecuentemente usados como el método de diferencias finitas, de tal forma que la solución numérica se desplaza por cada uno de los puntos del dominio transformando así la EDP en un sistema de ecuaciones algebraico [11]. Por otro lado, existen otros métodos de discretización para la solución numérica de EDP que consisten en la representación de una solución como la combinación lineal de parámetros (pesos) y funciones coercivas en todo el dominio. Los parámetros que generan la combinación lineal deben ser seleccionados tales que

satisfagan la EDP y las funciones coercivas (funciones de aproximación) son seleccionadas tal que se satisfagan las condiciones de frontera; este método en general se conoce el método de elementos finitos. La solución numérica propuesta en [12] busca el desarrollo de los métodos discontinuos a partir de avances obtenidos para la solución de EDP tipo hiperbólicas y elípticas, las ventajas de usar funciones discontinuas son la habilidad para manejar geometrías complejas y cambiar el orden de las funciones de aproximación. La ventaja de usar el método de elementos finitos para solución de EDP tipo hiperbólicas y elípticas también se ve expuesto en [13] pero definiendo medio aleatorios y geometrías heterogéneas buscando los valores o pesos de la combinación lineal por medio del método de Montecarlo para la solución numérica de la ecuación de onda. Además, de la enorme utilidad para el análisis de fenómenos que relacionan EDP de tipo parabólica y la dificultad de implementación de soluciones numéricas, es necesario recurrir a los métodos espectrales que se proponen en [14], esto es, un algoritmo usado para obtener una solución numérica al problema de la dinámica de fluidos (Ecuación de Navier-Stokes) con oscilaciones falsas que no se ajustan al comportamiento del fenómeno modelado y en contracorriente se analiza la convergencia del método de diferencias finitas para una geometría homogénea. Por otra parte, el método diferencias finitas es eficiente en dominios y materiales homogéneos, pero presenta dificultades tratando de resolver problemas con algún tipo de discontinuidad o no cuando el material no es homogéneo, pero el método de elementos finitos presenta ventaja sobre este último ya se acomoda a objetivos no homogéneos, así como se propone en [15] donde la solución numérica encontrada es válida, aunque sea necesario un truncamiento de campo en la frontera. La propuesta presentada en este documento tendrá como objetivo solucionar numéricamente el fenómeno expuesto en los párrafos iniciales por medio del método de elementos finitos, ya que como se proponen en [11][12][13][15] este método muestra mejor desempeño en dominios y geometrías no homogéneas y en donde intervienen variables espacio temporales como lo es el fenómeno electrohidrodinámico.

Ecuaciones del modelo:

$$\left. \begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\nabla \cdot \vec{u}) \vec{u} \right) &= -\nabla P + \eta \nabla^2 \vec{u} + \rho \left(q \left(\vec{u} + \mu \vec{E} \right) \right) \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Los términos del modelo presentado por medio del conjunto de ecuaciones (1.1) son:

\vec{u} Campo de velocidad del fluido.

P Campo escalar de presiones.

μ Viscosidad.

ρ Densidad.

q Carga eléctrica.

\vec{E} Campo eléctrico.

$\rho \left(q \left(\vec{u} + \mu \vec{E} \right) \right)$ Define el campo de fuerzas volumétricas.

1.3. Objetivos

1.3.1. General

Estudiar el fenómeno electrohidrodinámico por medio de la solución de la dinámica en ecuaciones diferenciales parciales con el método de elementos finitos.

1.3.2. Especificos

- Modelar el fenómeno electrohidrodinámico por medio de ecuaciones diferenciales parciales.
- Estudiar y plantear la solución de ecuaciones diferenciales parciales que modelan la dinámica del fenómeno electro hidrodinámico con el método de elementos finitos.
- Desarrollar un algoritmo de solución para el problema del fenómeno electro hidrodinámico con el método de elementos finitos en 2 dimensiones.
- Solucionar las ecuaciones integro-diferenciales que modelan el fenómeno electro hidrodinámico por medio del método de elementos finitos bajo el efecto de campo eléctricos (magnéticos) constantes.

1.4. Estructura del documento

El trabajo de grado está organizado de la siguiente forma. En el capítulo 2 se presenta la metodología matemática utilizada para obtener un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de tipo hiperbólico con variación temporal, para esto se usaron las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial y la adaptación del caso mecánico de la ecuación no lineal de Navier-Stokes para el caso eléctrico. Posteriormente en el capítulo 3 se estudia el método

de elementos finitos en una y dos dimensiones para adaptar este método al planteamiento matemático del sistema de ecuaciones diferenciales parciales. Luego, en el capítulo 4 se plantea una estrategia de solución que consiste en la implementación del método de elementos finitos con funciones de forma lineal y luego se soluciona el problema de la dinámica temporal. Finalmente se presentan las conclusiones en el capítulo 5.

Capítulo 2

Modelo: Electrodinámica (EHD)

2.1. Formas diferenciales

Sea \mathbf{E} un espacio vectorial y \mathbf{E}^* el dual del espacio vectorial.

$$\mathbf{E}^* = \{\varphi : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi \text{ lineal}\} \quad (2.1)$$

Las propiedades de linealidad de φ vienen dadas por (2.2), (2.3):

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b), \quad a \text{ y } b \in \mathbf{E} \quad (2.2)$$

$$\lambda\varphi(a) = \varphi(\lambda a), \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (2.3)$$

Algunos ejemplos del dual de los espacios vectoriales son:

- Consideremos $\mathbf{E} = \mathbb{R}$ un espacio vectorial, el dual de este espacio vectorial viene dado por:

$$\mathbb{R}^* = \{\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad \varphi \text{ lineal}\} \quad (2.4)$$

En (2.4) se propone que la función que pasa de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de un espacio vectorial a otro tiene que ser lineal, esto es, $\varphi(x) = mx$, todas las rectas que pasan por el origen, con $m = \varphi' = d\varphi$. Para que la derivada sea lineal debe estar evaluada en un elemento del espacio vectorial.

- Otro ejemplo de esta operación definida como la dualidad de los espacios vectoriales es la dualidad en \mathbb{R}^2 como:

$$(\mathbb{R}^2)^* = \{\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi \text{ lineal}\} \quad (2.5)$$

Lo anterior (2.5) plantea que $x \in \mathbb{R}^2$ y A es una matriz de transformación lineal para que $\varphi(x)$ sea lineal, así:

$$\varphi(x) = [a_{11} \quad a_{12}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = Ax \quad (2.6)$$

Un plano tangente se puede obtener por medio de la dualidad de un espacio vectorial con la siguiente definición:

$$\mathbb{R}_p^n = \{q - p : \quad p, q \in \mathbb{R}^n\} \quad (2.7)$$

El plano tangente formulado en (2.7) [16] lleva los elementos al origen, por otro lado, el dual de este espacio vectorial se describe:

$$(\mathbb{R}_p^n)^* = \{\varphi : \mathbb{R}_p^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi \text{ lineal}\} \quad (2.8)$$

Como la ecuación (2.8) genera un espacio vectorial, entonces $(\mathbb{R}_p^n)^*$ tiene una base formada por las derivadas en cada una de las direcciones, base $\{(dx_i)_p : i = 1, \dots, n\}$. Todas estas derivadas son lineales si están evaluadas en un punto, y toman los siguientes valores de acuerdo con la base canónica e_j :

$$(dx_i)_p(e_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (2.9)$$

2.1.1. 1-Formas:

Un campo de formas lineales se puede denotar como una 1- forma en \mathbb{R}^n por medio de la combinación lineal (2.10) de funciones lineales y su respectiva base (2.9).

$$\omega_{(p)} = \sum_{i=1}^n a_i(p) (dx_i)_p \quad (2.10)$$

Por lo tanto, lo anterior permite evaluar $\omega_{(p)}$ en cualquier vector canónico, como:
 $\omega_{(p)}(e_j) = a_1(p) (dx_1)_p(e_j) + a_2(p) (dx_2)_p(e_j) + \dots + a_j(p) (dx_j)_p(e_j) + \dots + a_n(p) (dx_n)_p(e_j) = a_j(p)$ obteniendo la función j ésima.

Un ejemplo de 1- forma es el diferencial de área mostrada en la figura 2.1. $dA = f(x)dx$

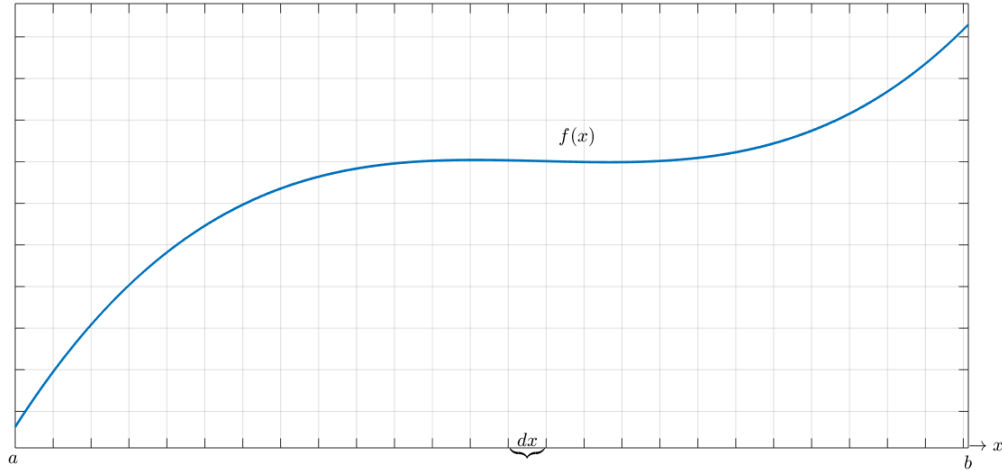


Figura 2.1: Diferencial de área.

2.1.2. 2-Formas:

Con la estructura de la 1- forma descrita anteriormente se extienden las propiedades y definiciones para obtener las 2- formas: sea $\varphi : \mathbb{R}_p^3 \times \mathbb{R}_p^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función bilineal (lineal en cada componente), con las siguientes propiedades :

$$\varphi(v + m, w) = \varphi(v, w) + \varphi(m, w) \tag{2.11}$$

$$\varphi(\lambda v, w) = \lambda \varphi(v, w) \tag{2.12}$$

Un ejemplo de una función bilineal con las propiedades (2.11), (2.12) es el producto punto $\varphi(v, w) = \langle v, w \rangle = v \cdot w$.

Una definición importante para obtener 2- formas es el producto exterior (\wedge) entre 1- formas. Sean φ_1 y φ_2 2 1- formas. El producto exterior $\varphi_1 \wedge \varphi_2 : \mathbb{R}_p^3 \times \mathbb{R}_p^3 \rightarrow \mathbb{R}$ o $(v, w) \rightarrow \varphi_1 \wedge \varphi_2(v, w)$, otra forma de definir el producto exterior entre 1- formas es el producto entre bases diferenciales, que se calcula como aparece:

$$dx_i \wedge dx_j(v, w) = \det \begin{bmatrix} dx_i(v) & dx_i(w) \\ dx_j(v) & dx_j(w) \end{bmatrix} = dx_i(v)dx_j(w) - dx_i(w)dx_j(v) \tag{2.13}$$

Con la propiedad de multiplicar $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ y si $i = j$ entonces $dx_i \wedge dx_i = 0$, es decir, que \wedge es alternante y antisimétrica. Por lo tanto una 2- formas de \mathbb{R}^3 por definición es:

$$\omega : \mathbb{R}^3 \rightarrow \wedge^2(\mathbb{R}_p^3)^* \quad (2.14)$$

Esto es, un elemento $p \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \omega_p \in \mathbb{R}$ o una combinación lineal de funciones y bases diferenciales $\omega_p = \sum_{i < j}^3 a_i dx_i \wedge dx_j = a_1 dx_1 \wedge dx_2 + a_2 dx_1 \wedge dx_3 + a_3 dx_2 \wedge dx_3$

2.1.3. k-Formas:

Así como se definieron las 1- formas y las 2- formas, también se quiere inducir la definición de las k - formas por medio de su proposición:

$$\wedge^k(\mathbb{R}_p^n)^* = \{\varphi : \}$$
 (2.15)

Con propiedades de linealidad y alternante φ : es k lineal, lineal en cada componente, $\varphi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_{i+1}, \dots, v_k) = -\varphi(v_1, \dots, v_{i+1}, \dots, v_i, \dots, v_k)$ respectivamente. Sea el conjunto $\{dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}\}_p$ la base de k factores diferenciales una base para $\wedge^k(\mathbb{R}_p^n)^* \mid i_1 < i_2 < \dots < i_k$ con las siguientes propiedades:

1. Linealmente independiente

$$\sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} (dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})_p = 0 \quad (2.16)$$

Se debe mostrar que $a_{i_1 \dots i_k} = 0 \quad \forall ij$, entonces se evalua en la base canónica $(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})$ y se obtiene $\sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} (dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})_{(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})} = a_{i_1 \dots i_k} \quad i_1 = j_1 \dots i_k = j_k$.

Análogamente al enunciado anterior se tiene que :

$(a_{12} dx_1 \wedge dx_2 + a_{13} dx_1 \wedge dx_3 + a_{23} dx_2 \wedge dx_3)(e_1, e_2) = a_{12}$ ya que $a_{13} dx_1 \wedge dx_3(e_1, e_2) = 0$ porque:

$$dx_1 \wedge dx_3(e_1, e_2) = \det \begin{bmatrix} dx_1(e_1) & dx_1(e_2) \\ dx_3(e_1) & dx_3(e_2) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

En general

$$k dx_i \wedge dx_j(e_i, e_j) = k \det \begin{bmatrix} dx_i(e_i) & dx_i(e_j) \\ dx_j(e_i) & dx_j(e_j) \end{bmatrix} = k \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = k$$

2. **Evaluar la k - forma en los vectores canónicos genera 0- formas:** Si $f \in \wedge^k(\mathbb{R}^p)$ una k - forma, con $f = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ y $g = f(e_{i_1} \dots e_{i_k})$, entonces la evaluación de $g(e_{i_1} \dots e_{i_k}) = f(e_{i_1} \dots e_{i_k})$, ya que
- $$g = f \Rightarrow f(e_{i_1} \dots e_{i_k}) = a_{i_1 \dots i_k}$$

2.1.4. Derivada exterior

Sea $\omega = \sum_I a_I dx_I = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ un k - forma en \mathbb{R}^n , entonces la derivada exterior se define como:

$$d\omega = d\left(\sum_I a_I dx_I\right) = \sum_I d(a_I) \wedge dx_I \quad (2.17)$$

La derivada aplica sobre las 0- formas, es decir, sobre las funciones a_I (2.17), esta operación genera una $(k + 1)$ - forma.

2.1.5. Componentes Espacio-Temporales

Sea $\omega = a_{xyt} dx \wedge dy \wedge dt + a_{zxt} dz \wedge dx \wedge dt + a_{yzt} dy \wedge dz \wedge dt + a_{xyz} dx \wedge dy \wedge dz$ una 3- formas en \mathbb{R}^4 (tres componentes espaciales y una componente temporal) para formar una 4- forma, es necesario calcular $d(\omega)$:

$$\begin{aligned} d\omega &= \partial a_{xyt}(dx + dy + dz + dt) \wedge dx \wedge dy \wedge dt + \partial a_{zxt}(dx + dy + dz + dt) \wedge dz \wedge dx \wedge dt \\ &\quad + \partial a_{yzt}(dx + dy + dz + dt) \wedge dy \wedge dz \wedge dt + \partial a_{xyz}(dx + dy + dz + dt) \wedge dx \wedge dy \wedge dz \\ d\omega &= (\partial_z a_{xyt} + \partial_y a_{zxt} + \partial_x a_{yzt} - \partial_t a_{xyz}) \wedge dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt \end{aligned}$$

Los coeficientes escalares pueden ser relacionados como la generalización de la divergencia en cuatro dimensiones. Note que el signo negativo en el último término del paréntesis no se debe a ninguna métrica o factor de escala sino que se debe al orden de los índices dada la propiedad alternante (2.13). Cualquier 4- forma espacio temporal tiene base diferencial igual a $dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt$. En un espacio cuatro dimensional, cualquier k - forma se puede expandir en dos términos; un parte hace referencia a las componentes temporales y la otra parte se refiere a la componente temporal. Así, una 1- forma en 4- dimensiones:

$$\omega = a_x dx + a_y dy + a_z dz + a_t dt = 0 \quad (2.18)$$

Puede ser dividida en dos componentes, así:

$$\omega_{xyz} = a_x dx + a_y dy + a_z dz = 0; \quad \omega_t = a_t dt = 0 \quad (2.19)$$

Por ejemplo, considere una 2- formas

$$\omega = a_{xy}dx \wedge dy + a_{xz}dx \wedge dz + a_{yz}dy \wedge dz + a_{xt}dx \wedge dt + a_{yt}dy \wedge dt + a_{zt}dz \wedge dt = 0 \quad (2.20)$$

Puede re escribirse en dos componentes, una que hace referencia a las variables espaciales y la otra hace referencia a la variable temporal:

$$\omega_{xyz} = a_{xy}dx \wedge dy + a_{xz}dx \wedge dz + a_{yz}dy \wedge dz = 0; \quad \omega_{xyzt} = (a_{xt}dx + a_{yt}dy + a_{zt}dz) \wedge dt = 0 \quad (2.21)$$

Otros ejemplos de formas en 4– dimensiones (espacio-temporales) son el conjunto formado por la ecuaciones de Maxwell en su forma diferencial, representando la relación espacio-temporal de forma más simple como $d \wedge \omega = 0$ como se mostrará en los capítulos siguientes.

2.2. Ecuaciones de Maxwell

Consideremos las ecuaciones de Maxwell en términos de sus representaciones en tres y cuatro dimensiones respectivamente [17]

1. Ley de Maxwell-Ampere:

Las ecuaciones de Maxwell-Ampere en su forma diferencial, permiten estudiar el comportamiento del campo magnético producido por distribuciones de corriente que presentan variaciones en el tiempo. A continuación se presenta el análisis de esta ecuaciones en forma diferencial y su representación en términos de formas diferenciales.

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \quad (2.22)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_m \quad (2.23)$$

Haciendo una analogía entre las ecuaciones (2.22) y (2.23), el vector \vec{H} es reemplazado por una 1– forma, mientras el vector \vec{D} es reemplazado por una 2– forma. La ecuaciones diferencial 2.22 y 2.23 se convierten en:

$$\nabla \wedge \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \quad (2.24)$$

$$\nabla \wedge \vec{D} = \Upsilon_{\rho_m} \quad (2.25)$$

La ecuación (2.24) es una ecuación que implica realizar operaciones entre expresiones 2- forma y la ecuación (2.25) conlleva a realizar operaciones entre 3- forma. El lado derecho en ambas ecuaciones representan fuentes electromagnéticas, la densidad de corriente \vec{J} y $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ son 2- formas y la densidad de carga Υ_{ρ_m} es una 3- forma. Estas expresiones juntas satisfacen las condiciones de continuidad aplicando el operador diferencial exterior en la ecuación 2.24, obteniendo $d \wedge d \wedge \vec{D} = 0$ y reemplazando en (2.25):

$$\begin{aligned} d \wedge d \wedge \vec{D} &= d \wedge \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + d \wedge \vec{J} \\ \frac{\partial d \wedge \vec{D}}{\partial t} + d \wedge \vec{J} &= 0 \end{aligned}$$

Llegando al resultado de la ecuación:

$$\frac{\partial \Upsilon_{\rho_m}}{\partial t} + d \wedge \vec{J} = 0 \quad (2.26)$$

La ecuación (2.26) relaciona operaciones aditivas entre expresiones 3- forma como lo son las fuentes de electromagnéticas y la densidad de corriente. El conjunto de ecuaciones formada por la formulación Maxwell-Faraday y Maxwell Ampere, son ecuaciones que no dependen de alguna métrica o factor de escala, porque estas solo relacionan operaciones con el producto exterior. Las ecuaciones que gobiernan el fenómeno electrohidrodinámico combinan este conjunto de ecuaciones y la dinámica de las ecuaciones no lineales de Navier-Stokes.

2. Ley de Maxwell-Faraday:

Las ecuaciones de Maxwell-Faraday en términos diferenciales permiten estudiar el cambio en un entorno magnético en que se encuentre una bobina, cualquiera que sea la naturaleza de este cambio, producirá inducción de voltaje en la bobina. En esta subsección se estudian la representación en formas diferenciales del segundo par de ecuaciones de Maxwell.

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (2.27)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.28)$$

En ausencia de una fuente magnética, la forma diferencial de la segunda parte de las ecuaciones de Maxwell en su forma diferencial vienen dadas por (2.27) y (2.28). Se reemplazará el operador nabla ∇ por d . Sabiendo que el rotacional de un vector es representado por $d \wedge$ operando sobre una 1-forma y que la divergencia es representado por este mismo operador sobre una 2-forma, se concluye que \vec{E} es una 1-forma y \vec{B} es una 2-forma, de esta manera, las ecuaciones (2.27) y (2.28) se reescriben en términos de 2-forma y 3-forma respectivamente:

$$d \wedge \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (2.29)$$

$$d \wedge \vec{B} = 0 \quad (2.30)$$

Estas expresiones de 1-forma para \vec{E} y una 2-forma para \vec{B} da el mismo análisis dimensional debido a que las dimensiones físicas para $d \wedge$ y $\frac{\partial}{\partial t}$ son la misma, $\frac{1}{m}$.

3. **Campo de Fuerza.** En una representación espacio temporal (4 dimensiones) de los campos electromagnéticos, el campo eléctrico \vec{E} es una 1-forma y el campo magnético \vec{B} es una 2-forma combinada con una 2-forma $\vec{\Phi}$ llamada campo de fuerza, ya que \vec{E} y \vec{B} dan lugar a las fuerzas electromagnéticas.

$$\vec{\Phi} = \vec{B} + \vec{E} \wedge dt \quad (2.31)$$

La ecuación (2.31) se denota como una 2-forma, haciendo $d \wedge \Phi = 0$ en (2.31) y sustituyendo se tiene que:

$$\begin{aligned} d \wedge \Phi &= \left(d_{xyz} + \frac{\partial}{\partial t} \wedge dt \right) \wedge \left(\vec{B} + \vec{E} \wedge dt \right) \\ d \wedge \Phi &= d_{xyz} \wedge \vec{B} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \wedge dt + d_{xyz} \wedge \vec{E} \wedge dt + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \wedge dt \wedge dt \\ d \wedge \Phi &= d_{xyz} \wedge \vec{B} + \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + d_{xyz} \wedge \vec{E} \right) \wedge dt \end{aligned} \quad (2.32)$$

Las componentes espaciales y temporales de esta ecuación (2.32) deben satisfacer por separado $d \wedge \Phi = 0$ y lleva a las ecuaciones (2.29) y (2.30), esta ecuación resultante

es el planteamiento cuatro dimensional de las leyes electromagnéticas de conservación flujo local, esto, es cambio en el tiempo de una carga magnética 2-forma \vec{B} es asociado al campo eléctrico \vec{E} 1-forma de acuerdo con las leyes de Faraday.

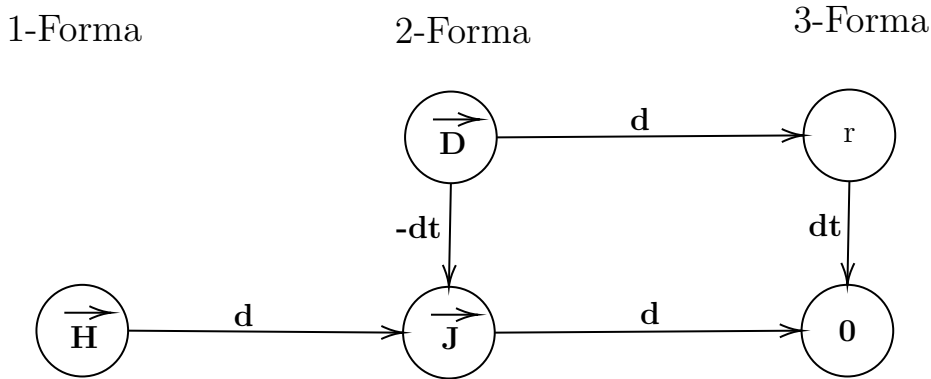


Figura 2.2: Formas diferenciales electromagnéticas.

