



# ESCOLA NAVAL

talant de bi-faire



Departamento de Ciências do Mar

Pedro de Aragão Matta Amaral Raposo

*Estudo da propagação acústica 3D em meios não homogêneos –  
Raytracing baseado no princípio de Fermat*

Dissertação para obtenção do grau de Mestre em Ciências Militares Navais, na  
especialidade de Marinha



Alfeite

2019





# ESCOLA NAVAL

talant de bi-faire



**Pedro de Aragão Matta Amaral Raposo**

*Estudo da propagação acústica 3D em meios não homogêneos –  
Raytracing baseado no princípio de Fermat*

Dissertação para obtenção do grau de Mestre em Ciências Militares Navais, na  
especialidade de Marinha

**Orientação de:** Professor Doutor Miguel Ângelo Pereira Bento Moreira

**Coorientação de:** Professor Doutor Mário Alexandre Pousão da Costa Gatta

O aluno mestrando,

O orientador,

\_\_\_\_\_  
Aspirante Pedro Amaral Raposo

\_\_\_\_\_  
Professor Doutor Miguel Bento Moreira

O Coorientador,

\_\_\_\_\_  
Professor Doutor Mário Costa Gatta

**Alfeite**

**2019**



"I could either watch it happen or be a part of it."  
- Elon Musk



# Agradecimentos

Em primeiro lugar gostaria de agradecer à Milá, à Teresa e à Luísa, que são o meu porto de abrigo e me proporcionam um apoio indispensável desde sempre.

Gostaria também de agradecer ao meu orientador, Professor Miguel Moreira, primeiro por ter aceite orientar a minha dissertação de mestrado, mas também pelo apoio incessante, pela disponibilidade e pela motivação que me deu ao longo deste ano, que me permitiu aprender tudo o que aprendi e atingir resultados que dificilmente teria atingido sozinho.

Ao Professor Mário Gatta, meu coorientador, agradeço todo o apoio que me deu e a disponibilidade que sempre teve para esclarecer todas as dúvidas que coloquei.

Agradeço também ao Professor Vincent Debut pelas sugestões feitas que permitiram melhorar este trabalho.

Ao Tenente Quaresma dos Santos agradeço o interesse demonstrado e os comentários construtivos que fez ao meu trabalho.

Por fim, gostaria de agradecer a todos aqueles que de alguma maneira contribuíram para a realização deste trabalho.





# Resumo

## **Estudo da propagação acústica 3D em meios não homogêneos**

No decorrer deste trabalho foram construídos dois modelos paramétricos de raytracing, um 2D e um 3D, baseados no princípio de Fermat, que estabelece que a trajetória de um raio entre dois pontos é aquela que minimizar o tempo de trajeto. Após estabelecer as equações de Euler-Lagrange associadas ao tempo de trajeto de um raio acústico, foram deduzidos os sistemas de equações diferenciais que modelam as trajetórias de raios acústicos. Em seguida, foram efetuadas as alterações necessárias à resolução dos sistemas deduzidos, permitindo efetuar diferentes simulações. Primeiro simulações preliminares para confirmar a veracidade dos dados calculados bem como as capacidades do modelo, que se seguiram de uma comparação com outro software de raytracing e simulações na presença de reflexões. Todos os testes foram satisfatórios, sendo possível concluir que as ferramentas criadas são úteis no traçado de raios a três dimensões e na presença de campos de velocidade complexos com elevados gradientes de velocidade do som.

Palavras chave: Raytracing 3D, Princípio de Fermat, Modelação acústica, Acústica Submarina



# Abstract

## **The study of 3D acoustic propagation in heterogeneous media**

Fermat's principle of least time states that the trajectory between two points is the one whose path minimizes the trajectory's time. Principle based on which two raytracing models were developed, one in 2D and another in 3D. After establishing the Euler-Lagrange's equations associated with an acoustic ray's travel time the deduction of the systems of differential equations that model the acoustic trajectories followed. The systems were then altered in order to solve them numerically, allowing the simulations of acoustic trajectories. The preliminary simulations showed the capabilities of the models, which were followed by a comparison with other raytracing software and simulations in the presence of reflections. The results were satisfactory leading to the conclusion that the developed models are useful for raytracing in 3D and in the presence of complex sound fields with high sound velocity gradients.

Key words: 3D Raytracing, Fermat's Principle, Acoustic modelling, Underwater Acoustics



# Índice Geral

Epígrafe	III
Agradecimentos	V
Resumo	VII
Abstract	IX
Índice Geral	XI
Índice de Figuras	XIII
Notação Técnica e Científica	XV
Prefácio	XVII
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Estado da arte . . . . .	2
<b>2 Fundamentos Teóricos</b>	<b>5</b>
2.1 Raytracing . . . . .	5
2.2 Minimização do valor de um integral . . . . .	7
2.3 Resolução numérica de equações diferenciais . . . . .	9
2.3.1 Método de Runge-Kutta . . . . .	10
<b>3 Dedução dos modelos paramétricos</b>	<b>13</b>
3.1 Formulação do problema . . . . .	13
3.2 Dedução do modelo paramétrico 2D . . . . .	15
3.3 Dedução do modelo paramétrico 3D . . . . .	16
<b>4 Resolução numérica dos modelos</b>	<b>19</b>
4.1 Fecho do problema . . . . .	19
4.2 Resolução numérica do modelo 2D . . . . .	21

4.2.1	Reformulação do modelo 2D . . . . .	21
4.2.2	Simulações numéricas iniciais . . . . .	22
4.2.3	Comparação com software de raytracing . . . . .	24
4.3	Resolução numérica do modelo 3D . . . . .	26
4.3.1	Reformulação do modelo 3D . . . . .	26
4.3.2	Simulações numéricas . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Introdução de reflexões</b>	<b>31</b>
5.1	Princípios considerados . . . . .	31
5.2	Metodologia utilizada . . . . .	32
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>35</b>
6.1	Conclusões gerais . . . . .	35
6.2	Trabalho futuro . . . . .	36
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>39</b>
<b>A</b>	<b>Trabalho apresentado no colóquio Jornadas do Mar 2018</b>	<b>43</b>
<b>B</b>	<b>Trabalho apresentado no 1º Encontro Anual de Investigação e Desenvolvimento em Ciências Militares</b>	<b>55</b>
<b>C</b>	<b>Trabalho apresentado na conferência Internoise 2019</b>	<b>65</b>

# Índice de Figuras

3.1	Ilustração do trajecto de raio entre dois pontos, A e B, com representação de um pedaço infinitesimal do trajecto, ds. . . .	13
4.1	Conjunto de raios arbitrários lançados dos pontos $(-2,-2), (-1,-2), (0,-2), (1,-2)$ e $(2,-2)$ inicialmente numa orientação vertical sobre um campo de velocidades com valor máximo no ponto $(0,0)$ . . . . .	23
4.2	Ilustração de uma trajectória complexa num campo hipotético, originada no ponto $(-2,-2)$ com a orientação de 50 graus relativamente ao eixo $\mathbf{xx}$ . . . . .	23
4.3	Representação dos perfis verticias de velocidade do som utilizados para comparar os dois modelos. . . . .	26
4.4	Resultados obtidos ao comparar os dois modelos considerando o perfil vertical de gradientes de velocidade do som constantes. Nesta simulação os raios foram originados na profundidade de 600 m com uma orientação horizontal. . . . .	27
4.5	Resultados obtidos ao comparar os dois modelos tendo em conta o perfil vertical mais realista tendo os raios sido originados nas mesmas condições que a primeira simulação, orientação horizontal da profundidade de 600 m. . . . .	27
4.6	Primeira perspectiva da simulação 3D, que representa um conjunto de raios lançado do plano $x = -2$ sobre uma área onde a velocidade do som tem um ponto máximo em $(0, 0, 0)$ e dispersão esférica. . . . .	29
4.7	Segunda perspectiva da simulação 3D, que representa um conjunto de raios lançado do plano $x = -2$ sobre uma área onde a velocidade do som tem um ponto máximo em $(0, 0, 0)$ e dispersão esférica. . . . .	29
4.8	Segunda simulação 3D efetuada numa área onde a velocidade do som tem um ponto máximo em $(0, 0, 0)$ e dispersão esférica. . . . .	30

XIV

5.1 Simulação de um raio onde se observa uma reflexão com o fundo e uma com a superfície, na presença de um perfil de velocidade do som oceânico típico. . . . . 33



# Notação Técnica e Científica

## Latim

$p$	Função que define a pressão num ponto em função do tempo e do espaço.
$c$ ou $v$	Função que define a variação da velocidade do som no espaço.
$A$	Amplitude de $p$ num determinado ponto.
$j$	Unidade imaginária.
$t$	Variável de tempo.
$y'$ ou $y'(x)$	Primeira derivada de $y$ relativamente a $x$ .
$y''$ ou $y''(x)$	Segunda derivada de $y$ relativamente a $x$ .
$x, y$	Coordenadas espaciais a duas dimensões.
$z, w$	Primeiras derivadas de $x(\tau)$ e $y(\tau)$ a duas dimensões, respectivamente.
$x, y, z$	Coordenadas espaciais a três dimensões.
$a, b, c$	Primeiras derivadas de $x(\tau)$ , $y(\tau)$ e $z(\tau)$ a três dimensões, respetivamente.
$n$	Índice de refração.
$\hat{s}$	Vetor unitário com a direção de propagação de um raio acústico.
$\mathbf{r}(\tau)$	Parametrização relativamente ao parâmetro de comprimento da trajetória $\tau$ .
$\mathbf{r}_i$	Vetor unitário tangente à trajetória do raio incidente, no ponto de reflexão.
$\mathbf{r}_r$	Vetor unitário tangente à trajetória do raio refletido, no ponto de reflexão.
$\mathbf{V}_c$	Vetor colinear ao fundo.
$\mathbf{V}_n$	Vetor normal ao fundo.
$\mathbf{vc}$	Versor colinear ao fundo.
$\mathbf{vn}$	Versor normal ao fundo.
$^{\circ}C$	Temperatura em graus Celsius.
$T_s$	Temperatura à superfície.
$m s^{-1}$ ou $m/s$	Velocidade em metros por segundo.
$ E_n $	Majorante de $\epsilon_n$ .

**Grego**

- $\tau$  Parâmetro de comprimento da trajectória.
- $\gamma$  Trajectória de um raio acústico.
- $\Gamma$  Função da fase da variação de  $p$  no espaço.
- $\nabla^2$  Operador Laplaciano.
- $\nabla$  Operador Gradiente.
- $\omega$  Frequência da variação de  $p$ .
- $\theta_i$  Ângulo de incidência.
- $\theta_r$  Ângulo de reflexão.
- $\epsilon_n$  Erro associado ao cálculo de um ponto  $y_n$ .
- $\delta x$  Variação de natureza artificial associada à função  $x$ .

# Prefácio

Este trabalho é iniciado no capítulo 1 com a introdução do problema que irá ser estudado. Depois de apresentar o desafio da propagação acústica no oceano referindo a importância deste tema e algumas das suas aplicabilidades, são referidos os principais trabalhos desenvolvidos na área e algumas referências bibliográficas de interesse para o estudo desta matéria.

No capítulo 2 são abordados os principais fundamentos teóricos necessários à elaboração deste trabalho. A aproximação da equação de onda recorrendo ao *raytracing*, a minimização do valor de um integral aplicando ferramentas de cálculo variacional e a resolução numérica de equações diferenciais utilizando o método de Runge-Kutta.

Segue-se o capítulo 3 onde é feita uma introdução ao problema. Este começa por definir o tempo de trajeto de um raio, seguindo-se a dedução dos sistemas de equações diferenciais que compõem os modelos desenvolvidos, tendo por base o princípio de Fermat.

No capítulo 4 é abordada a resolução numérica destes sistemas de equações diferenciais que resulta nas simulações que são apresentadas, discutindo-se depois os resultados destas simulações. No quinto capítulo são descritos os conceitos subjacentes à introdução de reflexões no modelo 2D, após o que é descrita a metodologia aplicada para tal.

Por fim, as conclusões e as sugestões de trabalho futuro são apresentadas no capítulo 6, encontrando-se em apêndice os trabalhos apresentados durante o ano letivo em que foi realizada esta dissertação.



# Capítulo 1

## Introdução

A acústica submarina dedica-se ao estudo da criação e propagação do som na água, estando tipicamente associada às disciplinas de hidrografia, oceanografia física e diferentes áreas de matemática e física como o cálculo numérico e o estudo de movimentos oscilatórios. Dado o âmbito de estudo deste ramo da acústica, este é muitas vezes utilizado para estudar os oceanos, meio onde a propagação do som apresenta uma elevada complexidade, devido à variação das características físicas da água do mar. Uma porção de água pode ser descrita a partir da sua temperatura, salinidade e pressão, as condições que definem a velocidade de propagação do som na água e cuja variação torna a água do mar um meio não homogêneo para a propagação do som, por outras palavras, a velocidade do som varia à medida que este se propaga no oceano. Esta complexidade dificulta o estudo da propagação do som na água do mar e implica o uso de técnicas que simplifiquem a resolução da equação de onda ou da equação de Helmholtz, (Buckingham, 1992). É possível mostrar que a equação de onda, considerando uma velocidade de propagação do som que varia no espaço, tem a seguinte forma

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2(x, y, z)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p(x, y, z, t) = 0. \quad (1.1)$$

Assumindo

$$p(x, y, z, t) = A(x, y, z) e^{j\omega t} \quad (1.2)$$

Como solução harmónica de (1.1), obtemos a equação de Helmholtz

$$\nabla^2 A(x, y, z) + \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 A(x, y, z) = 0. \quad (1.3)$$

Como podemos ver em (Etter, 2012) e (Buckingham, 1992), as principais técnicas utilizadas para simplificar a resolução das equações referidas são o

método de elementos finitos, a equação de Green, a equação parabólica, a integração do número de onda, os modos normais, e o *raytracing*, tendo sido esta a aproximação utilizada neste trabalho. O *raytracing* é uma solução para sinais de alta frequência que representa uma onda como um conjunto de raios de orientação sempre perpendicular à frente de onda. Após considerar esta representação da onda acústica e como se pode consultar com maior detalhe no capítulo 2, o traçado dos raios pode ser efetuado com recurso à Lei de Snell, ao cálculo do raio de curvatura numa camada de gradiente de velocidade do som constante, à resolução da equação Eikonal e ao princípio do tempo mínimo de Fermat.

A importância do estudo desta matéria reside na facilidade com que o som se propaga na água contrariamente à radiação eletromagnética, o que permite a mapeação do fundo marinho, comunicações submarinas e a obtenção de diferentes dados que permitem o estudo do meio submarino, à semelhança dos usos da radiação eletromagnética na superfície e no espaço. Ao construir um modelo de propagação, é importante distinguir o número de dimensões do espaço considerado e em quantas dessas dimensões varia o campo de velocidade do som presente. De maneira geral, a variação da velocidade do som no oceano depende unicamente da profundidade, ou seja, varia numa só dimensão (Buckingham, 1992). Ainda assim, há situações onde é necessário considerar a variação da velocidade do som em todas as dimensões possíveis, tanto num modelo bidimensional como num tridimensional. Este tipo de condições ocorre em locais com características particulares, sendo um exemplo a propagação do som na presença de fontes hidrotermais, um fenómeno, para nós, de importância acrescida, dada a descoberta de fontes hidrotermais na plataforma continental portuguesa, nos Açores (Paiva, 2018).

A principal limitação de recorrer à Lei de Snell ou ao cálculo do raio de curvatura numa camada de gradiente de velocidade do som constante para o traçado de raios é que estes métodos fornecem uma solução geométrica difícil de aplicar num espaço onde a variação de velocidade do som ocorra em mais do que uma dimensão, situação onde é útil recorrer à resolução da equação Eikonal ou ao princípio de Fermat. Este princípio estabelece que a trajetória escolhida por um raio é aquela que permitir um tempo de trajeto mínimo (Born and Wolf, 1999) e permite, desta maneira, deduzir equações que modelam a trajetória de raios acústicos.

## 1.1 Estado da arte

Alguns dos principais autores de acústica submarina são Alan B. Copens, Paul C. Etter, Henrik Schmidt, Michael B. Porter, Robert J. Urlick e Michael

J. Buckingham, sendo as principais obras para o estudo de acústica submarina (Kinsler et al., 1999), (Jensen et al., 2011), (Urlick, 2013) e (Brekhovskikh and Lysanov, 2003). Se estas são as bases do estudo da acústica submarina, o ponto de partida para o estudo de modelos de propagação acústica é o artigo (Buckingham, 1992). Neste trabalho é feita uma análise minuciosa ao meio, aos desafios inerentes à sua modelação e são apresentados e analisados vários modelos de propagação baseados nas diferentes técnicas que permitem aproximar a equação de onda. Tendo em conta a data de publicação deste artigo, este pode ser complementado com a leitura de (Etter, 2012) que, ainda que não se debruce unicamente sobre modelos de propagação acústica, analisa vários dos modelos existentes atualmente. Para modelos de propagação 3D deve acrescentar-se (Tolstoy, 1996), neste trabalho, o autor escreve sobre as vantagens dos modelos 3D e sobre os vários desafios que surgem para estes modelos. Além dos manuais já referidos, são de salientar os seguintes trabalhos (Uginčius, 1972), (Pierce, 2007), (Pierce, 2019) e (Popov, 2002) para aprofundar o conhecimento das ferramentas matemáticas associadas ao *raytracing*.

Dos diferentes modelos de *raytracing* existentes e para lá de outros que são referidos neste trabalho, é importante mencionar o recurso feito ao princípio de Fermat por alguns autores, (Cai et al., 2012) e (Lu et al., 2000), para deduzir uma equação que permita o traçado de raios acústico para fins de tomografia acústica, como podemos ver em (Paiva, 2018). Seguindo o mesmo princípio, podemos deduzir uma equação semelhante à deduzida pelos autores mencionados

$$y''(x) = \frac{1 + (y'(x))^2}{v(x, y)} \left( y'(x) \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right), \quad (1.4)$$

Onde  $v(x, y)$  é a função que define a velocidade do som no espaço considerado. A diferença entre (1.4) e a equação deduzida por autores referidos reside na escolha que estes fizeram para  $v(x, y)$ , aqui deixado em aberto. Ainda que esta equação permita a modelação de raios acústicos a duas dimensões, estes terão as suas orientações limitadas. Para orientações verticais,  $y'(x)$  toma valores infinitos tornando impossível o cálculo de (1.4).

Deve também referir-se a existência de uma biblioteca acústica, (USONR et al., ), um projeto criado e apoiado pelo *Office of Naval Research* da Marinha dos Estados Unidos da América que fornece um meio de troca de conhecimentos de acústica submarina, tanto na forma de dados experimentais como na partilha de modelos de propagação acústica 2D e 3D (cujos softwares são facilmente acessíveis) baseados em diferentes técnicas de resolução da equação de onda. Os modelos de propagação 3D aqui encontrados são:

- O BELLHOP3D, (Porter, 2016) um modelo de *beamtracing*, cuja componente de *raytracing* se baseia na resolução da equação eikonal e o KRAKEN3D, (Porter, 1992) um modelo de modos normais ambos criados por Michael Porter da HLS Research;
- O HARPO, um modelo de *raytracing* Hamiltoniano desenvolvido por R. M. Jones, J. P. Riley e T. M. Georges do *National Oceanic and Atmospheric Administration* dos Estados Unidos da América.
- O HWT 3D, (Zabotin et al., 2014) modelo de representação de frentes de onda criado por Nikolay Zabotin, Oleg Godin e Liudmila Zabotina da Universidade do Colorado;
- O TRACEO3D, (Calazan and Rodríguez, 2017) modelo de *beamtracing*, cuja componente de *raytracing* se baseia na resolução da equação eikonal, criado por Orlando Rodríguez e Rogério Calazan da Universidade do Algarve;
- O WaveQ3D, (Reilly, 2016) outro modelo de *beamtracing* cuja componente de *raytracing* se baseia na resolução da equação eikonal, criado por Sean Reilly da Universidade de Rhode Island.



