

TOPOLOGISCHE LAGUERRERÄUME UND  
TOPOLOGISCHE VERALLGEMEINERTE VIERECKE

Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades  
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Christian-Albrechts-Universität  
zu Kiel

vorgelegt von  
Dipl.-Math. Marian Margraf  
Kiel 2001

---

Referent: Prof. Dr. D. Betten  
Korreferenten: Prof. Dr. J. Heber, Prof. Dr. A. Schroth, Hamburg  
Tag der mündlichen Prüfung: 19.07.2001  
Zum Druck genehmigt: Kiel, den 25.07.2001

gez. Th. Bauer  
Dekan

# Inhaltsverzeichnis

|   |    |
|---|----|
| <b>Einleitung</b> .....   | 1  |
| <b>1. Begriffe und Notationen</b> .....                             | 5  |
| 1.1 Geometrie .....   | 5  |
| 1.2 Topologie .....   | 6  |
| <b>2. Lineare Räume</b> .....                                       | 9  |
| 2.1 Affine und projektive Räume .....                               | 9  |
| 2.2 Topologische affine und projektive Räume .....                  | 13 |
| 2.3 Ovale und Ovoide .....  | 19 |
| <b>3. Kreisräume</b> .....  | 27 |
| 3.1 Möbius- und Laguerrerräume .....                                | 28 |
| 3.2 Klassische Beispiele .....                                      | 31 |
| 3.3 Topologische Laguerrerräume .....                               | 36 |
| 3.4 Ableitung topologischer Laguerrerräume .....                    | 41 |
| 3.5 Darstellungssatz topologischer Laguerrerräume .....             | 43 |
| <b>4. Verallgemeinerte Vierecke</b> .....                           | 49 |
| 4.1 Topologische Vierecke .....                                     | 51 |
| 4.2 Antireguläre Vierecke .....                                     | 53 |
| 4.3 Translationsvierecke .....                                      | 55 |
| <b>5. Liegeometrien</b> .....                                       | 57 |
| 5.1 Liegeometrien von Laguerrerräumen .....                         | 57 |
| 5.2 Liegeometrien lokalkompakter zusammenhängender Laguerrerräume . | 62 |

|  |    |
|--|----|
| <b>6. Antireguläre Vierecke</b> .....              | 69 |
| 6.1 Definition und Beispiele .....                 | 69 |
| 6.2 Die Ableitung $\mathcal{G}\mathcal{Q}_p$ ..... | 74 |
| <b>7. Topologische Vierecke</b> .....              | 81 |
| 7.1 Kompakte $k$ -antireguläre Vierecke .....      | 81 |
| 7.2 Ausblick .....                                 | 84 |
| <b>Sachverzeichnis</b> .....                       | 87 |
| <b>Literatur</b> .....                             | 89 |

# Einleitung

Im Jahr 1955 begann Salzmann mit dem Studium geometrischer Strukturen, auf deren Punkt- und Geradenmenge Topologien gegeben sind, so daß gewisse geometrische Operationen stetig sind. Derartige Strukturen bezeichnet man als topologische Geometrien.

Diese, zunächst nur für lineare Geometrien benutzten Eigenschaften, wie etwa projektive und affine Ebenen (siehe *Compact Projective Planes*, Walter de Gruyter, 1995 von H. SALZMANN, D. BETTEN, T. GRUNDHÖFER, H. HÄHL, R. LÖWEN und M. STROPPEL für eine Übersicht) und projektive und affine Räume, wurden im Laufe der Jahre auch auf Kreisebenen und auf die von Tits eingeführten verallgemeinerten Polygone angewandt.

Schon seit langem ist die enge Beziehung zwischen Laguerreebenen und verallgemeinerten Vierecken bekannt, siehe zum Beispiel S. E. PAYNE und J. A. THAS [PT84] für den endlichen Fall. In einer Reihe von Arbeiten beschäftigte sich A. SCHROTH mit der Konstruktion kompakter zusammenhängender verallgemeinerter Vierecke aus lokalkompakten zusammenhängenden Laguerreebenen und umgekehrt mit der Konstruktion lokalkompakter zusammenhängender Laguerreebenen aus kompakten zusammenhängenden verallgemeinerten Vierecken. Dabei stellte sich heraus, daß einerseits die sogenannte Liegeometrie solcher Laguerreebenen stets kompakte zusammenhängende antireguläre verallgemeinerte Vierecke bildet und andererseits die Ableitungen antiregulärer kompakter zusammenhängender Vierecke stets lokalkompakte zusammenhängende Laguerreebenen liefern. Mehr noch, A. SCHROTH war in der Lage zu zeigen, daß jedes kompakte zusammenhängende Viereck mit topologischen Parametern 1 bzw. 2, d.h. Geraden und Geradenbüschel sind zur 1- bzw. 2-Sphäre homöomorphe Räume, bis auf Dualität antiregulär ist und sich damit als Liegeometrie einer geeigneten Laguerreebene beschreiben läßt.

In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns mit zwei Erweiterungen dieser Ergebnisse. Zunächst definieren wir die Liegeometrie von Laguerrräumen beliebigen Ranges (Laguerreebenen sind Laguerrräume vom Rang drei) und zeigen, daß die Liegeometrie lokalkompakter zusammenhängender Laguerrräume stets kompakte zusammenhängende Vierecke bildet und die so erhaltenen Vierecke isomorph zu Translationsvierecken vom Tits Typ sind, welche eingehend von M. JOSWIG untersucht wurden. Danach beschäftigen wir uns mit der Frage, wie sich

der Begriff der Antiregularität so verallgemeinern läßt, daß die Ableitung solcher Vierecke Laguererräume beliebigen Ranges liefern. Dies führt zum Begriff der  $k$ -Antiregularität,  $k \geq 3$ . Dabei zeigt sich, daß die 3-Antiregularität genau der Antiregularität entspricht und die Ableitungen  $k$ -antiregulärer Vierecke an jedem Punkt Laguererräume vom Rang  $k$  bilden, diese Vierecke lassen sich also als Liegeometrien geeigneter Laguererräume beschreiben. Im topologischen Fall, d.h. wenn das Viereck kompakt und zusammenhängend ist, sind die so erhaltenen Laguererräume ebenfalls lokalkompakt und zusammenhängend. Eine allgemeine Aussage allerdings wie bei A. SCHROTH, d.h. aus bestimmten topologischen Parametern des Vierecks schon auf die  $k$ -Antiregularität schließen zu können, läßt sich nicht erwarten. Es zeigt sich, daß kompakte zusammenhängende  $k$ -antireguläre Vierecke für  $k > 3$  stets isomorph zu einem symmetrischen Viereck und damit klassisch sind. Am Schluß dieser Arbeit diskutieren wir deshalb noch den Begriff des  $k$ -antiregulären Punktes eines Vierecks.

Im Einzelnen gehen wir wie folgt vor:

Im ersten Paragraphen führen wir die wichtigsten Begriffe und Notationen ein, die wir in den folgenden Abschnitten benötigen. Einige topologische Konstruktionen werden angegeben, und der in den folgenden Beweisen immer wieder zitierte Gebietsinvariansatz wird formuliert.

Der erste Teil des zweiten Paragraphen dient im wesentlichen dazu, die in der Literatur auf den ersten Blick unterschiedlichen Definitionen topologischer projektiver Räume zusammenzuführen und einige Aussagen über die Topologien der für uns interessanten Räume zu zeigen. Im zweiten Teil dieses Paragraphen untersuchen wir, basierend auf dem Artikel *Topologische Ovale* von T. BUCHANAN, H. HÄHL und R. LÖWEN [BHL80], abgeschlossene Ovoide und zeigen einige in diesem Artikel für abgeschlossene Ovale bewiesene Aussagen auch für abgeschlossene Ovoide, die wir im dritten Paragraphen einerseits für die Existenz topologischer Laguererräume benötigen, andererseits, um die topologischen Parameter lokalkompakter zusammenhängender Laguererräume einzuschränken.

Mir ist bisher nicht bekannt, daß eine Definition topologischer Laguererräume in der Literatur existiert. Der dritte Paragraph wird sich aus diesem Grund hauptsächlich mit diesem Begriff beschäftigen. Im ersten Teil definieren und motivieren wir Laguererräume, besprechen einige Beispiele und geben einen kurzen Einblick in die Arbeiten von B. KOPP und H. MÄURER. Abschnitt 3.3 dient der Definition topologischer Laguererräume, wobei wir zunächst topologische Laguerreebenen einführen und einen Überblick der Arbeiten von H. GROH geben. Im letzten Teil schließlich zeigen wir, daß sich lokalkompakte zusammenhängende Laguererräume mit einem Rang größer gleich vier als ovoidale Laguererräume in kompakten zusammenhängenden projektiven Räumen über abgeschlossenen Ovoiden beschreiben lassen.

Im vierten Paragraphen stellen wir topologische Vierecke vor und beschreiben im Abschnitt 4.2 die enge Verwandtschaft zwischen Laguerreebenen und kompakten zusammenhängenden Vierecken mit Parametern  $(1, 1)$  bzw.  $(2, 2)$ . All diese Ergebnisse gehen auf Arbeiten von A. SCHROTH zurück. Abschnitt 4.3 gibt einen kurzen Überblick der Ergebnisse über Translationsvierecke von M. JOSWIG, die wir unter anderem im siebten Paragraphen benötigen.

Dank der Resultate aus dem zweiten und dritten Paragraphen sind wir im fünften Paragraphen in der Lage, zeigen zu können, daß die Liegeometrie eines Laguerrraums, der die Bedingung (DO) erfüllt (siehe Definition 3.6), bereits ein verallgemeinertes Viereck bildet, wobei wir dies im ersten Teil, ohne topologische Zusatzvoraussetzungen an den Laguerrraum zu stellen, rein inzidenzgeometrisch nachweisen. Wir zeigen außerdem, daß die so erhaltenen Vierecke bereits Vierecke vom Tits Typ sind. Im zweiten Abschnitt schließlich untersuchen wir die Liegeometrie lokalkompakter zusammenhängender Laguerrräume und zeigen, basierend auf einer Arbeit von A. SCHROTH, daß sich die Topologien so erweitern lassen, daß wir kompakte zusammenhängende Vierecke erhalten. Damit ist eine der oben angekündigten Erweiterungen abgeschlossen.

Im sechsten Paragraphen behandeln wir die zweite Verallgemeinerung. Wir stellen uns die Frage, welche Bedingung ein verallgemeinertes Viereck erfüllen muß, damit die Ableitung an jedem Punkt einen Laguerrraum vom Rang  $k$  bildet. Dies führt zum Begriff der  $k$ -Antiregularität, der im ersten Teil dieses Paragraphen motiviert wird. Der Abschnitt 6.2 beschäftigt sich mit dem Beweis des Hauptsatzes, wir zeigen, daß die Ableitungen eines  $k$ -antiregulären Vierecks tatsächlich an jedem Punkt Laguerrräume vom Rang  $k$  liefern. Unsere Frage wird also positiv beantwortet.

Im ersten Teil des letzten Paragraphen wenden wir uns wieder kompakten zusammenhängenden Vierecken zu. Ist solch ein Viereck  $k$ -antiregulär, so stellt sich heraus, daß die Ableitung an jedem Punkt einen lokalkompakten zusammenhängenden Laguerrraum bildet, dessen Liegeometrie zum vorgegebenen Viereck isomorph ist. Solche Vierecke sind also kompakte zusammenhängende Vierecke vom Tits Typ. Es zeigt sich weiter, anders als im ebenen Fall, daß  $k$ -antireguläre Vierecke bereits klassisch, d.h. isomorph zu einem geeigneten symmetrischen Viereck sind. Im zweiten Abschnitt diskutieren wir die Frage, an welchen topologischen Parametern wir sehen können, wann ein kompaktes zusammenhängendes Viereck als Liegeometrie eines geeigneten Laguerrraums dargestellt werden kann. Eine so allgemeine Aussage, wie im ebenen Fall aber von A. SCHROTH gezeigt werden konnte, daß jedes kompakte zusammenhängende Viereck mit Parametern  $(1, 1)$  bzw.  $(2, 2)$ , bis auf Dualität, schon antiregulär ist, läßt sich hier nicht zeigen. Naiv würde man versuchen dieses Resultat in etwa folgende Aussage umzuformulieren: Jedes kompakte zusammenhängende Viereck mit Parametern  $(1, n)$  ist bereits  $(n + 2)$ -antiregulär. Da diese Vierecke aber, wie im Abschnitt 7.1 gezeigt wird, immer klassisch sind und es viele nichtklassische Beispiele für Vierecke mit Parametern  $(1, n)$  gibt, stel-

len wir uns die Frage, wann Vierecke mit diesen Parametern  $(n + 2)$ -antireguläre Punkte besitzen.

An dieser Stelle möchte ich mich bei den Herren Professoren D. Betten und A. Schroth für die Betreuung, die vielen Anregungen und die ständige Diskussionsbereitschaft bedanken, die diese Arbeit erst möglich gemacht haben. Weiterhin danke ich Herrn Priv.-Doz. H. Klein für viele nützliche Tips und Herrn Prof. A. Srivastav für die Förderung.

Danke auch an Hendrike und Yamez für die Unterstützung in den letzten Wochen. Das Graduiertenkolleg Effiziente Algorithmen und Mehrskalmethoden förderte diese Arbeit durch ein Stipendium.



# 1. Begriffe und Notationen

In diesem Paragraphen führen wir die Begriffe und Definitionen ein, mit denen wir im folgenden arbeiten werden.

## 1.1 Geometrie

Zunächst fassen wir die inzidenzgeometrischen Begriffe zusammen. Eine **Inzidenzstruktur**  $\mathcal{G} = (P, \mathcal{B}, \mathbf{I})$  besteht aus einer nichtleeren Menge  $P$  von Punkten, einer nichtleeren Menge  $\mathcal{B}$  von Blöcken und einer Relation  $\mathbf{I} \subseteq P \times \mathcal{B}$ , der sogenannten **Inzidenz**. Die Elemente von  $\mathcal{B}$  heißen auch Geraden oder Kreise, je nachdem, welche Inzidenzstruktur wir betrachten. Für  $(p, b) \in \mathbf{I}$  sagen wir auch „ $p$  inzidiert mit  $b$ “, „ $p$  liegt auf  $b$ “, oder „ $b$  geht durch  $p$ “. Zwei Punkte  $p, q \in P$ , für die es einen Block  $b \in \mathcal{B}$  so gibt, daß  $p \mathbf{I} b \mathbf{I} q$ , heißen auch verbindbar, und  $b$  Verbindungsblock. Weiter heißt für jedes  $p \in P$  die Menge  $\mathcal{B}_p := \{b \in \mathcal{B}; (p, b) \in \mathbf{I}\}$  das **Geradenbüschel** von  $p$ , und  $\underline{b} := \{p \in P; (p, b) \in \mathbf{I}\}$  die **Punktreihe** von  $b$ . Mit  $\mathcal{F} := \{(p, b) \in P \times \mathcal{B}; p \mathbf{I} b\}$  bezeichnen wir den **Fahnenraum**.

Eine Inzidenzstruktur  $\mathcal{G}' = (P', \mathcal{B}', \mathbf{I}')$  heißt **Untergeometrie** von  $\mathcal{G} = (P, \mathcal{B}, \mathbf{I})$ , wenn  $P' \subseteq P$ ,  $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$  und  $\mathbf{I}' = \mathbf{I} \cap (P' \times \mathcal{B}')$ . Erfüllt die Inzidenzstruktur  $\mathcal{G} = (P, \mathcal{B}, \mathbf{I})$  gewisse Axiome (wie zum Beispiel die der affinen Ebenen), so bezeichnen wir mit Untergeometrie nur solche Inzidenzstrukturen, die die gleichen Axiome erfüllen.

$\mathcal{G} = (P, \mathcal{B}, \mathbf{I})$  heißt **endlich**, wenn  $P$  und  $\mathcal{B}$  endliche Mengen sind.

Zwei Inzidenzstrukturen  $\mathcal{G} = (P, \mathcal{B}, \mathbf{I})$  und  $\mathcal{G}' = (P', \mathcal{B}', \mathbf{I}')$  heißen **isomorph** (in Zeichen  $\mathcal{G} \cong \mathcal{G}'$ ), wenn es bijektive Abbildungen  $\alpha: P \rightarrow P'$  und  $\beta: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$  so gibt, daß für alle  $(p, b) \in P \times \mathcal{B}$  genau dann  $p$  mit  $b$  inzidiert, wenn dies auch für  $\alpha(p)$  und  $\beta(b)$  gilt. Das Paar  $(\alpha, \beta)$  heißt dann **Isomorphismus**.

Da in den von uns betrachteten Inzidenzstrukturen die Blöcke eindeutig durch ihre Punktreihen beschrieben werden, betrachten wir anstelle von  $\mathcal{G} = (P, \mathcal{B}, \mathbf{I})$  die zu  $\mathcal{G}$  isomorphe Struktur  $(P, \underline{\mathcal{B}} := \{\underline{b}; b \in \mathcal{B}\}, \in)$  und schreiben kurz  $(P, \underline{\mathcal{B}})$  anstelle von  $\mathcal{G}$ . Ein Isomorphismus  $(\alpha, \beta)$  zwischen zwei Inzidenzstrukturen  $(P, \underline{\mathcal{B}})$  und  $(P', \underline{\mathcal{B}'})$  wird dann schon eindeutig durch  $\alpha: P \rightarrow P'$  beschrieben ( $\beta(b) = \{\alpha(p); p \in b\}$  für einen Block  $b \in \underline{\mathcal{B}}$ ).

## 1.2 Topologie

In den von uns betrachteten topologischen Inzidenzstrukturen treten die folgenden topologischen Konstruktionen immer wieder auf, die wir deshalb an dieser Stelle einführen. Sei  $M$  ein separierter topologischer Raum. Auf der Menge  $\mathcal{P}_A(M) \subseteq \mathcal{P}(M)$  der abgeschlossenen Teilmengen von  $M$  konstruieren wir zunächst einen Konvergenzbegriff, mit dessen Hilfe wir die sogenannte **Hausdorfftopologie** definieren.

**Definition 1.1.** (Hausdorff-Konvergenz) *Sei  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathcal{P}_A(M)$ . Sei weiter der Limes-Inferior von  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die Menge der Grenzwerte von Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n \in A_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und der Limes-Superior die Menge aller Häufungspunkte von Folgen  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $b_n \in A_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Wir sagen,  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiere gegen  $A \in \mathcal{P}_A(M)$ , wenn  $A = \liminf_{n \in \mathbb{N}} A_n = \limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ .*

Eine Teilmenge  $\mathcal{A}$  von  $\mathcal{P}_A(M)$  heißt abgeschlossen, wenn sie bezüglich der Hausdorffkonvergenz folgenabgeschlossen ist. Umgekehrt heißt eine Teilmenge  $\mathcal{O}$  von  $\mathcal{P}_A(M)$  offen, wenn ihr Komplement in  $\mathcal{P}_A(M)$  abgeschlossen ist. Die Menge aller offenen Teilmengen von  $\mathcal{P}_A(M)$  bildet dann eine Topologie auf  $\mathcal{P}_A(M)$ .

Ist  $(M, d)$  ein kompakter metrischer Raum, so liefert uns

$$d_H: \mathcal{P}_A(M) \times \mathcal{P}_A(M) \longrightarrow \mathbb{R}, (A, B) \mapsto \max\left\{\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A)\right\}$$

eine Metrik auf  $\mathcal{P}_A(M)$ , die die Hausdorfftopologie induziert (siehe Nadler [Nad78], Chapter 0). Die Abbildung  $d_H$  bezeichnen wir auch als **Hausdorffmetrik**.

Eine weitere, im folgenden häufig benutzte topologische Konstruktion ist die **Identifikation**. Ist  $M$  ein topologischer Raum und  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $M$ , so bezeichnen wir mit  $[x] := \{y \in M; x \sim y\}$  die Äquivalenzklasse von  $x$  bezüglich der Relation  $\sim$  und mit  $M_\sim := \{[x]; x \in M\}$  die Menge der Äquivalenzklassen, den sogenannten **Quotientenraum**. Auf  $M_\sim$  können wir in natürlicher Weise eine Topologie definieren, die sogenannte **Quotiententopologie**. Eine Teilmenge  $U$  von  $M_\sim$  ist offen, wenn das Urbild von  $U$  unter der Abbildung

$$\pi: M \longrightarrow M_\sim; x \mapsto [x]$$

offen in  $M$  ist. Die Quotiententopologie ist somit die schwächste Topologie auf  $M_\sim$ , so daß die Abbildung  $\pi$  stetig ist.

Ein Spezialfall dieser Konstruktion ist das (zweifache) **symmetrische Produkt**: Für jede Menge  $M$  bildet die Relation

$$(x, y) \sim (x', y') : \iff \{x, y\} = \{x', y'\}$$

eine Äquivalenzrelation auf  $M \times M$ . Den Quotientenraum bezüglich dieser Relation bezeichnen wir als symmetrisches Produkt  $M \star M := (M \times M)_\sim$ . Ist  $M$  ein

topologischer Raum, so sei auf  $M \star M$  die **Quotiententopologie** gegeben, also diejenige schwächste Topologie, so daß die Abbildung

$$\pi: M \times M \longrightarrow M \star M, (x, y) \mapsto \{x, y\}$$

stetig ist. Ist  $M$  zusätzlich hausdorffsch, so gibt es für alle  $x, y \in M$  mit  $x \neq y$  disjunkte Umgebungen  $U_x$  von  $x$  und  $U_y$  von  $y$ . Die Einschränkung  $\pi|_{U_x \times U_y}$  ist dann injektiv, also ein Homöomorphismus, und damit  $(M \star M) \setminus \Delta$  mit  $\Delta := \{\{x, x\}; x \in M\}$  lokal homöomorph zum Produkt  $M \times M$ .

Zum Abschluß dieses Abschnittes zitieren wir noch den Brouwerschen Gebietsinvarianzsatz. Für einen Beweis siehe zum Beispiel HUREWICZ und WALLMAN [HW48], S.48 und S. 95 ff.

**Satz 1.2.** *Sind  $M$  und  $N$  Mannigfaltigkeiten gleicher (endlicher) Dimension und  $f: M \longrightarrow N$  eine stetige injektive Abbildung, so ist  $f(M)$  offen in  $N$  und  $f$  induziert einen Homöomorphismus von  $M$  auf  $f(M)$ .*



## 2. Lineare Räume

Wir fassen zunächst die wichtigsten Begriffe der affinen und projektiven Räume zusammen, wobei wir den ebenen Fall einschließen. Für den räumlichen Fall sei auf SCHRÖDER [Schr91] und SÖRENSEN [Sö76], und auf PICKERT [Pick75] und SALZMANN, BETTEN, GRUNDHÖFER, HÄHL, LÖWEN und STROPPEL [SBGHLS95] für den ebenen Fall verwiesen.

**Definition 2.1.** (Linearer Raum) *Eine Inzidenzstruktur  $\mathcal{P} = (P, \mathcal{L})$  heißt linearer Raum, wenn es für je zwei verschiedene Punkte  $p, q \in P$  genau eine Verbindungsgerade  $p, q \in l \in \mathcal{L}$  gibt.*

Die eindeutige Verbindungsgerade zweier verschiedener Punkte  $p, q \in P$  bezeichnen wir dann mit  $p \vee q$ .

Spezielle lineare Räume sind die im nächsten Abschnitt betrachteten affinen und projektiven Räume, bei denen wir uns hauptsächlich für den topologischen Fall interessieren. Zwar kann man auch schon für lineare Räume (oder spezieller für stabile Räume) topologische Strukturen betrachten, die Definitionen und Beweise wären aber für das Ziel der vorliegenden Arbeit viel zu aufwendig. Wir beschränken uns daher auf die folgenden Inzidenzstrukturen und verweisen den interessierten Leser auf den Handbuchartikel “Linear topological geometries” von T. GRUNDHÖFER und R. LÖWEN [GL95].

Am Ende dieses Paragraphen, im Abschnitt Ovale und Ovoide, behandeln wir topologische Ovoide und verallgemeinern einige, in [BHL80] für topologische Ovale gezeigte, Aussagen auf diesen Fall, um die topologischen Parameter der im Paragraphen 3 eingeführten Laguerre-Räume einschränken zu können.

### 2.1 Affine und projektive Räume

**Definition 2.2.** (Projektiver Raum) *Eine Inzidenzstruktur  $\mathcal{P} = (P, \mathcal{L})$  heißt projektiver Raum, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind*

- (i)  $\mathcal{P}$  ist ein linearer Raum;
- (ii) (Veblen-Young-Axiom) *Für alle paarweise verschiedenen Geraden  $l_1, \dots, l_4$  in  $\mathcal{L}$  mit  $l_1 \cap l_2, l_1 \cap l_3, l_1 \cap l_4, l_2 \cap l_3, l_2 \cap l_4 \neq \emptyset$  und  $l_1 \cap l_2 \neq l_1 \cap l_3, l_1 \cap l_2 \neq l_1 \cap l_4$  gilt auch  $l_3 \cap l_4 \neq \emptyset$  (siehe Abbildung 2.1);*

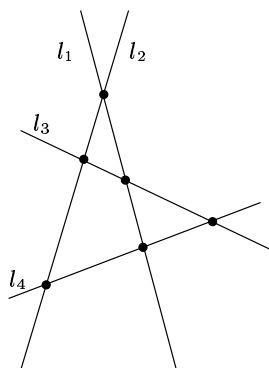


Abb. 2.1. Projektives Veblen-Young-Axiom

(iii) (Reichhaltigkeit) *Auf jeder Gerade liegen mindestens drei Punkte und es gibt mindestens zwei Geraden.*

Eine Teilmenge  $T$  von  $P$  heißt **Teilraum**, wenn jede Gerade, die mit  $T$  mindestens zwei Punkte gemeinsam hat, schon ganz in  $T$  enthalten ist. Wie man leicht sieht, ist dann

$$\mathcal{P}_T := (T, \mathcal{L}_T := \{l \in \mathcal{L}; l \subseteq T\})$$

schon selbst ein projektiver Raum, wenn  $T$  mindestens zwei Geraden enthält, das sogenannte **Residuum** von  $T$ .

Die **Hülle**  $\bar{A}$  oder  $\langle A \rangle$  einer Teilmenge  $A$  von  $P$  sei der kleinste Teilraum, der  $A$  enthält. Die Hülle von drei nicht auf einer Geraden liegenden Punkte heißt auch Ebene (der von diesen Punkten aufgespannte Teilraum ist dann eine projektive Ebene). Eine **Basis**  $S$  eines Teilraumes  $T$  von  $\mathcal{P}$  ist eine Teilmenge von  $T$  so, daß  $\bar{S} = T$  und für alle  $S' \subsetneq S$  der Abschluß  $\bar{S}' \neq T$ . Ist  $S$  endlich, so heißt  $|S| = \text{rang } T$  der **Rang** von  $T$ , andernfalls setzen wir  $\text{rang } T = \infty$ . Ist  $\mathcal{P} = (P, \mathcal{L})$  ein projektiver Raum vom Rang  $n$ , so bezeichnen wir mit  $\mathcal{T}_i$  die Menge aller Teilräume vom Rang  $i < n$ . Somit ist  $\mathcal{T}_1 = P$ ,  $\mathcal{T}_2 = \mathcal{L}$  und  $\mathcal{E} := \mathcal{T}_3$  die Menge der Unterebenen. Die Elemente von  $\mathcal{H} := \mathcal{T}_{n-1}$  heißen auch **Hyperebenen** und die Elemente aus  $\mathcal{C} := \mathcal{T}_{n-2}$  **Cogeraden**. Die Gesamtheit aller Teilräume bezeichnen wir mit  $\mathcal{T}$ .

Das Reichhaltigkeitsaxiom der Definition besagt, daß wir projektive Räume vom Rang größer gleich drei betrachten.

**BEMERKUNG:** Der Begriff des Ranges ist in der letzten Zeit etwas unüblich geworden. Meist wird heute anstelle von Rang die Dimension eines Teilraums definiert (die Dimension eines Teilraums  $T$  ist dann gerade  $\text{rang } T - 1$ ), da wir aber in der vorliegenden Arbeit den Dimensionsbegriff für topologischer Räume benötigen, verwenden wir hier, um Verwechslungen auszuschließen, den Rang.

Eine Teilmenge  $P'$  von  $P$  heißt **unabhängig**, wenn  $\overline{P' \setminus \{p\}} \subsetneq \overline{P'}$  für alle  $p \in P'$ . Dual dazu heißt eine Teilmenge  $\mathcal{H}'$  von  $\mathcal{H}$  unabhängig, wenn

$$\bigcap_{H \in (\mathcal{H}' \setminus \{M\})} H \supsetneq \bigcap_{H \in \mathcal{H}'} H$$

für alle  $M \in \mathcal{H}'$ . Die Menge aller unabhängigen Teilmengen  $P'$  von  $P$  mit  $|P'| = i$  bezeichnen wir als  $P^{(i)}$  und die Menge aller unabhängigen Teilmengen  $\mathcal{H}'$  von  $\mathcal{H}$  mit  $|\mathcal{H}'| = i$  als  $\mathcal{H}^{(i)}$ .

Wie man leicht sieht, sind projektive Räume selbstdual, d.h. mit  $\mathcal{P} = (P, \mathcal{L})$  ist auch der sogenannte **duale Raum**  $\mathcal{P}^* := (\mathcal{H}, \mathcal{C})$  ein projektiver Raum. Weiter definieren wir für jeden Punkt  $z \in P$  eines projektiven Raums  $\mathcal{P} = (P, \mathcal{L})$  vom Rang  $n \geq 4$  den projektiven Unterraum

$$\mathcal{P}_z := (\mathcal{L}_z, \{E \in \mathcal{E}; z \in E\}, \subseteq).$$

**Beispiel 2.3.** (Klassischer Projektiver Raum) Sei  $K$  ein (nicht notwendigerweise kommutativer) Körper. Fassen wir  $K^n$  als Rechtsvektorraum über  $K$  auf, so bezeichne  $\mathbf{PG}(K^n)$  die Menge aller 1-dimensionalen Unterräume von  $K^n$  und  $\mathcal{L}$  die Menge aller 2-dimensionalen Unterräume. Mit diesen Notationen ist  $\mathcal{P} = (\mathbf{PG}(K^n), \mathcal{L}, \subseteq)$  ein projektiver Raum vom Rang  $n$ .

Sind Verwechslungen ausgeschlossen, so bezeichnen wir mit  $\mathbf{PG}(K^n)$  nicht nur den Punktraum, sondern den projektiven Raum selbst.

Bekanntermaßen ist ein projektiver Raum vom Rang  $n \geq 4$  **desarguessch** (siehe Definition 2.4) und damit isomorph zum Unterraumverband  $\mathbf{PG}(K^n)$  über einem Körper  $K$ , vergleiche [Schr91], Satz 6.33. Dagegen gibt es im Fall  $n = 3$  viele nichtklassische Beispiele, wie wir in den folgenden Abschnitten sehen werden.

**Definition 2.4.** Die Desargueskonfiguration ist eine Inzidenzstruktur

$$\mathcal{D} = \left( \binom{\Omega}{2}, \binom{\Omega}{3}, \subseteq \right)$$

mit  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  und  $\binom{\Omega}{i} := \{X \subseteq \Omega; |\Omega| = i\}$ .

Ein projektiver Raum heißt *desarguessch*, wenn die Desargueskonfiguration abgeschlossen ist, d.h. wenn für je zehn Punkte und je zehn Geraden 29 der 30 Inzidenzen der Desargueskonfiguration gelten, dann auch für die letzte.

Ist der Rang eines projektiven Raumes drei, so handelt es sich, wie man sofort sieht, um eine **projektive Ebene** im Sinne der folgenden Definition.

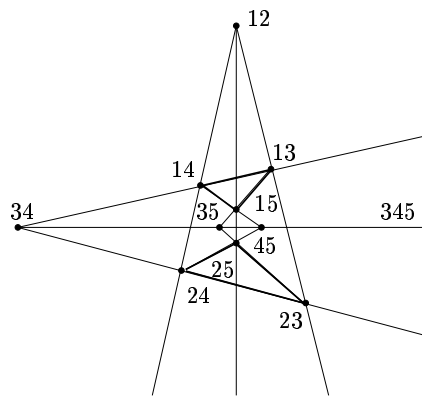


Abb. 2.2. Desargueskonfiguration

**Definition 2.5.** (Projektive Ebene) Eine Inzidenzstruktur  $\mathcal{P} = (P, \mathcal{L})$  heißt *projektive Ebene*, wenn gilt

- (i)  $\mathcal{P}$  ist ein linearer Raum;
- (ii) Für alle  $l, g \in \mathcal{L}$  gilt  $l \cap g \neq \emptyset$ ;
- (iii) Auf jeder Gerade liegen mindestens drei Punkte und es gibt mindestens zwei Geraden.

Entfernt man aus einem projektiven Raum vom Rang  $n$  eine Hyperebene  $H$  (einen Teilraum vom Rang  $n - 1$ ), so bildet  $\mathcal{P}^H := \mathcal{A} = (P \setminus T, \mathcal{L} \setminus \{l \in \mathcal{L}; l \subseteq H\})$  einen **affinen Raum**.

**Definition 2.6.** (Affiner Raum) Eine Inzidenzstruktur  $\mathcal{A} = (A, \mathcal{L})$  mit einer Äquivalenzrelation  $\parallel$  (genannt *Parallelität von Geraden*) auf  $\mathcal{L}$  heißt *affiner Raum*, wenn gilt

- (i)  $\mathcal{A}$  ist ein linearer Raum;
- (ii) Für alle  $(p, l) \in P \times \mathcal{L}$  existiert genau eine Gerade  $g \in \mathcal{L}_p$  mit  $g \parallel l$ ;
- (iii) (Veblen-Young-Axiom) Für je vier paarweise verschiedene Punkte  $a, b, c, d$  in  $P$  derart, daß die Geraden  $l_1 = a \vee b$  und  $l_2 = c \vee d$  parallel sind, oder sich schneiden, liegen auch die Geraden  $l_3 = a \vee c$  und  $l_4 = b \vee d$  parallel, oder schneiden sich (siehe Abbildung 2.3).
- (iv) (Reichhaltigkeit) Auf jeder Gerade liegen mindestens vier Punkte und es gibt mindestens zwei Geraden.

Bedingung (iii) wird auch *affines Veblen-Young-Axiom* genannt. Es garantiert, wie auch bei der Definition von projektiven Räumen, die Existenz (affiner) Unterebenen.



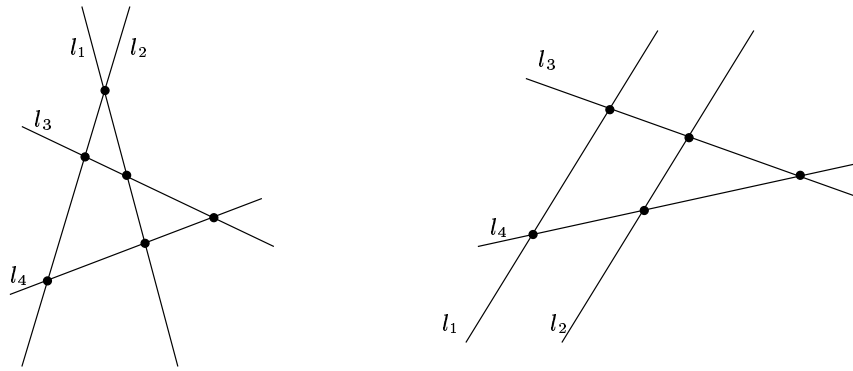


Abb. 2.3. Affines Veblen-Young-Axiom

Die Bezeichnungen Hülle, Basis, Rang, Unterraum usw. definieren wir wie für projektive Räume. Ist der Rang drei, so spricht man auch von **affinen Ebenen**. Für eine Gerade  $l \in \mathcal{L}$  eines affinen Raumes  $\mathcal{A} = (A, \mathcal{L})$  heißt  $[l] := \{g \in \mathcal{L}; g \parallel l\}$  die Parallelklasse von  $l$  oder auch **Fernpunkt** auf  $l$ , und  $T_\infty := \{[l]; l \in \mathcal{L}\}$  **Fernhyperebene** (bzw. im ebenen Fall **Ferngerade**). Durch Hinzunahme dieser Fernhyperebene wird  $\mathcal{A}$  zu einem projektiven Raum, dem sogenannten **projektiven Abschluß**  $\overline{\mathcal{A}}$  (vergleiche [Schr91]).

**Satz 2.7.** Sei  $\mathcal{A} = (A, \mathcal{L})$  ein affiner Raum. Dann ist mit

$$\overline{\mathcal{A}} = A \cup \{[l]; l \in \mathcal{L}\} \quad \text{und} \quad \overline{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \cup \{[l]; l \subseteq T_3\}; T_3 \in \mathcal{T}_3\}$$

$\overline{\mathcal{A}} = (\overline{A}, \overline{\mathcal{L}}, \in)$  ein projektiver Raum, der sogenannte projektive Abschluß von  $\mathcal{A}$ .

Für einen Teilraum  $T$  von  $\mathcal{A}$  sei  $\overline{T}$  der zugehörige Teilraum im projektiven Abschluß, d.h.  $\overline{T} = T \cup \{[l]; l \in \mathcal{L}, l \subseteq T\}$ .

## 2.2 Topologische affine und projektive Räume

**Topologische affine und projektive Ebenen.** Bevor wir zur Definition topologischer affiner und projektiver Räume kommen, führen wir, um eine bessere Vorstellung zu bekommen, den Begriff der topologischen affinen und projektiven Ebene (im folgenden kurz Ebene) ein, obwohl diese im obigen Fall mit eingeschlossen werden.

Eine Ebene  $\mathcal{P} = (P, \mathcal{L})$  heißt **topologisch**, wenn  $P$  und  $\mathcal{L}$  nichttriviale\* Topologien so tragen, daß die geometrischen Operationen des Verbindens zweier verschiedener Punkte, und des Schneidens zweier verschiedener Geraden stetig sind (vergleiche [SBGHLS95], Kapitel 4). Bei affinen Ebenen fordert man zusätzlich die Stetigkeit

\* Nichttrivial bedeutet hier weder diskret noch indiskret

des Parallelziehens, also derjenigen Abbildung, die jedem Paar  $(p, l) \in P \times \mathcal{L}$  die eindeutige zu  $l$  parallele Gerade durch  $p$  zuordnet (siehe [SBGHLS95], Definition 41.3).  $P$  und  $\mathcal{L}$  sind dann schon reguläre Räume (siehe [SBGHLS95], 41.1), und es gilt: Punktraum, Geradenraum, jede Gerade und jedes Geradenbüschel sind entweder alle zusammenhängend, oder total unzusammenhängend.

Um schöne topologische Resultate zu erhalten, stellt man gewisse Forderungen an die Topologie des Punktraumes. Im folgenden betrachten wir nur solche Ebenen, in denen  $P$  lokalkompakt ist. Nach [SBGHLS95], 41.7 sind dann auch die Räume  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{F}$ , jede Gerade und jedes Geradenbüschel lokalkompakt. Ist eine projektive Ebene zusätzlich zusammenhängend, so ist  $P$  (und damit auch jeder der oben betrachteten Räume) schon kompakt, und die topologische Dimension von  $P$  positiv mit  $\dim P = \dim \mathcal{L} \in \{2, 4, 8, 16, \infty\}$  (siehe [SBGHLS95], 54.11).

Da für topologische projektive Ebenen  $\mathcal{P}^l$  für jede Gerade  $l \in \mathcal{L}$  eine topologische affine Ebene ist und umgekehrt jede lokalkompakte zusammenhängende affine Ebene eindeutig zu einer kompakten zusammenhängenden projektiven Ebene erweitert werden kann ([SBGHLS95], 43.7), beschränkt man sich bei der Untersuchung topologischer Ebenen auf den projektiven Fall. (Ohne topologische Voraussetzungen an die affinen Ebenen ist dies aber im allgemeinen falsch. EISELE konstruierte topologische affine Ebenen, die nicht zu topologischen projektiven Ebenen erweitert werden können [Eis90], [Eis91] und [Eis93].)