El diagrama de la figura ?? representa la forma gráfica de obtener las ecuaciones 2.24 y 2.25 en términos de formas diferenciales, con su respectiva clase de forma.

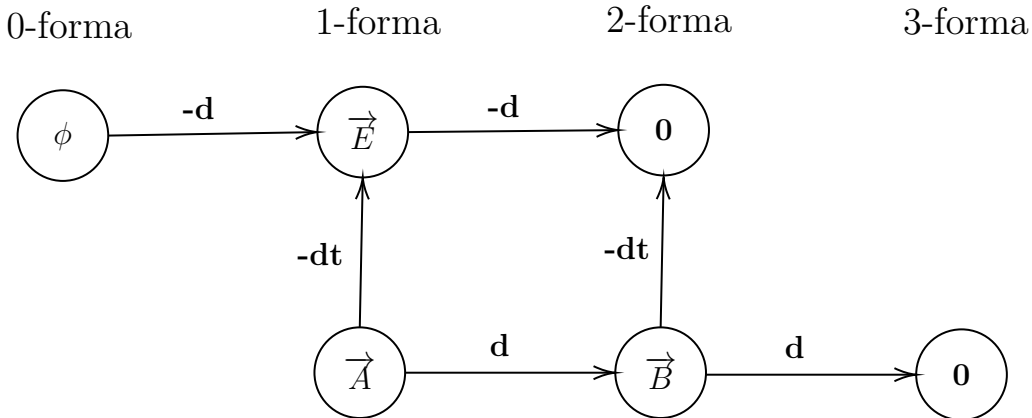


Figura 2.3: Relación de potenciales y ecuaciones de Maxwell en términos de formas diferenciales.

Con el diagrama presentado en la figura ??, la 2-forma \vec{B} puede ser expresada en términos de un potencial 1-forma, así:

$$\vec{B} = d \wedge A \tag{2.33}$$

Se sabe que $d \wedge \vec{B} = 0$ de la ecuación (2.30), del digrama de la figura ?? se puede obtener $\vec{B} = \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, esta expresión se reemplaza en (2.33) para obtener:

$$d \wedge \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \quad (2.34)$$

Existe un potencial 0-forma ϕ que puede ser expresado como $-d \wedge \phi$ para definir el campo eléctrico:

$$\vec{E} = -d \wedge \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (2.35)$$

En consecuencia, la representación de los campos no es única, ya que se pueden expresar las variables en términos de los potenciales \vec{A} y ϕ y estos pueden cambiar así;

$$\phi \rightarrow \phi + \frac{\partial \psi}{\partial t}; \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A} - d \wedge \psi \quad (2.36)$$

Sin cambiar \vec{E} y \vec{B} , ψ puede ser una función escalar. Las ecuaciones de Maxwell y las relaciones con los potenciales se pueden apreciar en las gráficas de los diagramas de las figuras ?? y ??, las líneas horizontales representan las formas diferenciales en términos de las coordenadas espaciales y las líneas verticales hacen referencia a las formas diferenciable en términos de variable temporal [17],[18].

2.3. Dinámica del fenómeno EHD

Debido al alto voltaje aplicado por un electrodo en un medio diferente del vacío, este ioniza los electrones y divide el aire de las moléculas. Este efecto se conoce como el efecto corona de descarga, mientras las cargas positivas son atraídas por el electrodo, ya que el diferencial positivo de voltaje se rige por las fuerzas de Coulomb, sumando todos los efectos del proceso se obtiene una combinación de: el flujo de aire, perturbación de iones debido al campo eléctrico asociado y el movimiento de partículas [19]. Una combinación de modelos matemáticos son necesarios para describir este problema, la continuidad de Navier - Stokes para el flujo durante la ionización. Resolver esta ecuación para flujos turbulentos no es factible debido al costo computacional. El subproblema eléctrico causado por el flujo electrohidrodinámico (EHD) se plantea con las cantidades del campo eléctrico, densidad de carga, y densidad de corriente. La condiciones de frontera para la densidad de carga se deben plantear de forma que acoten esta variable en el efecto corona del electrodo, mientras se estudia lo que sucede alrededor (vecindad). Este subproblema es difícil de solucionar debido a la no linealidad

de las ecuaciones y de las condiciones de contorno. El objetivo de esta sección es plantear las ecuaciones que gobiernan este fenómeno y las condiciones para encontrar una solución numérica.

2.3.1. Navier-Stokes no lineal

El cálculo del campo eléctrico y la densidad de carga son de interés para el cálculo numérico del flujo electrohidrodinámico (EHD). Debido a la descarga de efecto corona, los electrones son inyectados en la capa de ionización entre el electrodo (fuente de campo eléctrico) y el espacio formado por el aire y el medio [20]. Este modelo se basa en el estudio de las ecuaciones de Maxwell y la suma de fuerzas de desplazamiento, transporte y difusión. La electrohidrodinámica (EHD) estudia los fluidos sometidos a la acción de campos eléctricos, electricidad (campos y corrientes eléctricas) y hidrodinámica (movimiento del fluido), las distribuciones de campo eléctrico y velocidad están intrínsecamente acopladas. El cálculo del campo eléctrico y densidad de carga son de interés en el fenómeno electrohidrodinámico (EHD). Dado el efecto corona entre el electrodo y el medio, la distribución de potencial varía en la capa de ionización y forma densidad de carga, el modelo EHD se basa en las ecuaciones de Maxwell y las ecuaciones de cantidad de movimiento. El campo eléctrico \vec{E} puede ser expresado como el campo gradiente de un potencial eléctrico Φ .

$$\vec{E} = -\nabla\Phi \quad (2.37)$$

Debido a la ley de Gauss, se conoce que el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada se determina por medio de su forma diferencial

$$\text{div}(\vec{D}) = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial D_i}{\partial x_i} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} = \rho \quad (2.38)$$

Donde ρ denota la densidad espacial de carga y \vec{D} es el vector de desplazamiento eléctrico. El medio que se encuentra entre los electrodos (electrodo y tierra) se asume con propiedades lineales, homogéneas e isotrópicas. De acuerdo con las leyes constitutivas que relacionan el campo eléctrico \vec{E} y su desplazamiento, se tiene:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (2.39)$$

La permitividad eléctrica ε en términos generales, es un tensor 3×3 [21], para el caso de estudio de este documento el medio será tratado como homogéneo e isotrópico, por lo tanto se puede simplificar este valor a una constante, además como el material es lineal, entonces la permitividad ε es también independiente del campo eléctrico \vec{E} , por lo tanto se obtiene:

$$\operatorname{div}(\varepsilon \vec{E}) = \rho \quad (2.40)$$

Con el planteamiento espacial del campo eléctrico (2.37), la ecuación (2.40) conlleva a la ecuación de Poisson para el potencial eléctrico Φ :

$$-\operatorname{div}(\varepsilon \nabla \Phi) = \rho \quad (2.41)$$

A continuación se analizará la corriente eléctrica debido al movimiento de las cargas, esto es, la ley de conservación de carga estable que la variación de la densidad de carga en el tiempo en un medio es igual a la suma de las cargas que entran (cargas de entrada = cargas de salida) y esto conlleva al flujo de corriente eléctrica en este medio (o material), así, la densidad de corriente eléctrica \vec{J} y la densidad de espacial de carga ρ se relacionan por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{J}) = 0 \quad (2.42)$$

La densidad de corriente eléctrica tiene tres contribuciones macroscópicas, que están relacionadas con el movimiento de iones y por la difusión de corriente, esto es, la primera contribución es debido al cambio en las partículas, las cuales son aceleradas por la fuerza de Coulomb y se mueven a través del medio, y viene dada por la expresión $b(\nabla \Phi)\rho$ donde b es la movilidad de iones. Por último, el cambio en las partículas tienden al estado estable de la difusión de corriente dada por $-d\nabla\rho$, donde d es el coeficiente de difusión de iones.

$$\vec{J} = b(\nabla \Phi)\rho - d\nabla\rho \quad (2.43)$$

La ecuación (2.43) también puede ser obtenida por medio de la formulación de movimiento de cargas y electrones de Boltzmann. A esa formulación se llega luego de aplicar el método de los momentos, la cual describe la evolución de la distribución de partículas que dependen del espacio, velocidad y tiempo en un fluido. Esta formulación frecuentemente se usa para estudiar como un fluido transporta partículas cargadas. Una característica del método de los momentos es la reducción de las variables involucradas, es decir, pasar de siete variables (3 espaciales, 3 velocidades y una temporal) a solamente cuatro (3 espaciales y una temporal) por medio de la integración de las variables que relacionan cantidades físicas dentro de un medio. Resumiendo lo anterior 1.1, (2.37), (2.42) y (2.43) en la ecuación de conservación de movimiento (1.1) definida en el capítulo 1 se tiene que:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + b(\nabla \Phi) \cdot (\nabla \rho) - d(\nabla^2 \rho) &= 0 \\ \nabla^2 \Phi &= -\frac{\rho q}{\varepsilon} \end{aligned} \right\} \quad (2.44)$$

Siendo, $\frac{\partial \rho}{\partial t}$, Variación temporal de la densidad espacial de carga

$(\nabla \Phi) \cdot (\nabla \rho)$ Términos convectivos: No lineales.

$(\nabla^2 \rho)$ Laplaciano de la densidad de espacial de carga.

$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho q}{\varepsilon}$ Ecuación de Poisson en el medio.

2.3.2. Condiciones de Frontera

Sin perder generalidad el modelo matemático obtenido por medio de las ecuaciones de movimiento (1.1) y (2.44) se soluciona en dos dimensiones para las configuraciones descritas a continuación, el dominio donde desea resolver la ecuación diferencial parcial propuesta en (2.44) consiste en la inserción de electrodos de diferente configuración (punta cargada y anillo cargado), partiendo el dominio en tres partes Ω_{el} , Ω_{in} y Ω_0 . La región que comprende Ω_{el} hace referencia al potencial inyectado por el electrodo, este dominio se encuentra aislado del resto del dominio, allí es donde se produce el efecto corona descrito anteriormente. Ω_{in} relaciona las propiedades isotropicas del medio donde se desea solucionar (2.44), esto es, calcular la distribución de carga espacial y potencial dentro del dominio, por último, el dominio relacionado con Ω_0 tiene como valores especificos iguales a cero para la densidad espacial de carga y potencial eléctrico. Las condiciones de frontera para el potencial eléctrico son sencillas de imponer, ya que se conoce que el dominio Ω_0 está a potencial cero, por lo tanto se tiene que :

$$\left. \begin{array}{l} \Phi = 0 \quad \Omega_0 \\ \Phi = \Phi_i \quad \Omega_{in} \end{array} \right\} \quad (2.45)$$

En el electrodo se sabe que se va a aplicar cierta cantidad de voltaje por lo tanto $\Phi = \Phi_i \quad \Omega_{in}$ es diferente de cero. Las condiciones de frontera para la densidad espacial de carga vienen dadas de forma similar a las propuestas anteriormente, esto es, no hay flujo de corriente eléctrica en dirección normal (z, \vec{n}) , entonces $\vec{J} \neq 0$ en Ω_{in} e igual a cero en Ω_0 , tanto la densidad de corriente \vec{J} como la densidad de carga eléctrica ρ se desvancen a medida que se acercan a la zona del dominio donde el potencial Φ es cero y en la zona del dominio donde se produce el efecto corona es diferente de cero. Desde el punto de vista analítico se conocen las condiciones en todos los puntos del dominio donde se desea resolver la ecuación (2.44) y las condiciones de contorno que se deben cumplir; como resultado de esto, entonces las densidad de corriente y el potencial, al igual que su distribución dependen del valor aplicado por el electrodo y la configuración de este. En general, el campo eléctrico es directamente proporcional al voltaje aplicado por electrodo; este afecta a la demás variables, debido al

efecto corona dentro del dominio, y estas se desvanecen fuera de este. Para finalizar, las ecuaciones de Maxwell en su forma diferencial, se pueden expresar en término de formas diferenciables, y las ecuaciones de cantidad de movimiento, que involucran leyes conservativas eléctricas y de mecánica de fluidos (análoga al potencial y la densidad de espacial de carga), modelan un fenómeno eléctrico formulado, en términos de EDP no lineales.

Capítulo 3

Conceptos Método de Elementos Finitos

3.1. Aproximación de Galerkin

La formulación variacional para solucionar un sistema de ecuaciones diferenciales parciales es dada para encontrar un potencial $u \in H_0^1$ tal que:

$$A(u, v) = f(v) \quad \forall v \in H_0^1 \quad (3.1)$$

Con propiedades bilineales y lineales tales que:

$$\begin{aligned} A(w, u) &:= (a \nabla w, \nabla u) + (b \cdot \nabla w + w, v) \\ f(v) &:= (f, v) - (g, v) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Con un espacio formado por elementos finitos

$$V_h = \{v \in V_h(x) | v|_{\Omega}\} \subset H_0^1 \quad (3.3)$$

La formulación de Galerkin lleva al resolver el problema planteado por medio de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales en términos de un espacio fragmentado, esto es, encontrar un potencial $u_h \in V_h$ tal que:

$$A(u_h, v_h) = f(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \quad (3.4)$$

Para el problema planteado por medio de ecuaciones diferenciales parciales se deben imponer condiciones de frontera para encontrar el potencial $u_h \in V_h \subset H^1(\Omega)$ dentro del dominio de tal forma que:

$$B(u_h, v_h) = \widehat{f}(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \quad (3.5)$$

Con las formas lineales y bilineales dadas como:

$$\begin{aligned} B(w, u) &:= (b \cdot \nabla w + w, v) - \langle w, v \rangle \\ f(v) &:= (f, v) - (g, v) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Las propiedades de la forma bilineal $B(.,.)$ vienen definidas para cualquier $v \in H^1(\Omega)$, esto es:

$$B(v, v) = \|v\|^2 + \frac{1}{2} \langle v, v \rangle \quad (3.7)$$

Las condiciones de frontera para la ecuación (3.7) son necesarias para la existencia y unicidad de la aproximación. Si ρ satisface la ecuación (2.44) y $\rho_h \in V_h$ es la aproximación entonces existe una constante C que acota la respuesta, esto es:

$$\|\rho - \rho_h\|^2 \leq \langle \rho - \rho_h, \rho - \rho_h \rangle \leq C \|\rho\| \quad (3.8)$$

La estimación del error de la solución aproximada propuesta en la ecuación (3.8) indica que si la solución numérica ρ es lo suficientemente suave ($\rho \in H(\Omega)$) de tal forma que la norma de $\|\rho\|$ es finita, entonces los productos internos definidos por la ecuaciones (3.1), (3.4)-(3.7), permiten estimar la solución aproximada mediante la discretización del dominio Ω con las funciones de forma coersivas (dadas por (3.47), figura 3.5) $\subset H(\Omega)$ lo cual conlleva la forma bilineal:

$$A(v, v) = \int_{\Omega} d |ds \nabla v|^2 + \int_{\Omega} b \nabla v v ds + \int_{\Omega} v^2 ds \quad (3.9)$$

Note que ds hace referencia a la integración de las funciones de forma lineal planteadas en (3.47), por otro lado, el segundo termino de (3.9) puede ser positivo o negativo dado el término b , se usará la estimación de límite inferior, por lo tanto $b < 0$ que conlleva a:

$$\begin{aligned} A(v, v) &\geq \int_{\Omega} d |ds \nabla v|^2 - \int_{\Omega} b \nabla v v ds + \int_{\Omega} v^2 ds \\ A(v, v) &\geq \|\nabla v\|^2 - b \left(\frac{1}{2} \|\nabla v\|^2 + \frac{1}{2} \|v\|^2 \right) + \|v\|^2 \\ A(v, v) &\geq \left(1 - \frac{b}{2} \|\nabla v\|^2 \right) + \left(1 - \frac{b}{2} \|v\|^2 \right) \\ A(v, v) &\geq \min \left(1 - \frac{b}{2}, 1 - \frac{b}{2} \right) \|\nabla v\|^2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

La coercividad de $v \in V_h$ viene dada por:

$$\begin{aligned} A(v, v) &\geq \alpha \|\nabla v\|^2 \\ \alpha &= \min \left(1 - \frac{b}{2}, 1 - \frac{b}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

La coercividad completa los supuestos del teorema de Lax-Milgram, por lo tanto, se garantiza la existencia y la singularidad de la solución aproximada así como de la solución de Galerkin.

3.1.1. Teorema de Lax-Milgram

Sean las funciones $f \in L^2$ consideradas como formas lineales y continuas sobre H por medio de la identidad:

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle = \int f v \quad \forall v \in H \quad (3.12)$$

La simetría producto interno en Hilbert se expresa como:

$$a(u, v) = a(v, u) \quad v \in H \quad (3.13)$$

De acuerdo con lo planteado por Michel Chipot en [22], se requiere una relajación de las funciones de forma para encontrar una solución aproximada de una ecuación diferencial (Parcial), esto es, encontrar el funcional que minimiza la J con la penalización del producto interno en Hilbert H con $\frac{\lambda}{2}$, así:

$$J(v) = \frac{\lambda}{2} a(u, v) - \langle f, v \rangle \quad (3.14)$$

Considere la siguiente ecuación diferencial de segundo orden:

$$-u''(x) + u(x) = f(x) \quad x \in I \quad (3.15)$$

Las condiciones de frontera vienen dadas por un problema de valor inicial de Dirichlet:

$$u(0) = u(1) = 0 \quad I(0, 1) \text{Dirichlet} \quad (3.16)$$

El problema de optimización planteado en (3.17) consiste en encontrar dentro del intervalo I un funcional dado el espacio de Hilbert H :

$$J : H'_0(I) \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.17)$$

La existencia, unicidad y dependencia continua respecto a las condiciones iniciales de la solución, se obtienen dados el teorema de Lax-Milgram. Si la forma bilineal de $a(., .)$ es

continua, es decir, existe $M > 0$ tal que $|a(u, v)| \leq M \|u\| \|v\|$ para todo $u, v \in H$ y coersitiva ($\exists m | a(u, u) \geq m \|u\|^2 \forall u \in H$), entonces la solución resulta de encontrar el funcional por medio de la minimización de J como se desarrolla en los siguientes pasos:

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_I (v(x)^2 + v'(x))^2 dx - \int_I f(x)v(x)dx \quad (3.18)$$

$$H'_0(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R}\} \quad (3.19)$$

f absolutamente continua, $\|u\| \leq \frac{1}{m} \|f\|$, entonces:

$$f' \in L^2(I) \quad (3.20)$$

El producto interno en H :

$$u, v \in H'_0(I) \quad (3.21)$$

$$\langle u, v \rangle = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_I u'v'dx \quad (3.22)$$

$$H'_0(I) \times H'_0(I) \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.23)$$

$$a(u, v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 u(x)v(x)dx \quad (3.24)$$

Función de Prueba coercitiva:

$$\varphi \in C'_0(I) \quad (3.25)$$

$$\int -u''\varphi + \int u\varphi = \int f\varphi \quad (3.26)$$

Integrando por parte se tiene que:

$$\begin{array}{ccc} \delta & & \int \\ \varphi & & u'' \\ & \searrow (+) & \\ \varphi' & \rightarrow (-) & u' \end{array}$$

$$- \varphi u'|_0^1 + \int_0^1 u' \varphi' dx \tag{3.27}$$

Se evalúa la integral en la frontera

$$\int_I u' \varphi' dx + \int_I u \varphi dx = \int_I f \varphi dx \quad \forall \varphi \in H'_0(I) \tag{3.28}$$

Respecto a las hipótesis de Lax-Milgram, la continuidad de $a(., .)$ se suele obtener como la consecuencia de la desigualdad de Cauchy-Schwarz. La coercividad es la propiedad en cierta medida más difícil de probar debido a la desigualdad de Poincaré. Sin embargo, en unos casos muy limitados la coercividad se obtiene de manera sencilla con funciones de prueba lineales como la de las imágenes y sus respectivas derivadas, obteniendo fácilmente:

$$|a(u, v)| \leq \left| \int_I u' v' dx \right| + \left| \int_I u v dx \right| \leq |\langle u, v \rangle_{H'_0(I)}| + |\langle u, v \rangle_{L^2(I)}| \leq \|u\| \|v\| + \|u_{L^2}\| + \|v_{L^2}\| \tag{3.29}$$

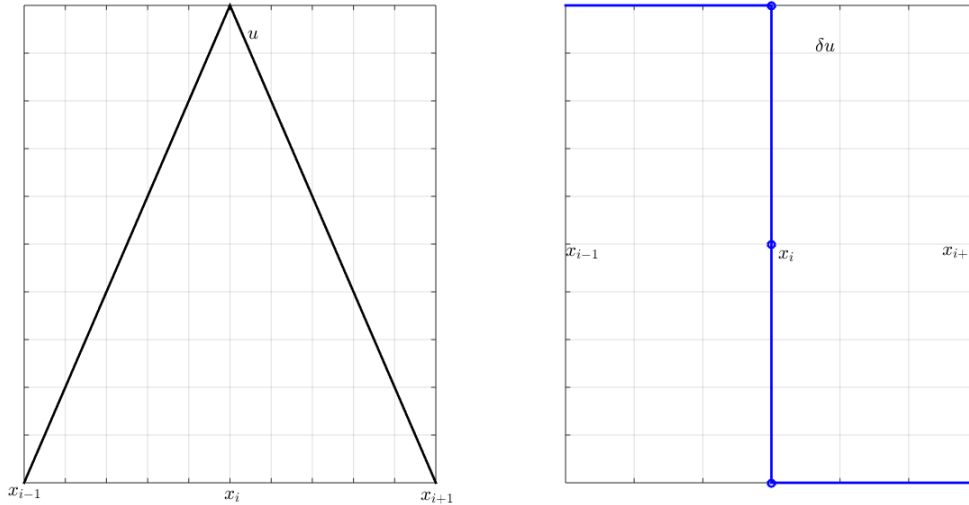


Figura 3.1: Función u y su derivada.

Desigualdad de Poincaré:

$$\|u\|_{L^2} \leq C \|u\|_{H'_0} \leq \|u\| \|v\| + C^2 \|u\| \|v\| \tag{3.30}$$

$$|a(u, v)| \leq (1 + C^2) \|u\|_{H'_0} \|v\|_{H'_0} \tag{3.31}$$

$$\varphi : H'_0(I) \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.32)$$

$$\varphi(u) = \int_0^1 f(x)v(x)dx \quad (3.33)$$

$\varphi \in (H'_0(I))$ es dual, es el conjunto de funciones lineal y continuos.
 φ es lineal y continua (desigualdad de Cauchy Swartz)

La unicidad de la solución del problema planteado al inicio de esta sección, se obtiene minimizando el funcional J de tal forma que $J(u) = \min_{v \in H'_0(\Omega)} J(v)$, para encontrar una función $u \in \Omega$.

$$J(u) = \min_{v \in H'_0(\Omega)} \left(\left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Omega} f v dx \right) \right) \quad (3.34)$$

3.2. Montaje de los elementos finitos

El método de elementos finitos hace parte del análisis numérico usado para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales. Las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales modelan fenómenos encontrados en diferentes ramas como la matemática, física e ingeniería. Algunos fenómenos y modelos de ecuaciones diferenciales son las ecuaciones de Maxwell que describen el comportamiento de las variables electromagnéticas en su forma diferencial. Otras ecuaciones diferenciales son: la ecuación de Laplace, la ecuación de Poisson, la ecuación de Helmholtz, la ecuación de difusión de calor, la ecuación de potencial y la ecuación de Elastodinámica entre otras. Una ventaja que tiene el método de elementos finitos como se propone en [23], sobre los métodos de diferencias finitas, es la facilidad de sobrepasar el problema del manejo de las condiciones de frontera de los problemas. La mayor cantidad de los problemas que se modelan por medio de ecuaciones diferenciales parciales implican derivadas y formas irregulares, estas condiciones (dominios irregulares y aproximaciones de derivadas de orden superior) tienen su formulación en el método de diferencias finitas pero no son completamente obtenidas en materiales no lineales con dominios discontinuos, lo cual es una desventaja para problemas como entre hierros en materiales ferromagnéticos [24]. El método de elementos finitos permite incluir dentro de su formulación variacional e integral las condiciones de frontera con derivadas de orden superior y dominios irregulares como una función de minimización por lo cual la formulación permite analizar en cada punto del dominio las condiciones de frontera del problema.