# Capítulo 2

## Fundamentos Teóricos

### 2.1 Raytracing

Ainda que a propagação do som ocorra na forma de ondas, em situações onde a velocidade do som é uma função do espaço, como no nosso caso, as ondas variam a direção de propagação ao longo do meio onde se propagam. Por esta razão, pensa-se numa onda como um conjunto de raios, tendo por base a hipótese de que a energia segue caminhos bem definidos ao longo do meio onde se propaga (Kinsler et al., 1999). Esta não deixa de ser uma aproximação que só é válida face ao cumprimento de algumas restrições, que serão referidas mais à frente. Como podemos ver em (Kinsler et al., 1999), a equação de onda para uma velocidade que varia no espaço é

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2(x, y, z)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p(x, y, z, t) = 0. \quad (2.1)$$

Assumindo a possível solução

$$p(x, y, z, t) = A(x, y, z) e^{j\omega(t - \Gamma(x, y, z)/c_0)}, \quad (2.2)$$

Onde  $p$  é a função que descreve a variação da pressão nos diferentes pontos do espaço ao longo do tempo,  $A$  define a variação da amplitude de  $p$  no espaço e  $\omega$  a frequência com que  $p$  varia ao longo do tempo. A fase de  $p$  é-nos dada por  $\frac{\Gamma(x, y, z)}{c_0}$ , quantidade que tem o nome de *eikonal*. Como vemos, a fase é uma função do espaço, sendo  $c_0$  uma velocidade de referência e  $\Gamma$  uma função do espaço que tem a particularidade de todos pontos do seu domínio com a mesma imagem definirem uma superfície de igual fase, sendo, por isso,  $\nabla\Gamma$  um vetor sempre perpendicular a estas superfícies.

Substituindo (2.2) em (2.1) obtemos as partes real e imaginária, respetivamente

$$-\frac{\nabla^2 A}{A} + \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 \nabla\Gamma \cdot \nabla\Gamma = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \quad (2.3)$$

$$2\frac{\nabla A}{A} \cdot \nabla\Gamma + \nabla^2\Gamma = 0 \quad (2.4)$$

Estas equações são difíceis de resolver dada a sua natureza não linear e o facto de dependerem uma da outra, não obstante, impor a condição seguinte

$$\left|\frac{\nabla^2 A}{A}\right| \ll \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \quad (2.5)$$

Permite que (2.3) assuma uma forma simplificada

$$\nabla\Gamma \cdot \nabla\Gamma = \left(\frac{c_0}{c}\right)^2 = n^2 \quad (2.6)$$

A que se dá o nome de equação eikonal e onde  $n = \frac{c_0}{c}$  é o índice de refração, sendo possível afirmar que

$$\nabla\Gamma = n\hat{\mathbf{s}}. \quad (2.7)$$

Em (2.7),  $\hat{\mathbf{s}}$  é o vetor unitário que nos dá a direção de propagação em cada ponto. O trajeto de um raio é definido ao analisar a variação de  $\hat{\mathbf{s}}$  ao longo de vários pontos do espaço, a partir de um valor de  $\hat{\mathbf{s}}$  conhecido num ponto. Podemos também retirar de (2.7) que um raio é, em cada ponto, perpendicular a uma superfície de fase constante. Sendo suficiente que a amplitude de uma onda e a velocidade do som não variem significativamente ao longo de distâncias da ordem de grandeza do comprimento de onda, para garantir (2.5), como aparece em (Kinsler et al., 1999), onde também se mostra que a energia contida num feixe composto por um conjunto de raios se mantém constante, dentro das limitações da equação eikonal. Ainda que o traçado de raios forneça apenas uma solução geométrica à propagação acústica originando o caminho que será seguido por segmentos de uma frente de onda, consegue fornecer uma interpretação do modo como variará a intensidade da onda propagada. Se forem considerados vários raios iniciados com o mesmo desfasamento angular, quanto maior a distância entre dois raios, menor a energia propagada para a área entre ambos. A solução para o cálculo da pressão num determinado ponto na área de propagação de uma onda sonora mais próxima do *raytracing* é o *beamtracing*, este tipo de modelos associam um feixe a cada raio traçado e, sabendo como varia a pressão dentro de cada feixe, determinam a pressão num determinado ponto a partir da influencia de cada feixe na vizinhança do ponto, como se pode ver em (Baxley et al., 2000) e (Porter and Bucker, 1987).

## 2.2 Minimização do valor de um integral

O cálculo de variações é um ramo da matemática que surge para dar solução a problemas que envolvem encontrar valores extremos, como encontrar o ponto mais alto de uma montanha ou o caminho mais rápido entre dois pontos (Lanczos, 1986). O problema de encontrar o caminho mais rápido entre dois pontos surge neste trabalho, quando nos baseamos no princípio de Fermat para o traçado de raios acústicos. Consultando (Lemons, 1997), (Born and Wolf, 1999) ou (Lanczos, 1986), vemos diferentes formas de deduzir as equações de Euler-Lagrange, estando as mais detalhadas em (Lanczos, 1986), onde é apresentado o conceito de variação. Imaginando uma função  $f(x)$ , a variação  $\delta$  associada a esta função é infinitesimal como o operador de derivação  $d$ , ainda que  $\delta$  seja uma variação virtual imposta para efeitos de estudo, enquanto  $df$  é uma variação real correspondente à variação  $dx$ . Este conceito é importante, dado que encontrar o valor mínimo de um integral passa por acrescentar uma variação desta natureza à trajetória que pretendemos conhecer e garantir as condições necessárias para eliminarmos esta variação artificial, que correspondem às condições necessárias à obtenção de um valor estacionário. Como se pode ver em (Born and Wolf, 1999), consideremos uma curva  $C$ , definida por uma função  $y(x)$ , contínua e diferenciável, com uma primeira derivada  $y'$  também ela contínua e diferenciável. O integral

$$I = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx \quad (2.8)$$

É uma função de  $C$  e o problema que pretendemos resolver é encontrar a curva  $C$ , entre dois pontos  $a$  e  $b$ , para o qual o valor de  $I$  é minimizado. Para isto começamos por definir uma função  $\xi(x)$  igualmente diferenciável e contínua, com primeira derivada diferenciável e contínua, que desaparece nos extremos do intervalo considerado,  $\xi(a) = \xi(b) = 0$ . Intervalo onde  $\xi(x)$  é sempre diferente de 0. Esta é a função que nos dará a referida variação artificial, originando uma nova curva  $C'$  tão perto de  $C$ , quão pequeno for  $\varepsilon$ ,

$$y(x) = y(x) + \varepsilon \xi(x) \quad (2.9)$$

Sendo  $\varepsilon$  tão pequeno quanto quisermos. Reescrevendo (2.8) considerando (2.9) obtemos

$$I(\varepsilon) = \int_a^b F(x, y(x) + \varepsilon \xi(x), y'(x) + \varepsilon \xi'(x)) dx \quad (2.10)$$

É importante notar que, no valor extremo de (2.10),  $\varepsilon = 0$  e  $I'(\varepsilon) = 0$ , dado que um extremo é um valor estacionário. Desta maneira, é necessário que

$$I'(\varepsilon) = \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \xi + \frac{\partial F}{\partial y} \xi' \right) dx = 0 \quad (2.11)$$

Ao integrar (2.11) por partes, não esquecendo que  $\xi(a) = \xi(b) = 0$ , obtemos

$$\int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right) \xi dx = 0 \quad (2.12)$$

Dada a natureza de  $\xi$ , sem esquecer que esta função nunca é 0 no intervalo  $[a, b]$ , a única forma de garantir (2.12) é resolvendo a equação diferencial seguinte

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (2.13)$$

Conhecida como equação de Euler-Lagrange.

## 2.3 Resolução numérica de equações diferenciais

As equações diferenciais têm a particularidade de relacionar uma função com uma ou mais das suas derivadas, sendo que, para uma equação ser considerada diferencial, tem de relacionar uma função com pelo menos uma das suas derivadas (Simmons and Krantz, 2006). Um exemplo de uma equação diferencial é

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - f(x) = \cos(x)$$

Neste caso, relacionamos uma função  $f$  com a sua derivada de segunda ordem. Outra característica das equações diferenciais é que a sua resolução envolve encontrar uma ou mais funções. Como podemos ver em (Simmons and Krantz, 2006), este tipo de equações são particularmente adequadas para exprimir fenómenos reais, tendo em conta que a derivada de uma função  $f(x)$  exprime o modo como  $f$  varia relativamente à variação de  $x$  e vários processos da natureza podem ser descritos como a relação das variações entre diferentes grandezas, o que escrito matematicamente é uma equação diferencial.

Por vezes, a solução de uma equação diferencial pode ser obtida através de um método analítico, ainda que, na maioria dos casos de interesse para a resolução de problemas reais, não seja esse o caso, dada a complexidade dos fenómenos que se pretende modelar. Nestes casos, utilizam-se soluções numéricas aproximadas, que têm vindo a tornar-se ferramentas mais fáceis de utilizar com o crescimento da capacidade de processamento dos computadores. Ao criar um modelo numérico para resolver uma equação diferencial é necessário introduzir algumas aproximações, sendo estas substituir as derivadas existentes por quocientes de diferenças, passar a variável independente contínua a uma variável discreta e substituir a reta real por um conjunto discreto de valores. Por esta razão, existe sempre um determinado erro associado aos métodos de resolução numérica e é por este motivo aconselhável manter em mente esta limitação na interpretação dos resultados, considerando as soluções numéricas como um apoio para o conhecimento do problema e não como uma solução única e definitiva (Simmons and Krantz, 2006). As equações que compõem os modelos paramétricos deduzidos neste trabalho são caracterizadas por serem sistemas de equações algébrico-diferenciais, com equações implícitas não lineares, tendo sido utilizado para a resolução destes sistemas um algoritmo de Matlab programado por Tony Roberts (Roberts, 1998) baseado no método de Runge-Kutta e adequado à resolução deste tipo de sistemas de equações diferenciais.

### 2.3.1 Método de Runge-Kutta

Como referido, é no método de Runge-Kutta que se baseia a resolução numérica dos sistemas abordados neste trabalho. Para o introduzir, comecemos por descrever o método de Euler. Consultando (Simmons and Krantz, 2006), podemos ver que, para um problema da forma

$$y' = f(x, y), \quad (2.14)$$

$$y(x_0) = y_0 \quad (2.15)$$

Podemos integrar  $f(x, y)$  entre os pontos  $x_0$  e  $x_1 = x_0 + h$  para obter

$$y(x_1) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y) dx \quad (2.16)$$

$$y(x_1) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f(x, y) dx. \quad (2.17)$$

Como não conhecemos  $y(x)$ , a única forma de obtermos o valor de  $y(x_1)$  é tendo um valor aproximado do integral presente em (2.17), dado que conhecemos  $y(x_0)$ . O método de Euler consiste na aproximação mais simples do valor deste integral, considerando que  $f$  não varia significativamente no intervalo  $[x_0, x_1]$ , podemos considerar uma distância suficientemente pequena  $h$ , entre  $x_0$  e  $x_1$ , para a qual consideramos que  $y_0 = y(x_0)$ . Assim, podemos reescrever (2.17) como

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0), \quad (2.18)$$

Tendo para  $y_n$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n). \quad (2.19)$$

Como pode ser visto em mais detalhe em (Simmons and Krantz, 2006), o erro  $\epsilon_n = y(x_n) - y_n$  é majorado por

$$|E_n| \leq (x_n - x_0) \frac{Mh^2}{2} \equiv Ch \quad (2.20)$$

Onde  $C$  é um valor constante para cada  $y(x_n)$ . Como podemos ver, para diminuir significativamente o erro temos de diminuir  $h$  da mesma maneira, o que pode ter um elevado custo computacional, dada a quantidade de pontos que precisariam de ser calculados para um valor muito baixo de  $h$ .

De modo a melhorar a aproximação feita pelo método de Euler, podemos seguir a lógica usada na regra dos trapézios para o cálculo aproximado de

integrais. Para isto em vez de aproximarmos  $f(x_1, y_1)$  a  $f(x_0, y_0)$ , consideramos o valor médio entre estes dois pontos de  $f$ ,  $(f(x_0, y_0) + f(x_1, y(x_1))) / 2$ . Deste modo podemos reescrever (2.17) como

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} (f(x_0, y_0) + f(x_1, y(x_1))), \quad (2.21)$$

Ainda assim não conhecemos  $y(x_1)$ , mas podemos obter um valor aproximado  $z_1$  a partir do método de Euler. Com o novo valor  $z_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$ , (2.21) passa a

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} (f(x_0, y_0) + f(x_1, z_1)). \quad (2.22)$$

Expressão que permite o cálculo de  $y_1$ , visto que conhecemos todos os valores do segundo membro da equação. Da mesma forma que obtemos um método mais exato a partir da regra dos trapézios, é possível obter um método melhorado a partir da regra de Simpson. Podemos ver em (Atkinson, 1989), que o valor aproximado de um integral de uma função  $f(x, y)$  a partir da regra de Simpson é dado por

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y) dx = \frac{1}{6} [f(x_0, y_0) + 4f((x_{1/2}, y(x_{1/2}))) + f((x_1, y(x_1)))]. \quad (2.23)$$

Onde  $x_{1/2}$  é o ponto médio entre  $x_0$  e  $x_1$ . Uma forma intuitiva de obter o método de Runge-Kutta é aproximar os valores de  $y(x_{1/2})$  e  $y(x_1)$ , como vimos atrás e depois substituir as aproximações em (2.22).

Obtemos  $y_{1/2}$  recorrendo ao método de Euler da seguinte maneira

$$y_{1/2} = y_0 + \frac{m_1}{2} \quad (2.24)$$

$$m_1 = hf(x_0, y_0) \quad (2.25)$$

Para melhorar esta aproximação, partimos da aproximação de  $y_{1/2}$  que acabámos de fazer, tal como em (2.22)

$$y_{1/2} = y_0 + \frac{m_2}{2} \quad (2.26)$$

$$m_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{m_1}{2}\right)$$

Para obter  $y_1$  utilizámos o método de Euler a partir do valor mais aproximado de  $y_{1/2}$

$$y_1 = y_{1/2} + \frac{m_3}{2} \quad (2.27)$$

$$m_3 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{m_2}{2}\right) \quad (2.28)$$

Por fim e considerando  $m_4 = hf(x_0 + h, y_0 + m_3)$ , para a obtenção de um valor  $y_{n+1}$  a partir de um ponto conhecido  $(x_n, y_n)$  com base no método de Runge-Kutta, recorre-se à expressão seguinte

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) \quad (2.29)$$

Com

$$m_1 = hf(x_n, y_n) \quad (2.30)$$

$$m_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{m_1}{2}\right) \quad (2.31)$$

$$m_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{m_2}{2}\right) \quad (2.32)$$

$$m_4 = hf(x_n + h, y_n + m_3) \quad (2.33)$$

Esta técnica permite obter resultados de uma exatidão muito elevada sem exigir valores muito pequenos de  $h$ , visto que o erro associado ao cálculo de um determinado ponto  $y_n$  é da ordem de grandeza de  $h^4$ .



# Capítulo 3

## Dedução dos modelos paramétricos

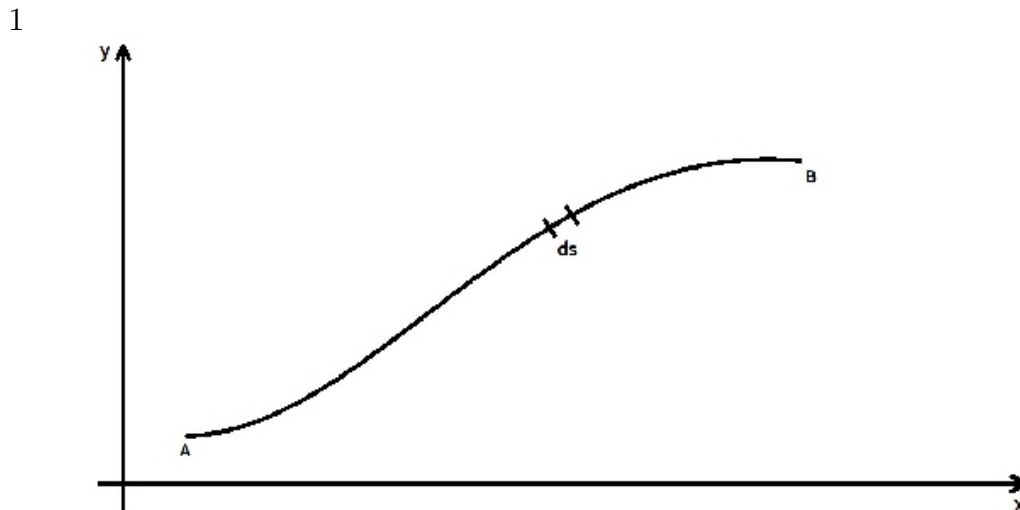


Figura 3.1: Ilustração do trajecto de raio entre dois pontos, A e B, com representação de um pedaço infinitesimal do trajecto,  $ds$ .

### 3.1 Formulação do problema

Como foi referido, uma das soluções para a modelação da propagação acústica é imaginar uma onda como um conjunto de raios, sendo possível deduzir as equações que modelam as trajetórias destes raios a partir do princípio de Fermat. Relembrando que este estabelece que a trajetória real entre dois

pontos é aquela que minimiza o tempo de trajeto entre os dois pontos. Começemos por definir o tempo de trajeto  $t$ , entre dois pontos  $A$  e  $B$ , de uma trajetória  $\gamma$  que toma lugar num espaço bidimensional, como ilustrado na Figura 3.1

$$t_{A \rightarrow B} = \int_{\gamma} \frac{ds}{v(x, y)} = \int_{\gamma} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{v(x, y)}. \quad (3.1)$$

No integral (3.1),  $v(x, y)$  é a função que define a velocidade de propagação do som no espaço considerado e  $ds$  uma parte infinitesimal da trajetória  $\gamma$ . No caso de uma trajetória tridimensional, basta acrescentar uma variável espacial  $z$ , dando origem ao integral seguinte

$$t_{A \rightarrow B} = \int_{\gamma} \frac{ds}{v(x, y, z)} = \int_{\gamma} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{v(x, y, z)}. \quad (3.2)$$

No primeiro capítulo, é referida a abordagem relativa à resolução deste problema tomada por (Lu et al., 2000), (Cai et al., 2012) e (Paiva, 2018), que considera  $y = y(x)$  e permite a dedução da seguinte equação diferencial

$$y''(x) = \frac{1 + (y'(x))^2}{v(x, y)} \left( y'(x) \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right). \quad (3.3)$$

Ainda que permita o traçado de raios a duas dimensões, a equação (3.3) impossibilita o cálculo destas trajetórias se  $y'(x)$  tomar valores infinitos, o que acontece se os raios tomarem orientações verticais no referencial considerado. De modo a construir um modelo que permita o cálculo de qualquer tipo de trajetórias, a solução encontrada para ultrapassar este problema foi parametrizar a trajetória  $\gamma$  relativamente a um parâmetro de comprimento da trajetória  $\tau$ . Reescrever (3.1) e (3.2), tendo em conta as respetivas parametrizações  $\mathbf{r}(\tau) = (x(\tau), y(\tau))$ ,  $\tau \in [a, b]$  e  $\mathbf{r}(\tau) = (x(\tau), y(\tau), z(\tau))$ ,  $\tau \in [a, b]$ , origina

$$t_{A \rightarrow B} = \int_a^b \frac{\sqrt{(x'(\tau))^2 + (y'(\tau))^2}}{v(x(\tau), y(\tau))} d\tau \quad (3.4)$$

e

$$t_{A \rightarrow B} = \int_a^b \frac{\sqrt{(x'(\tau))^2 + (y'(\tau))^2 + (z'(\tau))^2}}{v(x(\tau), y(\tau), z(\tau))} d\tau. \quad (3.5)$$

Como é abordado no capítulo 2, sabemos que o valor de um integral é minimizado se a sua função integranda  $F$  satisfizer as equações de Euler-Lagrange, aqui apresentadas considerando as variáveis de (3.4) e (3.5)

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial F}{\partial x'} \right) - \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \\ \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial F}{\partial z'} \right) - \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \end{cases} . \quad (3.6)$$

Com as respectivas funções integrandas de (3.4) e (3.5)

$$F_1 = \frac{\sqrt{(x'(\tau))^2 + (y'(\tau))^2}}{v(x(\tau), y(\tau))} \quad (3.7)$$

e

$$F_2 = \frac{\sqrt{(x'(\tau))^2 + (y'(\tau))^2 + (z'(\tau))^2}}{v(x(\tau), y(\tau), z(\tau))} \quad (3.8)$$

respetivamente.

