Größte singuläre Zahl von Zufallsmatrizen –
Beiträge zur Abschätzung der Größenordnung durch Orlicz-Normen

Disseration

zur Erlangung des Doktorgrades der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der

Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

vorgelegt von

Stiene Riemer

Kiel

Mai 2011

Referent:	PD Dr. Carsten Schütt
Korreferent:	Prof. Dr. Hermann König
Tag der mündlichen Prüfung:	23.06.2011
Zum Druck genehmigt:	Kiel, 23.06.2011

Der Dekan, gez. Prof. Dr. Lutz Kipp

Danksagung

Mein herzlicher Dank gilt der Arbeitsgruppe Funktionalanalysis und Banachraumtheorie an der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, insbesondere meinem Betreuer Dr. Carsten Schütt und Herrn Prof. Dr. König für die stets hilfreichen Diskussionen und die Möglichkeit zahlreiche Konferenzen und Workshops zu besuchen.
Außerdem danke ich meinen Mitdoktoranden für viele mathematische wie nicht-mathematische Gespräche, und ebenso danke ich meiner Familie, meinen Freunden und meinem Freund Stephan für ihre Unterstützung.

Größte singuläre Zahl von Zufallsmatrizen – Beiträge zur Abschätzung der Größenordnung durch Orlicz-Normen

Stiene Riemer

Zusammenfassung

Gegenstand dieser Arbeit ist die Abschätzung der größten singulären Zahl von Zufallsmatrizen, deren Einträge unabhängige, aber nicht notwendigerweise identisch verteilte Zufallsgrößen sind. Da es sich bei den singulären Zahlen von Zufallsmatrizen um Zufallsgrößen handelt, sind Aussagen über diese stets stochastischer Natur. Unser Augenmerk liegt auf dem Erwartungswert der größten singulären Zahl.

Wir bestimmen die Größenordnung des Erwartungswertes der größten singulären Zahl von Zufallsmatrizen, deren Einträge unabhängige, zentrierte Zufallsgrößen mit endlichen zweiten Momenten sind, bis auf einen logarithmischen Faktor. Wir benutzen hierzu Techniken, die auf Orlicznormen basieren und in diesem Zusammenhang ein neuartiges Vorgehen darstellen.

Das Verständnis des Spezialfalls unabhängiger, zentrierter, normalverteilter Einträge mit beliebiger Varianz ist entscheidend, um den allgemeinen Fall zu verstehen. Wir zeigen hierfür direkt eine untere Abschätzung und geben dann eine obere Abschätzung der größten singulären Zahl in Wahrscheinlichkeit an. Aus dieser leiten wir im Anschluss die Aussage über den Erwartungswert her. Den Term, der die Größenordnung bestimmt, können wir mit der von uns entwickelten Methode als eine verallgemeinerte Orlicznorm angeben, die in unserem Fall eine besonders einfache Gestalt hat. So zeigen wir, dass der entscheidende Ausdruck sich berechnen lässt, indem man die euklidische Norm der Zeilen- bzw. Spaltenvektoren der Varianzmatrix berechnet und das Maximum dieser bestimmt.

Als wesentlichen Hilfssatz zeigen wir, dass der Erwartungswert von Orlicznormen unabhängiger, integrierbarer, aber nicht notwendigerweise identisch verteilter Zufallsgrößen sich größenordnungsmäßig verhält wie eine Orlicznorm, die wir explizit angeben. Dies stellt ein für sich interessantes Resultat dar, denn so ist es zum Beispiel möglich, den Erwartungswert des Maximums von unabhängigen, aber nicht notwendigerweise identisch verteilten Zufallsgrößen zu berechnen.

Abstract

The subject of this thesis is estimating the largest singular value of random matrices with independent, but not necessarily identically distributed entries. Since singular values of random matrices are random variables themselves, statements about these are expressed in stochastic terms. We focus on the expectation of the largest singular value.

We determine, up to a logarithmic factor, the order of the largest singular value of randnom matrices whose entries are independent, centered random variables with finite second moments. To obtain our results, we use a method based on Orlicz norms, which represents a novel approach in this context.

To handle the case of general entries, it is crucial to study first the special case of independent, centered, gaussian entries with arbitrary variances. We immediately obtain a lower bound estimation and then derive an estimation of the upper bound in probability. Based on this special situation, we prove the upper bound estimation of the expected value of the largest singular value in the general case. The expression determining the order of the expected value is written in terms of a generalized Orlicz norm, which is of appealingly simple structure: the decisive term is computed by taking the maximum of the Euclidean norm of the column and row vectors of the variance matrix.

To handle both the special case of gaussian entries and the general case, we derive in an intermediate step a feasible expression of the expected value of Orlicz norms of independent but not necessarliy identically distributed random variables. This especially allows to compute the expected value of the maximum of independent random variables.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit dem Erwartungswert der größten singulären Zahl von reellen Zufallsmatrizen. Darunter verstehen wir Matrizen, deren Einträge reelle Zufallsgrößen sind. Wir interessieren uns also für den größten Eigenwert des Betrages einer solchen Zufallsmatrix.

Zufallsmatrizen und ihre Eigenwerte werden seit Ende der 20er Jahre des 20. Jahrhunderts genauer studiert. Zu Beginn der 50er Jahre erlangten sie große Bedeutung, als E. Wigner vorschlug, zur Bestimmung spezieller Eigenwerte von Hamilton-Operatoren, die häufig nicht explizit anzugeben sind, Eigenwerte von Zufallsmatrizen heranzuziehen, da diese die tatsächlich gesuchten Eigenwerte im Mittel gut beschreiben. E. Wigner erkannte diese Anwendung von Zufallsmatrizen erstmals bei der quantenmechanischen Beschreibung der langsamen Neutronenresonanz bei mittelschweren bis schweren Atomkernen. In diesem Zusammenhang bewies E. Wigner das so genannte Wigner Semicircle Law, welches unter gewissen Voraussetzungen eine Aussage über die Konvergenz der Eigenwertverteilungen von Zufallsmatrizen macht. Dieses stellt ein erstes wichtiges Resultat in Bezug auf das Verhalten von Eigenwerten von Zufallsmatrizen dar und kann als eine Version des zentralen Grenzwertsatzes gesehen werden, siehe [6].

In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns mit dem Verhalten der größten singulären Zahl einer reellen Zufallsmatrix mit unabhängigen, aber nicht notwendigerweise identisch verteilten Einträgen. Motiviert ist dieses Interesse durch eine Vermutung über die Konditionszahl von reellen $n \times n$ Zufallsmatrizen mit unabhängigen, identisch verteilten Einträgen von J. von Neumann aus dem Jahr 1947. Um auf diese und ihren Zusammenhang zu den singulären Zahlen einzugehen, geben wir zunächst zwei Definitionen:

(i) Die **k-te singuläre Zahl** $s_k(X)$ einer $n \times n$-Matrix X ist der k-te Eigenwert von $\sqrt{X^T X}$, wobei die Eigenwerte fallend angeordnet sind und gemäß ihrer Vielfachheit gezählt werden.
Die größte und die kleinste singuläre Zahl einer $n \times n$ Matrix X lassen sich durch die euklidische Norm ausdrücken:

a) $s_1(X) = \sup_{\|x\|_2=1} \|Xx\|_2$,

b) $s_n(X) = \inf_{\|x\|_2=1} \|Xx\|_2$.

(ii) Die **Konditionszahl** einer $n \times n$-Matrix X ist definiert durch

$$\sigma(X) = \sup_{\|x\|_2=1, \|y\|_2=1} \frac{\|Xx\|_2}{\|Xy\|_2} = \frac{s_1(X)}{s_n(X)}.$$

J. von Neumann vermutete, dass für eine $n \times n$ Zufallsmatrix X mit unabhängigen, identisch verteilten Zufallsgrößen als Einträge mit großer Wahrscheinlichkeit gilt

$$\sigma(X) \sim n,$$

wobei $\sim$ in diesem Zusammenhang die Größenordnung bezeichnet. Das bedeutet, dass absolute Konstanten c_1, c_2 so existieren, dass gilt

$$c_1 n \leq \sigma(X) \leq c_2 n.$$

Um diese Vermutung zu beweisen, sind Aussagen über die größte und kleinste singuläre Zahl von Zufallsmatrizen notwendig. Wir erinnern daran, dass es sich hierbei ebenfalls um Zufallsgrößen handelt und somit Aussagen über diese stets stochastischer Natur sind.

1988 zeigten Z. D. Bai, P. R. Krishnaiah, J. W. Silverstein und Y. Q. Yin in [17] und [1], dass für eine $n \times n$ Zufallsmatrix X mit unabhängigen, identisch verteilten Zufallsgrößen mit beschränkten vierten Momenten als Einträge mit großer Wahrscheinlichkeit gilt

$$s_1(X) \sim \sqrt{n}.$$

Ein entsprechendes Resultat für die kleinste singuläre Zahl einer Zufallsmatrix zu zeigen, gelang erst im Jahr 2008. 1988 bzw. 1991 zeigten A. Edelman, [3], und S. Szarek, [16], unabhängig voneinander, dass für eine Zufallsmatrix X mit unabhängigen standardnormalverteilten Einträgen mit großer Wahrscheinlichkeit gilt

$$s_n(X) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

2008 bewiesen M. Rudelson und R. Vershynin, [15] und [14], das entsprechende Resultat, falls die Einträge der Zufallsmatrix unabhängig identisch verteilte Zufallsgrößen mit beschränkten vierten Momenten sind.

Zusammengefasst beweisen diese beiden Resultate die Vermutung von J. von Neumann: Für Zufallsmatrizen, deren Einträge unabhängig identisch verteilt sind und überdies beschränkte vierte Momente besitzen, gilt mit hoher Wahrscheinlichkeit

$$\sigma(X) \sim n.$$

Alle bisher erwähnten Aussagen beziehen sich auf Zufallsmatrizen mit identisch verteilten Einträgen. Wir stellen uns in dieser Arbeit die Frage, inwieweit man Aussagen im Fall nicht identisch verteilter Einträge machen kann, weiterhin unter der Annahme der Unabhängigkeit. Wir beschäftigen uns im Folgenden mit der größten singulären Zahl, genauer gesagt ihrem Erwartungswert, von Zufallsmatrizen mit unabhängigen, aber nicht notwendigerweise identisch verteilten Einträgen. Wie bereits erwähnt, bedeutet dies, den Erwartungswert der Operatornorm solcher Zufallsmatrizen zu untersuchen. Unser Hauptresultat gibt die Größenordnung des Erwartungswertes der größten singulären Zahl solcher Zufallsmatrizen bis auf einen logarithmischen Faktor an:

Satz (Satz 4.2.1 und Satz 4.2.2) Für alle $i, j = 1, ..., n$ seien X_{ij} unabhängige zentrierte Zufallsgrößen mit endlichen zweiten Momenten. Dann gilt

(i)

a) $$E\left(\left\|(X_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2}\right) \gtrsim E\left(\max_{i=1,\ldots,n}\left\|(X_{ij})_{j=1}^n\right\|_2 + \max_{j=1,\ldots,n}\left\|(X_{ij})_{i=1}^n\right\|_2\right),$$

b) $$E\left(\left\|(X_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2}\right) \lesssim (\ln(n))^2\, E\left(\max_{i=1,\ldots,n}\left\|(X_{ij})_{j=1}^n\right\|_2 + \max_{j=1,\ldots,n}\left\|(X_{ij})_{i=1}^n\right\|_2\right).$$

(ii)

a) $$E\left(\left\|(X_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2}\right) \gtrsim \left\|(1)_{j=1}^n\right\|_{(M_i)_i} + \left\|(1)_{i=1}^n\right\|_{(M_j)_j},$$

b) $$E\left(\left\|(X_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2}\right) \lesssim (\ln(n))^2\left(\left\|(1)_{j=1}^n\right\|_{(M_i)_i} + \left\|(1)_{i=1}^n\right\|_{(M_j)_j}\right),$$

wobei

$$M_i(s) = \int_0^s \int_{\frac{1}{t} \leq \left\| (X_{ij})_{j=1}^n \right\|_2} \left\| (X_{ij})_{j=1}^n \right\|_2 dPdt. \tag{1.1}$$

Mit $\|\cdot\|_{(M_i)_i}$ bezeichnen wir so genannte verallgemeinerte Orlicznormen, die wir in Kapitel 2 einführen. Hierbei handelt es sich im Wesentlichen um verallgemeinerte p-Normen, $1 \leq p \leq \infty$. Die Einführung dieser Orlicznormen stellt das entscheidende Vorgehen in unserer Arbeit bei der Betrachtung des Erwartungswertes der größten singulären Zahl dar. Die Verteilung der zugrunde liegenden Zufallsgrößen geht bei der Bestimmung der Orlicznorm ein, und diese lässt sich häufig gut handhaben.

Bevor wir uns allerdings dieser allgemeinen Situation widmen, studieren wir zunächst den Spezialfall von Zufallsmatrizen mit unabhängigen normalverteilten Einträgen mit beliebigen Varianzen. Das Verständnis dieser speziellen Klasse von Zufallsmatrizen ist für die allgemeine Situation unverzichtbar, so folgt der Beweis des Hauptsatzes in Abschnitt 4.2 als unmittelbare Folgerung des normalverteilten Falls.