Ist die Dimension durch vier beschränkt, so kennen wir, wie der nächste Satz zeigt, die Topologien auf  $\mathcal{P}$  ganz genau. Für einen Beweis siehe SALZMANN [Sal69], Satz 1.1.

**Satz 2.8.** *Ist die Dimension einer lokalkompakten zusammenhängenden projektiven Ebene höchstens vier, so sind Punkt-, Geradenraum, jede Gerade und jedes Geradenbüschel homöomorph zu denen der klassischen Ebene über  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ .*

Mit anderen Worten, ist  $2n = \dim P \in \{2, 4\}$ , so sind Geraden und Geradenbüschel homöomorph zur  $n$ -Sphäre  $\mathbb{S}_n$  und Punkt- und Geradenraum homöomorph zu  $\mathbf{PG}(\mathbb{K}^3)$ .

Wie wir bereits gesehen haben, ist  $\mathcal{P}$  insbesondere ein projektiver Raum, in dem die Geraden Hyperebenen sind. Schreibt man die Definition einer topologischen projektiven Ebene mit diesen Bezeichnungen auf, so erhält man:

(i) die Hüllenbildung zweier Punkte ist stetig, d.h.

$$\vee: P^{(2)} \longrightarrow \mathcal{H}; (p_1, p_2) \mapsto \langle \{p_1, p_2\} \rangle$$

ist eine stetige Abbildung, und

(ii) die Schnittbildung zweier Hyperebenen ist stetig, d.h.

$$\wedge: \mathcal{H}^{(2)} \longrightarrow P; (H_1, H_2) \mapsto H_1 \cap H_2$$

ist eine stetige Abbildung.

**Topologische projektive Räume.** Es gibt eine Reihe von (auf den ersten Blick unterschiedlichen) Definitionen topologischer projektiver Räume, siehe zum Beispiel LENZ [Lenz65], MISFELD [Mis68], SÖRENSEN [Sö69] und GROH [Groh86]. Allen gemeinsam ist der Beweis des Darstellungssatzes, der zeigt, daß die desarguesschen topologischen projektiven Räume endlichen Ranges genau die projektiven Räume über topologischen Körpern sind. Wir benutzen im folgenden die Definition von SÖRENSEN aus [Sö69], Ergebnisse aus [Mis68] und [LK92], die die Definition von MISFELD für ihre Arbeit zugrundelegten und zeigen, daß die Definitionen von SÖRENSEN und MISFELD äquivalent sind.

**Definition 2.9.** (Topologischer projektiver Raum) *Sei  $\mathcal{P} = (P, \mathcal{L})$  ein projektiver Raum von endlichem Rang  $n \geq 3$  derart, daß  $P$  und  $\mathcal{H}$  nichttriviale Topologien tragen.  $\mathcal{P}$  heißt topologisch, wenn die folgenden Abbildungen stetig sind:*

(i) *Hüllenbildung von  $n - 1$  unabhängigen Punkten*

$$\vee^{(n-1)}: P^{(n-1)} \longrightarrow \mathcal{H}; (p_1, \dots, p_{n-1}) \mapsto \langle \{p_1, \dots, p_{n-1}\} \rangle,$$

(ii) *Schnittbildung von  $n - 1$  unabhängigen Hyperebenen*

$$\wedge^{(n-1)}: \mathcal{H}^{(n-1)} \longrightarrow P; (H_1, \dots, H_{n-1}) \mapsto \bigcap_{i=1}^{n-1} H_i$$

Insbesondere ist also jede topologische projektive Ebene auch ein topologischer projektiver Raum.

Im folgenden betrachten wir projektive Räume vom Rang  $n \geq 4$ , diese sind insbesondere desarguessch und damit isomorph zum Unterraumverband  $\mathbf{PG}(K^n)$  eines  $n$ -dimensionalen Vektorraums  $V = K^n$  über einem Körper  $K$ . Ist dieser Körper topologisch, so ist der daraus konstruierte projektive Raum ebenfalls topologisch ([Sö69], Satz 1.2), wobei die Topologien auf  $P^{(n-1)}$  und  $\mathcal{H}^{(n-1)}$  homöomorph zur Quotiententopologie bezüglich der kanonischen Abbildung

$$\phi: (K^n)^* \longrightarrow (K^n)^*/K^*; x \mapsto K^* x$$

(( $(K^n)^* = K^n \setminus \{0\}$  und  $K^* = K \setminus \{0\}$ ) sind. Umgekehrt konnte SÖRENSEN zeigen, daß jeder topologische projektive Raum isomorph zu einem projektiven Raum über einen topologischen Körper ist ([Sö69], Satz 2.12).

Auf den ersten Blick scheint die Definition topologischer projektiver Räume von MISFELD stärker zu sein. MISFELD fordert in [Mis68] nicht die Stetigkeit der Hüllenbildung von Punkten und der Schnittbildung von Hyperebenen, sondern der Hüllenbildung von Punkt- und Teilraum

$${}_1\vee_j^{j+1}: (P \times \mathcal{T}_j) \setminus \{(p, T) \in P \times \mathcal{T}_j; p \in T\} \longrightarrow \mathcal{T}_{j+1}; (p, T) \mapsto \langle \{p, T\} \rangle$$

und dual dazu die Schnittbildung von Hyperebene und Teilraum

$${}^j\wedge_{j-1}^{n-1}: (\mathcal{H} \times \mathcal{T}_j) \setminus \{(H, T) \in \mathcal{H} \times \mathcal{T}_j; T \in H\} \longrightarrow \mathcal{T}_{j-1}; (H, T) \mapsto H \cap T$$

für alle  $j \leq n-1$  (vergleiche auch [LK92]). Mit  $\vee$  bzw.  $\wedge$  bezeichnen wir dann die Vereinigung der Abbildungen  ${}_1\vee_j^{j+1}$  bzw.  ${}^j\wedge_{j-1}^{n-1}$ .

Wie auch bei SÖRENSEN ist dann der Koordinatenkörper bezüglich der auf einer affinen Gerade induzierten Topologie ein topologischer Körper  $K$  ([Mis68], 4.8). Konstruiert man aus diesem topologischen Körper einen projektiven Raum  $\mathbf{PG}(K^n)$  gleichen Ranges, so erhält man wieder einen topologischen projektiven Raum (im Sinne der Definition von MISFELD), der zu dem gegebenen projektiven Raum sowohl topologisch als auch geometrisch isomorph ist (siehe [Mis68], Darstellungssatz auf Seite 259, vergleiche auch [LK92], 2.11). Da die von MISFELD konstruierten Topologien auf dem Punkt- und Hyperebenenraum von  $\mathbf{PG}(K^n)$  genau die Topologien sind, die SÖRENSEN benutzt, ist also jeder topologische projektive Raum im Sinne von MISFELD auch topologisch im Sinne von SÖRENSEN.

Sei umgekehrt  $\mathcal{P}$  ein topologischer projektiver Raum endlichen Ranges  $n$  im Sinne von SÖRENSEN. Dann ist der Koordinatenkörper  $K$  ebenfalls topologisch, und der aus  $K$  konstruierte projektive Raum  $\mathbf{PG}(K^n)$  sowohl topologisch im Sinne von MISFELD, als auch im Sinne von SÖRENSEN und isomorph zu  $\mathcal{P}$ . Die beiden Definitionen sind damit äquivalent. Im folgenden können wir also Aussagen aus [Mis68] und [LK92] benutzen.

Zunächst fassen wir einige Aussagen über topologische projektive Räume zusammen, die [Groh86], [LK92] und [Mis68] entnommen sind.

**Lemma 2.10.** *Sei  $\mathcal{P} = (P, \mathcal{L})$  ein topologischer projektiver Raum vom Rang  $n \geq 3$ . Dann gilt:*

- (i) *Jeder der Räume  $\mathcal{T}_k$ ,  $k \leq n-1$ , ist hausdorffsch.*
- (ii) *Alle Teilräume von  $\mathcal{P}$  sind abgeschlossen.*
- (iii) *Die Menge der unabhängigen  $k$ -Tupel  $P^{(k)}$ ,  $k \leq n-1$ , ist eine offene Teilmenge von  $P^k$ .*
- (iv) *Für alle  $i \leq j$  ist der Inzidenzgraph  $I_{i,j} := \{(x, y) \in \mathcal{T}_i \times \mathcal{T}_j; x \subseteq y\}$  abgeschlossen in  $\mathcal{T}_i \times \mathcal{T}_j$ .*
- (v) *Die Abbildungen  ${}_1\vee_j^{j+1}$  und  ${}^j\wedge_{j-1}^{n-1}$  sind offen und surjektiv.*

**Beweis:** Die erste, vierte und fünfte Aussage wurde in [LK92], Theorem 1.1 (d), (c) und (a) gezeigt, die zweite in [Mis68], 3.4.

Da nach [Groh86], Theorem 3.3, jeder topologische projektive Raum insbesondere ein topologischer  $(n-1)$ -Raum ist ( $n = \text{rang } \mathcal{P}$ , siehe [Groh86] für eine Definition), folgt die dritte Aussage aus [Groh86], Corollary 4.11.  $\square$

Wie schon bei projektiven Ebenen sind wir daran interessiert, daß  $\mathcal{P}$  lokalkompakt und zusammenhängend ist, d.h. der Punktraum ist lokalkompakt und zusammenhängend. In diesem Fall ist nach [Mis68], Satz 6,  $\mathcal{P}$  ein projektiver Raum über

den Körpern  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  oder  $\mathbb{H}$ , also die für uns interessanten Räume  $\mathcal{T}_k$ ,  $1 \leq k \leq n-1$  zusammenhängend, kompakt und metrisierbar.

**Satz 2.11.** *Jeder zusammenhängende lokalkompakte desarguessche topologische projektive Raum ist ein projektiver Raum über den topologischen Körpern  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  oder  $\mathbb{H}$ .*

Die Hausdorfftopologie spielt in den weiteren Paragraphen eine wichtige Rolle. Wir zeigen deshalb in Lemma 2.13, daß die Räume  $\mathcal{T}_k$ ,  $k \leq n-1$  bereits die durch die Hausdorffmetrik induzierten Topologien tragen. Für den Beweis benötigen wir die Stetigkeit der Hüllenbildung  $k$  unabhängiger Punkte,  $k \leq n-1$ , die wir im folgenden Lemma zeigen (für  $k = n-1$  wird das in der Definition topologischer projektiver Räume gefordert).

**Lemma 2.12.** *Sei  $\mathcal{P} = (P, \mathcal{L})$  ein topologischer projektiver Raum vom Rang  $n \geq 3$ . Dann sind die Abbildungen der Hüllenbildung  $k$  unabhängiger Punkte*

$$\vee^{(k)}: P^{(k)} \longrightarrow \mathcal{T}_k; (p_1, \dots, p_k) \mapsto \langle \{p_1, \dots, p_k\} \rangle,$$

und dual dazu, die Abbildungen der Schnittbildung  $k$  unabhängiger Hyperebenen

$$\wedge^{(k)}: \mathcal{H}^{(k)} \longrightarrow \mathcal{T}_{n-k}; (H_1, \dots, H_k) \mapsto \bigcap_{i=1}^k H_i$$

für alle  $k \leq n-1$  stetig.

**Beweis:** Wir zeigen hier nur die Stetigkeit der ersten Abbildung mit einer einfachen Induktion über  $k$ ,  $2 \leq k \leq n-1$ .

*Induktionsanfang:* Gelte  $k = 2$ . Dann ist  $\vee^{(2)} = {}_1\vee_1^2$ .

*Induktionsschritt:* Gelte die Stetigkeit für  $k-1$ . Da für alle  $(p_1, \dots, p_k) \in P^{(k)}$  gilt  $\vee^{(k)} = {}_1\vee_{k-1}^k (\vee^{(k-1)}(p_1, \dots, p_{k-1}), p_k)$ , folgt die Behauptung  $\square$

**Lemma 2.13.** *Sei  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$  und  $\mathcal{P} = \mathbf{PG}(K^n) = (P, \mathcal{L})$  ein kompakte zusammenhängender projektiver Raum vom Rang  $n$ . Dann tragen die Räume  $\mathcal{T}_k$ ,  $k \leq n-1$  die durch die Hausdorffmetrik bezüglich  $P$  induzierten Topologien.*

**Beweis:** Nach Satz 2.11 sind die Räume  $\mathcal{T}_k$ ,  $1 \leq k \leq n-1$  metrische Räume. Da nach Lemma 2.10 (ii) Teilräume abgeschlossen sind, induziert die Hausdorffmetrik eine Topologie auf den Räumen  $\mathcal{T}_k$ .

Sei jetzt  $k \leq n-1$ . Da  $\mathcal{T}_k$  bezüglich beider Topologien metrisch ist, müssen wir nur zeigen, daß eine Folge in  $\mathcal{T}_k$  genau dann bezüglich der ursprünglichen Topologie konvergiert, wenn sie im Sinne der Hausdorfftopologie konvergent ist.

Sei zunächst  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathcal{T}_k$ , die bezüglich der ursprünglichen Topologie gegen  $T$  konvergiert. Offensichtlich ist  $\liminf_{n \in \mathbb{N}} T_n \subseteq \limsup_{n \in \mathbb{N}} T_n$ , wir müssen also lediglich

$$\limsup_{n \in \mathbb{N}} T_n \subseteq T \subseteq \liminf_{n \in \mathbb{N}} T_n$$

zeigen. Dabei folgt die erste Inklusion aus der Abgeschlossenheit der Inzidenz  $I_{1,k}$  (Lemma 2.10 (iv)), die zweite zeigen wir per Induktion über  $k$ ,  $2 \leq k \leq n-1$ . Sei also  $x \in T$ . Wir müssen eine gegen  $x$  konvergente Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $P$  so finden, daß  $x_i \in T_i$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ .

*Induktionsanfang:* Gelte  $k=2$ , also  $\mathcal{T}_k = \mathcal{L}$ . Sei  $H$  eine Hyperebene durch  $x$  mit  $T \not\subseteq H$ . Nach Lemma 2.10 (ii) ist  $H$  abgeschlossen in  $P$ , und da die Abbildung  ${}_1\mathcal{V}_1^2$  nach Lemma 2.10 (v) offen ist, ist die Menge

$$U_2 := \{l \in \mathcal{L}; l \not\subseteq H\} = {}_1\mathcal{V}_1^2(\{(x, y) \in (P \setminus H) \times P; x \neq y\})$$

offen in  $\mathcal{T}_2$ , also eine Umgebung von  $T$ . Damit existiert  $n_0 \in \mathbb{N}$  so, daß für alle  $n \geq n_0$  gilt  $T_n \not\subseteq H$ , d.h.  $x_n := H \wedge T_n$  existiert für alle  $n \geq n_0$ , und wir erhalten unsere gesuchte Folge.

*Induktionsschritt:* Gelte die Behauptung für  $k-1$ . Sei also jetzt  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathcal{T}_k$ , die gegen  $T \in \mathcal{T}_k$  konvergiert und  $H$  eine Hyperebene durch  $x$  mit  $T \not\subseteq H$ . Da nach Lemma 2.10 (v) die Abbildung  ${}_1\mathcal{V}_{k-1}^k$  offen ist, ist die Menge

$$U_k := \{L \in \mathcal{T}_k; L \not\subseteq H\} = {}_1\mathcal{V}_{k-1}^k(\{(x, L) \in (P \setminus H) \times \mathcal{T}_{k-1}; x \notin L\})$$

offen in  $\mathcal{T}_k$ , also eine Umgebung von  $T$ . Damit existiert  $n_0 \in \mathbb{N}$  so, daß für alle  $n \geq n_0$  gilt  $T_n \not\subseteq H$ , d.h.  $\tilde{T}_n := H \wedge T_n$  für alle  $n \geq n_0$  ist eine Folge in  $\mathcal{T}_{k-1}$ . Nach der Induktionsvoraussetzung existiert dann eine gegen  $x$  konvergente Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $P$  mit  $x_i \in \tilde{T}_i$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ . Da  $\tilde{T}_i \subseteq T_i$  erhalten wir unsere Behauptung.

Sei nun umgekehrt  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathcal{T}_k$ , die in der Hausdorffmetrik gegen  $T$  konvergiert. Seien  $(x_1, \dots, x_k)$  unabhängige Punkte aus  $T$ . Nach der Definition der Hausdorffkonvergenz existieren dann Folgen  $(x_i^1)_{i \in \mathbb{N}}, \dots, (x_i^k)_{i \in \mathbb{N}}$  so, daß  $x_i^m \in T_i$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  und  $(x_i^m)_{i \in \mathbb{N}}$  für alle  $m \leq k$  gegen  $x_m$  konvergiert. Nach Lemma 2.10 (iii) ist die Menge der unabhängigen  $k$ -Tupel  $P^{(k)}$  offen in  $P^k$ , und damit insbesondere eine Umgebung von  $(x_1, \dots, x_k)$  in  $P^k$ . Also existiert  $n_0 \in \mathbb{N}$  so, daß  $(x_n^1, \dots, x_n^k) \in P^{(k)}$  für alle  $n \geq n_0$ . Nach dem obigen Lemma ist die Abbildung  $\mathcal{V}^{(k)}$  stetig und es folgt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} T_i = \lim_{i \rightarrow \infty} \langle (x_i^1, \dots, x_i^k) \rangle = \langle (x_1, \dots, x_k) \rangle = T.$$

□

**Topologische affine Räume.** Wir wollen nun topologische affine Räume definieren. Es gibt verschiedene Definitionen (siehe zum Beispiel ZANELLA [Za89], FICK [Fi76]), für unsere Zwecke ist der Weg von SÖRENSEN [Sö76] der geeignetste.

**Definition 2.14.** (Topologischer affiner Raum) *Ein affiner Raum  $\mathcal{A} = (A, \mathcal{L})$  vom Rang  $n \geq 3$  heißt topologisch, wenn  $A$  und  $\mathcal{H}$  nichttriviale Topologien so tragen, daß die Abbildungen*

- (i)  $\vee^{(n-1)}: A^{(n-1)} \longrightarrow \mathcal{H}; (p_1, \dots, p_{n-1}) \mapsto \langle \{p_1, \dots, p_{n-1}\} \rangle,$
- (ii)  $\wedge^{(n-1)}: \mathcal{H}^{(n-1)} \longrightarrow A; (H_1, \dots, H_{n-1}) \mapsto \bigcap_{i=1}^{n-1} H_i$  und
- (iii)  $p: A \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}; (p, H) \mapsto H'$  mit  $p \in H' \parallel H$

*der Hüllenbildung, des Schneidens und des Parallelenziehens stetig sind. Dabei heißen zwei Hyperebenen  $H$  und  $H'$  parallel (in Zeichen  $H' \parallel H$ ), wenn sie leeren Schnitt haben.*

Ist ein topologischer affiner Raum  $\mathcal{A} = (A, \mathcal{L})$  desarguessch (was insbesondere der Fall ist, wenn  $\text{rang } \mathcal{A} \geq 4$  gilt), so besagt das Hauptergebnis aus [Sö76], daß der zugehörige Koordinatenkörper  $K$  topologisch, die Topologie  $\tau_A$  auf  $A$  die Produkttopologie von  $K$  und die Topologie auf  $\mathcal{H}$  eindeutig durch  $\tau_A$  beschrieben wird.

Im Gegensatz zum ebenen Fall kann man jeden topologischen affinen Raum vom Rang  $n \geq 4$  zu einem topologischen projektiven Raum erweitern, indem man aus dem Koordinatenkörper einen projektiven Raum konstruiert, in welchem  $\mathcal{A}$  als affiner Teilraum enthalten ist (vergleiche [Sö69], 2.1), da im desarguesschen Fall der zugehörige Ternärkörper schon mindestens ein Schiefkörper ist.

In dem für uns interessanten Fall, daß  $\mathcal{A}$  lokalkompakt und zusammenhängend ist, erhalten wir als einfache Folgerung:

**Satz 2.15.** *Sei  $\mathcal{A} = (A, \mathcal{L})$  ein topologischer affiner Raum vom Rang  $n \geq 4$  mit lokalkompaktem zusammenhängendem Punktraum. Dann ist  $\mathcal{A}$  ein affiner Raum über einem der topologischen Körper  $\mathbb{R}, \mathbb{C}$  oder  $\mathbb{H}$ .*

**Beweis:** Nach [Sö76] ist der Koordinatenkörper ein topologischer Körper  $(K, \tau)$  derart, daß die Topologie  $\tau_A$  auf  $A$  die Produkttopologie von  $\tau$  ist. Also ist  $K$  ein lokalkompakter zusammenhängender Körper und nach PONTRJAGAN [Po32] isomorph zu  $\mathbb{R}, \mathbb{C}$  oder  $\mathbb{H}$ . □

## 2.3 Ovale und Ovoide

Der Begriff des **Ovoids** (ist der Raum vom Rang drei, spricht man auch von **Ovalen**) geht auf TITS [Tits62] zurück und spielt in den nächsten Paragraphen eine wichtige Rolle. Im folgenden verallgemeinern wir die von BUCHANAN, HÄHL und LÖWEN in [BHL80] für Ovale bewiesenen Aussagen zum Teil auf Ovoide.

**Definition 2.16.** (Ovoid) Eine Teilmenge  $\mathcal{O} \subseteq P$  des Punktraumes eines affinen oder projektiven Raumes  $\mathcal{P} = (P, \mathcal{L})$  heißt Ovoid, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) (Konvexität) Für jede Gerade  $l \in \mathcal{L}$  gilt  $|l \cap \mathcal{O}| \leq 2$ ;
- (ii) (Glätte) Für jeden Punkt  $x \in \mathcal{O}$  ist  $H_x := \bigcup \{l \in \mathcal{L}_x; l \cap \mathcal{O} = \{x\}\}$  eine Hyperebene.

Da in Ebenen die Hyperebenen genau die Geraden sind, erhalten wir in diesem Fall:

- (i) Für jede Gerade  $l \in \mathcal{L}$  gilt  $|l \cap \mathcal{O}| \leq 2$ ;
- (ii) Für jeden Punkt  $x \in \mathcal{O}$  existiert genau eine Gerade  $l_x$  mit  $l_x \cap \mathcal{O} = \{x\}$ .

Eine Gerade heißt **Passante**, **Tangente** oder **Sekante**, wenn sie  $\mathcal{O}$  in keinem, einem oder zwei Punkten schneidet. Mit  $\mathcal{L}_{\mathcal{O}}$  bezeichnen wir die Menge aller  $\mathcal{O}$  schneidenden Geraden.

Ein Ovoid in einem topologischen Raum heißt abgeschlossen, wenn es als Teilmenge der Punktmenge abgeschlossen ist. Ein Oval  $\mathcal{O}$  in einer topologischen projektiven Ebene heißt topologisch, wenn die bijektive Abbildung

$$\phi_{\mathcal{O}}: \mathcal{L}_{\mathcal{O}} \longrightarrow \mathcal{O} \star \mathcal{O}; L \mapsto L \cap \mathcal{O}$$

stetig ist, wobei  $\mathcal{O} \star \mathcal{O} := (\mathcal{O} \times \mathcal{O})_{\sim}$  mit  $(x, y) \sim (x', y') \iff \{x, y\} = \{x', y'\}$  das sogenannte (zweifache) symmetrische Produkt bezeichne. Den Raum  $\mathcal{O} \star \mathcal{O}$  stellen wir mit der Quotiententopologie aus (vergleiche [BHL80] und Abschnitt 1.2).

Nach [BHL80], Lemma 2.5, ist ein topologisches Oval in einer kompakten zusammenhängenden projektiven Ebene endlicher Dimension kompakt (und damit insbesondere abgeschlossen) und  $\phi_{\mathcal{O}}$  ein Homöomorphismus. Umgekehrt folgt aus der Abgeschlossenheit eines Ovals (als Teilmenge des Punktraumes) in einer kompakten zusammenhängenden projektiven Ebene bereits, daß es topologisch ist ([BHL80], Satz 2.6).

Im folgenden Satz zählen wir einige weitere Fakten über abgeschlossene Ovoide auf, die wir im nächsten Abschnitt benötigen.

**Satz 2.17.** Sei  $\mathcal{P} = (P, \mathcal{L})$  ein kompakter zusammenhängender projektiver Raum endlicher Dimension und  $\mathcal{O} \subseteq P$  ein abgeschlossenes Ovoid. Dann gilt

- (i) Ist  $\text{rang } P = 3$ , so ist die Dimension von  $P$  höchstens vier.
- (ii) Ist  $\text{rang } P \geq 4$ , so ist  $\mathcal{P}$  ein projektiver Raum über  $\mathbb{R}$ .

**Beweis:** (i) folgt aus [BHL80], Satz 3.5.



(ii) Da  $\mathcal{P}$  desarguessch ist, folgt aus Satz 2.11, daß  $\mathcal{P}$  ein projektiver Raum über den Körpern  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  oder  $\mathbb{H}$  ist. Nach [BHL80], Korollar 3.4 existiert in einem projektiven Raum vom Rang  $n \geq 4$  über  $\mathbb{C}$  oder  $\mathbb{H}$  kein abgeschlossenes Ovoid und es folgt die Behauptung.  $\square$

Da nach [BHL80], Lemma 2.5, für jeden Punkt  $y$  eines topologischen Ovals  $\mathcal{O}$  in einer kompakten zusammenhängenden projektiven Ebene die Abbildung

$$\psi_y: \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{L}_y; x \mapsto \begin{cases} x \vee y, & \text{falls } x \neq y \\ l_y, & \text{falls } x = y \end{cases}$$

ein Homöomorphismus ist, folgt

**Lemma 2.18.** *Jedes abgeschlossene Oval in einer kompakten zusammenhängenden projektiven Ebene endlicher Dimension ist homöomorph zur Sphäre.*

Eine ähnliche Aussage erhalten wir auch für abgeschlossene Ovoide. Der Beweis geht zurück auf [BHL80], Beweis von Satz 2.6, in dem gezeigt wurde, daß jedes abgeschlossene Oval in einer kompakten zusammenhängenden Ebene topologisch ist.

**Lemma 2.19.** *Jedes abgeschlossene Ovoid in einem kompakten zusammenhängenden projektiven Raum  $\mathcal{P}$  vom Rang  $n \geq 4$  ist homöomorph zur  $(n-2)$ -Sphäre  $\mathbb{S}_{n-2}$ .*

**Beweis:** Nach Satz 2.17 (ii) ist  $\mathcal{P}$  ein projektiver Raum über  $\mathbb{R}$ , jedes Geradenbüschel ist also homöomorph zum Punktraum des projektiven Raumes über  $\mathbb{R}$  vom Rang  $n-1$ , also ist für jeden Punkt  $x \in P$  und jede Hyperebene  $H \in \mathcal{H}_x$  die Menge  $\mathcal{L}_{x,H} := \{l \in \mathcal{L}_x; l \not\subseteq H\}$  homöomorph zu  $\mathbb{R}^{n-2}$ .

Wir zeigen zunächst, daß  $\mathcal{O}$  eine offene Teilmenge enthält, die zu einer offenen Teilmenge des  $\mathbb{R}^{n-2}$  homöomorph ist: Sei  $y \in \mathcal{O}$ . Dann ist die Abbildung

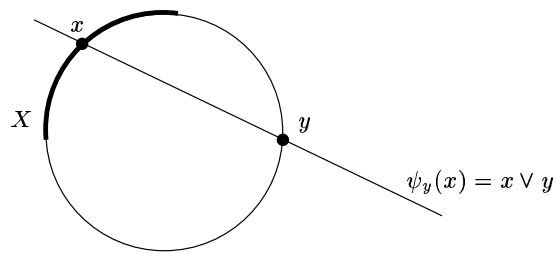
$$\psi_y: \mathcal{O} \setminus \{y\} \longrightarrow \mathcal{L}_{y,H_y}; x \mapsto x \vee y$$

eine stetige Bijektion. Da  $\mathcal{O}$  abgeschlossen in  $P$  ist, ist mit  $A := P \setminus H_y \cong \mathbb{R}^{n-1}$  das punktierte Ovoid  $\mathcal{O} \setminus \{y\}$  abgeschlossen in  $A$ , und damit  $\sigma$ -kompakt.  $\mathcal{L}_{y,H_y} \cong \mathbb{R}^{n-2}$  ist ein Bairescher Raum, also gibt es eine kompakte Menge  $X \subseteq \mathcal{O} \setminus \{y\}$ , deren Bild unter  $\psi_y$  eine offene Teilmenge  $V \subseteq \mathcal{L}_{y,H_y}$  enthält. Da  $\psi_y$  stetig ist, ist  $U := \psi_y^{-1}(V)$  ebenfalls offen und wird wegen der Kompaktheit von  $X$  homöomorph abgebildet.

Sei jetzt  $x \in U$ . Wir wechseln den Standpunkt und betrachten im folgenden die auf  $\mathcal{O} \setminus \{x\}$  stetige Abbildung

$$\psi_x: \mathcal{O} \longrightarrow \overline{\mathcal{L}}_{x,H_x}; z \mapsto \begin{cases} z \vee x, & \text{falls } z \neq x \\ \infty, & \text{falls } z = x, \end{cases}$$

wobei wir mit  $\overline{\mathcal{L}}_{x,H_x} := \mathcal{L}_{x,H_x} \cup \{\infty\} \cong \mathbb{S}_{n-2}$  die Einpunktkompaktifizierung von  $\mathcal{L}_{x,H_x}$  bezeichnen. Für jede offene Umgebung  $V \subseteq U$  von  $x$  ist  $V^c \subseteq \mathcal{O} \setminus \{x\}$

Abb. 2.4. Die Abbildung  $\psi$ 

kompakt. Da  $\psi_x$  eine Bijektion ist, ist auch  $\psi_x(V^c) = \psi_x(V)^c \subseteq \mathcal{L}_{x, H_x}$  kompakt, und damit  $\psi_x(V)$  eine Umgebung von  $\infty$  in  $\overline{\mathcal{L}}_{x, H_x}$ . Also ist die Umkehrabbildung von  $\psi_x$  stetig in  $\infty$ . Da  $\psi_x$  auf  $U \setminus \{x\}$  eine stetige Injektion ist, gilt mit dem Gebietsinvarianzsatz (siehe [BHL80], (1.4) (b)),  $\psi_x(U) \setminus \{\infty\}$  ist offen in  $\mathcal{L}_{x, H_x}$  und  $\psi_x|_U$  ist ein Homöomorphismus von  $U \setminus \{x\}$  auf  $\psi_x(U) \setminus \{\infty\}$ , also ist  $\psi_x^{-1}$  stetig auf ganz  $\psi_x(U)$ , und wieder mit dem Gebietsinvariantssatz erhalten wir auch die Stetigkeit von  $\psi_x$  auf  $U$ . Also ist  $\psi_x$  ein Homöomorphismus von  $\mathcal{O}$  auf  $\overline{\mathcal{L}}_{x, H_x} \cong \mathbb{S}_{n-2}$ .  $\square$

Ist  $\mathcal{O}$  ein Ovoid, so ist  $\mathcal{O}^* := \{H_x; H_x \text{ ist Tangentenhyperebene an } x\}$  (das sogenannte duale Ovoid) im allgemeinen kein Ovoid im dualen projektiven Raum  $\mathcal{P}^* = (\mathcal{H}, \mathcal{C})$ . Für abgeschlossene Ovale in kompakten zusammenhängenden projektiven Ebenen endlicher Dimension konnte dies aber gezeigt werden (siehe [BHL80], Korollar 3.8).

**Lemma 2.20.** *Ist  $\mathcal{O}$  ein abgeschlossenes Oval in einer endlichdimensionalen kompakten zusammenhängenden projektiven Ebene, so ist die Menge  $\mathcal{O}^*$  ein abgeschlossenes Oval in der dualen Ebene.*

Dieses Lemma läßt sich auf abgeschlossene Ovoide verallgemeinern.

**Lemma 2.21.** *Ist  $\mathcal{O}$  ein abgeschlossenes Ovoid in einem kompakten zusammenhängenden projektiven Raum vom Rang  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 4$ , so ist  $\mathcal{O}^*$  ein abgeschlossenes Ovoid in  $\mathcal{P}^*$ .*

**Beweis:** Wir müssen die folgenden beiden Bedingungen nachweisen:

- (i) Jede Cogerade liegt in höchstens zwei Tangentialhyperebenen von  $\mathcal{O}$ .
- (ii) Für jede Tangentialhyperebene  $H$  von  $\mathcal{O}$  enthält der Schnitt aller in  $H$  liegenden Cogeraden, durch die keine weitere Tangentialhyperebene geht, genau einen Punkt.

(i) Sei  $C \in \mathcal{C}$  eine Cogerade. Angenommen, es existieren drei verschiedene Punkte  $x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{O}$  mit  $C \subseteq H_1, H_2, H_3$ , wobei wir mit  $H_i$  die Tangentialhyperebene an  $x_i$  bezeichnen. Sei weiter  $E \in \mathcal{T}_3$  eine Unterebene von  $\mathcal{P}$  durch die Punkte  $x_1, x_2$

und  $x_3$ . Dann ist  $\mathcal{O}_E$  ein abgeschlossenes Oval im Residuum  $\mathcal{P}_E$  und  $l_i := E \cap H_i$  die Tangente an  $x_i$ . Da  $C$  eine Cogerade ist, gilt

$$H_1 \cap H_2 = C = H_1 \cap H_3,$$

also folgt auch

$$l_1 \cap l_2 = E \cap H_1 \cap H_2 = E \cap H_1 \cap H_3 = l_1 \cap l_3.$$

Da aber  $l_1 \cap l_2 \neq \emptyset$ , schneiden sich drei Tangenten von  $\mathcal{O}_E$  in einem Punkt, damit wäre aber die Menge der Tangentengeraden von  $\mathcal{O}_E$  in  $\mathcal{P}_E$  kein Oval im dualen projektiven Raum  $\mathcal{P}_E^*$ , ein Widerspruch zum obigen Lemma.

(ii) Für die zweite Bedingung zeigen wir zunächst, daß alle Cogeraden einer Tangentialhyperebene  $H_x$  an  $x \in \mathcal{O}$ , die in keiner weiteren Tangentialhyperebene liegen, durch  $x$  gehen: Sei also  $C \subseteq H_x$  eine Cogerade, die nicht durch  $x$  geht. Sei weiter  $H \neq H_x$  eine Hyperebene durch  $C$ , die nichtleeren Schnitt mit  $\mathcal{O}$  hat. Dann enthält  $H \cap \mathcal{O}$  entweder genau einen Punkt, oder  $H \cap \mathcal{O}$  ist ein abgeschlossenes Ovoid im projektiven Raum  $\mathcal{P}_H$ , und damit nach Lemma 2.19 homöomorph zu  $\mathbb{S}_{n-3}$ . Angenommen, es existiert keine durch  $C$  gehende Tangentialhyperebene außer  $H_x$ . Da  $\mathcal{O} \setminus \{x\} = \bigcup_{H \in \mathcal{H}_C \setminus \{H_x\}} H \cap \mathcal{O}$ , ist dann  $\mathcal{O} \setminus \{x\} \cong \mathbb{R}^{n-2}$  die disjunkte

Vereinigung von  $(n-3)$ -Sphären, ein Widerspruch, also existiert zu jeder Cogeraden  $C \subseteq H_x$ , die nicht durch  $x$  geht, eine weitere Tangentialhyperebene durch  $C$  und unsere Zwischenbehauptung ist gezeigt.

Die Cogeraden in  $H_x$ , die in keiner weiteren Tangentialhyperebene liegen, sind also genau die durch  $x$  gehenden Cogeraden. Damit enthält der Schnitt nur den Punkt  $x$ , und  $\mathcal{O}^*$  ist ein Ovoid.

Wir weisen nun nach, daß die Menge der Tangenten von  $\mathcal{O}$  abgeschlossen in  $\mathcal{H}$  ist. Mit  $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1$  bzw.  $\mathcal{H}_2$  bezeichnen wir im folgenden die Menge der Hyperebenen, die  $\mathcal{O}$  in keinem, genau einem bzw. mindestens zwei Punkten schneiden.

Sei also  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Hyperebenen in  $\mathcal{H}_1$  die gegen eine Hyperebene  $H \in \mathcal{H}$  konvergiert. Dann gibt es eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{O}$  mit  $x_n \in H_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , die wegen der Kompaktheit von  $\mathcal{O}$  eine konvergente Teilfolge besitzt. Ist  $x \in \mathcal{O}$  der Grenzwert dieser Teilfolge, so liegt  $x$  wegen der Stetigkeit der Hüllenbildung auch auf  $H$ , d.h.  $H \in \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$ .

Angenommen,  $H \in \mathcal{H}_2$ . Seien  $x, y \in \mathcal{O} \cap H$  und sei  $E \subseteq H$  eine Ebene durch  $x$  und  $y$ . Dann ist  $\mathcal{O}_E := \mathcal{O} \cap E$  ein abgeschlossenes Oval im Residuum  $\mathcal{P}_E$  und die Folge von Geraden  $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $l_i := H_i \cap E$  in  $E$  konvergiert gegen  $l := H \cap E$ . Die Folge  $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist dann eine Folge von Passanten und Tangenten des Ovals  $\mathcal{O}_E$ , und da nach [BHL80], Seite 408 (3), die Menge der Sekanten eines abgeschlossenen Ovals offen im Geradenraum ist, ist auch  $l$  eine Passante oder Tangente von  $\mathcal{O}_E$ . Wegen  $x, y \in l$ , ist dies ein Widerspruch zur Annahme und wir erhalten  $H \in \mathcal{H}_1$ , und damit die Abgeschlossenheit der Menge der Tangenten.  $\square$

Daß die Tangentialhyperebene  $H_x$  stetig vom Punkt  $x \in \mathcal{O}$  abhängt, zeigt das nächste Lemma.

**Lemma 2.22.** *Für jedes abgeschlossene Ovoid ist die Abbildung*

$$T: \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}^*; x \mapsto H_x$$

*ein Homöomorphismus.*

**Beweis:** Nach dem obigen Lemma ist  $\mathcal{L}_1 = \mathcal{O}^*$  kompakt. Da auch  $\mathcal{O}$  kompakt ist, ist der Graph von  $T$

$$T = (\mathcal{O} \times \mathcal{L}_1) \cap \mathcal{F}$$

wegen der Abgeschlossenheit des Fahnenraumes  $\mathcal{F}$  ebenfalls kompakt. Sei nun  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathcal{O}$ , die gegen einen Punkt  $x \in \mathcal{O}$  konvergiert. Da  $T$  kompakt ist, hat die Folge  $(x_n, T(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Teilfolge, die in  $T$ , also gegen  $(x, T(x))$  konvergiert, und es folgt die Behauptung.  $\square$

Sowohl das symmetrische Produkt  $(\mathcal{O} \star \mathcal{O}) \setminus \Delta$ , als auch die Menge der Cogeraden  $\mathcal{C}$  sind Mannigfaltigkeiten der Dimension  $2(n-2)$  (nach Abschnitt 1.2 ist  $(\mathcal{O} \star \mathcal{O}) \setminus \Delta$  lokal homöomorph zu  $\mathcal{O} \times \mathcal{O}$ ). Da die Abbildung

$$\Psi: (\mathcal{O} \star \mathcal{O}) \setminus \Delta \longrightarrow \mathcal{C}; \{x, y\} \mapsto H_x \cap H_y$$

nach Lemma 2.21 injektiv und nach Lemma 2.22 stetig ist, ist nach dem Gebietsinvariantensatz  $U := \text{Bild}(\Psi)$  offen in  $\mathcal{C}$  und  $\Psi$  ein Homöomorphismus auf  $U$ . Im Beweis von Lemma 2.21 haben wir gezeigt, daß zu jeder Cogeraden  $C$ , die in einer Tangentialhyperebene  $H_x$  liegt und nicht durch  $x$  geht, genau eine weitere Tangentialhyperebene  $H_y$  mit  $C \subseteq H_y$  existiert, also ist  $\{(x, C) \in \mathcal{O} \times \mathcal{C}; x \notin C \subseteq H_x\} \subseteq \mathcal{O} \times U$ , und damit die Abbildung

$$\Phi': \{(x, C) \in \mathcal{O} \times \mathcal{C}; x \notin C \subseteq H_x\} \longrightarrow \mathcal{O} \times ((\mathcal{O} \star \mathcal{O}) \setminus \Delta); (x, C) \mapsto (x, \Psi^{-1}(C))$$

stetig, wobei wegen  $x \in C$  das Bild von  $C$  unter  $\Psi^{-1}$  die Darstellung  $\Psi^{-1}(C) = \{x, y\}$  für ein  $y \in \mathcal{O} \setminus \{x\}$  hat. Da  $\mathcal{O}$  hausdorffsch ist, ist die Projektion

$$\pi: \{(x, \{x, y\}); \{x, y\} \in (\mathcal{O} \star \mathcal{O}) \setminus \Delta\} \longrightarrow \mathcal{O}; (x, \{x, y\}) \mapsto y$$

stetig, und damit auch  $\Phi := \pi \circ \Phi'$ .