## 3.2 Dedução do modelo paramétrico 2D

Conhecendo a função integranda (3.7), do integral que define o tempo de trajeto para duas dimensões, podemos deduzir as equações paramétricas que definem a trajetória de raios acústicos 2D estabelecendo as equações de Euler-Lagrange

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial F}{\partial x'} \right) - \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \end{cases} . \quad (3.9)$$

Tendo

$$\frac{\partial F}{\partial x} = - \frac{\partial v \sqrt{(x')^2 + (y')^2}}{\partial x v^2}, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = \frac{x'}{v \sqrt{(x')^2 + (y')^2}}, \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial F}{\partial x'} \right) = \\ & \frac{((x')^4 + (y')^2 (x')^2) \frac{\partial v}{\partial x} + (x' y' y'' - (x')^2 (y')^2) v + ((x')^3 y' + (y')^3 x') \frac{\partial v}{\partial y}}{v^2 \sqrt{((x')^2 + (y')^2)^3}} \end{aligned} \quad (3.12)$$

E depois de calcular, de forma semelhante,  $\frac{\partial F}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y'}$  e  $\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right)$ , é possível reescrever (3.9), após algumas simplificações algébricas, como:

$$\begin{cases} x''y' - y''x' + \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial x} ((y')^3 + (x')^2 y') - \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial y} ((x')^3 + (y')^2 x') = 0 \\ y''x' - x''y' + \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial y} ((x')^3 + (y')^2 x') - \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial x} ((y')^3 + (x')^2 y') = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

A solução  $\mathbf{r}(\tau) = (x(\tau), y(\tau))$ ,  $\tau \in [a, b]$  deste sistema de equações diferenciais corresponde à trajetória 2D que se pretende descobrir, infelizmente este sistema é indeterminado, repare-se que as equações são simétricas.

### 3.3 Dedução do modelo paramétrico 3D

De forma semelhante ao caso bidimensional, partindo da função integranda (3.8) para estabelecer as equações de Euler-Lagrange (3.14), é possível deduzir as equações diferenciais que modelam a trajetória de raios acústicos 3D.

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial F}{\partial x'} \right) - \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \\ \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial F}{\partial z'} \right) - \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

Sabendo que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial v \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}}{\partial x v^2}, \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = \frac{x'}{v \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}}, \quad (3.16)$$

e

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial F}{\partial x'} \right) = \\ & \frac{(y'y'' + z'z'')x'v - ((y')^2 + (z')^2)x''v + \frac{dv}{d\tau} ((x')^2 + (y')^2 + (z')^2)x'}{(v)^2 \sqrt{((x')^2 + (y')^2 + (z')^2)^3}}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Depois de calcular  $\frac{\partial F}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y'}$ ,  $\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right)$ ,  $\frac{\partial F}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial z'}$  e  $\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial F}{\partial z'} \right)$ , podemos reescrever

(3.14), após algumas simplificações algébricas, como:

$$\left\{ \begin{array}{l} ((y')^2 + (z')^2) x''v - (y'y'' + zz'') x'v \\ - ((x')^2 + (y')^2 + (z')^2) x' \frac{dv}{d\tau} + \frac{\partial v}{\partial x} ((x')^2 + (y')^2 + (z')^2)^2 = 0 \\ ((x')^2 + (z')^2) y''v - (x'x'' + z'z'') y'v \\ - ((x')^2 + (y')^2 + (z')^2) y' \frac{dv}{d\tau} + \frac{\partial v}{\partial y} ((x')^2 + (y')^2 + (z')^2)^2 = 0 \\ ((y')^2 + (x')^2) z''v - (y'y'' + x'x'') z'v \\ - ((x')^2 + (y')^2 + (z')^2) z' \frac{dv}{d\tau} + \frac{\partial v}{\partial z} ((x')^2 + (y')^2 + (z')^2)^2 = 0 \end{array} \right. \cdot \quad (3.18)$$

À semelhança do caso anterior, a solução  $\mathbf{r}(\tau) = (x(\tau), y(\tau), z(\tau))$ ,  $\tau \in [a, b]$  deste sistema de equações diferenciais corresponde à trajetória 3D que se pretende descobrir. Neste caso, as relações de dependência linear entre as equações não são óbvias e também apresentam um obstáculo, são linearmente independentes duas a duas.



# Capítulo 4

## Resolução numérica dos modelos

### 4.1 Fecho do problema

Como é referido no capítulo 2, os sistemas de equações deduzidos correspondem a sistemas de equações algébrico-diferenciais. Este tipo de sistemas apresentam características particulares que tornam a sua resolução numérica mais técnica e exigente, consulte-se por exemplo (Ascher and Petzold, 1998). Neste caso, o sistema não pode ser colocado na forma de Cauchy pelo que a correspondente resolução numérica só poderá ser concretizada com algoritmos implícitos, tendo sido utilizado para a resolução numérica destes sistemas um algoritmo muito estável e robusto implementado e desenvolvido em Matlab por Tony Roberts (Roberts, 1998) destinado a abordar este tipo de sistemas de equações (algébrico-diferenciais). No terceiro capítulo, apercebemo-nos que o modelo 2D deduzido é indeterminado, tendo em conta que as duas equações que o compõem são linearmente dependentes

$$\begin{cases} x''y' - y''x' + \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial x} ((y')^3 + (x')^2 y') - \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial y} ((x')^3 + (y')^2 x') = 0 \\ y''x' - x''y' + \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial y} ((x')^3 + (y')^2 x') - \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial x} ((y')^3 + (x')^2 y') = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Por esta razão, é necessário que se encontre uma nova equação que permita desfazer esta indeterminação, não obstante, analisemos primeiro as equações que compõem o modelo 3D antes de seguirmos para a solução a introduzir em (4.1) para que este sistema possa ser resolvido. Olhando para

o modelo 3D

$$\left\{ \begin{array}{l} ((y')^2 + (z')^2) x''v - (y'y'' + zz'') x'v \\ - ((x')^2 + (y')^2 + (z')^2) x' \frac{dv}{d\tau} + \frac{\partial v}{\partial x} ((x')^2 + (y')^2 + (z')^2)^2 = 0 \\ ((x')^2 + (z')^2) y''v - (x'x'' + z'z'') y'v \\ - ((x')^2 + (y')^2 + (z')^2) y' \frac{dv}{d\tau} + \frac{\partial v}{\partial y} ((x')^2 + (y')^2 + (z')^2)^2 = 0 \\ ((y')^2 + (x')^2) z''v - (y'y'' + x'x'') z'v \\ - ((x')^2 + (y')^2 + (z')^2) z' \frac{dv}{d\tau} + \frac{\partial v}{\partial z} ((x')^2 + (y')^2 + (z')^2)^2 = 0 \end{array} \right. \quad (4.2)$$

As relações de dependência linear entre as diferentes equações não são óbvias como no caso 2D, no entanto, após calcular o determinante e a característica da matriz composta pelos diferentes termos dos primeiros membros das equações deste modelo, podemos concluir as equações são linearmente independentes duas a duas, considerando que o determinante da matriz é 0 e a característica 2.

No primeiro caso, depois de encontrar uma nova equação que possa ser adicionada ao sistema (4.1), iremos trocá-la por uma das equações originais. Dado que ambas inserem a mesma informação no sistema, perder uma das equações originais não implica que se perca informação necessária à resolução do sistema, o que não acontece no caso 3D. Neste caso, o sistema é indeterminado para certos valores das suas variáveis o que implica a necessidade de adicionar informação a este sistema, todavia repare-se que todas as equações têm termos únicos, o que as torna necessárias à resolução do sistema (4.2).

De modo a encontrar uma equação adequada que permita a resolução dos sistemas deduzidos, reformulemos o problema inicial recorrendo à definição de integral de linha

$$t_{A \rightarrow B} = \int_{\gamma} \frac{ds}{v(x, y)} = \int_{\gamma} f(\mathbf{r}) \|\mathbf{r}'(\tau)\| d\tau, \quad (4.3)$$

$$t_{A \rightarrow B} = \int_{\gamma} \frac{ds}{v(x, y, z)} = \int_{\gamma} f(\mathbf{r}) \|\mathbf{r}'(\tau)\| d\tau. \quad (4.4)$$

Os valores dos integrais de linha (4.3) e (4.4) não dependem da escolha da parametrização  $\mathbf{r}$  da trajetória  $\gamma$ , desde que a parametrização escolhida satisfaça certas condições naturais de regularidade tais como a continuidade e o não anulamento de  $\mathbf{r}'$ , consulte-se por exemplo (Apostol, 1993). Dito de outra forma, a informação que poderemos acrescentar para fechar o problema tornando-o determinado terá por objetivo, simplesmente, permitir identificar no seio de uma família de parametrizações possíveis de uma mesma trajetória  $\gamma$  uma determinada parametrização. Para isto irá impor-se a seguinte



condição

$$\|\mathbf{r}'(\tau)\|^2 = 1. \quad (4.5)$$

Como se sabe, consulte-se, por exemplo, (Apostol, 1993), a parametrização  $\mathbf{r}$  de uma trajetória recorrendo ao comprimento de arco  $s$  satisfaz

$$\left\| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right\| = 1 \quad (4.6)$$

Este facto permite concluir que a condição imposta (4.5) corresponde, simplesmente, a impor a parametrização da trajetória  $\gamma$  recorrendo ao parâmetro de comprimento de arco  $s$ .

Para efetuar simulações numéricas com os modelos desenvolvidos, foram sempre utilizados campos de velocidade do som baseados nas expressões que se seguem

$$v(x, y) = k_1 e^{-k_2((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)}, \quad (4.7)$$

$$v(x, y) = k_1 \left( 1 - e^{-k_2((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)} \right). \quad (4.8)$$

Ou

$$v(x, y, z) = k_1 e^{-k_2((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2)}, \quad (4.9)$$

$$v(x, y, z) = k_1 \left( 1 - e^{-k_2((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2)} \right). \quad (4.10)$$

Para campos tridimensionais. Este tipo de expressões permite a criação de campos de velocidade onde ocorrem elevados gradientes de velocidade do som, o que se adequa a testar os modelos criados.

## 4.2 Resolução numérica do modelo 2D

### 4.2.1 Reformulação do modelo 2D

Tendo por base a discussão anterior e a condição (4.6)

$$\|\mathbf{r}'(\tau)\|^2 = (x'(\tau))^2 + (y'(\tau))^2 = 1, \quad (4.11)$$

Introduzida no modelo (4.1), deduzimos, depois de reduzir o referido modelo a um sistema de equações de primeiro grau, o integral

$$\begin{cases} x' - z = 0 \\ y' - w = 0 \\ z'w - w'z + \frac{w}{v(x,y)} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{z}{v(x,y)} \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ z^2 + w^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

De referir que as simplificações introduzidas na terceira equação do sistema (4.1) decorreram da condição arbitrada

$$(x'(\tau))^2 + (y'(\tau))^2 = 1. \quad (4.13)$$

No desenvolvimento dos programas necessários à utilização do algoritmo anteriormente referido tornou-se claro a vantagem de substituir a última equação do sistema (4.12)

$$z^2 + w^2 = 1, \quad (4.14)$$

Puramente algébrica, pela equação diferencial equivalente

$$zz' + ww' = 0, \quad (4.15)$$

Deduzida por derivação relativamente ao parâmetro  $\tau$ . Note-se que (4.15) estabelece a invariância do valor da norma do vetor tangente em cada ponto à trajetória  $\gamma$ . Esta condição aliada, por exemplo, a condições iniciais adequadamente estabelecidas  $[(x'(a))^2 + (y'(a))^2 = 1]$  permite garantir naturalmente a satisfação da condição (4.5) ao longo da descrição de toda a trajetória  $\gamma$ .

A argumentação anterior justifica assim a utilização do seguinte modelo paramétrico consolidado de propagação

$$\begin{cases} x' - z = 0 \\ y' - w = 0 \\ z'w - w'z + \frac{w}{v(x,y)} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{z}{v(x,y)} \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ zz' + ww' = 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

### 4.2.2 Simulações numéricas iniciais

Na figura 4.1 podemos observar a ilustração de várias trajetórias de raios acústicos com origem em diferentes posições na linha  $y = -2$ , todos eles com uma orientação inicial coincidente com a direção do eixo dos  $yy$ , sobre um campo de velocidades com máximo em  $(0, 0)$ , baseado na expressão (4.7) com  $k_1 = 0, 1$  e  $k_1 = 0, 01$ . O campo é representado por linhas de igual valor de velocidade do som, existindo entre todas elas a mesma diferença de intensidade de campo, bem como do ponto de velocidade máxima para a primeira

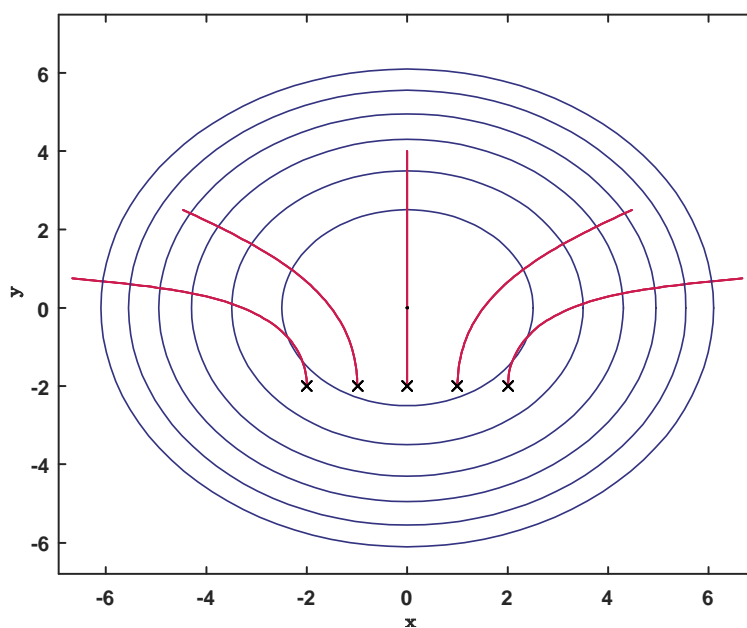


Figura 4.1: Conjunto de raios arbitrários lançados dos pontos  $(-2,-2)$ ,  $(-1,-2)$ ,  $(0,-2)$ ,  $(1,-2)$  e  $(2,-2)$  inicialmente numa orientação vertical sobre um campo de velocidades com valor máximo no ponto  $(0,0)$ .

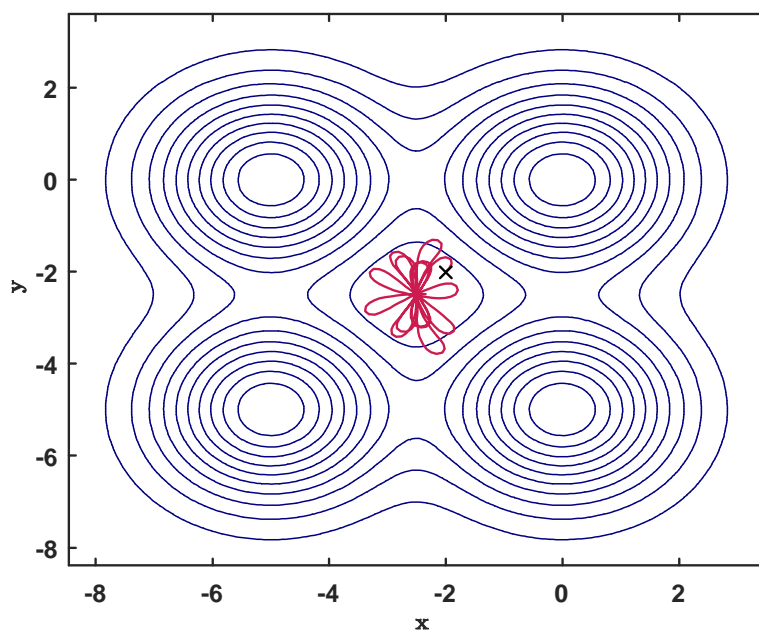


Figura 4.2: Ilustração de uma trajectória complexa num campo hipotético, originada no ponto  $(-2,-2)$  com a orientação de 50 graus relativamente ao eixo  $xx$ .

linha. Como se pode ver imediatamente, o comportamento das trajetórias simuladas satisfaz qualitativamente a Lei de Snell porquanto as trajetórias deflectem para regiões com menor velocidade de propagação e também dada a ligação entre o aumento da curvatura dos raios com o aumento do gradiente do campo de velocidades.

A figura 4.2 ilustra a simulação de uma trajetória complexa que pretende demonstrar a robustez do modelo desenvolvido, utilizando um campo de velocidades baseado na soma de quatro expressões semelhantes a (4.7) com os quatro pontos de velocidade máxima nas posições  $(0, 0)$ ,  $(-5, 0)$ ,  $(-5, -5)$  e  $(0, -5)$  tendo  $k_1 = 1$  e  $k_1 = 0, 3$ . Esta é, como foi dito, uma boa demonstração das capacidades do modelo desenvolvido, ainda assim é necessário notar que, além de ser uma situação hipotética, o traçado de raios não tem em consideração a variação da intensidade da onda, apenas fornece uma linha guia para o caminho que uma frente de onda fará ao propagar-se. Por isto, seria improvável numa situação real uma onda passar no ponto de velocidade mínima repetidamente sem se dissipar.

### 4.2.3 Comparação com software de raytracing

Depois das primeiras simulações terem sido bem sucedidas, surgiu a oportunidade de testar a adequabilidade do modelo desenvolvido comparando as trajetórias obtidas por este modelo e pelo software de raytracing criado por Val Schmidt, (Schmidt, 2009). O modelo criado por Schmidt baseia-se no cálculo do raio de curvatura da trajetória numa camada de gradiente de velocidade do som constante. Para a comparação destas trajetórias considerou-se simular um campo de velocidades próximo daquilo que se pode observar tipicamente no oceano.

Na caracterização da velocidade do som em planos verticais do oceano (em termos das correspondentes coordenadas horizontais e verticais) foi assumido, para simplificar, que esta não depende da coordenada horizontal. Com efeito, em muitas situações práticas as variações horizontais da distribuição vertical da velocidade do som podem ser desprezadas (Buckingham, 1992).

Em resultado da simplificação atrás referida o perfil vertical de velocidade que utilizaremos será caracterizado por um campo escalar do tipo  $v = v(y)$  em que  $y$  representará a coordenada vertical.