Die Betrachtung von Zufallsmatrizen mit unabhängigen normalverteilten Zufallsgrößen mit beliebigen Varianzen als Einträge ist motiviert durch die Ergebnisse von R. Latala in [10], so zeigte er:

Für alle $i, j = 1, ..., n$ seien $a_{ij} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und g_{ij} unabhängige standardnormalverteilte Zufallsgrößen, dann gilt

$$E\left(\left\| (a_{ij} g_{ij})_{i,j=1}^n \right\|_{2 \to 2} \right) \lesssim \max_{i=1,...,n} \left\| (a_{ij})_{j=1}^n \right\|_2 + \max_{j=1,...,n} \|(a_{ij})_{i=1}^n\|_2 + \left\| (a_{ij})_{i,j=1}^n \right\|_4 .$$

Wir geben in dieser Arbeit bis auf einen logarithmischen Faktor die Größenordnung von $E\left(\left\| (a_{ij} g_{ij})_{i,j=1}^n \right\|_{2 \to 2} \right)$ an, so zeigen wir:

Satz (Satz 4.1.1) Für alle $i, j = 1, ..., n$ seien $a_{ij} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und g_{ij} unabhängige standardnormalverteilte Zufallsgrößen, dann gilt:

(i) a) $E\left(\left\| (a_{ij} g_{ij})_{i,j=1}^n \right\|_{2 \to 2} \right) \gtrsim E\left(\max_{i=1,...,n} \left\| (a_{ij} g_{ij})_{j=1}^n \right\|_2 \right) + E\left(\max_{j=1,...,n} \|(a_{ij} g_{ij})_{i=1}^n\|_2 \right),$

b)

$$\begin{aligned} &E\left(\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2}\right) \\ &\lesssim (\ln(n))^{\frac{3}{2}} \left(E\left(\max_{i=1,\dots,n} \left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right) + E\left(\max_{j=1,\dots,n} \|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\|_2\right)\right). \end{aligned}$$

(ii) Im speziellen Fall normalverteilter Einträge lassen sich die Orliczfunktionen aus (1.1) und ebenso die Größenordnung von $\|(1)_i\|_{(M_i)_i}$ konkret berechnen. Wir erhalten damit folgende Darstellung:

a) $E\left(\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2}\right) \gtrsim \max_{i=1,\dots,n} \left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2 + \max_{j=1,\dots,n} \|(a_{ij})_{i=1}^n\|_2,$

b) $E\left(\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2}\right) \lesssim (\ln(n))^2 \left(\max_{i=1,\dots,n} \left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2 + \max_{j=1,\dots,n} \|(a_{ij})_{i=1}^n\|_2\right).$

Falls $a_{ij} \in \{0,1\}$, $i,j = 1,...,n$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} &\max\left\{\sqrt{\left|\ln\left(\sum_{i=1}^n \max_{j=1,\dots,n} a_{ij}\right)\right|}, \max_{i=1,\dots,n} \left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right\} \\ &\qquad + \max\left\{\sqrt{\left|\ln\left(\sum_{j=1}^n \max_{i=1,\dots,n} a_{ij}\right)\right|}, \max_{j=1,\dots,n} \|(a_{ij})_{i=1}^n\|_2\right\} \\ &\lesssim E\left(\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2}\right) \\ &\lesssim (\ln(n))^{\frac{3}{2}} \left(\max\left\{\sqrt{\left|\ln\left(\sum_{i=1}^n \max_{j=1,\dots,n} a_{ij}\right)\right|}, \max_{i=1,\dots,n} \left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right\}\right. \\ &\qquad \left. + \max\left\{\sqrt{\left|\ln\left(\sum_{j=1}^n \max_{i=1,\dots,n} a_{ij}\right)\right|}, \max_{j=1,\dots,n} \|(a_{ij})_{i=1}^n\|_2\right\}\right). \end{aligned}$$

Es sei darauf hingewiesen, dass die Darstellung aus (ii) für eine konkret gegebene Matrix von Standardabweichungen $(a_{ij})_{i,j=1}^n$ eine sehr einfache Berechnung für die Größenordnung des Erwartungswertes der größten singulären Zahl erlaubt: man bildet lediglich das Maximum der euklidischen Norm der Zeilen- und Spaltenvektoren der Matrix $(a_{ij})_{i,j=1}^n$.

Wie wir in (i) sehen, ist es notwendig, Erwartungswerte von Maxima von nicht notwendigerweise identisch verteilten Zufallsgrößen zu verstehen, um das Verhalten von $E\left(\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2}\right)$

genauer zu analysieren. Hierfür untersuchen wir diese ganz allgemein und verwenden die in [5] eingeführte Orlicznorm-Technik in allgemeinerer Form; in diesem Zusammenhang erhalten wir folgendes Resultat:

Satz (Satz 3.1.5) Es seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige, integrierbare Zufallsgrößen, und für alle $i = 1, ..., n$ seien M_i gegeben durch

$$M_i(s) = \int_0^s \int_{\frac{1}{t} \leq |X_i|} |X_i| dP dt.$$

Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_{(M_i)_i} \lesssim E \max_{1 \leq i \leq n} |x_i X_i| \lesssim \|x\|_{(M_i)_i}.$$

Dieses Ergebnis ist von zentraler Bedeutung für das Verständnis des Verhaltens des Erwartungswertes der größten singulären Zahl von Zufallsmatrizen mit nicht notwendigerweise identisch verteilten Einträgen und stellt ein deutlich anderes Vorgehen als in [10] dar.

Für den Fall, dass die Einträge unabhängige normalverteilte Zufallsgrößen sind, deren Varianzen einer gewissen Abhängigkeitsstruktur unterliegen, wissen wir bereits, wie sich $E\left(\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2}\right)$ verhält. So ergibt sich als Folgerung des Satzes von Chevet, siehe [2]:

Für alle $i, j = 1, ..., n$ seien $b_i, c_j \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und es seien g_{ij} unabhängige standardnormalverteilte Zufallsgrößen. Dann gilt

$$E\left(s_1\left((b_i c_j g_{ij})_{i,j=1}^n\right)\right) \sim \left\|(b_j)_{j=1}^n\right\|_\infty \|(c_i)_{i=1}^n\|_2 + \|(c_i)_{i=1}^n\|_\infty \left\|(b_j)_{j=1}^n\right\|_2.$$

Ebenso kennen wir das Verhalten von $E\left(\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2}\right)$ für Diagonalmatrizen mit normalverteilten Einträgen, denn als eine Folgerung der Resultate aus [5] erhalten wir:

Es seien $g_1, ..., g_n$ unabhängige standardnormalverteilte Zufallsgrößen, und es sei M die folgende Orliczfunktion

$$M(s) = \begin{cases} 0 & \text{, falls} \quad s = 0 \\ e^{-\frac{3}{2s^2}} & \text{, falls} \quad s \in (0,1) \\ e^{-\frac{3}{2}}(3s-2) & \text{, falls} \quad s \geq 1. \end{cases}$$

Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_M \lesssim \int\limits_\Omega \max_{i=1,\ldots,n} |x_i g_i(\omega)| dP(\omega) \lesssim \|x\|_M \,.$$

Insbesondere gilt somit

$$E(s_1(\operatorname{diag}(g_1, ..., g_n))) = E \max_{i=1,\ldots,n} |g_i| \sim \|(1)_{i=1}^n\|_M \sim \sqrt{\ln(n)},$$

wobei wir mit $\operatorname{diag}(g_1, ..., g_n)$ eine Diagonalmatrix bezeichnen, die auf der Hauptdiagonale die Einträge $g_1, ..., g_n$ hat.

Aus diesem Satz folgt unmittelbar, dass das Ergebnis von R. Latala in [10] nicht optimal sein kann, denn dort erhalten wir für $E(s_1(\operatorname{diag}(g_1, ..., g_n)))$ als obere Schranke $n^{\frac{1}{4}}$, was deutlich größer als $\sqrt{\ln(n)}$ ist. Diese Beobachtung veranlasste uns zu weiteren Betrachtungen von $E\left(\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2}\right)$ und der Verwendung von Orlicznormen bei der Abschätzung der Größenordnung, welche eine zentrale Rolle in dieser Arbeit spielen.

1.1 Aufbau und Notation

Diese Arbeit gliedert sich in vier Kapitel. Auf dieses erste einleitende folgt ein Grundlagen-Kapitel, welches sich in zwei Abschnitte gliedert. Es stellt die wichtigen Begriffe und bekannte Aussagen, die im Folgenden benötigt werden, zur Verfügung. In Abschnitt 2.1 gehen wir auf Orlicznormen und für uns wichtige Verallgemeinerungen ein, und im zweiten Abschnitt legen wir kurz für uns wichtige stochastische Grundlagen dar.

Im dritten Kapitel beschäftigen wir uns mit dem Erwartungswert von Orlicznormen von unabhängigen aber nicht notwendigerweise identisch verteilten Zufallsgrößen. Bei diesen Resultaten handelt es sich um Verallgemeinerungen von Ergebnissen aus [5] auf nicht identisch verteilte Zufallsgrößen. Es schließen sich an diese allgemeinen Betrachtungen zwei Unterkapitel an, im ersten bringen wir unsere bisherigen Resultate in Zusammenhang mit dem Erwartungswert vom Maximum von unabhängigen aber nicht notwendigerweise identisch verteilten Zufallsgrößen, welche im folgenden vierten Kapitel von zentraler Bedeutung sein werden. In 3.2 gehen wir auf den Zusammenhang des bisher gezeigten zu dem Erwartungswert der größten singulären Zahl von Zufallsmatrizen ein.

Das vierte Kapitel stellt das Hauptergebnis unserer Arbeit dar und beschäftigt sich mit dem Erwartungswert der größten singulären Zahl von Zufallsmatrizen mit unabhängigen Einträgen. Es gliedert sich in zwei Abschnitte; Abschnitt 4.1 ist in 4 Abschnitte unterteilt, im ersten fassen wir unsere Resultat zusammen und geben Beispiele zur Verdeutlichung der Resultate und zur Abgrenzung unserer Resultate von den bekannten Ergebnissen an. In 4.1.2 zeigen wir die untere Abschätzung des Erwartungswertes und motivieren das folgende Vorgehen. Im dritten Abschnitt gehen wir auf die Bestimmung der im Folgenden relevanten Orliczfunktion ein und in einem weiteren Unterabschnitt betrachten wir detailliert die daraus resultierende Orlicznorm. In 4.1.2 gehen wir auf die obere Abschätzung des Erwartungswertes der größten singulären Zahl unabhängiger normalverteilter Zufallsmatrizen ein. In 4.2 verallgemeinern wir die Ergebnisse aus 4.1 für normalverteilte Einträge auf beliebige.

Wir sind in dieser Arbeit an Abschätzungen von Größenordnungen interessiert und schreiben hierfür $\sim$, bzw. $\lesssim$ oder $\gtrsim$. Diese Schreibweise bedeutet, dass absolute Konstanten existieren so, dass die Abschätzungen bis auf diese das richtige Verhalten angeben. Da die im Folgenden auftretenden Ausdrücke zum Teil unhandlich sind und wir nicht an den genauen Konstanten interessiert sind, unterdrücken wir diese und verwenden $\sim$, bzw. $\lesssim$ oder $\gtrsim$.

Es sei in dieser Arbeit immer $n \in \mathbb{N}$. Außerdem bezeichnen wir für $1 \leq p \leq \infty$ mit l_p^n den $\mathbb{R}^n$ ausgestattet mit der p-Norm, das heißt für $x \in \mathbb{R}^n$ ist $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, falls $p < \infty$ und $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$. Entsprechend bezeichnen wir mit B_p^n die Einheitskugel bezüglich der p-Norm, $1 \leq p \leq \infty$. Falls keine Missverständnisse auftreten, unterdrücken wir die Angabe der Dimension.

Die Operatornorm bezüglich l_2^n und l_2^n bezeichnen wir mit $\|\cdot\|_{2\to 2}$, das heißt für einen Operator $T : l_2^n \to l_2^n$ ist $\|T\|_{2\to 2} = \sup_{\|x\|_2=1} \|Tx\|_2$.

In dieser Arbeit bezeichnen c, C, c_1, c_2, c_3 und c_4 absolute Konstanten, die nicht von der Dimension und den zugrunde liegenden Verteilungen abhängen. Ihre Werte können sich von Zeile zu Zeile unterscheiden.

Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ stets ein Wahrscheinlichkeitsraum, auf dem unsere Zufallsgrößen definiert seien. E bezeichne den Erwartungswert und falls $\mathfrak{A}_1$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathfrak{A}$ ist, so bezeichnen wir mit $E(\cdot|\mathfrak{A}_1)$ den bedingten Erwartungswert. Falls es unmissverständlich ist die Abhängigkeit der Zufallsgrößen von ω zu unterdrücken, so tun wir dies, um die Ausdrücke übersichtlicher zu gestalten.

Kapitel 2

Grundlagen

In diesem Kapitel klären wir die grundlegenden Begriffe für unsere folgenden Betrachtungen und gehen - ohne Beweis - auf bekannte Resultate ein, die wir im Folgenden verwenden. Lediglich für Lemma 2.1.10 geben wir in diesem Kapitel einen Beweis, denn es stellt eine Verallgemeinerung eines Ergebnisses aus [5] dar und geht entscheidend in Kapitel 3 ein.

Dieses Kapitel gliedert sich in 2 Abschnitte. Im ersten Abschnitt erinnern wir an die Orlicznorm und einige im Zusammenhang stehende Begriffe, die wir danach verallgemeinern; dieser verallgemeinerte Begriff der Orlicznorm spielt eine zentrale Rolle bei der Untersuchung des Erwartungswertes von Maxima von Zufallsgrößen, und damit der Untersuchung des Erwartungswertes der größten singulären Zahl. In Abschnitt 2.2 fassen wir für uns wichtige Eigenschaften normalverteilter Zufallsgrößen zusammen, die vor allem im vierten Kapitel eingehen.

2.1 Orlicznorm

In diesem Abschnitt gehen wir auf den Begriff der Orlicznorm beziehungsweise der Orliczfunktion ein, denn dieser wird im Folgenden von großer Bedeutung sein. Beweise und weiterführende Aussagen finden sich in [7].

Definition 2.1.1.

(i) Unter einer **Orliczfunktion** verstehen wir eine eine konvexe, linksseitig stetige Funktion $M : [0, \infty) \to [0, \infty]$ mit $M(0) = 0$. Wir schließen aus, dass M die konstante 0-Funktion ist oder die Funktion ist, die außerhalb der 0 immer ∞ ist.