Die Abbildung  $\Phi$  ordnet also jedem Punkt  $x \in \mathcal{O}$  zu vorgegebener Cogeraden  $C \in \mathcal{C}$  mit  $x \notin C$  und  $C \subseteq T_x$  den bezüglich  $C$  „gegenüberliegenden“ Punkt auf dem Ovoid zu.

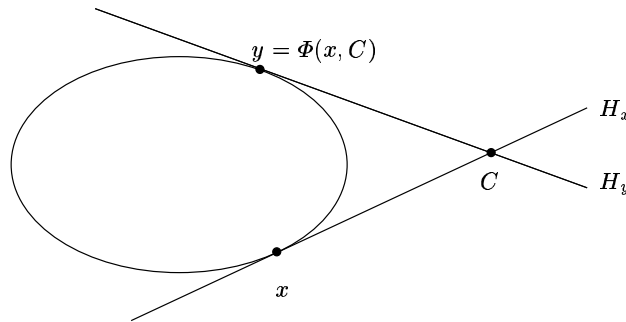
Diese wichtige, in Abschnitt 3.3 benutzte Aussage, halten wir im folgenden Lemma fest.

**Lemma 2.23.** Sei  $\mathcal{O}$  ein abgeschlossenes Ovoid in einem projektiven Raum  $\mathbf{PG}(\mathbb{R}^n)$  über  $\mathbb{R}$ . Dann ist die Abbildung

$$\Phi: \{(x, C) \in \mathcal{O} \times \mathcal{C}; x \notin C \subseteq H_x\} \longrightarrow \mathcal{O}; (x, C) \mapsto y,$$

mit  $\langle y, C \rangle = H_y$  stetig.

**Beweis:** Nach Lemma 2.21 gibt es zu jedem  $x \in \mathcal{O}$  und jeder Cogerade  $C \subseteq H_x$  mit  $x \notin C$  genau eine Tangentialhyperebene  $H_y$  mit  $C \subseteq H_y$ . Also ist  $y \in \mathcal{O}$  eindeutig bestimmt. Weiter gilt dann  $\langle y, C \rangle = H_y$ , d.h.  $\Phi$  ist wohldefiniert. Der Rest der Aussage folgt aus den obigen Überlegungen.  $\square$



**Abb. 2.5.** Die Abbildung  $\Phi$



### 3. Kreisräume

In diesem Paragraphen führen wir die wichtigsten Begriffe und Beispiele der Theorie der Kreisräume ein. Hauptsächlich sind wir an topologischen Laguerreeräumen interessiert. Da topologische Laguerreerebenen eingehend untersucht wurden (siehe GROH [Groh68], [Groh69] und STEINKE [Ste95] für einen Übersichtsartikel), geben wir hier nur eine Zusammenfassung der wichtigsten Resultate an (erster Teil des Abschnitts 3.3). Mir ist bisher nicht bekannt, daß in der Literatur eine Definition topologischer Kreisräume existiert. Wir werden deshalb etwas näher auf diesen Begriff eingehen (Abschnitte 3.3–3.5). Dabei ist das Hauptziel, ähnlich wie bei der Untersuchung topologischer projektiver Räume, eine Charakterisierung topologischer Laguerreeräume über topologische Körper zu geben.

In Hinblick auf die Konstruktion verallgemeinerter Vierecke aus Laguerreeräumen im fünften Paragraphen stellen wir in Abschnitt 3.2 eine etwas andere Beschreibung klassischer Laguerreeräume, das sogenannte Quadrikmodell, vor.

Zunächst definieren wir **Kreisebenen**.

**Definition 3.1.** (Kreisebenen) *Eine Inzidenzstruktur  $\mathcal{E} = (S, \mathfrak{K})$  mit Punktmenge  $S$ , Kreismenge  $\mathfrak{K}$  und einer Menge nichttrivialer\* Äquivalenzrelationen  $E = \{\|_1, \dots, \|_n\}$  auf  $S$  (genannt Parallelitäten) heißt Kreisebene, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind, wobei zwei Punkte  $s, t \in S$  parallel heißen, wenn sie gleich sind, oder wenn es einen Parallelismus  $\|_i \in E$  so gibt, daß  $s \|_i t$ :*

- (i) *Für je zwei nichtverbindbare Punkte  $s, t \in S$  existiert genau ein Parallelismus  $\|_i \in E$  mit  $s \|_i t$ ;*
- (ii) *Für je drei paarweise nichtparallele Punkte  $s, t, u \in S$  existiert genau ein Verbindungskreis  $\alpha(s, t, u) \in \mathfrak{K}$ ;*
- (iii) *Für jeden Kreis  $k \in \mathfrak{K}$ , jeden Punkt  $s \in k$  und jeden Punkt  $t \in S$  nichtparallel zu  $s$  existiert genau ein Kreis  $\beta(s, k, t) \in \mathfrak{K}$ , der durch  $t$  geht und  $k$  in  $s$  berührt, d.h. es gilt  $k \cap \beta(s, k, t) = \{s\}$ , oder  $k = \beta(s, k, t)$ .*
- (iv) *Für jeden Punkt  $s \in S$ , jeden Kreis  $k \in \mathfrak{K}$  und jeden Parallelismus  $\|_i \in E$  existiert genau ein Punkt  $\gamma_i(s) \in k$  mit  $\gamma_i(s) \|_i s$ .*

---

\* Nichttrivial bedeutet hier, nicht die identische Relation

- (v) Für je zwei nichtparallele Punkte  $s, t \in S$  und zwei verschiedene Parallelismen  $\parallel_i, \parallel_j \in E$  existiert genau ein Punkt  $\delta_{ij}(s, t) \in S$  mit  $s \parallel_i \delta_{ij}(s, t)$  und  $t \parallel_j \delta_{ij}(s, t)$ .
- (vi) (Reichhaltigkeit) Auf jedem Kreis liegen mindestens drei Punkte und durch zwei verbindbare Punkte gehen mindestens zwei Kreise.

Mit  $\Gamma_i(s) := \{t \in S; s \parallel_i t\}$  bezeichnen wir die Äquivalenzklasse (auch **Parallelklasse**) von  $x \in S$  bezüglich der Relation  $\parallel_i \in E$ .

Eine Kreisebene heißt **Möbius-**, **Laguerre-** bzw. **Minkowskiebene**, wenn  $E$  keine, eine oder zwei nichttriviale Äquivalenzrelationen enthält. Wir behandeln aber in der vorliegenden Arbeit nur die ersten beiden Fälle.

Möbiusebenen besitzen keinen Parallelismus, d.h. hier sind alle Punkte verbindbar und die Bedingungen (iv) und (v) der obigen Definition werden nicht benötigt.

Laguerreebenen dagegen besitzen genau einen Parallelismus, die Nichtverbindbarkeit in diesen Inzidenzstrukturen wird also durch eine Äquivalenzrelation beschrieben und hier kann auf Bedingung (v) verzichtet werden.

Auf Beispiele und weitere Eigenschaften gehen wir im nächsten Abschnitt ein.

### 3.1 Möbius- und Laguerreeräume

Wie schon bei affinen und projektiven Ebenen kann man den Begriff der Kreisebene auch auf den räumlichen Fall erweitern.

**Definition 3.2.** (Kreisgeometrie) Eine Inzidenzstruktur  $\mathcal{G} = (S, \mathfrak{K})$  mit einer endlichen Menge von nichttrivialen Äquivalenzrelationen  $E = \{\parallel_1, \dots, \parallel_n\}$  auf  $S$  heißt Kreisgeometrie, wenn die Bedingungen (i), (ii) und (vi) aus der Definition einer Kreisebene erfüllt sind.

Mit  $\Gamma_i(s) := \{t \in S; s \parallel_i t\}$  bezeichnen wir auch hier wieder die Äquivalenzklasse (auch **Parallelklasse**) von  $x \in S$  bezüglich der Relation  $\parallel_i \in E$ .

Sei nun  $\mathcal{G} = (S, \mathfrak{K})$  eine Kreisgeometrie und  $s \in S$ . Wie man sofort anhand der Definition sieht, ist die aus  $\mathcal{G}$  konstruierte Inzidenzstruktur mit Punktmenge  $A := S \setminus \{\Gamma_i(s); i \leq n\}$  und  $\mathcal{L} := \{k \setminus \{s\}; s \in k \in \mathfrak{K}\} \cup \{\Gamma_i(x); x \in A, i \leq n\}$  als Geradenmenge, die sogenannte **Ableitung eines Kreisraums**

$$\mathcal{A}(\mathcal{G}, s) := (A, \mathcal{L})$$

von  $\mathcal{G}$  in  $s$ , ein linearer Raum.

Die Ableitungen von Kreisebenen bilden affine Ebenen, die folgende Definition von Kreisräumen ist daher naheliegend.

**Definition 3.3.** (Kreisraum) Eine Kreisgeometrie heißt Kreisraum, wenn die Ableitung in jedem Punkt einen affinen Raum bildet.



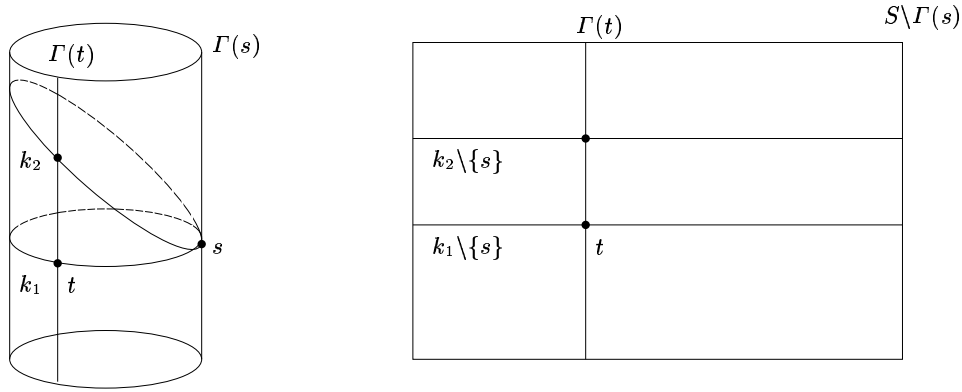


Abb. 3.1. Ableitung einer Laguerreebene

Mit  $\mathcal{P}(\mathcal{G}, s)$  bezeichnen wir den projektiven Abschluß von  $\mathcal{A}(\mathcal{G}, s)$ .

Ein Kreisraum heißt **Möbius-** bzw. **Laguerrraum**, wenn  $E$  keine bzw. genau eine nichttriviale Äquivalenzrelation enthält. Mit dem **Rang** eines Kreisraumes bezeichnen wir den (stets gleichen) Rang der zugrundeliegenden affinen Räume. Ist der Rang eines Kreisraumes drei, sind die abgeleiteten Räume also affine Ebenen, so erhalten wir, wie man sofort sieht, genau die oben definierten Kreisebenen. Eine Teilmenge  $T$  von  $S$  heißt **Teilraum**, wenn jeder Kreis, der mindestens drei Punkte mit  $T$  gemeinsam hat, schon ganz in  $T$  enthalten ist. Ist  $\mathcal{G}$  ein Möbiusraum, so sind alle Teilräume ebenfalls Möbiusräume. In Laguerrräumen dagegen gibt es sowohl Laguerreunterräume, als auch Möbiusunterräume, je nachdem, ob der Teilraum eine Parallelklasse  $\Gamma(s)$ ,  $s \in S$ , enthält oder nicht. Maximale Teilräume heißen auch hier wieder Hyperebenen. Als Abkürzung bezeichnen wir die Menge der maximalen Möbiusunterräume eines Laguerrraums auch als **Hyperkugeln** (Bezeichnung  $\mathfrak{K}_H$ ). Da sich die Kreise als geeignete Schnitte von Hyperkugeln gewinnen lassen, bezeichnen wir auch häufiger das System  $(S, \mathfrak{K}_H)$  als Laguerrraum. Ist  $\mathcal{L} = (S, \mathfrak{K})$  ein Laguerrraum vom Rang  $n$ , so sei  $S^{(n)}$  die Menge der **unabhängigen** Teilmengen  $S'$  von  $S$  mit  $|S'| = n$ , deren Hüllen Hyperkugeln bilden und  $\mathfrak{K}_H^{(n-1)}$  die Menge der unabhängigen Hyperkugeln  $\mathfrak{K}' \subseteq \mathfrak{K}_H^{n-1}$ , die mindestens zwei Punkte gemeinsam haben.

Im Gegensatz zum ebenen Fall sind die Abbildungen des Berührens  $\beta$  und der Parallelprojektion  $\gamma$  im räumlichen Fall nicht automatisch durch die Axiome gegeben, das nächste Lemma zeigt aber, daß ähnliche Abbildungen auch hier existieren.

**Lemma 3.4.** *Sei  $\mathcal{L} = (S, \mathfrak{K})$  ein Laguerrraum und  $\mathfrak{K}_H$  die Menge der Hyperkugeln. Dann gilt*

- (i) *Für alle  $s \in S$  und  $K \in \mathfrak{K}_H$  existiert genau ein zu  $s$  paralleler Punkt  $t \in K$ ;*
- (ii) *Für alle  $s, t \in S$  und  $K \in \mathfrak{K}_H$  mit  $s \in K$  und  $t \not\parallel s$  existiert genau ein  $\beta(s, K, t) = K' \in \mathfrak{K}_H$  so, daß  $t \in K'$  und  $K \cap K' = \{s\}$  oder  $K' = K$ .*

**Beweis:** Ist der Rang des Laguererraumes drei, so sind (i) und (ii) Axiome der Laguerreebene (Definition 3.1), denn hier sind die Hyperkugeln gerade die Kreise. Ist der Rang größer als drei, so folgen (i) und (ii) sofort aus der Tatsache, daß die Hyperkugeln durch einen Punkt in der affinen Ableitung zu Hyperebenen werden. Dabei beschreibt (ii) zum Beispiel die Eindeutigkeit der Parallele.  $\square$

In Analogie zum ebenen Fall definiert uns (i) die **Parallelprojektion**

$$\gamma: S \times \mathfrak{K}_H \longrightarrow S; (s, K) \mapsto \Gamma(s) \cap K$$

und (ii) die Abbildung des Berührens

$$\beta: \{(s, K, t) \in S \times \mathfrak{K}_H \times S; t \not\parallel s \in K\} \longrightarrow \mathfrak{K}_H; (s, K, t) \mapsto \beta(s, K, t).$$

Die Hyperkugel  $\beta(s, K, t)$ , mit  $s \in K \in \mathfrak{K}_H$  heißt dann **Berührkugel** und  $B(s, K) := \{\beta(s, K, t); t \notin \Gamma(s)\}$  **Berührbüschel** von  $K$  an  $s$ .

Bevor wir im nächsten Abschnitt einige Beispiele vorstellen, überlegen wir uns zunächst, welche geometrischen Eigenschaften Hyperkugeln, die nicht durch einen vorgegebenen Punkt  $s \in S$  gehen, in der projektiven Ableitung  $\mathcal{P}(\mathcal{L}, s)$  haben.

**Lemma 3.5.** *Sei  $\mathcal{L} = (S, \mathfrak{K})$  ein Laguerrraum. Für alle  $s \in S$  und  $K \in \mathfrak{K}_H$  mit  $s \notin K$  ist*

$$\overline{K} := (K \setminus \Gamma(s)) \cup \{[\Gamma(t)]\}$$

*ein Ovoid in  $\mathcal{P}(\mathcal{L}, s)$ , wobei  $[\Gamma(t)]$  den Fernpunkt auf den Parallelklassen bezeichne.*

**Beweis:** Sei also  $s \in S$  und  $K \in \mathfrak{K}_H$  eine Hyperkugel, die nicht durch  $s$  geht.

Konvexität: Sei  $l$  eine Gerade in  $\mathcal{A}(\mathcal{L}, s)$ . Mit  $\bar{l}$  bezeichnen wir den Abschluß von  $l$ . Wir unterscheiden die folgenden beiden Fälle:

*Fall 1:*  $l = \Gamma(t)$  für ein  $t \in S \setminus \Gamma(s)$ . Dann ist  $|\bar{l} \cap \overline{K}| = |\{\gamma(t, K), [\Gamma(t)]\}| \leq 2$ .

*Fall 2:*  $l = k \setminus \{s\}$  für einen Kreis  $k \in \mathfrak{K}$  durch  $s$ . Dann ist  $[\Gamma(t)] \notin \bar{l}$ . Da  $k \not\subseteq K$  (denn  $s \notin K$ ) und  $K$  ein Teilraum von  $S$  ist, enthält  $k \cap K$  höchstens zwei Elemente (Definition 3.1 (ii)), und damit auch  $\bar{l} \cap \overline{K}$ .

Glätte: Sei  $x \in \overline{K}$ . Auch hier unterscheiden wir zwei Fälle:

*Fall 1:*  $x \in K$ . Dann ist  $x \not\parallel s$  und die Tangentengeraden von  $\overline{K}$  an  $x$  in der Ableitung  $\mathcal{P}(\mathcal{L}, s)$  sind die Geraden  $\overline{k \setminus \{s\}}$ , wobei der Kreis  $k$  durch  $s$  geht und mit  $K$  nur den Punkt  $x$  gemeinsam hat. Ändern wir die Sichtweise, so werden diese Kreise Geraden in der affinen Ableitung  $\mathcal{A}(\mathcal{L}, x)$ , die durch den Punkt  $s$  gehen und parallel zur Hyperebene  $K \setminus \{x\}$  sind. Die Vereinigung dieser Geraden bildet eine Hyperebene  $H$  in  $\mathcal{A}(\mathcal{L}, x)$ , also existiert eine Hyperkugel  $K'$  im Laguerrraum mit  $K' \setminus \{x\} = H$ . Damit ist die Vereinigung der Tangentengeraden von  $K$  an  $x$  in der Ableitung  $\mathcal{P}(\mathcal{L}, s)$  gerade  $K' \setminus \{s\}$ , also eine Hyperebene.

*Fall 2:*  $x = [\Gamma(t)]$ . Die Geraden von  $\mathcal{P}(\mathcal{L}, s)$  durch den Punkt  $x$  sind dann genau die projektiven Geraden  $\overline{\Gamma(u)}$ ,  $u \in S \setminus \Gamma(s)$  oder die Ferngeraden von Ebenen  $E$ ,

die eine Gerade der Form  $\overline{\Gamma(u)}$ ,  $u \in S \setminus \Gamma(s)$  enthalten. Im Beweis der Konvexität haben wir gezeigt, daß die Geraden  $\overline{\Gamma(u)}$  die Menge  $\overline{K}$  in genau zwei Punkten schneiden, die Tangentengeraden an  $x$  sind also in diesem Fall genau die Ferngeraden von Ebenen in  $\mathcal{P}(\mathcal{L}, s)$ , die eine Parallelklasse des Laguerreraums enthalten. Die Vereinigung dieser Geraden bildet dann genau die Fernhyperebene, und wir erhalten die Behauptung.  $\square$

Wichtig für den fünften Paragraphen sind Laguerrerräume, die die folgende Bedingung erfüllen. Am Ende dieses Paragraphen werden wir sehen, daß im lokalkompakten zusammenhängenden Fall diese Eigenschaft stets folgt.

**Definition 3.6.** (Bedingung (DO)) *Wir sagen, ein Laguerrerraum erfülle die Bedingung (DO) (Dual-Ovoid-Bedingung), wenn für jede Hyperkugel  $K \in \mathfrak{K}_H$  auch die Menge der Tangentialhyperebenen  $\overline{K}^*$  von  $\overline{K}$  ein Ovoid im dualen projektiven Raum  $\mathcal{P}(\mathcal{L}, s)^*$  für jedes  $s \notin K$  bildet.*

## 3.2 Klassische Beispiele

**Ovoidale Laguerrerräume.** Die Ergebnisse aus BUECKENHOUT [Bue71] und KOPP [Kopp79] (siehe auch MÄURER [Mäu68] und [Mäu71]) besagen nun, daß jeder Möbius- bzw. Laguerrerraum vom Rang  $n \geq 4$  isomorph zu einem ovoidalen Möbius- bzw. Laguerrerraum über einem projektiven Raum vom Rang  $n + 1$  ist. Im Gegensatz dazu gibt es viele nichtklassische Beispiele für Möbius- und Laguerrerebenen, siehe [Groh69], SCHROTH [Sch95] und die dort angegebenen Artikel.

Die folgenden beiden Beispiele sind [Bue71] und [Kopp79] entnommen.

**Beispiel 3.7.** (Ovoidaler Möbiusraum) Sei  $\mathcal{P} = (P, \mathcal{L})$  ein projektiver Raum vom Rang  $n \geq 4$  und  $\mathcal{O} \subseteq P$  ein Ovoid. Dann ist

$$\mathfrak{M}(\mathcal{O}) := (\mathcal{O}, \mathfrak{K} := \{\mathcal{O} \cap E; E \text{ Ebene in } \mathcal{P} \text{ und } |\mathcal{O} \cap E| \geq 2\})$$

ein Möbiusraum vom Rang  $n - 1$ , der sogenannte **ovoidale Möbiusraum**.

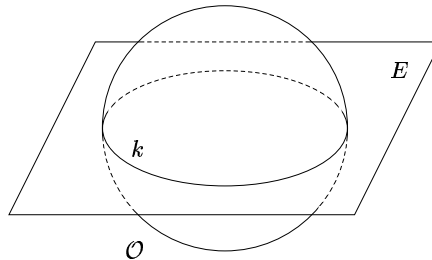
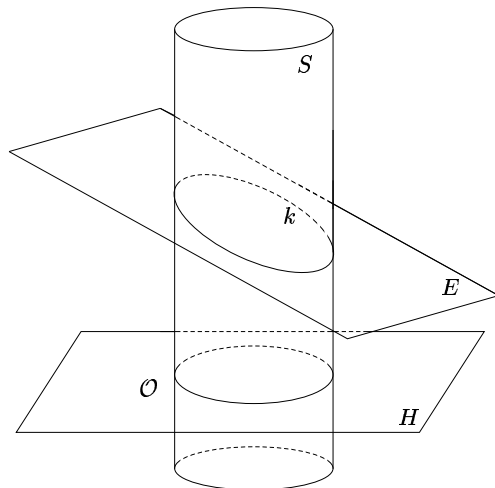


Abb. 3.2. Ovoidale Möbiusebene

**Beispiel 3.8.** (Ovoidaler Laguerrraum) Sei  $\mathcal{P} = (P, \mathcal{L})$  ein projektiver Raum vom Rang  $n \geq 4$ ,  $H \subseteq P$  eine Hyperebene und  $\mathcal{O} \subseteq H$  ein Ovoid. Weiter sei  $z \in P \setminus H$ . Dann heißt  $Z := \bigcup_{x \in \mathcal{O}} (x \vee z) \setminus \{z\}$  **Zylinder über  $\mathcal{O}$**  und

$$\mathfrak{L}(\mathcal{O}) := (Z, \mathfrak{K} := \{Z \cap E; z \notin E \text{ Ebene in } \mathcal{P} \text{ und } |Z \cap E| \geq 2\})$$

ist ein Laguerrraum vom Rang  $n - 1$ , der sogenannte **ovoidale Laguerrraum** über  $\mathcal{O}$ . Hier ist die Parallelklasse eines Punktes  $s \in Z$  genau die punktierte Gerade  $\Gamma(s) = (s \vee z) \setminus \{z\}$  und  $\mathcal{O}$  selbst eine Hyperkugel.



**Abb. 3.3.** Ovoidale Laguerreebene

Das nächste Lemma zeigt, daß die Ableitungen eines ovoidalen Laguerrraum als Unterräume des vorgegebenen projektiven Raumes betrachtet werden können. Dabei ist die unten definierte Abbildung  $\pi_s$  eine Art stereographische Projektion.

**Lemma 3.9.** Sei  $\mathfrak{L}(\mathcal{O}) = (S, \mathfrak{K})$  ein ovoidaler Laguerrraum in einem projektiven Raum  $\mathcal{P} = (P, \mathcal{L})$  wie in Beispiel 3.8,  $s \in S \setminus \mathcal{O}$  und  $C_s \subseteq H$  die eindeutige Tangentialhyperebene von  $\mathcal{O}$  an  $s' := H \wedge (z \vee s)$ . Dann bildet

$$\pi_s: S \setminus \Gamma(s) \longrightarrow H \setminus C_s; x \mapsto H \wedge (x \vee s)$$

die affine Ableitung  $\mathcal{A}(\mathfrak{L}(\mathcal{O}), s)$  von  $\mathfrak{L}(\mathcal{O})$  isomorph auf den affinen Unterraum  $\mathcal{A}_{H \setminus C_s} = (H \setminus C_s, \mathcal{L}_{H \setminus C_s} := \{l \setminus C_s; l \in \mathcal{L}, l \subseteq H\})$  von  $\mathcal{P}_H$  ab.

**Beweis:** Da jede Gerade von  $\mathcal{P}$  durch  $s$  den Zylinder  $Z$  in höchstens einem weiteren Punkt schneidet, ist  $\pi_s$  injektiv.

Umgekehrt sei  $y \in H \setminus C_s$  und  $l = y \vee s$ . Der Schnitt der Ebene  $E = (\{z\} \cup l)$  mit  $H$  ist eine Gerade  $g$  in  $H$ , die durch  $s'$  geht und, da  $y \in g$ , nicht in  $C_s$  enthalten

ist. Daher schneidet  $g$  das Ovoid  $\mathcal{O}$  in einem weiteren Punkt  $t$ . Da  $t \vee z$  ganz in der projektiven Unterebene  $E$  enthalten ist, schneidet  $l$  die Gerade  $t \vee z$  in einem Punkt  $x \in S$ , d.h.  $\pi_s$  ist surjektiv.

Die Geraden der Ableitung  $\mathcal{A}(\mathcal{L}(\mathcal{O}), s)$  sind die punktierten Kreise durch  $s$  und die Parallelklassen von Punkten, die nicht zu  $s$  parallel sind. Solch ein Kreis  $k$  bzw. eine Parallelklasse  $\Gamma(t)$  wird eindeutig durch eine Ebene  $E$  durch  $s$  bestimmt ( $k = Z \cap E$  bzw.  $\Gamma(t) = (Z \cap E) \setminus \Gamma(s)$ ). Weiter ist  $\pi_s(k)$  bzw.  $\pi_s(\Gamma(t))$  dann genau der Schnitt der Ebene  $E$  mit  $H \setminus C_s$ , also ist  $\pi_s$  ein Isomorphismus.  $\square$

Damit können wir eine Charakterisierung ovoidaler Laguerräume angeben, die die Bedingung (DO) erfüllen.

**Satz 3.10.** *Ein ovoidaler Laguerreraum  $\mathcal{L}(\mathcal{O}) = (S, \mathfrak{K})$  erfüllt genau dann die Bedingung (DO), wenn die Menge der Tangentialhyperebenen von  $\mathcal{O}$  ein Ovoid im dualen projektiven Raum bildet.*

**Beweis:**  $\implies$ : Erfülle  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{O})$  die Bedingung (DO). Sei  $s \in S \setminus \mathcal{O}$ . Dann ist  $\overline{\mathcal{O} \setminus \Gamma(s)}$  ein Ovoid in der Ableitung  $\mathcal{P}(\mathcal{L}, s)$ . Die Abbildung  $\pi_s$  aus dem obigen Lemma bildet  $\mathcal{O} \setminus \Gamma(s)$  (als Teilmenge des Punktraums von  $\mathcal{A}(\mathcal{L}, s)$ ) identisch auf  $\overline{\mathcal{O} \setminus \Gamma(s)}$  (als Teilmenge des Punktraums von  $\mathcal{A}_{H \setminus C_s}$ ) ab, also ist mit  $\overline{\mathcal{O} \setminus \Gamma(s)}$  auch  $\mathcal{O}$  ein Ovoid in  $\mathcal{P}_H$ , dessen Tangentialhyperebenen ein Ovoid in dem dualen Raum  $(\mathcal{P}_H)^*$  bilden.

$\impliedby$ : Gelte nun umgekehrt, daß die Tangentialhyperebenen von  $\mathcal{O}$  ein Ovoid bilden. Sei  $s \in S$  und  $K \in \mathfrak{K}_H$  eine Hyperkugel, die nicht durch  $s$  geht. Dann gibt es eine Hyperebene  $H_K$  von  $\mathcal{P}$  so, daß  $K = S \cap H_K$ . Die Abbildung

$$\pi: H \longrightarrow H_K; x \mapsto (x \vee z) \wedge H_K$$

ist ein Isomorphismus zwischen den beiden projektiven Räumen  $\mathcal{P}_H$  und  $\mathcal{P}_{H_K}$  und bildet  $\mathcal{O}$  auf  $K$  ab, d.h. mit  $\mathcal{O}$  ist auch  $K$  ein Ovoid in  $\mathcal{P}_{H_K}$ , dessen Tangentialhyperebenen ein Ovoid im dualen projektiven Raum bilden.

Nach dem obigen Lemma ist

$$\pi_s: S \setminus \Gamma(s) \longrightarrow H_K \setminus C_s; x \mapsto H_K \wedge (x \vee s)$$

ein Isomorphismus, wobei hier  $C_s$  die eindeutige Tangentialhyperebene von  $K$  an  $H_K \wedge (z \vee s)$  bezeichne. Weiter bildet  $\pi_s$  die Teilmenge  $\mathcal{O} \setminus \Gamma(s)$  des Punktraums von  $\mathcal{A}(\mathcal{L}, s)$  identisch auf  $\overline{\mathcal{O} \setminus \Gamma(s)}$  (als Teilmenge des Punktraums von  $\mathcal{A}_{H \setminus C_s}$ ) ab, und wir erhalten wie oben die Behauptung.  $\square$

**Das Quadrikmodell.** Im Hinblick auf den fünften Paragraphen, in dem wir aus Laguerräumen verallgemeinerte Vierecke konstruieren, geben wir an dieser Stelle ein weiteres Modell, das sogenannte Quadrikmodell, spezieller Laguerräume an: Sei dazu  $n \geq 5$ . Im projektiven Raum  $\mathbf{PG}(\mathbb{R}^n)$  über  $\mathbb{R}$  betrachten wir die durch die symmetrische lineare Abbildung

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & -1 & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

definierte Form  $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto x^T A y$  und die mit Hilfe von  $f$  erzeugte Relation des Senkrechtstehens auf  $\mathbb{R}^n$

$$x \perp y \iff f(x, y) = 0.$$

Sei weiter  $Q := \{\langle x \rangle \in \mathbf{PG}(\mathbb{R}^n); x \perp x\}$  die Quadrik bezüglich  $f$  und  $\langle z \rangle := \langle (0, \dots, 0, 1, 1, 0) \rangle \in Q$ . Wir definieren für jeden Punkt  $\langle x \rangle \in Q$  den Punktstern  $\langle x \rangle^\perp := \{\langle y \rangle \in Q; x \perp y\}$ . Mit diesen Notationen erhalten wir

**Satz 3.11.** *Die Inzidenzstruktur  $\mathfrak{L}(Q) := (S := \langle z \rangle^\perp \setminus \{\langle z \rangle\}, \mathfrak{K}_Q := Q \setminus \langle z \rangle^\perp, \mathbf{I})$  bildet einen Laguerrraum, wobei  $\mathbf{I} := \{(\langle x \rangle, \langle y \rangle) \in S \times \mathfrak{K}_Q; x \perp y\}$ . Weiter bildet die Menge  $\mathfrak{K}_Q$  den Raum der Hyperkugeln im Laguerrraum  $\mathfrak{L}(Q)$ .*

**Beweis:** Wir zeigen die Isomorphie von  $\mathfrak{L}(Q)$  zu einem ovoidalen Laguerrraum. Sei dazu  $\mathbb{S}_{n-4}$  die  $(n-4)$ -Sphäre,  $Z := \mathbb{S}_{n-4} \times \mathbb{R}$  der Zylinder im affinen Raum  $\mathbb{R}^{n-2}$  und  $\mathcal{K}_H = \{Z \cap H; H \text{ Hyperebene nicht parallel zur } x_{n-2}\text{-Achse}\}$ . Offensichtlich bildet dann

$$\mathfrak{L}(Z) = (Z, \mathfrak{K}_H)$$

einen ovoidalen Laguerrraum. Die Hyperkugeln von  $\mathfrak{L}(Z)$  sind genau die Schnitte des Zylinders  $Z$  mit Hyperebenen aus  $\mathbb{R}^{n-2}$ , die nicht parallel zur  $x_{n-2}$ -Achse sind. Zu jeder solchen Hyperebene  $H$  existiert ein  $p \in \mathbb{R}^{n-1}$  derart, daß  $H_p := H = \{q \in \mathbb{R}^{n-2}; p_1 q_1 + \dots + p_{n-2} q_{n-2} = p_{n-1}\}$  und wegen der Nichtparallelität zur  $x_{n-2}$ -Achse erhalten wir zusätzlich  $p_{n-2} \neq 0$ .

Wir bestimmen jetzt  $S$  und  $\mathfrak{K}_H$  genauer. Es gilt

$$\begin{aligned} S &= \{\langle x \rangle \in \mathbf{PG}(\mathbb{R}^n); x_1^2 + \dots + x_{n-2}^2 = x_{n-1}^2 + x_n^2 \text{ und } x_{n-2} = x_{n-1}\} \setminus \{\langle z \rangle\} \\ &= \{\langle (x_1, \dots, x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-2}, x_n) \rangle \in \mathbf{PG}(\mathbb{R}^n); x_1^2 + \dots + x_{n-3}^2 = x_n^2\} \setminus \{\langle z \rangle\} \\ &= \{\langle (x_1, \dots, x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-2}, 1) \rangle \in \mathbf{PG}(\mathbb{R}^n); x_1^2 + \dots + x_{n-3}^2 = 1\}, \end{aligned}$$

dabei benutzen wir für die letzte Gleichheit, daß  $x_n \neq 0$  (denn sonst wäre  $x$  der Nullvektor) und setzen  $x_n = 1$ . Wir können damit  $S$  durch die Abbildung

$$\alpha: S \longrightarrow \mathbb{S}_{n-4} \times \mathbb{R}; \langle (x_1, \dots, x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-2}, 1) \rangle \mapsto ((x_1, \dots, x_{n-3}), x_{n-2})$$

bijektiv auf den Zylinder  $\mathbb{S}_{n-4} \times \mathbb{R}$  im affinen Raum  $\mathbb{R}^{n-2}$  abbilden. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}_Q &= \{ \langle y \rangle \in \mathbf{PG}(\mathbb{R}^n); y_1^2 + \dots + y_{n-2}^2 = y_{n-1}^2 + y_n^2 \text{ und } \langle y \rangle \notin \langle z \rangle^\perp \} \\ &= \{ \langle y \rangle \in \mathbf{PG}(\mathbb{R}^n); y_1^2 + \dots + y_{n-2}^2 = y_{n-1}^2 + y_n^2 \text{ und } y_{n-2} \neq y_{n-1} \}, \end{aligned}$$

und wir erhalten

$$\beta: \mathfrak{K}_Q \longrightarrow \{ H_p; p \in \mathbb{R}^{n-1} \text{ und } x_{n-2} \neq 0 \}; \langle y \rangle \mapsto H_{(y_1, \dots, y_{n-3}, y_{n-2} - y_{n-1}, y_n)},$$

ist eine Bijektion, mit Umkehrabbildung

$$\begin{aligned} \beta^{-1}(H_x) &= \langle (x_1, \dots, x_{n-3}, \frac{1}{2x_{n-2}}(x_{n-1}^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-3}^2 + x_{n-2}^2), \\ &\quad \frac{1}{2x_{n-2}}(x_{n-1}^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-3}^2 - x_{n-2}^2), x_{n-1}) \rangle. \end{aligned}$$

Für die Inzidenz gilt

$$\begin{aligned} \langle x \rangle \mathbf{I} \langle y \rangle &\iff (x_1, \dots, x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-2}, 1) \perp (y_1, \dots, y_n) \\ &\iff x_1 y_1 + \dots + x_{n-2} y_{n-2} = x_{n-2} y_{n-1} + y_n \\ &\iff x_1 y_1 + \dots + x_{n-2} y_{n-2} - x_{n-2} y_{n-1} = y_n \\ &\iff (x_1, \dots, x_{n-2}) \in H_{(y_1, \dots, y_{n-3}, y_{n-2} - y_{n-1}, y_n)} \\ &\iff \alpha(x) \in H_{\beta(y)}. \end{aligned}$$

Also ist  $(\alpha, \beta)$  ein Isomorphismus von  $\mathfrak{L}(Q)$  auf  $\mathfrak{L}(Z)$  und es folgt die Behauptung.  $\square$

Bekanntermaßen wirkt die Untergruppe  $\Lambda$  der Automorphismengruppe von  $\mathbf{PG}(\mathbb{R}^n)$ , die  $Q$  festhält, transitiv auf  $Q$ , und wir erhalten als einfache Folgerung aus dem obigen Satz

**Folgerung 3.12.** *Für jeden Punkt  $\langle p \rangle \in Q$  bildet  $(\langle p \rangle^\perp \setminus \{ \langle p \rangle \}, Q \setminus \langle p \rangle^\perp, \mathbf{I})$  einen zu  $\mathfrak{L}(Q)$  isomorphen Laguererraum.*

### 3.3 Topologische Laguerrräume

Wir kommen nun zum Begriff des topologischen Laguerrraums. Bevor wir aber topologische Laguerrräume für beliebige Ränge definieren, geben wir kurz die Ergebnisse über topologische Laguerreebenen (also Laguerrräume vom Rang drei) an, die alle [Groh68] und [Groh69] entnommen sind.

**Topologische Laguerreebenen.** Eine Laguerreebene  $L = (S, \mathfrak{K})$  heißt topologisch, wenn  $S$  und  $\mathfrak{K}$  Topologien tragen, so daß die Abbildungen des Verbindens, des Berührens, des Schneidens und des Parallelprojizierens stetig sind.

Wie wir bereits gesehen haben, bildet die Ableitung  $\mathcal{A}(L, s)$  an jedem Punkt  $s \in S$  eine affine Ebene. Der Punktraum  $A = S \setminus \Gamma(s)$  trage die Relativtopologie. Ziel ist es jetzt, auf dem Geradenraum  $\mathcal{L}$  von  $\mathcal{A}(L, s)$  eine Topologie so zu konstruieren, daß  $\mathcal{A}(L, s)$  zu einer topologischen affinen Ebene wird. Ohne zusätzliche topologische Voraussetzungen ist dies aber bisher nicht möglich. Wir betrachten daher zunächst eine Unterstruktur von  $\mathcal{A}(L, s)$ .

**Definition 3.13.** (i) Eine dualaffine Ebene ist eine affine Ebene, aus deren Geradenmenge eine Parallelschar entfernt wurde.

(ii) Eine topologische dualaffine Ebene ist eine dualaffine Ebene, in der die geometrischen Abbildungen des Verbindens, des Schneidens, des Parallelziehens und des Parallelprojizierens stetig sind.