Na dedução do perfil típico  $v = v(y)$  a utilizar nas simulações numéricas recorreremos à expressão (4.17) estabelecida em 1981 e devida a Mackenzie que caracteriza a velocidade do som no oceano  $v = v(D, S, T)$  em termos dos parâmetros mais relevantes: a temperatura  $T$  (expressa em graus Celsius), a profundidade  $D$  (expressa em metros) e a salinidade  $S$  (expressa em partes

por milhão) (NPL, 2000).

$$v(D, S, T) = \quad (4.17)$$

$$= a_1 + a_2T - a_3T^2 + a_4T^3 + a_5S^* + a_6D + a_7D^2 - a_8TS^* - a_9TD^3, [ms^{-1}]$$

com  $S^* = S - 35$  e

$$a_1 = 1448.96$$

$$a_2 = 4.591$$

$$a_3 = -5.304 \times 10^{-2}$$

$$a_4 = 2.374 \times 10^{-4}$$

$$a_5 = 1.340$$

$$a_6 = 1,630 \times 10^{-2}$$

$$a_7 = 1,675 \times 10^{-7}$$

$$a_8 = -1,025 \times 10^{-2}$$

$$a_9 = -7,139 \times 10^{-13}$$

Admitindo a salinidade  $S$  constante, já que a influência de pequenas variações deste parâmetro tem um diminuto impacto na velocidade do som, e conhecendo a distribuição oceânica vertical  $T = T(y)$  de temperatura, o perfil  $v = v(y)$  pode ser estabelecido analiticamente. Em Joseph (Joseph, 2010) podemos encontrar a expressão que seguidamente se apresenta e que caracteriza satisfatoriamente o perfil vertical de temperaturas médias no oceano, onde  $T_s$  representa a temperatura à superfície.

$$T(y) = -0.338 + \frac{(T_s + 0.338)(1 + e^{-0.016y+1.244})}{(1.485 \times 10^{-4})(T_s + 0.338)y + (1 + e^{-0.016y+1.244})} [^{\circ}C] \quad (4.18)$$

Na Figura 4.3 ilustramos os perfis verticais de velocidade do som utilizados para comparar o modelo desenvolvido com o de Schmidt. O primeiro perfil, definido pelas equações

$$\begin{cases} y = 1520 + 0,04x, y \leq 750 \\ y = 1490 - 0,01(y + 750), y > 750 \end{cases} [ms^{-1}] \quad (4.19)$$

É um perfil de gradientes de velocidade do som constantes que, dentro das suas limitações, apresenta um gráfico semelhante ao perfil mais realista. O mais realista foi obtido a partir das expressões (4.17) e (4.18) considerando uma temperatura de superfície da água do mar de  $18^{\circ}C$  e uma salinidade de 35 ppm (constante).

Podemos ver, na figura 4.4, a comparação entre os dois modelos para um perfil vertical de velocidade do som com gradientes constantes. Num perfil deste tipo, a solução de Schmidt é exata, dada a ferramenta de *raytracing* utilizada por este para construir o seu modelo, dessa maneira podemos concluir que os resultados são, satisfatoriamente, os esperados. Ainda que reduzida, conseguimos ver uma diferença entre as duas soluções calculadas que vai aumentando à medida que avançamos nos raios traçados. Este era o resultado esperado tendo em conta que a resolução numérica do modelo paramétrico nunca poderia calcular uma solução exata e, por se basear no método de Runge-Kutta, como podemos ver no capítulo 2, tem um erro associado que vai aumentando a cada iterada, como podemos constatar ao observar a figura 4.4. Na segunda simulação efetuada, considerando o perfil mais realista e exposta na figura 4.5, os resultados também foram extremamente satisfatórios, visto que, aparentemente, as trajetórias são coincidentes num caso matematicamente semelhante à realidade e que o modelo de Schmidt é um modelo válido utilizado por elementos da comunidade que estuda acústica submarina.

## 4.3 Resolução numérica do modelo 3D

### 4.3.1 Reformulação do modelo 3D

De forma semelhante ao modelo 2D a condição (4.6)

$$\|\mathbf{r}'(\tau)\|^2 = (x'(\tau))^2 + (y'(\tau))^2 + (z'(\tau))^2 = 1 \quad (4.20)$$

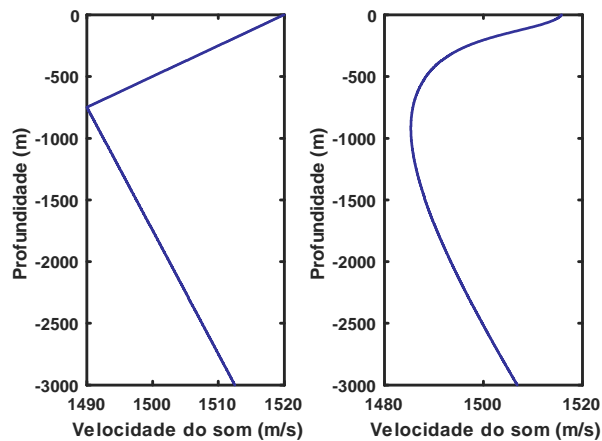


Figura 4.3: Representação dos perfis verticais de velocidade do som utilizados para comparar os dois modelos.

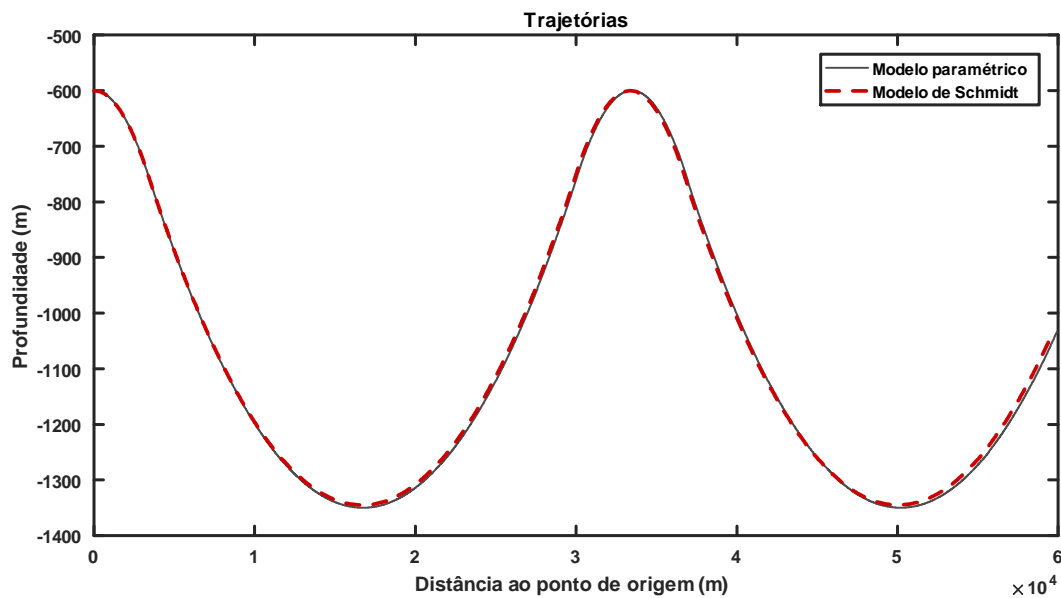


Figura 4.4: Resultados obtidos ao comparar os dois modelos considerando o perfil vertical de gradientes de velocidade do som constantes. Nesta simulação os raios foram originados na profundidade de 600 m com uma orientação horizontal.

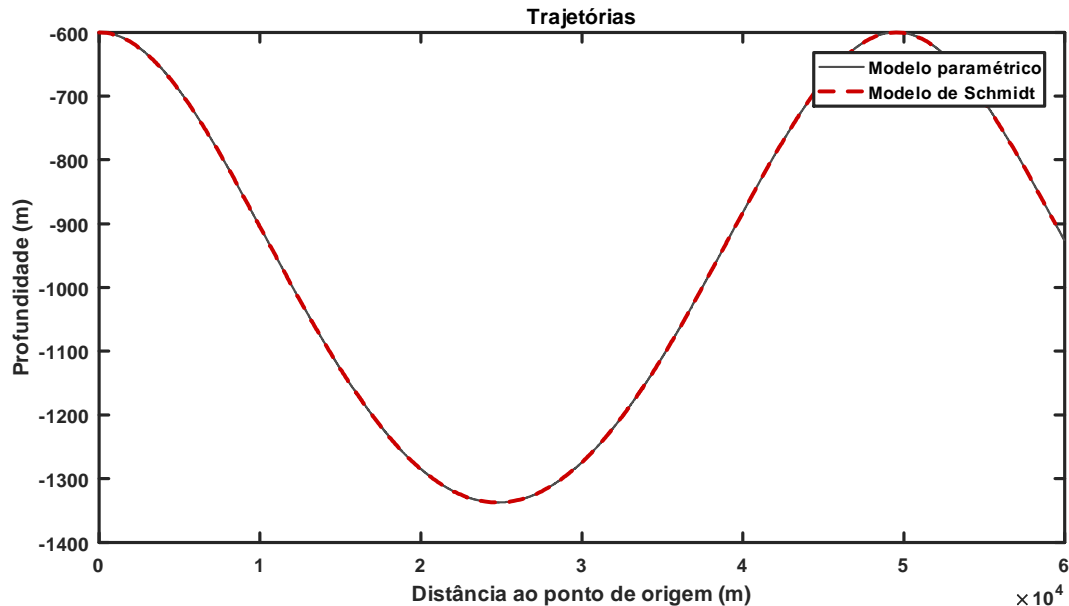


Figura 4.5: Resultados obtidos ao comparar os dois modelos tendo em conta o perfil vertical mais realista tendo os raios sido originados nas mesmas condições que a primeira simulação, orientação horizontal da profundidade de 600 m.

É necessária para a resolução do sistema considerado, ainda que deva ser acrescentada a equação diferencial equivalente obtida a partir da derivação relativamente ao parâmetro  $\tau$

$$aa' + bb' + cc' = 0. \quad (4.21)$$

Além das simplificações algébricas efetuadas considerando (4.20) e da passagem de (4.2) a um sistema de equações diferenciais de primeiro grau, foi necessário somar a última equação de (4.2) às duas outras equações deste sistema para manter a informação desta equação no sistema permitindo, ao mesmo tempo, a adição de (4.21) ao modelo 3D. Tendo por base as alterações referidas, o sistema utilizado para o modelo 3D foi

$$\left\{ \begin{array}{l} x' - a = 0 \\ y' - b = 0 \\ z' - c = 0 \\ (1 - a^2) a' + (1 - c^2) c' - ac (a' + c') - b (ab' + cb') \\ \quad + \frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} - \left( \frac{dv}{dx} a + \frac{dv}{dy} b + \frac{dv}{dz} c \right) (a + c) \right) = 0 \\ (1 - b^2) b' + (1 - c^2) c' - bc (b' + c') - a (ba' + ca') \\ \quad + \frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} - \left( \frac{dv}{dx} a + \frac{dv}{dy} b + \frac{dv}{dz} c \right) (b + c) \right) = 0 \\ aa' + bb' + cc' = 0 \end{array} \right. \quad (4.22)$$

### 4.3.2 Simulações numéricas

Podemos observar nas figuras 4.6 e 4.7 duas perspetivas de uma simulação efetuada considerando um conjunto de raios lançados do plano  $x = -2$  numa região onde a variação de velocidade do som é caracterizada por uma expressão semelhante a (4.9), com  $k_1 = 1$  e  $k_2 = 0.1$ , e se verifica a existência de um ponto de velocidade máxima na posição  $(0, 0, 0)$ . Como era de esperar considerando os resultados do modelo 2D, as trajetórias traçadas pelo modelo 3D cumprem qualitativamente a lei de Snell, sendo possível observar na primeira simulação os raios a divergirem para a zona de menor velocidade do som, à exceção daquele que passa na posição de velocidade máxima e cuja orientação não sofre alterações. Na segunda simulação, ilustrada na figura 4.8 e com um campo de velocidade do som semelhante ao da simulação anterior, os raios foram originados das posições  $(-3, -1, 0)$ ,  $(-3, 1, 0)$ ,  $(-1, -1, 0)$  e  $(-1, 1, 0)$  com orientações horizontais no sentido do crescimento do eixo  $xx$ . Nesta simulação podemos observar a variação da curvatura dos raios na presença de gradientes de velocidade do som diferentes, aumentando a curvatura com o aumento do gradiente de velocidade do som, como esperávamos.



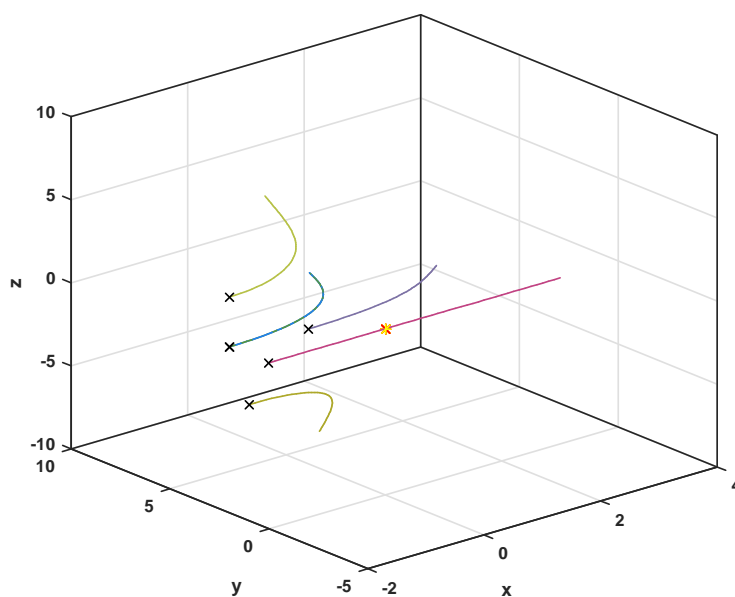


Figura 4.6: Primeira perspectiva da simulação 3D, que representa um conjunto de raios lançado do plano  $x = -2$  sobre uma área onde a velocidade do som tem um ponto máximo em  $(0, 0, 0)$  e dispersão esférica.

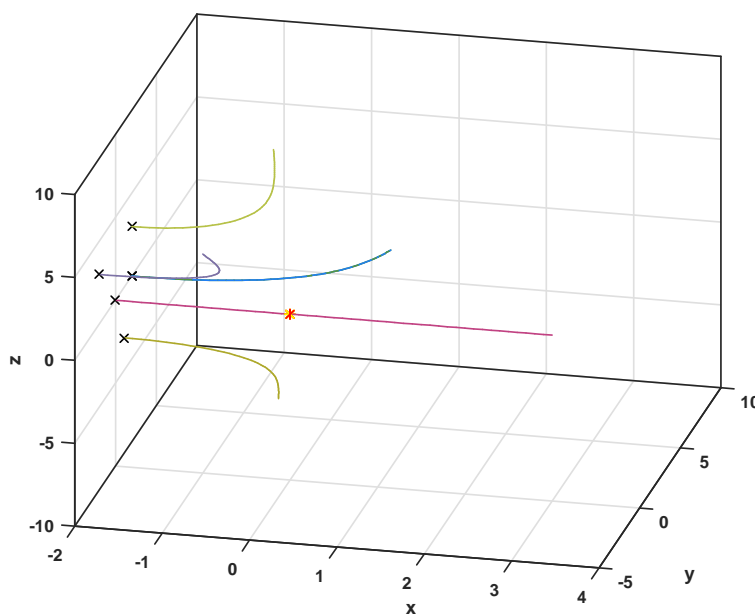


Figura 4.7: Segunda perspectiva da simulação 3D, que representa um conjunto de raios lançado do plano  $x = -2$  sobre uma área onde a velocidade do som tem um ponto máximo em  $(0, 0, 0)$  e dispersão esférica.

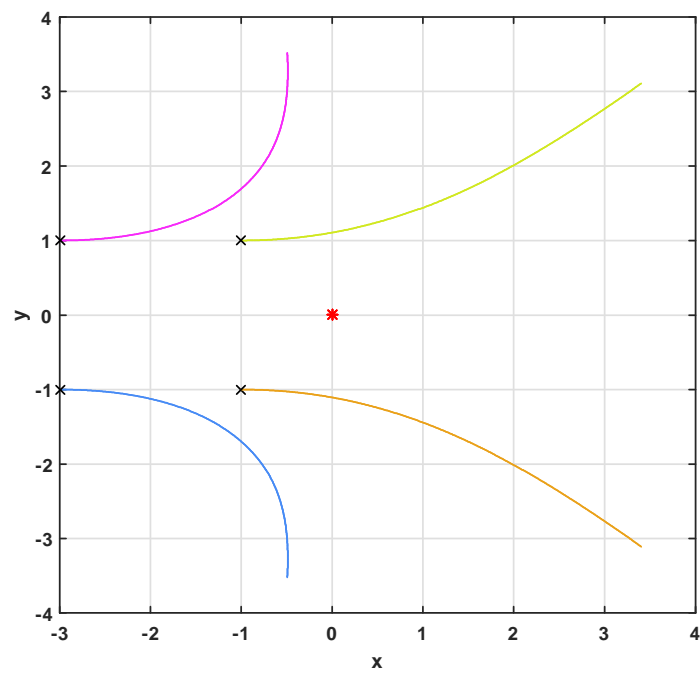


Figura 4.8: Segunda simulação 3D efetuada numa área onde a velocidade do som tem um ponto máximo em  $(0, 0, 0)$  e dispersão esférica.

# Capítulo 5

## Introdução de reflexões

### 5.1 Princípios considerados

Dada a frequência com que ocorrem reflexões na superfície e no fundo durante a propagação de uma onda acústica no oceano, foi acrescentado ao modelo 2D a capacidade de simular trajetórias na presença de reflexões especulares na superfície e no fundo, para uma superfície plana e um fundo dado. Podemos ver em (Pierce, 2007) que, quando uma onda sonora encontra uma superfície origina duas ondas, uma transmitida ao meio onde esta incide e outra que é refletida de volta para o meio original. Neste trabalho consideraram-se reflexões especulares, ou seja, situações onde ocorre unicamente reflexão, não havendo energia a ser transmitida para o meio onde a onda se reflete, sendo possível consultar em (Pierce, 2007) abordagens para o cálculo da intensidade das ondas refletida e transmitida. A lei da reflexão estabelece que

$$\theta_i = 180^\circ - \theta_r, \quad (5.1)$$

Onde  $\theta_i$  é o ângulo entre o raio incidente e a superfície de reflexão e  $\theta_r$  é o ângulo entre o raio refletido e a superfície onde se reflete, ambos medidos a partir do mesmo lado do ponto de reflexão, consulte-se (Born and Wolf, 1999). Desta maneira, consideremos  $\mathbf{r}_i$  o vetor unitário tangente à trajetória do raio incidente no ponto de reflexão e  $\mathbf{r}_r$  um vetor semelhante a  $\mathbf{r}_i$  associado ao raio refletido. No caso do referencial das coordenadas destes vetores ter o seu eixo vertical normal à superfície de reflexão, a obtenção de  $\mathbf{r}_r$  a partir de  $\mathbf{r}_i$  é trivial, basta substituir a coordenada de  $\mathbf{r}_i$  normal à superfície de reflexão pelo seu valor simétrico de modo a obter  $\mathbf{r}_r$ .

## 5.2 Metodologia utilizada

De modo a poder calcular trajetórias na presença de reflexões começou por se discretizar o fundo. Este foi considerado como um conjunto (discreto) de imagens de uma função  $y(x)$ , onde  $y$  é a profundidade em função de uma distância horizontal  $x$ . Tendo o fundo definido, calculou-se, para cada ponto do fundo  $y_n$ , os versores colinear e normal ao fundo. Desta maneira, é possível definir um referencial a que se chamará referencial de reflexão, cujo eixo vertical é normal à superfície de reflexão para todos os pontos do fundo. Encontrar uma forma de transformar as coordenadas dos vetores  $\mathbf{r}_i$  e  $\mathbf{r}_r$  possibilitando a sua representação tanto no referencial original como no de reflexão facilita o cálculo de  $\mathbf{r}_r$  a partir de  $\mathbf{r}_i$ , como foi referido anteriormente. De modo a calcular os diferentes versores que irão definir o referencial de reflexão em cada ponto, considerou-se que, na vizinhança de cada ponto  $y_n$ , o fundo é aproximadamente plano e definido pelo segmento de reta que une os dois pontos vizinhos,  $y_{n-1}$  e  $y_{n+1}$ . A partir das coordenadas de  $y_{n-1}$  e  $y_{n+1}$ , é possível calcular o declive  $m$ , do segmento de reta correspondente ao fundo considerado a partir da expressão

$$m = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{x_{n+1} - x_{n-1}}. \quad (5.2)$$

Sabendo o declive  $m$ , sabemos as coordenadas de um vetor colinear e de um normal ao fundo,  $\mathbf{Vc} = (1, m)$  e  $\mathbf{Vn} = (-m, 1)$ . Dividindo ambos pelas respectivas normas passamos a ter os versores,  $\mathbf{vc}$  e  $\mathbf{vn}$ , que definem o referencial de reflexão.