(ii) Es sei M eine Orliczfunktion. Dann heißt die Funktion

$$M^* : [0,\infty) \to [0,\infty], s \mapsto \sup_{\{t | M(t)<\infty\}} (st - M(t))$$

die zu M **komplementäre/duale Funktion**.

(iii) Es sei M eine Orliczfunktion und $x \in \mathbb{R}^n$. Wir definieren die **Orlicznorm** von x durch

$$\|x\|_M = \inf \left\{ t > 0 \middle| \sum_{i=1}^{n} M\left(\left| \frac{x_i}{t} \right| \right) \leq 1 \right\}.$$

Bemerkung 2.1.2. Es sei M eine Orliczfunktion, dann ist $\|\cdot\|_M$ eine Norm.

Definition 2.1.3. Es sei M eine Orliczfunktion. Unter dem **Orliczraum** l_M^n verstehen wir den $\mathbb{R}^n$ versehen mit der Orlicznorm $\|\cdot\|_M$.

Wir verallgemeinern diesen Begriff der Orlicznorm nun dahingehend, dass wir statt in jeder Komponente mit der gleichen Orliczfunktion zu gewichten, n Orliczfunktionen betrachten und in jeder Komponente mit einer unterschiedlichen gewichten, das heißt:

Definition 2.1.4. Es seien $M_1, ..., M_n$ Orliczfunktionen. Wir definieren für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_{(M_i)_i} = \inf \left\{ t > 0 \middle| \sum_{i=1}^{n} M_i\left(\left| \frac{x_i}{t} \right| \right) \leq 1 \right\}.$$

die **verallgemeinerte Orlicznorm**.

Bemerkung 2.1.5. Es seien $M_1, ..., M_n$ Orliczfunktionen, dann ist $\|\cdot\|_{(M_i)_i}$ ebenfalls eine Norm.

Definition 2.1.6. Es seien $M_1, ..., M_n$ Orliczfunktionen. Unter dem **verallgemeinerten Orliczraum** $l_{(M_i)_i}^n$ verstehen wir den $\mathbb{R}^n$ versehen mit der verallgemeinerten Orlicznorm $\|\cdot\|_{(M_i)_i}$.

Für unsere folgenden Überlegungen benötigen wir den zu diesem verallgemeinerten Orliczraum gehörigen Dualraum $\left(l_{(M_i)_i}^n\right)^*$.

Bemerkung 2.1.7. Der Dualraum eines solchen Raumes $l_{(M_i)_i}^n$ kann ganz allgemein mit dem $\mathbb{R}^n$ mit der Norm

$$\||x\|| = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \middle| \|y\|_{(M_i)_i} \leq 1 \right\}$$

identifiziert werden.

Das folgende Lemma zeigt, dass dieser Dualraum äquivalent zum $\mathbb{R}^n$ mit der Norm $\|\cdot\|_{(M_i^*)_i}$ ist:

Lemma 2.1.8. *Es seien $M_1, ..., M_n$ Orliczfunktionen, dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$*

$$\|x\|_{\left(M_i^*\right)_i} \leq \||x|\| \leq 2 \|x\|_{\left(M_i^*\right)_i}.$$

Wir werden in Kapitel 3 einen weiteren Normbegriff verwenden, den wir an dieser Stelle zunächst definieren und danach in Zusammenhang mit der verallgemeinerten Orlicznorm bringen:

Definition 2.1.9. Es seien $n, s \in \mathbb{N}$ mit $n \leq s$, des Weiteren seien $a^1, ..., a^n \in \mathbb{R}^s$ so, dass für alle $i = 1, ..., n$ gilt $a_1^i \geq ... \geq a_s^i > 0$. Dann definieren wir für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_a = \max_{\sum k_j \leq s} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{k_i} a_j^i \right) |x_i|.$$

Das nächste Lemma zeigt, dass diese Norm äquivalent zu der verallgemeinerten Orlicznorm ist und stellt eine direkte Verallgemeinerung eines Ergebnisses aus [8] und [9] dar und wird in Kapitel 3 beim Beweis von Satz 3.0.8 eingehen.

Lemma 2.1.10. *Es seien $n, s \in \mathbb{N}$ mit $n \leq s$, des Weiteren seien $a^1, ..., a^n \in \mathbb{R}^s$ so, dass für alle $i = 1, ..., n$ gilt $a_1^i \geq ... \geq a_s^i > 0$ und so, dass für alle $i = 1, ..., n$ gilt*

$$\sum_{j=1}^{s} a_j^i = 1.$$

Außerdem seien $M_1, ..., M_n$ Orliczfunktionen so, dass für alle $i = 1, ..., n$ und $k = 1, ..., s$ gilt

$$M_i^* \left(\sum_{j=1}^{k} a_j^i \right) = \frac{k}{s}.$$

Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{1}{2} \|x\|_a \leq \|x\|_{(M_i)_i} \leq 2 \|x\|_a.$$

Bemerkung 2.1.11. Für alle Orliczfunktionen M existieren $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_s > 0$ so, dass für alle $k \leq s$ gilt

$$M^*\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right) = \frac{k}{s}.$$

Beweis. (Lemma 2.1.10) Es sei $|||\cdot|||$ die zu $\|\cdot\|_{\left(M_i^*\right)_i}$ duale Norm, dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$ nach Lemma 2.1.8

$$\|x\|_{(M_i)_i} \leq |||x||| \leq 2\,\|x\|_{(M_i)_i}.$$

Es sei nun $x \in \mathbb{R}^n$ so, dass gilt $\sum_{i=1}^{n} M_i^*(x_i) = 1$, das heißt es gilt $x \in B_{\left(M_i^*\right)_i}$. Es existieren $k_i \in \{1, ..., s\}$ so, dass für alle $i = 1, ..., n$

$$\sum_{j=1}^{k_i} a_j^i \leq x_i \leq \sum_{j=1}^{k_i+1} a_j^i. \tag{2.1}$$

Aufgrund der fallenden Anordnung der a_j^i gilt

$$x_i \leq \sum_{j=1}^{k_i} a_j^i + a_{k_i+1}^i \leq \sum_{j=1}^{k_i} a_j^i + a_1^i.$$

Wir zeigen jetzt, dass $(a_1^i)_{i=1}^n \in (B_a)^*$ und $\left(\sum_{j=1}^{k_i} a_j^i\right)_{i=1}^n \in (B_a)^*$, denn dann folgt $x \in 2\,(B_a)^*$ und damit

$$B_{\left(M_i^*\right)_i} \subseteq 2\,(B_a)^*.$$

Es gilt

$$(B_a)^* = (B_a)^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n | \forall x \in B_a :< x, y >\leq 1\}.$$

Es sei $z \in B_a$, das heißt

$$\max_{\sum k_j \leq s} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{k_i} a_j^i\right) |z_i| \leq 1.$$

Es sei $\tilde{k}_i = 1$ für alle $i = 1, ..., n$, dann gilt $\sum_{i=1}^{n} \tilde{k}_i = n \leq s$ und damit

$$< (a_1^1, ..., a_1^n), (z_1, ..., z_n) >= \sum_{i=1}^{n} a_1^i z_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{\tilde{k}_i} a_j^i\right) z_i \leq \max_{\sum k_j \leq s} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{k_i} a_j^i\right) |z_i| \leq 1,$$

folglich gilt

$$(a_1^i)_{i=1}^n \in (B_a)^* .$$

Außerdem gilt (2.1)

$$1 = \sum_{i=1}^n M_i^*(x_i) \geq \sum_{i=1}^n M_i^* \left(\sum_{j=1}^{k_i} a_j^i \right) = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{s}$$

und damit

$$\sum_{i=1}^n k_i \leq s.$$

Also gilt

$$< \left(\sum_{j=1}^{k_i} a_j^i \right)_{i=1}^n , (z_i)_{i=1}^n >= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{k_i} a_j^i \right) |z_i| \overset{\sum_{i=1}^n k_i \leq s}{\leq} \max_{\sum_{i=1}^n \hat{k}_i \leq s} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{\hat{k}_i} a_j^i \right) |z_i| \leq 1$$

und damit

$$\left(\sum_{j=1}^{k_i} a_j^i \right)_{i=1}^n \in (B_a)^* .$$

Folglich gilt

$$B_{\left(M_i^*\right)_i} \subseteq 2 \left(B_a\right)^* .$$

Zusammengefasst gilt somit

$$\|x\|_a \geq \frac{1}{2} |||x||| \geq \frac{1}{2} \|x\|_{(M_i)_i} .$$

Wie bereits gezeigt, gilt nach (2.1)

$$x_i \geq \sum_{j=1}^{k_i} a_j^i$$

und

$$\left(\sum_{j=1}^{k_i} a_j^i \right)_{i=1}^n \in (B_a)^* ,$$

also gilt

$$(B_a)^* \subseteq B_{\left(M_i^*\right)_i} .$$

Zusammenfassend gilt also

$$\|x\|_a \leq |||x||| \leq 2\,\|x\|_{(M_i)_i}$$

und damit insgesamt

$$\frac{1}{2}\,\|x\|_{(M_i)_i} \leq \|x\|_a \leq 2\,\|x\|_{(M_i)_i}\,.$$

□

2.2 Eigenschaften normalverteilter Zufallsgrößen

In diesem Abschnitt gehen wir auf drei für uns wichtige Eigenschaften normalverteilter Zufallsgrößen ein, die wir vor allem in Kapitel 4 benötigen, um die Größenordnung des Erwartungswertes der größten singulären Zahl einer Matrix mit normalverteilten Einträgen genauer zu bestimmen.

Es bezeichne stets $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ einen Wahrscheinlichkeitsraum auf dem alle im Folgenden benutzten Zufallsvariablen definiert seien.

Wir verstehen unter einer normalverteilten Zufallsgröße zu den Parametern $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ eine Zufallsgröße, deren Verteilung durch die Dichte $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

gegeben ist. Im Fall $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$ sprechen wir von standardnormalverteilten Zufallsgrößen. Wir schreiben im Folgenden $g \sim N(\mu, \sigma^2)$, wenn g normalverteilt zu den Parametern μ und σ ist.

Wir benötigen noch eine weitere Verteilung, die im Zusammenhang mit normalverteilten Zufallsgrößen steht, und vor allem in Abschnitt 4.1.3 von Bedeutung sein wird:

Definition 2.2.1. Es seien $g_1, ..., g_n \sim N(0,1)$ unabhängig. Die Verteilung von $\sum\limits_{i=1}^{n} g_i^2$ heißt **Chi-Quadrat-Verteilung mit n Freiheitsgeraden**, ihre Dichte $\varphi_{\chi_n^2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\varphi_{\chi_n^2}(t) = \begin{cases} \frac{t^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} & \text{,falls} \quad t > 0 \\ 0 & \text{,falls} \quad t \leq 0. \end{cases}$$

Beweise für die, in diesem Abschnitt - ohne Beweis - aufgelisteten Resultate finden sich unter anderem in [11] und [13]. Zunächst kommen wir zu der so genannten Konzentrationseigenschaft normalverteilter Zufallsgrößen, die im Folgenden eine wesentliche Rolle sowohl bei der oberen Abschätzung des Erwartungswertes der größten singulären Zahl normalverteilter Zufallsmatrizen, als auch bei der Bestimmung der zentralen Orliczfunktion in Kapitel 4, Satz 4.1.8, spielt. Diese geht auf G. Pisier zurück und findet sich in [13]:

Satz 2.2.2. *Es seien X ein Banachraum, $x_1, ..., x_n \in X$ und $g_1, ..., g_n$ seien unabhängige standardnormalverteilte Zufallsgrößen. Des Weiteren sei*

$$\sigma = \sup_{\|x^*\|=1} \left(\sum_{i=1}^{n} |x^*(x_i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dann gilt für alle $\alpha > 0$

$$P\left(\left| \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i g_i \right\| - E\left(\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i g_i \right\| \right) \right| \geq \alpha \right) \leq 2 \exp\left(-\frac{K\alpha^2}{\sigma^2} \right),$$

wobei K eine Konstante ist mit $K \geq \frac{2}{\pi^2}$.

Aus diesem Satz folgt:

Korollar 2.2.3. *Es existieren Konstanten $c_{p,q}$, $1 \leq q < p < \infty$ so, dass für alle Banachräume X, $n \in \mathbb{N}$, $x_1, ..., x_n \in X$ und für alle unabhängigen standardnormalverteilten $g_1, ..., g_n$ gilt*

$$\left(\int_\Omega \left\| \sum_{i=1}^{n} g_i(\omega) x_i \right\|^p dP(\omega) \right)^{\frac{1}{p}} \leq c_{p,q} \left(\int_\Omega \left\| \sum_{i=1}^{n} g_i(\omega) x_i \right\|^q dP(\omega) \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Bei der Bestimmung der zentralen Orliczfunktion in Kapitel 4, Satz 4.1.8, benötigen wir den folgenden Begriff des Medians:

Definition 2.2.4. Der **Median** einer Zufallsgröße X mit stetiger Verteilung ist die Zahl $\bar{M}_X$ für die gilt

$$P\left(X \leq \bar{M}_X\right) \geq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad P\left(X \geq \bar{M}_X\right) \geq \frac{1}{2}.$$

Bemerkung 2.2.5. Die Zahl M_X aus Definition 2.2.4 ist nicht unbedingt eindeutig.