Insbesondere ist also eine topologische affine Ebene, aus deren Geradenmenge eine volle Parallelschar entfernt wurde, eine topologische dualaffine Ebene.

Der nächste Satz zeigt, daß die Ableitungen einer topologischen Laguerreebene bereits topologische dualaffine Ebenen bilden, vergl. [Groh68].

**Satz 3.14.** Sei  $L$  eine topologische Laguerreebene und  $s \in S$ . Dann ist

$$\mathcal{A}' := (A := S \setminus \Gamma(s), \mathcal{L}' := \{k \setminus \{s\}; s \in k \in \mathfrak{K}\})$$

mit den zugehörigen Relativtopologien eine topologische dualaffine Ebene.

Die Frage ist jetzt, ob sich die Topologie von  $\mathcal{L}'$  auf  $\mathcal{L} = \mathcal{L}' \cup \{\Gamma(t); t \in S \setminus \Gamma(s)\}$  so erweitern läßt, daß die Fortsetzungen des Schneidens, Verbindens und Parallelziehens stetig sind (ob unter anderem Berühren Grenzfall des echten Schneidens ist),  $\mathcal{A}$  also zu einer topologischen affinen Ebene wird. Zwar läßt sich nach Skornjakov [Sko54], S. 358 auf jeder Geraden  $g$  einer topologischen dualaffinen Ebene nach Wahl zweier Punkte  $0 \neq 1$  in natürlicher Weise eine Funktion  $t: g^3 \rightarrow g$  so konstruieren, daß  $(g, t)$  ein topologischer Ternärkörper ist und die daraus konstruierte topologische dualaffine Ebene

$$P = g^2, \quad G = \{(x, t(y, z, x)); x \in g\}; y, z \in g\}$$



isomorph zur vorgegebenen Ebene ist (vergleiche auch [Groh68], 1.6). Ohne zusätzliche Forderungen an die Topologien ist es aber im Allgemeinen nicht möglich, aus topologischen Ternärkörpern topologische affine Ebenen zu konstruieren, siehe zum Beispiel [SBGHLS95], Abschnitt 43.

Wir beschreiben nun solche geeigneten topologischen Bedingungen: Eine topologische Laguerreebene heißt lokalkompakt und zusammenhängend, wenn der Punkt-raum  $S$  lokalkompakt und zusammenhängend ist. Nach [Groh68], Satz 2.7 und [Groh69], 1.1 sind dann auch  $\mathfrak{K}$ , jeder Kreis, jede Parallelklasse und jede dualaffine Ebene von  $L$  lokalkompakt und zusammenhängend. Weiter sind die obigen Räume metrisierbar ([Groh69], 1.1) und jeder Kreis ist kompakt ([Groh69], 2.2). Unter diesen topologischen Voraussetzungen konnte die obige Frage positiv beantwortet werden (vergleiche [Groh69], Satz 2.7 und [Ste95], Seite 1332).

**Satz 3.15.** *Die Ableitungen einer endlichdimensionalen lokalkompakten zusammenhängenden Laguerreebene bilden endlichdimensionale lokalkompakte zusammenhängende affine Ebenen.*

Sei im folgenden  $L$  lokalkompakt und zusammenhängend. Nach [SBGHLS95], 43.7 kann  $\mathcal{A}(L, s)$  eindeutig zu einer kompakten zusammenhängenden projektiven Ebene  $\mathcal{P}(L, s)$  erweitert werden. Nach Satz 3.4 (iii) ist für jeden Kreis  $k \in \mathfrak{K}$ , der nicht durch  $s$  geht,  $\bar{k}$  ein Oval in  $\mathcal{P}(L, s)$ , und nach [BHL80], 2.6 abgeschlossen, also ein topologisches Oval. Mit Satz 2.17 (i) erhalten wir (vergleiche [BHL80], 3.2)

**Satz 3.16.** *Der Punktraum einer endlichdimensionalen, lokalkompakten und zusammenhängenden Laguerreebene ist zwei- oder vierdimensional. Weiter sind Kreise bzw. Parallelklassen einer solchen  $2n$ -dimensionalen Laguerreebene homöomorph zur  $n$ -Sphäre  $\mathbb{S}_n$  bzw. zum  $\mathbb{R}^n$ .*

Des weiteren folgt aus Lemma 2.20

**Lemma 3.17.** *Jede lokalkompakte zusammenhängende Laguerreebene erfüllt die Bedingung (DO).*

Ähnliche Aussagen werden wir, dank der Resultate aus Abschnitt 2.3, auch für topologische Laguerrräume erhalten.

**Topologische Laguerrräume.** Ähnlich wie bei topologischen projektiven Räumen wollen wir den Begriff der topologischen Laguerreebenen auf den räumlichen Fall verallgemeinern. Für die Definition topologischer Laguerreebenen benötigten wir lediglich Topologien auf Punkt- und Kreisraum, es liegt daher nahe, für die Definition topologischer Laguerrräume Topologien auf Punktraum und der Menge der Hyperkugeln zu betrachten.

**Definition 3.18.** (Topologischer Laguerrraum) *Sei  $\mathfrak{L} = (S, \mathfrak{K})$  ein Laguerrraum vom Rang  $n \geq 3$  und  $\mathfrak{K}_H$  die Menge der Hyperkugeln.  $\mathfrak{L}$  heißt topologisch, wenn  $S$  und  $\mathfrak{K}_H$  nichttriviale  $T_1$ -Topologien so tragen, daß die folgenden Abbildungen stetig sind:*

(i) *Hüllenbildung von  $n$  unabhängigen Punkten*

$$\vee^{(n)}: S^{(n)} \longrightarrow \mathfrak{K}_H; (s_1, \dots, s_n) \mapsto \langle \{s_1, \dots, s_{n+1}\} \rangle,$$

(ii) *Schnittbildung von  $n - 1$  unabhängigen Hyperkugeln*

$$\wedge^{(n-1)}: \mathfrak{K}_H^{(n-1)} \longrightarrow S \star S; (K_1, \dots, K_{n-1}) \mapsto \bigcap_{i=1}^{n-1} K_i,$$

und ferner die nach Lemma 3.4 definierten Abbildungen des Parallelprojizierens  $\gamma$  und des Berührens  $\beta$ .

**BEMERKUNG:** Die Forderung, daß die Räume  $S$  und  $\mathfrak{K}_H$   $T_1$ -Topologien tragen, läßt sich mit einigem Aufwand schon aus den anderen Axiomen ableiten (siehe zum Beispiel [Groh68] für den ebenen Fall). Da wir uns aber im folgenden sowieso nur für den lokalkompakten zusammenhängenden Fall interessieren und der Beweis analog zu Grohs Argumentation verläuft, verzichten wir an dieser Stelle darauf.

Topologische Laguerrräume vom Rang drei sind also insbesondere topologische Laguerreebenen.

Der nächste Satz zeigt, daß die in Beispiel 3.8 konstruierten ovoidalen Laguerrräume topologisch sind, wenn der zugrundeliegende projektive Raum kompakt und zusammenhängend und das Ovoid abgeschlossen ist, wobei wir nur für die Stetigkeit des Berührens die Abgeschlossenheit des Ovoids benötigen.

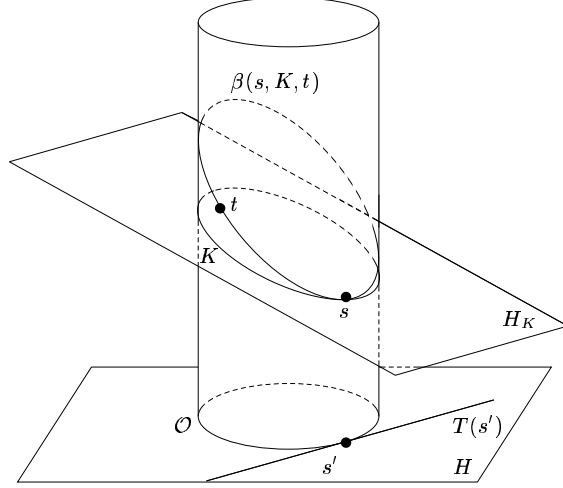
**Satz 3.19.** *Sei  $\mathcal{P} = (P, \mathcal{L})$  ein kompakter zusammenhängender projektiver Raum. Sei weiter  $H \in \mathcal{H}$  eine Hyperebene von  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{O} \subseteq H$  ein abgeschlossenes Ovoid in  $\mathcal{P}_H$  und  $z \in P \setminus H$ . Dann ist  $\mathfrak{L}(\mathcal{O})$  ein topologischer Laguerrraum.*

**Beweis:** Auf  $S = Z \subseteq P$  (siehe Beispiel 3.8) sei die Relativtopologie von  $P$  gegeben. Auf der Menge der Hyperkugeln  $\mathfrak{K}_H$  von  $\mathfrak{L}(\mathcal{O})$  sei die durch die Bijektion

$$\Phi: \{M \in \mathcal{H}; z \notin M\} \longrightarrow \mathfrak{K}_H; M \mapsto K_M := M \cap S$$

induzierte Topologie gegeben (umgekehrt bezeichnen wir mit  $H_K = \Phi^{-1}(K)$  die durch die Hyperkugel  $K \in \mathfrak{K}_H$  definierte Hyperebene aus  $\mathcal{P}$ ). Mit diesen Topologien folgt unmittelbar, daß die Abbildung der Hüllenbildung, des Schneidens und des Parallelprojizierens stetig sind.

Für die Stetigkeit des Berührens benötigen wir die in Lemma 2.22 bewiesene Stetigkeit der Abbildung  $T: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{C}_H := \{C \in \mathcal{C}; C \subseteq H\}$ , die jedem Punkt  $x \in \mathcal{O}$  die eindeutige in  $H$  liegende tangentielle Cogerade  $C_x$  zuordnet. Seien  $s, t \in S$  und  $K \in \mathfrak{K}_H$  mit  $s \in K$  und  $t$  nichtparallel zu  $s$ . Sei  $s' = (s \vee z) \wedge H = \gamma(s, \mathcal{O})$ . Mit  $C' := T(s') \in \mathcal{C}$  bezeichnen wir die eindeutige in  $H$  liegende Cogerade, die  $\mathcal{O}$  in  $s'$  berührt. Dann ist  $C := \langle C', z \rangle \wedge H_K$  eine Cogerade in  $H_K$ , die  $K$  in  $s$  berührt. Also schneiden sich die Hyperebenen  $M := \langle C, z \rangle$  und  $H_K$  nur in  $C$  und damit die Hyperkugeln  $K_M$  und  $K$  nur im Punkt  $s$ . Da weiter  $t \in K_M$ , ist  $K_M$  der gesuchte Berührkreis. Insgesamt erhalten wir damit  $\beta(s, K, t) = \langle \langle T((s \vee z) \wedge H), z \rangle \wedge H_K, t \rangle$ . Also handelt es sich bei der Abbildung  $\beta$  um eine stetige Abbildung.  $\square$



Bevor wir die Ableitung eines topologischen Laguerräume untersuchen, benötigen wir noch einige Eigenschaften topologischer Laguerräume. Unter anderem zeigen wir, daß in dem für uns interessanten Fall die Topologie auf der Menge der Hyperkugeln schon eindeutig durch die Topologie des Punktraumes bestimmt wird (Lemma 3.21).

**Lemma 3.20.** *Sei  $\mathfrak{L} = (S, \mathfrak{K})$  ein topologischer Laguerraum. Dann gilt:*

- (i) *Hyperkugeln sind untereinander homöomorph und abgeschlossen in  $S$ .*
- (ii) *Parallelklassen sind untereinander homöomorph und abgeschlossen in  $S$ .*
- (iii) *Jedes Berührbüschel in  $\mathfrak{K}_H$  ist homöomorph zu einer Parallelklasse.*

**Beweis:** (i) Seien  $K_1, K_2 \in \mathfrak{K}_H$  zwei Hyperkugeln. Dann ist die Einschränkung des Parallelprojizierens

$$\gamma|_{K_1 \times \{K_2\}}: K_1 \rightarrow K_2, x \mapsto \gamma(x, K_2)$$

stetig. Die Umkehrabbildung von  $\gamma|_{K_1 \times \{K_2\}}$  ist  $\gamma|_{K_2 \times \{K_1\}}$ , also sind Hyperkugeln untereinander homöomorph.

Für jedes  $s \in S$  und  $K \in \mathfrak{K}_H$  mit  $s \in K$  ist die Einschränkung des Berührens

$$\beta_s := \beta|_{\{s\} \times \{K\} \times S \setminus \Gamma(s)}: S \setminus \Gamma(s) \longrightarrow \mathfrak{K}_H$$

eine stetige Abbildung und  $\beta_s^{-1}(K) = K \setminus \{s\}$ . Da  $\mathfrak{K}_H$  ein  $T_1$ -Raum ist, ist  $\{K\}$  abgeschlossen in  $\mathfrak{K}_H$  und damit  $K \setminus \{s\}$  abgeschlossen in  $S \setminus \Gamma(s)$ , d.h. es gibt eine abgeschlossene Teilmenge  $A_s$  von  $S$  mit  $(S \setminus \Gamma(s)) \cap A_s = K \setminus \{s\}$ . Ist  $t \in K$  ein weiterer Punkt, so ist auch  $K \setminus \{t\} = \beta_t^{-1}(K)$  abgeschlossen in  $S \setminus \Gamma(t)$  und es existiert eine abgeschlossene Teilmenge  $A_t$  in  $S$  mit  $(S \setminus \Gamma(t)) \cap A_t = K \setminus \{t\}$ . Insgesamt erhalten wir  $A_s \cap A_t = K$  und damit die Abgeschlossenheit von  $K$ .

(ii) Seien  $s, t, u \in S$  paarweise nichtparallel und  $K$  eine Hyperkugel durch  $u$ . Dann ist die Abbildung

$$\Gamma(s) \longrightarrow \Gamma(t); x \mapsto \gamma(t, \beta(u, K, x))$$

als Komposition stetiger Abbildungen wieder stetig. Da die Umkehrabbildung durch  $\Gamma(t) \longrightarrow \Gamma(s); y \mapsto \gamma(s, \beta(u, K, y))$  gegeben ist, sind Parallelklassen untereinander homöomorph.

Da die Abbildung  $\gamma|_{S \times \{K\}}$  stetig ist, folgt die Abgeschlossenheit von  $\Gamma(u)$  aus  $\Gamma(u) = (\gamma|_{S \times \{K\}})^{-1}(u)$  und der Abgeschlossenheit von  $\{u\}$  in  $S$  ( $S$  ist  $T_1$ -Raum).

(iii) Sei  $s \in S$  und  $K$  eine Hyperkugel durch  $s$ . Sei weiter  $t \not\parallel s$ . Dann ist die Einschränkung des Parallelprojizierens

$$B(s, K) \longrightarrow \Gamma(t); M \mapsto \gamma(t, M)$$

stetig mit stetiger Umkehrabbildung  $\Gamma(t) \longrightarrow B(s, K); x \mapsto \beta(s, K, x)$ .  $\square$

Das nächste Lemma zeigt, zusammen mit der Aussage (ii) des obigen Lemmas, daß die Topologie auf dem Raum der Hyperkugeln schon eindeutig durch die Topologie auf einer Parallelklasse bestimmt wird.

**Lemma 3.21.** *Sei  $\mathfrak{L} = (S, \mathfrak{K})$  ein topologischer Laguerreraum vom Rang  $n \geq 3$  und  $(s_1, \dots, s_n) \in S^{(n)}$ . Dann ist die Abbildung*

$$\vee^{(n)}|_{\Gamma(s_1) \times \dots \times \Gamma(s_n)}: \Gamma(s_1) \times \dots \times \Gamma(s_n) \longrightarrow \mathfrak{K}_H; (x_1, \dots, x_n) \mapsto \langle \{x_1, \dots, x_n\} \rangle$$

ein Homöomorphismus.

**Beweis:** Offensichtlich ist  $\vee^{(n)}|_{\Gamma(s_1) \times \dots \times \Gamma(s_n)}$  wohldefiniert, d.h. mit  $(s_1, \dots, s_n)$  sind auch  $(x_1, \dots, x_n) \in \Gamma(s_1) \times \dots \times \Gamma(s_n)$  unabhängig.

Weiter ist  $\vee^{(n)}|_{\Gamma(s_1) \times \dots \times \Gamma(s_n)}$  als Einschränkung der Hüllenbildung stetig, und da auch die Umkehrabbildung

$$\mathfrak{K}_H \longrightarrow \Gamma(s_1) \times \dots \times \Gamma(s_n); K \mapsto (\gamma(s_1, K), \dots, \gamma(s_n, K))$$

stetig ist, folgt die Behauptung.  $\square$

Für weitere topologische Eigenschaften benötigen wir die Ableitung topologischer Laguerräume.

### 3.4 Ableitung topologischer Laguerräume

Ähnlich wie bei topologischen Laguerreebenen betrachten wir nun die affinen Ableitungen an jedem Punkt und zeigen, daß es sich hierbei um topologische affine Räume handelt. Im Unterschied zum ebenen Fall ist dies aber ohne zusätzliche topologische Voraussetzungen möglich, da hier die Ableitungen desarguessch sind, der zugrundeliegende Ternärkörper schon ein Schiefkörper ist.

**Definition 3.22.** (dualaffiner Raum)<sup>†</sup> (i) Ein dualaffiner Raum ist ein affiner Raum, aus dessen Geradenmenge eine volle Parallelschar entfernt wurde.

(ii) Ein topologischer dualaffiner Raum ist ein dualaffiner Raum, in dem die geometrischen Abbildungen der Hüllenbildung, des Schneidens, des Parallelziehens und des Parallelprojizierens stetig sind.

**Lemma 3.23.** Sei  $\mathcal{L} = (S, \mathfrak{K})$  ein topologischer Laguerraum. Dann ist

$$\mathcal{A}'(\mathcal{L}, s) := (A := S \setminus \Gamma(s), \mathcal{L}' := \{k \setminus \{s\}; s \in k \in \mathfrak{K}\})$$

für jedes  $s \in S$  ein topologischer dualaffiner Raum.

Mit  $\mathcal{H}' = \{K \setminus \{s\}; s \in K \in \mathfrak{K}_H\}$  bezeichnen wir die Menge der Hyperebenen von  $\mathcal{A}'(\mathcal{L}, s)$ .

**Beweis:** Auf  $A$  bzw.  $\mathcal{H}'$  seien die Relativtopologien von  $S$  und  $\mathfrak{K}_H$  gegeben. Die Abbildung der Hüllenbildung ist Einschränkung der entsprechenden Abbildung im Laguerraum. Die Stetigkeit des Parallelziehens folgt aus der Stetigkeit des Berührens und die Stetigkeit der Parallelprojektion schließlich aus der Stetigkeit der Parallelprojektion im Laguerraum.

Wir müssen also nur noch die Stetigkeit des Schneidens zeigen. Sei  $U$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $S$ . Da  $S$  ein  $T_1$ -Raum ist, ist  $V := U \cup \{s\}$  abgeschlossen in  $S$  und damit auch  $V \star V$  in  $S \star S$ . Da das Urbild des Schneidens von  $U \cap A$  im abgeleiteten dualaffinen Raum gerade  $A \cap (\wedge^{(n-1)})^{-1}(V \star V)$  ist, folgt die Abgeschlossenheit aus der Stetigkeit des Schneidens im Laguerraum.  $\square$

Ist nun ein topologischer dualaffiner Raum  $\mathcal{A}' = (A, \mathcal{L}')$  vom Rang  $n \geq 4$  gegeben und  $K := g \in \mathcal{L}'$  eine Gerade, so können wir wie Skornjakov in [Sko54] in natürlicher Weise eine Funktion  $\tau: K^3 \rightarrow K$  so definieren, daß  $(K, \tau)$  ein topologischer Ternärkörper und der daraus konstruierte dualaffine Raum

$$P = K^{n-1}, \quad G = \{x \cdot K + y; x, y \in K^{n-1}\}$$

isomorph zu  $\mathcal{A}'$  ist. Da  $\mathcal{A}'$  desarguessch ist, ist  $K$  schon ein Körper und die Stetigkeit von  $\tau$  impliziert die Stetigkeit der Körperoperationen, also ist  $(K, \tau)$  ein

<sup>†</sup> In der Literatur sind orientierter affiner Raum und richtungsaffiner Raum zwar gebräuchlicher, in Anlehnung an Definition 3.13 benutzen wir in dieser Arbeit aber diesen Begriff

topologischer Körper. Anders als im ebenen Fall kann man hier ohne topologische Zusatzvoraussetzungen einen topologischen affinen Raum wie in Abschnitt 2.1 konstruieren, dessen Geradenmenge  $\mathcal{L}$  die Geradenmenge  $G$  des dualaffinen Raumes als topologischen Teilraum enthält, d.h. auf der Teilmenge  $G$  von  $\mathcal{L}$  ist die Relativtopologie von  $\mathcal{L}$  gegeben. Wir erhalten damit einen der Hauptsätze dieses Abschnittes

**Satz 3.24.** *Die Ableitungen eines topologischen Laguerreraums vom Rang größer gleich vier bilden topologische affine Räume.*

Wie üblich stellen wir zusätzliche Voraussetzungen an die Topologien und wenden uns dem für uns interessantesten Fall zu: Wir nennen einen topologischen Laguerreraum lokalkompakt und zusammenhängend, wenn der Punktraum lokalkompakt und zusammenhängend ist.

Um im nächsten Satz zeigen zu können, daß damit alle für uns interessanten Räume ebenfalls lokalkompakt und zusammenhängend sind, benötigen wir zuvor

**Lemma 3.25.** *In einem topologischen Laguerreraum sind Parallelklassen zweifach homogen<sup>‡</sup>.*

**Beweis:** Sei  $\Gamma(s)$  eine Parallelklasse in einem topologischen Laguerreraum  $\mathcal{L} = (S, \mathfrak{K})$ ,  $s \in S$  und sei  $t \in S$  ein weiterer Punkt, der zu  $s$  nicht parallel ist. Dann ist  $\Gamma(s)$  eine Gerade der Ableitung an  $t$ , die in einer Ebene  $E$  von  $\mathcal{A}(\mathcal{L}, u)$  liegt. Da die affine Ebene  $E_{\mathcal{A}(\mathcal{L}, t)}$  als Unterebene von  $\mathcal{A}(\mathcal{L}, t)$  ebenfalls topologisch ist, folgt die Behauptung aus der bekannten Tatsache, daß Geraden in einer topologischen Ebene zweifach homogen sind (siehe z.B. [SBGHLS95], 41.2 (a)).  $\square$

Zusammen mit Satz 3.24 folgt daraus der zweite Hauptsatz dieses Abschnittes.

**Satz 3.26.** *Sei  $\mathcal{L}$  ein lokalkompakter zusammenhängender Laguerreraum vom Rang  $n \geq 3$ . Dann sind die Ableitungen  $\mathcal{A}(\mathcal{L}, s)$  und deren projektive Abschlüsse  $\mathcal{P}(\mathcal{L}, s)$  lokalkompakte bzw. kompakte zusammenhängende Räume.*

**Beweis:** Für  $n = 3$  wurde dies im letzten Abschnitt besprochen. Sei also im folgenden  $n > 3$ . Wir müssen lediglich zeigen, daß mit  $S$  auch jede Parallelklasse lokalkompakt und zusammenhängend ist. Die Aussage folgt dann schon aus den Ergebnissen des zweiten Paragraphen (Satz 2.11 und 2.15).

Da nach Lemma 3.20 (ii) jede Parallelklasse abgeschlossen ist, vererbt sich die Lokalkompaktheit von  $S$  auf diese Teilmengen.

Angenommen eine (und damit jede) Parallelklasse  $\Gamma(s)$ ,  $s \in S$  wäre nicht zusammenhängend. Da nach Lemma 3.25 Parallelklassen zweifach homogen sind, folgt,  $\Gamma(s)$  ist total unzusammenhängend. Nach dem obigen Satz bildet die Ableitung

<sup>‡</sup> d.h. die Homöomorphismengruppe wirkt zweifach transitiv

$\mathcal{A}(\mathcal{L}, t)$  für einen nicht zu  $s$  parallelen Punkt  $t \in S$  einen topologischen affinen Raum. Damit ist jede Hyperebene homöomorph zum  $(n - 2)$ -fachen Produkt der Parallelklasse  $\Gamma(s)$ , also selbst total unzusammenhängend. Jede punktierte Hyperkugel  $K \setminus \{t\}$ ,  $K \in \mathfrak{K}_H$ , bildet eine Hyperebene in  $\mathcal{A}(\mathcal{L}, t)$ , d.h.  $K \setminus \{u\}$  ist total unzusammenhängend für alle  $u \in K$ . Da ein  $T_1$ -Raum aber, in dem jede Lochung total unzusammenhängend ist, bereits selbst total unzusammenhängend ist, sind Hyperkugeln insbesondere nicht zusammenhängend. Andererseits ist aber eine Hyperkugel  $K \in \mathfrak{K}_H$  das Bild der zusammenhängenden Menge  $S$  unter der stetigen Abbildung

$$\gamma|_{S \times \{K\}}: S \longrightarrow K; x \mapsto \gamma(s, K),$$

also selbst wieder zusammenhängend, ein Widerspruch.  $\square$

### 3.5 Darstellungssatz topologischer Laguerräume

Wir wollen in diesem Abschnitt das Hauptresultat aus [Kopp79] für den topologischen Fall beweisen, genauer, wir zeigen, daß ein lokalkompakter zusammenhängender Laguerreraum vom Rang  $n \geq 4$  bereits ein ovoidaler Laguerreraum über einem abgeschlossenen Ovoid in einem kompakten zusammenhängenden projektiven Raum über  $\mathbb{R}$  vom Rang  $n + 1$  ist, und Punkt- und Hyperkugelraum die Relativtopologien des zugrundeliegenden projektiven Raums tragen.

Jeder Laguerreraum vom Rang  $n \geq 4$  ist nach [Kopp79] ovoidal. Sei also im folgenden  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{O}) = (S, \mathfrak{K})$  ein Laguerreraum wie in Beispiel 3.8 (die Bezeichnungen  $\mathcal{P}$ ,  $H$ ,  $\mathcal{O}$  und  $z$  übernehmen wir aus diesem Beispiel) und seien  $S$  und  $\mathfrak{K}_H$  mit solchen Topologien  $\tau_S$  und  $\tau_{\mathfrak{K}_H}$  versehen, daß  $\mathcal{L}$  lokalkompakt und zusammenhängend ist.

Zunächst statuen wir  $\mathcal{P}_H$  mit Hilfe von Lemma 3.9 so mit Topologien aus, daß das Residuum  $\mathcal{P}_H$  zu einem topologischen projektiven Raum wird. Sei  $s \in S \setminus H$ . Die Abbildung  $\pi_s$  aus Lemma 3.9 bildet die affine Ableitung  $\mathcal{A}(\mathcal{L}, s)$  isomorph auf den affinen Unterraum  $\mathcal{A}_{H \setminus C_s}$  ab. Da nach Satz 3.24 diese Ableitung topologisch ist, können wir mit Hilfe von  $\pi_s$  die Topologien von  $\mathcal{A}(\mathcal{L}, s)$  auf  $\mathcal{A}_{H \setminus C_s}$  übertragen. Damit wird dieser Raum zu einem topologischen affinen Raum und die Topologien lassen sich so erweitern, daß auch der projektive Abschluß  $\mathcal{P}_H$  topologisch ist. Dank des Darstellungssatzes für topologische projektive Räume läßt sich ganz  $\mathcal{P}$  damit zu einem kompakten zusammenhängenden projektiven Raum machen, in dem die oben definierten Topologien für das Residuum  $\mathcal{P}_H$  als Relativtopologien zurückgewonnen werden können. Wir bezeichnen die so erhaltene Topologie auf dem Punktraum  $P$  des projektiven Raumes mit  $\tau_P$ . Zunächst hängt diese Topologie von der Wahl des Punktes  $s$  ab, wir werden aber im folgenden sehen, daß  $\tau_P$  unabhängig von  $s$  ist.

Das nächste Lemma zeigt, daß die Relativtopologien  $\tau_S|_{S \setminus \Gamma(s)}$  und  $\tau_P|_{S \setminus \Gamma(s)}$  von  $\tau_S$  und  $\tau_P$  auf der Teilmenge  $S \setminus \Gamma(s)$  von  $S$  bereits übereinstimmen.

**Lemma 3.27.** *Die Identität*

$$\text{Id}_{S \setminus \Gamma(s)}: (S \setminus \Gamma(s), \tau_P|_{S \setminus \Gamma(s)}) \longrightarrow (S \setminus \Gamma(s), \tau_S|_{S \setminus \Gamma(s)})$$

*ist ein Homöomorphismus.*

**Beweis:** Da  $\mathcal{P}$  ein topologischer projektiver Raum ist, sind die Abbildungen des Verbindens zweier Punkte und des Schneidens einer Gerade mit einer Hyperebene stetig. Da  $\pi_s$  aus diesen beiden Abbildungen zusammengesetzt ist, ist  $\pi_s$  auch eine stetige Abbildung von  $(S \setminus \Gamma(s), \tau_P|_{S \setminus \Gamma(s)})$  auf  $H \setminus C_s$ . Da  $\pi_s$  ein Homöomorphismus von  $(S \setminus \Gamma(s), \tau_S|_{S \setminus \Gamma(s)})$  auf  $H \setminus C_s$  ist, ist die Identität  $\text{Id}_{S \setminus \Gamma(s)} = (\pi_s)^{-1} \circ \pi_s$  also eine stetige Bijektion.

Wir zeigen nun, daß der Raum  $(S \setminus \Gamma(s), \tau_P|_{S \setminus \Gamma(s)})$  homöomorph zu  $\mathbb{R}^m$  ist, die Behauptung folgt dann sofort aus dem Gebietsinvarianzsatz (Satz 1.2):

Sei  $t \in S \setminus \Gamma(s)$ . Dann ist  $(S \setminus \Gamma(s), \tau_P|_{S \setminus \Gamma(s)})$  homöomorph zu  $(\mathcal{O} \setminus \{s'\}) \times \Gamma(t)$ ,  $s' = (z \vee s) \wedge H$ , wobei beide Räume mit den Relativtopologien von  $P$  ausgestattet seien. Da  $\Gamma(t)$  eine affine Gerade in  $\mathcal{P}$  ist und  $\mathcal{P}$  kompakt und zusammenhängend ist, folgt aus dem Darstellungssatz für topologische projektive Räume  $\Gamma(t) \cong \mathbb{R}^a$  für ein  $a \in \mathbb{N}$ .

Jede punktierte Hyperkugel  $K \setminus \{u\}$  ist eine Hyperebene in der Ableitung  $\mathcal{A}(\mathcal{L}, u)$  und da  $\mathcal{A}(\mathcal{L}, u)$  nach Satz 3.26 lokalkompakt und zusammenhängend ist, ist  $K \setminus \{u\}$  (bezüglich der Relativtopologie induziert von  $\tau_S$ ) homöomorph zu  $\mathbb{R}^b$  für ein  $b \in \mathbb{N}$ . Also ist auch  $\mathcal{O} \setminus \{s'\} \subseteq (S \setminus \Gamma(s), \tau_S|_{S \setminus \Gamma(s)})$  homöomorph zu  $\mathbb{R}^b$ . Da die Abbildung  $\pi_s$  ein Homöomorphismus ist, ist  $\mathcal{O} \setminus \{s'\}$  auch als Teilmenge von  $H \setminus C_s$  homöomorph zu  $\mathbb{R}^b$  und damit auch als Teilmenge von  $P$ . Insgesamt erhalten wir also  $(S \setminus \Gamma(s), \tau_P|_{S \setminus \Gamma(s)}) \cong \mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^b$ . Da auch  $(S \setminus \Gamma(s), \tau_S|_{S \setminus \Gamma(s)})$  homöomorph zu  $\mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^b$  ist, folgt aus dem Gebietsinvarianzsatz die Homöomorphie der Abbildung  $\text{Id}_{S \setminus \Gamma(s)}$ .  $\square$

Als Folgerung aus diesem Lemma erhalten wir insbesondere, daß die oben konstruierten Topologien unabhängig von der Wahl des Punktes  $s \in S$  sind.

**Folgerung 3.28.** *Für jedes  $u \in S \setminus \mathcal{O}$  ist die Abbildung  $\pi_u$  ein topologischer Isomorphismus zwischen den topologischen affinen Räumen  $\mathcal{A}(\mathcal{L}, u)$  und  $\mathcal{A}_{H \setminus C_u}$ .*

**Beweis:** Daß  $\pi_u$  ein Isomorphismus ist, wurde in Lemma 3.9 gezeigt. Um einzusehen, daß es sich hierbei um einen Homöomorphismus handelt, müssen wir, dank des Darstellungssatzes, lediglich die Homöomorphie einer Einschränkung  $\pi_u|_l$  auf einer Geraden  $l$  von  $\mathcal{A}(\mathcal{L}, u)$  zeigen.

Sei also  $t \in S$ , der weder zu  $s$  noch zu  $u$  parallel ist. Dann ist  $l := \Gamma(t)$  eine Gerade in  $\mathcal{A}(\mathcal{L}, u)$ . Nach Lemma 3.27 stimmen auf  $l$  die Relativtopologien von  $S$  und  $P$  überein und da  $\pi_u|_l$  bezüglich der Relativtopologie auf  $P$  stetig ist (als Komposition des Verbindens und Schneidens), folgt auch die Stetigkeit bezüglich



der Topologie auf  $S$ . Nach dem Gebietsinvarianzsatz 1.2 induziert  $\pi_u|_l$  damit einen Homöomorphismus.  $\square$

Wir erhalten damit die Abgeschlossenheit des Ovoids  $\mathcal{O}$ .

**Lemma 3.29.** *Das Ovoid  $\mathcal{O} \subseteq H$  ist bezüglich der Topologie  $\tau_P$  abgeschlossen.*

**Beweis:** Seien  $s_1, s_2, s_3 \in S \setminus H$  drei paarweise nichtparallele Punkte und seien  $s_i$  die Projektionen  $s'_i = H \wedge (z \vee s_i)$  der Punkte  $s_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  auf  $H$ . Die drei affinen Teilräume  $H \setminus C_{s_i}$  sind offene Teilmengen von  $H$  ( $C_{s_i}, i = 1, 2, 3$  sind Teilräume von  $\mathcal{P}_H$  und damit nach Lemma 2.10 (ii) abgeschlossen) und überdecken  $H$ . Nach Lemma 3.20 (i) ist  $\mathcal{O}$  abgeschlossen im Laguerreraum und da  $\pi_{s_i}$  ein Homöomorphismus auf  $H \setminus C_{s_i}$  ist, ist  $\pi_{s_i}(\mathcal{O} \setminus \{s'_i\}) = \mathcal{O} \setminus \{s'_i\}$  abgeschlossen in  $H \setminus C_{s_i}$ , also  $(H \setminus C_{s_i}) \setminus (\mathcal{O} \setminus \{s'_i\})$  offen in  $H \setminus C_{s_i}$  und damit auch in  $H$  für jedes  $i = 1, 2, 3$ . Da sich  $H \setminus \mathcal{O}$  als Vereinigung dieser drei offenen Mengen schreiben läßt,  $H \setminus \mathcal{O} = \bigcup_{i=1}^3 (H \setminus C_{s_i}) \setminus (\mathcal{O} \setminus \{s'_i\})$ , ist  $H \setminus \mathcal{O}$  selbst offen, also  $\mathcal{O}$  abgeschlossen.  $\square$

Statten wir nun Punkt- und Hyperkugelraum des Laguerreraums  $\mathfrak{L}$  mit den Relativtopologien von  $P$  und  $\mathcal{H}$  (Hyperebenenraum von  $\mathcal{P}$ ) aus, so erhalten wir mit Satz 3.19 einen topologischen Laguerreraum. Unser Ziel ist es nun, zu zeigen, daß diese Topologien gleich den vorgegebenen Topologien  $\tau_S$  und  $\tau_{\mathfrak{R}H}$  sind. Dabei müssen wir nur die Gleichheit von  $\tau_S$  und  $\tau_P|_S$  zeigen, da nach Lemma 3.21 die Topologie auf der Menge der Hyperkugeln eines topologischen Laguerreraums schon eindeutig durch die Topologie auf einer Parallelklasse bestimmt wird.

Ein weiterer Schritt in diese Richtung ist die folgende Erweiterung von Folgerung 3.28.

**Lemma 3.30.** *Die Topologie  $\tau_S$  auf dem Punktraum  $S$  des Laguerreraums  $\mathfrak{L}$  ist gleich der durch die Topologie des Punktraums von  $\mathcal{P}$  induzierten Relativtopologie.*

**Beweis:** Wir zeigen, daß die Identität

$$\text{Id}_S: (S, \tau_P|_S) \longrightarrow (S, \tau_S)$$

ein Homöomorphismus ist. Nach Konstruktion der Topologie  $\tau_P$  ist die Einschränkung von  $\text{Id}_S$  auf  $S \setminus \Gamma(s)$  ein Homöomorphismus. Aus Folgerung 3.28 erhalten wir auch die Homöomorphie der Einschränkung  $S \setminus \Gamma(u)$  für jedes  $u \in S \setminus (\mathcal{O} \cup \Gamma(s))$ . Da  $\Gamma(u)$  und  $\Gamma(s)$  nach Lemma 3.20 (ii) abgeschlossen sind, folgt die Behauptung.  $\square$

Als Summe der obigen Resultate erhalten wir damit den Hauptsatz dieses Abschnittes.

**Satz 3.31.** *Jeder lokalkompakte zusammenhängende Laguerreraum vom Rang  $n \geq 4$  ist topologisch isomorph zu einem ovoidalen Laguerreraum über einem abgeschlossenen Ovoid in einem kompakten zusammenhängenden projektiven Raum vom Rang  $n + 1$ .*

**Folgerungen aus dem Darstellungssatz.** In diesem Abschnitt fassen wir einige einfache Folgerungen aus dem Hauptsatz zusammen, die wir im fünften Paragraphen für die Konstruktion topologischer Vierecke aus topologischen Laguerräumen benötigen.

Zunächst zeigen wir, daß sich, ähnlich wie bei topologischen Laguerreebenen, auch für topologische Laguerräume die topologischen Parameter einschränken lassen.

**Satz 3.32.** *Sei  $\mathcal{L}$  ein lokalkompakter zusammenhängender Laguerreraum vom Rang  $n \geq 4$ . Dann ist  $\mathcal{L}$  isomorph zu einem ovoidalen Laguerreraum über einem abgeschlossenen Ovoid in einem projektiven Raum über  $\mathbb{R}$ .*

**Beweis:** Nach Lemma 3.29 ist  $\mathcal{O}$  abgeschlossen. Da  $n \geq 4$ , ist der Rang des umgebenen projektiven Raums  $\mathcal{P}$  mindestens 5, also ist der Rang von  $\mathcal{P}_H$  größer gleich vier. Nach Satz 2.17 (ii) existieren abgeschlossene Ovoide in kompakten zusammenhängenden projektiven Räumen vom Rang  $n \geq 4$  aber nur in projektiven Räumen über  $\mathbb{R}$ .  $\square$

Aus den Sätzen 2.21, 3.10 und aus Lemma 3.29 folgt unmittelbar, daß jeder lokalkompakte zusammenhängende Laguerreraum die Bedingung (DO) erfüllt, wobei der ebene Fall bereits in Lemma 3.17 behandelt wurde.