No caso das reflexões na superfície (considerada plana), o referencial de reflexão terá sempre os eixos paralelos aos do referencial original, podendo as coordenadas do raio refletido  $\mathbf{r}_r$  ser imediatamente obtidas a partir do raio incidente  $\mathbf{r}_i$ . Para um ponto do fundo, é necessário transformar as coordenadas de  $\mathbf{r}_i$  antes de proceder à substituição da sua coordenada normal ao fundo. De modo a efetuar esta transformação começemos pela definição de produto interno

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{u}\| \cos(\theta). \quad (5.3)$$

Dividindo ambos os membros por  $\|\mathbf{v}\|$  obtemos

$$\left( \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \right) \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\| \cos(\theta), \quad (5.4)$$

Que nos mostra que o produto interno entre um vetor  $\mathbf{u}$  e o versor de um vetor  $\mathbf{v}$  origina a projeção de  $\mathbf{u}$  na linha orientada por  $\mathbf{v}$ . Desta maneira, o produto interno do vetor incidente  $\mathbf{r}_i$  com os versores  $\mathbf{vc}$  e  $\mathbf{vn}$  dar-nos-á as coordenadas de  $\mathbf{r}_i$  relativamente ao referencial definido por estes dois

versores, visto que  $\mathbf{r}_i$  e  $\mathbf{r}_r$  são vetores unitários. Tendo as novas coordenadas  $\mathbf{r}_i$  relativamente ao referencial de reflexão facilmente obtemos  $\mathbf{r}_r$ , havendo, depois, a necessidade de transformar as coordenadas de  $\mathbf{r}_r$  para definir este vetor relativamente ao referencial inicial. Para isto, é necessário saber as coordenadas dos versores que definem o referencial original relativamente ao referencial de reflexão, bastando projetá-los no referencial de reflexão, como foi feito com o vetor incidente.

Na figura 5.1 está representada a simulação da trajetória de um raio que se reflete num fundo de declive constante e numa superfície plana, na presença de um perfil de velocidade do som oceânico típico representado por (4.19), tendo o raio sido originado de uma profundidade de 500m com uma orientação horizontal. Esta imagem, que ilustra a nova capacidade obtida pelo modelo 2D, apresenta bons resultados. Como podemos observar, o raio é refletido com o ângulo esperado face à orientação dos raios incidentes e à inclinação das superfícies no ponto de reflexão.

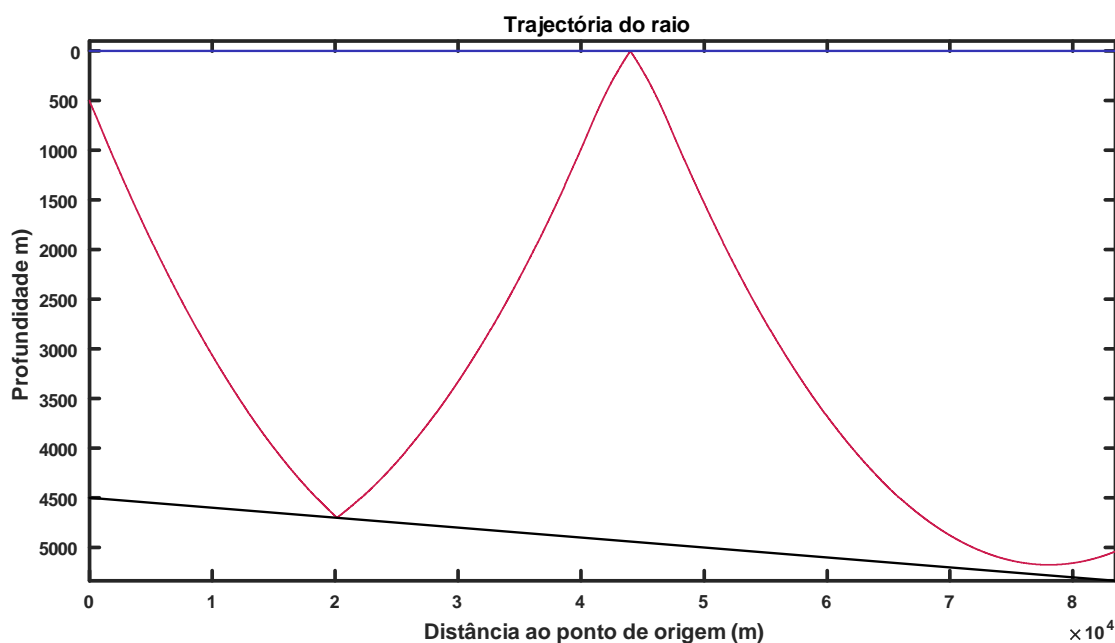


Figura 5.1: Simulação de um raio onde se observa uma reflexão com o fundo e uma com a superfície, na presença de um perfil de velocidade do som oceânico típico.



# Capítulo 6

## Conclusões

### 6.1 Conclusões gerais

No decorrer do trabalho realizado foi possível construir dois modelos de *ray-tracing* paramétricos baseados no princípio do tempo mínimo de Fermat que apresentaram resultados bastante satisfatórios. Tendo conhecimento prévio da lei de Snell, foi possível observar que as simulações preliminares efetuadas, tanto pelo modelo 2D como pelo 3D, ilustraram as trajetórias de raios acústicos esperadas face aos campos de velocidade do som presentes na modelação destas trajetórias. Em ambos os casos, as trajetórias dos raios divergiram para as zonas de menor velocidade de propagação do som, aumentando a curvatura das mesmas com o aumento dos gradientes de velocidades do som existentes.

Houve também a possibilidade de comparar o modelo paramétrico 2D com um modelo já existente (criado por Val Schmidt) e a adição da capacidade de simular raios 2D na presença de reflexões na superfície e no fundo. Ao comparar os dois modelos, observou-se, na presença de um perfil de velocidade do som com gradientes de velocidade do som constantes, o traçado de duas trajetórias semelhantes à exceção de um pequeno erro que aumentou com o aumento do comprimento dos raios. Estes eram os resultados esperados, dado que o modelo de Schmidt tem uma solução exata para perfis desta natureza e tendo em conta que a resolução numérica do modelo paramétrico é baseada no método de Runge-Kutta. O erro de cálculo associado a este método aumenta com o número de iteradas calculadas, sendo este, no nosso caso, um número proporcional ao comprimento da trajetória, daí o aumento do erro na comparação efetuada. Na simulação feita considerando um perfil de velocidade do som mais realista as trajetórias calculadas pelos dois modelos são aparentemente coincidentes, o que indica, considerando ambas as

comparações, que o modelo é adequado à simulação de trajetórias oceânicas. Na última simulação 2D apresentada, podemos observar a ilustração de um raio acústico na presença de um perfil oceânico onde ocorrem duas reflexões. Os resultados são aqueles que se podia esperar sendo aparente a igualdade entre os ângulos de incidência e reflexão, tendo em conta a inclinação das superfícies onde estes raios se refletem.

Face a todos os resultados obtidos pode concluir-se o seguinte:

- Ambos os modelos paramétricos têm a capacidade de traçar raios acústicos na presença de campos de velocidade do som dados, qualquer seja o ponto de origem dos raios, a orientação com que são originados e aquelas que possam vir a tomar ao longo do seu trajeto.
- O modelo paramétrico 2D tem a capacidade de representar fidedignamente trajetórias de propagação oceânica na presença de um perfil de velocidades típico e de reflexões na superfície e no fundo.
- Ainda que não apresente nenhuma novidade, com a eventual exceção da abordagem considerada ao parametrizar a trajetória, o modelo paramétrico 2D poderá ser útil no cálculo de trajetórias na presença de campos de velocidade do som complexos com variações de intensidade consideráveis.
- A utilidade do modelo paramétrico 3D face à capacidade de resolver um problema útil e complexo não esquecendo que a existência deste tipo de modelos é menos comum e remonta a um passado mais próximo.

## 6.2 Trabalho futuro

Dos diferentes caminhos que se podem seguir a partir deste trabalho são de referir os seguintes:

- Acrescentar a capacidade de considerar reflexões ao modelo paramétrico 3D.
- Comparação do modelo paramétrico 3D com software de *raytracing* concorrente.
- A criação de modelos de *beamtracing* associados aos modelos de *raytracing* paramétricos 2D e 3D testando-os ao comparar com modelos de *beamtracing* existentes.



- A adaptação dos modelos paramétricos para que possam ser utilizados para fins de tomografia acústica.



# Bibliography

- Apostol, T. (1993). *Calculus, Vol. 2*. Reverté.
- Ascher, U. M. and Petzold, L. R. (1998). *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations*. SIAM.
- Atkinson, K. E. (1989). *An Introduction to Numerical Analysis*. John Wiley & Sons.
- Baxley, P. A., Bucker, H., and Porter, M. B. (2000). Comparison of beam tracing algorithms. In *Proceedings of the Fifth European Conference on Underwater Acoustics*.
- Born, M. and Wolf, E. (1999). *Principles of Optics*. Cambridge University Press.
- Brekhovskikh, L. M. and Lysanov, Y. P. (2003). *Fundamentals of Ocean Acoustics*. Springer New York.
- Buckingham, M. J. (1992). Ocean-acoustic propagation models. *J. Acoustique*, pages 223–287.
- Cai, Y., Fan, W., Zhou, Y., qiao Fu, X., Fang, H., and Jin, T. (2012). Study on the high precision acoustic measurement techniques for determining temperature field around seafloor hydrothermal vent. *China Ocean Engineering*, 26(4):723–732.
- Calazan, R. M. and Rodríguez, O. C. (2017). TRACEO3d ray tracing model for underwater noise predictions. In *IFIP Advances in Information and Communication Technology*, pages 183–190. Springer International Publishing.
- Etter, P. C. (2012). Advanced applications for underwater acoustic modeling. *Advances in Acoustics and Vibration*, 2012:1–28.

- Jensen, F. B., Kuperman, W. A., Porter, M. B., and Schmidt, H. (2011). *Computational Ocean Acoustics (Modern Acoustics and Signal Processing)*. Springer.
- Joseph (2010). The temperature of ocean water at a given depth.
- Kinsler, L. E., Frey, A. R., Coppens, A. B., and Sanders, J. V. (1999). *Fundamentals of Acoustics*. John Wiley & Sons.
- Lanczos, C. (1986). *The Variational Principles of Mechanics*. Dover Publications Inc.
- Lemons, D. S. (1997). *Perfect Form: Variational Principles, Methods, and Applications in Elementary Physics*. Princeton University Press.
- Lu, J., Wakai, K., Takahashi, S., and Shimizu, S. (2000). Acoustic computer tomographic pyrometry for two-dimensional measurement of gases taking into account the effect of refraction of sound wave paths. *Measurement Science and Technology*, 11(6):692–697.
- NPL (2000). Technical guides - speed of sound in sea-water.
- Paiva, B. (2018). Caracterização de fontes hidrotermais. Master’s thesis, Escola Naval.
- Pierce, A. (2007). Basic linear acoustics. In *Springer Handbook of Acoustics*, pages 25–111. Springer New York.
- Pierce, A. D. (2019). Ray acoustics. In *Acoustics*, pages 427–486. Springer International Publishing.
- Popov, M. M. (2002). Ray theory and gaussian beam method for geophysicists.
- Porter, M. B. (1992). The kraken normal mode program.
- Porter, M. B. (2016). Bellhop3d user guide. Online.
- Porter, M. B. and Bucker, H. P. (1987). Gaussian beam tracing for computing ocean acoustic fields. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 82(4):1349–1359.
- Reilly, S. M. (2016). *WaveQ3D: Fast and Accurate Acoustic Transmission Loss (TL) Eigenrays, in Littoral Environments*. PhD thesis, University of Rhode Island.

- Roberts, A. J. (1998). Differential algebraic equations solvers. Technical report, The University of Adelaide.
- Schmidt, V. (2009). Raytrace. MATLAB.
- Simmons, G. and Krantz, S. (2006). *Differential Equations: Theory, Technique, and Practice (Walter Rudin Student Series in Advanced Mathematics)*. McGraw-Hill Science/Engineering/Math.
- Tolstoy, A. (1996). 3-d propagation issues and models. *Journal of Computational Acoustics*, 04(03):243–271.
- Uginčius, P. (1972). Ray acoustics and fermats principle in a moving inhomogeneous medium. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 51(5B):1759–1763.
- Urick, R. J. (2013). *Principles of Underwater Sound*. PENINSULA PUB.
- USONR, Porter, M. B., Lin, Y. T., and Newhall, A. Ocean acoustics library. Online.
- Zabotin, N. A., Godin, O. A., Sava, P. C., and Zabolina, L. Y. (2014). Tracing three-dimensional acoustic wavefronts in inhomogeneous, moving media. *Journal of Computational Acoustics*, 22(02):1450002.



# **Apêndice A**

**Trabalho apresentado no  
colóquio Jornadas do Mar 2018**

# SIMULAÇÃO DAS TRAJECTÓRIAS DE PROPAGAÇÃO 2D DE RAIOS ACÚSTICOS EM MEIOS NÃO HOMOGÉNEOS

*P. Raposo*

Portuguese Naval Academy (EN)  
e-mail: amaral.raposo@marinha.pt

*M. Gatta*

Portuguese Naval Academy (EN) / Navy Research Center (CINAV)  
Centro de Filosofia das Ciências da Universidade de Lisboa (CFCUL)  
e-mail: mario.gatta@marinha.pt

*M. Moreira*

Portuguese Naval Academy (EN) / Navy Research Center (CINAV)  
Centre for Marine Technology and Ocean Engineering (CENTEC)  
e-mail: miguel.moreira@marinha.pt

## Resumo

Neste trabalho estabeleceremos, tendo por base o princípio de Fermat, um sistema de equações diferenciais paramétricas que modelam a propagação 2D de raios acústicos em meios não homogéneos. Como o sistema assim deduzido é indeterminado será introduzida uma equação adicional que relaciona os parâmetros utilizados e permite fechar o problema. Tendo por base a resolução numérica deste modelo e tendo em vista ilustrar a potencialidade desta abordagem são efectuadas e discutidas simulações da propagação de raios acústicos em meios não homogéneos fictícios

**Palavras-chave:** Acústica em meios não homogéneos, Raios acústicos

## 1 Introdução

Utilizando o princípio de Fermat é possível deduzir a equação diferencial

$$y''(x) = \frac{1 + (y'(x))^2}{c(x, y)} \left( y'(x) \frac{\partial c(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial c(x, y)}{\partial y} \right). \quad (1)$$

que modela a propagação 2D de raios acústicos em meios não homogéneos ( $c = c(x, y)$  representa a velocidade do som e  $y(x)$  as suas trajectórias respectivas entre pontos dados de emissão e recepção), consulte-se por exemplo [4]. A utilização desta equação diferencial na modelação 2D de trajectórias de raios acústicos está limitada a valores finitos da derivada  $y'$  da trajectória  $y = y(x)$ .



Frequentemente, a combinação das condições iniciais e do comprimento das trajectórias face ao campo de velocidades  $c = c(x, y)$  existente determina a ocorrência de trajectórias com valores de declive infinitos. Este facto limita significativamente a aplicabilidade deste modelo.

Uma metodologia natural para ultrapassar esta dificuldade consiste em deduzir, tendo por base o mesmo princípio (o princípio de Fermat), as equações diferenciais na forma paramétrica cuja solução caracterize a trajectória procurada:

$$\mathbf{r}(\tau) = (x(\tau), y(\tau)), \tau \in [a, b]. \quad (2)$$

## 2 Dedução das equações paramétricas

### 2.1 Estabelecimento das equações de Euler-Lagrange

Seja  $\mathbf{r}(\tau) = (x(\tau), y(\tau))$  a parametrização da trajectória  $\gamma$  dum raio acústico,  $x' = \frac{dx}{d\tau}$  e  $y' = \frac{dy}{d\tau}$ . O princípio de Fermat estabelece que  $\gamma$  deverá ser tal que minimiza o tempo de trajecto  $t_{A \rightarrow B}$ :

$$t_{A \rightarrow B} = \int_{\gamma} \frac{ds}{c(x, y)} = \int_a^b \frac{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}{c(x, y)} d\tau. \quad (3)$$

Para que tal aconteça a função integranda

$$F(\tau, x, y, x', y') = \frac{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}{c(x, y)}.$$

deverá satisfazer as equações de Euler-Lagrange (consulte-se [3]):

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial F}{\partial x'} \right) - \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \end{cases}. \quad (4)$$

Ora,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = - \frac{\sqrt{(x')^2 + (y')^2} \frac{\partial c(x, y)}{\partial x}}{(c(x, y))^2}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = \frac{x'}{c(x, y) \sqrt{(x')^2 + (y')^2}}, \quad (6)$$

e

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial F}{\partial x'} \right) = - \frac{H_1 + H_2 + H_3}{(c(x, y))^2 \left( (x')^2 + (y')^2 \right)^{\frac{3}{2}}}, \quad (7)$$

com

$$H_1 = (x')^2 \left( (x')^2 + (y')^2 \right) \frac{\partial c}{\partial x}, \quad (8)$$

$$H_2 = \left( x' y' y'' - (x')^2 (y')^2 \right) c(x, y), \quad (9)$$

$$H_3 = x' y' \left( (x')^2 + (y')^2 \right) \frac{\partial c}{\partial y}. \quad (10)$$

De forma análoga calcularíamos  $\frac{\partial F}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y'}$  e  $\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right)$ . Tendo em conta (5), (6), (7) e as restantes expressões calculadas, podemos reescrever (4), após algumas simplificações algébricas, como:

$$\begin{cases} x'' y' - y'' x' + \frac{1}{c(x, y)} \frac{\partial c}{\partial x} \left( (y')^3 + (x')^2 y' \right) - \frac{1}{c(x, y)} \frac{\partial c}{\partial y} \left( (x')^3 + (y')^2 x' \right) = 0 \\ y'' x' - x'' y' + \frac{1}{c(x, y)} \frac{\partial c}{\partial y} \left( (x')^3 + (y')^2 x' \right) - \frac{1}{c(x, y)} \frac{\partial c}{\partial x} \left( (y')^3 + (x')^2 y' \right) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

A solução  $\mathbf{r}(\tau) = (x(\tau), y(\tau))$ ,  $\tau \in [a, b]$  do sistema de equações diferenciais (11) de segunda ordem caracteriza a trajectória que minimizará o integral (3). Infelizmente as equações diferenciais deduzidas que constituem o sistema não são independentes. Este facto torna-se evidente se reduzirmos à primeira ordem o sistema de equações (11) acabado de deduzir:

$$\begin{cases} x' = z \\ y' = w \\ z' w - w' z + \frac{1}{c(x, y)} \frac{\partial c}{\partial x} \left( (w^2 + z^2) w \right) - \frac{1}{c(x, y)} \frac{\partial c}{\partial y} \left( (z^2 + w^2) z \right) = 0 \\ w' z - z' w + \frac{1}{c(x, y)} \frac{\partial c}{\partial y} \left( (z^2 + w^2) z \right) - \frac{1}{c(x, y)} \frac{\partial c}{\partial x} \left( (w^2 + z^2) w \right) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Como é possível observar, a quarta equação não acrescenta informação nova relativamente à terceira (as equações referidas são simétricas).