3.2.1. Caso Unidimensional

Una vez el dominio Ω se fraccione en los elementos, se debe definir una función en un espacio V en cada elemento i , esta función se usa de forma local sobre cada elemento para formar una función global en el dominio Ω . Las particiones del dominio se hacen de forma consecutiva y la función de interpolación local para cada elemento debe cumplir una las siguientes condiciones:

$$f(x_i) \in V \quad (3.35)$$

La función de interpolación lineal 3.35 tiene que cumplir las siguientes dos condiciones:

- $f(x_i)$ es decreciente desde el elemento i hasta $i + 1$.
- $f(x_i)$ es creciente desde el elemento i hasta $i + 1$.

La unión de todas estas funciones segmentadas continuas entre elemento (i) a elemento ($i + 1$) del dominio fraccionado forman una función global continua en dominio Ω y es la solución aproximada de la ecuación diferencial de acuerdo con las condiciones de frontera. Esto es, los elementos finitos están formados por tres características (i, V, L), la cantidad de elementos en los que se fracciona el dominio Ω , la función de interpolación lineal alrededor de elementos adyacentes que pertenece al espacio V , L la cantidad de nodos que es igual $i + 1$ elementos. El dominio está limitado y está encerrado por las condiciones de frontera. Las divisiones del dominio son un subconjunto del dominio $R^d = d = 1, 2, 3..$ donde se esté interesado solucionar la ecuación diferencial. La solución general es la suma de todas las funciones lineales alrededor de cada elemento de la siguiente forma:

$$V_h(x) = \sum_{i=1}^L b_i \varphi_i(x) \quad (3.36)$$

Donde los coeficientes b_i representan los valores de V_h evaluados en cada nodo i . Los valores de V_h satisfacen las condiciones de frontera del problema. Las funciones de forma siguen las condiciones anteriormente descritas, así como se presenta en la gráfica de la figura 3.2.

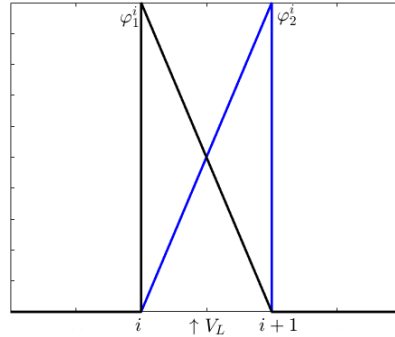


Figura 3.2: Función de forma lineal alrededor de cada elemento.

En la figura 3.2 se presentan las funciones de forma lineal para el elemento i con tamaño entre elementos de $\delta i = i_{+1} - i$. La función φ_1^i decae de un valor máximo en el elemento i y llega a cero en el elemento $i + 1$. La función φ_2^i crece desde cero en el elemento i hasta un valor máximo en el elemento $i + 1$.

De acuerdo con la teoría propuesta en [1] las funciones φ_1^i y φ_2^i cumplen en el dominio las siguientes proposiciones:

- La función de interpolación global es compacta, esto es, que la función en un valor fuera de los subdominios Ω_i sea igual a cero, además que la interpolación sea diferente de cero solamente entre elementos consecutivos.
- La aproximación numérica de la respuesta viene dada por siguiente expresión:

$$V_h(x) = b_1\varphi_1 + b_2\varphi_2 + \dots + b_n\varphi_n$$

De las anteriores proposiciones $v_h(x)$ es una función lineal por partes que se aproxima a la solución. La solución viene dada por la unión de las funciones definidas en cada intervalo Ω_e ya que el intervalo se fracciona en L elementos finitos y estos elementos finitos forman un subconjunto de Ω llamado X^h , donde $X^h \in \Omega$ y las funciones que forman la base de X^h son $\varphi_i(x)_{i=1}^L = \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_L(x)$. Por lo tanto, la función de aproximación también cumple las condiciones iniciales del problema, así:

$$V_h(x) = \{V_h(x) \in X^h | V_h(0) = u_0; V_h(L) = u_L\} \quad (3.37)$$

se deben calcular los siguientes coeficientes de la matriz de la sumatoria. Los coeficientes vienen dados por las siguientes expresiones:

$$[K][b] = [F] \quad (3.38)$$

Con el sistema de ecuaciones lineales planteado en (3.38) se calculan los valores de la incognita $[b]$ por medio de la integración de los elementos de $[F]$ y $[K]$, como se plantea a continuación:

$$[F] = [F_i]_{i=1}^L = \sum_{e=1}^L \int_e^{e+1} \left(\sum_{j=1}^L f_j \varphi_j^e(x) \right) \varphi_i^e(x) dx \quad (3.39)$$

Del vector de carga $[F]$ se obtiene:

$$[F_i]_{i=1}^L = \begin{aligned} & \int_{\Omega_1} (f_1 N_1^1(x) + f_2 N_2^1(x) + \dots + f_L N_L^1(x)) N_i^1(x) dx + \\ & \int_{\Omega_2} (f_1 N_1^2(x) + f_2 N_2^2(x) + \dots + f_L N_L^2(x)) N_i^2(x) dx + \\ & \quad + \\ & \quad \vdots \\ & \quad + \\ & \int_{\Omega_L} (f_1 N_1^L(x) + f_2 N_2^L(x) + \dots + f_L N_L^L(x)) N_i^L(x) dx \end{aligned} \quad (3.40)$$

Cada elemento de la suma se puede simplificar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} F_i^1 &= \int_{\Omega_1} (f_1 N_1^1(x) + f_2 N_2^1(x) + \dots + f_L N_L^1(x)) N_i^1(x) dx \\ F_i^2 &= \int_{\Omega_2} (f_1 N_1^2(x) + f_2 N_2^2(x) + \dots + f_L N_L^2(x)) N_i^2(x) dx \\ F_i^L &= \int_{\Omega_L} (f_1 N_1^L(x) + f_2 N_2^L(x) + \dots + f_L N_L^L(x)) N_i^L(x) dx \end{aligned} \quad (3.41)$$

Donde los términos $i \notin \Omega_e$ no se calculan. Con $f_i = f(x_i)$ la función que hace no lineal la ecuación diferencial. Se evalúa en cada nodo la función no lineal de la ecuación diferencial. De los coeficientes de carga $[F]$ se tienen las siguientes consideraciones en cuanto al cálculo de los términos $\varphi(x)_j^e$ y $\varphi(x)_i^e$. Si el nodo i, j no pertenece al elemento e no se calcula, de lo contrario si se calculan los términos $\varphi(x)_j^e$ y $\varphi(x)_i^e$, esto es, $\varphi(x)_j^e$ y $\varphi(x)_i^e \neq 0$ si $i, j \in \Omega_e$. Los términos de la matriz $[K]$ hacen referencia a la matriz de robustez que acopla la aproximación con las funciones de forma lineales y se calculan de la siguiente como sigue:

$$K_{ij} = \sum_{e=1}^L k_{ij}^e = \int_e^{e+1} \left(\frac{d\varphi(x)_i^e}{dx} \frac{d\varphi(x)_j^e}{dx} + \varphi_i^e(x) \varphi_j^e(x) \right) dx \quad (3.42)$$

De la expresión: $\varphi(x)_j^e$ y $\varphi(x)_i^e \neq 0$ si $i, j \in \Omega_e$, se pueden realizar las siguientes afirmaciones respecto al cálculo de algunos términos $\varphi(x)_j^e$ y $\varphi(x)_i^e$:

- El término resultante de $\int_{\Omega_{e1}} \left(\frac{d\varphi(x)_i^{e1}}{dx} \frac{d\varphi(x)_j^{e1}}{dx} + \varphi_i^{e1}(x) \varphi_j^{e1}(x) \right) dx$ se puede reescribir como los k_{ij}^1 de elemento $1, k_{ij}^1 \in \Omega_1$

- El término resultante de $\int_{\Omega_{eL}} \left(\frac{d\varphi(x)_i^{eL}}{dx} \frac{d\varphi(x)_j^{eL}}{dx} + \varphi_i^{eL}(x)\varphi_j^{eL}(x) \right) dx$ se puede reescribir como los k_{ij}^L de elemento $1, k_{ij}^L \in \Omega_L$
- $\varphi_i^e(x)\varphi_j^e(x) = 0$ si alguno de los nodos i o j no pertenecen a Ω_e
- $V_h(x) = \{V_h(x) \in X^h | V_h(0) = u_0; V_h(L) = u_L\}$ Forman un subconjunto de funciones lineales que cumplen las condiciones iniciales, por lo tanto, las funciones de forma lineal en los extremos satisfacen las condiciones del problema:
 $V_h(x) = \{V_h(x) \in X^h | \varphi_1(0) = u_0; \varphi_1(L) = u_L\}$.

Las funciones de forma lineal en cada subdominio $\Omega_i \in L$ vienen dadas por la expresión:

$$\begin{aligned} \varphi_{i+1}^e(x) &= \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ \varphi_i^e(x) &= \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ &0 & \text{en otro caso} \end{aligned} \quad (3.43)$$

3.2.2. Caso Bidimensional

Para formular la solución numérica de una ecuación diferencial parcial en dos dimensiones, es necesario fragmentar el dominio en secciones linealmente independientes, con forma lineal de tal forma que las condiciones sean continuas en cada subdominio que forman parte del dominio original. Para el caso de dos dimensiones usualmente se fragmenta el dominio por medio de triángulos, si son ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas, o por cuadriláteros si son ecuaciones diferenciales parciales parabólicas o elípticas. Una vez el dominio Ω se fraccione en los elementos, se debe definir una función en un espacio V en cada elemento i , esta función se usa de forma local sobre cada elemento para formar una función global en el dominio Ω . Las particiones del dominio se hacen de forma consecutiva y la función de interpolación local para cada elemento debe cumplir una las siguientes condiciones:

$$\varphi(x_i, y_i) \in V \quad (3.44)$$

$\varphi(x_i, y_i)$ es un triángulo de la forma $a + bx_i + cy_i$. Para cada pareja $(x_i, y_i) \in V \in \Omega$. Como se muestra en las figuras 3.3 y 3.4, cada uno de los elementos en los cuales se fragmenta el dominio de la figura 3.3 son triángulos los cuales se rigen por la ecuación $\varphi(x_i, y_i) = a + bx_i + cy_i$, donde cada una de las constantes dependerá de la ubicación de cada triángulo y de las condiciones iniciales y de frontera de problema de que se quiera solucionar. La unión de todas estas funciones segmentadas continuas entre elemento (i, j) a elemento $(i + 1, j + 1)$ del

dominio fraccionado, forman una función global continua en el dominio Ω y es la solución (numérica) aproximada de la ecuación diferencial de acuerdo con las condiciones de frontera, así:

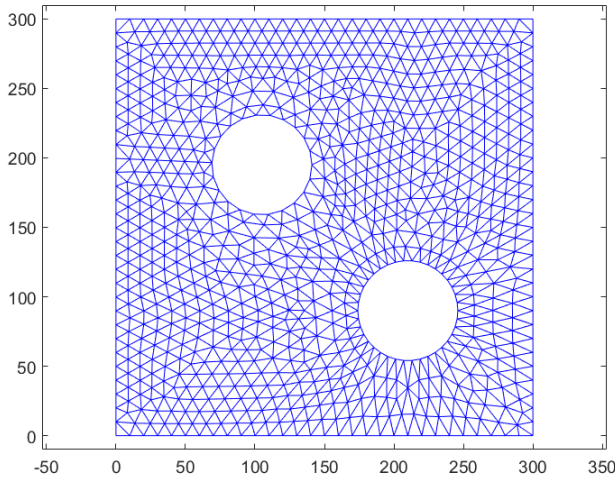


Figura 3.3: Triangulación del dominio.

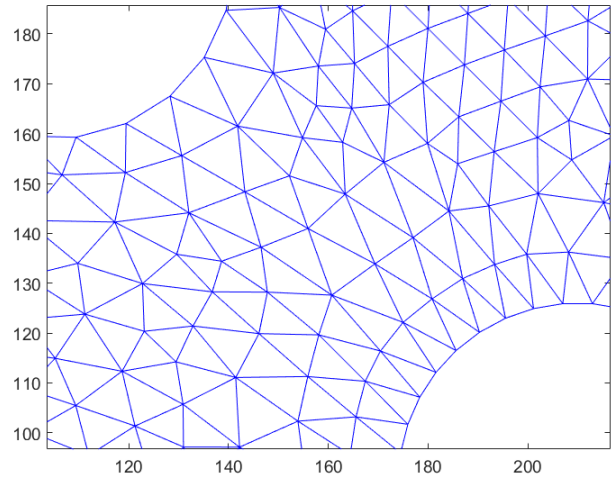


Figura 3.4: Acercamiento Triangulación del dominio.

$$V_h(x, y) = \sum_{i=1}^N \gamma_i \varphi_i(x, y) \quad \in \Omega \quad (3.45)$$

Los elementos finitos están formados por tres características (i, V, N) ; i la cantidad de nodos en los que se fracciona el dominio Ω , la función de interpolación que alrededor de cada elemento o subdominio se formulan las ecuaciones $\varphi(x_i, y_i)$ de cada triángulo y de los cuales las constantes a, b, c dependerán de las coordenadas y de los valores de las variables que se estén calculando (condiciones de frontera y continuidad del problema) elementos adyacentes que pertenece al espacio V ; N la cantidad de elementos. El dominio está limitado y está encerrado por las condiciones de frontera. Las divisiones del dominio son un subconjunto del dominio \mathbb{R}^d , ($d = 1, 2, 3$) donde se esté interesado solucionar la ecuación diferencial; en el presente estudio es en dos dimensiones. Los coeficientes γ_i representan los valores de V_h evaluados en cada nodo (i, j) . Los valores de V_h satisfacen las condiciones iniciales y de frontera del problema. Para obtener las funciones de cada elemento, se parte de las siguientes suposiciones:

- El conjunto de funciones que se usan para aproximar la solución, es un polinomio de grado uno definido a trozos en el plano (x, y) . Esta aproximación requiere que el

polinomio resultante sea continuo en las fronteras de cada uno de los elementos que forman el dominio general Ω y que satisfagan las derivadas de primer o segundo orden según sea la ecuación diferencial parcial.

- La fragmentación del dominio se realiza por medio de triángulos como el de la figura 3.3. Donde cada nodo representa un vértice de los elementos (triángulos). De esta manera se formula la siguiente ecuación:

$$\varphi_i^E(x_k, y_k) = \left. \begin{array}{l} 1 \quad \text{si } j = k \\ 0 \quad \text{si } j \neq k \end{array} \right\} \quad (3.46)$$

Los elementos triangulares toman valor 1 si el elemento j pertenece al nodo k y cero si el elemento j no pertenece al nodo k .

Cada uno de los elementos triangulares formados por la ecuación (3.46, figura 3.5) formulan un sistema lineal de ecuaciones de la forma $[A]x = B$ para cada uno de los nodos, por consiguiente, es necesario calcular los términos de la matriz $[A]$, y la forma de los términos de B .

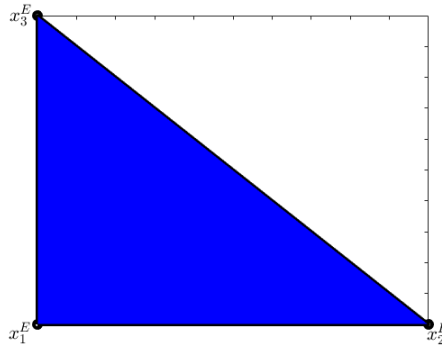


Figura 3.5: Elemento Triangular.

Para cada vértice del elemento se formulan las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{l} \varphi_1^E(x_1, y_1) = a + bx_1 + cy_1 \\ \varphi_1^E(x_2, y_2) = a + bx_2 + cy_2 \\ \varphi_1^E(x_3, y_3) = a + bx_3 + cy_3 \end{array} \quad (3.47)$$

Con las ecuaciones (3.47), anteriormente obtenidas por cada vértice del elemento triangular, se representan las funciones de interpolación lineal para un elemento triangular definido de la forma: $\varphi^E(x_k, y_k)$. Y así para los n elementos en los cuales se fragmente el dominio original. En términos de computación y análisis numérico, no todos los términos son desconocidos. Si

bien para cada elemento que no pertenezca al nodo se sabe que $\varphi^E(x_k, y_k) = 0$, si $j \neq k$ y para cada elemento que si pertenezca al nodo $\varphi^E(x_k, y_k) = 1$, si $j = k$. Los términos que sean consecutivos tendrán los mismos valores, esto debido a que la funciones de interpolación son continuas en las fronteras entre sí. Esto es, en cada división adyacente, lo que no son iguales son los términos a, b, c ya que estos si dependen también de la ubicación en el dominio y por ese motivo las áreas cambian de elemento a elemento. Por lo tanto, de las ecuaciones que resultan para cada nodo de cada elemento se obtiene el siguiente sistema lineal de ecuaciones que se propone en [3], [6],[7]:

$$\begin{bmatrix} \varphi_1^E(x_1, y_1) \\ \varphi_1^E(x_2, y_2) \\ \varphi_1^E(x_3, y_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Donde la solución viene dada por:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \frac{1}{x_1(y_2 - y_3) - x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_1 - y_2)} \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & x_3y_1 - x_1y_3 & x_1y_2 - x_2y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Del anterior sistema de ecuaciones, los términos que relacionan las coordenadas (x_k, y_k) son términos conocidos y dependen de la ubicación del elemento en el dominio. Los términos $\varphi_j^E(x_k, y_k)$ dependen de las condiciones de frontera y de los valores iniciales del problema. Las funciones $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ están definidas a trozos y son linealmente independientes. Por otro lado, los términos $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ son constantes que garantizan el cumplimiento de las condiciones de frontera. Para encontrar los coeficientes de la ecuación (3.45) es necesario minimizar un función potencial de la forma:

$$I(u(x, y)) = I\left(\sum_{i=1}^N \gamma_i \varphi_i(x, y)\right) \in \Omega \quad (3.50)$$

El problema de encontrar el potencial viene dado por el calculo de la integral planteada en la ecuación (3.51), sin embargo, en términos de energía se tiene:

$$I\left(\sum_{i=1}^N \gamma_i \varphi_i(x, y)\right) = \int \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N \left(\gamma_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\gamma_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy \quad (3.51)$$

Para minimizar la ecuación (3.51) es necesario encontrar las derivadas parciales del potencial de I respecto a $\gamma_i, \frac{\partial I}{\partial \gamma_i} = 0$ para $i = 1, 2, \dots, N$

$$\frac{\partial I}{\partial \gamma_i} = \sum_{j=1}^N \left[\int_{\Omega} \int \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right) dx dy \right] = 0 \quad (3.52)$$

$$\alpha_{ij} = \int_{\Omega} \int \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right) dx dy \quad (3.53)$$

Para cada $i = 1, 2, \dots, N$ y $j = 1, 2, \dots, N$ la ecuación (3.52) da lugar a los términos α_{ij} definidos por la integral planteada en (3.53), formando un sistema de ecuaciones lineales de la forma $[\alpha]\gamma = \beta$ donde γ_i son término desconocidos y β se definen a continuación, respectivamente:

Desconocidos.

$$[\gamma] = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

$$\beta_i = u(x_i, y_i) \varphi_i(x_i, y_i) \quad (3.55)$$

Los términos del vector de carga planteado en la ecuación (3.55) dependen de las condiciones de frontera del problema que se desee solucionar.

3.3. Planteamiento de la solución numérica para EHD

Las ecuaciones funcionales para el problema planteado por medio del sistema de ecuaciones parciales (2.44) vienen dados por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} I(\rho, \Phi) &= \frac{1}{2} \left(\int_0^t \left(\int_{\Omega} \nabla^2 \rho - d\rho \frac{d\rho}{dt} \right) ds \right) dt \quad \forall \rho, \Phi \in V_h | (x, t) \in \Omega \times (0, \tau) \\ I(\rho, \Phi) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\nabla^2 \Phi - \frac{\rho q}{\varepsilon} \Phi \right) \quad \forall \rho, \Phi \in V_h | (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty) \end{aligned} \quad (3.56)$$

El primer funcional de la ecuación planteada en (3.56) hace referencia a la solución dada por la minimización de las funciones de forma para ρ, Φ dadas dentro del dominio Ω para cualquier instante de tiempo ya que se tiene en cuenta la dinámica temporal de $\frac{\partial \rho}{\partial t}$. En la frontera del dominio se condicionan los valores de ρ, Φ iguales a cero, es decir, no existe dinámica temporal y la distribución de los potenciales es igual a cero para todo valor espacial y temporal en la frontera [25]. A continuación, se desarrollará el método de

elementos finitos para el problema planteado en la ecuación (2.44) y sus funcionales (3.56). Usando como funciones de ponderación las funciones de forma lineal $\varphi_i(x, y)$, multiplicando los funcionales (3.56) por estas funciones de forma (3.47) (figura 3.5) se tiene que:

$$\varphi_i \left(\frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} \int \nabla^2 \rho - d\rho \frac{d\rho}{dt} \right) dx dy \right) = \frac{1}{2} \left[\int_{\Omega} \int \varphi_i \nabla^2 \rho dx dy - \int_{\Omega} \int \varphi_i d\rho \frac{d\rho}{dt} dx dy \right] \quad (3.57)$$

De la ecuación planteada en (3.57) [26] se expandirán e integrarán cada uno de los términos del lado derecho del igual:

$$\int_{\Omega} \int \varphi_i \nabla^2 \rho dx dy = \int_{\partial\Omega} \varphi_i \vec{n} \cdot \nabla \rho dl - \int_{\Omega} \int \nabla \varphi_i \cdot \nabla \rho dx dy \quad (3.58)$$

Para garantizar el cumplimiento de las condiciones de contorno además de la nulidad del flujo en dirección normal, entonces $\int_{\partial\Omega} \varphi_i \vec{n} \cdot \nabla \rho dl = 0$ y $\int_{\Omega} \int \varphi_i \nabla^2 \rho dx dy = - \int_{\Omega} \int \nabla \varphi_i \cdot \nabla \rho dx dy$. De la misma forma, se realiza la aproximación numérica de las ecuaciones (3.56) y (3.57)

$$- \int_{\Omega} \int \varphi_i d\rho \frac{d\rho}{dt} dx dy = -d \sum_{i=j}^{N_t} \rho_i \frac{d\rho_i}{dt} \int_{\Omega} \int \varphi_i \varphi_j dx dy \quad (3.59)$$

$$\int_{\Omega} \int \varphi_i \nabla \Phi \cdot \nabla \rho \simeq \sum_{i=j}^{N_t} \rho_i \int_{\Omega} \int \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j dx dy \quad (3.60)$$

$$\int_{\Omega} \int \left(\nabla^2 \Phi - \frac{2\rho q}{\varepsilon} \Phi \right) dx dy \simeq \int_{\partial\Omega} \varphi_i \vec{n} \cdot \nabla \Phi dl - \frac{2\rho_i q}{\varepsilon} \int_{\Omega} \int \varphi_i \nabla \Phi \cdot \nabla \varphi_i dx dy \quad (3.61)$$

El término $\int_{\partial\Omega} \varphi_i \vec{n} \cdot \nabla \Phi dl$ hace referencia al flujo del potencial del campo eléctrico en dirección normal, el cual se hace cero .:

$$\int_{\Omega} \int \left(\nabla^2 \Phi - \frac{2\rho q}{\varepsilon} \Phi \right) dx dy \simeq - \frac{2\rho_i q}{\varepsilon} \int_{\Omega} \int \varphi_i \nabla \Phi \cdot \nabla \varphi_i dx dy \quad (3.62)$$