**Lemma 3.33.** *Jeder lokalkompakte zusammenhängende Laguerreraum erfüllt die Bedingung (DO).*

In den von uns im fünften Paragraphen konstruierten Vierecken bilden (erweiterte) Parallelklassen und (erweiterte) Berührungskugeln die Geraden des Vierecks. Für einige Beweise benötigen wir daher topologische Eigenschaften dieser Objekte, die wir im übernächsten Lemma zusammenfassen (für den ebenen Fall siehe [Groh69] und [Ste95]). Ausgestattet wird der Geradenraum mit der Hausdorffmetrik. Wir zeigen deshalb zunächst, ähnlich wie im Fall der kompakten zusammenhängenden projektiven Räume (vergleiche Lemma 2.13):

**Lemma 3.34.** *Die Topologie auf der Menge der Hyperkugeln ist gleich der bezüglich der Hausdorffmetrik induzierten Topologie.*

**Beweis:** Sei also  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathfrak{K}_H$ , die gegen eine Hyperkugel  $K \in \mathfrak{K}_H$  bezüglich der ursprünglichen Topologie konvergiert. Da  $\liminf_{n \in \mathbb{N}} K_n \subseteq \limsup_{n \in \mathbb{N}} K_n$  ist, müssen wir lediglich  $\limsup_{n \in \mathbb{N}} K_n \subseteq K \subseteq \liminf_{n \in \mathbb{N}} K_n$  zeigen.

(i) Wir zeigen zunächst die erste Inklusion. Nach dem Darstellungssatz tragen die Räume  $\mathcal{S}$  und  $\mathfrak{K}_H$  die Relativtopologien der Räume  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{H}$  des umgebenen projektiven Raums  $\mathcal{P}$ . Da der Inzidenzgraph  $I_{1,n-1} = \{(x, H) \in \mathcal{P} \times \mathcal{H}; x \in H\}$  nach Lemma 2.10 (iv) abgeschlossen ist, gilt dies auch für den Inzidenzgraphen von  $\mathcal{L}$ , und es folgt die Behauptung.

(ii) Wir wenden uns der zweiten Inklusion zu. Sei  $x \in K$ . Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  definieren wir  $x_n := \gamma(x, K_n) = \Gamma(x) \cap K_n$ . Dann gilt  $x_n \in K_n$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(x, K_n) = \gamma(x, \lim_{n \rightarrow \infty} K_n) = x$ , und wir erhalten die Behauptung.

Ist umgekehrt  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathfrak{K}_H$ , die gegen eine Hyperkugel  $K \in \mathfrak{K}_H$  bezüglich der Hausdorffmetrik konvergiert, so folgt die Behauptung wegen der Stetigkeit der Hüllenbildung im Laguerraum analog wie im Beweis von Lemma 2.13.  $\square$

Wir erhalten damit

**Lemma 3.35.** *Sei  $\mathcal{L}$  ein lokalkompakter zusammenhängender Laguerraum vom Rang  $n \geq 3$ . Dann gilt*

- (i) *Jede Parallelklasse ist homöomorph zu  $\mathbb{R}$  und abgeschlossen im Punktraum  $S$ .*
- (ii) *Jedes Berührbüschel ist homöomorph zu  $\mathbb{R}$  und abgeschlossen im Raum der Hyperkugeln  $\mathfrak{K}_H$ .*

*Weiter ist der Raum der Parallelklassen bezüglich der Hausdorffmetrik ein zur Sphäre  $\mathbb{S}_{n-2}$  homöomorpher Raum.*

**Beweis:** Der Fall  $n = 3$  wurde in [Sch92], Seite 22 behandelt. Wir beweisen das Lemma also nur für  $n \geq 4$ .

(i) Jede Parallelklasse ist eine affine Gerade im umgebenen projektiven Raum  $\mathcal{P}$ . Da nach Satz 3.32 der Raum  $\mathcal{P}$  ein projektiver Raum über  $\mathbb{R}$  ist, ist somit auch jede Parallelklasse homöomorph zu  $\mathbb{R}$ . Die Abgeschlossenheit in  $S$  wurde bereits in Lemma 3.20 (ii) gezeigt.

(ii) Nach Lemma 3.20 (iii) ist jedes Berührbüschel homöomorph zu einer Parallelklasse, also auch homöomorph zu  $\mathbb{R}$ . Wir müssen also nur noch die Abgeschlossenheit zeigen: Sei  $B(s, M)$ ,  $s \in K$ , ein Berührbüschel. Sei weiter  $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $B(s, M)$ , die gegen eine Hyperkugel  $K \in \mathfrak{K}_H$  konvergiert. Mit  $H_i$  sei wieder die eindeutige Hyperebene von  $\mathcal{P}$  bezeichnet, so daß  $K_i = S \cap H_i$ , und mit  $H_K$  diejenige Hyperebene, so daß  $K = S \cap H_K$ . Dank des Darstellungssatzes konvergiert dann die Folge  $(H_i)_{i \in \mathbb{N}}$  auch gegen  $H_K$ . Der Schnitt  $C := H_1 \cap H_2$  ist eine Cogerade in  $\mathcal{P}$  und es gilt  $H_i \in \mathcal{H}_C = \{H \in \mathcal{H}; C \subseteq H\}$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ . Da  $\mathcal{H}_C$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $\mathcal{H}$  ist, folgt  $H_K \in \mathcal{H}_C$ , also  $C \in H_K$ . Damit ist  $K$  eine Berührkugel von  $M$  in  $s$  und wir erhalten (ii).

Wir wenden uns nun dem Raum der Parallelklassen zu: Nach Lemma 2.19 ist  $\mathcal{O}$  eine zu  $\mathbb{S}_{n-2}$  homöomorphe Teilmenge von  $P$ . Sei

$$\psi: \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{L}_z; x \mapsto x \vee z.$$

Da  $\mathcal{O}$  insbesondere kompakt ist, ist dann

$$\{\Gamma(s) \cup \{z\}; s \in S\} = \text{Bild}(\psi) \subseteq \mathcal{L}$$

ein zur Sphäre  $\mathbb{S}_{n-2}$  homöomorpher Raum. Wir müssen also nur noch zeigen, daß die Hausdorffmetrik bezüglich  $S$  auf dem Raum der Parallelklassen die gleiche Topologie liefert wie die Relativtopologie von  $\mathcal{L}$ . Da nach Lemma 2.13 aber  $\mathcal{L}$  die bezüglich  $P$  induzierte Hausdorffmetrik trägt, ist dies durch eine einfache Rechnung leicht einzusehen.  $\square$

## 4. Verallgemeinerte Vierecke

Verallgemeinerte Vierecke sind Spezialfälle der von J. TITS in [Tits59] eingeführten verallgemeinerten Polygone. Da die Definition von Polygonen mit einer aufwendigen Notation verbunden ist, beschränken wir uns hier nur auf die Definition von verallgemeinerten 4–Gonen (oder verallgemeinerten Vierecken). Für die Definition von verallgemeinerten Polygonen, bzw. einen anderen Zugang, siehe beispielsweise A. SCHROTH [Sch92].

**Definition 4.1.** Eine Inzidenzstruktur  $\mathcal{GQ} = (P, \mathcal{L})$  heißt verallgemeinertes Viereck (im folgenden sagen wir auch kurz Viereck), wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) Für jedes Paar  $(p, l) \in P \times \mathcal{L}$  mit  $p \notin l$  existiert genau ein Paar  $(q, g) \in P \times \mathcal{L}$  mit  $p, q \in g$  und  $q \in l$ ;
- (ii) Auf jeder Gerade liegen mindestens drei Punkte, und durch jeden Punkt gehen mindestens drei Geraden.

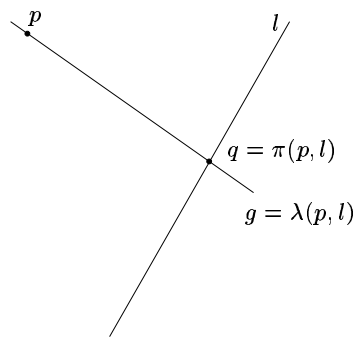


Abb. 4.1.

Wie man sofort sieht, ist mit  $\mathcal{GQ} = (P, \mathcal{L})$  auch die duale Struktur  $\mathcal{GQ}^* = (\mathcal{L}, P, \ni)$  ein verallgemeinertes Viereck.

Bedingung (i) der Definition 4.1 liefert uns zwei Abbildungen

$$\pi: (P \times \mathcal{L}) \setminus \mathcal{F} \longrightarrow P \quad \text{und} \quad \lambda: (P \times \mathcal{L}) \setminus \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{L}$$



[Dem68], Seite 304 eingeführten Vierecke vom Tits Typ, auf die wir im nächsten Paragraphen noch einmal näher eingehen.

**Beispiel 4.3.** (Vierecke vom Tits Typ) Sei  $\mathbf{PG}(K^n) = (P, \mathcal{L})$ ,  $n \geq 4$  ein projektiver Raum über einem Körper  $K$  und  $H$  eine Hyperebene in  $\mathbf{PG}(K^n)$ . Sei weiter  $\mathcal{O} \subseteq H$  ein Ovoid in  $H$ .

Es gibt drei verschiedene Arten von Punkten:

- (P1) die Punkte aus  $P \setminus H$ ,
- (P2) die Hyperebenen von  $\mathbf{PG}(K^n)$ , die  $\mathcal{O}$  in genau einem Punkt berühren und
- (P3) das Ovoid selbst,

und zwei verschiedene Arten von Geraden:

- (L1) die Geraden von  $\mathbf{PG}(K^n)$ , die  $\mathcal{O}$  in genau einem Punkt treffen und nicht in  $H$  liegen, und
- (L2) die Punkte aus  $\mathcal{O}$ .

Inzidenz ist Enthaltensein bzw. umgekehrtes Enthaltensein, d.h.

- (i) ein Punkt  $x$  vom Typ (P1) inzidiert mit einer Geraden  $l$  vom Typ (L1), wenn  $x \in l$  und  $x$  inzidiert mit keiner Geraden vom Typ (L2),
- (ii) ein Punkt  $H$  vom Typ (P2) inzidiert mit einer Geraden  $l$  vom Typ (L1), wenn  $l \subseteq H$  und mit einer Geraden  $x$  vom Typ (L2), wenn  $x \in H$ ,
- (iii) der Punkt  $\mathcal{O}$  inzidiert mit keiner Geraden vom Typ (L1) und mit jeder Geraden vom Typ (L2).

Das so konstruierte Viereck heißt Viereck vom Tits Typ  $T_n(\mathcal{O})$ .

Im Fall, daß  $\mathcal{O}$  eine Quadrik ist, ist  $T_n(\mathcal{O})$  isomorph zum symmetrischen Viereck  $Q(n, K)$ , siehe [Mal98], Seite 121. Im nächsten Paragraphen werden wir sehen, daß Vierecke vom Tits Typ unter bestimmten Voraussetzungen mit einer weiteren Beispielklasse von verallgemeinerten Vierecken zusammenfallen, den sogenannten Liegeometrien von Laguerräumen.

## 4.1 Topologische Vierecke

Ein Viereck heißt topologisch, wenn Punkt- und Geradenraum nichttriviale\* Topologien so tragen, daß  $\pi$  und  $\lambda$  stetige Abbildungen sind. Daraus folgt unmittelbar, daß die Abbildung des Verbindens zweier verbindbarer Punkte (und dual dazu des Schneidens zweier sich schneidender Geraden) stetig ist ([GK90], Proposition 2.3).

---

\* Nichttrivial bedeutet wieder weder diskret, noch indiskret

Die nächsten Aussagen folgen sofort aus der Stetigkeit der Abbildungen  $\pi, \lambda$  und des Verbindens.

**Lemma 4.4.** *Sei  $\mathcal{GQ}$  ein topologisches Viereck, seien  $l, g \in \mathcal{L}$  zwei sich nicht schneidende Geraden und  $p, q \in P$  zwei nichtverbindbare Punkte. Dann sind die Abbildungen*

- (i)  $a: l \longrightarrow g; x \mapsto \pi(x, g),$
- (ii)  $b: \mathcal{L}_p \longrightarrow \mathcal{L}_q; l \mapsto \lambda(q, l)$  und
- (iii)  $c: p^\perp \cap q^\perp \longrightarrow \mathcal{L}_p; x \mapsto x \vee p$

*Homöomorphismen.*

**Beweis:** Die Umkehrabbildungen von  $a, b$  und  $c$  lauten, wie man leicht nachprüft:

- (i)  $a^{-1}: g \longrightarrow l; y \mapsto \pi(y, l),$
- (ii)  $b^{-1}: \mathcal{L}_q \longrightarrow \mathcal{L}_p; g \mapsto \lambda(p, g)$  und
- (iii)  $c^{-1}: \mathcal{L}_p \longrightarrow p^\perp \cap q^\perp; l \mapsto \pi(q, l).$

Da diese Abbildungen auch stetig sind, folgt die Behauptung. □

**Satz 4.5.** *Seien  $p \in P, l, g \in \mathcal{L}_p$  und  $q \in p^\perp \setminus g$ . Dann ist die Abbildung*

$$d: P \setminus p^\perp \longrightarrow (l \setminus \{p\}) \times (g \setminus \{p\}) \times (\mathcal{L}_q \setminus \{p \vee q\});$$

$$x \mapsto (\pi(x, l), \pi(x, g), \lambda(q, \lambda(x, g)))$$

*ein Homöomorphismus. Insbesondere ist  $P$  also lokal homöomorph zum Produkt zweier Geraden mit einem Geradenbüschel.*

**Beweis:** Die Umkehrabbildung von  $d$  lautet:

$$d^{-1}: (l \setminus \{p\}) \times (g \setminus \{p\}) \times (\mathcal{L}_q \setminus \{p \vee q\}) \longrightarrow P \setminus p^\perp;$$

$$(x, y, h) \mapsto \pi(x, \lambda(y, h)).$$

□

Wie schon in den vorherigen Abschnitten fordert man zusätzliche Eigenschaften. Wir nennen ein Viereck lokalkompakt, wenn der Punktraum lokalkompakt ist. T. GRUNDHÖFER und N. KNARR zeigten in [GK90], Proposition 3.3, daß dann der Punkt-, der Geradenraum, jede Gerade und jedes Geradenbüschel entweder zusammenhängend, oder total unzusammenhängend sind. Fordert man zusätzlich, daß einer (und somit jeder) dieser Räume zusammenhängend ist, dann sind  $P$  und  $\mathcal{L}$  schon kompakt ([GK90], Proposition 3.4).

Ist der Punktraum  $P$  eines kompakten zusammenhängenden Vierecks  $\mathcal{GQ} = (P, \mathcal{L})$  von endlicher topologischer Dimension, so ist jede Gerade  $l$  bzw. jedes Geradenbüschel  $\mathcal{L}_p$  homotopieäquivalent zu einer Sphäre  $\mathbb{S}_n$  bzw.  $\mathbb{S}_m$ . Die Zahlen  $(n, m)$



heißen (topologische) Parameter des Vierecks. Das duale Viereck  $\mathcal{G}\mathcal{Q}^* = (\mathcal{L}, P, \ni)$  hat dann Parameter  $(m, n)$ . Für  $n = m$  sagen wir auch,  $\mathcal{G}\mathcal{Q}$  habe Parameter  $n$ . Ist die Dimension von  $P$  durch 6 beschränkt (und damit nach dem obigen Satz  $n = \dim L, m = \dim \mathcal{L}_p \leq 2$ ), sind  $L$  bzw.  $\mathcal{L}_p$  bereits homöomorph zu  $\mathbb{S}_n$  bzw.  $\mathbb{S}_m$  (und damit topologische Mannigfaltigkeiten). Zusätzlich konnte L. KRAMER in [Kra94], Proposition 3.4.5, zeigen, daß in einem kompakten zusammenhängenden Viereck mit Parametern  $(1, m)$  Geraden bereits homöomorph zur 1-Sphäre  $\mathbb{S}_1$  sind. Vierecke mit Parameter 1 heißen auch dreidimensionale Vierecke (nach dem obigen Satz ist dann  $\dim P = 2 \dim l + \dim \mathcal{L}_p = 3$ ) und wurden eingehend von M. FORST in [For81] und von A. SCHROTH in [Sch92] untersucht.

Das in Beispiel 4.2 konstruierte symmetrische Viereck ist topologisch, wenn der projektive Raum  $\mathbf{PG}(K^n)$  topologisch ist (vergleiche [GK90]). Im Fall  $K = \mathbb{R}$  erhalten wir also ein kompaktes zusammenhängendes Viereck. Die Geraden von  $Q(n, \mathbb{R})$  sind Geraden des projektiven Raumes, und damit homöomorph zu  $\mathbb{S}_1$ . Weiter zeigt man durch einfaches Nachrechnen, daß die Geradenbüschel von  $Q(n, \mathbb{R})$  die Dimension  $n - 3$  haben, das symmetrische Viereck also Parameter  $(1, n - 3)$  hat.

## 4.2 Antireguläre Vierecke

Schon früh wurde ein Zusammenhang zwischen verallgemeinerten Vierecken und Laguerreebenen erkannt (siehe z. B. PAYNE und THAS [PT84]). Da es das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, diesen Zusammenhang zu verallgemeinern, geben wir in diesem Abschnitt eine kurze Zusammenfassung der bisherigen Resultate an. Sei also im folgenden  $\mathcal{G}\mathcal{Q} = (P, \mathcal{L})$  ein verallgemeinertes Viereck und  $p \in P$ . Dann heißt

$$\mathcal{G}\mathcal{Q}_p = (S, \mathfrak{K}, \in) \text{ mit } S := p^\perp \setminus \{p\} \text{ und } \mathfrak{K} := \{p^\perp \cap q^\perp; q \in P \setminus p^\perp\}$$

die **Ableitung von  $\mathcal{G}\mathcal{Q}$  in  $p$** .

**Definition 4.6.** (Antiregularität)  $\mathcal{G}\mathcal{Q}$  heißt *antiregulär*, wenn für je drei paarweise nichtverbindbare Punkte  $p, q, r \in P$  gilt

$$|p^\perp \cap q^\perp \cap r^\perp| \in \{0, 2\}.$$

Es ist eine bekannte Tatsache, daß die Ableitung eines antiregulären Vierecks eine Laguerreebene bildet. In Hinblick auf die nächsten Abschnitte geben wir hier dennoch einen kurzen Beweis an.

**Satz 4.7.** Sei  $\mathcal{G}\mathcal{Q}$  antiregulär. Dann ist für jeden Punkt  $p \in P$  die Ableitung  $\mathcal{G}\mathcal{Q}_p$  eine Laguerreebene.

**Beweis:** Zunächst überlegen wir uns, wann zwei Punkte  $x, y \in S$  parallel (also nichtverbindbar in  $\mathcal{GQ}_p$ ) sind:

- (i) Sind  $x, y \in p^\perp \setminus \{p\}$  verbindbar in  $\mathcal{GQ}$ , so ist  $y \in p \vee x$ . Da die Projektion eines Punktes auf eine Gerade nach Definition eindeutig ist, gibt es kein  $q \in P \setminus p^\perp$  mit  $x, y \sim q$ , damit sind  $x, y$  also nichtverbindbar in  $\mathcal{GQ}_p$ .
- (ii) Seien  $x, y$  nichtverbindbar in  $\mathcal{GQ}$ . Sei weiter  $l \neq p \vee x$  eine Gerade durch  $x$ . Dann gilt mit  $q := \pi(y, l)$ :  $x, y \sim q$ , also  $x, y \in p^\perp \cap q^\perp$ .

Wir erhalten damit:  $x, y$  sind genau dann in  $\mathcal{GQ}_p$  verbindbar, wenn sie nichtverbindbar in  $\mathcal{GQ}$  sind. Insbesondere gilt dann  $\Gamma(x) = (p \vee x) \setminus \{p\}$ .

(a) Seien  $x, y, z \in S$  paarweise nichtparallel. Nach der obigen Überlegung sind dann  $x, y, z$  paarweise nichtverbindbar in  $\mathcal{GQ}$ , also existiert mit der Definition der Antiregularität genau ein  $q \in P \setminus p^\perp$  mit  $x, y, z \sim q$ , d.h. durch drei paarweise nichtparallele Punkte geht genau ein Verbindungskreis  $p^\perp \cap q^\perp$ .

(b) Sei  $k = p^\perp \cap q^\perp$  mit  $q \in P \setminus p^\perp$  ein Kreis in  $\mathcal{GQ}_p$ ,  $x \in k$  ein Punkt auf  $k$  und  $y$  nichtparallel zu  $x$ . Dann ist  $q' := \pi(y, x \vee q) \neq q$  und damit  $k' := p^\perp \cap q'^\perp$  der eindeutige durch  $x$  und  $y$  gehende  $k$  berührende Kreis.

(c) Sei  $k = p^\perp \cap q^\perp$  mit  $q \in P \setminus p^\perp$  ein Kreis in  $\mathcal{GQ}_p$  und  $x \in S \setminus k$  ein Punkt. Dann ist  $y = \pi(q, p \vee x)$  der einzige, auf  $k$  liegende zu  $x$  parallel Punkt.

Die Reichhaltigkeit von  $\mathcal{GQ}_p$  folgt unmittelbar aus der Reichhaltigkeit von  $\mathcal{GQ}$ .  $\square$

Ist das Viereck zusätzlich topologisch, so tragen auch  $S$  und  $\mathfrak{K}$  in natürlicher Weise Topologien ( $S$  die Relativtopologie von  $P$  und  $\mathfrak{K}$  die durch die bijektive Abbildung  $\kappa_p: P \setminus p^\perp \rightarrow \mathfrak{K}; q \mapsto p^\perp \cap q^\perp$  induzierte Topologie), mit denen die Ableitung im Falle, daß Geraden und Geradenbüschel homöomorph zu Sphären sind, zu topologischen Laguerreebenen werden (siehe [Sch93], Lemma 2.5). Insbesondere ist dies nach den Überlegungen des letzten Abschnittes dann der Fall, wenn das Viereck Parameter 1 oder 2 hat. Da die topologische Dimension einer lokalkompakten zusammenhängenden Laguerreebene endlicher Dimension entweder 2 oder 4 ist (siehe Satz 3.16), hat somit jedes kompakte zusammenhängende antireguläre Viereck topologische Parameter 1 oder 2.

Umgekehrt konnte A. SCHROTH zeigen, daß die Liegeometrie (siehe nächsten Abschnitt) einer lokalkompakten zusammenhängenden Laguerreebene  $L$  endlicher Dimension stets ein kompaktes zusammenhängendes Viereck bildet ([Sch92], Korollar 3.23) (auf die Konstruktion der Topologien gehen wir in Abschnitt 5.2 genauer ein). Dieses Viereck ist sogar antiregulär, so daß die Ableitung an jedem Punkt  $q$  des Vierecks wieder eine Laguerreebene liefert, die sogenannte **Schwester von  $L$  in  $q$** .

In einer Reihe von Arbeiten untersuchte A. SCHROTH kompakte zusammenhängende Vierecke mit Parametern 1 und 2 und konnte zeigen, daß entweder das Viereck selbst, oder aber das duale Viereck bereits antiregulär ist. Probleme in kompakten

zusammenhängenden Vierecken mit Parameter 1 oder 2 lassen sich also in lokal-kompakten zusammenhängenden Laguerreebenen beschreiben und dort lösen.

**Satz 4.8.** *Sei  $\mathcal{GQ}$  ein kompaktes zusammenhängende Viereck mit Parameter  $n \in \{1, 2\}$ . Dann ist entweder  $\mathcal{GQ}$  oder das duale Viereck  $\mathcal{GQ}^*$  antiregulär.*

*Kompakte zusammenhängende Vierecke mit Parametern  $(n, m) \notin \{(1, 1), (2, 2)\}$  sind nicht antiregulär.*

Dieses Ergebnis liefert nicht nur viele nichtklassische Beispiele für kompakte Vierecke, sondern löst auch das Problem von Apollonius in Laguerreebenen (und damit ebenfalls in Möbius- und Minkowskiebenen), siehe [Sch95], Chapter 7.

Eine schöne Zusammenfassung der obigen Resultate findet man in dem von A. SCHROTH 1995 erschienenen Buch *Topological circle planes and topological quadrangles* [Sch95].

### 4.3 Translationsvierecke

Sei  $\mathcal{GQ} = (P, \mathcal{L})$  ein verallgemeinertes Viereck. Ein Punkt  $p \in P$  heißt **Elationszentrum**, falls eine Gruppe  $\Delta \leq \text{Aut}(\mathcal{GQ})$  von Kollineationen existiert, die jede Gerade durch  $p$  fixiert und scharf transitiv auf  $P \setminus p^\perp$  operiert. Die Gruppe  $\Delta$  heißt dann **Elationsgruppe**. Ist  $\Delta$  zusätzlich abelsch, so nennen wir  $p$  ein **Translationszentrum** und  $\Delta$  **Translationsgruppe** zu  $p$ .

Dual dazu sprechen wir auch von **Elations-** bzw. **Translationsachsen**.

Ein verallgemeinertes Viereck mit einem Elations- bzw. Translationszentrum heißt **Elations-** bzw. **Translationsviereck**. Ein verallgemeinertes Viereck mit einer Elations- bzw. Translationsachse heißt **duales Elations-** bzw. **Translationviereck**.

Die in Beispiel 4.3 konstruierten verallgemeinerten Vierecke  $T_n(\mathcal{O})$  vom Tits Typ sind Translationsvierecke mit Translationszentrum  $\mathcal{O}$ , siehe [Jos94], Beispiel 1.37. Ist  $\mathcal{O}$  ein abgeschlossenes Ovoid in einer Hyperebene  $H$  eines kompakten zusammenhängenden projektiven Raums  $\mathcal{P}$ , so induzieren die Topologien von  $\mathcal{P}$  solche Topologien auf  $P$  und  $\mathcal{L}$ , daß  $T_n(\mathcal{O})$  zu einem kompakten zusammenhängenden Viereck wird, vergleiche [Jos94] Satz 2.23. Auf die genaue Konstruktion dieser Topologien gehen wir in Abschnitt 5.2 ein.

In den Paragraphen 5, 6 und 7 untersuchen wir spezielle Vierecke, die, wie sich zeigen wird, insbesondere Translationsvierecke sind. Wir fassen deshalb an dieser Stelle einige, für uns in diesen Paragraphen benutzten Eigenschaften, zusammen. Sei also  $\mathcal{GQ}$  ein Translationsviereck mit Translationszentrum  $p$ . Dann gehört  $\mathcal{GQ}$  genau einer der folgenden Klassen an, siehe [Jos96]:

- (i) Der Punkt  $p$  ist ein eindeutiges Translationszentrum von  $\mathcal{GQ}$  und das Viereck hat keine Translationsachse.

- (ii) Der Punkt  $p$  ist ein eindeutiges Translationszentrum von  $\mathcal{GQ}$  und das Viereck hat eine eindeutige Translationsachse durch  $p$ .
- (iii) Es gibt eine eindeutige Gerade durch  $p$  so, daß alle Punkte dieser Geraden Translationszentren sind und  $\mathcal{GQ}$  besitzt keine Translationsachse.
- (iv) Jeder Punkt von  $\mathcal{GQ}$  ist ein Translationszentrum und das Viereck hat keine Translationsachse;  $\mathcal{GQ}$  ist ein Moufangviereck.
- (v) Jeder Punkt von  $\mathcal{GQ}$  ist ein Translationszentrum und jede Gerade ist eine Translationsachse;  $\mathcal{GQ}$  ist ein Moufangviereck.

Für alle fünf Klassen gibt es (diskrete) Beispiele.

Betrachten wir dagegen kompakte zusammenhängende Translationsvierecke, so treten dort die Klassen (ii) und (v) nicht auf, siehe [Jos00], Proposition 6.1.

**Satz 4.9.** *Ein kompaktes zusammenhängendes Translationsviereck gehört notwendigerweise einer der Klassen (i), (iii) oder (iv) an.*

Aus dem obigen Satz folgt, daß die drei unterschiedlichen Klassen kompakter zusammenhängender Translationsvierecke durch den Orbit eines Translationszentrums  $p$  unter der Kollineationsgruppe  $\text{Aut}(\mathcal{GQ})$  beschrieben werden. Für (i) ist der Orbit  $p$  selbst, für (iii) eine Gerade durch  $p$  und für (iv) der gesamte Punkt-  
raum.

Eine Charakterisierung der Klasse (iv) zeigt der folgende Satz ([Jos00], Proposition 6.2).

**Satz 4.10.** *Die kompakten zusammenhängenden Translationsvierecke der Klasse (iv) sind genau die symmetrischen Vierecke über  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$  (siehe Beispiel 4.2).*

## 5. Liegeometrien

In diesem Paragraphen konstruieren wir eine große Klasse verallgemeinerter Vierecke aus speziellen Laguerräumen. Tatsächlich ist schon seit längerem bekannt, daß die Liegeometrie gewisser Lagerreebenen verallgemeinerte Vierecke bilden, siehe z.B. [PT84] und [For81]. Der Nachweis, daß es sich um topologische Vierecke handelt, wenn die zugrundeliegende Lagerreebene topologisch ist, wurde von A. SCHROTH in [Sch92] erbracht.

Ausgehend von diesen Resultaten zeigen wir im folgenden, daß sich ähnliche Aussagen auch für Laguerräume beliebigen Ranges zeigen lassen. Dabei definieren wir im ersten Abschnitt zunächst die Liegeometrie eines Laguerräume und weisen nach, daß es sich hierbei (jedenfalls unter einfachen Voraussetzungen) um verallgemeinerte Vierecke handelt. Die Verbindung zu den Beispielen aus Satz 3.11 und Beispiel 4.2 legt Satz 5.2 dar, in dem wir zeigen, daß die Liegeometrie des Quadrikmodells eines Laguerräume isomorph zum symmetrischen Viereck ist. Eine weitere schöne Aussage, die im ersten Abschnitt gezeigt wird, ist, daß die Liegeometrie eines Laguerräume isomorph zu einem Viereck vom Tits Typ ist (Satz 5.3).

Im zweiten Abschnitt schließlich zeigen wir, ausgehend von den Ergebnissen des dritten Paragraphen, daß sich die Aussagen von A. SCHROTH ebenfalls auf den räumlichen Fall verallgemeinern lassen.

### 5.1 Liegeometrien von Laguerräumen

Sei im folgenden  $\mathfrak{L} = (S, \mathfrak{K})$  ein Laguerräume vom Rang  $n \geq 3$ . Wie schon im dritten Paragraphen bezeichnen wir mit  $\mathfrak{K}_H$  die Menge der Hyperkugeln, also derjenigen maximalen Unterräume von  $S$ , in denen je zwei Punkte nichtparallel sind (ist der Rang  $n = 3$ , so sind diese Hyperkugeln genau die Kreise der Lagerreebene). Sei weiter  $\infty \notin S \cup \mathfrak{K}_H$  ein zusätzlicher Punkt,

$$\mathcal{B}^* = \{B^*(s, K) := B(s, K) \cup \{s\}, (s, K) \in S \times \mathfrak{K}_H, s \in K\}$$

die Menge der **erweiterten Berührbüschel**, und

$$\Gamma^* = \{\Gamma^*(s) := \Gamma(s) \cup \{\infty\}, s \in S\}$$

die Menge der **erweiterten Parallelklassen**. Dann heißt

$$\mathfrak{L}\mathfrak{ie}(\mathfrak{L}) := (P := S \cup \mathfrak{K}_H \cup \{\infty\}, \mathcal{L} := \Gamma^* \cup \mathcal{B}^*, \in)$$

die **Liegeometrie** von  $\mathfrak{L}$ .

Mit diesen Bezeichnungen können wir einen der Hauptsätze dieses Paragraphen sofort beweisen. Dazu beschränken wir uns zunächst auf den reinen inzidenzgeometrischen Fall und müssen dabei voraussetzen, daß der Laguerreraum die Bedingung (DO) erfüllt. Für lokalkompakte zusammenhängende Laguerrerräume ist diese Eigenschaft aber keine Voraussetzung, sondern folgt aus den topologischen Eigenschaften.

**Satz 5.1.** *Sei  $\mathfrak{L}$  ein Laguerreraum derart, daß (DO) erfüllt ist. Dann bildet  $\mathfrak{L}\mathfrak{ie}(\mathfrak{L})$  ein verallgemeinertes Viereck.*

**Beweis:** Wir müssen also zeigen, daß es zu jedem Punkt  $p \in P$  und jeder Gerade  $l \in \mathcal{L}$ , die nicht durch  $p$  geht, genau eine Gerade  $\lambda(p, l)$  gibt, die durch  $p$  geht und  $g$  in genau einem Punkt  $\pi(p, l)$  schneidet. Wir unterscheiden die folgenden Fälle für  $(p, l) \in (P \times \mathcal{L}) \setminus \mathcal{F}$ .

(i) Sei  $p = \infty$ . Dann ist  $l \in \mathcal{B}^*$ , der Punkt  $\pi(p, l)$  also der allen Hyperkugeln des Berührbüschels  $l$  gemeinsame Punkt und  $\lambda(p, l)$  deren erweiterte Parallelklasse.

(ii) Sei  $p \in S$  und  $l \in \Gamma^*$ . Also ist  $p \notin l$ , und es folgt  $\pi(p, l) = \infty$  und  $\lambda(p, l) = \Gamma^*(p)$ .

(iii) Sei  $p \in S$  und  $l \in \mathcal{B}^*$ . Ist der allen Hyperkugeln aus  $l$  gemeinsame Punkt  $s \in l$  parallel zu  $p$ , so gibt es keine Hyperkugel, die  $p$  enthält, es gilt also  $\lambda(p, l) = \Gamma^*(p)$  und  $\pi(p, l) = s$ .

Ist  $p$  nichtparallel zu  $s$ , so gibt es nach Lemma 3.4 genau eine Hyperkugel  $K \in l$ , die  $p$  enthält, also ist  $\pi(p, l) = K$  und  $\lambda(p, l) = B^*(K, p)$  ist das erweiterte Berührbüschel von  $K$  in  $p$ .

(iv) Sei  $p \in \mathfrak{K}_H$  und  $l \in \Gamma^*$ . Dann gibt es nach Lemma 3.4 genau ein  $s \in p \cap l$ . Es folgt  $\pi(p, l) = s$  und  $\lambda(p, l)$  ist das erweiterte Berührbüschel von  $p$  in  $s$ .

Für die bisherigen Fälle haben wir nur benutzt, daß  $\mathfrak{L}$  ein Laguerreraum ist. Erst im nächsten und letzten Fall benötigen wir die Voraussetzung, daß der Laguerreraum die Bedingung (DO) erfüllt.

(v) Sei  $p \in \mathfrak{K}_H$  und  $l \in \mathcal{B}^*$ . Sei weiter  $s \in l$  der allen Hyperkugeln aus  $g$  gemeinsame Punkt. Ist dann  $s \in p$ , so folgt  $\pi(p, l) = s$  und  $\lambda(p, l) = B^*(s, p)$ . Da nach Lemma 3.4 Berühren von Hyperkugeln durch  $s$  eine Äquivalenzrelation ist, ist  $B^*(s, p)$  auch die einzige Gerade durch  $p$ , die  $l$  schneidet.

Liege jetzt also  $s$  nicht auf  $p$ . Wir betrachten die Ableitung  $\mathcal{P}(\mathfrak{L}, s)$  von  $\mathfrak{L}$  an  $s$ . Nach Lemma 3.4 ist dann  $\bar{p} = p \setminus \Gamma(s) \cup \{[\Gamma(t)]\}$  ein Ovoid in  $\mathcal{P}(\mathfrak{L}, s)$ , wobei mit  $[\Gamma(t)]$  der Fernpunkt auf den Parallelklassen bezeichnet sei. Weiter bilden die

(punktieren) Hyperkugeln des Berührbüschels  $l$  eine Parallelschar in der affinen Ableitung  $\mathcal{A}(\mathcal{L}, s)$ , d.h. es gibt eine Cogerade  $C \subseteq T_\infty$  in der Fernhyperebene so, daß für das Hyperebenenbüschel  $\mathcal{H}_C := \{H \in \mathcal{H} ; C \subseteq H\}$  folgendes gilt

$$\mathcal{H}_C = \left\{ \overline{K \setminus \{s\}} ; K \in l \setminus \{s\} \right\} \cup \{T_\infty\}.$$

Da keine Parallelklasse eine Teilmenge irgendeiner Hyperkugel sein kann, ist  $[\Gamma(t)] \notin C$  und damit  $C$  eine Passante von  $\bar{p}$ . Da nach Voraussetzung das duale Ovoid  $\bar{p}^*$  von  $\bar{p}$  ein Ovoid im dualen projektiven Raum ist, existieren somit genau zwei Hyperebenen aus  $\mathcal{H}_C$ , die Tangentialhyperebenen an  $\bar{p}$  sind. Offensichtlich ist die Fernhyperebene  $T_\infty$  eine Tangentialhyperebene am Punkt  $[\Gamma(t)]$ , somit existiert genau eine Hyperkugel  $K \in l$  mit  $|\bar{p} \cap \overline{K \setminus \{s\}}| = 1$ . Also existiert genau eine Hyperkugel  $K$  aus  $l$ , die  $p$  berührt. Somit ist  $\pi(p, l) = K$  und  $\lambda(p, l) = B^*(p \cap K, p) = B^*(p \cap K, K)$ .

Die Reichhaltigkeit folgt aus der Reichhaltigkeit des Laguerreraums.  $\square$

**Beispiele.** Wir haben im dritten bzw. vierten Paragraphen einige Laguerräume bzw. verallgemeinerte Vierecke kennengelernt. Die nächsten beiden Sätze zeigen, daß sich diese Vierecke als Liegeometrien geeigneter Laguerräume darstellen lassen. Wir beginnen mit dem symmetrischen Viereck (Beispiel 4.2)

**Satz 5.2.** *Die Liegeometrie des Quadrikmodells  $\mathcal{L}(Q)$  vom Rang  $n - 2$  aus Satz 3.11 ist isomorph zum symmetrischen Viereck  $Q(n, \mathbb{R}) = (Q, \mathcal{L})$ .*

**Beweis:** Sei  $\mathcal{L}ie(\mathcal{L}(Q)) = (P_Q, \mathcal{L}_Q)$  die Liegeometrie des Laguerreraums  $\mathcal{L}(Q)$ . Dann ist die Abbildung

$$\alpha: P_Q = S \cup \mathfrak{K}_Q \cup \{\infty\} \longrightarrow Q; x \mapsto \begin{cases} x, & \text{falls } x \in S \cup \mathfrak{K}_Q = Q \setminus \{\langle z \rangle\} \\ \langle z \rangle, & \text{falls } x = \infty \end{cases}$$

eine Bijektion.

Für die Bijektion zwischen den Geradenräumen der Vierecke betrachten wir zunächst den Geradenraum der Liegeometrie  $\mathcal{L}ie(\mathcal{L}(Q))$ . Ist  $l \in \mathcal{L}_Q$  eine erweiterte Parallelklasse für einen Punkt  $\langle x \rangle \in S = \langle z \rangle^\perp \setminus \{\langle z \rangle\}$ , so ist  $l$  die Verbindungsgerade der Punkte  $\langle x \rangle$  und  $\langle z \rangle$  im umgebenden projektiven Raum. Da  $\langle x \rangle$  senkrecht auf  $\langle z \rangle$  steht, ist die Verbindungsgerade total isotrop, d.h.  $l \in \mathcal{L}$  (dem Geradenraum von  $Q(n, \mathbb{R})$ ).

Ist nun  $l$  ein erweitertes Berührbüschel des Laguerreraums für einen Punkt  $\langle x \rangle \in S = \langle z \rangle^\perp \setminus \{\langle z \rangle\}$  und eine Hyperkugel  $\langle y \rangle \in \mathfrak{K}_Q = Q \setminus \langle z \rangle^\perp$ , so steht  $\langle x \rangle$  senkrecht auf  $\langle y \rangle$  und die Verbindungsgerade  $g$  beider Punkte ist total isotrop. Da für jede Hyperkugel  $\langle p \rangle$ , die  $\langle y \rangle$  im Punkt  $\langle x \rangle$  berührt,  $\langle p \rangle \perp \langle y \rangle$ ,  $\langle x \rangle$ , liegt  $\langle p \rangle$  auf  $g$  ( $Q(n, \mathbb{R})$  ist ein Viereck und Senkrechtstehen bedeutet in  $Q(n, \mathbb{R})$  Verbindbarkeit. Da  $g$  eine Gerade in  $Q(n, \mathbb{R})$  ist und  $\langle p \rangle$  sowohl mit  $\langle x \rangle$  als auch mit  $\langle y \rangle$

verbindbar ist, folgt  $\langle p \rangle \in g$ .