## 2.2 Fecho do problema,

De forma a fechar o problema, tornando-o determinado, torna-se necessário estabelecer uma equação adicional que relacione entre si as variáveis em jogo acrescentando informação física e matematicamente significativa.

Consideremos de novo o problema original associado à determinação da trajectória  $\gamma$  [e da correspondente parametrização  $\mathbf{r}(\tau) = (x(\tau), y(\tau))$ ] que minimizará o tempo de trajecto  $t_{A \rightarrow B}$  de um raio acústico (3):

$$t_{A \rightarrow B} = \int_a^b \frac{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}{c(x, y)} d\tau.$$

Este problema pode formular-se de forma equivalente, recorrendo ao conceito de comprimento de arco  $s$  introduzido em (3):

$$t_{A \rightarrow B} = \int_{\gamma} \frac{ds}{c(x, y)}. \quad (13)$$

Como se sabe, o integral de linha (13) não depende da escolha da parametrização  $\mathbf{r}$  da trajectória  $\gamma$  desde que a parametrização escolhida satisfaça certas condições naturais de regularidade tais como a continuidade e o não anulamento de  $\mathbf{r}'$ , consulte-se por exemplo [1]. Dito de outra forma, a informação que poderemos acrescentar para fechar o problema tornando-o determinado terá por objectivo, simplesmente, permitir identificar no seio de uma família de parametrizações possíveis (qualquer delas admissível) de uma mesma trajectória  $\gamma$  uma parametrização determinada. A escolha referida foi, por exemplo, realizada implicitamente na dedução tendo por base os mesmos princípios variacionais, da equação diferencial (1). Na correspondente dedução, a parametrização  $\mathbf{r}(\tau) = (x(\tau), y(\tau))$  utilizada satisfaz a condição adicional  $x' = 1$ , ou seja:

$$\mathbf{r}(\tau) = (\tau, y(\tau)), \mathbf{r}(a) = A \text{ e } \mathbf{r}(b) = B. \quad (14)$$

Para fechar o nosso problema iremos impor a condição

$$\|\mathbf{r}'(\tau)\|^2 = 1. \quad (15)$$

Como se sabe, consulte-se, por exemplo, [1], a parametrização  $\mathbf{r}$  de uma trajectória recorrendo ao comprimento de arco  $s$  satisfaz

$$\left\| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right\| = 1.$$

Este facto permite concluir que a condição imposta (15) corresponde, simplesmente, a impor a parametrização da trajectória  $\gamma$  recorrendo ao parâmetro comprimento de arco  $s$ .

### 2.3 Reformulação do modelo

Tendo por base a discussão anterior e a condição (15)

$$\|\mathbf{r}'(\tau)\|^2 = (x'(\tau))^2 + (y'(\tau))^2 = 1,$$

introduzida no modelo (12), deduzimos:

$$\begin{cases} x' - z = 0 \\ y' - w = 0 \\ z'w - w'z + \frac{w}{c(x,y)} \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{z}{c(x,y)} \frac{\partial c}{\partial y} = 0 \\ z^2 + w^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad (16)$$

De referir que as simplificações introduzidas na terceira equação do sistema (16) decorreram da condição arbitrada

$$(x'(\tau))^2 + (y'(\tau))^2 = 1.$$

## 2.4 Resolução numérica

O modelo reformulado (16) corresponde a um sistema de equações algébrico-diferenciais. Este tipo de sistema apresenta características particulares que tornam a sua resolução numérica mais técnica e exigente, consulte-se por exemplo [2]. No nosso caso, o sistema não pode ser colocado na forma de Cauchy pelo que a correspondente resolução numérica só poderá ser concretizada com algoritmos implícitos. Por outro lado a presença duma equação puramente algébrica (a quarta equação) necessária ao fecho do problema desequilibra as escalas temporais que se articulam entre si nas diferentes equações.

Na resolução numérica de (16) optámos pela utilização dum algoritmo muito estável e robusto implementado e desenvolvido em MATLAB por Tony Roberts [5] e destinado a abordar este tipo de sistemas (equações algébrico-diferenciais).

No desenvolvimento dos programas necessários à utilização do algoritmo anteriormente referido tornou-se claro a vantagem de substituir a última equação do sistema (16)

$$z^2 + w^2 = 1,$$

puramente algébrica, pela equação diferencial

$$zz' + ww' = 0, \quad (17)$$

deduzida por derivação relativamente ao parâmetro  $\tau$ . De notar que (17) estabelece a invariância do valor da norma do vector tangente em cada ponto à trajectória  $\gamma$ . Esta condição, aliada por exemplo, a condições iniciais adequadamente estabelecidas  $[(x'(a))^2 + (y'(a))^2 = 1]$  permite garantir naturalmente a satisfação da condição (16) ao longo da descrição de toda a trajectória  $\gamma$ .

A argumentação anterior justifica assim a utilização do seguinte modelo paramétrico consolidado de propagação:

$$\begin{cases} x' - z = 0 \\ y' - w = 0 \\ z'w - w'z + \frac{w}{c(x,y)} \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{z}{c(x,y)} \frac{\partial c}{\partial y} = 0 \\ zz' + ww' = 0 \end{cases} \quad (18)$$

### 3 Simulações numéricas e discussão dos resultados

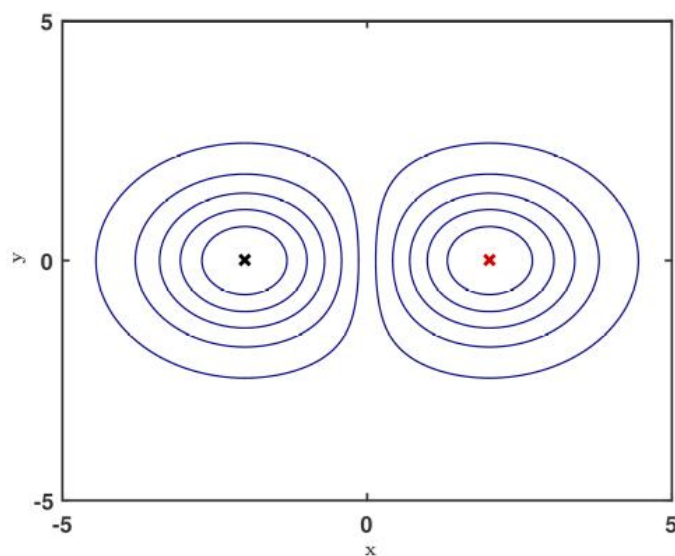


Figura 1: Exemplo de campo de velocidades com extremos em  $(-2,0)$  e  $(0,2)$ .

Na resolução numérica do modelo (1) utilizámos o método Runge-Kutta de  $4^a/5^a$  ordem implementado através do algoritmo `ode45` nativo do MATLAB. Na resolução numérica do modelo (18) recorreremos ao algoritmo `dae4` implementado e desenvolvido em MATLAB por Tony Roberts [5]. O tratamento gráfico das trajectórias obtidas nas simulações foi realizado também na plataforma MATLAB.

Nas simulações numéricas 2D arbitrámos a existência de campos de velocidade do tipo Gaussiano

$$c(x, y) = k_1 e^{-k_2((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)} \quad (19)$$

$$c(x, y) = k_1 \left( 1 - e^{-k_2((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)} \right). \quad (20)$$

Estes tipos de campos de velocidade permitem introduzir facilmente gradientes (espaciais) de velocidade do som exuberantes e, portanto, apropriados para testar as virtualidades do modelo correspondente ao sistema de equações (18). Na Figura 1 ilustramos um exemplo dum campo de velocidades de propagação [com um máximo absoluto em  $(-2, 0)$  e um mínimo absoluto em  $(0, 2)$ ] construído recorrendo às expressões anteriormente referidas (19) e (20).

Na Figura 2 efectuamos a comparação de trajectórias simuladas pelos modelos correspondentes às expressões (1) e (18). Podemos observar que o modelo correspondente à expressão (1) é incapaz de simular trajectórias  $y = y(x)$  em zonas que apresentem declives  $y'$  infinitos (como já sabíamos), restrição esta que o modelo associado às equações (18) não apresenta.

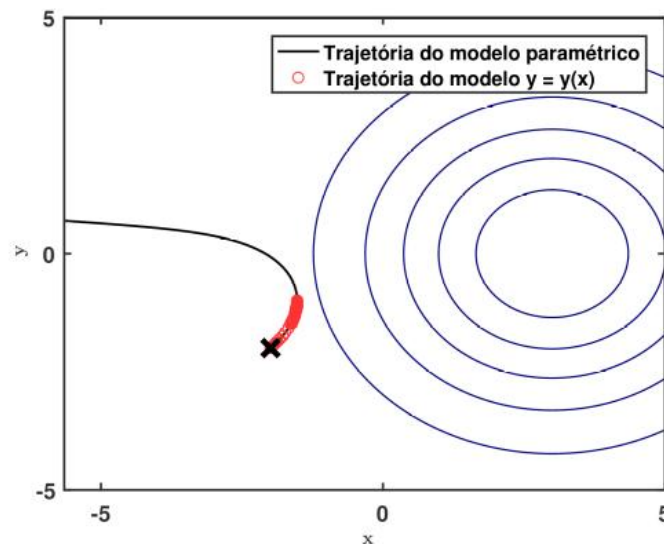


Figura 2: Comparação de trajectórias geradas pelo modelo correspondente à equação 1 e pelo modelo correspondente ao sistema de equações 18.

Na Figura 3 podemos observar a ilustração de diferentes trajectórias de raios acústicos com origem em diferentes posições, todos eles com uma orientação inicial coincidente com a direcção do eixo dos  $yy$  [ $(x'(0), y'(0)) = (0, 1)$ ]. O campo de velocidades representado na Figura 3 é também Gaussiano apresentando um máximo absoluto na posição  $(0, 0)$ . Como se pode ver imediatamente, o comportamento das trajectórias simuladas satisfaz qualitativamente a Lei de Snell porquanto as trajectórias deflectem para regiões com menor velocidade de propagação.

Na Figura 4 ilustramos a simulação duma de uma trajectória complexa

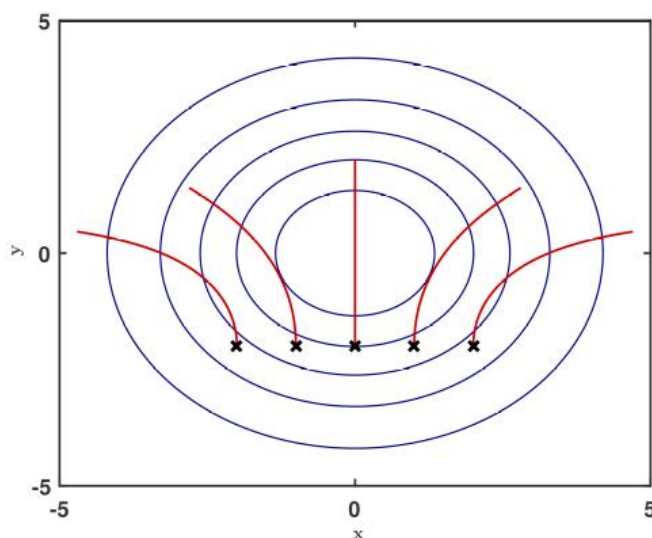


Figura 3: Trajetórias de propagação de raios sonoros com origem nos pontos  $(-2,-2), (-1,-2), (0,-2), (1,-2), (2,-2)$  e inicialmente orientadas na direção do eixo  $yy$ .

que pretende demonstrar a robustez do modelo desenvolvido, utilizando um campo de velocidades Gaussiano com quatro centros.

## 4 Conclusões

Tendo em conta as simulações efectuadas e a argumentação apresentada podemos traçar as seguintes conclusões:

- As trajetórias geradas pelos modelos associados às equações (1) e (18) são coincidentes em regiões correspondentes a domínios comuns de utilização dos modelos referidos.
- O modelo paramétrico da propagação de raios sonoros, desenvolvido no sistema de equações (18), acomoda a possibilidade de simular trajetórias com orientações arbitrárias em qualquer ponto da mesma.
- O modelo paramétrico da propagação de raios sonoros desenvolvido, e associado ao sistema de equações (18), é suficientemente robusto para acomodar a simulação de trajetórias complexas.

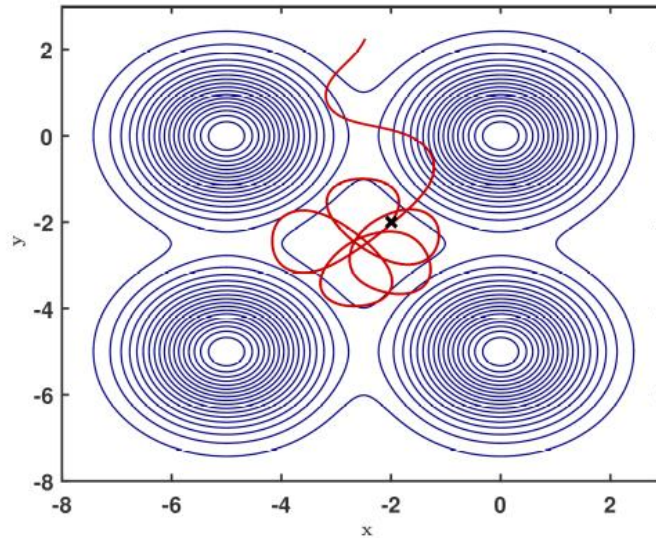


Figura 4: Trajetória complexa de um raio sonoro com origem na posição  $(-2, -2)$  inicialmente orientada a  $60^\circ$  relativamente ao eixo  $xx$ , num campo de velocidades extremo.

## 5 Recomendações para trabalho futuro

Tendo por base o modelo 2D paramétrico de propagação de raios sonoros que apresentámos, e correspondente ao sistema de equações (18), perspectivamos os seguintes desenvolvimentos:

- Aplicação do modelo (18) à simulação de trajetórias de raios acústicos que têm lugar em planos verticais do oceano na presença de reflexões na superfície e fundo, e comparação dos resultados com dados existentes na literatura científica.
- Extensão a 3D do modelo paramétrico 2D de propagação e a sua validação sintética.
- Simulação de trajetórias 3D de raios sonoros no oceano na presença de reflexões e comparação dos resultados obtidos com dados existentes na literatura científica.
- Estudo e desenvolvimento de procedimentos para determinação de campos espaciais de velocidade com base no conhecimento de tempos



de trajetória de raios acústicos e com base no conhecimento do lugar geométrico dessa trajetórias.

## Referências

- [1] Tom Apostol. *Calculus, Vol. 2*. Reverté, 1993.
- [2] U. M. Ascher e L. R. Petzold. *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential Algebraic Equations*. SIAM, 1998.
- [3] Cornelius Lanczos. *The Variational Principles of Mechanics*. Uni. Toronto Press, 1952.
- [4] Beatriz Paiva. “Caracterização de Fontes Hidrotermais”. Tese de mestrado. Escola Naval, 2018.
- [5] Tony Roberts. *Differential Algebraic Equations Solver DAE*. Rel. téc. University of Southern Queensland, 1998. URL: <http://www.mathworks.com/support/ftp/diffeqv5.shtml>.



## **Apêndice B**

**Trabalho apresentado no 1<sup>o</sup>  
Encontro Anual de Investigação  
e Desenvolvimento em Ciências  
Militares**

# SIMULAÇÃO DE TRAJECTÓRIAS DE PROPAGAÇÃO ACÚSTICA NO OCEANO

Técnicas e Tecnologias Militares

Pedro Raposo e Mário Gatta

*Escola Naval/Centro de Investigação Naval (CINAV),  
2810-001 Almada, Portugal*

Miguel Moreira

*Escola Naval/Centro de Investigação Naval (CINAV),  
Centro de Engenharia e Tecnologia Naval e Oceânica (CENTEC)  
2810-001 Almada, Portugal*

## RESUMO

Tendo por base um modelo  $2D$  paramétrico de propagação de raios acústicos desenvolvido pelos autores iremos proceder à simulação de trajectórias de raios acústicos que têm lugar em planos verticais do oceano. Para efectuar as simulações pretendidas utilizaremos campos de velocidade de propagação do som modelados por expressões já consagradas no domínio da acústica submarina, nomeadamente a fórmula de Mackenzie. As trajectórias simuladas serão comparadas com trajectórias geradas em idênticas condições recorrendo a software dedicado e comparadas com dados existentes na literatura científica.

**Keywords:** Acústica em meios não homogéneos, Raios acústicos, Propagação oceânica de raios acústicos

## 1. Introdução

Tendo por base um modelo paramétrico  $2D$  de propagação de raios acústicos desenvolvido pelos autores iremos proceder à simulação de trajectórias

de raios acústicos que têm lugar em planos verticais do oceano. Para efectuar as simulações pretendidas utilizaremos quer campos de velocidade de propagação do som com gradientes constantes, quer campos modelados por expressões já consagradas no domínio da acústica submarina, nomeadamente a fórmula de Mackenzie para o cálculo da velocidade do som na água. As trajectórias simuladas serão comparadas com trajectórias geradas em idênticas condições recorrendo a software de *raytracing*.

## 2. Equações paramétricas

Em (Raposo, Gatta, & Moreira, 2018), os autores estabeleceram um modelo  $2D$  de propagação de raios acústicos em meios não homogêneos baseado no princípio *do tempo mínimo* de Fermat. Este princípio afirma que a trajectória escolhida para a propagação de um raio é aquela que garantir o menor tempo de trajeto. Considere-se a função  $F(\tau, x, x', y, y')$ , cujo integral relativamente ao parâmetro  $\tau$  representa o tempo de trajeto de um raio acústico e suponha-se esse trajecto parametrizado pela função vectorial  $\mathbf{r}(\tau) = (x(\tau), y(\tau))$ ,  $\tau \in [a, b]$ . Como é sabido o valor mínimo do referido integral (isto é, o valor mínimo do tempo de trajecto) decorrerá da satisfação das equações de Euler-Lagrange por parte das variáveis paramétricas  $x = x(\tau)$  e  $y = y(\tau)$  (Lanczos, 1952). O desenvolvimento destes e outros argumentos que podem ser consultados em (Raposo et al., 2018) conduziu os autores ao modelo de propagação  $2D$  inicialmente referido:

$$\begin{cases} x' - z = 0 \\ y' - w = 0 \\ z'w - w'z + \frac{w}{v(x,y)} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{z}{v(x,y)} \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ zz' + ww' = 0 \end{cases} \quad (1)$$

O modelo (1) é constituído por um sistema de equações diferenciais não lineares de tipo algébrico-diferencial. Conhecido o campo de velocidades  $v = v(x, y)$  e postuladas as necessárias condições iniciais, a resolução do modelo conduz à determinação da trajectória  $\mathbf{r}(\tau) = (x(\tau), y(\tau))$  dum raio acústico no meio de propagação em estudo.

## 3. Velocidade do som

Na caracterização da velocidade do som em planos verticais do oceano (em termos das correspondentes coordenadas horizontais e verticais) assumimos para simplificar que esta não depende da coordenada horizontal. Com efeito,

em muitas situações práticas as variações horizontais da distribuição vertical da velocidade do som podem ser desprezadas.

Em resultado da simplificação atrás referida o perfil vertical de velocidade que utilizaremos será caracterizado por um campo escalar do tipo  $v = v(y)$  em que  $y$  representará a coordenada vertical.