En términos de la integración de la variable temporal se realiza una relajación que consiste en discretizar la variable temporal así:

$$\frac{\partial \rho_h(t)}{\partial t} = \frac{1}{\delta t} (\rho_h^{k+1} - \rho_h^k) \quad (3.63)$$

Siendo k la iteración del delta de tiempo con $\delta t = t^{k+1} - t^k$, por lo tanto, la relajación de (3.59)

$$-\int_{\Omega} \int \varphi_i d\rho \frac{d\rho}{dt} dx dy = -d \sum_{i=j}^{N_t} \rho_i^k \frac{\rho_i^{k+1} - \rho_i}{\delta t} \int_{\Omega} \int \varphi_i \varphi_j dx dy \quad \forall k = [1, 2, \dots, N_k - 1] \quad (3.64)$$

Resumiendo las ecuaciones anteriormente propuestas, en la ecuación (3.56) se obtiene una expresión en término iterantes de i para cada valor de distribución del [27] dominio Ω y con el paso de tiempo para cada δt en k

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\int_0^t \left(\int_{\Omega} \nabla^2 \rho - d\rho \frac{d\rho}{dt} \right) ds \right) dt &= 0 \\ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\nabla^2 \Phi - \frac{\rho q}{\varepsilon} \Phi \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.65)$$

Capítulo 4

Análisis Numérico: Solución EHD con FEM

4.1. Estrategia de Solución

La primera etapa relaciona la solución numérica de la distribución de potencial Φ y de densidad de carga ρ que vienen dadas por las ecuaciones de recurrencia para las matrices de robustez, de masa y de carga obtenidas por medio de elementos finitos [28]

$$\rho(x, y, t) = \sum_{i=1}^{N_G} \rho_i(t) \varphi_i(x, y) \quad (4.1)$$

La función de forma lineal $\varphi_i(x, y)$ se activa cada vez que el elemento i -ésimo pertenezca al nodo de la fragmentación del dominio espacial, en caso contrario se hace cero. Los términos $\rho_i(t)$ son los valores obtenidos por medio de la segunda etapa que consiste en discretizar el tiempo desde la ecuación diferencial parcial una vez conocido los valores de la distribución espacial.

$$\sum_{i=j}^{N_G} M_{ij} \frac{d\rho_i^k}{dt} + \sum_{i=j}^{N_G} N_{ij} \rho_i^k = -d \sum_{i=j}^{N_G} D_{ij} \rho_i^k + d \sum_{i=j}^{N_G} M_{ij} \Phi_i \quad (4.2)$$

Se sabe por la teoría de Galerkin las matrices de ponderación o pesos vienen dadas por :

$$D_{ij} = \int_{\Omega} \int \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx dy \quad (4.3)$$

La matriz de difusión global:

$$M_{ij} = \int_{\Omega} \int \varphi_i \nabla \varphi_j dx dy \quad (4.4)$$

La matriz de masa global:

$$N_{ij} = \int_{\Omega} \int \varphi_i \nabla \Phi \cdot \nabla \varphi_j dx dy \quad (4.5)$$

Obteniendo un sistema lineal de ecuaciones cuyos términos desconocidos son ρ_i que dependen del tiempo. Para la segunda etapa se discretiza en tiempo por medio de las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d\rho_i^k}{dt} = \frac{\rho_i^k - \rho_i^{k-1}}{\delta t} \quad (4.6)$$

Con k variando desde $1, 2, \dots, N$. Luego de solucionar el sistema de términos lineales de la ecuación (4.6) que dependen de las condiciones iniciales, se contruye un nuevo sistema que solo depende de la variacion temporal [29] que incluye los términos de la distribución espacial obtenida en (4.2). Es decir, se tienen un sistema de ecuaciones para cada instante de tiempo que depende de la distribución del dominio, para cada punto (x_i, y_i) le corresponde un valor de ρ_i^k en el instante de tiempo k .

Los parámetros usados en la simulación:

- $\varepsilon = 8,85 \times 10^{-11} \frac{\text{As}}{\text{vm}}$ Permitividad.
- $b = 3,6 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{Vs}}$ Movilidad de los iones.
- $d = 45 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ Coeficiente de difusión
- $\Phi_e = -1\text{kV}$ Potencial en el electrodo.
- $\rho_0 = 1 \times 10^{-16}$ Densidad espacial de carga.
- $\delta t = 100^{-3}\text{s}$

El dominio se define dado por la configuración espacial mostrada en la figura 4.1.

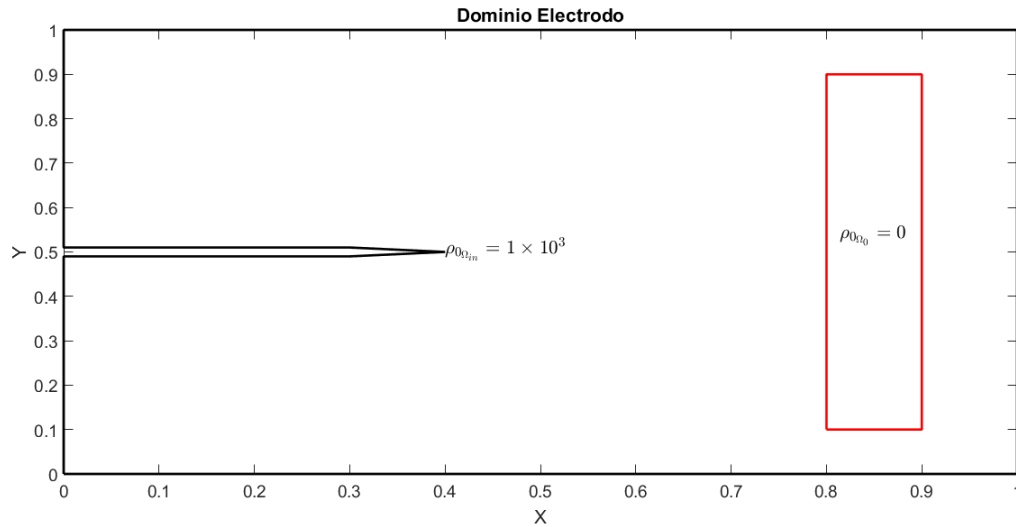


Figura 4.1: Dominio Electrodo.

Usando las ecuaciones de recurrencia obtenidas en el capítulo anterior 3 se obtuvieron los siguientes resultados

4.2. Resultados

4.2.1. Electrodo

Los resultados obtenidos numéricamente por medio del método de elementos finitos contribuyen al análisis cualitativo de las variables eléctricas involucradas en el problema como lo son ρ y el potencial Φ . El potencial Φ está relacionado con el campo eléctrico como se presentó en la sección (2) ecuaciones de Maxwell. La no linealidad y dinámica respecto al tiempo presentada en la ecuación 2.44 hace que la solución analítica sea compleja de obtener para realizar un análisis cuantitativo de la misma, es por eso que presentan los siguientes resultados y se analiza la dinámica presenta por estos con la variación en la distribución espacial y temporal.

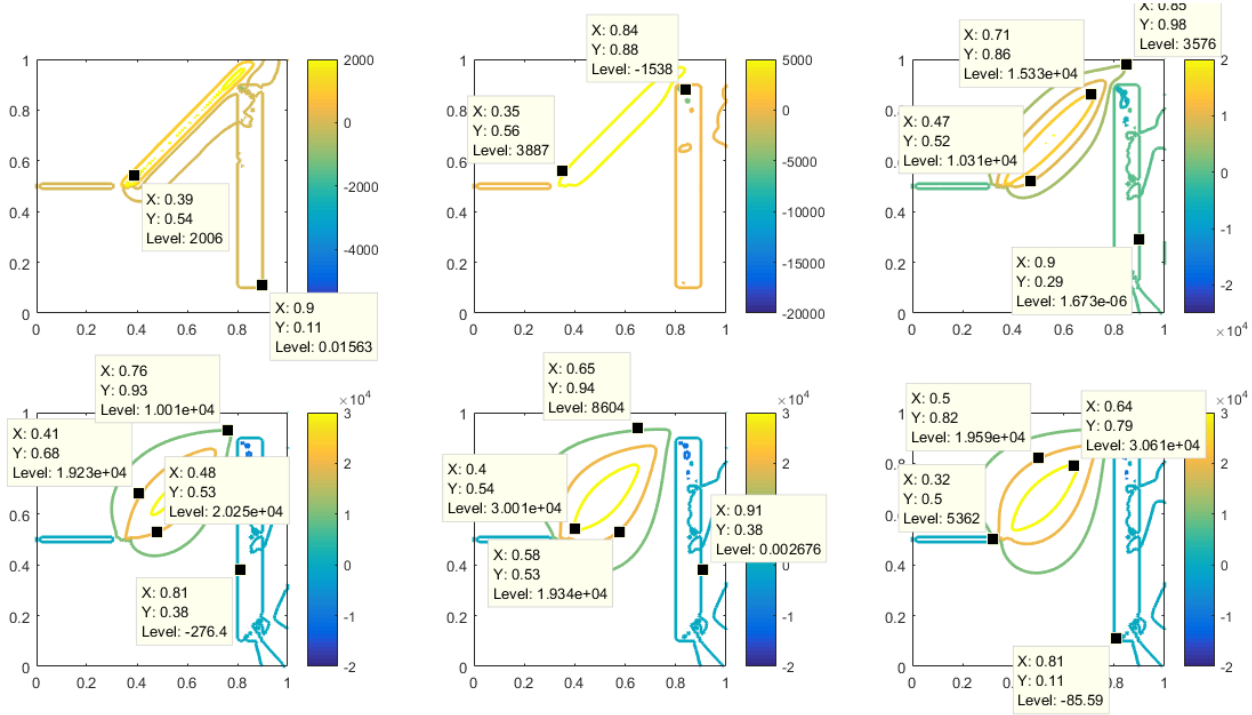


Figura 4.2: Solución: Distribución de ρ para $(0,1) \times (0,1) \Omega$ $t = 1 \times 10^{-6}, t = 1 \times 10^{-3}, t = 2 \times 10^{-3}, t = 3 \times 10^{-3}, t = 4 \times 10^{-3}, t = 5 \times 10^{-3}$.

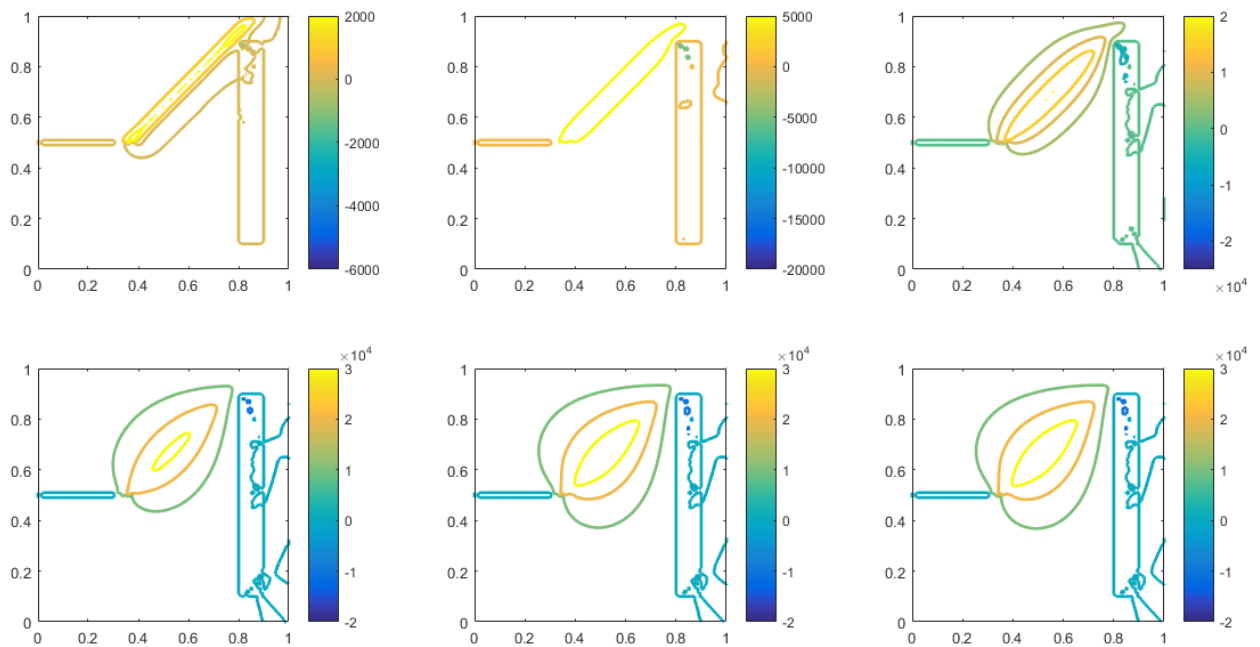


Figura 4.3: Solución: Distribución de ρ para $(0, 1) \times (0, 1) \Omega$ $t = 1 \times 10^{-6}, t = 1 \times 10^{-3}, t = 2 \times 10^{-3}, t = 3 \times 10^{-3}, t = 4 \times 10^{-3}, t = 5 \times 10^{-3}$.

Las figuras 4.2 y 4.3 muestran las curvas de nivel de potencial numérico para la variable eléctrica ρ en seis instante de tiempo diferentes. La distribución superficial de carga varía de acuerdo con el potencial especificado por las condición de frontera y de contorno del dominio Ω , la variación de esta variable se presenta de acuerdo con las condiciones del medio, coeficiente de difusión y coeficiente de movilidad de iones.

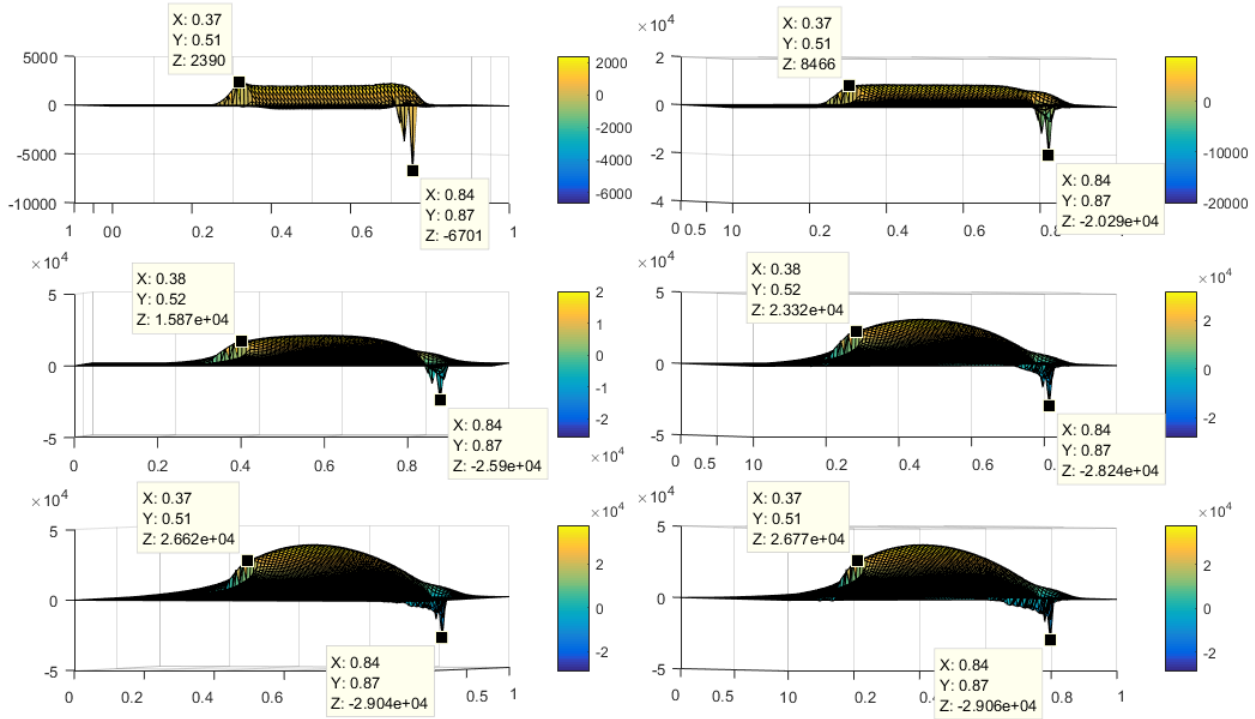


Figura 4.4: Solución: Distribución de ρ para $(0, 1) \times (0, 1) \Omega$ $t = 1 \times 10^{-6}, t = 1 \times 10^{-3}, t = 2 \times 10^{-3}, t = 3 \times 10^{-3}, t = 4 \times 10^{-3}, t = 5 \times 10^{-3}$.

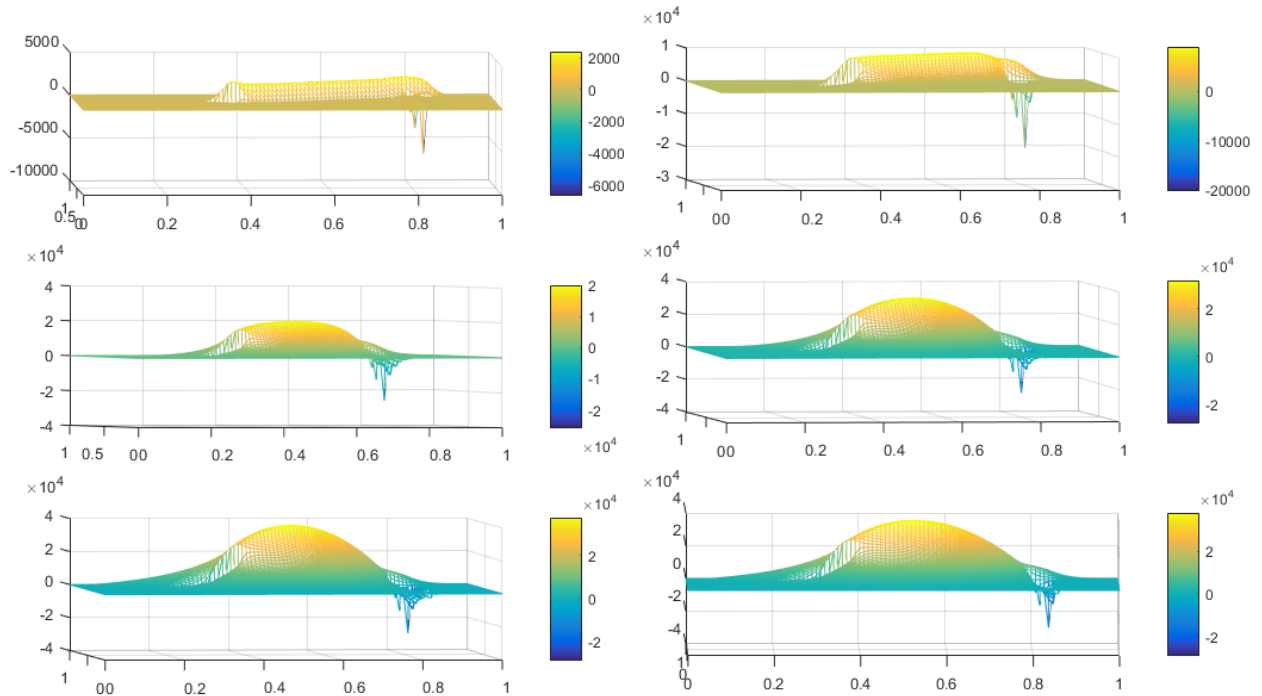


Figura 4.5: Solución: Distribución de ρ para $(0, 1) \times (0, 1) \Omega$ $t = 1 \times 10^{-6}, t = 1 \times 10^{-3}, t = 2 \times 10^{-3}, t = 3 \times 10^{-3}, t = 4 \times 10^{-3}, t = 5 \times 10^{-3}$.

La figuras 4.4 y 4.5 presentan la evolución de la densidad carga ρ para seis instantes de tiempo diferentes como se muestran en dichas descripciones. La evolución de esta variable eléctrica se puede ver analizando un punto (o varios en específico), esto es, para el punto de la distribución espacial $(0,37,0,51)$ el valor varía [2390 8466 15870 23320 26620 26670] en los instantes de tiempo mostrados, hasta llegar al estado estable.

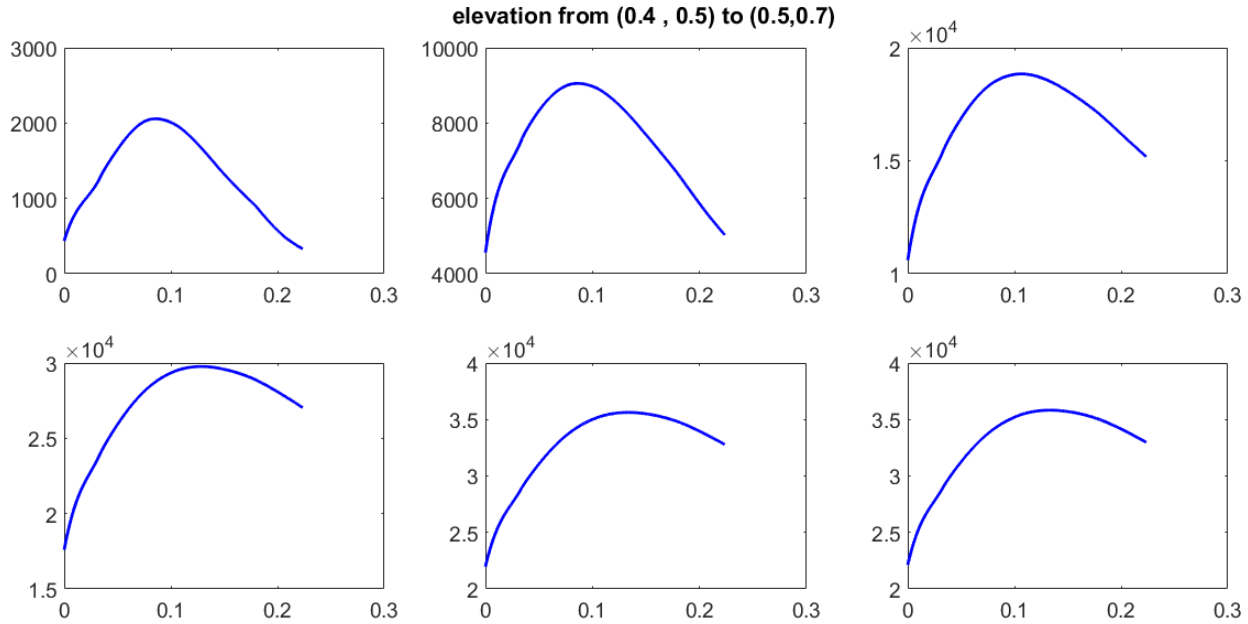


Figura 4.6: Variación temporal de ρ desde $(0,4,0,5)$ hasta $(0,5,0,7)$ para $(0,1) \times (0,1) \Omega$ $t = 1 \times 10^{-6}, t = 1 \times 10^{-3}, t = 2 \times 10^{-3}, t = 3 \times 10^{-3}, t = 4 \times 10^{-3}, t = 5 \times 10^{-3}$.

La variación en tiempo mostrada en la figura 4.6 presenta el comportamiento del potencial ρ en la línea formada por los puntos $(0,4,0,5)$ y $(0,5,0,7)$, para los instantes de tiempo de interés. En esta línea formada por estos punto se presenta la mayor variación del valor de potencial dadas la condiciones iniciales y de contorno presentadas en este trabajo de grado.