Umgekehrt ist jeder Punkt  $\langle p \rangle \in g$  senkrecht zu  $\langle x \rangle$  und  $\langle y \rangle$ , also eine Hyperkugel, die  $\langle y \rangle$  in  $\langle x \rangle$  berührt. Wir erhalten also  $l = g$ , und damit die Wohldefiniertheit der Abbildung

$$\beta: \mathcal{L}_Q \longrightarrow \mathcal{L}, l \mapsto l.$$

Insgesamt ist  $(\alpha, \beta)$  ein Isomorphismus.  $\square$

Der im vierten Paragraphen angekündigte Zusammenhang zwischen den verallgemeinerten Vierecken vom Tits Typ und den Liegeometrien ovoidaler Laguereräume macht der folgende Satz deutlich.

**Satz 5.3.** *Sei  $\mathcal{P} = (P, \mathcal{L})$  ein projektiver Raum vom Rang  $n \geq 4$ . Sei weiter  $H$  eine Hyperebene von  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{O} \subseteq H$  ein Ovoid in  $H$  so, daß auch  $\mathcal{O}^*$  ein Ovoid im dualen projektiven Raum  $(\mathcal{P}_H)^*$  ist. Dann ist für jedes  $z \in P \setminus H$  die Liegeometrie  $\mathfrak{L}\mathfrak{ie}(\mathfrak{L}(\mathcal{O}))$  isomorph zum verallgemeinerten Viereck  $T_n(\mathcal{O}^*)$  vom Tits Typ.*

**Beweis:** Zunächst beschreiben wir die Struktur von  $T_n(\mathcal{O}^*)$  etwas genauer: Im dualen projektiven Raum  $\mathcal{P}^*$  bildet  $z \in P \setminus H$  eine Hyperebene. Die Tangentialen  $C_x$  von  $\mathcal{O}$  an einem Punkt  $x \in \mathcal{O}$  sind Hyperebenen des projektiven Raumes  $\mathcal{P}_H$ , bilden also Cogeraden in  $\mathcal{P}$  und damit Geraden in  $\mathcal{P}^*$ . Also ist  $H_x := \langle C_x, z \rangle$  eine Hyperebene von  $\mathcal{P}$  und damit ein Punkt in  $\mathcal{P}^*$ . Da  $\mathcal{O}^*$  ein Ovoid in  $(\mathcal{P}_H)^*$  ist, ist auch  $\mathcal{O}' := \{H_x; x \in \mathcal{O}\}$  ein (zu  $\mathcal{O}^*$  isomorphes) Ovoid im projektiven Raum  $\mathcal{P}_z^*$ .

Im folgenden bezeichnen wir mit  $P_{\mathcal{O}}$  bzw.  $\mathcal{L}_{\mathcal{O}}$  den Punkt- bzw. Geradenraum von  $\mathfrak{L}\mathfrak{ie}(\mathfrak{L}(\mathcal{O}))$  und mit  $P_{\mathcal{O}^*}$  bzw.  $\mathcal{L}_{\mathcal{O}^*}$  den Punkt- bzw. Geradenraum von  $T_n(\mathcal{O}^*)$ . Diejenigen Punkte von  $P_{\mathcal{O}}$ , die im Laguererraum Hyperkugeln sind, identifizieren wir mit der Menge der Hyperebenen von  $\mathcal{P}$ , die nicht durch  $z$  gehen. Ist  $l = B^*(s, K)$  eine Gerade von  $\mathfrak{L}\mathfrak{ie}(\mathfrak{L}(\mathcal{O}))$  für ein Paar  $(s, K) \in S \times \mathfrak{K}_H$ ,  $s \in K$ , so wird  $l$  eindeutig durch eine Cogerade  $C$  von  $\mathcal{P}$  beschrieben (die wir mit  $\beta(l)$  bezeichnen) so, daß  $S \cap C = \{s\}$  ( $C = K_1 \cap K_2$  für zwei Hyperebenen  $K_1, K_2 \in B^*(s, K)$ ). Damit können wir den Isomorphismus  $(\alpha, \beta)$  von  $\mathfrak{L}\mathfrak{ie}(\mathfrak{L}(\mathcal{O}))$  auf  $T_n(\mathcal{O}^*)$  direkt angeben. Die nachstehende Tabelle zeigt den Zusammenhang zwischen Punkt- und Geradenräumen der von uns betrachteten Geometrien.

$$\alpha: P_{\mathcal{O}} \longrightarrow P_{\mathcal{O}^*}; x \mapsto \begin{cases} x, & \text{falls } x \in S \cup \mathfrak{K}_H \\ \mathcal{O}^*, & \text{falls } x = \infty, \end{cases}$$

und

$$\beta: \mathcal{L}_{\mathcal{O}} \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{O}^*}; l \mapsto \begin{cases} \beta(l), & \text{falls } l \in \mathcal{B}^* \\ H_{l \cap \mathcal{O}}, & \text{falls } l \in \Gamma^*. \end{cases}$$



|           | $T(\mathcal{O}')$  | $\mathfrak{L}(\mathfrak{L}(\mathcal{O}))$ |
|-----------|--|---|
| <b>P1</b> | Die Punkte von $\mathcal{P}^*$ , die nicht in der Hyperebene $z$ liegen, d.h. die Hyperebenen von $\mathcal{P}$ , die nicht durch $z$ gehen.   | $\mathfrak{K}_H$                          |
| <b>P2</b> | Die Hyperebenen von $\mathcal{P}^*$ , die $\mathcal{O}'$ in genau einem Punkt treffen, d.h. die Punkte von $\mathcal{P}$ , die in genau einer Hyperebene von $\mathcal{O}'$ liegen.  | $S$                                       |
| <b>P3</b> | Das Ovoid selbst.  | $\infty$                                  |
| <b>L1</b> | Die Geraden von $\mathcal{P}^*$ , die genau einen Punkt von $\mathcal{O}'$ enthalten und nicht in der Hyperebenen $z$ liegen, d.h. die Cogeraden von $\mathcal{P}$ , die in genau einer Hyperebenen von $\mathcal{O}'$ liegen und nicht durch $z$ gehen. | $B^*$                                     |
| <b>L2</b> | Die Punkte von $\mathcal{O}'$ , d.h. die Hyperebenen von $\mathcal{O}'$ .  | $\Gamma^*$                                |

(i) (Wohldefiniertheit und Bijektivität der Abbildung  $\alpha$ ) Ist  $x \in \mathcal{P}_{\mathcal{O}}$  eine Hyperkugel in  $\mathfrak{L}$ , nach unserer Identifizierung also eine Hyperebene von  $\mathcal{P}$ , die nicht durch  $z$  geht, so ist  $x$  in  $\mathcal{P}^*$  ein Punkt, der nicht in der Hyperebene  $z$  liegt. Insbesondere werden auch alle diese Punkte getroffen ( $x$  ist genau dann eine Hyperebene mit  $z \notin x$  in  $\mathcal{P}$ , wenn  $x$  ein Punkt in  $\mathcal{P}^*$  ist, der nicht in der Hyperebene  $z$  liegt). Die Einschränkung von  $\alpha$  auf  $\mathfrak{K}_H$  ist also eine Bijektion auf die Menge Punkte vom Typ (P1) (siehe Beispiel 4.3).

Sei jetzt  $x \in S$ . Dann ist  $s$  eine Hyperebene in  $\mathcal{P}^*$ , die mit  $y := (z \vee x) \wedge H \in \mathcal{O}$  das Ovoid  $\mathcal{O}'$  im Punkt  $H_y$  trifft. Ist  $H_r$ ,  $r \in \mathcal{O}$ , ein weiterer Punkt von  $\mathcal{P}^*$ , der in der Hyperebene  $x$  liegt, so folgt  $z \vee x \subseteq H_r$  und damit auch  $y \in H_r$ , also  $r = y$ . Damit ist auch die Einschränkung von  $\alpha$  auf  $S$  wohldefiniert.

Sei umgekehrt  $x$  eine Hyperebene in  $\mathcal{P}^*$ , die  $\mathcal{O}'$  in genau einem Punkt  $H_y$ ,  $y \in \mathcal{O}$ , trifft. Angenommen  $x \notin S$ . Dann gilt  $r := (z \vee s) \wedge H \neq y$ . Sei  $c \subseteq H \cap H_y$  eine Cogerade von  $\mathcal{P}_H$  durch  $r$ , die nicht durch  $y$  geht (ist  $\mathcal{P}_H$  bereits eine Ebene, so ist  $c$  der Punkt  $r$ ). Da auch  $\mathcal{O}^*$  ein Ovoid ist, enthält der Schnitt aller in der Hyperebene  $H \cap H_y$  von  $\mathcal{P}_H$  liegenden Cogeraden, in der keine weitere Tangentialhyperebene liegt, genau den Punkt  $y$ . Durch  $c$ , und damit auch durch  $r$ , geht also eine weitere Hyperebene  $C$  von  $\mathcal{P}_H$ , die das Ovoid  $\mathcal{O}$  in genau einem Punkt ungleich  $y$  berührt. Die Hyperebene  $\langle z, C \rangle$  ist dann ein weiterer Punkt des Ovoids  $\mathcal{O}'$ , der in der

Hyperebene  $x$  von  $\mathcal{P}^*$  liegt, ein Widerspruch. Es gilt also  $x \in S$  und damit die Surjektivität von  $\alpha|_S$ . Insgesamt erhalten wir die Wohldefiniertheit und Bijektivität von  $\alpha$ .

(ii) (Wohldefiniertheit und Bijektivität der Abbildung  $\beta$ ) Die Bijektivität der Einschränkung  $\beta_{\Gamma^*}$  auf die Geraden des Vierecks  $T(\mathcal{O}^*)$  vom Typ (L2) ist unmittelbar klar.

Sei also  $l \in \mathcal{B}^*$  ein erweitertes Berührbüschel. Dann ist  $\beta(l)$  eine Cogerade in  $\mathcal{P}$ , also eine Gerade in  $\mathcal{P}^*$ . Weiter liegt  $z$  nicht in  $\beta(l)$ , da die Hyperkugeln aus  $l$  nicht durch  $z$  gehen. Im projektiven Raum  $\mathcal{P}^*$  ist damit  $\beta(l)$  eine Gerade, die nicht in der Hyperebene  $z$  liegt. Offensichtlich ist  $M := \langle z, \beta(l) \rangle \in \mathcal{O}'$ , d.h.  $\beta(l)$  trifft das Ovoid  $\mathcal{O}'$  genau im Punkt  $M$ . Also ist die Einschränkung von  $\beta$  auf  $\mathcal{B}^*$  wohldefiniert. Da für jedes andere erweiterte Berührbüschel  $g$  die Cogeraden  $\beta(g)$  und  $\beta(l)$  verschieden sind, folgt auch die Injektivität.

Umgekehrt sei  $C$  eine Gerade in  $\mathcal{P}^*$ , die nicht in der Hyperebene  $z$  liegt und  $\mathcal{O}'$  in genau einem Punkt  $H_x \in \mathcal{O}'$  berührt. Übersetzt in  $\mathcal{P}$  heißt dies, die Cogerade  $C$  liegt in der Hyperebene  $H_x$  und geht nicht durch  $z$ . Dann ist der Schnittpunkt  $s := (x \vee z) \wedge C$  ein Element aus  $S$  und  $C$  damit eine Cogerade, die  $S$  in  $s$  berührt. Nach einer obigen Überlegung gilt damit für das erweiterte Berührbüschel  $B^*(s, K)$ ,  $C \subseteq K$ , die Gleichheit  $\beta(B^*(s, K)) = C$ . Damit ist  $\beta_{\mathcal{B}^*}$  eine Bijektion von  $\mathcal{B}^*$  auf die Geraden des Vierecks  $T(\mathcal{O}^*)$  vom Typ (L1).

Daß die Abbildung  $(\alpha, \beta)$  inzidenzerhaltend ist, folgt aus ähnlichen Überlegungen.  $\square$

## 5.2 Liegeometrien lokalkompakter zusammenhängender Laguerräume

Wir wollen nun zeigen, daß die Liegeometrie eines lokalkompakten zusammenhängenden Laguerreraums ein kompaktes zusammenhängendes Viereck ist. Wie wir bereits gesehen haben, erfüllt solch ein Laguerreraum die Bedingung (DO) (Satz 3.33), ist also nach Satz 5.1 ein Viereck.

Sei also im folgenden  $\mathfrak{L} = (S, \mathfrak{K})$  ein lokalkompakter zusammenhängender Laguerreraum vom Rang  $n \geq 3$  und  $\mathfrak{Lie}(\mathfrak{L}) = (P, \mathcal{L})$  die Liegeometrie von  $\mathfrak{L}$ . Die Teilräume  $\{\infty\}^\perp \setminus \{\infty\} = S$  und  $P \setminus \{\infty\}^\perp = \mathfrak{K}_H$  tragen nach dem Darstellungssatz 3.32 bereits metrische Topologien. Da die Parallelklassen und Berührbüschel abgeschlossene Teilmengen von  $S$  beziehungsweise  $\mathfrak{K}_H$  sind (siehe 3.35), induziert die Hausdorffmetrik nach Abschnitt 1.2 eine Topologie auf  $\Gamma$  und  $\mathcal{B}$ , und mit Hilfe der Bijektionen

$$i_{\Gamma^*}: \Gamma \longrightarrow \Gamma^*; \Gamma(s) \mapsto \Gamma(s) \cup \{\infty\}$$

$$i_{\mathcal{B}^*}: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}^*; B(s, K) \mapsto B(s, K) \cup \{s\}$$

damit auch auf  $\Gamma^*$  und  $\mathcal{B}^*$ .

Wir überlegen uns zunächst, welche Einschränkungen von  $\pi$  und  $\lambda$  mit diesen Topologien schon stetig sind. Dabei verläuft der Beweis der Fälle (i) – (vi) ähnlich wie im ebenen Fall in [Sch92], Lemma 3.8.

**Satz 5.4.** *Folgende Einschränkungen von  $\pi$  und  $\lambda$  sind stetig*

- (i)  $a: \mathcal{B}^* \longrightarrow S; g \mapsto \pi(\infty, g)$
- (ii)  $b: \mathcal{B}^* \longrightarrow \Gamma^*; g \mapsto \lambda(\infty, g)$
- (iii)  $c: \mathfrak{K}_H \times \Gamma^* \longrightarrow S; (q, g) \mapsto \pi(q, g)$
- (iv)  $d: \mathfrak{K}_H \times \Gamma^* \longrightarrow \mathcal{B}^*; (q, g) \mapsto \lambda(q, g)$
- (v)  $e: (S \times \mathcal{B}^*) \setminus (\mathcal{F} \cup \pi^{-1}(S)) \longrightarrow \mathfrak{K}_H; (q, g) \mapsto \pi(q, g)$
- (vi)  $f: (S \times \mathcal{B}^*) \setminus (\mathcal{F} \cup \pi^{-1}(S)) \longrightarrow \mathcal{B}^*; (q, g) \mapsto \lambda(q, g)$
- (vii)  $g: (\mathfrak{K}_H \times \mathcal{B}^*) \setminus (\mathcal{F} \cup \pi^{-1}(S)) \longrightarrow \mathfrak{K}_H; (q, g) \mapsto \pi(q, g)$
- (viii)  $h: (\mathfrak{K}_H \times \mathcal{B}^*) \setminus (\mathcal{F} \cup \pi^{-1}(S)) \longrightarrow \mathcal{B}^*; (q, g) \mapsto \lambda(q, g)$ .

Weiter ist die Einschränkung des Verbindens  $v: S \longrightarrow \Gamma^* : q \mapsto \infty \vee q$  stetig.

**Beweis:** Wir zeigen zuerst die Stetigkeit von  $v$ . Sei also  $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $S$  die gegen  $s \in S$  konvergiert. Die Abbildung  $v$  ordnet jedem Punkt seine erweiterte Parallelklasse zu, wir müssen also zeigen, daß die Folge  $(\Gamma^*(s_i))_{i \in \mathbb{N}}$  im Sinne der Hausdorffkonvergenz gegen  $\Gamma^*(s)$  konvergiert (dabei genügt der Nachweis der Konvergenz von  $(\Gamma(s_i))_{i \in \mathbb{N}}$  gegen  $\Gamma(s)$ ). Da  $\liminf_{i \in \mathbb{N}} \Gamma(s_i) \subseteq \limsup_{i \in \mathbb{N}} \Gamma(s_i)$ , reicht es

$$\limsup_{i \in \mathbb{N}} \Gamma(s_i) \subseteq \Gamma(s) \subseteq \liminf_{i \in \mathbb{N}} \Gamma(s_i)$$

zu zeigen.

Sei  $q_i \in \Gamma(s_i)$  eine Folge in  $S$ , und  $q$  ein Häufungspunkt der Folge. Dann existiert eine Teilfolge  $(q_{i_k})_{k \in \mathbb{N}}$ , die gegen  $q$  konvergiert. Seien weiter  $x_1, \dots, x_n \in S$  unabhängig so, daß der von diesen Punkten aufgespannte Unterraum ein Möbiusunterraum ist, der sowohl mit jeder der Parallelklassen von  $s_i$  (und damit auch von  $q_i$ ), und mit  $q$  und  $s$  leeren Schnitt hat. Also sind für alle  $i \in \mathbb{N}$  auch die Punkte  $q_i, x_1, \dots, x_n$  unabhängig und spannen eine Hyperkugel  $K_i$  auf. Da auch die Punkte  $q, x_1, \dots, x_n$  unabhängig sind, existiert eine eindeutige Hyperkugel  $q, x_1, \dots, x_n \in K$ . Aus der Stetigkeit der Hüllenbildung folgt  $\lim_{k \rightarrow \infty} K_{i_k} = K$ . Weiter ist auch die Parallelprojektion  $\gamma$  stetig und es folgt  $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma(s_{i_k}, K_{i_k}) = \gamma(s, K)$ . Da  $\gamma(s_{i_k}, K_{i_k}) = q_{i_k}$ , erhalten wir insgesamt

$$q = \lim_{k \rightarrow \infty} q_{i_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma(s_{i_k}, K_{i_k}) = \gamma(s, K) \in \Gamma(s),$$

also  $\limsup_{i \in \mathbb{N}} \Gamma(s_i) \subseteq \Gamma(s)$ .

Sei umgekehrt  $q \in \Gamma(s)$ . Sei weiter  $K$  eine Hyperkugel durch  $q$  und seien  $q_i := \gamma(s_i, K) \in \Gamma(s_i)$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} q_i = \lim_{i \rightarrow \infty} \gamma(s_i, K) = \gamma(s, K) = q,$$

und wir erhalten  $\Gamma(s) \subseteq \liminf \Gamma(s_i)$ .

(i) Die Abbildung  $a$  ordnet jedem Berührbüschel  $B(s, K)$  den allen Hyperkugeln gemeinsamen Punkt  $s$  zu. Wir müssen also zeigen, daß für eine Folge  $B_i$  in  $\mathcal{B}^*$ , die gegen  $B(s, K)$  konvergiert, diese Punkte gegen  $s$  konvergieren. Nach Definition der Hausdorffkonvergenz gibt es für jede Hyperkugel  $M \in B(s, K)$  eine Folge von Hyperkugeln  $M_i \in B_i$ , die gegen  $M$  konvergiert. Sei  $s_i$  der allen Hyperkugeln aus  $B_i$  gemeinsame Punkt. Sei weiter  $r_i := \gamma(s_i, M)$  der zu  $s_i$  parallele Punkt auf  $M$ . Da  $M$  als Teilmenge von  $S$  kompakt ist (Lemma 3.29), existiert ein Häufungspunkt  $r \in M$  von  $\{r_i; i \in \mathbb{N}\}$ , der wegen der Stetigkeit des Parallelprojizierens auch ein Häufungspunkt von  $\{s_i; i \in \mathbb{N}\}$  ist. Ist nun  $M'$  eine weitere Hyperkugel aus  $B(s, K)$ , so ist  $r$  auch ein Häufungspunkt von  $\{\gamma(s_i, M'); i \in \mathbb{N}\}$ , also gilt insbesondere  $r \in M'$ . Da  $s$  der einzige allen gemeinsame Punkt der Hyperkugeln aus  $B(s, K)$  ist, gilt  $r = s$ , also konvergiert  $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$  gegen  $s$ .

(ii) Es gilt  $b = v \circ a$ . Die Stetigkeit von  $b$  folgt somit aus dem bisher Gezeigten.

(iii) Die Abbildung  $c$  ordnet jeder Hyperkugel  $K$  und jeder Parallelklasse  $\Gamma(s)$  den auf  $K$  und  $\Gamma(s)$  liegenden gemeinsamen Punkt zu. Sei  $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Parallelklassen, die bezüglich der Hausdorffmetrik gegen eine Parallelklasse  $\Gamma$  konvergiert. Dann existiert eine Folge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $s_i \in \Gamma_i$ , in  $S$ , die gegen ein  $s \in \Gamma$  konvergiert, und es folgt  $\Gamma(s) = \Gamma$  und  $\Gamma(s_i) = \Gamma_i$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ . Ist nun  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Hyperkugeln, die gegen eine Hyperkugel  $K \in \mathfrak{K}_H$  konvergiert, so erhalten wir  $c(K_i, \Gamma_i) = K_i \cap \Gamma(s_i)$  und  $c(K, \Gamma) = K \cap \Gamma(s)$ , die Stetigkeit folgt also aus der Stetigkeit des Parallelprojizierens im Laguererraum.

(iv) Da  $c$  stetig ist, müssen wir nur noch zeigen, daß die Abbildung

$$k: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{B}, (s, K) \mapsto B(s, K)$$

stetig ist (denn  $d(K, \Gamma) = k(c(K, \Gamma), K)$  für alle  $(K, \Gamma) \in \mathfrak{K}_H \times \Gamma^*$ ). Seien  $s \in S$ ,  $K \in \mathfrak{K}_H$  mit  $s \in K$  und  $r \notin \Gamma(s)$ . Dann ist  $B(s, K) = \beta(\Gamma(r) \times \{K\} \times \{s\})$ . Die Stetigkeit dieser Abbildung folgt also aus der Stetigkeit des Berührens.

(v) Sei  $B_i$  eine Folge in  $\mathcal{B}^*$ , die gegen  $B = B^*(s, K) \in \mathcal{B}^*$  konvergiert. Wegen der Definition der Hausdorffkonvergenz existiert dann eine Folge von Hyperkugeln  $K_i$ , die gegen  $K$  konvergiert. Sei weiter  $s_i$  der allen Hyperkugeln gemeinsame Punkt im Berührbüschel  $B_i$  (also  $B_i = B(s_i, K_i)$ ). Wegen der Stetigkeit der Abbildung  $a$  gilt dann  $\lim_{i \rightarrow \infty} s_i = s$ . Für eine Folge  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$  in  $S$  mit  $a_i$  nicht-parallel zu  $s_i$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ , die gegen einen Punkt  $a \in S \setminus \Gamma(s)$  konvergiert, folgt  $e(a_i, B_i) = \beta(s_i, K_i, a_i)$  und  $e(a, B) = \beta(s, K, a)$ , die Stetigkeit von  $e$  folgt also aus der Stetigkeit des Berührens.

(vi) Es gilt  $f(s, B) = k(s, e(s, B))$ , also folgt die Stetigkeit von  $f$  aus der im vierten Schritt bewiesenen Stetigkeit der Abbildung  $k$ .

(vii) und (viii) Wir betrachten

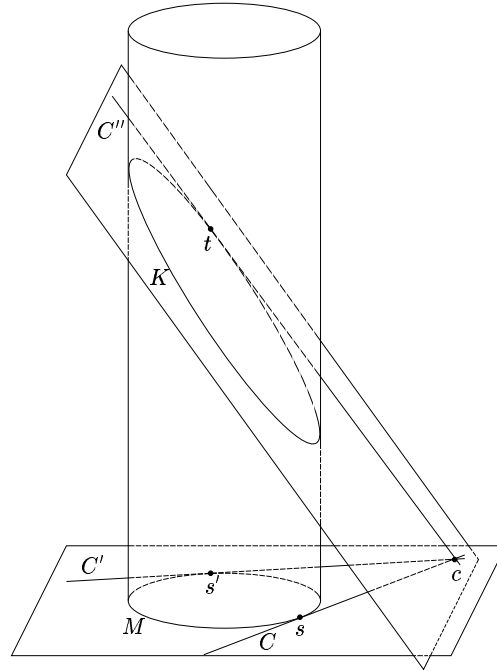
$$l: (\mathfrak{K}_H \times \mathcal{B}^*) \setminus (\mathcal{F} \cup \pi^{-1}(S)) \longrightarrow S; (q, g) \mapsto \pi(\infty, \lambda(q, g)),$$

also diejenige Abbildung, die jeder Hyperkugel  $K$  und jedem Berührbüschel  $B(s, M)$  mit  $s \notin K$  den (in der projektiven Ableitung betrachteten) Tangentenpunkt des Ovoid  $\overline{K \setminus \{s\}}$  zur Parallelklasse  $\{M' \setminus \{s\}; M' \in B(s, M)\}$  zuordnet, der nicht auf der Fernhyperebenen liegt. Nach Satz 2.21 ist dieser Punkt eindeutig. Weiter gilt  $g(K, B(s, M)) = \beta(l(K, B(s, M)), K, s)$  und  $h(K, B(s, M)) = k(l(K, B(s, M)))$ . Die Stetigkeit von  $g$  und  $h$  folgt damit aus der Stetigkeit der Abbildung  $l$ .

Für den ebenen Fall wurde dies bereits von A. SCHROTH in [Sch95], Lemma 3.11 bewiesen. Im folgenden nutzen wir aus, daß  $\mathcal{L}$  für  $n \geq 4$  ein ovoidaler Laguerreraum über einem kompakten Ovoid in einem projektiven Raum  $\mathbf{PG}(\mathbb{R}^n)$  über  $\mathbb{R}$  ist. Sei also  $H$  eine Hyperebene von  $\mathbf{PG}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\mathcal{O}$  ein Ovoid in  $H$  und  $z \in P \setminus H$  mit  $S = \mathcal{O} \star z$ . Wir umschreiben zunächst das Problem:

Sei  $B(s, M)$  ein Berührbüschel und  $K$  eine Hyperkugel. Für jede Hyperkugel  $L \in \mathfrak{K}_H$  sei  $H_L$  die Hyperebene von  $\mathbf{PG}(\mathbb{R}^n)$  so, daß  $L = S \cap H_L$ . Sei weiter  $C = \bigcap_{M' \in B(s, M)} M'$ . Dann ist  $C$  eine Tangente des Ovoids  $M$  an  $s$  im projektiven Raum  $H_M$ , also insbesondere eine Cogerade in  $\mathbf{PG}(\mathbb{R}^n)$ . Sei jetzt  $c = C \cap H_K$ . Dann ist  $c$  eine Cogerade in  $H_M$ , die wegen  $(K, B^*(s, M)) \notin \mathcal{F}$  nicht durch  $s$  geht. Aus Lemma 2.21 folgt, daß es genau eine weitere Tangente  $C'$  von  $M$  in  $H_M$  mit  $c \subseteq C'$  gibt. Sei  $s' = M \cap C'$  und  $t = H_K \cap (z \vee s')$ .

Die Cogeraden  $C'' := H_K \cap (\bigcup_{x \in C'} x \vee z)$  ist eine Tangente des Ovoids  $K$  an  $t$  in  $H_K$ . Die von  $C$  und  $C''$  aufgespannte Hyperebene  $L$  schneidet  $K$  also genau im Punkt  $t$ , damit ist  $S \cap L \in B(s, K)$  die eindeutige  $K$  berührende Hyperkugel des Berührbüschels und  $t$  unser gesuchte Punkt. Die Stetigkeit von  $l$  folgt somit aus Lemma 2.23. □



Unser Ziel ist es jetzt, eine Topologie auf  $P = \{\infty\} \cup S \cup \mathfrak{K}_H$  so zu konstruieren, daß die Topologien auf  $S$  und  $\mathfrak{K}_H$  als Spurtologien erhalten bleiben. Auf

$\mathcal{L}_\infty = \Gamma^*$  und  $\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_\infty = \mathfrak{K}_H$  definieren wir dann die von der Hausdorffmetrik induzierte Topologie und erhalten so die Stetigkeit der obigen Einschränkungen in der Liegeometrie.

Zuerst definieren wir eine Topologie auf  $S \cup \mathfrak{K}_H$  (vergleiche [Sch92], Definition 3.15 und [Löw81]).

**Definition 5.5.** *Die Topologie auf  $\mathfrak{K}_H$  wird übernommen. Für jeden Punkt  $s \in S$  sei  $l \in \mathcal{B}^*$  eine Gerade mit  $\lambda(\infty, l) \neq \infty \vee s$ . Die Mengen der Form*

$$\{q \in P \setminus C; \lambda(q, l) \in V\}$$

mit  $C \subseteq \mathfrak{K}_H$  kompakt und  $V \subseteq l^\perp \setminus \mathcal{L}_{\pi(\infty, l)}$  eine Umgebung von  $\lambda(s, l)$  in  $l^\perp \setminus \mathcal{L}_{\pi(\infty, l)}$  bilden eine Umgebungsbasis von  $s$ .

A. SCHROTH konnte zeigen, daß diese Topologie wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl der Geraden  $l$  ist ([Sch92], Seite 36) und der Raum  $S \cup \mathfrak{K}_H$  lokalkompakt ist ([Sch92], Korollar 3.19). Weiter ist wegen der Stetigkeit der Abbildungen  $a$  und  $f$  aus Satz 5.4 die gegebene Topologie auf  $\Gamma^*$  genau die Spurtopologie der in der Definition konstruierten Topologie. Wir können also  $S \cup \mathfrak{K}_H$  mit dem Punkt  $\infty$  kompaktifizieren und erhalten so eine Topologie auf ganz  $P = S \cup \mathfrak{K}_H \cup \{\infty\}$ . Insbesondere ist  $P$  mit dieser Topologie metrisierbar ([Sch92], Korollar 3.19). Da nach [Sch92], Lemma 3.20, Punktsterne in der oben konstruierten Topologie abgeschlossen sind, gilt dies auch für die Geraden des Vierecks  $\mathfrak{L}e(\mathfrak{L})$  als Schnitte von Punktsternen zweier kollinearere Punkte. Damit definiert uns die Hausdorffmetrik eine Topologie auf  $\mathcal{L}$ , die, wie man leicht zeigt, eine Erweiterung der bisher benutzten Topologien auf den Teilräumen  $\mathcal{L}_\infty$  und  $\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_\infty$  ist.

Wir befinden uns nun in der gleichen Situation wie A. SCHROTH in [Sch92], Kapitel 3 (siehe Lemma 3.35): Die Räume  $S$  und  $\mathfrak{K}_H$  sind metrisch derart, daß

1. jede (nichterweiterte) Parallelklasse abgeschlossen in  $S$  und homöomorph zu  $\mathbb{R}$  und
2. jedes (nichterweiterte) Berührbüschel abgeschlossen in  $\mathfrak{K}_H$  und homöomorph zu  $\mathbb{R}$  ist.

Weiter haben wir in Lemma 3.35 gezeigt, daß die Menge der Parallelklassen (ausgestattet mit der Hausdorfftopologie) ein zur  $(n - 2)$ -Sphäre homöomorpher Raum ist.

Der Hauptsatz aus [Sch92], Kapitel 3 (Satz 3.22) besagt nun, daß ein verallgemeinertes Viereck, in dem bestimmte Teilräume Topologien tragen, unter gewissen Voraussetzungen schon zu einem topologischen Viereck gemacht werden kann.

**Satz 5.6.** Sei  $\mathcal{GQ} = (P, \mathcal{L})$  ein Viereck,  $p \in P$  und gelte

- (i)  $p^\perp \setminus \{p\}$  und  $P \setminus p^\perp$  tragen metrische Topologien.
- (ii) Für jede Gerade  $l \in \mathcal{L}_p$  sei  $l \setminus \{p\}$  abgeschlossen in  $p^\perp \setminus \{p\}$  und homöomorph zu  $\mathbb{R}^m$ .
- (iii) Für jede Gerade  $l \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_p$  sei  $l \setminus \{\pi(p, l)\}$  abgeschlossen in  $P \setminus p^\perp$  und homöomorph zu  $\mathbb{R}^m$ .
- (iv) Mit der durch die Hausdorffmetrik induzierten Topologie auf  $\mathcal{L}_p$  und  $\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_p$  sei  $\mathcal{L}_p$  homöomorph zur  $n$ -Sphäre und die in Satz 5.4 aufgeführten Abbildungen seien stetig.

Dann ist das Viereck  $\mathcal{GQ}$  mit den oben angegebenen Topologien auf  $P$  und  $\mathcal{L}$  topologisch.

Mit Hilfe dieses Satzes sind wir in der Lage, das Hauptergebnis dieses Abschnittes zu beweisen, wobei der Fall  $n = 3$  bereits in [Sch92], 3.23 bewiesen wurde.

**Satz 5.7.** Die Liegeometrie  $\mathfrak{Lie}(\mathfrak{L}) = (P, \mathcal{L})$  eines lokalkompakten zusammenhängenden Laguerreraums  $\mathfrak{L} = (S, \mathfrak{K})$  vom Rang  $n \geq 3$  ist mit den oben angegebenen Topologien ein kompaktes Viereck mit Parametern  $(1, n - 2)$ .

**Beweis:** Sei  $n \geq 4$ . Wir weisen die Bedingungen (i) bis (iv) des obigen Satzes nach.

(i) Es gilt  $\infty^\perp \setminus \{\infty\} = S$  und  $P \setminus \infty^\perp = \mathfrak{K}_H$ . Nach Satz 3.32 tragen diese Räume Relativtopologien des Punkt- und Hyperebenenraums eines kompakten zusammenhängenden projektiven Raums über  $\mathbb{R}$ , sind also insbesondere metrische Räume.

(ii) Sei  $l \in \mathcal{L}_\infty$ . Dann existiert ein Punkt  $s \in S$  mit  $l = \Gamma^*(s)$ , also ist  $l \setminus \{\infty\} = \Gamma(s)$ . Nach Lemma 3.20 (ii) ist  $\Gamma(s)$  abgeschlossen in  $S = \infty^\perp \setminus \{\infty\}$  und nach Lemma 3.35 (i) homöomorph zu  $\mathbb{R}$ .

(iii) Für jede Gerade  $l \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_\infty = \mathcal{B}^*$  gibt es  $s \in S$  und  $K \in \mathfrak{K}_H$ ,  $s \in K$ , mit  $l = B(s, K)$ . Da dann  $\pi(\infty, l) = s$ , folgt die Behauptung aus Lemma 3.35 (ii).

(iv) Nach Lemma 3.35 ist  $\mathcal{L}_\infty = \Gamma^*$  homöomorph zur  $(n - 2)$ -Sphäre. Weiter zeigt Satz 5.4 die geforderte Stetigkeit der Einschränkungen.

Die topologischen Parameter schließlich folgen aus den topologischen Eigenschaften der Geraden und Geradenbüschel.  $\square$

In Satz 5.3 haben wir gesehen, daß die Liegeometrie eines Laguerreraums, das die Bedingung (DO) erfüllt, isomorph zu einem verallgemeinerten Viereck vom Tits Typ ist. Ist  $\mathcal{O}$  nun ein abgeschlossenes Ovoid in einem kompakten zusammenhängenden projektiven Raum  $\mathcal{P}$  vom Rang  $n$ , so ist nach Lemma 2.21 das duale Ovoid  $\mathcal{O}^*$  ebenfalls ein abgeschlossenes Ovoid im dualen projektiven Raum

$\mathcal{P}^*$ . Bezeichnen wir mit  $\mathfrak{L}(\mathcal{O})$  den nach Satz 3.19 topologischen Laguerreraum, so bildet nach dem obigen Satz die Liegeometrie  $\mathfrak{Lie}(\mathfrak{L}(\mathcal{O}))$  ein kompaktes zusammenhängendes Viereck. Nach [Jos94], Satz 2.23, bildet auch das Viereck vom Tits Typ  $T_n(\mathcal{O}^*)$  ein kompaktes zusammenhängendes Viereck, wobei die hier genutzten Topologien auf Punkt- und Geradenraum mit den von uns im obigen Satz benutzten Topologien übereinstimmen. Wir erhalten also, zusammen mit Satz 5.3:

**Satz 5.8.** *Sei  $\mathcal{P} = (P, \mathcal{L})$  ein kompakter zusammenhängender projektiver Raum vom Rang  $n \geq 4$ . Sei weiter  $H$  eine Hyperebene von  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{O} \subseteq H$  ein abgeschlossenes Ovoid in  $H$ . Dann ist für jedes  $z \in P \setminus H$  die Liegeometrie  $\mathfrak{Lie}(\mathfrak{L}(\mathcal{O}))$  inzidenzerhaltend und topologisch isomorph zum verallgemeinerten Viereck  $T_n(\mathcal{O}^*)$  vom Tits Typ.*



## 6. Antireguläre Vierecke

Im letzten Paragraphen haben wir gesehen, daß die Liegeometrie eines Laguererraums (jedenfalls unter einfachen Voraussetzungen) ein verallgemeinertes Viereck bildet. Umgekehrt ist die Ableitung eines antiregulären Vierecks an jedem Punkt eine Laguerreebene (also ein Laguerreraum von Rang 3). Ziel dieses Abschnittes ist es, diese Konstruktion zu verallgemeinern, d.h. wir suchen Bedingungen an das Viereck (die sogenannte  $k$ -Antiregularität), so daß die Ableitung  $\mathcal{G}\mathcal{Q}_p$  an jedem Punkt  $p \in P$  einen Laguerreraum vom Rang  $k$  bildet (insbesondere soll ein Viereck genau dann 3-antiregulär sein, wenn es antiregulär ist). Weiter sollen zumindest die klassischen symmetrischen Vierecke  $\mathcal{Q}(n, \mathbb{R})$ , die wir in Beispiel 4.2 und in Satz 5.2 untersucht haben, diese Bedingung erfüllen.

Ist nun  $\mathcal{G}\mathcal{Q}$  ein  $k$ -antireguläres Viereck, so zeigt das Hauptergebnis dieses Paragraphen (Satz 6.12), daß die Ableitung tatsächlich einen Laguerreraum vom Rang  $k$  liefert. Umgekehrt bildet die Liegeometrie dieser Ableitung ein zu  $\mathcal{G}\mathcal{Q}$  isomorphes Viereck (Satz 6.15). Die  $k$ -Antiregularität beschreibt also, ob sich ein Viereck als Liegeometrie eines geeigneten Laguerreraums beschrieben werden kann.

### 6.1 Definition und Beispiele

Zur Motivation der folgenden Begriffe starten wir mit einem Beispiel: Sei  $\mathcal{L} = (S, \mathfrak{K})$  ein Laguerreraum vom Rang  $n \geq 3$ , mit  $\mathfrak{K}_H$  bezeichnen wir wie immer die Menge der Hyperkugeln. Weiter sei  $\mathfrak{L}\mathfrak{ie}(\mathcal{L}) = (P, \mathcal{L})$  die Liegeometrie, die ein verallgemeinertes Viereck bilde. Wir betrachten die in Abschnitt 4.2 definierte Ableitung des Vierecks  $\mathfrak{L}\mathfrak{ie}(\mathcal{L})$  am Punkt  $\infty$ . Dann gilt:

- $S = \infty^\perp \setminus \{\infty\}$  und  $\mathfrak{K}_H = P \setminus \infty^\perp$ ,
- jede Hyperkugel  $K \in \mathfrak{K}_H$  ist darstellbar als Schnitt der Punktsterne  $\infty^\perp \cap K^\perp$ ,
- ein Punkt  $s \in S$  liegt genau dann auf einer Hyperkugel  $K$ , wenn  $s$  im Viereck mit  $K$  verbindbar ist,
- zwei Punkte sind genau dann parallel, wenn sie im Viereck verbindbar sind, und
- zwei Hyperkugeln  $K$  und  $M$  berühren sich genau dann, wenn die Punkte  $K$  und  $M$  im Viereck verbindbar sind.