Na dedução do perfil típico  $v = v(y)$  a utilizar nas simulações numéricas recorreremos à expressão (2) estabelecida em 1981 e devida a Mackenzie que caracteriza a velocidade do som no oceano  $c = c(D, S, T)$  em termos dos parâmetros mais relevantes: a temperatura  $T$  (expressa em graus Celsius), a profundidade  $D$  (expressa em metros) e a salinidade  $S$  (expressa em partes por milhão) (NPL, 2000).

$$c(D, S, T) = \quad (2)$$

$$= a_1 + a_2T - a_3T^2 + a_4T^3 + a_5S^* + a_6D + a_7D^2 - a_8TS^* - a_9TD^3,$$

com  $S^* = S - 35$  e

$$a_1 = 1448.96$$

$$a_2 = 4.591$$

$$a_3 = -5.304 \times 10^{-2}$$

$$a_4 = 2.374 \times 10^{-4}$$

$$a_5 = 1.340$$

$$a_6 = 1,630 \times 10^{-2}$$

$$a_7 = 1,675 \times 10^{-7}$$

$$a_8 = -1,025 \times 10^{-2}$$

$$a_9 = -7,139 \times 10^{-13}$$

Admitindo a salinidade  $S$  constante, já que a influência de pequenas variações deste parâmetro têm um diminuto impacto na velocidade do som, e conhecendo a distribuição oceânica vertical  $T = T(y)$  de temperatura, o perfil  $v = v(y)$  pode ser estabelecido analiticamente. Em Joseph (Joseph, 2010) podemos encontrar a expressão que seguidamente se apresenta e que caracteriza satisfatoriamente o perfil vertical de temperaturas médias no oceano.

$$T(y) = -0.338 + \frac{(T_s + 0.338)(1 + e^{-0.016y+1.244})}{(1.485 \times 10^{-4})(T_s + 0.338)y + (1 + e^{-0.016y+1.244})}. \quad (3)$$

Na Figura 2 ilustramos perfis verticais de temperatura e velocidade do som obtidos da forma descrita a partir das expressões (2) e (3) considerando uma temperatura de superfície da água do mar de  $18^\circ C$  e uma salinidade de 35 ppm (constante).

## 4. Resolução numérica

O modelo (1) corresponde a um sistema de equações algébrico-diferenciais. Este tipo de sistema apresenta características particulares que tornam a sua resolução numérica mais técnica e exigente, consulte-se por exemplo (Ascher & Petzold, 1998). No caso presente, o modelo não pode ser colocado na forma de Cauchy pelo que a correspondente resolução numérica só poderá ser concretizada com algoritmos implícitos. Para mais informações consulte-se (Raposo et al., 2018). Na resolução numérica de (1) optámos por utilizar um algoritmo muito estável e robusto implementado e desenvolvido em MATLAB por Tony Roberts (Roberts, 1998) e destinado a abordar este tipo de sistemas (equações algébrico-diferenciais).

## 5. Simulações numéricas e discussão dos resultados

Tendo em vista ensaiar a adequabilidade do modelo desenvolvido, as trajetórias obtidas serão comparadas com trajetórias obtidas recorrendo a software de *raytracing*. Utilizaremos para tal um modelo de *raytracing* desenvolvido por Val Schmidt (Schmidt, 2009). Este modelo baseia-se em aproximações geométricas da trajetória e considera constantes os gradientes de velocidade do som entre diferentes camadas verticais.

Nas simulações efetuadas foram utilizados os perfis verticais de velocidade do som representados nas Figuras 1 e 2.

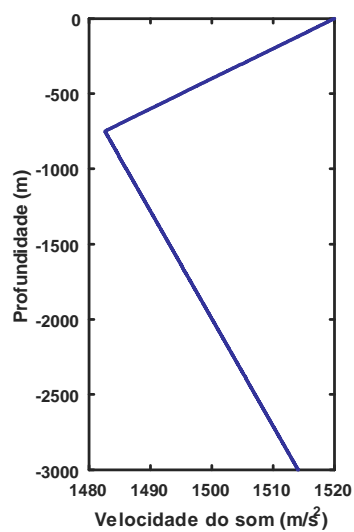


Figura 1: Perfil vertical de velocidade do som com gradientes constantes.

Na Figura 1 representamos um perfil vertical de velocidade do som simplificado com gradiente vertical constante. A utilização deste tipo de perfis na previsão da trajetória de raios acústicos é habitual porquanto conduz a previsões satisfatórias. Na Figura 2 utilizamos um perfil vertical típico realista gerado a partir das expressões (2) e (3).

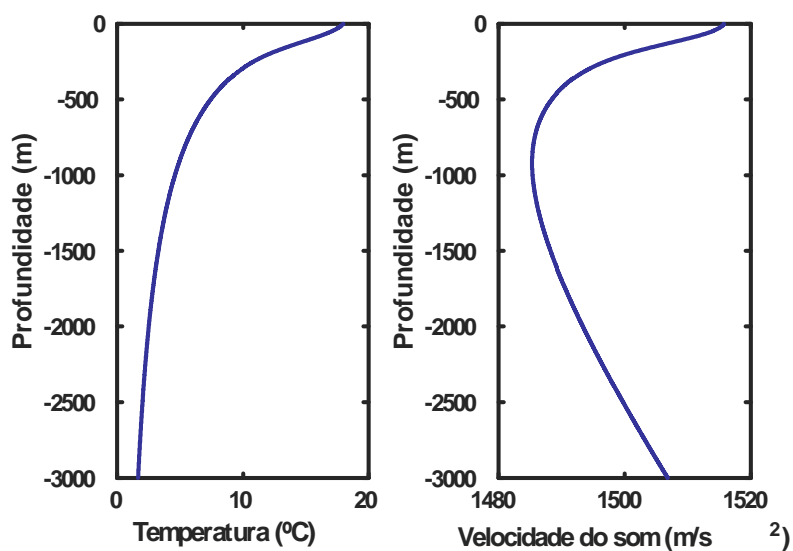


Figura 2: Perfis verticais típicos de temperatura e velocidade do som.



Nas Figuras 5 e 4 podemos observar as trajetórias obtidas recorrendo ao modelo paramétrico (2) e ao modelo de *raytracing*, utilizando os perfis de velocidade do som representados nas Figuras 1 (simplificado) e 2 (realista).

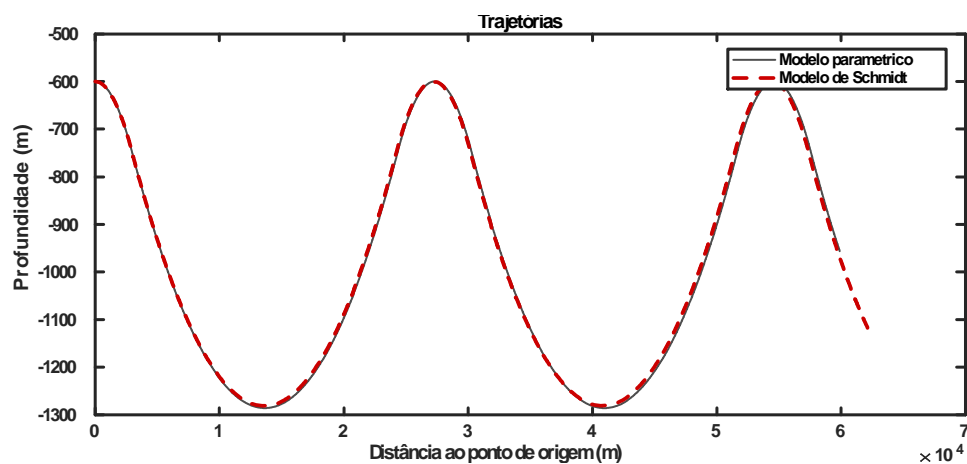


Figura 3: Simulação efetuada considerando gradientes verticais de velocidade do som constantes.

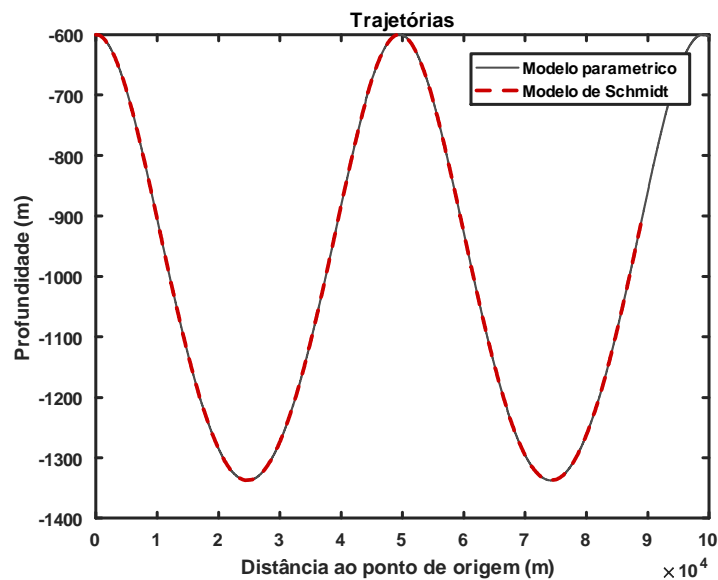


Figura 4: Simulação efetuada considerando um perfil vertical de velocidades do som realista.

Podemos constatar, observando a Figura 5 que modelo paramétrico proposto e o modelo de *raytracing* de Schmidt apresentam trajectórias praticamente coincidentes. Tendo em conta que o modelo de *raytracing* de Schmidt (Schmidt, 2009) fornece trajectórias exactas em ambientes com perfis de velocidade do som de gradiente constante, este facto valida o modelo paramétrico desenvolvido, pelo menos nestas circunstâncias particulares.

Na Figura 4, utilizando um perfil vertical de velocidade do som mais realista, constatamos igualmente que as trajectórias previstas pelo modelo paramétrico desenvolvido e pelo modelo de *raytracing* de Schmidt (Schmidt, 2009) são praticamente coincidentes. Este facto justifica a utilização de modelos simplificados de propagação de raios acústicos baseados em aproximações geométricas da trajetória considerando constantes os gradientes de velocidade do som entre diferentes camadas verticais. No entanto em ambientes em que o campo de velocidades é mais rico nomeadamente quando os perfis verticais de velocidade do som apresentam variações no plano horizontal o modelo paramétrico  $2D$  proposto poderá revelar-se vantajoso.

## 6. Conclusões

Tendo em conta as simulações efectuadas e a argumentação apresentada podemos traçar as seguintes conclusões:

- As trajectórias previstas pelo modelo paramétrico  $2D$  proposto e pelo modelo de *raytracing* de Schmidt (Schmidt, 2009), são idênticas nomeadamente em ambientes com perfis de velocidade do som de gradiente vertical constante e gradiente horizontal nulo. Tendo em conta que o modelo de *raytracing* de Schmidt fornece trajectórias exactas em ambientes com perfis de velocidade do som de gradiente constante, este facto valida o modelo paramétrico desenvolvido, pelo menos nestas circunstâncias particulares.
- As trajectórias previstas pelo modelo paramétrico  $2D$  proposto e pelo modelo de *raytracing* de Schmidt, são igualmente idênticas se utilizarmos um perfil oceânico vertical de velocidade do som mais realista (embora com gradiente horizontal nulo). Este facto justifica a utilização de modelos simplificados de propagação de raios acústicos baseados em aproximações geométricas da trajetória considerando constantes os gradientes de velocidade do som entre diferentes camadas verticais.
- No entanto em ambientes em que o campo de velocidades é mais rico nomeadamente quando os perfis verticais de velocidade do som apresen-

tam variações no plano horizontal o modelo paramétrico  $2D$  proposto poderá revelar-se vantajoso.

## 7. Recomendações para trabalho futuro

Tendo por base o modelo  $2D$  paramétrico de propagação de raios sonoros que apresentámos, e correspondente ao sistema de equações (1), perspectivamos os seguintes desenvolvimentos:

- Aplicação do modelo (1) à simulação de trajectórias de raios acústicos que têm lugar em planos verticais do oceano na presença de reflexões na superfície e fundo, e comparação dos resultados com dados existentes na literatura científica.
- Extensão do modelo (1) à simulação de trajectórias  $3D$  e aplicação deste modelo à simulação de trajectórias de raios acústicos que têm lugar no oceano e comparação dos resultados com dados existentes na literatura científica.
- Aplicação do modelo  $3D$  à simulação de trajectórias de raios acústicos que têm lugar no oceano na presença de reflexões na superfície e fundo, e comparação dos resultados com dados existentes na literatura científica.

## Referências

- Ascher, U. M., & Petzold, L. R. (1998). *Computer methods for ordinary differential equations and differential algebraic equations*. SIAM.
- Joseph. (2010). *The temperature of ocean water at a given depth*.
- Lanczos, C. (1952). *The variational principles of mechanics*. Uni. Toronto Press.
- NPL. (2000). *Technical guides - speed of sound in sea-water*.
- Raposo, P., Gatta, M., & Moreira, M. (2018, November). Simulação das trajectórias de propagação  $2d$  de raios acústicos em meios não homogéneos. In *Jornadas do mar 2018*.
- Roberts, T. (1998). *Differential algebraic equations solver dae* (Tech. Rep.). University of Southern Queensland.
- Schmidt, V. (2009). *Raytrace*. MATLAB.



## **Apêndice C**

**Trabalho apresentado na  
conferência Internoise 2019**

## Ocean-acoustic raytracing propagation models based on Fermat's least time principle

Raposo, Pedro<sup>1</sup>

CINAV (Navy Research Center)/EN (Naval Academy)  
2810-001 Almada, Portugal

Gatta, Mário<sup>2</sup>

CINAV (Navy Research Center)/EN (Naval Academy)  
2810-001 Almada, Portugal

Moreira, Miguel<sup>3</sup>

CINAV (Navy Research Center)/EN (Naval Academy)/CENTEC (Center of Marine Technology and Ocean Engineering)  
2810-001 Almada, Portugal

### ABSTRACT

Considering Fermat's least time principle we developed 2D and 3D ocean-acoustic raytracing propagation models. Each one consists of an algebraic differential system of equations. So, considering Fermat's least time principle we developed 2D and 3D ocean-acoustic parametric raytracing propagation models based on the Euler-Lagrange equations. Each one consists of an algebraic differential system of equations. Numerical simulations were presented, discussed and compared with propagation predictions obtained with a consolidated tool developed and utilized by the scientific community.

**Keywords:** Heterogeneous media, Raytracing, Ocean-acoustic propagation

**I-INCE Classification of Subject Number:** 76

(see <http://i-ince.org/files/data/classification.pdf>)

---

<sup>1</sup>amaral.raposo@marinha.pt

<sup>2</sup>mario.gatta@marinha.pt

<sup>3</sup>miguel.moreira@marinha.pt

## 1. INTRODUCTION

The study of underwater sound propagation is of prime importance. Indeed, in the underwater environment, contrary to electromagnetic waves which have small propagation ranges, acoustic waves can be used to communicate, detect objects and map the environment, among other uses [1]. It can be shown that sound wave propagation can be modeled as acoustic rays, namely above a well-defined sound frequency [2]. So, considering Fermat's least time principle we developed 2D and 3D ocean-acoustic parametric raytracing propagation models based on the Euler-Lagrange equations. Each one consists of an algebraic differential system of equations. Numerical simulations were presented, discussed and compared with propagation predictions obtained with a consolidated tool developed by Val Schimdt, [3] and used by the scientific community.

## 2. EULER-LAGRANGE'S EQUATIONS

Considering the parametrization  $\mathbf{r}(\tau) = (x(\tau), y(\tau))$ ,  $a \leq \tau \leq b$  of a 2D acoustic trajectory  $\gamma$  under a velocity sound field  $v = v(x, y)$ , Fermat's least time principle states that  $\gamma$  minimizes the trajectory time  $t_{A \rightarrow B}$ :

$$t_{A \rightarrow B} = \int_A^B \frac{ds}{v(x, y)} = \int_a^b \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2}}{v(x, y)} d\tau. \quad (1)$$

It can be shown, see for instance [4], that the integral of function  $F$

$$F(\tau, x, y, x', y') = \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2}}{v(x, y)}, \quad (2)$$

is minimized if  $F$  satisfies the Euler-Lagrange's equations:

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial F}{\partial x'} \right) - \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \end{cases}. \quad (3)$$

Thus, deducing,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}{v^2}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = \frac{x'}{v \sqrt{(x')^2 + (y')^2}}, \quad (5)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial F}{\partial x'} \right) = -\frac{\left( (x')^4 + (y')^2 (x')^2 \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \left( x' y' y'' - (x')^2 (y')^2 \right) v + \left( (x')^3 y' + (y')^3 x' \right) \frac{\partial v}{\partial y}}{v^2 \sqrt{\left( (x')^2 + (y')^2 \right)^3}}. \quad (6)$$

and calculating also  $\frac{\partial F}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y'}$  e  $\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right)$  one can establish from (3) the corresponding Euler-Lagrange's equations:

$$\begin{cases} x'' y' - y'' x' + \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial x} \left( (y')^3 + (x')^2 y' \right) - \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial y} \left( (x')^3 + (y')^2 x' \right) = 0 \\ y'' x' - x'' y' + \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial y} \left( (x')^3 + (y')^2 x' \right) - \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial x} \left( (y')^3 + (x')^2 y' \right) = 0 \end{cases}. \quad (7)$$

The solution  $\mathbf{r}(\tau) = (x(\tau), y(\tau))$ ,  $\tau \in [a, b]$  of this system of second order differential equations will correspond to the desired 2D acoustic trajectory, that minimizes (1). Unfortunately, these equations are singular because they are symmetric.

Assuming now a 3D ray trajectory parametrized by  $\mathbf{r}(\tau) = (x(\tau), y(\tau), z(\tau))$ ,  $a \leq \tau \leq b$  and using an identical approach one can establish the 3D Euler-Lagrange's equations which minimize the acoustic trajectory time  $t_{A \rightarrow B}$  given by:

$$t_{A \rightarrow B} = \int_A^B \frac{ds}{v(x, y, z)} = \int_a^b \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2}}{v(x, y, z)} d\tau. \quad (8)$$

After some algebraic work one obtain:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( (y')^2 + (z')^2 \right) x'' v - (y' y'' + z z'') x' v - \left( (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 \right) x' \frac{dv}{d\tau} \\ \quad + \frac{\partial v}{\partial x} \left( (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 \right)^2 = 0 \\ \left( (x')^2 + (z')^2 \right) y'' v - (x' x'' + z' z'') y' v - \left( (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 \right) y' \frac{dv}{d\tau} \\ \quad + \frac{\partial v}{\partial y} \left( (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 \right)^2 = 0 \\ \left( (y')^2 + (x')^2 \right) z'' v - (y' y'' + x' x'') z' v - \left( (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 \right) z' \frac{dv}{d\tau} \\ \quad + \frac{\partial v}{\partial z} \left( (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 \right)^2 = 0 \end{array} \right. . \quad (9)$$

Unfortunately, these equations are also singular because system (9) is of rank two.

In upcoming sections we will describe the approach used to obtain the 2D and 3D models for the acoustic ray propagation overcoming the problem point out.

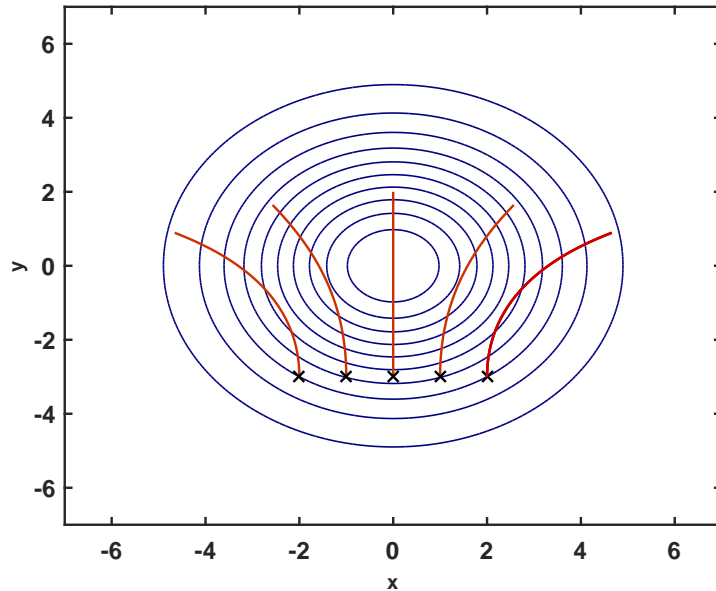


Figure 1: Some rays lauched from the line  $y = -3$  and with an initially  $y$ -orientation.