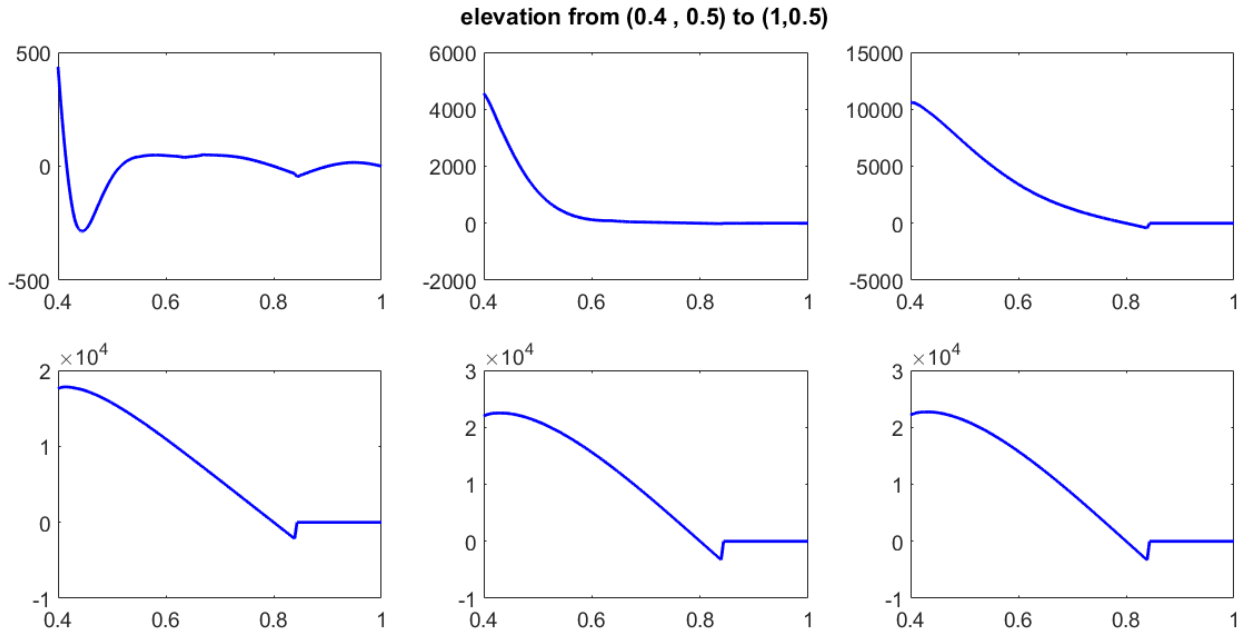
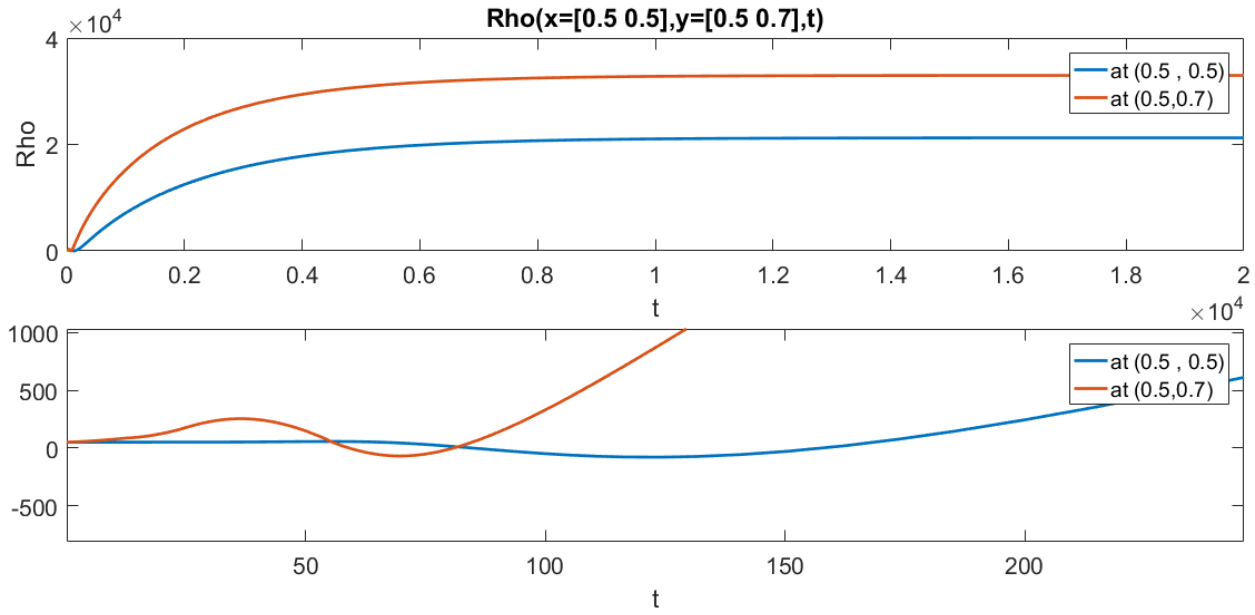


Figura 4.7: Variación temporal de ρ desde $(0,4, 0,5)$ hasta $(1, 0,5)$ para $(0, 1) \times (0, 1) \Omega$ $t = 1 \times 10^{-6}, t = 1 \times 10^{-3}, t = 2 \times 10^{-3}, t = 3 \times 10^{-3}, t = 4 \times 10^{-3}, t = 5 \times 10^{-3}$.

En la figura 4.7 se presenta la variación temporal en la línea formada desde la punta del electrodo hasta el final del dominio Ω . La solución numérica sigue las condiciones iniciales impuestas por el problema, esto es, existe distribución de potencial en el dominio pero desde la sección aislada hasta la *vencidad* $_{\infty}$ esta variación es nula haciendo cero esta variable donde las condiciones sean cero. En la gráfica para el primer instante de tiempo, se presenta un estado transitorio que, luego de dos estados de tiempo futuros, estabilizan la elevación de esta variable eléctrica (como se muestra en los últimos tres instantes de tiempo de la figura 4.7).

Figura 4.8: Historial temporal de ρ puntos (0,5,0,5) y (0,5,0,7)

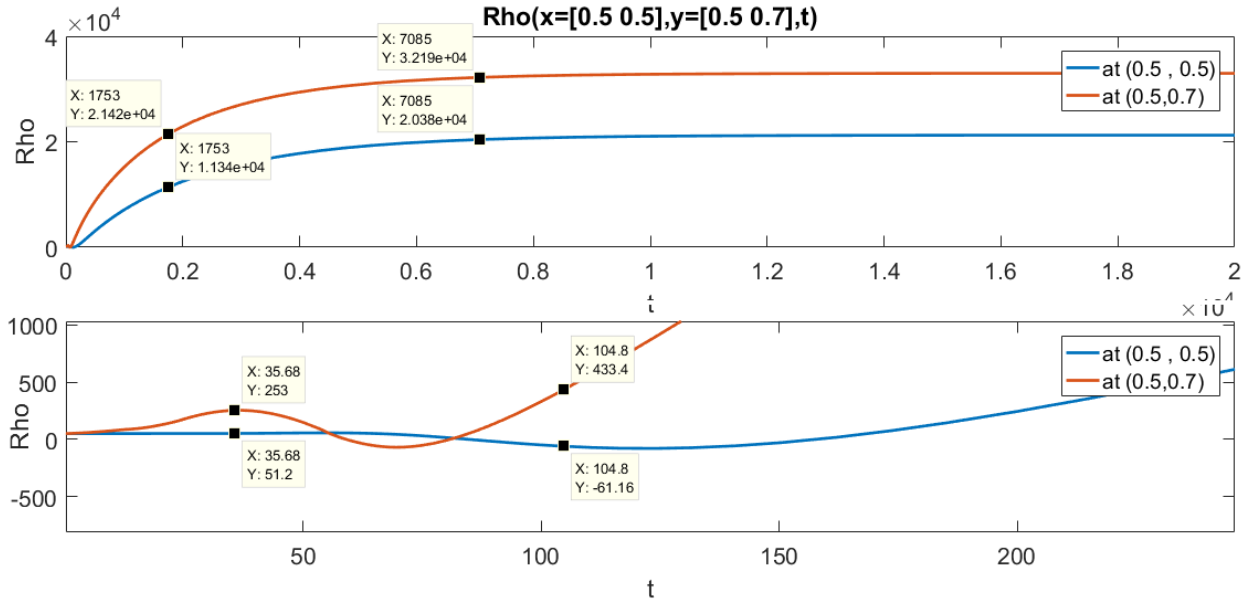


Figura 4.9: Historial temporal de ρ puntos (0,5,0,5) y (0,5,0,7)

Los historiales de tiempo mostrados en las figuras 4.8 y 4.9 presentan los valores para cualquier instante de tiempo en los dos puntos del dominio Ω especificados en las figuras. En los primeros instantes de tiempo hasta $t = 100$ se presenta un transitorio que luego alcanza el valor de estado 32190 para el primer punto (línea de color naranja) y de 20380 respectivamente. El estado transitorio (gráfica inferior 4.8 y 4.9) varían para estos mismos punto desde 34,68, 51,2 hasta 433,4 , -61,16 respectivamente, este comportamiento transitorio de presenta debido al modelo de la dinámica en términos de la derivada parcial de ρ respecto al tiempo y en mayor medida cuando las cargas se ionizan debido al potencial inyectado por el electrodo.

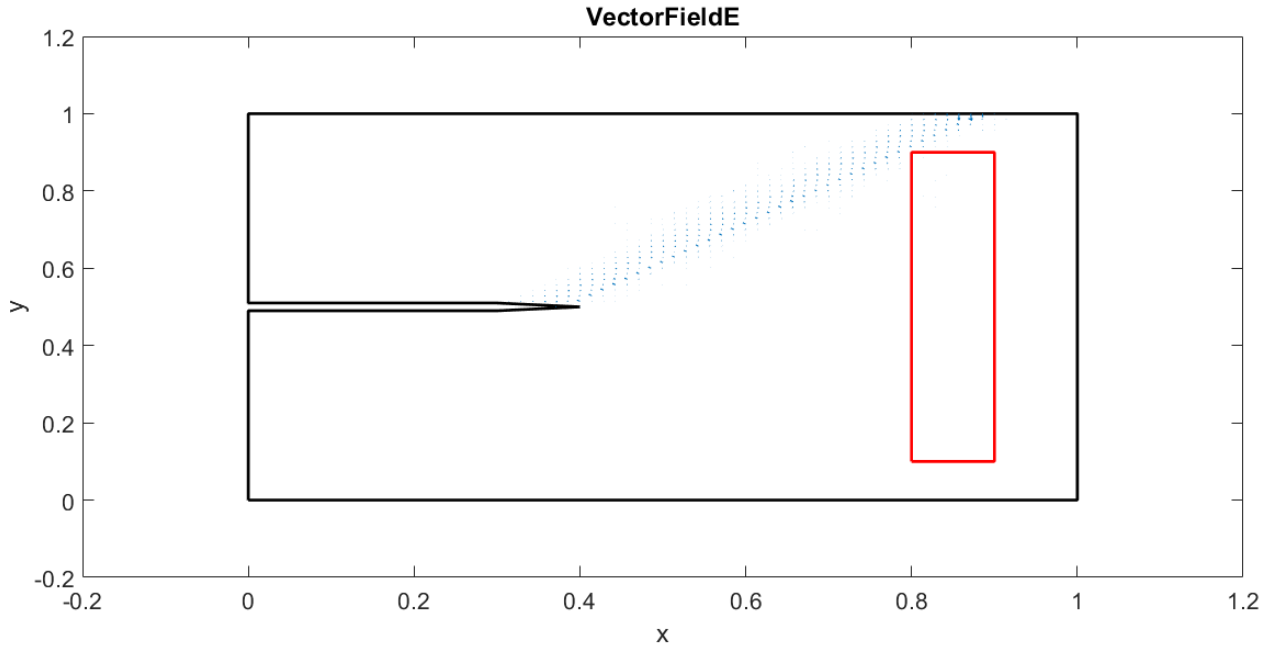


Figura 4.10: Distribución del campo eléctrico constante producido por el electrodo.

En la figura 4.10 se puede apreciar como está orientado el campo eléctrico debido a las propiedades del medio. Una aplicación importante de este campo dentro del campo de la ingeniería es poder orientar algunas cargas a puntos específicos de un dominio para generar movimiento de partículas, en este caso dadas las condiciones de frontera, el campo se orienta en la dirección mostrada.

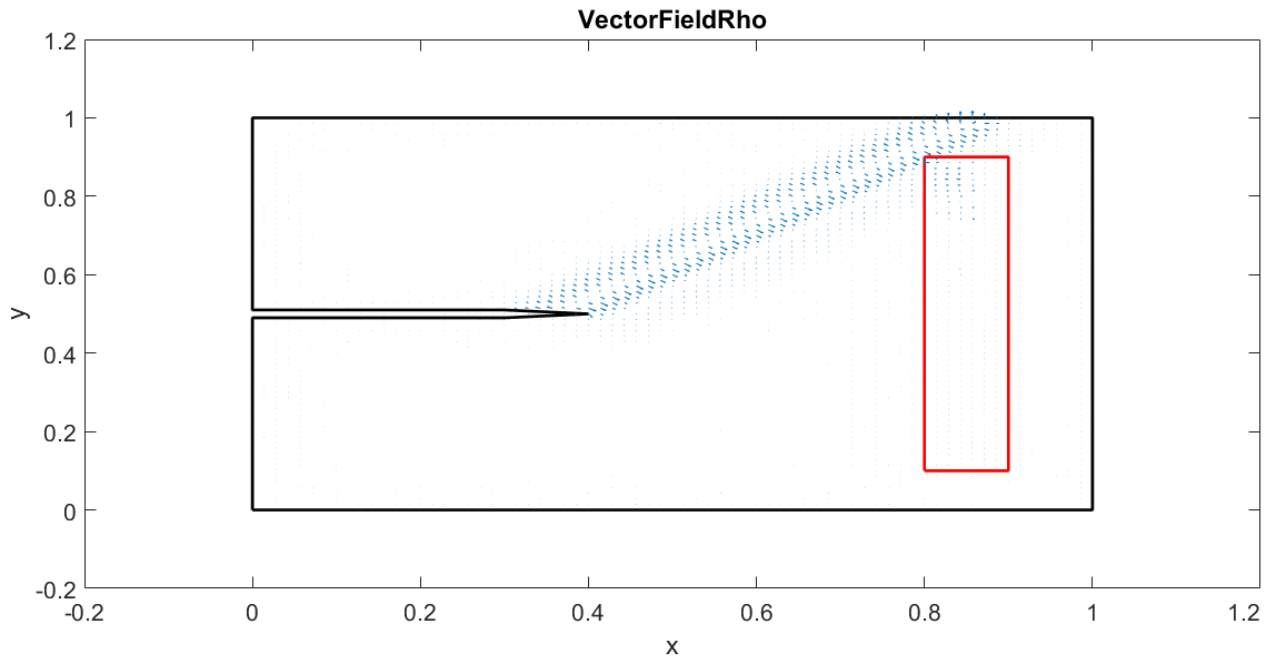


Figura 4.11: Distribución del campo ρ .

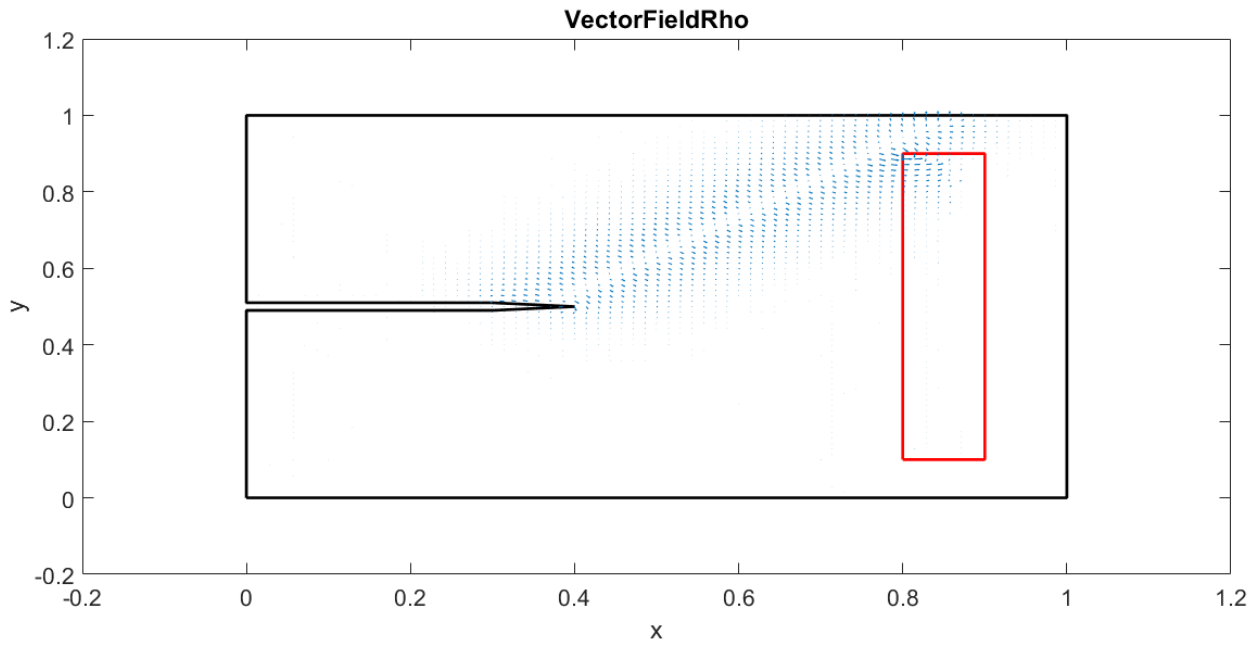


Figura 4.12: Distribución del campo ρ .

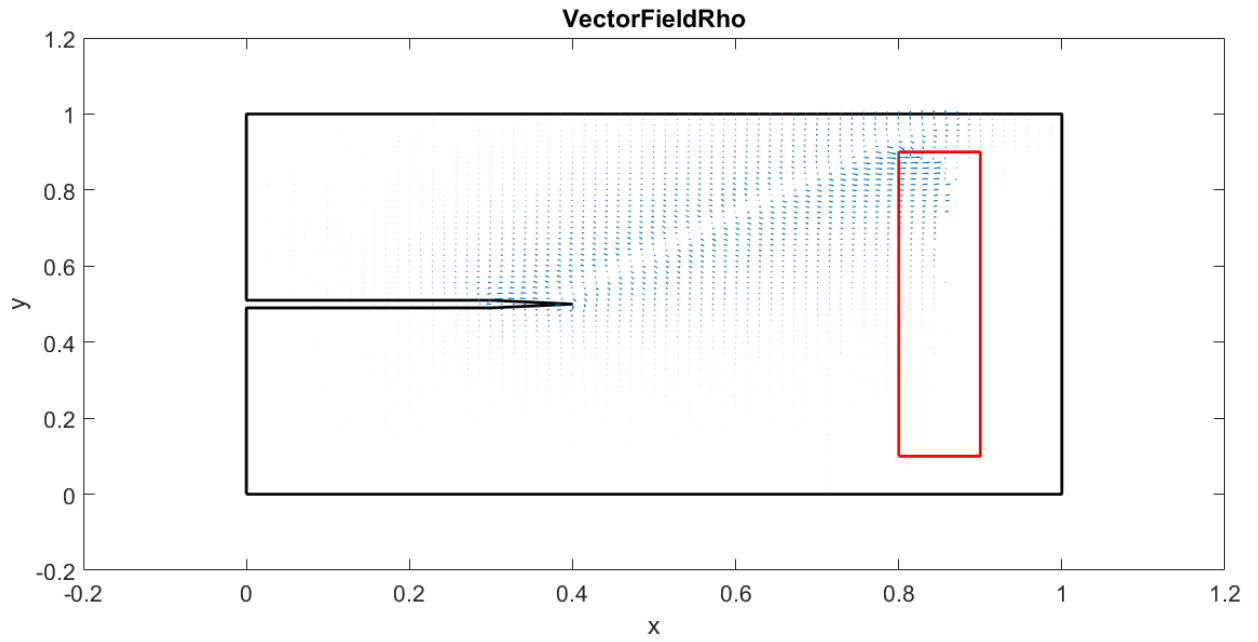


Figura 4.13: Distribución del campo ρ .

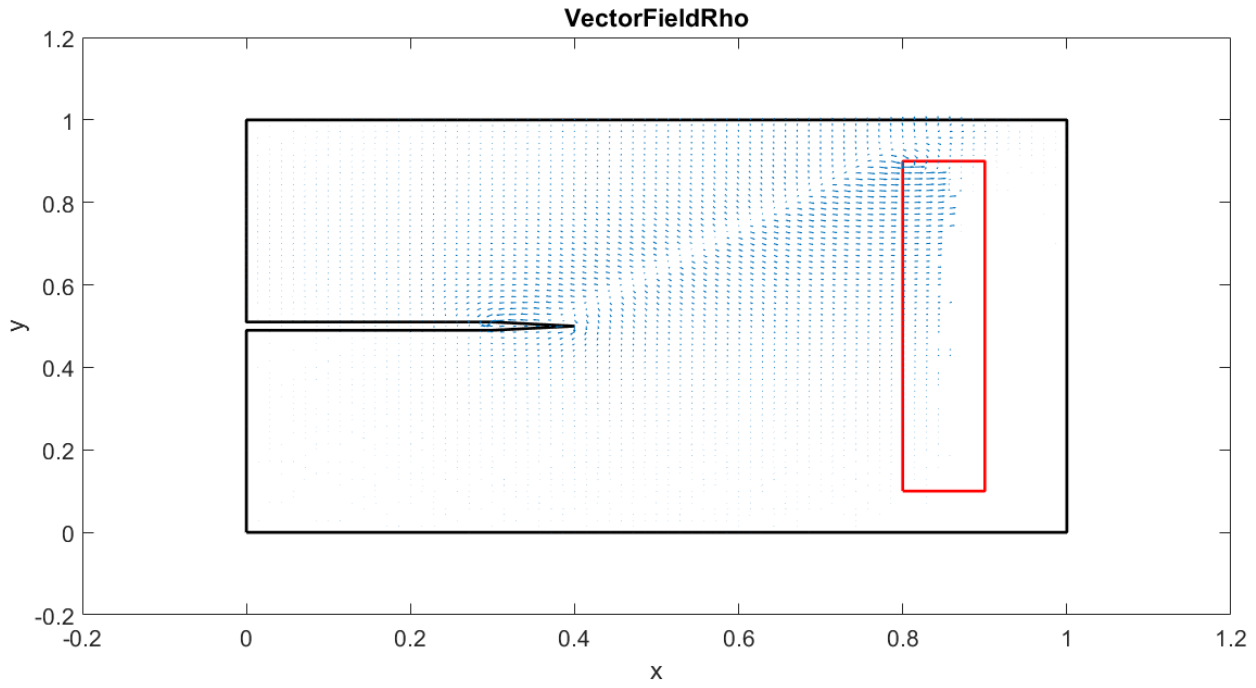


Figura 4.14: Distribución del campo ρ .

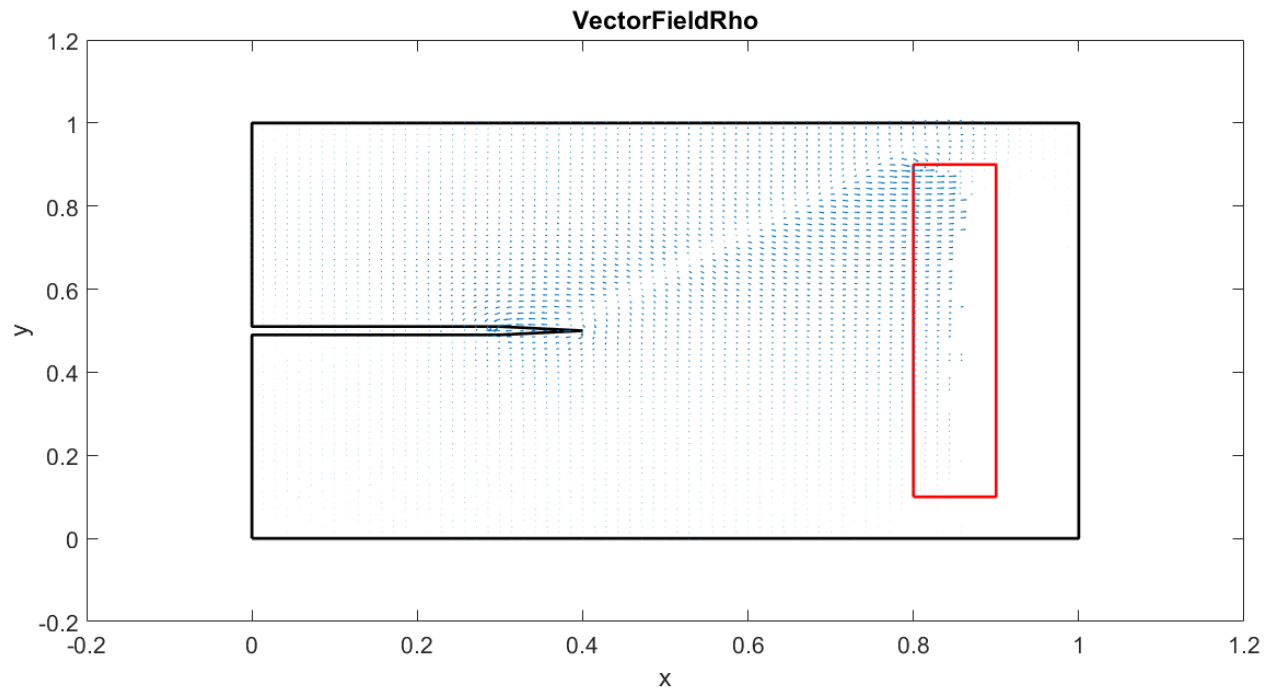


Figura 4.15: Distribución del campo ρ .