Das folgende Lemma wird von M. Ledoux und M. Talagrand in [11] bewiesen:

Lemma 2.2.6. Für alle $i = 1, ..., n$ seien $a_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und g_i seien unabhängige standardnormalverteilte Zufallsgrößen. Dann gilt

$$\left| E\left(\|(a_i g_i)_{i=1}^n\|_2\right) - \bar{M}_{\|(a_i g_i)_{i=1}^n\|_2} \right| \leq \sqrt{2\pi}.$$

Abschließend interessieren wir uns für die Größenordnung von $E\left(\|(a_i g_i)_{i=1}^n\|_2\right)$, hierbei seien $a_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $i = 1, ..., n$, und g_i, $i = 1, ..., n$, unabhängige standardnormalverteilte Zufallsgrößen. Das folgende Lemma liefert uns diese:

Lemma 2.2.7. Für alle $i = 1, ..., n$ seien $a_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und g_i unabhängige, standardnormalverteilte Zufallsgrößen. Es sei $1 \leq p < \infty$, dann existiert eine Konstante c_p so, dass gilt

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \|(a_i)_{i=1}^n\|_p \leq E\left(\|(a_i g_i)_{i=1}^n\|_p\right) \leq c_p \|(a_i)_{i=1}^n\|_p .$$

Beweis. Es gilt

$$E\left(\|(a_i g_i)_{i=1}^n\|_p\right) = \int \left(\sum_{i=1}^n |a_i g_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} dP.$$

Da die Abbildung $x \mapsto x^{\frac{1}{p}}$ für alle $p \geq 1$ konkav ist, folgt mit der Jensen-Ungleichung

$$E\left(\|(a_i g_i)_{i=1}^n\|_p\right) \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \underbrace{\int |g_i|^p dP}_{c_p^p}\right)^{\frac{1}{p}} = c_p \|(a_i)_{i=1}^n\|_p .$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$E\left(\|(a_i g_i)_{i=1}^n\|_p\right) = E\left(\|(|a_i g_i|)_{i=1}^n\|_p\right) \geq \|(|a_i| E|g_i|)_{i=1}^n\|_p = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \|(a_i)_{i=1}^n\|_p .$$

$\square$

Kapitel 3

Erwartungswert einer Orlicznorm unabhängiger Zufallsgrößen

Für alle $i = 1, ..., n$ seien X_i unabhängige, integrierbare Zufallsgrößen, die nicht notwendigerweise identisch verteilt sind und es seien $x_i \in \mathbb{R}$. Wir interessieren uns für das Verhalten von

$$\int\limits_{\Omega} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i X_i(\omega)| \, dP(\omega).$$

Genauer wollen wir die Größenordnung von $\int \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i X_i| \, dP$ bestimmen, wobei die in den Abschätzungen auftretenden Konstanten nicht von n und der Verteilung der X_i abhängig sein sollen.

Wie wir in Kapitel 4 sehen, ist es entscheidend, $\int \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i X_i| \, dP$ zu bestimmen, um die Größenordnung des Erwartungswertes der größten singulären Zahl einer Zufallsmatrix anzugeben.

Wir untersuchen in diesem Kapitel zunächst eine allgemeinere Situation, nämlich die Größenordnung von

$$\int\limits_{\Omega} \|(x_i X_i(\omega))_{i=1}^n\|_{(N_i)_i} \, dP(\omega),$$

wobei $N_1, ..., N_n$ Orliczfunktionen sind. Hierzu verallgemeinern wir die Resultate aus [5] auf nicht identisch verteilte Zufallsgrößen. Wir formulieren zunächst unser Hauptresultat für die Größenordnung von $\int \|(x_i X_i)_{i=1}^n\|_{(N_i)_i} \, dP$, wobei $N_1, ..., N_n$ weiterhin Orliczfunktionen seien, und beweisen dies im Anschluss. Danach folgen zwei Unterabschnitte; im ersten stellen wir den Zusammenhang des bisher gezeigten zu dem Spezialfall $\int \max_{1\le i\le n} |x_i X_i|\, dP$ her und im zweiten gehen wir auf die Anwendungen dieser Resultate auf Zufallsmatrizen ein.

Um den Hauptsatz dieses ersten Abschnitts formulieren zu können, führen wir zunächst einige Notationen ein: Es seien im Folgenden $X_1, ..., X_n$ Zufallsgrößen mit Verteilungen mit stetigen Dichten und endlichen ersten Momenten. Die X_l, $l = 1, ..., n$, sind nicht notwendigerweise identisch verteilt oder unabhängig.

Aufgrund der Stetigkeit der Dichten der Verteilungen gilt $P(X_l = t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $l = 1, ..., n$. Wir definieren im Folgenden einige Parameter der Verteilungen. Für alle $l = 1, ..., n$ definiere $t_n^l = t_n(X_l) = 0$, $t_0^l = t_0(X_l) = \infty$ und für alle $i = 1, ..., n-1$

$$t_i^l = t_i(X_l) = \sup\left\{ t \,\middle|\, P(|X_l| > t) \ge \frac{i}{n} \right\}. \tag{3.1}$$

Aufgrund der Stetigkeit der Dichten gilt für alle $i, l = 1, ..., n$

$$P\left(|X_l| \ge t_i^l\right) = \frac{i}{n}.$$

Des Weiteren definieren wir für alle $i, l = 1, ..., n$

$$\Omega_i^l = \Omega_i(X_l) = \left\{ t_i^l \le |X_l| < t_{i-1}^l \right\} = \left\{ t_i^l \le |X_l| \right\} \setminus \left\{ t_{i-1}^l \le |X_l| \right\}. \tag{3.2}$$

Also gilt

$$P\left(\Omega_i^l\right) = \frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n}.$$

Außerdem setze für alle $i, l = 1, ..., n$

$$y_i^l = y_i\left(X_l\right) = \int_{\Omega_i^l} |X_l| dP. \tag{3.3}$$

Dann gilt für alle $i, l = 1, ..., n$

$$\sum_{i=1}^n y_i^l = E|X_l| \qquad \text{und} \qquad t_i^l \le n y_i^l < t_{i-1}^l.$$

Satz 3.0.8. *Es seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige integrierbare Zufallsgrößen. Für alle $l = 1, ..., n$ seien N_l Orliczfunktionen und $(s_k^l)_{k=1}^{n^2}$ sei die fallende Anordnung der*

$$\left| y_i^l \left((N_l)^{*-1} \left(\frac{j}{n} \right) - (N_l)^{*-1} \left(\frac{j-1}{n} \right) \right) \right|, \qquad i, j = 1, ..., n.$$

Des Weiteren seien $M_1, ..., M_n$ Orliczfunktionen so, dass für alle $m = 1, ..., n^2$ und $l = 1, ..., n$ gilt

$$M_l^* \left(\sum_{k=1}^{m} s_k^l \right) = \frac{m}{n^2}.$$

Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{1}{8} \|x\|_{(M_i)_i} \leq E \left\| (x_i X_i)_{i=1}^n \right\|_{(N_i)_i} \leq 8 \frac{e}{e-1} \|x\|_{(M_i)_i}.$$

Der Beweis dieser Aussage folgt zusammen mit Lemma 2.1.10 aus der folgenden Proposition:

Proposition 3.0.9. *Es seien $N_1, ..., N_n$ Orliczfunktionen und für $j, l = 1, ..., n$ seien*

$$z_j^l = (N_l^*)^{-1} \left(\frac{j}{n} \right) - (N_l^*)^{-1} \left(\frac{j-1}{n} \right).$$

Des Weiteren sei $s^l = (s_k^l)_k \in \mathbb{R}^{n^2}$ für alle $l = 1, ..., n$ die fallende Anordnung der Zahlen $|y_j^l z_k^l|$, $j, k = 1, ..., n$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$E \left\| (x_i X_i)_{i=1}^n \right\|_z \leq \frac{2}{c_n} \|x\|_s,$$

wobei $c_n = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n > 1 - \frac{1}{e}$.
Falls $X_1, ..., X_n$ zusätzlich unabhängig sind, dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{1}{2} \|x\|_s \leq E \left\| (x_i X_i)_{i=1}^n \right\|_z.$$

Wir zeigen an dieser Stelle zunächst wie wir Satz 3.0.8 beweisen und gehen im Folgenden auf den Beweis von Proposition 3.0.9 ein.

Beweis. (Satz 3.0.8) Nach Proposition 3.0.9 und Lemma 2.1.10 gilt

$$\frac{1}{4}\|x\|_s \leq \frac{1}{2}E\left\|(x_iX_i)_{i=1}^n\right\|_z \leq E\left\|(x_iX_i)_{i=1}^n\right\|_{(N_i)_i} \leq 2E\left\|(x_iX_i)_{i=1}^n\right\|_z \leq \frac{4}{c_n}\|x\|_s .$$

Da außerdem für alle $l = 1, ..., n$ gilt $M_l^*\left(\sum_{k=1}^m s_k^l\right) = \frac{m}{n^2}$, folgt mit Lemma 2.1.10

$$\frac{1}{2}\|x\|_s \leq \|x\|_{(M_i)_i} \leq 2\|x\|_s .$$

Zusammengefasst gilt

$$\frac{1}{8}\|x\|_{(M_i)_i} \leq \frac{1}{4}\|x\|_s \leq E\left\|(x_iX_i)_{i=1}^n\right\|_{(N_i)_i} \leq \frac{4}{c_n}\|x\|_s \leq \frac{8}{c_n}\|x\|_{(M_i)_i}$$

beziehungsweise

$$\frac{1}{8}\|x\|_{(M_i)_i} \leq E\left\|(x_iX_i)_{i=1}^n\right\|_{(N_i)_i} \leq 8\frac{e}{e-1}\|x\|_{(M_i)_i}$$

und damit gilt die Behauptung. □

Um Proposition 3.0.9 zu beweisen, benötigen wir mehrere Lemmata. Auf diese und die zugehörigen Beweise gehen wir im Folgenden ein. Die Beweise von Lemma 3.0.10 und Lemma 3.0.11 finden sich in [5]. Wir merken noch an, dass Lemma 3.0.10, 3.0.11 und 3.0.12 Aussagen im Diskreten treffen, welche wir abschließend aufgrund der Teildiskretisierung unseres Problems zum Beweis von Proposition 3.0.9 benötigen.

Lemma 3.0.10. *Es seien* $(a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *und* $(s_k)_{k=1}^{n^2} \in \mathbb{R}^{n^2}$ *die fallende Anordnung der Zahlen* $|a_{ij}|$, $i, j = 1, ..., n$. *Dann gilt*

$$\frac{c_n}{n}\sum_{k=1}^n s_k \leq n^{-n}\sum_{j_1,...,j_n=1}^n \max_{1\leq i\leq n}|a_{ij_i}| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n s_k,$$

wobei $c_n = 1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

Lemma 3.0.11. *Für alle $i, j, k = 1, ..., n$ seien a_{ijk} nichtnegative reelle Zahlen. Es sei $(s_l)_{l=1}^{n^3} \in \mathbb{R}^{n^3}$ die fallende Anordnung der a_{ijk}, $i, j, k = 1, ..., n$. Dann gilt*

$$\frac{1}{2n^2} \sum_{l=1}^{n^2} s_l \leq n^{-2n} \sum_{\substack{1 \leq k_1, ..., k_n \leq n \\ 1 \leq j_1, ..., j_n \leq n}} \max_{1 \leq i \leq n} a_{ij_ik_i} \leq \frac{1}{n^2} \sum_{l=1}^{n^2} s_l.$$

Lemma 3.0.12. *Es seien $i = 1, ..., n$ und $y^i \in \mathbb{R}^n$ so, dass für alle $i = 1, ..., n$ gilt $y_1^i \geq y_2^i \geq ... \geq y_n^i > 0$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$*

$$c_n \left\|x\right\|_y \leq n^{-n+1} \sum_{1 \leq j_1, ..., j_n \leq n} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i y_{j_i}^i| \leq \left\|x\right\|_y,$$

wobei $c_n = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

Beweis. (Lemma 3.0.12) Zunächst zeigen wir die rechte Ungleichung. Mit Lemma 3.0.10 folgt mit $a_{ij} = x_i y_j^i$, $i, j = 1, ..., n$

$$n^{-n+1} \sum_{1 \leq j_1, ..., j_n \leq n} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i y_{j_i}^i| \leq \sum_{k=1}^{n} s_k(x, y),$$

wobei $(s_k(x, y))_{k=1}^{n^2}$ die fallende Anordnung der $|x_i y_j^i|$, $i, j = 1, ..., n$ bezeichnet. Also existieren $k_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, ..., n$, mit $\sum\limits_{i=1}^{n} k_i = n$ so, dass gilt

$$n^{-n+1} \sum_{1 \leq j_1, ..., j_n \leq n} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i y_{j_i}^i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \sum_{j=1}^{k_i} y_j^i \leq \left\|x\right\|_y.$$

Nun zeigen wir die linke Ungleichung. Mit Lemma 3.0.10 gilt ebenfalls

$$c_n \sum_{k=1}^{n} s_k(x, y) \leq n^{-n+1} \sum_{1 \leq j_1, ..., j_n \leq n} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i y_{j_i}^i|.$$

Somit gilt für alle $k_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, ..., n$ mit $\sum\limits_{i=1}^{n} k_i = n$

$$c_n \sum_{i=1}^{n} |x_i| \sum_{j=1}^{k_i} y_j^i \leq n^{-n+1} \sum_{1 \leq j_1, ..., j_n \leq n} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i y_{j_i}^i|$$

und damit

$$c_n \|x\|_y \leq n^{-n+1} \sum_{1 \leq j_1,...,j_n \leq n} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i y^i_{j_i}|,$$

also die Behauptung. □

Lemma 3.0.13. *Es seien $X_1, ..., X_n$ zusätzlich unabhängig. Es seien y^i_j, $i, j = 1, ..., n$ wie in (3.3) definiert. Es sei $\|\cdot\|$ eine 1-unbedingte Norm auf dem $\mathbb{R}^n$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$*

$$n^{-n+1} \sum_{j_1,...,j_n=1}^{n} \left\|(xy^i_{j_i})^n_{i=1}\right\| \leq E \left\|(x_i X_i)^n_{i=1}\right\|.$$