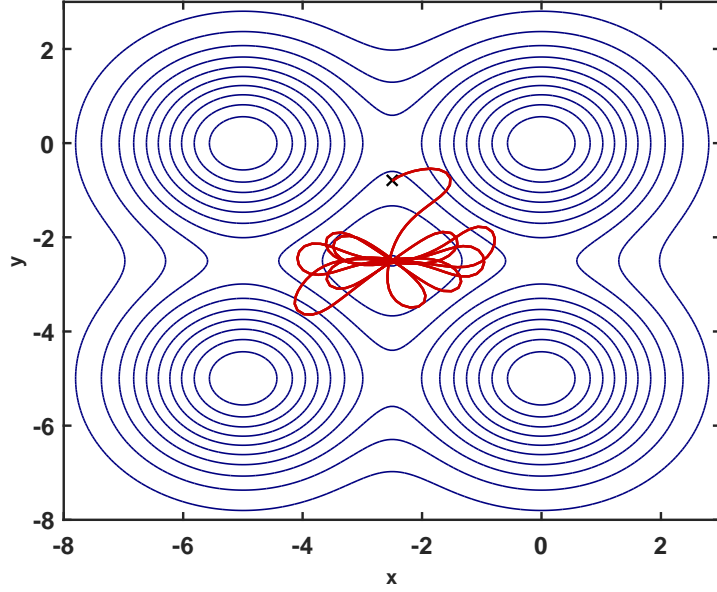


Figure 2: An arbitrary ray traveling through a complex and virtual sound field.

### 3. ESTABLISHMENT OF THE 2D MODEL

In order to close the 2D problem (7) we must replace one of the deduced equations by a mathematically and physically relevant equation. Note that

$$t_{A \rightarrow B} = \int_a^b \frac{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}{v(x, y)} d\tau = \int_\gamma \frac{ds}{v(x, y)}, \quad (10)$$

does not depend on the chosen parametrization  $\mathbf{r}(\tau) = (x(\tau), y(\tau))$ ,  $a \leq \tau \leq b$ , as long as  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\tau)$  fulfills natural conditions of regularity such as being of class  $C^1$  and satisfying  $\mathbf{r}'(\tau) \neq \mathbf{0}$ ,  $\forall \tau \in ]a, b[$ , see for instance [5]. In other words, the information needed to solve this system, which will be written in the form of a new equation, is simply the selection of a parametrization among a group of possible ones. So, to close the problem we can simply adopt the condition

$$\|\mathbf{r}'(\tau)\|^2 = 1, \quad (11)$$

which is equivalent to consider the arc length  $s(\tau) = \int_a^\tau \|\mathbf{r}'(t)\| dt$  parametrization of  $\mathbf{r}(s) = (x(s), y(s))$  because

$$\left\| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right\| = 1. \quad (12)$$

Bearing in mind equation (11) we can infer the following simplifications on (7) and obtain:

$$\begin{cases} x' - z = 0 \\ y' - w = 0 \\ z'w - w'z + \frac{w}{v} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{z}{v} \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ z^2 + w^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad (13)$$

The established 2D model (13) is a system of differential algebraic equations (see for instance [6]) which have to be numerically solved using an implicit algorithm.

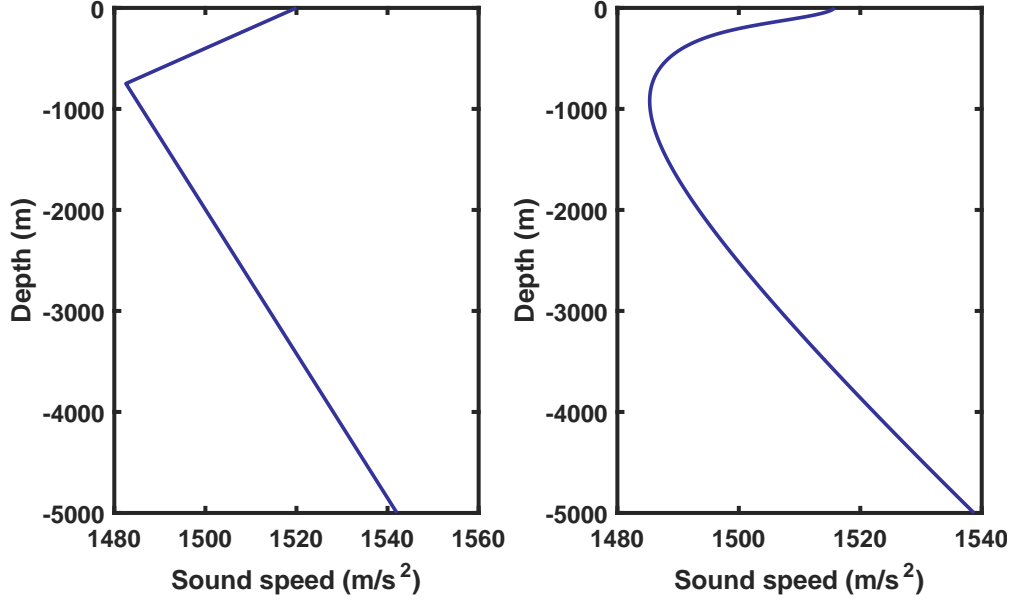


Figure 3: Sound speed profiles used to compare the models.

We found advantage in changing the stiff purely algebraic last equation of (13)

$$z^2 + w^2 = 1,$$

by the softer one

$$zz' + ww' = 0. \quad (14)$$

Note that (14) implies the invariance of the trajectory tangent vector's norm. So, (11) and (14) are equivalent whenever for some  $\tau$ ,  $\|\mathbf{r}'(\tau)\|^2 = 1$  and this happens if we define initial conditions according. Thus, the adopted final 2D model is written as:

$$\begin{cases} x' - z = 0 \\ y' - w = 0 \\ z'w - w'z + \frac{w}{v(x,y)} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{z}{v(x,y)} \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ zz' + ww' = 0 \end{cases} \quad (15)$$

To numerically solve (15) we used a robust algorithm, developed in MATLAB by Tony Roberts [7], suitable for differential algebraic systems.

## 4. 2D NUMERICAL SIMULATIONS

### 4.4.1. Preliminary numerical simulations

In order to preliminary test model (15) we defined Gaussian sound velocity fields, such as

$$v(x, y) = k_1 e^{-k_2((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)} \quad \text{and} \quad (16)$$

$$v(x, y) = k_1 \left( 1 - e^{-k_2((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)} \right), \quad (17)$$

with  $k_1 > 0$  and  $k_2 > 0$ . Note that, at position  $(x_0, y_0)$  the velocity field (16) attains its maximum value while (17) attains its the minimum value.

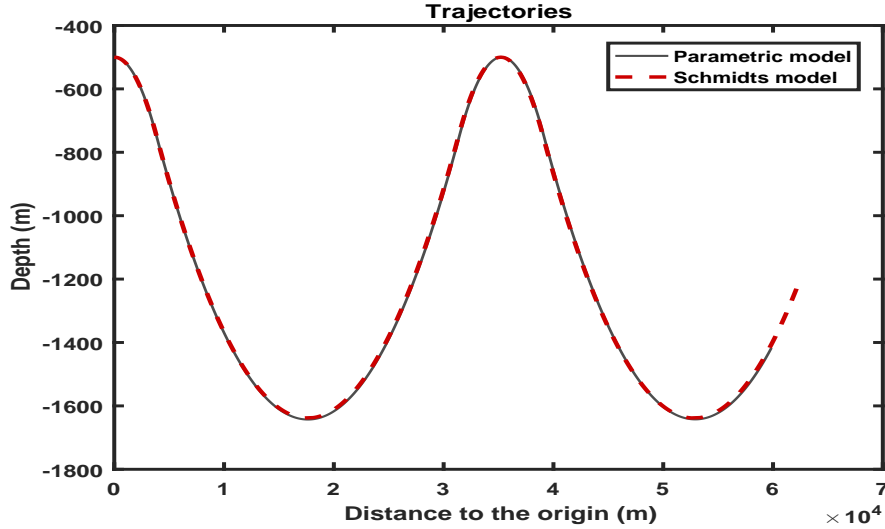


Figure 4: Comparison between Schimdt's tool and our parametric model using a linear sound velocity profile.

In Figure 1 some initially  $y$ -oriented trajectories in a region with a velocity field of type (16) are illustrated. With the exception of the acoustic ray starting at position  $(0, -3)$ , the rays bend in the direction of lower sound velocity as we expected according to Snell's law. The acoustic ray starting at position  $(0, -3)$  maintains a rectilinear trajectory compatible with the symmetry associated with the configuration of the trajectory.

In Figure 2 the  $2D$  model (15) is tested in a region with a complex sound velocity field consisting of a linear combination of (16) and (17) type sound velocity fields with extrema in different locations. We can observe that the model can generate the expected complex trajectories apparently without the Snell's law being violated.

#### 4.4.2. Comparison with raytracing software

To be able to predict ocean-acoustic ray propagation in vertical planes Val Schimdt [3] developed a  $2D$  raytracing tool which has been extensively used by the scientific community. In this section we are going to compare raytrace Val Schimdt's predictions with those obtained from our  $2D$  (15) model. Note that in Schimdt's tool the sound speed variations are approximated by piecewise linear gradients. Under this assumption, sound travels through each layer as a circular arc.

Differently from Schimdt's tool, that uses a discrete data set for the sound speed profile, our  $2D$  model needs a class  $C^1$  function (except for a finite number of points) describing the sound field. So, we assumed a constant water salinity of 35 ppm and we adopted the following water temperature profile established by Joseph [8], where  $T_s$  is the surface's water temperature:

$$T(y) = -0.338 + \frac{(T_s + 0.338)(1 + e^{-0.016y+1.244})}{(1.485 \times 10^{-4})(T_s + 0.338)y + (1 + e^{-0.016y+1.244})}. \quad (18)$$

The sound speed profile given the temperature  $T$  (in Celsius degrees), the depth  $D$  (in meters) and the salinity  $S$  (in parts per million) was analytically computed using

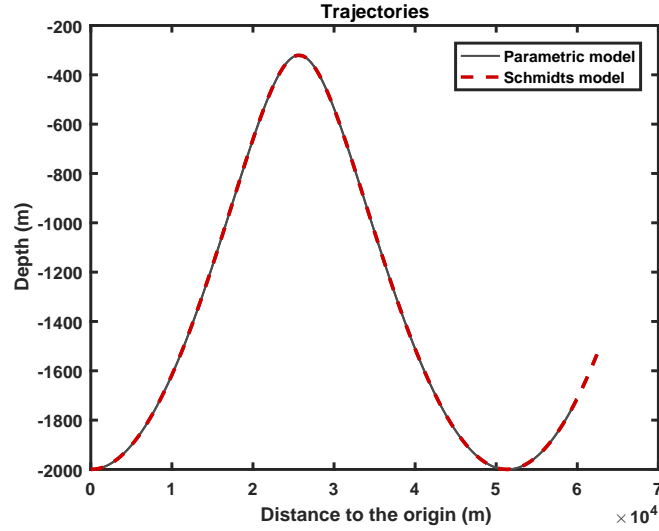


Figure 5: Comparison between Schimdt's tool and our parametric model using a realistic sound velocity profile.

Makenzie's sound velocity equation [9] and (18)

$$c(D, S, T) = \quad (19)$$

$$= a_1 + a_2T - a_3T^2 + a_4T^3 + a_5S^* + a_6D + a_7D^2 - a_8TS^* - a_9TD^3,$$

where

$$S^* = S - 35 \text{ and}$$

$$a_1 = 1448.96$$

$$a_2 = 4.591$$

$$a_3 = -5.304 \times 10^{-2}$$

$$a_4 = 2.374 \times 10^{-4}$$

$$a_5 = 1.340$$

$$a_6 = 1,630 \times 10^{-2}$$

$$a_7 = 1,675 \times 10^{-7}$$

$$a_8 = -1,025 \times 10^{-2}$$

$$a_9 = -7,139 \times 10^{-13}$$

In Figure 3 we illustrate the two sound profiles used in the numerical simulations performed here. In the left sound speed profile the velocity gradient is constant. The more realistic right sound profile was computed using (19).

In Figure 4 one can observe raytrace predictions from Schmidt's tool and our 2D parametric model using the linear picewise sound velocity profile (the left sound velocity profile of Figure 3). Observe that in this situation Schmidt's tool provides accurate predictions since we are using a linear picewise sound velocity profile. We can verify that the predictions offered by our 2D parametric model and Schmidt's tool agree. This fact shows that the performance of our model, in this situation, is as rigorous as Schmidt's tool.

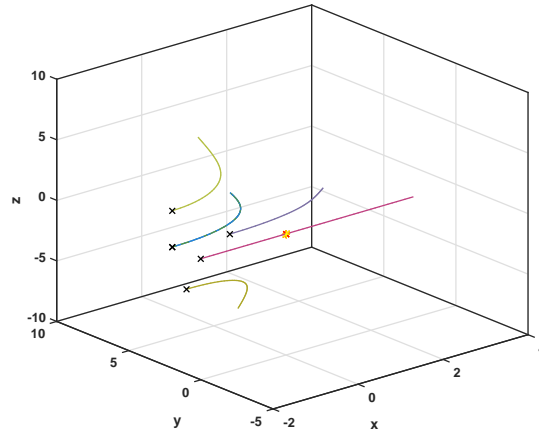


Figure 6: First view of the 3D test: Some rays launched from arbitrary positions on the plane  $x = -2$  and with an  $x$ -orientation through a sound field with a maximum velocity at  $(0, 0, 0)$ , represented by a yellow and red asterisk (\*).

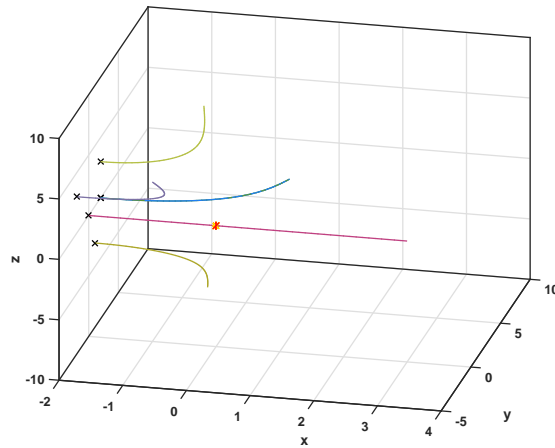


Figure 7: Second view of the 3D test.

In Figure 5 one can observe raytrace predictions between Schmidt's tool and our 2D parametric model using a more rigorous sound velocity profile (the right sound velocity profile of Figure 3). Both simulations agree demonstrating an adequate performance of our 2D parametric model.

## 5. ESTABLISHMENT OF THE 3D MODEL

As it was mentioned before the previously deduced 3D Euler-Lagrange's equations (9) are singular being of rank two.

Before we follow the approach used in the development of the 2D model we must preserve all the information of the three equations (9). This requirement is met by adding member-to-member the last equation to the first equation as well as to the second equation. We then replace the redundant last equation of the newly modified system (9) by the condition

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0,$$

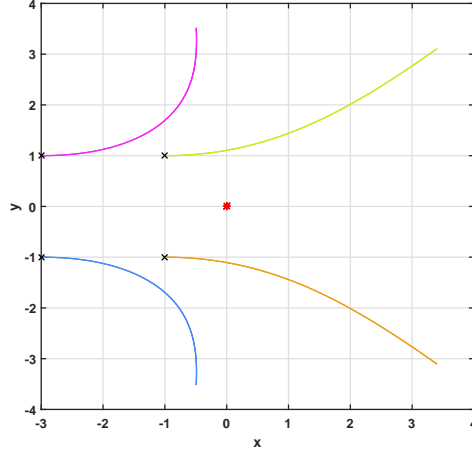


Figure 8: Trajectory prediction of some  $x$ -oriented launched (at  $z = 0$  plane) acoustic rays.

which is equivalent to

$$\|\mathbf{r}'(\tau)\|^2 = 1,$$

if we define initial conditions according.

After some algebraic work and first order reduction we obtain finally our 3D parametric model:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' - a = 0 \\ y' - b = 0 \\ z' - c = 0 \\ (1 - a^2)a' + (1 - c^2)c' - ac(a' + c') - b(ab' + cb') \\ \quad + \frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} - \left( \frac{dv}{dx}a + \frac{dv}{dy}b + \frac{dv}{dz}c \right) (a + c) \right) = 0 \\ (1 - b^2)b' + (1 - c^2)c' - bc(b' + c') - a(ba' + ca') \\ \quad + \frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} - \left( \frac{dv}{dx}a + \frac{dv}{dy}b + \frac{dv}{dz}c \right) (b + c) \right) = 0 \\ aa' + bb' + cc' = 0 \end{array} \right. \quad (20)$$

Some numerical simulations using the robust algorithm developed in MATLAB by Tony Roberts [7] will be presented in the next section.

## 6. 3D NUMERICAL SIMULATIONS

In order to preliminary test our 3D model (20), and considering  $k_1 > 0$  as well as  $k_2 > 0$ , the following 3D Gaussian type velocity model were defined:

$$v(x, y, z) = k_1 e^{-k_2((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2)}. \quad (21)$$

In Figures 6 and 7 we display the predicted trajectories of some rays  $x$ -oriented launched from arbitrary at plane  $x = -2$  in a region with a velocity field of type (21). With the exception of the acoustic ray starting at position  $(-2, 0, 0)$ , the rays bend in the direction of lower sound velocity as we expected according to Snell's law. The acoustic ray starting at position  $(-2, 0, 0)$  maintains a rectilinear trajectory compatible with the symmetry associated with the configuration of the trajectory.

In Figure 8 we display the predicted trajectories of some rays  $x$ -oriented launched from positions  $(-3, 1, 0)$ ,  $(-3, -1, 0)$ ,  $(-1, -1, 0)$  and  $(-1, -1, 0)$ , in a region with the same velocity type field. One can observe that the predicted ray trajectories remain in the same plane as is expected.

The results of the numerical simulations performed here seem to be satisfactory. However it will be necessary to carry out later in an upcoming work an adequate validation of the results of our 3D acoustic ray propagation model.

## 7. CONCLUSIONS

Taking into account the simulations and the arguments presented, we can draw the following conclusions:

- The trajectories generated by our 2D model (15) seems to be sufficiently robust to accommodate the simulation of complex trajectories.
- The trajectories generated by our 2D model and by Schimdt's raytracing tool coincide in regions corresponding to common domains of use.
- Despite the need for adequate future validation of our 3D model (20) preliminary numerical simulations suggest that it perform satisfactory.

## 8. FUTURE WORK

Based on the 2D (15) and 3D (20) parametric models of sound propagation presented we envisage the following upcoming developments:

- Perform an appropriate validation of the 3D model.
- Develop the possibility of simulation 2D and 3D acoustic ray trajectories the presence of reflections.

## 9. ACKNOWLEDGEMENTS

We acknowledge CINAV the Portuguese Navy's Research Centre and the Portuguese Naval Academy (EN) for the support and funding which was essential to the development and presentation of this work.

## 10. REFERENCES

- [1] Paul C. Etter. Advanced applications for underwater acoustic modeling. *Advances in Acoustics and Vibration*, 2012, 2012.
- [2] Michael J. Buckingham. Ocean-acoustic propagation models. *J. Acoustique*, pages 223–287, jun 1992.
- [3] Val Schmidt. Raytrace. MATLAB, 2009.

- [4] Cornelius Lanczos. *The Variational Principles of Mechanics*. Uni. Toronto Press, 1952.
- [5] Tom Apostol. *Calculus, Vol. 2*. Reverté, 1993.
- [6] U. M. Ascher and L. R. Petzold. *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential Algebraic Equations*. SIAM, 1998.
- [7] Tony Roberts. Differential algebraic equations solver dae. Technical report, University of Southern Queensland, 1998.
- [8] Joseph. The temperature of ocean water at a given depth, 2010.
- [9] NPL. Technical guides - speed of sound in sea-water, 2000.