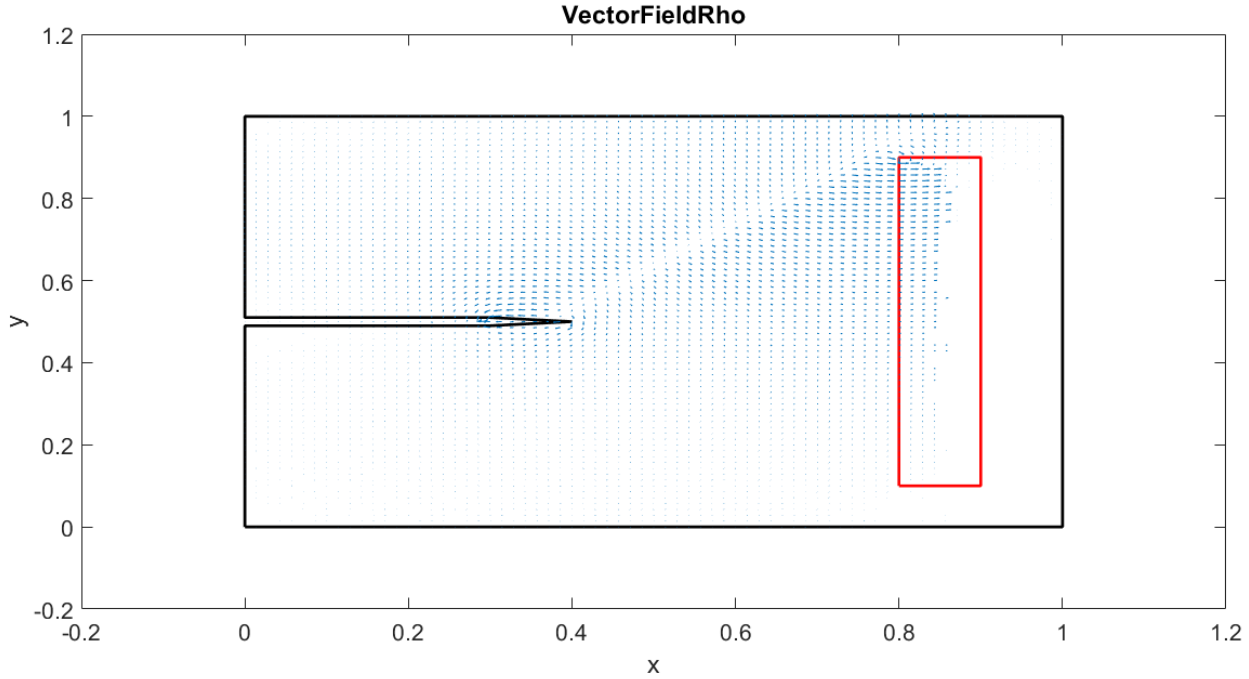


Figura 4.16: Distribución del campo ρ .

Los resultados mostrados desde la figura 4.11 hasta la 4.16 muestran el comportamiento del vector de campo para la variable eléctrica ρ en diferentes instantes de tiempo. La distribución se ve afectada por la dinámica temporal, las condiciones de contorno y las propiedades del dominio ρ . A partir de la figura 4.15 se puede observar que no hay variación en comparación con la gráfica 4.16 ya que ya han llegado al estado estable.

4.2.2. Velocidad Navier-Stokes

El sistema de ecuaciones diferenciales parciales planteado en esta sección viene dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} - \eta \operatorname{div}(\nabla(v_x)) + \mu E_x = 0 \\ \sigma \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial y} - \eta \operatorname{div}(\nabla(v_y)) + \mu E_y = 0 \\ v = (v_x, v_y) \\ P = -\mu \operatorname{div}(v) \\ (v_x, v_y) = (0, 0) \partial\Omega \end{array} \right. \quad (4.7)$$

Los parámetros usados en esta simulación se asumen homogéneos y constantes en la totalidad del dominio. Para un medio como el aire estos parámetros vienen definidos por:

| Parámetro | Valor |
|-----------------------|-------------------------------|
| Densidad | $\sigma = 1,225\text{kg/m}^3$ |
| Viscosidad de Poise | $\mu = 0,00018\text{Pa-s}$ |
| Viscosidad cinemática | $\eta = 1 * \mu$ |

Cuadro 4.1: Parámetros.

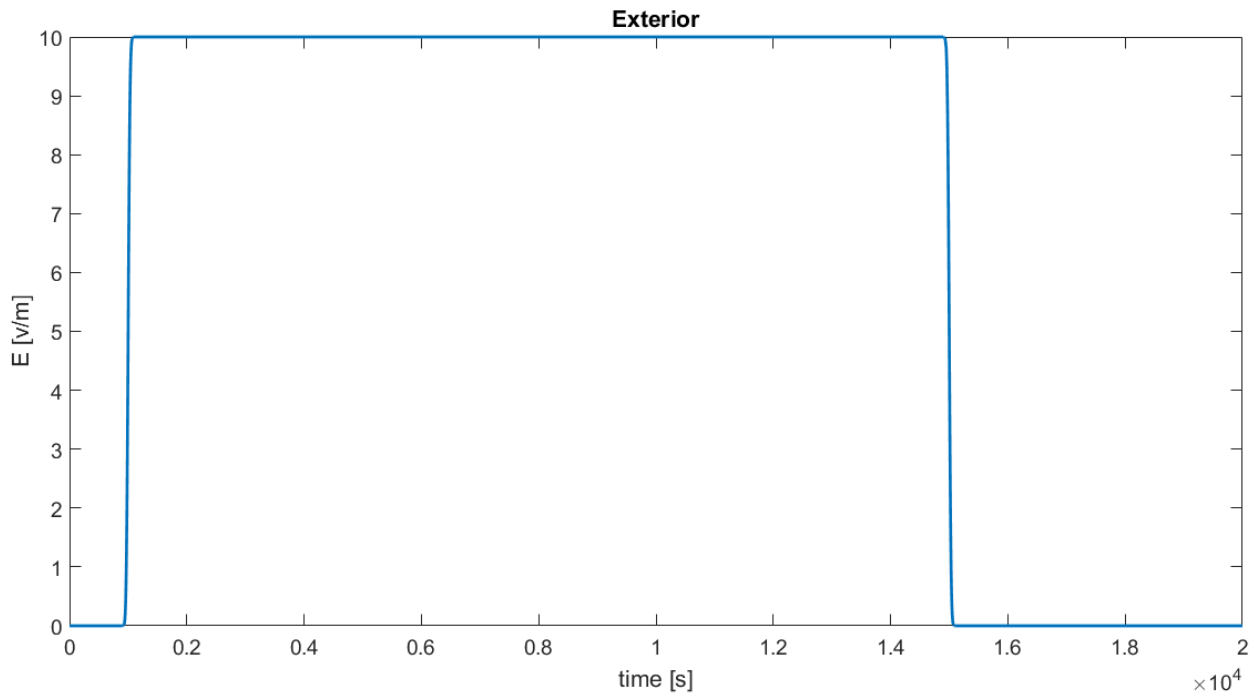


Figura 4.17: Campo eléctrico exterior.

Se asume un campo eléctrico como el de la figura 4.17 en las direcciones x, y para la ecuación (4.7). Es decir, se requiere calcular numéricamente la dinámica de la velocidad \vec{v} bajo el efecto de este campo, tanto en su distribución espacial como en la dependencia temporal.

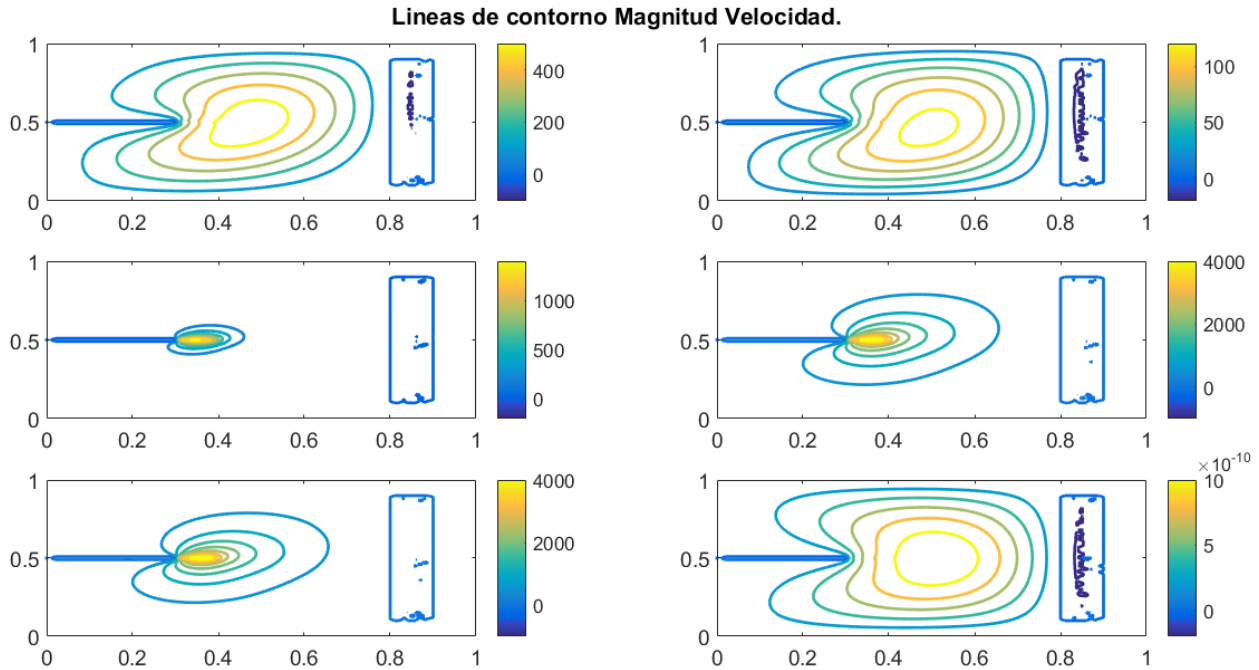


Figura 4.18: Líneas de contorno magnitud velocidad.

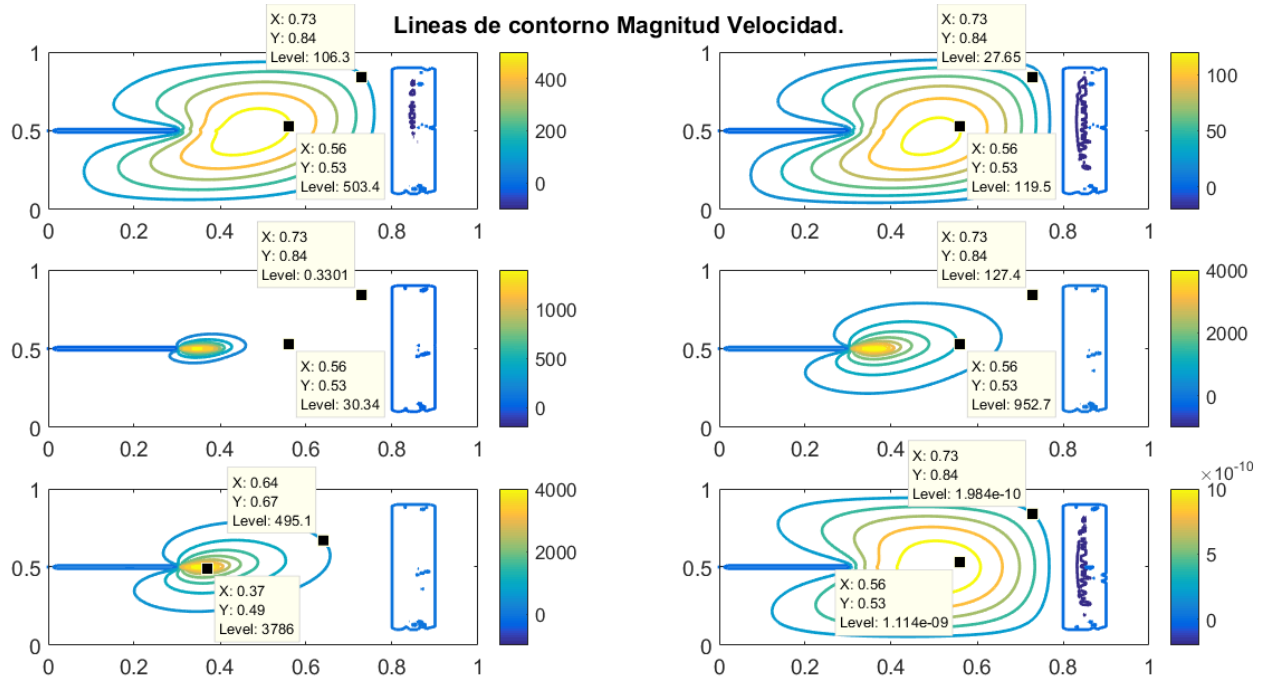


Figura 4.19: Líneas de contorno magnitud velocidad (valores).

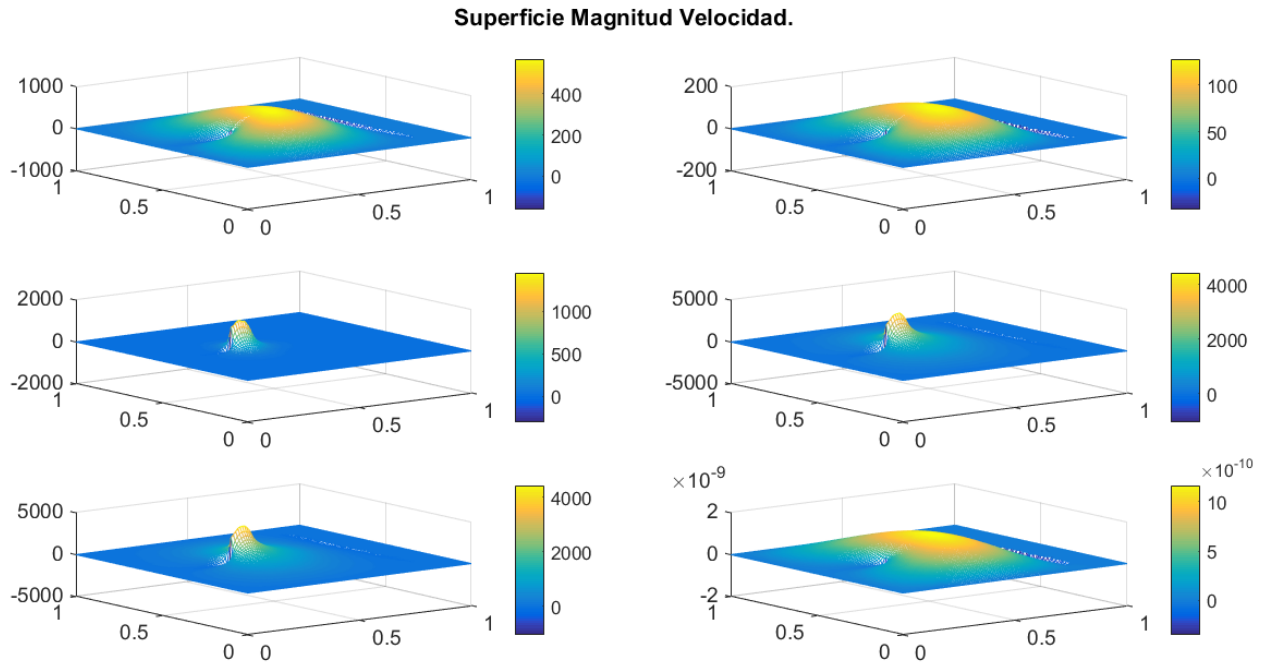


Figura 4.20: Distribución de velocidad (x, y, t) . (valores).

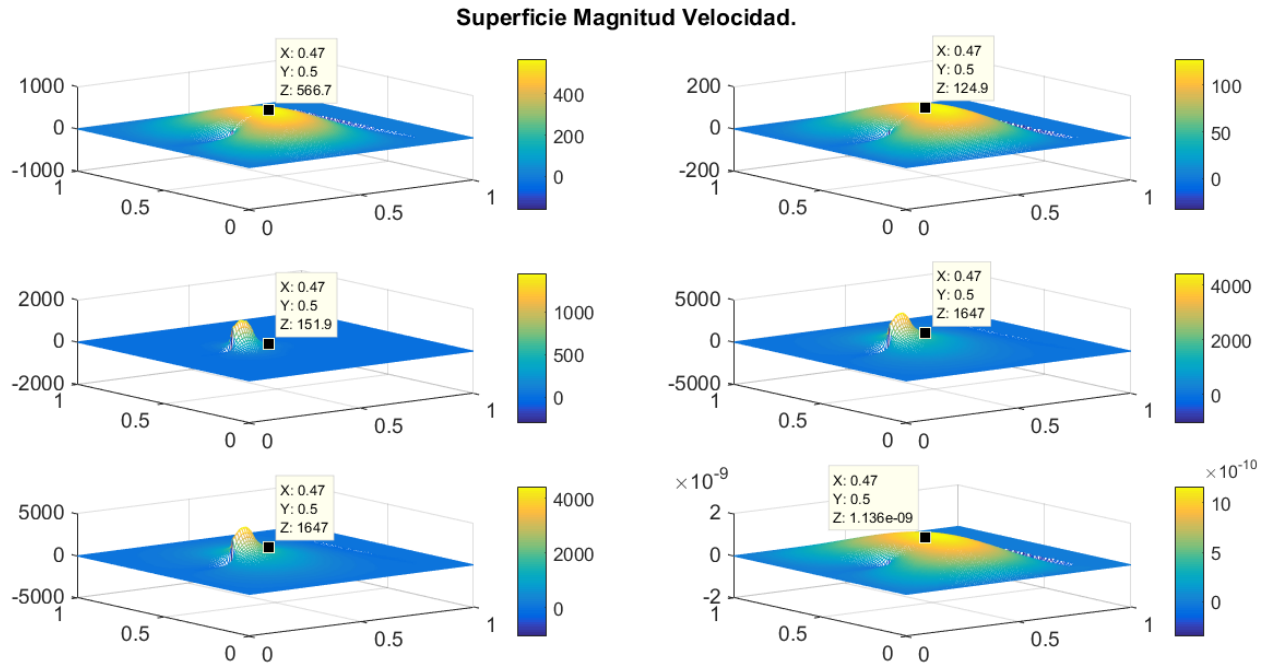


Figura 4.21: Distribución de velocidad (x, y, t) .

En las figuras 4.20 y 4.21 se presenta la dinámica temporal en la magnitud de la velocidad dentro del dominio. La magnitud varía desde 566,7m/s en el punto (0,47, 0,5) en el estado transitorio inicial hasta el valor $1,136 \times 10^{-09}$ m/s en el punto (0,47, 0,5) para el estado estable.