Beweis. Für alle $i, j = 1, ..., n$ seien t^i_j und Ω^i_j wie in (3.1) und (3.2).
Für $1 \leq j_1, ..., j_n \leq n$ setzen wir

$$\Omega_{j_1,...,j_n} = \bigcap_{i=1}^{n} \Omega^i_{j_i}.$$

Da $X_1, ..., X_n$ unabhängig sind, gilt

$$P\left(\Omega_{j_1,...,j_n}\right) = n^{-n}.$$

Außerdem gilt für $(j_1, ..., j_n) \neq (i_1, ..., i_n)$

$$\Omega_{j_1,...,j_n} \cap \Omega_{i_1,...,i_n} = \emptyset.$$

Da $X_1, ..., X_n$ unabhängig sind, sind die Funktionen

$$|X_i| 1_{\Omega^i_{j_i}}, 1_{\Omega^1_{j_1}}, ..., 1_{\Omega^{i-1}_{j_{i-1}}}, 1_{\Omega^{i+1}_{j_{i+1}}}, ..., 1_{\Omega^n_{j_n}}$$

unabhängig, und somit gilt

$$\int_{\Omega_{j_1,...,j_n}} |X_i| dP = \int_{\Omega} |X_i| 1_{\Omega^i_{j_i}} 1_{\Omega^1_{j_1}} \cdots 1_{\Omega^{i-1}_{j_{i-1}}} 1_{\Omega^{i+1}_{j_{i+1}}} \cdots 1_{\Omega^n_{j_n}} dP = n^{-n+1} \int_{\Omega^i_{j_i}} |X_i| dP.$$

Zusammen mit der Unbedingtheit der Norm gilt

$$\begin{aligned}
E\left\|(x_iX_i)_{i=1}^n\right\| &= \sum_{j_1,\dots,j_n=1}^{n} \int\limits_{\Omega_{j_1,\dots,j_n}} \left\|(x_iX_i)_{i=1}^n\right\| dP \\
&\geq \sum_{j_1,\dots,j_n=1}^{n} \left\| \left(x_i \int\limits_{\Omega_{j_1,\dots,j_n}} |X_i| dP \right)_{i=1}^{n} \right\| \\
&= n^{-n+1} \sum_{j_1,\dots,j_n=1}^{n} \left\|(x_i y_{j_i}^i)_{i=1}^n\right\|.
\end{aligned}$$

□

Für das folgende Lemma benötigen wir nicht notwendigerweise unabhängige Zufallsgrößen:

Lemma 3.0.14. *Für alle $i, j = 1, ..., n$ seien y_j^i wie in (3.3). Es seien $z_1 \geq z_2 \geq ... \geq z_n \geq 0$ und $s_k(x, y, z)$, $k = 1, ..., n^3$ bezeichne die fallende Anordnung der Zahlen $|x_i y_j^i z_l|$, $i, j, l = 1, ..., n$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$*

$$n^{-n} \sum_{1 \leq k_1,\dots,k_n \leq n} E \max |x_i z_{k_i} X_i| \leq \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n^2} s_k(x, y, z).$$

Beweis. Es sei μ das normierte Zählmaß auf $\{(k_1, ..., k_n)|1 \leq k_1, ..., k_n \leq n\}$. Für alle $i = 1, ..., n$ definieren wir die Funktionen

$$\zeta_i : \{k = (k_1, ..., k_n)|1 \leq k_1, ..., k_n \leq n\} \to \mathbb{R}, k \mapsto z_{k_i}$$

und wir setzen

$$\Lambda_i = \left\{ (\omega, k) \middle| |x_i \zeta_i(k) X_i(\omega)| = \max_{1 \leq l \leq n} |x_l \zeta_l(k) X_l(\omega)| \right\}.$$

Wir nehmen an, dass Λ_i für alle $i = 1, ..., n$ disjunkt sind, falls nicht disjunktifizieren wir sie. Da $\bigcup_{i=1}^{n} \Lambda_i = \Omega \times \{1, ..., n\}^n$, gilt

$$\sum_{i=1}^{n} (P \otimes \mu)(\Lambda_i) = 1.$$

Für alle $i = 1, ..., n$ definieren wir Zahlen λ_i durch

$$(P \otimes \mu)\left(\{(\omega, k) || \zeta_i(k) X_i(\omega)| \geq \lambda_i\}\right) = P \otimes \mu\left(\Lambda_i\right)$$

und die Mengen $\tilde{\Lambda}_i$ durch

$$\tilde{\Lambda}_i = \{(\omega, k) || \zeta_i(k) X_i(\omega)| \geq \lambda_i\}.$$

Aufgrund der Existenz stetiger Dichten der Verteilungen der X_i existieren solche Zahlen λ_i. Da $P \otimes \mu(\Lambda_i) = P \otimes \mu(\tilde{\Lambda}_i)$, gilt

$$\sum_{i=1}^{n} (P \otimes \mu)\left(\tilde{\Lambda}_i\right) = 1$$

und

$$\tilde{\Lambda}_i = \bigcup_{l=1}^{n} \left(\{k | \zeta_i(k) = z_l\} \times \left\{ \omega \,\middle|\, |X_i(\omega)| \geq \frac{\lambda_i}{z_l} \right\} \right).$$

Da gilt

$$\mu\left(\{k | k_i = l\}\right) = \mu\left(\{k | \zeta_i(k) = z_l\}\right) = \frac{1}{n},$$

folgt

$$(P \otimes \mu)\left(\tilde{\Lambda}_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} P\left(\left\{ \omega \,\middle|\, |X_i(\omega)| \geq \frac{\lambda_i}{z_l} \right\} \right).$$

Für alle (i, l) wählen wir $j_{i,l} = 1$, falls $t_1^i \leq \frac{\lambda_i}{z_l}$ und $j_{i,l}$, falls gilt

$$t_{j_{i,l}}^i \leq \frac{\lambda_i}{z_l} < t_{j_{i,l}-1}^i.$$

Also gilt

$$\left\{ \omega \,\middle|\, |X_i(\omega)| \geq \frac{\lambda_i}{z_l} \right\} \subseteq \left\{ \omega \,\middle|\, |X_i(\omega)| \geq t_{j_{i,l}}^i \right\} = \bigcup_{i=1}^{j_{i,l}} \Omega_j^i$$

und

$$\left\{ \omega \,\middle|\, |X_i(\omega)| \geq \frac{\lambda_i}{z_l} \right\} \supseteq \left\{ \omega \,\middle|\, |X_i(\omega)| \geq t_{j_{i,l}-1}^i \right\} = \bigcup_{i=1}^{j_{i,l}-1} \Omega_j^i,$$

wobei $\bigcup\limits_{j=1}^{0} \Omega_j^i = \emptyset$. Zusammengefasst gilt somit

$$1 = \sum_{i=1}^{n} (P \otimes \mu) \left(\tilde{\Lambda}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} P \left(\left\{ \omega \,\middle|\, |X_i(\omega)| \geq \frac{\lambda_i}{z_l} \right\} \right) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} P \left(\bigcup_{i=1}^{j_{i,l}-1} \Omega_j^i \right).$$

Damit gilt

$$n^2 \geq \sum_{i,l=1}^{n} (j_{i,l} - 1),$$

also

$$2n^2 \geq \sum_{i,l=1}^{n} j_{i,l}.$$

Aufgrund der Definition der Mengen Λ_i und $\tilde{\Lambda}_i$ erhalten wir

$$\begin{aligned} n^{-n} \sum_k E \max_{1 \leq i \leq n} |x_i \zeta_i(k) X_i(\omega)| &= \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Lambda_i} |x_i \zeta_i(k) X_i| dP(\omega) d\mu(k) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\tilde{\Lambda}_i} |x_i \zeta_i(k) X_i| dP(\omega) d\mu(k). \end{aligned}$$

Da außerdem gilt $\tilde{\Lambda}_i \subseteq \bigcup\limits_{l=1}^{n} \left(\{k | \zeta_i(k) = z_l\} \times \bigcup\limits_{j=1}^{j_{i,l}} \Omega_j^i \right)$, folgt

$$\begin{aligned} n^{-n} \sum_k E \max_{1 \leq i \leq n} |x_i \zeta_i(k) X_i(\omega)| &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} |x_i z_l| \int\limits_{\bigcup_{j=1}^{j_{i,l}} \Omega_j^i} |X_i(\omega)| dP(\omega) \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} |x_i z_l| \sum_{j=1}^{j_{i,l}} y_j^i. \end{aligned}$$

Da außerdem gilt $2n^2 \geq \sum\limits_{i,l=1}^{n} j_{i,l}$, folgt schließlich

$$n^{-n} \sum_k E \max_{1 \leq i \leq n} |x_i \zeta_i(k) X_i(\omega)| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{2n^2} s_i(x, y, z) \leq \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n^2} s_i(x, y, z). \quad \square$$

An dieser Stelle kommen wir zu dem Beweis von Proposition 3.0.9 und schließen damit den Beweis unseres Hauptsatzes in diesem Abschnitt, Satz 3.0.8, ab.

Beweis. (Proposition 3.0.9) Für alle $m = 1, ..., n^3$ sei t_m die fallende Anordnung der Zahlen

$$\left| x_i y_j^l \underbrace{\left((N_l^*)^{-1} \left(\frac{k}{n} \right) - (N_l^*)^{-1} \left(\frac{k-1}{n} \right) \right)}_{z_k^l} \right|, \qquad i, j, k = 1, ..., n.$$

Aufgrund der Definition der s_k^l existieren Zahlen $k_i \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{i=1}^{n} k_i = n$ so, dass gilt

$$\sum_{l=1}^{n^2} t_l = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \sum_{l=1}^{k_i} s_l^i,$$

wobei $\sum_{l=1}^{0} s_l^i = 0$ für alle $i = 1, ..., n$. Außerdem gilt für alle $m_i \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{i=1}^{n} m_i = n^2$

$$\sum_{l=1}^{n^2} t_l \geq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \sum_{l=1}^{m_i} s_l^i,$$

also folgt aufgrund der Definition 2.1.9

$$\sum_{l=1}^{n^2} t_l = \|x\|_s .$$

Nach Lemma 3.0.12 gilt

$$\|(x_i X_i)_{i=1}^n\|_z \leq \frac{1}{c_n} n^{-n+1} \sum_{1 \leq k_1, ..., k_n \leq n} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i X_i z_{k_i}^i|$$

und damit aufgrund der Monotonie und Linearität des Erwartungswerts

$$E \|(x_i X_i)_{i=1}^n\|_z \leq \frac{1}{c_n} n^{-n+1} \sum_{1 \leq k_1, ..., k_n \leq n} E \max_{1 \leq i \leq n} |x_i X_i z_{k_i}^i|.$$

Nach Lemma 3.0.14 gilt

$$n^{-n} \sum_{1 \le k_1,\dots,k_n \le n} E \max_{1 \le i \le n} |x_i X_i z_{k_i}| \le \frac{2}{n} \sum_{l=1}^{n^2} t_l$$

und damit zusammengefasst

$$E \left\| (x_i X_i)_{i=1}^n \right\|_z \le \frac{2}{c_n} \sum_{l=1}^{n^2} t_l = \frac{2}{c_n} \|x\|_s .$$

Nun kommen wir zum zweiten Teil der Proposition, hierfür seien $X_1, ..., X_n$ unabhängig. Dann gilt mit Lemma 3.0.13

$$E \left\| (x_i X_i)_{i=1}^n \right\|_z \ge n^{-n+1} \sum_{j_1,\dots,j_n=1}^{n} \left\| \left(x_i y^i_{j_i} \right) \right\|_z .$$

Dann gilt mit Lemma 3.0.12

$$E \left\| (x_i X_i)_{i=1}^n \right\|_z \ge n^{-2n+2} \sum_{\substack{1 \le k_1,\dots,k_n \le n \\ 1 \le j_1,\dots,j_n \le n}} \max_{1 \le i \le n} |x_i y^i_{j_i} z_{k_i}|$$

und nach Lemma 3.0.11

$$E \left\| (x_i X_i)_{i=1}^n \right\|_z \ge \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n^2} t_l = \frac{1}{2} \|x\|_s .$$

$\square$

3.1 Abschätzung des Erwartungswertes vom Maximum unabhängiger Zufallsgrößen

In diesem Abschnitt gehen wir darauf ein, wie wir das Resultat aus Satz 3.0.8 anwenden können, um $\int \max_{i=1,..,n} |x_i X_i|$ abzuschätzen. Außerdem geben wir eine alternative Darstellung der Orliczfunktionen an, die sich für die Anwendungen häufig besser eignet. Zunächst kommen wir zu der Abschätzung des Erwartungswertes des Maximums:

Satz 3.1.1. *Es seien $X_1, ..., X_n$ unabhängig und $M_1, ..., M_n$ seien Orliczfunktionen so, dass für alle $i, k = 1, ..., n$ gilt*

$$M_i^* \left(\sum_{j=1}^{k} y_j^i \right) = \frac{k}{n},$$

wobei y_j^i wie in (3.3) gegeben ist. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$c_1 \|x\|_{(M_i)_i} \leq E \max_{1 \leq i \leq n} |x_i X_i| \leq c_2 \|x\|_{(M_i)_i},$$

wobei c_1 und c_2 absolute positive Konstanten sind.