Ist nun der Rang von  $\mathfrak{L}$  gleich drei, handelt es sich also um eine Laguerreebene, so erhalten wir

- 1) Je drei paarweise nichtparallele Punkte  $s, t, u \in S$  haben genau einen Verbindungskreis  $k \in \mathfrak{K}$ , d.h. für je drei paarweise nichtverbindbare Punkte  $s, t, u \in \infty^\perp \setminus \{\infty\}$  existiert genau ein  $k \in P \setminus \infty^\perp$  mit  $s^\perp \cap t^\perp \cap u^\perp = \{\infty, k\}$ , und
- 2) Je zwei sich nichtberührende Kreise  $k, m \in \mathfrak{K}$  haben entweder keinen, oder genau zwei Schnittpunkte, d.h. für je zwei nichtverbindbare Punkte  $k, m \in P \setminus \infty^\perp$  gilt  $|\infty^\perp \cap k^\perp \cap m^\perp| \in \{0, 2\}$ .

Insbesondere werden diese beiden Eigenschaften durch die in Abschnitt 4.2 definierte Antiregularität beschrieben.

Ziel dieses Paragraphen ist es, als Verallgemeinerung der Antiregularität, zu untersuchen, wann sich ein Viereck als Liegeometrie eines Laguerrraums vom Rang  $k$  beschreiben läßt. Dabei liegt es nahe, den Schnitt mehrerer Punktsterne zu betrachten (in diesem Fall von  $k$  Punktsternen) und zu fordern, daß dieser Schnitt entweder leer ist, oder genau zwei Elemente enthält.

Allerdings spannen im Laguerrraum nicht beliebige Punkte  $s_1, \dots, s_k \in S$  genau eine Hyperkugel auf, sondern nur die unabhängigen, und umgekehrt schneiden sich nicht beliebige Hyperkugeln  $K_1, \dots, K_{k-1}$  in keinem oder genau zwei Punkten, sondern nur, wenn sie ebenfalls unabhängig sind und der Kreis  $\bigcap_{i=1}^{k-2} K_i$  die Hyperkugel  $K_{k-1}$  nicht berührt. Wir versuchen also im folgenden, diese, zunächst verschiedenen, Unabhängigkeitsbegriffe des Laguerrraums, in die Sprache der Vierecke zu übersetzen.

Seien  $s_1, \dots, s_k$  unabhängige Punkte in  $S$ . Diese Punkte spannen genau eine Hyperkugel  $K \in \mathfrak{K}_H$  auf. Insbesondere ist für alle  $i < k$  die Hülle  $\langle \{s_1, \dots, s_i\} \rangle$  ein Möbiusunterraum von  $\mathfrak{L}$  und  $s_{i+1} \notin \langle \{s_1, \dots, s_i\} \rangle$ . D.h. es gibt mindestens eine Hyperkugel  $M \in \mathfrak{K}_H$  durch  $s_1, \dots, s_i$  so, daß  $s_{i+1}$  nicht auf  $M$  liegt, oder, übersetzt ins Viereck  $\{s_1, \dots, s_i\}^\perp \not\subseteq s_{i+1}^\perp$ .

Da auch  $\langle \{s_1, \dots, s_{i+1}\} \rangle$  einen Möbiusraum bildet, erhalten wir zusätzlich,  $s_{i+1}$  ist zu keinem Punkt aus  $\langle \{s_1, \dots, s_i\} \rangle$  parallel, also  $\{s_1, \dots, s_i\}^\perp \not\subseteq z^\perp$  für alle  $z \in s_{i+1}^\perp \cap S$ . Weiter wissen wir, daß zwar  $\infty \in \{s_1, \dots, s_i\}^\perp$ , aber  $\infty$  nicht mit irgendeiner Hyperkugel verbindbar ist, wir erhalten also diese Beschreibung für alle  $z \in s_{i+1}^\perp$  und da auch  $s_{i+1} \in s_{i+1}^\perp$ , können wir die obigen beiden Eigenschaften wie folgt zusammenfassen:

*Die Punkte  $s_1, \dots, s_k$  sind genau dann unabhängig, wenn  $\{s_1, \dots, s_i\}^\perp \not\subseteq z^\perp$  für alle  $i < k$  und  $z \in s_{i+1}^\perp$ .*

Wir werden nun sehen, daß sich die Unabhängigkeit von Hyperkugeln auf die gleiche Weise beschreiben läßt. Sind  $K_1, \dots, K_{k-1}$  unabhängige Hyperkugeln, die sich,

sagen wir in genau zwei Punkten schneiden, so erhalten wir einerseits wegen der Unabhängigkeit  $\bigcap_{j=1}^i K_j \not\subseteq K_{i+1}$  für alle  $i < k - 2$ , übersetzt ins Viereck also  $\{\infty, K_1, \dots, K_i\}^\perp \not\subseteq K_{i+1}^\perp \cap \infty^\perp$ , und damit, da  $\{\infty, K_1, \dots, K_i\}^\perp \subseteq \infty^\perp$ , auch  $\{\infty, K_1, \dots, K_i\}^\perp \not\subseteq K_{i+1}^\perp$  (wie im oben diskutierten Fall unabhängiger Punkte). Da sich insbesondere die Hyperkugeln in genau zwei Punkten schneiden, gibt es keinen Möbiusunterraum der Form  $\bigcap_{j=1}^i K_j$ , der  $K_{i+1}$  in einem Punkt  $s$  berührt, d.h. es gibt keine Hyperkugel  $M$ , die  $K_{i+1}$  in  $s$  berührt mit  $\bigcap_{j=1}^i K_j \subseteq M$ . Im Viereck aber sind Berührungskugeln untereinander verbindbar, wir erhalten also  $\{\infty, K_1, \dots, K_i\}^\perp \not\subseteq M^\perp$  für alle  $M \in K_{i+1}^\perp \cap (P \setminus \infty^\perp)$ . Ist  $s \in K_{i+1}^\perp \cap \infty^\perp$ , so ist  $s^\perp \cap \infty^\perp = \Gamma(s)$  und da  $\{\infty, K_1, \dots, K_i\}^\perp$  mindestens zwei Punkte enthält und diese paarweise nicht verbindbar sind, folgt  $\{\infty, K_1, \dots, K_i\}^\perp \not\subseteq s^\perp$  und damit auch  $\{\infty, K_1, \dots, K_i\}^\perp \not\subseteq M^\perp$  für alle  $M \in K_{i+1}^\perp$ . Zusammenfassend erhalten wir:

*Die Hyperkugeln  $K_1, \dots, K_{k-1}$  sind genau dann unabhängig, wenn  $\{\infty, K_1, \dots, K_i\}^\perp \not\subseteq M^\perp$  für alle  $i < k - 1$  und  $M \in K_{i+1}^\perp$ .*

Wir haben damit unseren Unabhängigkeitsbegriff in verallgemeinerten Vierecken gefunden.

**Definition 6.1.** (Unabhängigkeit) *Sei  $\mathcal{GQ} = (P, \mathcal{L})$  ein verallgemeinertes Viereck. Eine endliche Folge  $q_1, \dots, q_k \in P$ ,  $k \geq 3$  heißt unabhängig, wenn*

$$q_1^\perp \cap \dots \cap q_i^\perp \not\subseteq z^\perp$$

für alle  $i < k$  und  $z \in q_{i+1}^\perp$ .

Sei im folgenden  $\mathcal{GQ}$  ein verallgemeinertes Viereck und  $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ . Wir nennen eine Folge nichtleer, wenn der Schnitt ihrer Punktsterne nichtleer ist. Zur Abkürzung bezeichnen wir mit

$$P^{(k)} := \{(q_1, \dots, q_k) \in P^k; (q_1, \dots, q_k) \text{ unabhängig, } |\{q_1, \dots, q_k\}^\perp| \neq \emptyset\}$$

die Menge der unabhängigen Folgen in  $P$  der Länge  $k$ , deren Punktsterne nichtleeren Schnitt haben.

In den folgenden Beweisen benötigen wir manchmal eine etwas andere Beschreibung der Unabhängigkeit. Dabei zeigt sich, daß eine Folge schon unabhängig ist, wenn die Schnitte der Punktsterne echt fallend ist und mindestens zwei Elemente enthält. Genauer heißt eine Folge  $q_1, \dots, q_k \in P$  fallend, wenn

$$q_1^\perp \cap \dots \cap q_i^\perp \not\subseteq q_{i+1}^\perp$$

für alle  $i < k$ .

Da für alle  $q \in P$  insbesondere  $q \in q^\perp$ , ist jede unabhängige Folge auch fallend. Umgekehrt ist, wie das nächste Lemma zeigt, eine fallende Folge, deren Schnitt mindestens 2 Elemente enthält, schon unabhängig.

**Lemma 6.2.** *Sei  $q_1, \dots, q_k$  eine fallende Folge mit  $|\{q_1, \dots, q_k\}^\perp| \geq 2$ . Dann ist die Folge schon unabhängig.*

**Beweis:** Seien  $s, t \in \{q_1, \dots, q_k\}^\perp$ . Da die Folge fallend ist, sind  $s$  und  $t$  nichtverbindbar und damit auch  $q_1, \dots, q_k \in s^\perp \cap t^\perp$  paarweise nichtverbindbar.

Sei  $i < k$ . Angenommen es existiert  $z \in q_{i+1}^\perp \setminus \{q_{i+1}\}$  so, daß  $\{q_1, \dots, q_i\}^\perp \subseteq z^\perp$ . Da insbesondere  $q_1 \not\sim q_{i+1}$ , folgt  $\{q_1, \dots, q_{i+1}\}^\perp \subseteq \{q_1, z, q_{i+1}\}^\perp = \pi(q_1, z \vee q_{i+1})$ , also enthält der Schnitt höchstens ein Element, ein Widerspruch.  $\square$

Wir kommen nun zur Definition der  $k$ -**Antiregularität**. Dabei ist (iii) die eigentlich wichtige, und im Allgemeinen auch schwierig nachzuweisende Bedingung, (ii) garantiert uns zusammen mit (i) die Existenz unabhängiger Folgen der Länge  $k$  (siehe Lemma 6.4 (ii)) und (i) unter anderem, daß das Berühren in der Ableitung durch die Verbindbarkeit im Viereck beschrieben wird.

**Definition 6.3.** *Sei  $\mathcal{GQ}$  ein verallgemeinertes Viereck und  $k \geq 3$ . Dann heißt  $\mathcal{GQ}$   $k$ -antiregulär, wenn die drei folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

- (i) Für alle  $p \in P$  und  $q, r \in P \setminus p^\perp$ ,  $q \neq r$  gilt  $|p^\perp \cap q^\perp \cap r^\perp| = 1 \iff q \sim r$ ;
- (ii) Für jede unabhängige Folge  $q_1, \dots, q_i \in P$  gilt  $|\{q_1, \dots, q_i\}^\perp| \notin \{1, 2\}$ ,  $i < k$ ;
- (iii) Für jede unabhängige Folge  $q_1, \dots, q_k \in P$  gilt  $|\{q_1, \dots, q_k\}^\perp| \in \{0, 2\}$ .

Im nächsten Lemma fassen wir einige Aussagen zusammen, die wir im folgenden benötigen. Beispielsweise zeigt (i), daß für jeden Punkt  $p$  aus einem  $k$ -antiregulärem Viereck die Abbildung

$$\kappa_p: P \setminus p^\perp \longrightarrow \mathcal{K}_H := \{p^\perp \cap q^\perp; q \in P \setminus p^\perp\}; q \rightarrow p^\perp \cap q^\perp$$

bijektiv ist.

**Lemma 6.4.** *Sei  $\mathcal{GQ}$   $k$ -antiregulär. Dann gilt*

- (i) Für alle  $p \in P$  und  $q, r \in P \setminus p^\perp$  gilt  $p^\perp \cap q^\perp \subseteq p^\perp \cap r^\perp \iff q = r$ ;
- (ii) Für alle nichtverbindbaren Punkte  $x, y \in P$  und jede nichtleere unabhängige Folge  $q_1, \dots, q_i \in x^\perp \cap y^\perp$ ,  $i < k$ , existieren  $q_{i+1}, \dots, q_k \in x^\perp \cap y^\perp$  so, daß die Folge  $q_1, \dots, q_k$  nichtleer und unabhängig ist;
- (iii) Ist  $q_1, \dots, q_i$ ,  $i \leq k$ , eine nichtleere unabhängige Folge, so auch  $q_{\sigma(1)}, \dots, q_{\sigma(i)}$  für jede Permutation  $\sigma \in S_k$ .

**Beweis:** (i) Angenommen, es existieren verschiedene Punkte  $q, r \in P \setminus p^\perp$  so, daß  $p^\perp \cap q^\perp \subseteq p^\perp \cap r^\perp$ . Sei weiter  $s \in p^\perp \cap q^\perp$  und  $z_1, z_2$  zwei verschiedenen Punkte aus  $s \vee r$ . Dann gilt  $1 \leq |p^\perp \cap q^\perp \cap z_i^\perp| \leq |p^\perp \cap r^\perp \cap z_i^\perp| = |\{s\}| = 1$ , und damit  $q \sim z_i$ ,  $i = 1, 2$  (siehe Definition 6.3 (i)). Es folgt  $q \in s \vee r$ , also  $q \sim r$  und damit  $p^\perp \cap q^\perp \subseteq p^\perp \cap q^\perp \cap r^\perp = p^\perp \cap (q \vee r) = \pi(p, q \vee r)$ , d.h.  $p^\perp \cap q^\perp$  enthält genau ein Element, nach Lemma 4.4 (iii) ein Widerspruch zur Reichhaltigkeit.

(ii) Seien  $q_1, \dots, q_i \in x^\perp \cap y^\perp$ . Nach Definition 6.3 (ii) gilt dann  $|\{q_1, \dots, q_i\}^\perp| \geq 2$ , also existiert ein weiterer Punkt  $z_1 \in \{q_1, \dots, q_i\}^\perp$ . Da  $z_1 \not\sim y$ , existiert mit (i) ein Punkt  $q_{i+1} \in (x^\perp \cap y^\perp) \setminus z_1^\perp$ . Also ist die Folge  $q_1, \dots, q_{i+1}$  fallend, und damit nach Lemma 6.2 auch unabhängig. Wieder nach Definition 6.3 (ii) existiert  $z_2 \in \{q_1, \dots, q_{i+1}\}^\perp \setminus \{x, y\}$ , und damit nach (i) ein Punkt  $q_{i+2} \in (x^\perp \cap y^\perp) \setminus z_2^\perp$ , d.h. die Folge  $q_1, \dots, q_{i+2}$  ist fallend, und nach Lemma 6.2 somit unabhängig. Mit demselben Verfahren erhalten wir auch  $q_{i+3}, \dots, q_k$  und damit die Behauptung.

(iii) Sei also jetzt  $(q_1, \dots, q_i) \in P^{(i)}$ . Nach (ii) existieren  $q_{i+1}, \dots, q_k$  so, daß  $(q_1, \dots, q_k) \in P^{(k)}$ , also gilt insbesondere  $|\{q_1, \dots, q_k\}^\perp| = 2$ . Seien  $x, y \in \{q_1, \dots, q_k\}^\perp$  und  $\alpha \in S_k$ . Nehmen wir an, es existiert  $j \leq k$  und ein Punkt  $z \in q_{\alpha(j)}$  mit  $\{q_{\alpha(1)}, \dots, q_{\alpha(j-1)}\}^\perp \subseteq z^\perp$ . Da  $x \not\sim y$ , aber  $x, y \sim q_{\alpha(j)}, z$ , folgt  $z = q_{\alpha(j)}$ , und damit

$$\bigcap_{n \neq j} q_{\alpha(n)}^\perp = \bigcap_n q_n^\perp = \{x, y\},$$

ein Widerspruch zu Definition 6.3 (ii).  $\square$

Nach der letzten Aussage des obigen Lemma hängt die Unabhängigkeit von Punkten in einem  $k$ -antiregulären Viereck nicht, wie zunächst definiert, von der Reihenfolge ab. Wir sprechen also im folgenden von unabhängigen Punkten, und nicht mehr von unabhängigen Folgen.

Beispiele für  $k$ -antireguläre Vierecke sind, wie die nächsten beiden Aussagen zeigen, antireguläre Vierecke (dies entspricht gerade der 3-Antiregularität), und die sogenannten symmetrischen Vierecke.

**Lemma 6.5.**  $\mathcal{GQ}$  ist genau dann antiregulär, wenn es 3-antiregulär ist

**Beweis:** Offensichtlich folgt aus der Antiregularität sofort die 3-Antiregularität. Sei also  $\mathcal{GQ}$  3-antiregulär. Seien weiter  $p, q, r \in P$  paarweise nichtverbindbar. Nach Lemma 6.4 ist die Folge  $p, q, r$  fallend. Da  $|p^\perp \cap q^\perp \cap r^\perp| \neq 1$  nach Definition 6.3 (i), enthält der Schnitt entweder keine, oder mehr als zwei Elemente, und es folgt aus der Definition zusammen mit Lemma 6.2 die Behauptung.  $\square$

**Lemma 6.6.** Die Vierecke  $Q(n, \mathbb{R})$  sind  $(n - 1)$ -antiregulär.

**Beweis:** Dies ist eine unmittelbare Konsequenz aus Folgerung 3.12.  $\square$

## 6.2 Die Ableitung $\mathcal{GQ}_p$

Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, daß die Ableitung eines  $k$ -antiregulären Vierecks tatsächlich ein Laguererraum vom Rang  $k$  ist. Sei also im folgenden  $\mathcal{GQ}$  ein  $k$ -antireguläres Viereck,  $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  und  $p \in P$ . Mit

$$S := p^\perp \setminus \{p\}$$

sei der Punktraum, und mit

$$\mathfrak{K} := \{\{p, q_1, \dots, q_{k-2}\}^\perp; (p, q_1, \dots, q_{k-2}) \in P^{(k-1)}\}$$

der Kreisraum unserer neuen Geometrie bezeichnet. Dann heißt

$$\mathcal{GQ}_p := (S, \mathfrak{K}, \in)$$

die **Ableitung von  $\mathcal{GQ}$  in  $p$** .

Bevor wir nun unseren Hauptsatz beweisen können, benötigen wir noch einige Hilfssätze. Das nächste Lemma liefert uns die Existenz eines Verbindungskreises in der Ableitung von  $\mathcal{GQ}$ .

**Lemma 6.7.** *Seien  $x_1, x_2, x_3 \in p^\perp \setminus \{p\}$  drei paarweise nichtverbindbare Punkte. Dann existieren  $k-2$  zu  $p$  nichtverbindbare Punkte  $q_1, \dots, q_{k-2} \in x_1^\perp \cap x_2^\perp \cap x_3^\perp$  so, daß  $(p, q_1, \dots, q_{k-2}) \in P^{(k-1)}$ .*

**Beweis:** Seien  $x_1, x_2, x_3$  wie oben. Nach Lemma 6.4 (i) sind  $x_1, x_2, x_3$  unabhängig, also existieren nach Lemma 6.4 (ii)  $x_4, \dots, x_k \in p^\perp \setminus \{p\}$  so, daß  $(x_1, \dots, x_k) \in P^{(k)}$ . Es existieren damit also Punkte  $q_1, \dots, q_{k-2} \in P \setminus p^\perp$  mit  $q_1 \in \{x_1, \dots, x_k\}^\perp$  und  $q_i \in \{x_1, \dots, x_{k-i+1}\}^\perp \setminus x_{k-i+2}^\perp$ , für alle  $2 \leq i \leq k-2$ , d.h.  $q_1, \dots, q_{k-2}$  sind fallend. Da  $p^\perp \not\subseteq q_1^\perp$ , sind auch  $p, q_1, \dots, q_{k-2}$  fallend und mit Lemma 6.2 auch unabhängig.  $\square$

Als Zwischenergebnis erhalten wir mit den bisher gezeigten Aussagen:

**Satz 6.8.**  *$\mathcal{GQ}_p$  ist eine Laguerregeometrie.*

**Beweis:** (i) Wir überlegen uns zunächst, wann zwei Punkte  $s, t \in S$  parallel sind. Nach Lemma 6.7 existiert ein Verbindungskreis  $k \in \mathfrak{K}$  von  $s$  und  $t$ , wenn  $s$  und  $t$  in  $\mathcal{GQ}$  nicht verbindbar sind. Sind umgekehrt  $s$  und  $t$  in  $\mathcal{GQ}$  verbindbar, so gilt  $s^\perp \cap t^\perp = s \vee t$ , also existiert kein  $q \in P \setminus p^\perp$  mit  $s, t \in q^\perp$ , und es folgt:

$$s \parallel t \text{ in } \mathcal{GQ}_p \iff s \sim t \text{ in } \mathcal{GQ}.$$

Die Parallelität von Punkten in  $\mathcal{GQ}_p$  ist also eine Äquivalenzrelation.

(ii) (Existenz und Eindeutigkeit des Verbindungskreises) Nach Lemma 6.7 müssen wir nur noch die Eindeutigkeit des Verbindungskreises zeigen.

Seien  $s, t, u \in S$  paarweise nichtparallel in  $\mathcal{GQ}_p$  (also paarweise nichtverbindbar im Viereck). Angenommen, es existieren  $q_1, \dots, q_{k-2}, z_1, \dots, z_{k-2} \in \{s, t, u\}^\perp$  derart, daß  $p, q_1, \dots, q_{k-2}$  und  $p, z_1, \dots, z_{k-2}$  fallend sind, aber

$$\{p, q_1, \dots, q_{k-2}\}^\perp \neq \{p, z_1, \dots, z_{k-2}\}^\perp.$$

Gelte o.B.d.A  $\{p, q_1, \dots, q_{k-2}\}^\perp \not\subseteq \{p, z_1, \dots, z_{k-2}\}^\perp$ . Dann existiert insbesondere  $x \in \{p, q_1, \dots, q_{k-2}\}^\perp \setminus z_1^\perp$ , d.h.  $p, q_1, \dots, q_{k-2}, z_1$  sind fallend und nach Lemma 6.2 auch unabhängig. Da aber  $|\{p, q_1, \dots, q_{k-2}, z_1\}^\perp| > 2$ , ist dies ein Widerspruch zur Definition der  $k$ -Antiregularität.

(iii) (Reichhaltigkeit) Sei  $\{p, q_1, \dots, q_{k-2}\}^\perp, (p, q_1, \dots, q_{k-2}) \in P^{(k-1)}$ , ein Kreis in  $\mathcal{GQ}_p$ . Nach Definition 6.3 (ii) gilt dann  $|\{p, q_1, \dots, q_{k-2}\}^\perp| \geq 3$ , also liegen auf jedem Kreis mindestens drei Punkte. Seien weiter  $s, t \in S$  zwei nichtparallele Punkte. Wegen der Reichhaltigkeit im Viereck existiert eine Gerade  $l \in \mathcal{L}_p \setminus \{s \vee p, t \vee p\}$ . Da für jeden Punkt  $u \in l$  die Punkte  $s, t, u$  paarweise nichtparallel sind und  $|l| \geq 3$  ist, existieren mindestens drei verschiedene Kreise, die durch  $s$  und  $t$  gehen.  $\square$

Uns fehlt jetzt noch die Eigenschaft, daß je vier Punkte aus  $S$  in einer Unterebene von  $\mathcal{GQ}_p$  liegen. Um dies zeigen zu können, benötigen wir die folgenden beiden Sätze, in denen Möbius- bzw. Laguerreebenen in  $\mathcal{GQ}_p$  konstruiert werden. Den 3-antiregulären (antiregulären) Fall haben wir bereits in Abschnitt 4.2 besprochen, sei also im folgenden  $k \geq 4$ .

**Satz 6.9.** *Sei  $q_1, \dots, q_{k-3} \in P \setminus p^\perp$  so, daß  $(p, q_1, \dots, q_{k-3}) \in P^{(k-2)}$ . Dann ist*

$$\mathcal{GQ}_{p,M} := (M := \{p, q_1, \dots, q_{k-3}\}^\perp, \mathfrak{K}_M := \{k \in \mathfrak{K}; k \subseteq M\})$$

*eine Möbiusunterebene von  $\mathcal{GQ}_p$ .*

**Beweis:** (i) Seien  $s, t, u \in M$ . Dann sind  $s, t, u$  paarweise nichtverbindbar, so daß nach dem obigen Satz genau ein Verbindungskreis  $k \in \mathfrak{K}$  existiert. Seien  $z_1, \dots, z_{k-2}$  so, daß  $k = \{p, z_1, \dots, z_{k-2}\}^\perp$ .

Wir zeigen nun, daß  $k \subseteq M$ ,  $M$  also ein Unterraum ist. Angenommen, für alle  $i \leq k-2$  sind die Punkte  $p, q_1, \dots, q_{k-3}, z_i$  nicht fallend, also gilt  $M \subseteq k$ . Nach Lemma 6.4 (i) existiert  $z_{k-1} \in s^\perp \cap t^\perp \setminus u^\perp$ , d.h.  $p, z_1, \dots, z_{k-1}$  sind fallend, und damit nach Lemma 6.2 auch unabhängig und es folgt

$$|\{p, z_1, \dots, z_{k-2}\}^\perp| = 2.$$

Da  $M \subseteq k = \{p, z_1, \dots, z_{k-2}\}^\perp$ , erhalten wir

$$2 = |\{p, q_1, \dots, q_{k-3}, z_{k-1}\}^\perp| = |M \cap z_{k-1}^\perp| \leq |k \cap z_{k-1}^\perp| = 2,$$

ein Widerspruch zur Definition der  $k$ -Antiregularität (Definition 6.3 (ii)). Also existiert  $i \leq k-2$  so, daß die Punkte  $p, q_1, \dots, q_{k-3}, z_i$  fallend, und damit nach

Lemma 6.2 auch unabhängig sind. Nach Lemma 6.7 ist der Verbindungskreis eindeutig, d.h.  $k = \{p, q_1, \dots, q_{k-3}, z_i\}^\perp$ . Wir haben damit sowohl gezeigt, daß  $M$  ein Unterraum von  $\mathcal{GQ}_p$  ist, als auch

$$\mathfrak{K}_M = \{p, q_1, \dots, q_{k-3}, z\}^\perp; (p, q_1, \dots, q_{k-3}, z) \in P^{(k-1)}\}.$$

(ii) Wir müssen noch die Eindeutigkeit des Berührungskreises zeigen. Sei  $q \in P$  so, daß  $k := \{p, q_1, \dots, q_{k-3}, q\}^\perp \in \mathfrak{K}_M$ ,  $s \in k$  und  $t \in M \setminus k$ . Sei weiter  $z := \pi(t, s \vee q)$ . Da die Punkte  $p, q_1, \dots, q_{k-3}, q$  unabhängig sind, und  $z \sim q$ , sind  $p, q_1, \dots, q_{k-3}, z$  fallend, und damit nach Lemma 6.2 auch unabhängig, also ist  $k' := \{p, q_1, \dots, q_{k-3}, z\}^\perp$  ein Berührungskreis durch  $s$  und  $t$  an  $k$ . Sei  $z' \in P$  ein weiterer Punkt so, daß  $s, t \in k'' := \{p, q_1, \dots, q_{k-3}, z'\}^\perp \in \mathfrak{K}$  und  $|k \cap k''| = 1$ . Da  $|\{p, q_1, \dots, q_{k-3}, z', q\}^\perp| = 1$ , sind nach Definition 6.3 (iii) die Punkte  $p, q_1, \dots, q_{k-3}, z', q$  nicht unabhängig, es existiert also  $r \in q^\perp \setminus \{q\}$  mit  $\{p, q_1, \dots, q_{k-3}, z'\}^\perp \subseteq r^\perp$ . Da dann  $s, t \sim r$  folgt  $r \in s \vee q$ , und damit  $z = r$ . Wir erhalten damit  $\{p, q_1, \dots, q_{k-3}, z'\}^\perp \subseteq z^\perp$ , also  $k'' \subseteq k'$  und da  $|k''| \geq 3$ , auch  $k' = k''$ .  $\square$

**Folgerung 6.10.** *Je vier unabhängige Punkte  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in S$  liegen in einer Möbiusebene.*

**Beweis:** Da  $p \in \{x_1, \dots, x_4\}^\perp$  gilt  $(x_1, \dots, x_4) \in P^{(4)}$ , also gibt es nach Lemma 6.4 (ii) Punkte  $x_5, \dots, x_k \in p^\perp \setminus \{p\}$  so, daß  $(x_1, \dots, x_k) \in P^{(k)}$ . d.h. es existieren  $q_1, \dots, q_{k-3} \in P \setminus p^\perp$  mit  $q_1 \in \{x_1, \dots, x_k\}^\perp$  und  $q_i \in \{x_1, \dots, x_{k-i+1}\}^\perp \setminus x_{k-i+2}^\perp$ , für alle  $2 \leq i \leq k-3$ , d.h. die Punkte  $q_1, \dots, q_{k-3}$  sind fallend, also nach Lemma 6.2 auch unabhängig. Da insbesondere  $x_1, \dots, x_4 \in \{p, q_1, \dots, q_{k-3}\}^\perp$ , folgt die Behauptung.  $\square$

Die folgende Konstruktion von Lagerreunterebenen in  $\mathcal{GQ}_p$  verläuft ähnlich wie die Konstruktion ovoidaler Lagerrebenen in Abschnitt 3.1.

**Satz 6.11.** *Sei  $k \in \mathfrak{K}$ . Dann heißt  $L := \bigcup_{x \in k} (p \vee x) \setminus \{p\}$  Zylinder über  $k$  und*

$$\mathcal{GQ}_{p,L} := (L, \mathfrak{K}_L := \{m \in \mathfrak{K}; m \subseteq L\})$$

*ist eine Lagerreunterebene von  $\mathcal{GQ}_p$ .*

**Beweis:** (i) Wir zeigen zunächst, daß  $L$  ein Unterraum ist. Seien  $s, t, u \in L$  paarweise nichtparallel,  $u \notin k$  und  $k'$  ein Verbindungskreis von  $s, t, u$ . Gelte zunächst  $s, t \in k$ .

Angenommen, es existiert  $x \in k' \setminus L$ . Sei  $u' \in k$  mit  $u \sim u'$  ( $u' = k \cap (u \vee p)$ ). Da für alle  $z \in p \vee x$  gilt  $z \notin k$ , erhalten wir  $s^\perp \cap t^\perp \cap u'^\perp \not\subseteq z$ , und damit die Unabhängigkeit der Punkte  $s, t, u', x$ . Nach der obigen Folgerung existiert also ein Möbiusunterraum  $M$  von  $\mathcal{GQ}_p$  mit  $s, t, u', x \in M$ , und da  $M$  ein Teilraum ist, folgt  $k, k' \subseteq M$ . Da  $u \sim u' \in k$ , existieren zwei parallele Punkte in  $M$ , ein Widerspruch, also  $x \in L$ . Umgekehrt läßt sich mit dem gleichen Argument zeigen, daß  $L \subseteq \bigcup_{s \in k'} s \vee p$ , und wir erhalten damit



$$\bigcup_{s \in k'} s \vee p = \bigcup_{s \in k} s \vee p.$$

Seien jetzt  $s, t, u$  beliebig und  $s', t', u' \in k$  so, daß  $s \sim s', t \sim t'$  und  $u \sim u'$ . Da  $s, t, u$  paarweise nicht parallel sind, sind auch  $t', s', u$  und  $s', u, t$  paarweise nicht-parallel. Es existieren also Verbindungskreise  $k_1$  bzw.  $k_2$  von  $t', s', u$  bzw.  $s', u, t$ , und es folgt aus dem obigen Resultat

$$\bigcup_{s \in k} s \vee p = \bigcup_{s \in k_1} s \vee p = \bigcup_{s \in k_2} s \vee p = \bigcup_{s \in k'} s \vee p.$$

Also ist  $L$  ein Unterraum.

(ii) Wir zeigen jetzt, daß

$$\mathfrak{K}_L = \{L \cap z^\perp; z \in P \setminus p^\perp\}.$$

Sei  $m \in \mathfrak{K}_L$ . Sei weiter  $z \in P \setminus p^\perp$  so, daß  $m \subseteq z^\perp$ . Angenommen, es existiert  $x \in (z^\perp \cap L) \setminus m$ . Nach (i) existiert dann  $x' \in m \subseteq z^\perp$  mit  $x' \in p \vee x$ , also gibt es zwei verbindbare Punkte in  $p^\perp \cap z^\perp$ , ein Widerspruch.

Sei jetzt umgekehrt  $z \in P \setminus p^\perp$ . Seien weiter  $x_1, x_2, x_3 \in k$  paarweise verschieden. Dann sind  $x'_i := \pi(z, x_i \vee p)$  paarweise nichtparallel, es existiert also ein Verbindungskreis  $m \subseteq z^\perp$ . Mit dem gleichen Argument wie oben folgt nun wieder  $m = L \cap z^\perp$ .

(iii) (Zu den Axiomen) Die Existenz und Eindeutigkeit des Verbindens liefert uns Satz 6.8. In (i) haben wir insbesondere gezeigt, daß zu jedem Kreis  $m \in \mathfrak{K}_L$  und zu jedem Punkt  $s \in S$  genau ein zu  $s$  paralleler Punkt  $t \in m$  existiert. Da die Reichhaltigkeit auch klar ist, müssen wir nur noch die Existenz und Eindeutigkeit eines Berührungskreises zeigen. Seien dazu  $m \in \mathfrak{K}_L$ ,  $s \in m$  und  $t \notin m$  nichtparallel zu  $s$ . Sei weiter  $z \in P \setminus p^\perp$  so, daß  $m = L \cap z^\perp$ . Da  $s \sim z$ , existiert  $z' = \pi(t, s \vee z)$  und es folgt  $t \in L \cap z'^\perp$ , und  $L \cap z^\perp \cap z'^\perp = \{s\}$ .

Sei  $z'' \in P \setminus p^\perp$  so, daß  $m' := L \cap z''^\perp$  ein weiterer Berührungskreis von  $m$  an  $s$  durch  $t$  ist. Seien weiter  $z_1, \dots, z_{k-2}$  so, daß  $m' = \{p, \dots, z_{k-2}\}^\perp$ . Da dann die Folge  $p, z_1, \dots, z_{k-2}, z$  abhängig ist, existiert  $r \in z^\perp \setminus \{z\}$  mit  $m' \subseteq r^\perp$ , also  $t, s \sim r$  und damit  $r \in s \vee z$ . Da auch  $z' \in s \vee z$  und  $s, t \sim z'$ , folgt  $r = z'$ , also  $m' = L \cap z'^\perp$ .  $\square$

Wir sind nun in der Lage, unseren Hauptsatz zu beweisen.

**Satz 6.12.**  $\mathcal{GQ}_p$  bildet für alle  $p \in P$  einen Laguerreerraum.

**Beweis:** Nach Satz 6.8 müssen wir nur noch zeigen, daß je vier Punkte in einer Möbius- oder Laguerreebene liegen. Für unabhängige Punkte liefert uns Folgerung 6.10 die Behauptung. Seien also jetzt  $s, t, u, w \in S$  abhängig und sei  $z \in w^\perp$  so, daß  $\{s, t, u\}^\perp \subseteq z^\perp$ . Da insbesondere dann auch  $p \sim z$ , folgt  $z \in p \vee w$ . Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

(i) Seien  $s, t, u$  verbindbar in  $\mathcal{GQ}_p$ . Dann existiert  $k \in \mathfrak{K}$  mit  $s, t, u \in k$ . Weil dann  $z \in k$ , folgt  $w \in \bigcup_{x \in k} p \vee x$ , also liegen nach Satz 6.11  $s, t, u, w$  in einer Laguerreebene.

(ii) Seien  $s, t, u$  nicht verbindbar  $\mathcal{GQ}_p$ . Dann gibt es zwei Fälle:

(a) Liegen  $s, t, u$  auf einer Geraden  $l \in \mathcal{L}$ , so gilt  $l \in \mathcal{L}_p$ , also  $l = \{s, t, u\}^\perp \subseteq z^\perp$  und damit  $z \in l$ . Ist  $s \in k \in \mathcal{K}$ , so folgt  $s, t, u, w \in \bigcup_{x \in k} p \vee x$ .

(b) Liegen  $s, t, u$  nicht auf einer Geraden von  $\mathcal{GQ}$ , so gelte o.B.d.A.  $s$  ist in  $\mathcal{GQ}_p$  verbindbar mit  $t$ , und  $u \parallel t$ . Dann ist  $z \sim \pi(s, t \vee u)$ , also  $z \in t \vee u = p \vee u$ , und damit auch  $w \in p \vee u$ . Ist  $k$  ein Verbindungskreis von  $s$  und  $t$ , so folgt wieder  $s, t, u, w \in \bigcup_{x \in k} p \vee x$ .

Also liegen je vier Punkte aus  $S$  in einer Unterebene.  $\mathcal{GQ}_p$  bildet also ein Laguerrraum.  $\square$

Im nächsten Paragraphen zeigen wir, daß die Ableitungen an jedem Punkt eines  $k$ -antiregulären kompakten zusammenhängenden Vierecks einen lokalkompakten zusammenhängenden Laguerrraum liefert. Um die geforderten Stetigkeiten im Laguerrraum aus stetigen Abbildungen im Viereck nachweisen zu können, benötigen wir eine Beschreibung der Hyperkugeln der Ableitung im Viereck. Des weiteren zeigt das nächste Lemma, daß die Unabhängigkeitsbegriffe im Viereck und in der Ableitung übereinstimmen.

**Lemma 6.13.** *Sei  $\mathcal{GQ}$  ein  $k$ -antireguläres Viereck,  $p \in P$  und  $\mathcal{GQ}_p = (S, \mathfrak{K})$  die Ableitung an  $p$ . Mit  $\mathfrak{K}_H$  bezeichnen wir den Raum der Hyperkugeln. Dann gilt*

- (i)  $\mathfrak{K}_H = \{p^\perp \cap q^\perp; q \in P \setminus p^\perp\}$ ;
- (ii) *Die Punkte  $s_1, \dots, s_k \in p^\perp \setminus \{p\}$  sind genau dann unabhängig im Viereck, wenn sie unabhängig im Laguerrraum  $\mathcal{GQ}_p$  sind und eine Hyperkugel aufspannen;*
- (iii) *Die Punkte  $p, q_1, \dots, q_{k-1} \in P$  sind genau dann unabhängig und nichtleer im Viereck, wenn die Hyperkugeln  $p^\perp \cap q_1^\perp, \dots, p^\perp \cap q_{k-1}^\perp$  unabhängig im Laguerrraum  $\mathcal{GQ}_p$  sind und sich in genau zwei Punkten schneiden.*

**Beweis:** (i) Sei zunächst  $q \in P \setminus p^\perp$ . Sei  $k = \{p, q_1, \dots, q_{k-2}\}^\perp \in \mathfrak{K}$  ein Kreis so, daß  $k$  und  $p^\perp \cap q^\perp$  mindestens drei Elemente gemeinsam haben. Dann gilt  $|\{p, q_1, \dots, q_{k-2}, q\}^\perp| \geq 3$ , nach Definition der  $k$ -Antiregularität sind damit die Punkte  $p, q_1, \dots, q_{k-2}, q$  nicht unabhängig. Es gibt also ein  $z \in q^\perp$  so, daß  $k \subseteq z^\perp$ , und da es dann mindestens drei paarweise nichtverbindbare Punkte gibt, die sowohl zu  $z$ , als auch zu  $q$  verbindbar sind, folgt  $z = q$ , also  $k \subseteq p^\perp \cap q^\perp$ . Weiter ist kein Punkt aus  $p^\perp \cap q^\perp$  zu einem anderen Punkt aus  $p^\perp \cap q^\perp$  verbindbar, und damit  $p^\perp \cap q^\perp$  ein Möbiusunterraum. Ist  $x \in p^\perp \setminus (p^\perp \cap q^\perp)$ , so ist  $\pi(q, x \vee p) \in p^\perp \cap q^\perp$

ein zu  $x$  verbindbarer Punkt, d.h. es gibt keinen Möbiusunterraum  $K$  von  $\mathcal{GQ}_p$  so, daß  $p^\perp \cap q^\perp \subsetneq K$ , also ist  $p^\perp \cap q^\perp$  maximal und damit eine Hyperkugel.