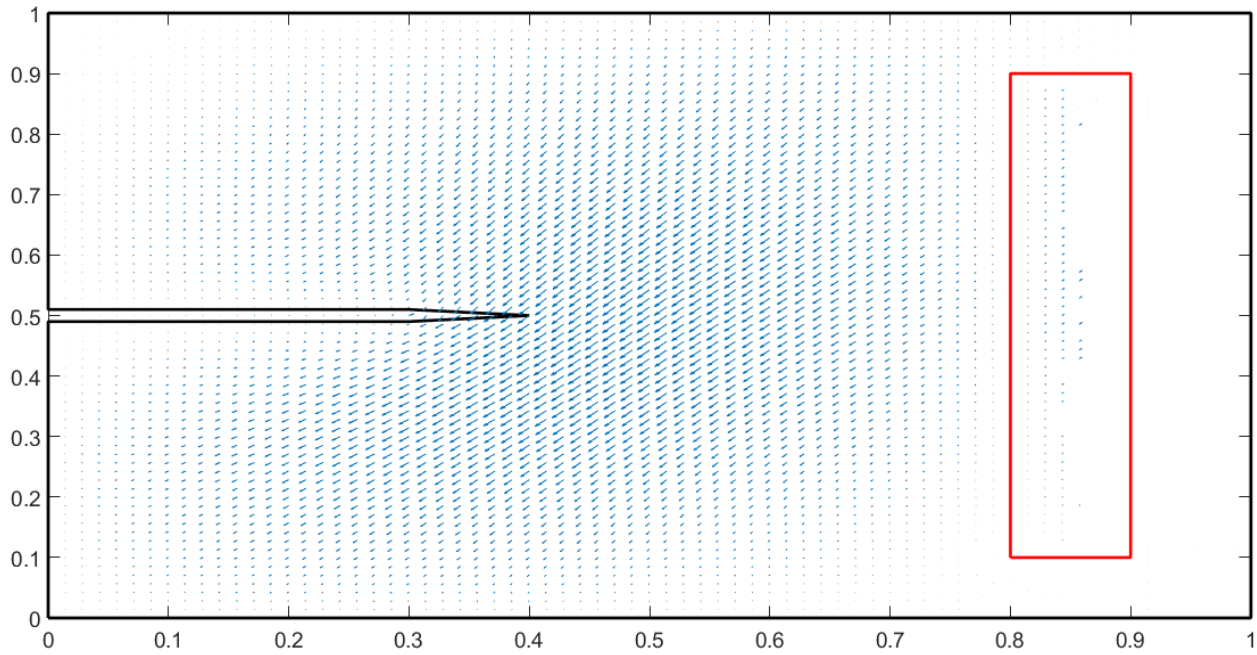


Figura 4.22: Campo vectorial de la velocidad

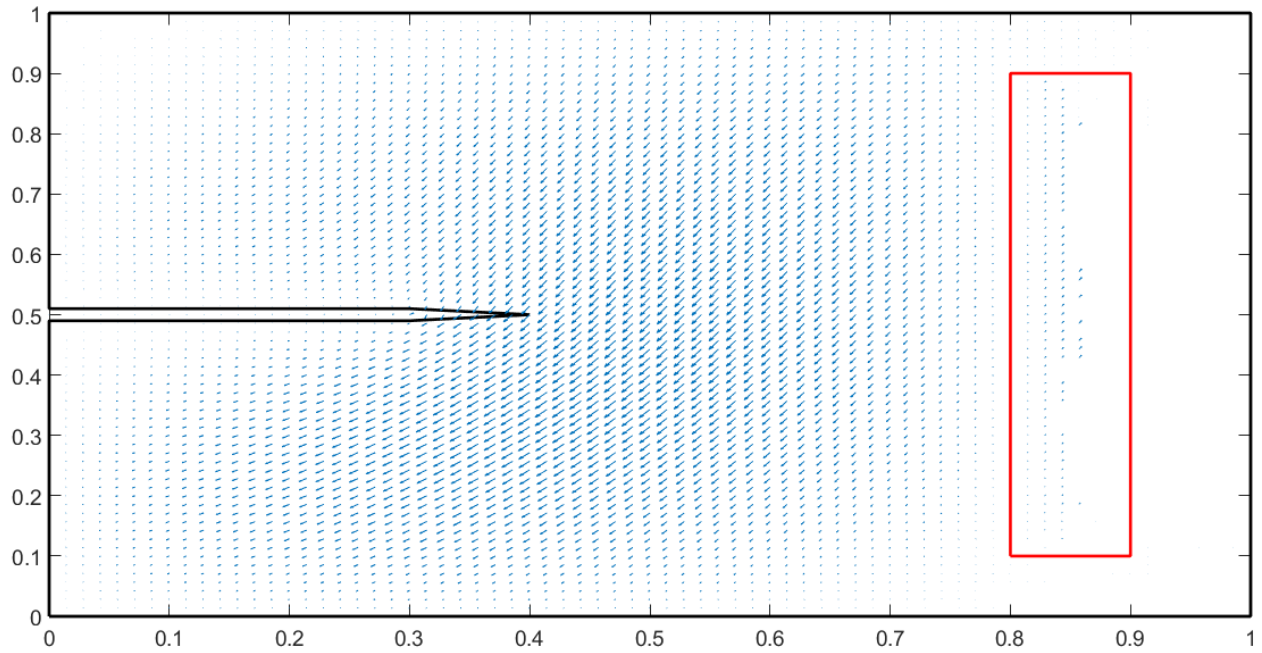


Figura 4.23: Campo vectorial de la velocidad

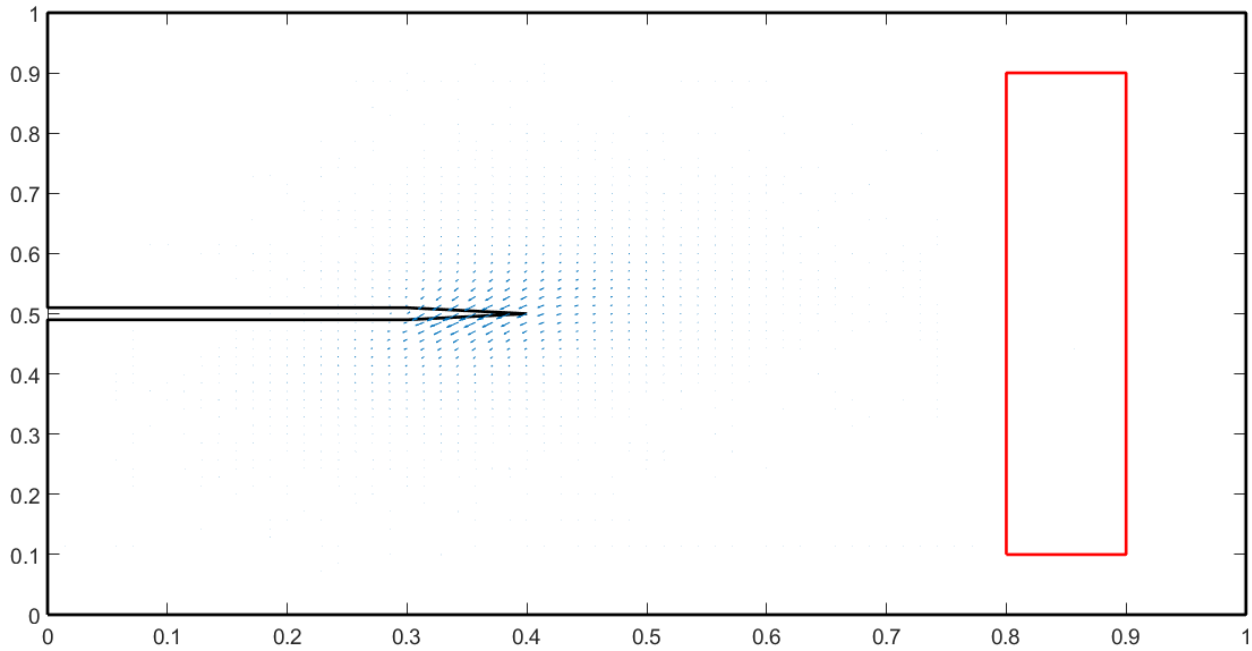


Figura 4.24: Campo vectorial de la velocidad

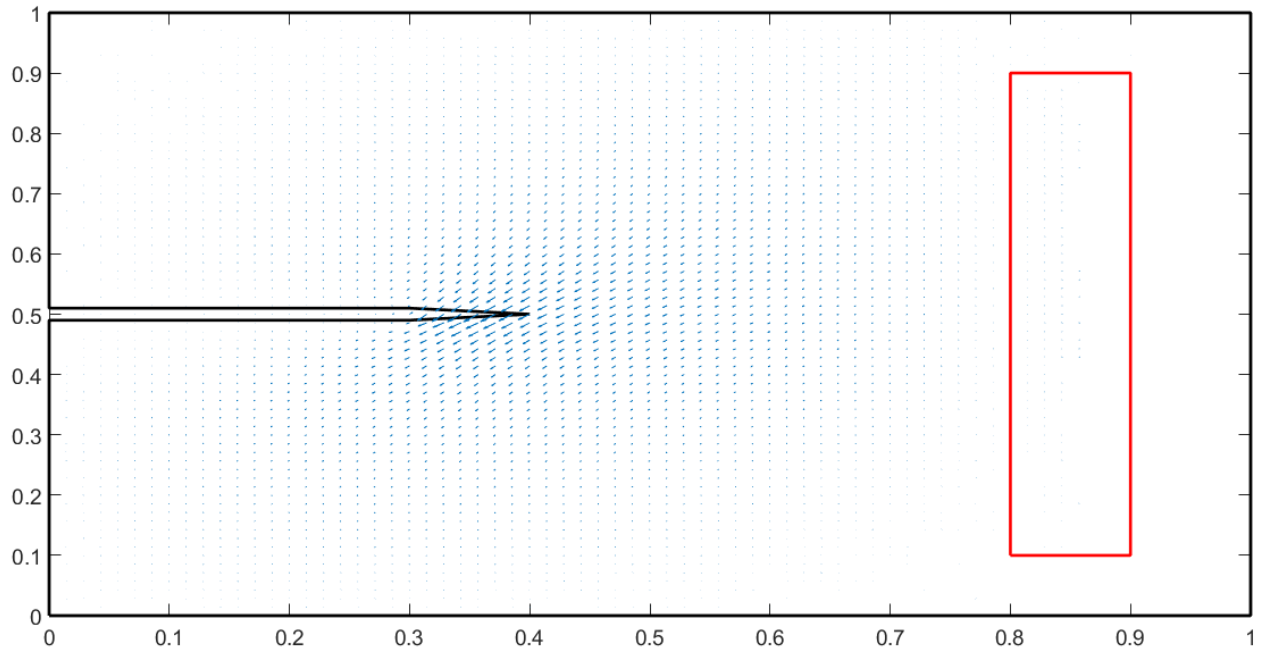


Figura 4.25: Campo vectorial de la velocidad

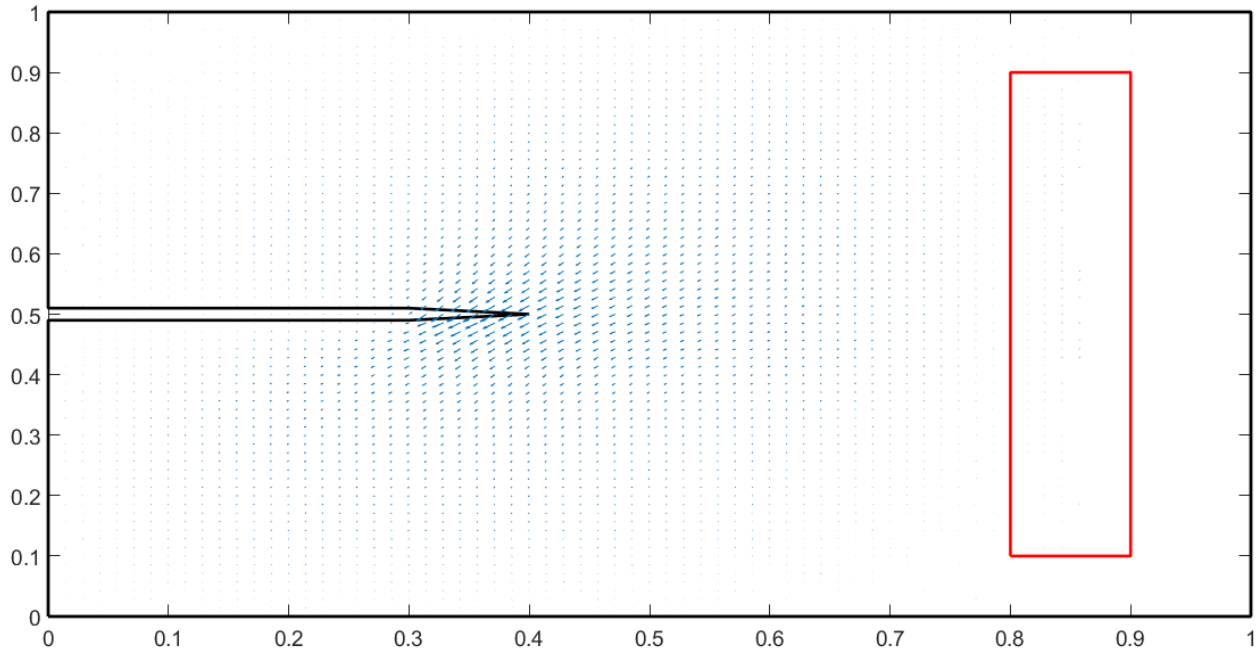


Figura 4.26: Campo vectorial de la velocidad

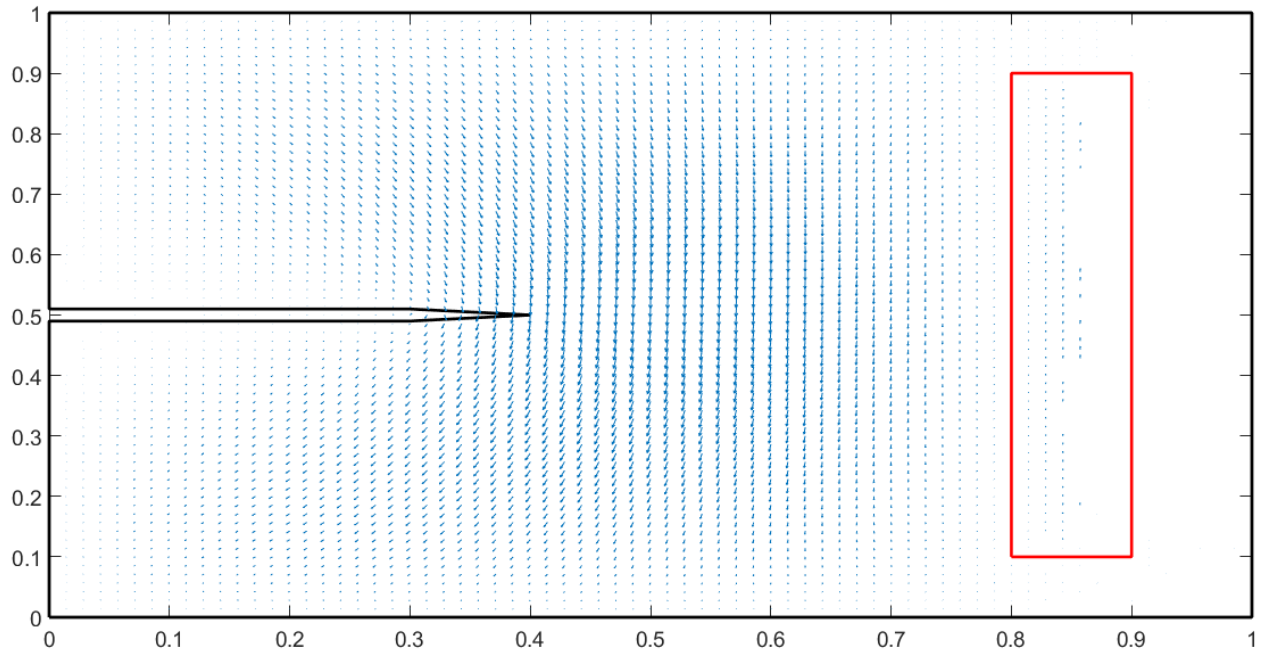


Figura 4.27: Campo vectorial de la velocidad

El campo vectorial (figuras: 4.22-4.27) de velocidad representa la distribución espacial de la magnitud vectorial, a cada punto del espacio se le asocia un vector y su respectiva dirección en determinados instantes de tiempo.

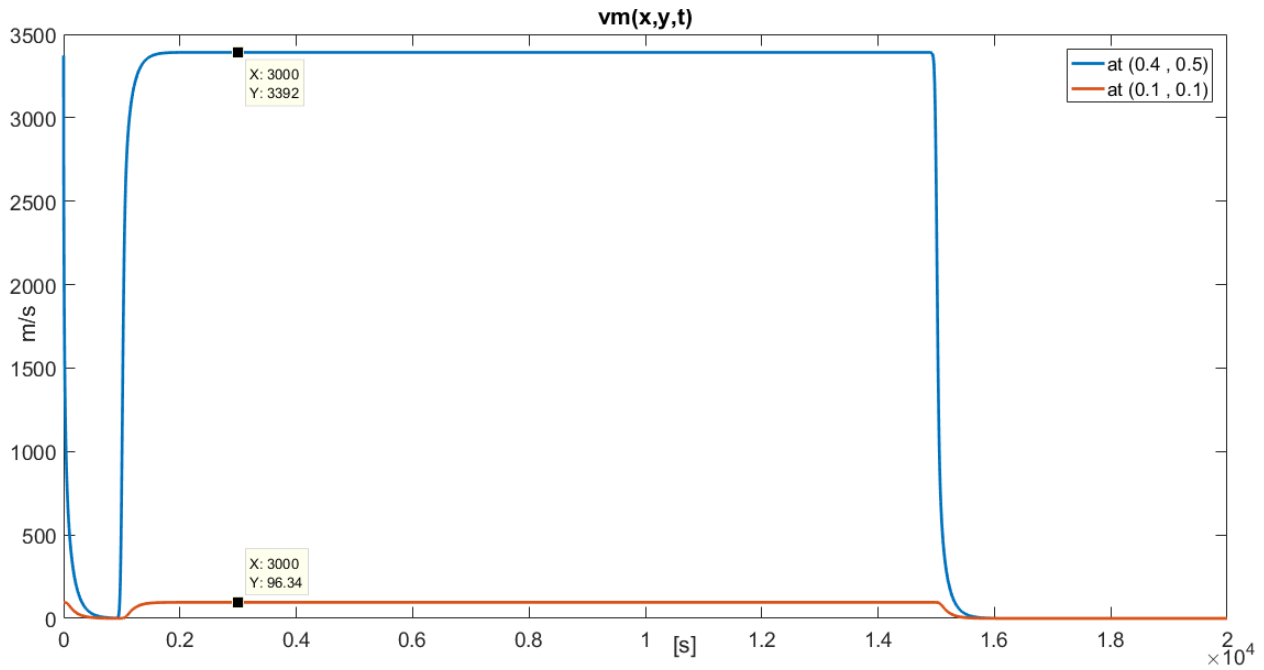


Figura 4.28: velocidad en dos puntos $(0,4,0,5) - (0,1,0,1)$ vs $t[s]$

Para el caso donde el campo exterior es como el presentado en la figura 4.29, el comportamiento en el tiempo de la magnitud de la velocidad también toma esta misma forma, tal como se muestra a continuación (figura 4.30 - 4.33):

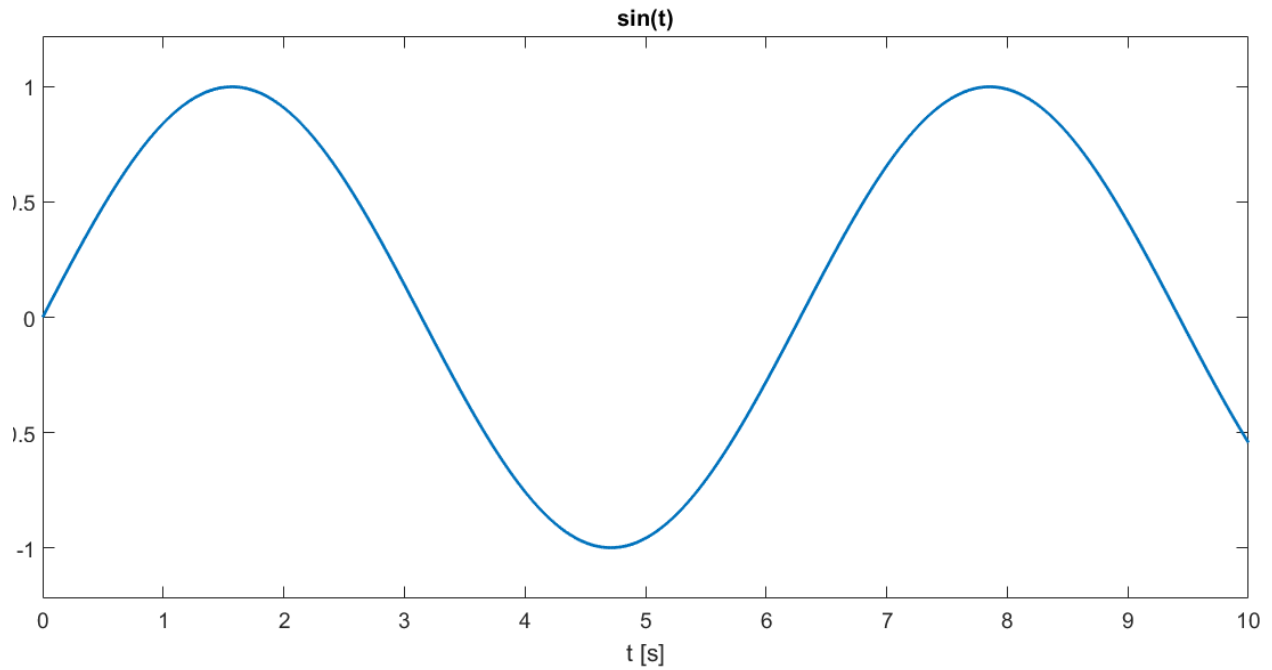


Figura 4.29: Campo exterior senoidal. La amplitud es de 1 y la frecuencia es de $\frac{1}{2\pi}$.

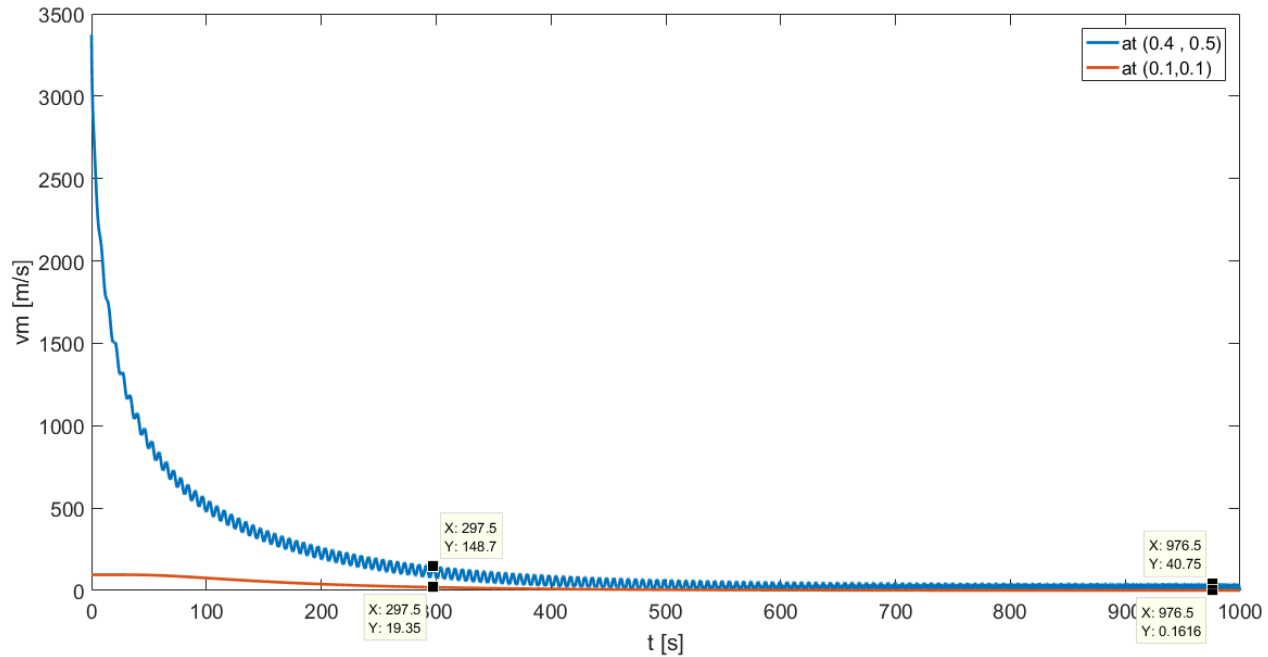


Figura 4.30: Dinámica en el tiempo de la magnitud de la velocidad en $(0,4,0,5) - (0,1,0,1)$

En los puntos del dominio $(0,4,0,5) - (0,1,0,1) \in \Omega$ la dinámica en el tiempo se presenta en la figura 4.30. Esto es, una magnitud de $(148,7\text{m/s}, 297,5\text{s})$, $(40,75\text{m/s}, 976,5\text{s})$ para el punto $(0,4,0,5)$ y $(19,5\text{m/s}, 19,5\text{s})$, $(0,1616\text{m/s}, 976,5\text{s})$ en el punto $(0,1,0,1)$. Con la estimación numérica obtenida en esta gráfica 4.30 se puede calcular la generación aproximada de energía eléctrica en cada uno de los puntos $\in \Omega$ conociendo cual es la mejor ubicación para generadores eólicos teniendo en cuenta la ionización de las partículas del aire.