Der Beweis dieses Satzes verläuft analog zu dem Beweis von Korollar 2 aus [5], wir geben ihn der Vollständigkeit halber an dieser Stelle an:

Beweis. Entsprechend dem Beweis von Korollar 2 aus [5] wählen wir p so groß, dass die l_p^n-Norm die l_∞^n-Norm gut approximiert (zum Beispiel p=n). Dann betrachten wir $N_i(t) = t^p$, $i = 1, ..., n$. Es sei $t > 0$ und $i = 1, ..., n$, dann gilt

$$N_i^{'}(t) = pt^{p-1}$$

und damit

$$\left(N_i^{'} \right)^{-1}(t) = \left(\frac{t}{p} \right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Somit erhalten wir

$$N_i^*(t) = \int_0^t \left(N_i^{'} \right)^{-1}(s)ds = \int_0^t \left(\frac{s}{p} \right)^{\frac{1}{p-1}} ds = p^{-\frac{1}{p-1}} \left(1 - \frac{1}{p} \right) t^{1+\frac{1}{p-1}}.$$

Folglich gilt

$$\left(N_i^* \right)^{-1}(t) = p^{\frac{1}{p}} \left(\frac{p}{p-1} \right)^{\frac{p-1}{p}} t^{1-\frac{1}{p}},$$

also insbesondere

$$\left(N_i^* \right)^{-1} \left(\frac{j}{n} \right) - \left(N_i^* \right)^{-1} \left(\frac{j-1}{n} \right) = p^{\frac{1}{p}} \left(\frac{p}{p-1} \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\left(\frac{j}{n} \right)^{1-\frac{1}{p}} - \left(\frac{j-1}{n} \right)^{1-\frac{1}{p}} \right).$$

Außerdem gilt

$$\left((N_i^*)^{-1}\right)'(t) = p^{\frac{1}{p}} \left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(1-\frac{1}{p}\right) t^{-\frac{1}{p}}$$

und

$$(N_i^*)^{-1}\left(\frac{j}{n}\right) - (N_i^*)^{-1}\left(\frac{j-1}{n}\right) = \frac{1}{n} \frac{(N_i^*)^{-1}\left(\frac{j}{n}\right) - (N_i^*)^{-1}\left(\frac{j-1}{n}\right)}{\frac{j}{n} - \frac{j-1}{n}}.$$

Es folgt also mit dem Mittelwertsatz

$$p^{\frac{1}{p}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} n^{-1+\frac{1}{p}} j^{-\frac{1}{p}} \leq (N_i^*)^{-1}\left(\frac{j}{n}\right) - (N_i^*)^{-1}\left(\frac{j-1}{n}\right) \leq p^{\frac{1}{p}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} n^{-1+\frac{1}{p}} (j-1)^{-\frac{1}{p}}.$$

Für genügend große p und alle $i, j = 1, ..., n$ folgt

$$\frac{1}{n} \leq (N_i^*)^{-1}\left(\frac{j}{n}\right) - (N_i^*)^{-1}\left(\frac{j-1}{n}\right) \leq \frac{2}{n}.$$

Für alle $l = 1, ..., n$ seien $(s_k^l)_{k=1}^{n^2}$ wie in Satz 3.0.8, das heißt $(s_k^l)_{k=1}^{n^2}$ sei die fallende Anordnung der

$$\left| y_i^l \left((N_l)^{*-1}\left(\frac{j}{n}\right) - (N_l)^{*-1}\left(\frac{j-1}{n}\right)\right)\right|, \qquad i, j = 1, ..., n.$$

Es folgt für $m = kn$ und für alle $l = 1, ..., n$

$$\sum_{i=1}^{k} y_i^l \leq \sum_{i=1}^{m} s_i^l \leq 2 \sum_{i=1}^{k} y_i^l$$

und damit mit Satz 3.0.8 die Behauptung. □

An dieser Stelle kommen wir zu einer alternativen Darstellung der Orliczfunktionen, die sich im Folgenden als sehr hilfreich herausstellen wird. Bis jetzt haben wir die Orliczfunktionen $M_1, ..., M_n$ über ihre duale Funktion definiert, das heißt, wie in Satz 3.1.1, haben wir gefordert, dass für alle $i, k = 1, ..., n$ gilt

$$M_i^*\left(\sum_{j=1}^{k} y_j^i\right) = \frac{k}{n}.$$

Mit Hilfe des Folgenden können wir die Orliczfunktionen direkt angeben, was in der Anwendung unseres Resultates im Weiteren von großer Bedeutung ist. Die Idee und die

Aussage von Lemma 3.1.4 finden sich bereits in [4], wir geben den Beweis an dieser Stelle der Vollständigkeit halber nochmals an. In Satz 3.1.5 geben wir dann als Anwendung eine direkte Verallgemeinerung eines Resultates aus [4] für unsere Situation.

Definition 3.1.2. Es sei X eine Zufallsgröße mit $E|X| < \infty$, dann definieren wir

$$M(s) = \int_0^s \int_{\frac{1}{t} \leq |X|} |X| dP dt.$$

M ist eine Orliczfunktion und wir nennen sie die **zu X gehörige Orliczfunktion**.

Bemerkung 3.1.3. Es sei X eine Zufallsgröße mit $E|X| < \infty$ und M wie in Definition 3.1.2.

(i) M ist stetig und es gilt offenbar $M(0) = 0$. Da die Funktion $t \mapsto \int_{\frac{1}{t} \leq |X|} |X| dP$ monoton wachsend ist, ist M konvex. Somit ist durch M eine Orliczfunktion gegeben.

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned} M(s) &= \int_0^s \int_{\frac{1}{t} \leq |X|} |X| dP dt = \int_0^s \int_\Omega 1_{\frac{1}{t} \leq |X|} |X| dP dt \\ &= \int_0^s E\left(1_{\frac{1}{t} \leq |X|} |X|\right) dt = \int_0^s \int_0^\infty P\left(1_{\frac{1}{t} \leq |X|} |X| \geq u\right) du dt \\ &= \int_0^s \left(\frac{1}{t} P\left(|X| \geq \frac{1}{t}\right) + \int_{\frac{1}{t}}^\infty P\left(|X| \geq u\right) du \right) dt. \end{aligned}$$

Lemma 3.1.4. *Es sei X eine Zufallsgröße mit $E|X| < \infty$ und M die zugehörige Orliczfunktion. Die zugehörige duale Funktion M^* ist auf $\left[0, \int |X| dP\right]$ gegeben durch*

$$M^* \left(\int_{t \leq |X|} |X| dP \right) = P(|X| \geq t)$$

und für alle $s > \int |X| dP$ durch $M^*(s) = \infty$.

Beweis. Nach Definition der dualen Funktion gilt

$$\begin{aligned}M^*(s) &= \sup_{0\le w}(ws - M(w)) = \sup_{0\le w}\left(ws - \int\limits_0^w \int\limits_{\frac{1}{u}\le|X|} |X|dPdu\right)\\ &= \sup_{0\le w}\left(\int\limits_0^w \left(s - \int\limits_{\frac{1}{u}\le|X|} |X|dP\right) du\right).\end{aligned}$$

Falls $s > \int |X|dP$, dann gilt

$$\sup_{0\le w}\left(\int\limits_0^w \left(s - \int\limits_{\frac{1}{u}\le|X|} |X|dP\right) du\right) = \infty.$$

Es sei $t \ge 0$, dann setzen wir $s = \int\limits_{t\le|X|} |X|dP$ und betrachten die Funktion

$$\phi(w) = \int_0^w \left(s - \int\limits_{\frac{1}{u}\le|X|} |X|dP\right) du.$$

ϕ ist steigend im Intervall $[0, \frac{1}{t}]$ und fallend im Intervall $[\frac{1}{t}, \infty)$. Also gilt

$$M^*(s) = \sup_{0\le w}\phi(w) = \phi\left(\frac{1}{t}\right) = \int_0^{\frac{1}{t}} \int\limits_{t\le|X|<\frac{1}{u}} |X|dPdu.$$

Folglich gilt

$$M^*(s) = \int\limits_{t\le|X|} \int\limits_0^{\frac{1}{|X|}} |X|dudP = \int\limits_{t\le|X|} dP = P(|X| \ge t).$$

$\square$

Satz 3.1.5. *Es seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige, intergierbare Zufallsgrößen und $M_1, ..., M_n$ seien die zu $X_1, ..., X_n$ gehörigen Orliczfunktionen. Das heißt für alle $s \geq 0$ und $i = 1, ..., n$ sei*

$$M_i(s) = \int_0^s \int\limits_{\frac{1}{t} \leq |X_i|} |X_i| dP dt.$$

Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$c_1 \|x\|_{(M_i)_i} \leq E \max_{1 \leq i \leq n} |x_i X_i| \leq c_2 \|x\|_{(M_i)_i},$$

wobei c_1 und c_2 absolute positive Konstanten sind.

Beweis. Nach Definition der t_k^i, $i, k = 1, ..., n$, in (3.1) bzw. der y_j^i, $i, j = 1, ..., n$, in (3.3) gilt für alle $i, k = 1, ..., n$

$$\sum_{j=1}^k y_j^i = \int_{t_k^i \leq |X_i|} |X_i| dP$$

und

$$P(t_k^i \leq X_i) = \frac{k}{n}.$$

Somit erfüllen die Orliczfunktion M_i^*, die definiert sind durch

$$M_i^* \left(\int\limits_{t \leq |X_i|} |X_i| dP \right) = P(t \leq |X_i|),$$

die Bedingungen von Satz 3.1.1 und nach Lemma 3.1.4 ist die zu M_i^* duale Funktion

$$M_i(s) = \int\limits_0^s \int\limits_{\frac{1}{t} \leq |X_i|} |X_i| dP dt.$$

Folglich können wir Satz 3.1.1 anwenden und erhalten

$$c_1 \|x\|_{(M_i)_i} \leq E \max_{1 \leq i \leq n} |x_i X_i| \leq c_2 \|x\|_{(M_i)_i},$$

wobei wir die entsprechenden M_i nun ausschließlich durch Kenntnis der zugrunde liegenden Verteilung bestimmen können. □

3.2 Anwendung auf Zufallsmatrizen

In diesem Abschnitt zeigen wir, wie wir das Ergebnis aus Korollar 3.1.1 beziehungsweise aus Satz 3.1.5 im Zusammenhang mit singulären Zahlen von Zufallsmatrizen anwenden können. Hierfür seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige, integrierbare Zufallsgrößen. Wir betrachten in diesem Abschnitt Diagonalmatrizen, also Matrizen der Gestalt

$$X = \mathrm{diag}(X_1, ..., X_n).$$

In diesem Fall gilt

$$E(s_1(X)) = \int_\Omega \|X(\omega)\|_{l_2^n \to l_2^n} \, dP(\omega) = \int_\Omega \max_{i=1,\dots,n} |X_i(\omega)| \, dP(\omega).$$

Um Aussagen über den Erwartungswert der größten singulären Zahl von X zu machen, genügt es also, die in Satz 3.1.5 angegebenen Orliczfunktionen für die jeweils zugrunde liegenden Verteilungen zu bestimmen. Allgemein gilt somit

$$E(s_1(X)) \sim \|(1)_{i=1}^n\|_{(M_i)_i},$$

wobei für alle $i = 1, ..., n$ zusammen mit Bemerkung 3.1.3 gilt

$$\begin{aligned} M_i(s) &= \int_0^s \int_{\frac{1}{t} \le |X_i|} |X_i| dP dt \\ &= \int_0^s \left(\frac{1}{t} P\left(|X_i| \ge \frac{1}{t} \right) + \int_{\frac{1}{t}}^\infty P\left(|X_i| \ge u\right) du \right) dt. \end{aligned}$$

Wir interessieren uns speziell für normalverteilte Einträge. In Kapitel 4.1 geben wir für beliebige normalverteilte Einträge eine gut handhabbare Darstellung der Orliczfunktion an, sodass wir den Diagonalfall als Spezialfall erhalten, deshalb gehen wir an dieser Stelle nicht näher auf die genauere Bestimmung der Orliczfunktion ein.

Wir merken noch an, dass sich der Spezialfall einer Diagonalmatrix mit normalverteilten Einträgen bereits vollständig mit den Ergebnissen aus [5] lösen lässt. Um dies einzusehen seien $\tilde{g}_i \sim N(0, \sigma_i^2)$, $\sigma_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$ und es seien weiterhin $g_i \sim N(0,1)$, dann gilt

$$E\left(s_1\left(\operatorname{diag}(\tilde{g}_1, ..., \tilde{g}_n)\right)\right) = E \max_{i=1,...,n} |\tilde{g}_i| = E \max_{i=1,...,n} |\sigma_i g_i|.$$

In dieser Situation sind die Zufallsgrößen $g_1, ..., g_n$ identisch verteilt und damit erhalten wir mit den Ergebnissen aus [5]

$$E\left(s_1\left(\operatorname{diag}(\tilde{g}_1, ..., \tilde{g}_n)\right)\right) \sim \left\|(\sigma_i)_{i=1}^n\right\|_M,$$

mit

$$M(s) = \int_0^s \int_{\frac{1}{t} \leq |g_1|} |g_1| dP dt.$$

Wenn wir Satz 3.1.5 verwenden, erhalten wir

$$E\left(s_1\left(\operatorname{diag}(\tilde{g}_1, ..., \tilde{g}_n)\right)\right) \sim \left\|(1)_{i=1}^n\right\|_{(M_i)_i}$$

mit

$$M_i(s) = \int_0^s \int_{\frac{1}{t} \leq |\tilde{g}_i|} |\tilde{g}_i| dP dt = \int_0^s \int_{\frac{1}{t} \leq |\sigma_i g_i|} |\sigma_i g_i| dP dt$$

für alle $i = 1, ..., n$. Es gilt

$$\left\|(1)_{i=1}^n\right\|_{(M_i)_i} = \left\|(\sigma_i)_{i=1}^n\right\|_M$$

und wir erhalten die gleichen Resultate. Für beliebige normalverteilte Zufallsmatrizen benötigen wir unser allgemeines Resultat aus Satz 3.1.5, denn im Allgemeinen ist das Resultat aus [5] für identisch verteilte Zufallsgrößen nicht ausreichend. Es sei noch angemerkt, dass dies auch im Allgemeinen für Diagonalmatrizen nicht ausreichend ist.