Damit läßt sich jeder Kreis als Schnitt von  $k - 1$  Hyperkugeln darstellen, wir erhalten also insbesondere, daß der Rang des Laguererraums  $\mathcal{GQ}_p$  höchstens  $k$  ist.

Sei umgekehrt  $K$  ein Möbiusunterraum in  $\mathcal{GQ}_p$  und  $s_1, \dots, s_l \in S$  unabhängige Punkte im Laguererraum  $\mathcal{GQ}_p$  (zunächst wissen wir noch nicht, daß beide Unabhängigkeitsbegriffe übereinstimmen) derart, daß  $\overline{\{s_1, \dots, s_l\}} = K$ . Dann existieren  $q_1, \dots, q_{k-1} \in P \setminus p^\perp$  so, daß  $s_1, s_2, s_3 \in \{p, q_1, \dots, q_{k-1}\}^\perp \in \mathfrak{K}$ . Weiter gilt, da  $s_4 \notin \{p, q_1, \dots, q_{k-1}\}^\perp$ , daß  $\{s_1, s_2, s_3\}^\perp \not\subseteq s_4^\perp$ , und da  $s_4$  mit keinem Punkt aus dem Kreis  $\{p, q_1, \dots, q_{k-1}\}^\perp$  verbindbar ist, erhalten wir zusätzlich  $\{s_1, s_2, s_3\}^\perp \not\subseteq z^\perp$  für alle  $z \in s_4^\perp$ , d.h. die Punkte  $s_1, s_2, s_3, s_4$  sind auch im Viereck unabhängig. Es existieren somit  $r_1, \dots, r_{k-2} \in P \setminus p^\perp$  derart, daß die Punkte  $p, r_1, \dots, r_{k-2}$  unabhängig (im Viereck) sind und  $s_1, \dots, s_4 \in \{p, r_1, \dots, r_{k-2}\}^\perp$ , d.h.  $\overline{\{s_1, \dots, s_4\}} \subseteq \{p, r_1, \dots, r_{k-2}\}^\perp$ . Da  $\{p, r_1, \dots, r_{k-2}\}^\perp$  aber eine Möbiusunterebene ist (siehe Satz 6.9) und die Punkte  $s_1, \dots, s_4$  unabhängig im Laguererraum sind, also eine Möbiusunterebene aufspannen, folgt hier sogar die Gleichheit.

Wir betrachten nun  $s_5$ . Da  $s_1, \dots, s_5$  unabhängig im Laguererraum sind, folgt  $s_5 \notin \overline{\{s_1, \dots, s_4\}} = \{p, r_1, \dots, r_{k-2}\}^\perp$ . Mit den gleichen Argumenten wie oben läßt sich nun zeigen, daß die Punkte  $s_1, \dots, s_5$  auch im Viereck unabhängig sind. Also existieren  $u_1, \dots, u_{k-3} \in P \setminus p^\perp$  so, daß  $p, u_1, \dots, u_{k-3}$  unabhängig sind und  $s_1, \dots, s_5 \in \{p, u_1, \dots, u_{k-3}\}^\perp$ , also  $\overline{\{s_1, \dots, s_5\}} \subseteq \{p, u_1, \dots, u_{k-3}\}^\perp$ . Nach dem, was oben gezeigt wurde, sind die Unterräume  $p^\perp \cap u_1^\perp, \dots, p^\perp \cap u_{k-3}^\perp$  Hyperkugeln im Laguererraum. Zudem folgt aus der Unabhängigkeit der Punkte  $p, u_1, \dots, u_{k-3}$ , daß  $\bigcap_{j=1}^i p^\perp \cap u_j \not\subseteq p^\perp \cap u_{j+1}$  für alle  $j \leq k - 3$ , so daß  $p^\perp \cap u_1^\perp, \dots, p^\perp \cap u_{k-3}^\perp$  unabhängig im Laguererraum sind. Der Unterraum  $\{p, u_1, \dots, u_{k-3}\}^\perp$  ist somit ein Unterraum vom Rang vier (wir haben oben gezeigt, daß  $\mathcal{GQ}_p$  höchstens den Rang  $k$  hat, also hat zunächst  $\{p, u_1, \dots, u_{k-3}\}^\perp$  einen Rang von höchstens vier. Da aber mindestens fünf unabhängige Punkte in  $\{p, u_1, \dots, u_{k-3}\}^\perp$  enthalten sind, folgt dies). Da auch  $\overline{\{s_1, \dots, s_u\}}$  einen Unterraum vom Rang vier bildet, folgt hier wieder  $\overline{\{s_1, \dots, s_u\}} = \{p, u_1, \dots, u_{k-3}\}^\perp$ .

Wiederholen wir dieses Verfahren, so erhalten wir für  $n := \min\{k, l\}$ : Die Punkte  $s_1, \dots, s_n$  liegen in einer Hyperebene der Form  $p^\perp \cap q^\perp$  für ein  $q \in P \setminus p^\perp$ . Angenommen,  $k < l$ . Mit den gleichen Argumenten wie oben zeigt man dann  $\overline{\{s_1, \dots, s_k\}} = p^\perp \cap q^\perp$ . Da dann  $s_l$  aber zu dem Punkt  $\pi(s_l, q) \in \overline{\{s_1, \dots, s_k\}} = p^\perp \cap q^\perp$  parallel ist, können  $s_1, \dots, s_l$  nicht in einem Möbiusunterraum liegen, ein Widerspruch.

Wir erhalten also insgesamt  $l \leq k$  und damit  $K = \overline{\{s_1, \dots, s_k\}} \subseteq p^\perp \cap q^\perp$ , also die Behauptung.

(ii) und (iii) schließlich folgen sofort aus der ersten Aussage.  $\square$

Aus dem obigen Lemma folgt unmittelbar

**Lemma 6.14.**  $\mathcal{GQ}_p$  bildet für alle  $p \in P$  einen Laguererraum vom Rang  $k$ .

Wie am Anfang des Paragraphen angekündigt, zeigen wir nun, daß sich ein  $k$ -antireguläres Viereck als Liegeometrie eines geeigneten Laguerreraums vom Rang  $k$  darstellen läßt.

**Satz 6.15.** *Ist  $\mathcal{GQ}$   $k$ -antiregulär, so ist für jeden Punkt  $p \in P$  die Liegeometrie  $\mathcal{L}ie(\mathcal{GQ}_p) = (P', \mathcal{L}')$  von  $\mathcal{GQ}_p$  isomorph zum vorgegebenen Viereck  $\mathcal{GQ}$ .*

**Beweis:** Nach Satz 6.12 und dem obigen Lemma bildet  $\mathcal{GQ}_p = (S, \mathfrak{K})$  für jedes  $p \in P$  einen Laguerreraum vom Rang  $k$ . Wir bezeichnen mit  $\mathfrak{K}_H$  die Menge der Hyperkugeln von  $\mathcal{GQ}_p$ , und mit  $P' = \{\infty\} \cup S \cup \mathfrak{K}_H$  bzw.  $\mathcal{L}' = \Gamma^* \cup \mathcal{B}^*$  den Punktraum bzw. Geradenraum der Liegeometrie. Nach Lemma 6.13 (i) ist die Abbildung

$$\alpha: P \longrightarrow P'; x \mapsto \begin{cases} \infty, & \text{falls } x = p \\ x, & \text{falls } x \in p^\perp \setminus \{p\} \\ p^\perp \cap x^\perp, & \text{falls } x \in P \setminus p^\perp \end{cases}$$

eine Bijektion. Offensichtlich ist  $\alpha$  auch inzidenzerhaltend, und es folgt die Behauptung.  $\square$

# 7. Topologische Vierecke

## 7.1 Kompakte $k$ -antireguläre Vierecke

In diesem Abschnitt zeigen wir, daß ein  $k$ -antireguläres kompaktes zusammenhängendes Viereck,  $k \geq 4$ , ein symmetrisches Viereck über  $\mathbb{R}$  ist. Hieraus folgt insbesondere, daß die Ableitung eines solchen Vierecks an jedem Punkt einen lokalkompakten zusammenhängenden Laguererraum bildet, die topologischen Eigenschaften also übernommen werden. Sei also im folgenden  $\mathcal{GQ} = (P, \mathcal{L})$  ein kompaktes zusammenhängendes  $k$ -antireguläres Viereck mit Parametern  $(m, n)$ . Wir fordern zusätzlich, daß Geraden und Geradenbüschel Mannigfaltigkeiten sind. In diesem Fall sind dann Geraden bzw. Geradenbüschel schon homöomorph zur  $m$ - bzw.  $n$ -Sphäre (siehe Abschnitt 4.1). Sei weiter  $p \in P$  und  $\mathcal{GQ}_p = (S, \mathfrak{K})$  die Ableitung im Punkt  $p$ . Der Fall  $k = 3$  wurde bereits in [Sch93] behandelt, wird aber zum Teil in unserer allgemeinen Überlegung mit eingehen.

Nach Lemma 6.4 (i) und Lemma 6.13 (i) wird jede Hyperkugel  $K \in \mathfrak{K}_H$  in  $\mathcal{GQ}_p$  eindeutig durch ein Element  $q_K \in P \setminus p^\perp$  beschrieben ( $K = p^\perp \cap q_K^\perp$ ). Auf  $S$  und  $\mathfrak{K}_H$  sind damit in natürlicher Weise lokalkompakte zusammenhängende Topologien gegeben, mit denen die Stetigkeit des Berührens und des Parallelprojizierens sofort aus der Stetigkeit von  $\pi$  folgt.

**Lemma 7.1.** *Die Abbildungen des Berührens und des Parallelprojizierens sind stetig in  $\mathcal{GQ}_p$ .*

**Beweis:** Seien  $s, t \in S$  und  $K \in \mathfrak{K}_H$  mit  $t \notin \Gamma(s)$  und  $s \in K$ . Sei weiter  $q_K \in P \setminus p^\perp$  mit  $K = p^\perp \cap q_K^\perp$ . Dann gilt  $\beta(s, K, t) = \pi(t, s \vee q_K)$  und  $\gamma(t, K) = \pi(q_K, t \vee p)$ . Die Stetigkeit von  $\beta$  und  $\gamma$  folgt also sofort aus der Stetigkeit des Verbindens im Viereck und der Stetigkeit von  $\pi$ .  $\square$

Um die Stetigkeit der Hüllenbildung und des Schneidens in der Ableitung  $\mathcal{GQ}_p$  nachzuweisen, benötigen wir noch einige Lemmata. Dabei beobachten wir zunächst, daß nach Lemma 6.13 (ii) und (iii) beide Abbildungen Einschränkungen des Schneidens

$$\Phi: P^{(k)} \longrightarrow P^2; (p_1, \dots, p_k) \mapsto \{p_1, \dots, p_k\}^\perp$$

von  $k$  unabhängigen Punktsternen im Viereck sind. Für unsere Zwecke allerdings ist es etwas zu aufwändig, die Stetigkeit dieser Abbildung zu zeigen. Wir gehen, wie sich am Ende dieses Abschnittes zeigen wird, einen anderen Weg.

**Lemma 7.2.** *Sei  $\mathcal{GQ}$  ein  $k$ -antireguläres Viereck und seien  $p_1, \dots, p_k \in P$  unabhängige Punkte mit  $\{p_1, \dots, p_k\}^\perp = \{s, t\}$ . Dann ist für jedes  $i < k$  die Abbildung*

$$\Pi_i: \{p_1, \dots, p_i\}^\perp \setminus \{s\} \longrightarrow \prod_{j=i+1}^k (s \vee p_j) \setminus \{s\}, u \mapsto (\pi(u, s \vee p_{i+1}), \dots, \pi(u, s \vee p_k))$$

ein Homöomorphismus.

Insbesondere ist für je  $i$  unabhängige Punkte  $p_1, \dots, p_i$  der Schnitt der Punktsterne  $\{p_1, \dots, p_i\}^\perp$  entweder leer, oder homöomorph zur  $m \cdot (k - i)$ -Sphäre  $\mathbb{S}_{m(k-i)}$ .

**Beweis:** Wir zeigen zunächst, daß mit  $q_j \in (s \vee p_j) \setminus \{s\}$  für alle  $j \leq k$  die Punkte  $q_1, \dots, q_k$  unabhängig sind.

Sei  $q_k \in (s \vee p_k) \setminus \{s\}$ . Angenommen, es existiert  $z \in q_k^\perp$  mit  $\{p_1, \dots, p_{k-1}\}^\perp \subseteq z$ . Da dann  $s \sim z$ , folgt  $z \in s \vee q_k$ , also  $z \in p_k^\perp$ , ein Widerspruch zur Unabhängigkeit von  $p_1, \dots, p_k$ , also sind  $p_1, \dots, p_{k-1}, q_k$  unabhängig. Da nach Lemma 6.4 (iii) auch jede Permutation von  $p_1, \dots, p_{k-1}, q_k$  unabhängig ist, folgt die Unabhängigkeit von  $q_1, \dots, q_k$  durch mehrmaliges Anwenden der obigen Aussage.

Damit ist die inverse Abbildung von  $\Pi_i$

$$\begin{aligned} \Pi_i^{-1}: \prod_{j=i+1}^k (s \vee q_j) \setminus \{s\} &\longrightarrow \{p_1, \dots, p_i\}^\perp \setminus \{s\}; \\ (q_{i+1}, \dots, q_k) &\mapsto \{p_1, \dots, p_i, q_{i+1}, \dots, q_k\}^\perp \setminus \{s\}, \end{aligned}$$

$\Pi_i$  also eine Bijektion.

Offensichtlich ist  $\Pi_i$  stetig. Da  $p_1^\perp \cap p_2^\perp$  homöomorph zur  $n$ -Sphäre ist (Lemma 4.4 (iii)), gilt  $(p_1^\perp \cap p_2^\perp) \setminus \{s\} \cong \mathbb{R}^n$  und somit ist  $\Pi_2$  nach [Sch93], Lemma 1.1 ein Homöomorphismus.

Für jedes  $i \in \{3, \dots, k-1\}$  gilt

$$\Pi_i(q_{i+1}, \dots, q_k) = \Pi_2(p_3, \dots, p_i, q_{i+1}, \dots, q_k),$$

also ist auch  $\Pi_i$  ein Homöomorphismus. Da  $\text{Bild}(\Pi_i) \cong \mathbb{R}^{m(k-i)}$ , folgt aus der Eindeutigkeit der Einpunktkompaktifizierung  $\{p_1, \dots, p_i\}^\perp \cong \mathbb{S}_{m(k-i)}$ .  $\square$

Sind  $(p_1, \dots, p_k) \in P^{(k)}$  unabhängige Punkte mit  $\{p_1, \dots, p_k\}^\perp = \{x, y\}$ , so gibt es nach dem obigen Lemma disjunkte, zu  $\mathbb{D}_m$  homöomorphe Umgebungen von  $x$  und  $y$  in  $\{p_2, \dots, p_k\}^\perp$ . Ist weiter  $t \in \{p_2, \dots, p_k\}^\perp \setminus \{x, y\}$ , so ist  $\{x, y, t\}^\perp$ , und damit auch  $\{x \vee s \in \mathcal{L}_x; s \in \{x, y, t\}^\perp\}$  homöomorph zu  $\mathbb{S}_{m(k-3)}$ , also insbesondere eine abgeschlossene Teilmenge von  $\mathcal{L}_x$ . Da  $t \not\sim p_1$ , existiert damit eine zu  $\mathbb{D}_n$  homöomorphe Umgebung von  $x \vee p_1$  in  $\mathcal{L}_x \setminus \{x \vee s \in \mathcal{L}_x; s \in \{x, y, t\}^\perp\}$ .

Damit ist ein entscheidender Schritt in Richtung Stetigkeit der Abbildung  $\Phi$  getan. Das nächste Lemma zeigt, daß jede Einschränkung von  $\Phi$  auf  $k - 1$  Punkte stetig ist. Die wesentliche Beweisidee ist [Sch93], Beweis zu Lemma 2.2, entnommen.

**Lemma 7.3.** *Seien  $(p_1, \dots, p_k) \in P^{(k)}$  mit  $\{p_1, \dots, p_k\}^\perp = \{x, y\}$ , und  $t \in \{p_2, \dots, p_k\}^\perp \setminus \{x, y\}$ . Seien weiter  $X \cong \mathbb{D}_m$  bzw.  $Y \cong \mathbb{D}_m$  disjunkte Umgebungen von  $x$  bzw.  $y$  in  $\{p_2, \dots, p_k\}^\perp$  und  $Z \cong \mathbb{D}_n$  eine Umgebung von  $x \vee p_1$  in  $\mathcal{L}_x \setminus \{x \vee s \in \mathcal{L}_x; s \in \{x, y, t\}^\perp\}$ . Dann ist die Abbildung*

$$\beta_{p_1, \dots, p_k}: X \times Y \times Z \longrightarrow P_1 := \beta(X \times Y \times Z) \subseteq P; (q, r, l) \mapsto \pi(q, (\lambda(r, l)))$$

ein Homöomorphismus,  $P_1$  eine Umgebung von  $p_1$  in  $P$  derart, daß für alle  $s \in P_1$  die Punkte  $s, p_2, \dots, p_k$  unabhängig sind und es gibt stetige Abbildungen  $\bar{x}: P_1 \longrightarrow X$  und  $\bar{y}: P_1 \longrightarrow Y$  so, daß  $\{s, p_2, \dots, p_k\}^\perp = \{\bar{x}(s), \bar{y}(s)\}$  für alle  $s \in P_1$ .

**Beweis:** Sei  $p_1 \neq s \in A$  und  $(q, r, l) \in X \times Y \times Z$  mit  $\beta_{p_1, \dots, p_k}(q, r, l) = s$ . Also enthält der Schnitt  $\{s, p_2, \dots, p_k\}^\perp$  mindestens die Punkte  $q, r$ . Ist  $x \in s^\perp$ , so ist  $s = \pi(r, l)$  (sonst bilden  $x, s, \pi(r, l)$  ein Dreieck). Nach Konstruktion ist dann  $t \neq s$ , die Folge  $s, p_2, \dots, p_k$  also fallend und nach Lemma 6.2 unabhängig, d.h.  $\{s, p_2, \dots, p_k\}^\perp$  enthält genau zwei Punkte. Also enthält sowohl  $s^\perp \cap X$ , als auch  $s^\perp \cap Y$  genau einen Punkt, den wir mit  $\bar{x}(s)$  bzw.  $\bar{y}(s)$  bezeichnen. Die Umkehrabbildung von  $\beta_{p_1, \dots, p_k}$  ist damit

$$\beta_{p_1, \dots, p_k}^{-1}: A \longrightarrow X \times Y \times Z; s \mapsto (\bar{x}(s), \bar{y}(s), \lambda(x, \bar{y}(s) \vee s)).$$

$\beta_{p_1, \dots, p_k}$  ist also stetig und bijektiv und da  $X \times Y \times Z$  kompakt ist, ein Homöomorphismus. Insgesamt erhalten wir die Behauptung.  $\square$

Mit ähnlichen Methoden wie in [Sch93] läßt sich dieses Lemma auf die allgemeine Situation anwenden. Dabei sind allerdings eine Menge technischer Schwierigkeiten zu bewältigen, die schon im antiregulären Fall zu einem etwas unschönen Beweis führen, siehe [Sch93], Theorem 2.3.

Betrachten wir hier nur den Fall der  $k$ -Antiregularität für  $k > 3$ , so können wir unser Ziel bei weitem eleganter erreichen.

**Satz 7.4.** *Sei  $\mathcal{GQ}$  ein kompaktes zusammenhängendes  $k$ -antireguläres Viereck. Sei weiter  $k > 3$ . Dann ist  $\mathcal{GQ}$  isomorph zum symmetrischen Viereck  $Q(k+1, \mathbb{R})$ .*

**Beweis:** Sei  $p$  ein Punkt des Vierecks. Dann bildet nach Satz 6.12 die Ableitung  $\mathcal{GQ}_p$  einen Laguererraum und nach dem Beweis von Satz 6.15 ist die Liegeometrie von  $\mathcal{GQ}_p$  isomorph zu  $\mathcal{GQ}_p$ . Aus Satz 5.3 und Abschnitt 4.3 folgt somit, daß  $p$ , und damit auch jeder Punkt des Vierecks, ein Translationszentrum von  $\mathcal{GQ}$  ist, so daß nach Satz 4.10 das Viereck ein symmetrisches Viereck über  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  ist.

Angenommen,  $\mathcal{GQ}$  ist isomorph zu einem symmetrischen Viereck über  $\mathbb{C}$ . Dann ist  $m = 2$  (jede Gerade ist homöomorph zur 2-Sphäre) und aus Lemma 7.2 folgt  $n =$

$m(k-2)$  (Geradenbüschel sind homöomorph zur  $m(k-2)$ -Sphäre). Insbesondere ist dann  $m+n$  gerade, so daß aus der Einschränkung der topologischen Parameter eines Vierecks, siehe [Kna90],  $m=n=2$  folgt. Damit ist  $k=3$ , ein Widerspruch.

Das Viereck ist damit isomorph zu einem symmetrischen Viereck über  $\mathbb{R}$  und der Rest der Behauptung folgt somit aus Lemma 6.6.  $\square$

Wir erhalten damit insgesamt das Hauptresultat dieses Abschnittes.

**Satz 7.5.** *Sei  $\mathcal{GQ}$  ein kompaktes zusammenhängendes  $k$ -antireguläres Viereck. Dann ist die Ableitung  $\mathcal{GQ}_p$  an jedem Punkt  $p \in P$  ein lokalkompakter zusammenhängender Laguererraum vom Rang  $k-1$ .*

*Das Viereck hat im Fall  $k \geq 4$  Parameter  $(1, k-2)$  und im Fall  $k=3$  Parameter  $(1, 1)$  oder  $(2, 2)$ .*

**Beweis:** Ist  $k=3$ , so folgt die Behauptung aus Satz 4.8.

Für  $k > 3$  folgt die Aussage sofort aus dem obigen Satz.  $\square$

## 7.2 Ausblick

In Abschnitt 5.2 konnten wir zeigen, daß die Liegeometrie eines lokalkompakten zusammenhängenden Laguererraums vom Rang  $n \geq 3$  ein kompaktes zusammenhängendes Viereck mit Parametern  $(1, n-2)$  bildet. Umgekehrt zeigten wir im letzten Abschnitt, daß ein kompaktes zusammenhängendes  $k$ -antireguläres Viereck ebenfalls Parameter  $(1, k-2)$  hat und die Ableitung an jedem Punkt einen lokalkompakten zusammenhängenden Laguererraum vom Rang  $k$  bildet.

Wie aber schon in der Einleitung beschrieben, können wir in unserem Fall nicht erwarten eine so allgemeine Aussage wie A. SCHROTH in [Sch95] zu erhalten, d.h. nicht jedes kompakte zusammenhängende Viereck mit Parametern  $(1, n)$  ist schon  $(n+2)$ -antiregulär. Wie der vorletzte Satz des obigen Abschnittes zeigt, wären diese Vierecke dann klassisch, es gibt aber viele nichtklassische Beispiele.

Eine Alternative wäre, Vierecke mit Parametern  $(1, n)$  danach zu untersuchen, wann sie einen  $(n+2)$ -antiregulären Punkt  $p \in P$  besitzen, d.h. wann die Ableitung des Vierecks an  $p$  einen Laguererraum liefert. Mit den Ergebnissen der letzten Abschnitte zeigte sich dann, insbesondere, wenn wir Lemma 7.3 erweitern und auf diesen Fall anwenden, daß diese Ableitung topologisch und die aus dem Laguererraum konstruierte Liegeometrie isomorph zum gegebenen Viereck ist. Nach Satz 5.8 ist das Viereck dann vom Tits Typ, solche Untersuchungen beantworteten also die Frage, wann ein Viereck mit Parametern  $(1, n)$  ein Viereck vom Tits Typ ist.

Zum Abschluß dieser Arbeit zeigen wir noch eine Aussage, die das Studium antiregulärer Vierecke erleichtert. Sei also  $\mathcal{GQ} = (P, \mathcal{L})$  ein Viereck mit topologischen Parametern  $(1, n)$ ,  $n > 1$  (den Fall  $n=1$  haben wir bereits in Abschnitt 4.2 behandelt). Mit [Kra94], Proposition 3.4.5 erhalten wir



**Lemma 7.6.** *Jede Gerade ist homöomorph zu  $\mathbb{S}_1$  und jeder Punktstern  $p^\perp$  ist homöomorph zur Einpunktkompaktifizierung von  $\mathcal{L}_p \times \mathbb{R}$ .*

Damit können wir zeigen, daß  $\mathcal{GQ}$  die Bedingung (i) der Definition der  $k$ -Antiregularität erfüllt (vergleiche [Sch90], Lemma 1).

**Satz 7.7.** *Sei  $p \in P$  und  $q, r \in P \setminus p^\perp$ ,  $q \neq r$ . Dann gilt  $|p^\perp \cap q^\perp \cap r^\perp| = 1$ , genau dann, wenn  $q$  und  $r$  verbindbar sind.*

**Beweis:** Sind  $q$  und  $r$  verbindbar, so gilt  $p^\perp \cap q^\perp \cap r^\perp = \{\pi(p, q \vee r)\}$ . Die eine Richtung folgt also unmittelbar aus den Axiomen des Vierecks.

Gelte jetzt  $p^\perp \cap q^\perp \cap r^\perp = \{z\}$ . Angenommen  $q \not\sim r$ . Sei  $v \in (q^\perp \cap r^\perp) \setminus \{z\}$ . Dann folgt

$$a_q := p^\perp \cap q^\perp \cap v^\perp = \pi(p, q \vee v) \quad \text{und} \quad a_r := p^\perp \cap r^\perp \cap v^\perp = \pi(p, r \vee v).$$

Wir zeigen nun zunächst, daß beide Punkte  $a_q$  und  $a_r$  von  $z$  verschieden sind: Wäre  $a_q = z$ , so erhalten wir  $z \in q \vee v$ , also  $v \in q \vee z$  und damit auch  $a_r = z$  (umgekehrt folgt aus  $a_r = z$  mit ähnlichen Argumenten  $a_q = z$ ). Also liegt  $z$  auf beiden Geraden  $q \vee v, r \vee v$  und es folgt  $q \vee v = r \vee v$  und damit  $q \sim r$ , ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Wir erhalten also, daß  $(p^\perp \cap v^\perp) \setminus \{a_q\}$  in derselben Zusammenhangskomponente von  $p^\perp \setminus (p^\perp \cap q^\perp)$  liegt wie  $a_r$  und damit wie  $(p^\perp \cap r^\perp) \setminus \{z\}$ , und  $(p^\perp \cap v^\perp) \setminus \{a_r\}$  in derselben Zusammenhangskomponente von  $p^\perp \setminus (p^\perp \cap r^\perp)$  wie  $a_q$  und damit wie  $(p^\perp \cap q^\perp) \setminus \{z\}$ . Da kein Punkt der Geraden  $p \vee z$  in beiden dieser Zusammenhangskomponenten liegt, folgt  $(p \vee z) \cap (p^\perp \cap v^\perp) \setminus \{a_q, a_r\} = \emptyset$  und damit  $\pi(v, p \vee z) \in (p \vee z) \cap ((p^\perp \cap r^\perp) \cup (p^\perp \cap q^\perp)) = \{z\}$ , also  $z \in \{a_q, a_r\}$ , ein Widerspruch zum obigen Ergebnis.  $\square$



# Sachverzeichnis

|                               |    |  |
|-------------------------------|----|--|
| <b>A</b>                      |    |  |
| Ableitung                     |    |  |
| – eines Kreisraums            | 28 |  |
| – eines Vierecks              | 53 |  |
| Affine Ebene                  | 13 |  |
| – topologische                | 13 |  |
| Affiner Raum                  | 12 |  |
| – topologischer               | 19 |  |
| Antiregularität               | 53 |  |
| – $k$ -Antiregularität        | 72 |  |
| <b>B</b>                      |    |  |
| Basis                         | 10 |  |
| Berührbüschel                 | 30 |  |
| – erweitertes                 | 57 |  |
| Berührkugel                   | 30 |  |
| <b>C</b>                      |    |  |
| Cogerade                      | 10 |  |
| <b>D</b>                      |    |  |
| Dual-Ovoid-Bedingung (DO)     | 31 |  |
| dualaffine Ebene              | 36 |  |
| – topologische                | 36 |  |
| dualaffiner Raum              | 41 |  |
| <b>E</b>                      |    |  |
| Elationsachse                 | 55 |  |
| Elationsgruppe                | 55 |  |
| Elationsviereck               | 55 |  |
| – duales                      | 55 |  |
| Elationszentrum               | 55 |  |
| <b>F</b>                      |    |  |
| Fahnenraum                    | 5  |  |
| Ferngerade                    | 13 |  |
| Fernhyperebene                | 13 |  |
| Fernpunkt                     | 13 |  |
| <b>G</b>                      |    |  |
| Geradenbüschel                | 5  |  |
| <b>H</b>                      |    |  |
| Hausdorffmetrik               | 6  |  |
| Hausdorfftopologie            | 6  |  |
| Hülle                         | 10 |  |
| Hyperebenen                   | 10 |  |
| Hyperkugel                    | 29 |  |
| <b>I</b>                      |    |  |
| Inzidenzstruktur              | 5  |  |
| Isomorphismus                 |    |  |
| – zwischen Inzidenzstrukturen | 5  |  |
| <b>K</b>                      |    |  |
| Kreisebene                    | 27 |  |
| Kreisgeometrie                | 28 |  |
| Kreisraum                     | 28 |  |
| <b>L</b>                      |    |  |
| Laguerreebene                 | 28 |  |
| – topologische                | 36 |  |
| Laguerreraum                  | 29 |  |
| – Liegeometrie eines          | 58 |  |
| – mit Bedingung (DO)          | 31 |  |
| – ovoidaler                   | 32 |  |
| – Quadrikmodell eines         | 34 |  |
| – topologischer               | 38 |  |
| Linearer Raum                 | 9  |  |
| <b>M</b>                      |    |  |
| Minkowskiebene                | 28 |  |

|                            |    |                             |    |
|----------------------------|----|-----------------------------|----|
| Möbiusebene .....          | 28 | Residuum .....              | 10 |
| Möbiusraum .....           | 29 | <b>S</b>                    |    |
| – ovoidaler .....          | 31 | Schwester                   |    |
| <b>O</b>                   |    | – einer Laguerreebene ..... | 54 |
| Oval .....                 | 19 | Sekante .....               | 20 |
| – topologisches .....      | 20 | symmetrisches Produkt ..... | 6  |
| Ovoid .....                | 20 | <b>T</b>                    |    |
| – abgeschlossenes .....    | 20 | Tangente .....              | 20 |
| – duales .....             | 22 | Teilraum                    |    |
| <b>P</b>                   |    | – eines Kreisraums .....    | 29 |
| Parallellasse              |    | – eines proj. Raumes .....  | 10 |
| – erweiterte .....         | 58 | Translationsachse .....     | 55 |
| Parallelprojektion .....   | 30 | Translationsgruppe .....    | 55 |
| Passante .....             | 20 | Translationszentrum .....   | 55 |
| Projektive Ebene .....     | 11 | Translationviereck .....    | 55 |
| – topologische .....       | 13 | – duales .....              | 55 |
| projektiver Abschluß ..... | 13 | <b>U</b>                    |    |
| Projektiver Raum .....     | 9  | Unabhängigkeit              |    |
| – desarguesscher .....     | 11 | – im Kreisraum .....        | 29 |
| – dualer .....             | 11 | – im proj. Raum .....       | 11 |
| – topologischer .....      | 15 | – im Viereck .....          | 71 |
| Punktreihe .....           | 5  | Untergeometrie .....        | 5  |
| Punktstern $p^\perp$ ..... | 50 | <b>V</b>                    |    |
| <b>Q</b>                   |    | Viereck .....               | 49 |
| Quotientenraum .....       | 6  | – $k$ -antireguläres .....  | 72 |
| Quotiententopologie .....  | 6  | – antireguläres .....       | 53 |
| <b>R</b>                   |    | – symmetrisches .....       | 50 |
| Rang                       |    | – topologisches .....       | 51 |
| – eines Kreisraums .....   | 29 | – vom Tits Typ .....        | 51 |
| – eines proj. Raumes ..... | 10 |                             |    |

---

# Literatur

- [BM64] Benz, W., Mäurer, H.: Über die Grundlagen der Laguerregeometrie. Ein Bericht. *Jahresbericht der DMV* **67**, 14-42 (1964).
- [Bil99] Biller, H.: Actions of Compact Groups on Spheres and on Generalized Quadrangles. *Dissertation der mathematischen Fakultät der Universität Stuttgart* (1999).
- [BHL80] Buchanan, T., Hähl, H., Löwen, R.: Topologische Ovale. *Geometriae Dedicata* **9**, 401-424 (1980).
- [Bue71] Bueckenhout, F.: An axiomatic of inversive spaces. *Journal of Comb. Theory* **11**, 202-212 (1971).
- [Dem68] Dembowski, P.: Finite Geometries. *Ergeb. Math. Grenzgeb.* **44**, Springer-Verlag, Berlin 1968.
- [Dug66] Dugundji, J.: Topology. *Advanced in Mathematics*. Allyn and Bacon, Inc. Boston London Sydney Toronto 1966.
- [Eis90] Eisele, E.: Topological ternary fields not belonging to a topological projective plane. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **60**, 257-264 (1990).
- [Eis91] Eisele, E.: Cartesian groups not belonging to a topological projective plane. *J. Geom.* **40**, 35-46 (1991).
- [Eis93] Eisele, E.: A class of topological affine translation planes having no topological projective extension. *Results Math.* **23**, 294-302 (1993).
- [Fi76] Fick, E.: Topologische affine Räume. *Beiträge zur geometrischen Algebra (Proc. Sympos., Duisburg, 1976)*.
- [For81] Forst, M.: Topologische 4-Gone. *Mitt. d. Math. Seminars Gießen* **147**, 65-129 (1981).
- [Groh68] Groh, H.: Topologische Laguerre-Ebenen I. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **32**, 216-231 (1968).
- [Groh69] Groh, H.: Topologische Laguerre-Ebenen II. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **34**, 11-21 (1969).
- [Groh86] Groh, H.: Geometric Lattices with Topology. *J. Combin. Theory A* **42**, 111-125 (1986).
- [GK90] Grundhöfer, T., Knarr, N.: Topology in Generalized Quadrangles. *Topology and its Applications* **34**, 139-152 (1990).
- [GL95] Grundhöfer, T., Löwen, R.: Linear topological geometries. *Handbook of Incidence Geometry, Elsevier Science B. V.*, North-Holland 1995.
- [HW48] Hurewicz, W., Wallman, H.: Dimension Theory. *Princeton Univ. Press*, Princeton, 1948.
- [Jos94] Joswig, M.: Translationsvierecke. *Dissertation der mathematischen Fakultät der Universität Tübingen* 1994.
- [Jos96] Joswig, M.: Translation generalized quadrangles. *Arch. Math.* **67**, no. 3, 253-264 (1996).

- [Jos00]      Joswig, M.: Compact connected translation generalized quadrangles. *Results in Math.* **38**, 72-87 (2000).
- [Kna90]      Knarr, N.: The nonexistence of certain topological polygons. *Forum Math.* **2**, 603-612 (1990).
- [Kopp79]      Kopp, B.: Eine Axiomatik Ovoidaler Laguerre-Geometrien. *Journal of Geometry* **13/2** 154-169 (1979).
- [Kra94]      Kramer, L.: Comact Polygons. *Dissertation der mathematischen Fakultät der Universität Tübingen* 1994.
- [Lenz65]      Lenz, H.: Vorlesung über Geometrie, Leipzig 1965.
- [Löw81]      Löwen, R.: Central collineations and the parallel axiom in stable planes. *Geom. Dedicata* **10**, 283-315 (1981).
- [LK92]      Löwen, R., Kühne, R.: Topological Projective Spaces. *Abh. Math. Sem. Hamburg* **62**, 1-9 (1992).
- [Mal98]      Maldeghem, H. van: Generalized Polygons. *Birkhäuser Verlag* Basel Boston Berlin 1998.
- [Mäu67]      Mäurer, H.: Möbius- und Laguerre-Geometrien über schwach konvexen Semiflächen. *Math. Z.* **98**, 355-386 (1967).
- [Mäu68a]      Mäurer, H.: Die der Laguerre-Geometrie zugehörige Lie-Geometrie. *Abh. Math. Semin. Univ. Hamb.* **34**, 90-97 (1969).
- [Mäu68]      Mäurer, H.: Ein axiomatischer Aufbau der mindestens 3-dimensionalen Möbius-Geometrie. *Math. Zeitschr.* **103**, 282-305 (1968).
- [Mäu71]      Mäurer, H.: Eine Kennzeichnung halbovoidaler Laguerregeometrien. *J. Reine Angew. Math.* **253**, 203-213 (1971).
- [Mis68]      Misfeld, J.: Topologische projektive Räume. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **32**, 232-262 (1968).
- [Nad78]      Nadler, S.B.: Hyperspaces of sets. *Monographs and textbooks in pure and applied mathematics* **49**, Marcel Dekker, New York, 1978.
- [PT84]      Payne, S.E., Thas, J.A.: Finite Generalized Quadrangles. *Research Notes in Math.* **110**, Pitman, Boston, 1984.
- [Pick75]      Pickert, G.: Projektive Ebenen. Springer Berlin 1975.
- [Po32]      Pontrjagan, L.S.: Über stetige algebraische Körper *Ann. of Math. II ser.* **33** 163-174 (1932).
- [Sal69]      Salzmann, H.: Kompakte vierdimensionale Ebenen. *Arch. Math.* **20**, 551-555 (1969).
- [SBGHLS95]      Salzmann, H., Betten, D., Grundhöfer, T., Hähl, H., Löwen, R., Stroppel, M.: Compact Projective Planes. *Walter de Gruyter* Berlin-New York 1995.
- [Schr91]      Schröder, E.M.: Vorlesungen über Geometrie (Band 2). *B.I.* Mannheim 1991.
- [Sch90]      Schroth, A.: Three-Dimensional Quadrangles and flat Laguerre Planes. *Geometriae Dedicata* **36**, 365-373 (1990).
- [Sch92]      Schroth, A.: Topologische Laguerreebenen und topologische Vierecke. *Dissertation der Technischen Universität zu Braunschweig*, Braunschweig 1992.
- [Sch93]      Schroth, A.: Topological Antiregular Quadrangles. *Results in Mathematics* **24** 180-189 (1993).
- [Sch95]      Schroth, A.: Topological circle planes and topological quadrangles. *Research Notes in Math.* **337**, Pitman, Boston, 1995.

- [Sko54] Skornjakov, L.A.: Topologische projektive Ebenen (russ.). *Trudy Moskov Mat. Obsc.* **3**, 347-373 (1954).
- [Sö69] Sörensen, K.: Zum Begriff des topologischen projektiven Raumes. *Math. Z.* **109**, 239-245 (1969).
- [Sö76] Sörensen, K.: Zum Begriff des topologischen affinen Raumes. *Beiträge zur geometrischen Algebra (Proc. Sympos., Duisburg, 1976)*
- [Ste95] Steinke, G. F.: Topological circle geometries. *Handbook of Incidence Geometrie, Elsevier Science B. V.*, North-Holland 1995.
- [Tits59] Tits, J.: Sur la trialité et certains groupes qui s'en déduisent. *Publ. Math.: I.H.E.S.* **2** (1959), 13-60.
- [Tits62] Tits, J.: Ovoïdes à translations. *Rendiconti di Matematica* **21**, 37-59 (1962).
- [Za89] Zanella, C.: Topological Affine Spaces. *Journal of Geometry* **35**, 193-198 (1989).