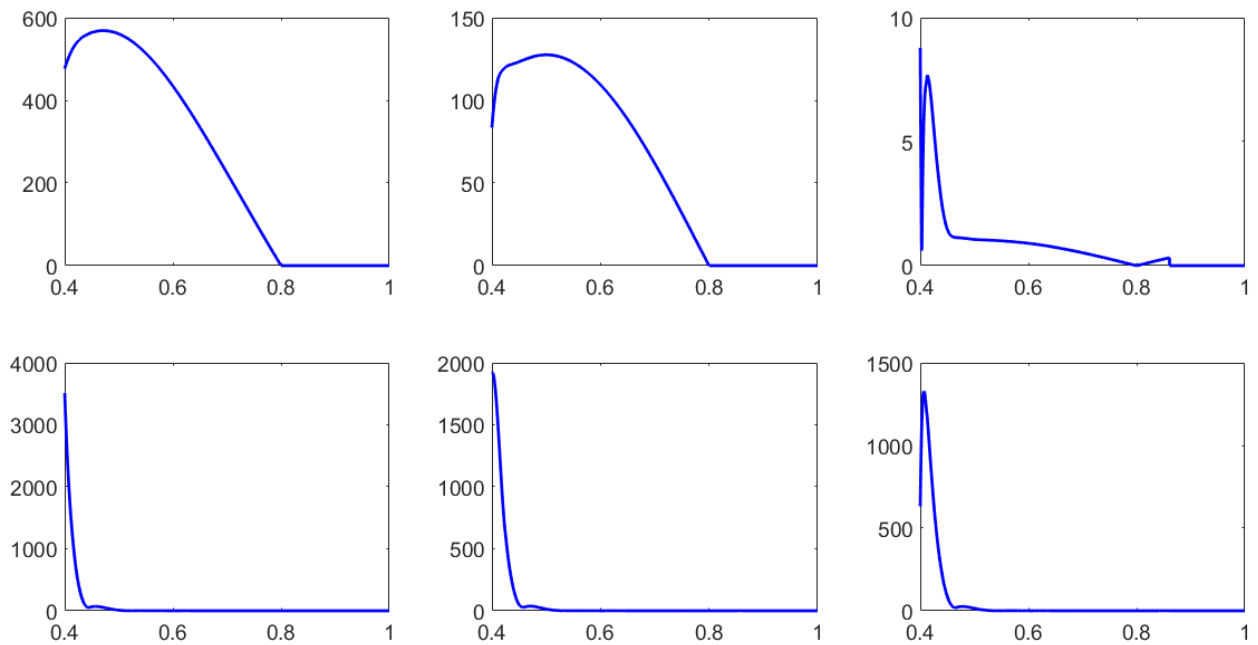


Figura 4.31: Elevación de la magnitud de la velocidad desde $(0,4, 0,5) - (1, 0,5)$

Para seis instante de tiempo $t[s] = [100, 300, 1000, 3000, 10000, 20000]$ se muestra el perfil de elevación de la magnitud de la velocidad desde el punto $(0,4, 0,5)$ hasta el punto $(1, 0,5)$. A medida que se aleja el punto de interés, la magnitud disminuye, esto es, una relación inversamente proporcional $vm : \alpha \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

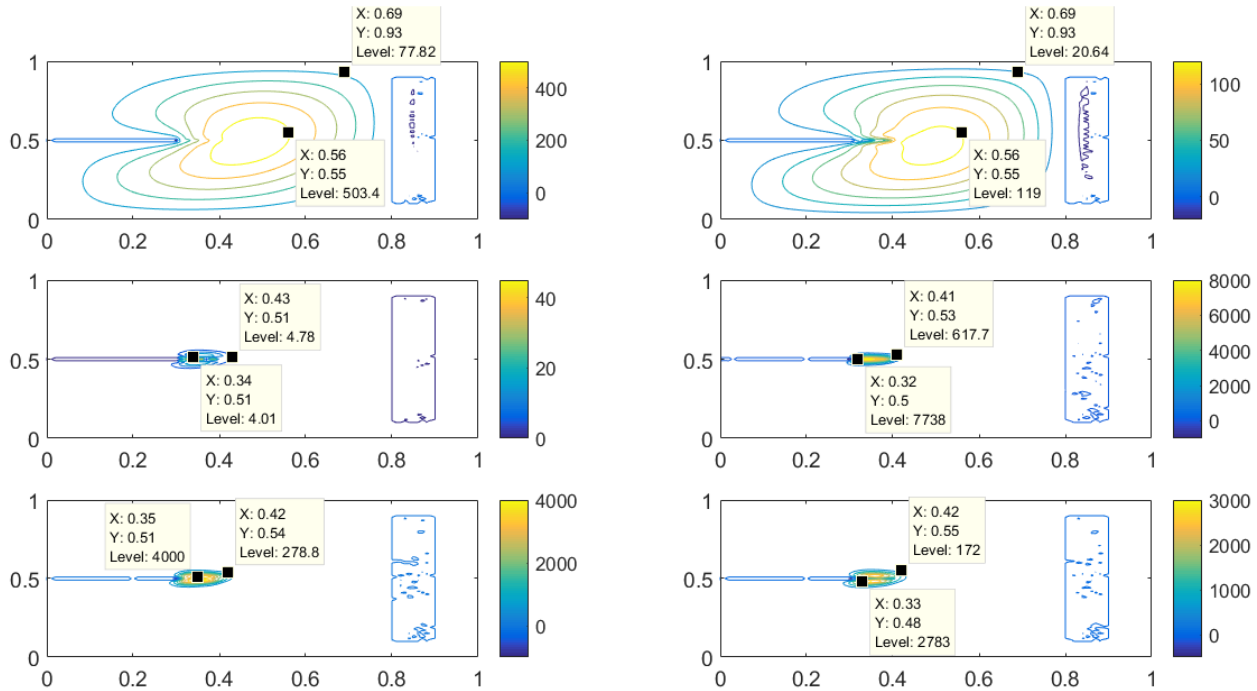


Figura 4.32: Líneas de contorno velocidad.

En las líneas de nivel mostradas de la figura 4.32 se puede determinar para cuales puntos de la distribución espacial $(x_i, y_i) \in \Omega$ tienen el mismo valor de velocidad. Es decir, en el instante de tiempo $t = 100s$ se tiene que para los puntos $(0,89, 0,93)$ la magnitud de velocidad es de $77,82m/s$, a medida que aumenta el tiempo en la última gráfica de esta figura se tiene que para $t = 20000s$ en el punto $(0,42, 0,55)$ tiene un $172m/s$. En conclusión, el valor de la velocidad depende de su ubicación en el dominio Ω y del tiempo transcurrido en la simulación.

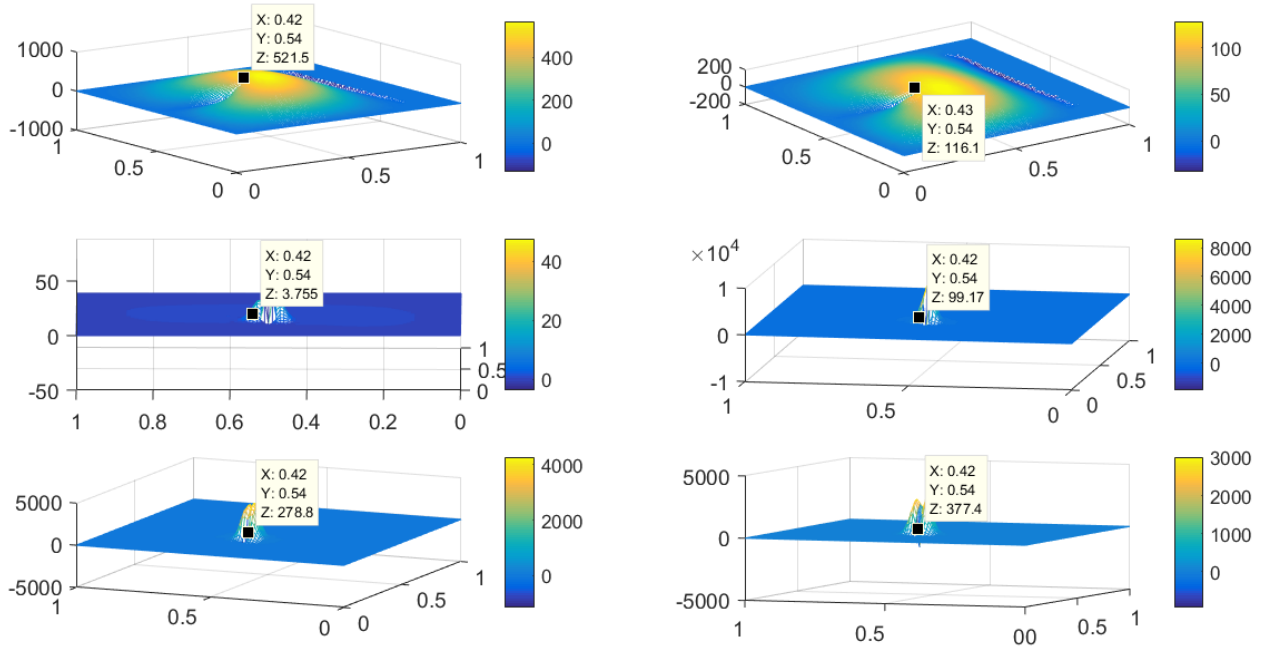


Figura 4.33: Superficie velocidad.

En el contorno de las gráficas mostradas en la figura 4.33 el valor de la velocidad es igual a cero como se impuso por sus condiciones de contorno $\partial\Omega$. Al interior del dominio Ω este valor cambia de acuerdo con su ubicación espacial y el tiempo transcurrido.

Capítulo 5

Conclusiones

Este proyecto ha contribuido de manera importante en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales parciales que modelan fenómenos eléctricos. La electrohidrodinámica es un fenómeno eléctrico modelado por medio de ecuaciones diferenciales parciales no lineales como se presentó en los capítulos anteriores. Las soluciones construidas numéricamente fueron posibles por medio del método de elementos finitos en el dominio discontinuo propuesto.

- Se logró modelar un sistema de ecuaciones en términos de derivadas parciales que gobierna el fenómeno electrohidrodinámico en un medio (dominio Ω). La no linealidad presente en el planteamiento hizo que la solución analítica fuera compleja de obtener por medio de los funcionales planteados en la sección 3, por este motivo, los resultados numéricos obtenidos sirvieron para avanzar y llenar un espacio en el estado del arte para la solución aproximada del fenómeno planteado en este documento. El sistema de ecuaciones diferenciales parciales intrincadamente relacionado por las variables eléctricas ρ y Φ permitieron estudiar un fenómeno que hace parte de la teoría del electromagnetismo, al imponer condiciones iniciales y de frontera en un dominio Ω sintético e isotrópico. La homogeneidad del medio ayudó a resolver numéricamente un sistema de ecuaciones diferenciales parciales, por otro lado, el planteamiento matemático en términos de formas diferenciales permitió obtener una técnica para expresar las ecuaciones de Maxwell que afectan el fenómeno eléctrico del problema atacado en este trabajo de grado.
- La existencia y unicidad de la respuesta numérica se obtuvo imponiendo las condiciones de frontera propuestas en la subsección 2.3.2, es decir, estas condiciones se interponieron en la solución para garantizar que el potencial solo se originara en la punta del electrodo (figura 4.1) y simular la respuesta por medio del método de elementos finitos para analizar cualitativamente las gráficas presentadas en la subsección 4.2.1. Las gráficas de la subsección 4.2.1 consisten en la distribución espacial de las variables eléctricas ρ y potencial Φ analizadas con sus curvas de nivel, líneas de nivel en cada punto del dominio

y la dinámica respecto al tiempo de cada uno de estas líneas de nivel. La respuesta cambia si las condiciones de contorno cambian, pero para fines del análisis numérico se satisfacen las condiciones de frontera planteadas en un principio obteniendo así un resultado aproximado de la respuesta respecto al tiempo y a la distribución espacial.

- Existen diversas estrategias de solución para obtener resultados numéricos de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales. El método de elementos finitos es un método ampliamente usado en la ingeniería y el análisis numérico que permite fragmentar el dominio independientemente de la homogeneidad o de las propiedades del medio, es decir, si las propiedades del medio cambian de un punto a otro, entonces el método toma información del primer medio y las del segundo y soluciona un sistema lineal de ecuaciones donde las incógnitas son la variable de interés que fluye de un medio a otro, por otro lado, a pesar de las propiedades isotrópicas del medio estudiado en este documento, existencia una discontinuidad espacial en el dominio ya que existe una parte del dominio que lo divide en dos secciones, una sección activa donde se introduce un electrodo (potencial) y una región aislada (aterrizada) que no interviene, por lo tanto, se tuvo que recurrir a dos etapas para conocer la dinámica en términos del tiempo por medio de la estrategia de solución que consistió en solucionar la parte relacionada con la distribución de las variables eléctricas en el espacio y luego discretizando el tiempo una vez conocidas las condiciones iniciales de frontera para cada iteración logrando así observar el comportamiento y la distribución. El método de elementos finitos debido a su facilidad de adaptación en dominios regulares e irregulares permite solucionar problemas espacio temporales como los son el fenómeno electrohidrodinámico. En este documento se implementó para cada instante de tiempo la solución numérica de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de tipo parabólico intrínsecamente acoplado, pudiendo obtener el comportamiento dinámico tanto en las variables espaciales como en la variable temporal. Finalmente, el método de elementos finitos se propone como una herramienta del análisis numérico para solucionar ecuaciones diferenciales parciales y ordinarias que modelan fenómenos físicos y de ingeniería de tal forma que se adapte la solución en dominios, geometrías y materiales lineales y no lineales.

5.1. Trabajos futuros.

Los trabajos futuros que se esperan luego de ampliar el campo de estudio del electromagnetismo son los estudios de las soluciones aproximadas por medio de funciones de forma exponencial y polinómicas. Al aumentar el número de nodos por cada uno de los elementos como los son las formas exponenciales y los polinomios de orden $n > 4$ aumenta la exactitud de la respuesta a la vez del conjunto de ecuaciones lineales para encontrar los valores de los

pesos que se le asignan a las funciones de forma en la solución general. Por otro lado, el método propuesto en este trabajo de grado permitió describir un dominio irregular, generando un mallado constante en todo el dominio, se propone mejorar el mallado por medio de mallado adaptivo, esto es, un mallado que permita fragmentar las zonas donde las condiciones de frontera cambian subitamente, esto con el fin de mejorar la capacidad del método en estas zonas.

5.2. Productos relacionados

1. **Titulo:** Modelado de líneas de transmisión extra largas en HVDC con ecuaciones diferenciales parciales. Análisis numérico por medio de elementos finitos.
 - **Tipo de producto:** Póster.
 - **Nombre del evento:** Matemáticas por estudiantes 2017 IV Versión
 - **Tipo de evento:** Congreso Nacional.
 - **Lugar:** BOGOTÁ, D.C. - Universidad de los Andes.
2. **Titulo:** Modelado y solución numérica del fenómeno electrohidrodinámico producido por un electrodo en un medio isotrópico por medio de elementos finitos.
 - **Tipo de producto:** Artículo.
 - **Nombre de la revista:** Journal of Physics: Conference Series. Workshop on modeling and simulation for science and engineering.
 - **Tipo de evento:** Congreso Nacional.
 - **Fecha:** Agosto 2019.
3. **Titulo:** Solución de ecuaciones diferenciales parciales a través de análisis numérico utilizando de elementos finitos y proyección Galerkin.
 - **Tipo de producto:** Investigación y desarrollo.
 - **Universidad:** Universidad Tecnológica de Pereira. Vicerrectoría de Investigaciones, Innovación y Extensión.
 - **Fecha:** Enero 2018-Agosto 2019.

Bibliografía

- [1] A. Nikparto and M. Schobeiri, “Combined numerical and experimental investigations of heat transfer of a highly loaded low-pressure turbine blade under periodic inlet flow condition.” *Journal of Power and Energy, Part A*, 2018.
- [2] J. Misra and S. CHANDRA., “Electro-osmotic flow of a second-grade fluid in a porous microchannel subject to an ac electric field.” *Journal of Hydrodynamics.*, 2013.
- [3] D. Y. S. L. J. Zhou, D. Gao and Y. Fei., “Mechanisms and modeling of electrohydrodynamic phenomena.” *International Journal of Bioprinting.*, 2018.
- [4] A. Bandopadhyay and U. Ghosh., “Electrohydrodynamic phenomena.” *Journal of the Indian Institute of Science.*, 2018.
- [5] W. C. S. Park, U. Cvelbar and S. Y. Moon., “The creation of electric wind due to the electrohydrodynamic force.” *Nature Communications.*, 2018.
- [6] C. A., *Electrohydrodynamics.*, U. de Sevilla., Ed. Springer, 1998.
- [7] A. Ramkrishnan and S. Kumar., “Electrohydrodynamic deformation of thin liquid films near surfaces with topography.” *Physics of Fluids*, 2014.
- [8] J. N. J. N. Reddy and D. K. Gartling., *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics.*, CRC, Ed. CRC Series in COMPUTATIONAL MECHANICS and APPLIED ANALYSIS., 1994.
- [9] E. Tarunin and Y. A. Yamshinina., “Bifucation of stationary solutions of the system of equations of electrohydrodynamics for unipolar injection.” *Fluid Dynamics*, 1994.
- [10] P. H. M. M. A. R. A. Babajani, M. Jafari and L. Rosendahl., “Parametric study of a wave energy converter (searaser) for caspian sea.” *Energy Procedia.*, 2018.
- [11] C. Pozrikidis., *Introduction to Finite and Spectral Element Methods using Matlab.*, C. . Hall/CRC, Ed. C. Hall/CRC, 2014.

- [12] K. L. C. Mellado., “Uso del metodo local discontinuo de galerkin con integracion temporal del tipo exga en problemas de din mica.” Master’s thesis, Universidad Nacional de Colombia., 2014.
- [13] O. A. C. Fernandez., “Solucion numerica de ecuaciones diferenciales parciales en medios aleatorios y heterogeneos.” Master’s thesis, Universidad Nacional de Colombia, 2016.
- [14] M. F. M. D. Alba., “Estudio comparativo entre los metodos espectrales y la formulacion petrov-galerkin para la soluci n numerica de problemas con conveccion dominante.” Master’s thesis, Universidad Nacional de Colombia., 2011.
- [15] Y. Lin., “Spectral integral method and spectral element method domain decomposition method for electromagnetic field analysis.” Ph.D. dissertation, Duke University., 2011.
- [16] D. N. Arnold., “Finite element exterior calculus, homological techniques, and applications.” *Acta Numerica*, 2006.
- [17] D. N. ARNOLD and G. AWANOU, “Finite element differential forms on cubical meshes,” *MATHEMATICS OF COMPUTATION*, 2014.
- [18] F. B. Douglas N. Arnold, Daniele Boffi, “Finite element differential forms on curvilinear cubic meshes and their approximation properties.” *Numerische Mathematik*, 2015.
- [19] R. V. Craster and O. K. Matar, “Electrically induced pattern formation in thin leaky dielectric films,” *AIP. Physics of Fluids*, 2005.
- [20] M. A. H. A. Esmaeeli, “Electrohydrodynamics of a liquid drop in ac electric fields,” *Springer*, 2018.
- [21] T. M. T. S. M. S. Frank Grom, J rg Kentsch, “Accumulation and trapping of hepatitis a virus particles by electrohydrodynamic flow and dielectrophoresis,” *WILEY*, 2006.
- [22] M. Chipot, “On some stationary navier stokes type problems,” *Nonlinear Analysis*, vol. 177, pp. 288 – 298, 2018, nonlinear PDEs and Geometric Function Theory, in honor of Carlo Sbordone on his 70th birthday. [Online]. Available: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0362546X1830138X>
- [23] Y. H. Li Peng, “On nonlocal backward problems for fractional stochastic diffusion equations. computers and mathematics with applications,” *Science Direct*, 2019.
- [24] Y. C. Xinrong Jiang, “Gradient estimate for fast diffusion equations on riemannian manifolds. journal of mathematical analysis and applications.” *Science Direct.*, 2018.

-
- [25] M. A. Pinsky., *Partial Differential Equations and Boundary Value Problems with Applications.*, i. Waveland Press, Ed. American Mathematical Society, 2010.
- [26] N. N. A. Onjefu Amali, “Finite element method for solving the advection-diffusion equation.” *IEEE*, 2017.
- [27] I. M. R. i. Sixto Romero, Francisco J. Moreno, *Introducción a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDPs)*, S. de Publicaciones. Universidad de Huelva, Ed. Universidad de Huelva, 2001.
- [28] A. T. Are Magnus Bruaset, *Numerical Solution of Partial Differential Equations on Parallel Computers*, S. R. Laboratory, Ed. Springer, 2006.
- [29] G. N. W. Anders Logg, Kent-Andre Mardal, *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method. The FEniCS Book*, S. R. Laboratory, Ed. Springer, 2010.

Apéndice A

Anexos

A.1. Operaciones con k-Formas en \mathbb{R}^n

A.1.1. Suma

Sea ω y φ dos k -formas en \mathbb{R}^n . **Notación:** $I = (i_1, \dots, i_k); i_1 < \dots < i_k$

$$\omega \in \wedge^k(\mathbb{R}^n)^* \Rightarrow \omega = \sum_I a_I dx_I$$

Si $\omega = \sum_I a_I dx_I$ y $\varphi = \sum_I b_I dx_I$ entonces la suma entre k -formas se define como la suma de las funciones a_I, b_I multiplicada por la base de la k -forma, esto es:

$$\omega + \varphi = \sum_I (a_I + b_I) dx_I \quad (\text{A.1})$$

La suma está definida en las mismas dimensiones y la misma k -formas, 1-forma con 1-forma está definida; por otra parte, 0-forma con 1-forma no está definida.

A.1.2. Producto Exterior

Sean $\omega = \sum_I a_I dx_I$ una k -forma con $I = i_1, \dots, i_k$ y $\varphi = \sum_J b_J dx_J$ una s -forma con $J = j_1, \dots, j_s$ y el producto entre una k -forma y una s -forma viene dado por:

$$\omega \wedge \varphi = \left(\sum_I a_I dx_I \right) \wedge \left(\sum_J b_J dx_J \right) = \sum_{IJ} a_I b_J dx_I \wedge dx_J \quad (\text{A.2})$$

La operación del producto exterior entre una k -forma y una s -forma genera una $(k + s)$ -forma.

A.1.3. Propiedades de la derivada exterior

1. **Linealidad de la suma de derivadas.** La operación diferencial aplica sobre las 0- formas a_I y b_J

Sean ω_1 y ω_2 dos k - formas definidas como : $\omega_1 = \sum_I a_I dx_I$ y $\omega_2 = \sum_I b_I dx_I$, su derivada exterior viene dada por:

$$d(\omega_1 + \omega_2) = d\left(\sum_I (a_I + b_I) dx_I\right) = \sum_I (d(a_I + b_I) \wedge dx_I) \quad (\text{A.3})$$

Lo anterior A.3 se puede demostrar como sigue:

$$\begin{aligned} d(\omega_1 + \omega_2) &= d\left(\sum_I (a_I + b_I) dx_I\right) \\ d(\omega_1 + \omega_2) &= \sum_I (d(a_I + b_I) \wedge dx_I) \\ d(\omega_1 + \omega_2) &= \sum_I (d(a_I) + d(b_I)) \wedge dx_I \\ d(\omega_1 + \omega_2) &= \sum_I (da_I \wedge dx_I + db_I \wedge dx_I) \\ d(\omega_1 + \omega_2) &= \sum_I da_I \wedge dx_I + \sum_I db_I \wedge dx_I \\ d(\omega_1 + \omega_2) &= d\omega_1 + d\omega_2 \end{aligned}$$

La derivada exterior de la suma de dos k - formas generada una $k + 1$ - forma. La diferenciación opera sobre las 0- formas.

2. **Regla de Leibniz para la derivada exterior:** Sea ω una k - forma y φ una s - forma.

$$d(\omega \wedge \varphi) = d(\omega) \wedge \varphi + (-1)^k \omega \wedge d(\varphi) \quad (\text{A.4})$$

La ecuación A.4 se puede demostrar como sigue a continuación: $\omega = \sum_I a_I dx_I$; $\varphi = \sum_J a_J dx_J$, el producto exterior $\omega \wedge \varphi = \sum_{I,J} a_I b_J dx_I \wedge dx_J$

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \varphi) &= \sum_{I,J} (b_J d(a_I) + a_I d(b_J)) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ d(\omega \wedge \varphi) &= \sum_{I,J} b_J d(a_I) \wedge dx_I \wedge dx_J + \sum_{I,J} a_I d(b_J) \wedge dx_I \wedge dx_J \end{aligned}$$

En los términos formados por $\sum_{I,J} a_I d(b_J) \wedge dx_I \wedge dx_J$ los diferenciales $d(b_J) \wedge dx_I \wedge dx_J$ se mueven k veces, por consiguiente el orden queda:

$$d(\omega \wedge \varphi) = \sum_{I,J} b_J d(a_I) \wedge dx_I \wedge dx_J + (-1)^k \sum_{I,J} a_I dx_I \wedge d(b_J) \wedge dx_J$$

Reescribiendo los términos anteriormente obtenidos se tiene que:

$$d\omega \wedge \varphi = \sum_{I,J} b_J d(a_I) \wedge dx_I \wedge dx_J \text{ y}$$

$\omega \wedge d\varphi = (\sum_I a_I dx_I) \wedge (\sum_J d(b_J) \wedge dx_J) = \sum_{I,J} a_I dx_I \wedge d(b_J) \wedge dx_J$, finalmente se obtiene:

$$d(\omega \wedge \varphi) = \sum_{I,J} b_J d(a_I) \wedge dx_I \wedge dx_J + (-1)^k \sum_{I,J} a_I dx_I \wedge d(b_J) \wedge dx_J$$

$$d(\omega \wedge \varphi) = d\omega \wedge \varphi + (-1)^k \omega \wedge d\varphi$$

3. **Segunda Derivada:** $d(d\omega) = d^2(\omega) = 0$. Para deducir esta propiedad, suponer $\omega = f$ es una 0- forma.

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

$$d(df) = \sum_i d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \wedge dx_i$$

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j$$

$$d(df) = \sum_i \left(\sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j\right) \wedge dx_i$$

$$d(df) = \sum_{i < j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right) \wedge dx_i \wedge dx_j$$

$$\therefore d(d\omega) = 0$$