Kapitel 4

Erwartungswert der größten singulären Zahl von Zufallsmatrizen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der größten singulären Zahl von Zufallsmatrizen. Da es sich dabei um eine Zufallsgröße handelt, sind Aussagen über diese naturgemäß stochastisch ausgedrückt. Wir interessieren uns speziell für den Erwartungswert der größten singulären Zahl einer Zufallsmatrix. Für alle $i, j = 1, ..., n$ seien X_{ij} unabhängige, integrierbare Zufallsgrößen, und es sei $X = (X_{ij})_{i,j=1}^n$. Unser Interesse gilt somit einer Abschätzung der Größenordnung von

$$E(s_1(X)) = \int\limits_\Omega \left(\|X(\omega)\|_{2\to 2}\right) dP(\omega) = \int\limits_\Omega \left(\sup_{\substack{\|x\|_2=1 \\ \|y\|_2=1}} \sum_{i,j=1}^n X_{ij}(\omega) x_j y_i \right) dP(\omega).$$

Wie in der Einleitung erwähnt, wird in [17] und [1] im Fall identisch verteilter Einträge mit beschränkten vierten Momenten gezeigt, dass mit großer Wahrscheinlichkeit gilt

$$s_1(X) \sim \sqrt{n}.$$

Wir interessieren uns im Fall nicht identisch verteilter Einträge für die Größenordnung von $E(s_1(X))$. Die in den Abschätzungen auftretenden Konstanten sollen dabei nicht von der Größe der Matrix n und von verteilungskennzeichnenden Parametern abhängen. Im Abschnitt 4.2 dieses Kapitels geben wir eine untere und eine obere Abschätzung von $E(s_1(X))$ für den allgemeinen Fall unabhängiger, nicht notwendigerweise identisch verteilter Einträge, die überdies zentriert sind und beschränkte zweite Momenten haben, an. In Abschnitt 4.1 beschäftigen wir uns zunächst mit dem Spezialfall normalverteilter Einträge. Die in diesem Fall erzielten Ergebnisse verwenden wir, um in Abschnitt 4.2 Aussagen über den Erwartungswert der größten singulären Zahl beliebiger Zufallsmatrizen zu machen, in dem wir diese Situation auf den Fall normalverteilter Einträge zurückführen. Die Aussagen aus 4.1 stellen allerdings auch ein für sich interessantes Ergebnis dar, wie wir unter anderem im Vergleich mit den Resultaten von R. Latala aus [10] sehen.

4.1 Normalverteilte Einträge

Wir beschäftigen uns in diesem ersten Abschnitt mit dem Spezialfall normalverteilter Einträge; für alle $i, j = 1, ..., n$ seien $a_{ij} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $g_{ij} \sim N(0,1)$ unabhängig. Wir sind an der Größenordnung von $E(s_1((a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n))$ interessiert, es gilt also

$$E(s_1((a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n)) = \int\limits_{\Omega} \left(\sup_{\substack{\|x\|_2=1 \\ \|y\|_2=1}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}g_{ij}(\omega)x_j y_i \right) dP(\omega)$$

abzuschätzen.

Zunächst fassen wir im ersten Teilabschnitt 4.1.1 unsere Ergebnisse, die wir im Folgenden erhalten, zusammen und geben Beispiele dazu an. Die Beweise folgen in den Abschnitten 4.1.2 bis 4.1.4. Wir referieren kurz bekannte Resultate für die Größenordnung des Erwartungswertes normalverteilter Zufallsmatrizen und zeigen, was unser Ergebnis in diesen Fällen liefert. Im Anschluss gehen wir auf das Ergebnis von R. Latala aus [10] ein und grenzen unseres durch Beispiele von seinem ab. Daran sehen wir ebenfalls, wie gut handhabbar unser Resultat ist.

Im Anschluss gehen wir in 4.1.2 auf die untere Abschätzung von $E(s_1((a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n))$ und die Anwendung von Satz 3.1.5 ein. In Teilabschnitt 4.1.3 berechnen wir die aus Satz 3.1.5 resultierende Orliczfunktion, wobei das entscheidende Hilfsmittel die Konzentrationseigenschaft normalverteilter Zufallsgrößen aus Satz 2.2.2 ist. Ferner untersuchen wir die durch diese Orliczfunktion gegebene Orlicznorm genauer. Im Anschluss, in 4.1.4, wenden wir uns dann der oberen Abschätzung von $E(s_1((a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n))$ zu, bei der ebenfalls die Konzentrationseigenschaft normalverteilter Zufallsgrößen entscheidend ist. Wir führen nicht direkt die obere Abschätzung des Erwartungswertes von $s_1((a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n)$ durch, sondern geben zunächst eine obere Abschätzung der Zufallsgröße $s_1((a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n)$ mit großer Wahrscheinlichkeit an und leiten hieraus eine Aussage über den Erwartungswert ab.

4.1.1 Ergebnisse für normalverteilte Zufallsgrößen

Wie zu Beginn erwähnt, sind wir an der Größenordnung von

$$E\left(s_1\left((a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right)\right) = E\left(\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2}\right) = \int_\Omega \left(\sup_{\substack{\|x\|_2=1\\ \|y\|_2=1}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}g_{ij}(\omega)x_jy_i\right) dP(\omega)$$

interessiert, wobei $a_{ij} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $g_{ij} \sim N(0,1)$ unabhängig, $i,j = 1,...,n$. Wir erhalten im Folgenden unser Hauptresultat:

Satz 4.1.1. *Für alle $i,j = 1,...,n$ seien $a_{ij} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $g_{ij} \sim N(0,1)$ unabhängig, dann gilt*

(i) $E\left(\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2}\right) \gtrsim E\left(\max_{i=1,...,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right) + E\left(\max_{j=1,...,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\right\|_2\right)$,

$E\left(\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2}\right) \lesssim (\ln(n))^{\frac{3}{2}}\left(E\left(\max_{i=1,...,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right) + E\left(\max_{j=1,...,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\right\|_2\right)\right)$.

(ii) $E\left(\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2}\right) \gtrsim \max_{i=1,...,n}\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2 + \max_{j=1,...,n}\left\|(a_{ij})_{i=1}^n\right\|_2$,

$E\left(\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2}\right) \lesssim (\ln(n))^2\left(\max_{i=1,...,n}\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2 + \max_{j=1,...,n}\left\|(a_{ij})_{i=1}^n\right\|_2\right)$.

(iii) Falls für alle $i,j = 1,...,n$ gilt $a_{ij} \in \{0,1\}$, so gilt

$$\begin{aligned}
&\max\left\{\sqrt{\left|\ln\left(\sum_{i=1}^n \max_{j=1,...,n} a_{ij}\right)\right|}, \max_{i=1,...,n}\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right\} \\
&\qquad\qquad + \max\left\{\sqrt{\left|\ln\left(\sum_{j=1}^n \max_{i=1,...,n} a_{ij}\right)\right|}, \max_{j=1,...,n}\left\|(a_{ij})_{i=1}^n\right\|_2\right\} \\
&\lesssim E\left(\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2}\right) \\
&\lesssim (\ln(n))^{\frac{3}{2}}\left(\max\left\{\sqrt{\left|\ln\left(\sum_{i=1}^n \max_{j=1,...,n} a_{ij}\right)\right|}, \max_{i=1,...,n}\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right\}\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \max\left\{\sqrt{\left|\ln\left(\sum_{j=1}^n \max_{i=1,...,n} a_{ij}\right)\right|}, \max_{j=1,...,n}\left\|(a_{ij})_{i=1}^n\right\|_2\right\}\right).
\end{aligned}$$

Bemerkung 4.1.2. Falls m Spalten der normalverteilten Zufallsmatrix 0 sind, das heißt, falls $j_1, ..., j_m \in \{1, ..., n\}$ existieren so, dass für alle $i = 1, ..., n$ und $l = 1, ..., m$ gilt $a_{ij_l} = 0$, so erhalten wir statt $(\ln(n))^{\frac{3}{2}}$ entsprechend $(\ln(n-m))^{\frac{3}{2}}$ im vorherigen Satz.

Wir haben bis auf $\ln(n)^2$ die Größenordnung der größten singulären Zahl normalverteilter Zufallsmatrizen bestimmt, wobei der relevante Ausdruck der Größenordnung gerade durch $\max\limits_{j=1,...,n} \|(a_{ij})_{i=1}^n\|_2$, bzw. $\max\limits_{i=1,...,n} \left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2$ gegeben ist und sich damit sehr einfach berechnen lässt. Es sind nur die euklidische Norm der Spalten- und Zeilenvektoren zu bestimmen und dann jeweils die größten zu wählen.

Wir betrachten nun einige Beispiele. Zunächst vergleichen wir unser Resultat mit den bekannten, denn für spezielle $a_{ij},\ i, j = 1, ..., n$ kennen wir die korrekte Größenordnung bereits. So gilt nach [5] und [2], wie in der Einleitung erwähnt:

(i) Es sei $k \in \{1, ..., n\}$ und für alle $i, j = 1, ..., k$ sei $a_{ij} = 1$, und sonst sei $a_{ij} = 0$, dann gilt

$$E\left(s_1\left((a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right)\right) \sim \sqrt{k}.$$

(ii) Es sei $k \in \{1, ..., n\}$ und für alle $i, j = 1, ...k$ sei $a_{ij} = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j, \end{cases}$ und sonst sei $a_{ij} = 0$, dann gilt

$$E\left(s_1\left((a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right)\right) \sim \sqrt{\ln(k)}.$$

(iii) Für alle $i, j = 1, ..., n$ seien $b_i, c_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $a_{ij} = b_i c_j$, dann gilt

$$E\left(s_1\left((a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right)\right) \sim \|(b_i)_{i=1}^n\|_2 \|(c_i)_{i=1}^n\|_\infty + \|(b_i)_{i=1}^n\|_\infty \|(c_i)_{i=1}^n\|_2 .$$

Im folgenden Beispiel fassen wir zusammen, was Satz 4.1.1 in diesen Situationen liefert:

Beispiel 4.1.3.

(i) Es sei $k \in \{1, ..., n\}$ und für alle $i, j = 1, ...k$ sei $a_{ij} = 1$, und sonst sei $a_{ij} = 0$, dann gilt mit Satz 4.1.1, beziehungsweise Bemerkung 4.1.13

$$E\left(s_1\left((a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right)\right) \gtrsim \sqrt{k}$$

und

$$E\left(s_1\left((a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right)\right) \lesssim (\ln(k))^{\frac{3}{2}}\sqrt{k}.$$

(ii) Es sei $k \in \{1,...,n\}$ und für alle $i,j = 1,...k$ sei $a_{ij} = \begin{cases} 1 & ,i=j \\ 0 & ,i \neq j, \end{cases}$ und sonst sei $a_{ij} = 0$, dann gilt mit Satz 4.1.1, beziehungsweise Bemerkung 4.1.13

$$E\left(s_1\left((a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right)\right) \gtrsim \sqrt{\ln(k)}$$

und

$$E\left(s_1\left((a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right)\right) \lesssim (\ln(k))^2.$$

(iii) Für alle $i,j = 1,...,n$ seien $b_i, c_i \in \mathbb{R}_{>0}$ und $a_{ij} = b_i c_j$, dann gilt nach Satz 4.1.1

$$\begin{aligned}
&\|(b_i)_{i=1}^n\|_\infty \left\|(c_j)_{j=1}^n\right\|_2 + \left\|(c_j)_{j=1}^n\right\|_\infty \|(b_i)_{i=1}^n\|_2 = \max_{i=1,\ldots,n}\left\|(b_ic_j)_{j=1}^n\right\|_2 + \max_{j=1,\ldots,n}\|(b_ic_j)_{i=1}^n\|_2 \\
&\lesssim E\left(s_1\left((b_ic_jg_{ij})_{i,j=1}^n\right)\right) \\
&\lesssim (\ln(n))^2\left(\max_{i=1,\ldots,n}\left\|(b_ic_j)_{j=1}^n\right\|_2 + \max_{j=1,\ldots,n}\|(b_ic_j)_{i=1}^n\|_2\right) \\
&= (\ln(n))^2\left(\|(b_i)_{i=1}^n\|_\infty \left\|(c_j)_{j=1}^n\right\|_2 + \left\|(c_j)_{j=1}^n\right\|_\infty \|(b_i)_{i=1}^n\|_2\right).
\end{aligned}$$

Wir stellen fest, dass wir in den bekannten Situation "nahezu" identisch verteilter Einträgen zwar einen logarithmischen Fehler machen, unser Ergebnis bis auf diesen allerdings die korrekte Größenordnung liefert.

Im Gegensatz dazu erhält R. Latala in [10] für eine $N(0,1)$-Diagonalmatrix als obere Schranke $n^{\frac{1}{4}}$, wir erhalten als untere Schranke $\sqrt{\ln(n)}$ und als obere $(\ln(n))^2$, was deutlich besser die korrekte Größenordnung von $\sqrt{\ln(n)}$ widerspiegelt. Um unser Ergebnis von [10] abzugrenzen und aufzuzeigen, wie gut handhabbar unser Resultat ist, erinnern wir zunächst an den Hauptsatz aus [10] und betrachten danach zwei weitere Beispiele. R. Latala zeigt:

Für alle $i,j = 1,...,n$ seien $a_{ij} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und g_{ij} unabhängige standardnormalverteilte Zufallsgrößen, dann gilt

$$E\left(\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2}\right) \lesssim \max_{i=1,\ldots,n}\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2 + \max_{j=1,\ldots,n}\|(a_{ij})_{i=1}^n\|_2 + \left\|(a_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_4.$$

Beispiel 4.1.4.

(i) Es seien $a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1, a_0, a_{-1}, ..., a_{-n+1} \in \mathbb{R}_{>0}$ und für alle $i, j = 1, ..., n$ seien weiterhin $g_{ij} \sim N(0,1)$ unabhängig. Wir betrachten den Erwartungswert der größten singulären Zahl der normalverteilten Toeplitz - Zufallsmatrix

$$TG = \begin{pmatrix} a_0 g_{11} & a_{-1} g_{12} & a_{-2} g_{13} & \cdots & a_{-n+1} g_{1n} \\ a_1 g_{21} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \\ a_{n-1} g_{n1} & & \cdots & & a_0 g_{nn} \end{pmatrix}.$$

Es seien $a_{n-1} \geq a_{n-2} \geq \cdots \geq a_{-n+1} > 0$, dann gilt nach Satz 4.1.1

$$\left\| (a_i)_{i=0}^{n-1} \right\|_2 \lesssim E(s_1(TG)) \lesssim (\ln(n))^2 \left\| (a_i)_{i=0}^{n-1} \right\|_2.$$

Um nun unser Ergebnis von den Resultaten aus [10] abzugrenzen, betrachten wir eine spezielle Wahl von $a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1, a_0, a_{-1}, ..., a_{-n+1} \in \mathbb{R}_{>0}$, so seien

$$a_0 = 1, a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, ..., a_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ und } a_{-1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}, a_{-2} = \frac{1}{\sqrt{n+2}}, ..., a_{-n+1} = \frac{1}{\sqrt{2n-1}}.$$

Um $E(s_1(TG))$ zu bestimmen, ist nach Satz 4.1.1 das Maximum der 2-Norm der Zeilen- bzw. Spaltenvektoren der Varianzmarix

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots & a_{-n+1} \\ a_1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & \\ a_{n-1} & & \cdots & & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{n+1}} & \frac{1}{\sqrt{n+2}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen, dieses ergibt sich zu

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \right)^{\frac{1}{2}} \sim \sqrt{\ln(n)}.$$

Mit Satz 4.1.1 erhalten wir also

$$\sqrt{\ln(n)} \lesssim E(s_1(TG)) \lesssim (\ln(n))^{\frac{5}{2}}.$$

Dieses vergleichen wir mit dem Ergebnis aus [10]; für beliebige $a_{ij} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $i, j = 1, ..., n$ gilt

$$E\left(s_1\left((a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right)\right) \lesssim \max_{i=1,...,n} \left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2 + \max_{j=1,...,n} \|(a_{ij})_{i=1}^n\|_2 + \left\|(a_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_4 .$$

In unserer Situation ergibt sich durch Betrachten der Hauptdiagonalen

$$\left\|(a_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_4 \geq n^{\frac{1}{4}}.$$

Damit liefert dieses Resultat als obere Schranke mindestens $n^{\frac{1}{4}}$ und mit Satz 4.1.1 erhalten wir die bessere Abschätzung

$$\sqrt{\ln(n)} \lesssim E(s_1(TG)) \lesssim (\ln(n))^{\frac{5}{2}}.$$

(ii) Als zweites betrachten wir normalverteilte Permutationszufallsmatrizen. Für alle $i = 1, ..., n$ seien $a_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $g_i \sim N(0, 1)$ unabhängig und e_i die Standardeinheitsvektoren im $\mathbb{R}^n$ und $\pi : \{1, ..., n\} \rightarrow \{1, ..., n\}$ eine Permutation. Dann ist eine normalverteilte Permutationszufallsmatrix gegeben durch

$$PG = (a_{\pi(1)}g_{\pi(1)}e_{\pi(1)}, ..., a_{\pi(n)}g_{\pi(n)}e_{\pi(n)}),$$

das heißt der i-te Spaltenvektor der Matrix PG ist $a_{\pi(i)}g_{\pi(i)}e_{\pi(i)}$. Nach Satz 4.1.1 gilt in diesem Fall

$$\max_{i=1,...,n} a_i \lesssim E(s_1(PG)) \lesssim (\ln(n))^2 \max_{i=1,...,n} a_i.$$

Dieses vergleichen wir wieder mit dem Ergebnis aus [10] hiernach gilt für beliebige $a_{ij} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $i, j = 1, ..., n$

$$E\left(s_1\left((a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right)\right) \lesssim \max_{i=1,...,n} \left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2 + \max_{j=1,...,n} \|(a_{ij})_{i=1}^n\|_2 + \left\|(a_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_4 .$$

Damit erhalten wir als obere Schranke $\|(a_i)_{i=1}^n\|_4$, was größer ist als $\|(a_i)_{i=1}^n\|_\infty$. In der speziellen Situation, dass für alle $i = 1, ..., n$ gilt $a_i = 1$, liefert dieses Resultat als obere Schranke $n^{\frac{1}{4}}$, mit unserem Ergebnis erhalten wir allerdings $(\ln(n))^2$.

4.1.2 Untere Abschätzung

Wie bereits eingangs erwähnt, wollen wir

$$E(s_1((a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n)) = \int_\Omega \left(\sup_{\substack{\|x\|_2=1 \\ \|y\|_2=1}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}g_{ij}(\omega)x_j y_i \right) dP(\omega)$$

abschätzen. An dieser Stelle kommen wir zur unteren Abschätzung von $E(s_1((a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n))$, diese führen wir ganz allgemein durch, denn die spezielle Struktur der Normalverteilung ist hierfür nicht notwendig. Das folgende Lemma liefert bereits die untere Abschätzung für den allgemeinen Fall:

Lemma 4.1.5. *Für alle $i, j = 1, ..., n$ seien X_{ij} unabhängige Zufallsgrößen, deren zweite Momente existieren, dann gilt*

$$E(s_1((X_{ij})_{i,j=1}^n)) \gtrsim E\left(\max_{i=1,\dots,n} \left\|(X_{ij})_{j=1}^n\right\|_2 \right) + E\left(\max_{j=1,\dots,n} \|(X_{ij})_{i=1}^n\|_2 \right).$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
E(s_1((X_{ij})_{i,j=1}^n)) &= \int_\Omega \left(\sup_{\substack{\|x\|_2=1 \\ \|y\|_2=1}} \sum_{i,j=1}^n X_{ij}(\omega)x_j y_i \right) dP(\omega) \\
&\geq \int_\Omega \left(\max_{i=1,\dots,n} \sup_{\|x\|_2=1} \sum_{j=1}^n X_{ij}(\omega)x_j \right) dP(\omega) = \int_\Omega \max_{i=1,\dots,n} \left(\sum_{j=1}^n X_{ij}^2(\omega) \right)^{\frac{1}{2}} dP(\omega).
\end{aligned}$$

Insbesondere erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\sup_{\substack{\|x\|_2=1 \\ \|y\|_2=1}} \sum_{i,j=1}^n X_{ij}(\omega)x_j y_i \right) dP(\omega) \\
&\geq \frac{1}{2} \left(\int_\Omega \max_{i=1,\dots,n} \left(\sum_{j=1}^n X_{ij}^2(\omega) \right)^{\frac{1}{2}} dP(\omega) + \int_\Omega \max_{j=1,\dots,n} \left(\sum_{i=1}^n X_{ij}^2(\omega) \right)^{\frac{1}{2}} dP(\omega) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(E\left(\max_{i=1,\dots,n} \left\|(X_{ij})_{j=1}^n\right\|_2 \right) + E\left(\max_{j=1,\dots,n} \|(X_{ij})_{i=1}^n\|_2 \right) \right).
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.1.6. Für alle $i, j = 1, ..., n$ seien $a_{ij} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $g_{ij} \sim N(0,1)$ sämtlich unabhängig, dann gilt insbesondere

$$E(s_1((a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n)) \gtrsim E\left(\max_{i=1,...,n} \left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right) + E\left(\max_{j=1,...,n} \|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\|_2\right).$$

Wie wir im Folgenden sehen, liefert diese elementare untere Abschätzung bereits bis auf einen logarithmischen Faktor die richtige Größenordnung. Bevor wir auf die obere Abschätzung eingehen, untersuchen wir im folgenden Teilabschnitt den Ausdruck

$$\int_\Omega \max_{i=1,...,n} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 g_{ij}^2(\omega)\right)^{\frac{1}{2}} dP(\omega)$$

genauer unter Berücksichtigung der Resultate aus Kapitel 3. Mit Satz 3.1.5 erhalten wir

$$\int_\Omega \max_{i=1,...,n} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 g_{ij}^2(\omega)\right)^{\frac{1}{2}} dP(\omega) \sim \left\|(1)_{j=1}^n\right\|_{(M_i)_i},$$

wobei mit Bemerkung 3.1.3 für alle $i = 1, ..., n$ gilt

$$\begin{aligned} M_i(s) &= \int_0^s \int_{\frac{1}{t} \leq \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} dPdt \\ &= \int_0^s \left\{\frac{1}{t} P\left(\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{t}\right) + \int_{\frac{1}{t}}^\infty P\left(\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq u\right) du\right\} dt. \end{aligned}$$

Diese Orliczfunktionen werden wir folgenden Teilabschnitt detailliert untersuchen:

4.1.3 Berechnung der Orliczfunktion

Lemma 4.1.7. *Für alle* $i, j = 1, ..., n$ *seien* $a_{ij} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$*. Dann ist für alle* $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$N_i(s) = \begin{cases} s \max\limits_{j=1,...,n} a_{ij} e^{-\frac{1}{s^2 \max\limits_{j=1,...,n} a_{ij}^2}} & , s < \frac{1}{\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2} \\ \frac{\max\limits_{j=1,...,n} a_{ij}}{\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2} e^{-\frac{\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2^2}{\max\limits_{j=1,...,n} a_{ij}^2}} + \frac{3}{e} \left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2 \left(s - \frac{1}{\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2}\right) & , s \geq \frac{1}{\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2}. \end{cases}$$

eine Orliczfunktion.

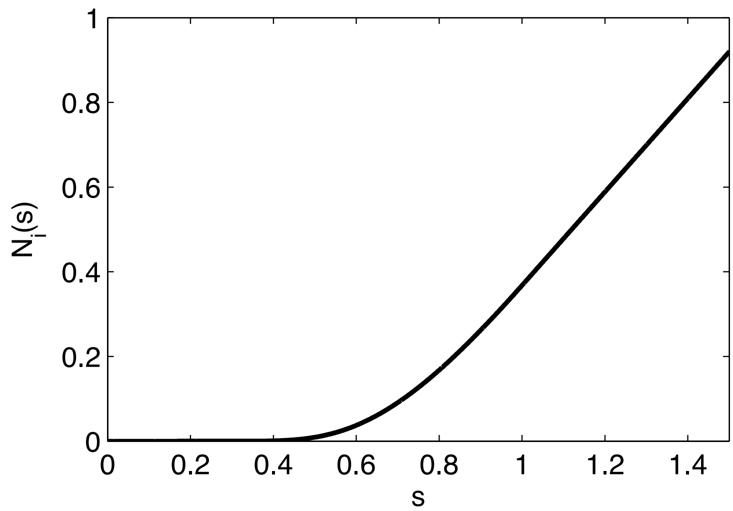

Abbildung 4.1: Orlicz-Funktion N_i im Fall $\max\limits_{j=1,...,n} a_{ij} = 1 = \left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2$, das heißt bei dem Vektor $(a_{ij})_{j=1}^n$ ist eine Komponente 1 und die restlichen Einträge sind 0.

Beweis. Wir betrachten die Funktionen

$$N_i^1(s) = s \max_{j=1,...,n} a_{ij} e^{-\frac{1}{s^2 \max\limits_{j=1,...,n} a_{ij}^2}}$$

und

$$N_i^2(s) = \frac{\max\limits_{j=1,...,n} a_{ij}}{\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2} e^{-\frac{\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2^2}{\max\limits_{j=1,...,n} a_{ij}^2}} + \frac{3}{e} \left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2 \left(s - \frac{1}{\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2}\right).$$

N_i ist stetig, weil N_i^1 und N_i^2 stetig sind und diese in $s = \frac{1}{\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2}$ übereinstimmen.

Des Weiteren gilt

$$\left(N_i^1\right)'(s) = \max_{j=1,\dots,n} a_{ij} e^{-\frac{1}{s^2 \max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}^2}} \left(1 + \frac{2}{s^2 \max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}^2}\right)$$

und

$$\left(N_i^2\right)'(s) = \frac{3}{e} \left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2.$$

Da $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2$, gilt

$$\begin{aligned}\left(N_i^1\right)'\left(\frac{1}{\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2}\right) &= \max_{j=1,\dots,n} a_{ij} e^{-\frac{\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2^2}{\max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}^2}} \left(1 + \frac{2\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2^2}{\max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}^2}\right) \\ &\leq \left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2 e^{-\frac{\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2^2}{\max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}^2}} \frac{3\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2^2}{\max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}^2}\end{aligned}$$

Die Abbildung $x \mapsto 3xe^{-x}$ ist für alle $x \geq 1$ monoton fallend, somit gilt

$$\left(N_i^1\right)'\left(\frac{1}{\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2}\right) \leq \frac{3}{e}\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2 = \left(N_i^2\right)'\left(\frac{1}{\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2}\right).$$

Folglich ist N_i eine konvexe Funktion und damit eine Orliczfunktion. □

An dieser Stelle formulieren und beweisen wir einen unserer Hauptsätze, der uns im Weiteren den entscheidenden Ausdruck für die Größenordnung von $E\left(s_1\left((a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right)\right)$ liefert:

Satz 4.1.8. Für alle $i, j = 1, \dots, n$ seien $a_{ij} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $g_{ij} \sim N(0,1)$ unabhängig. Für alle $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und für alle $i = 1, \dots, n$ sei

$$N_i(s) = \begin{cases} s \max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij} e^{-\frac{1}{s^2 \max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}^2}} & , s < \frac{1}{\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2} \\ \frac{\max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}}{\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2} e^{-\frac{\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2^2}{\max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}^2}} + \frac{3}{e}\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2 \left(s - \frac{1}{\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2}\right) & , s \geq \frac{1}{\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2}, \end{cases}$$

beziehungsweise für alle $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und für alle $j = 1, ..., n$ sei

$$\widetilde{N}_j(s) = \begin{cases} s \max\limits_{i=1,\dots,n} a_{ij} e^{-\frac{1}{s^2 \max\limits_{i=1,\dots,n} a_{ij}^2}} & , s < \frac{1}{\left\|(a_{ij})_{i=1}^n\right\|_2} \\ \frac{\max\limits_{i=1,\dots,n} a_{ij}}{\left\|(a_{ij})_{i=1}^n\right\|_2} e^{-\frac{\left\|(a_{ij})_{i=1}^n\right\|_2^2}{\max\limits_{i=1,\dots,n} a_{ij}^2}} + \frac{3}{e} \left\|(a_{ij})_{i=1}^n\right\|_2 \left(s - \frac{1}{\left\|(a_{ij})_{i=1}^n\right\|_2}\right) & , s \geq \frac{1}{\left\|(a_{ij})_{i=1}^n\right\|_2}. \end{cases}$$

Es gilt

$$E\left(\max_{i=1,\dots,n} \left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right) + E\left(\max_{j=1,\dots,n} \left\|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\right\|_2\right) \gtrsim \left\|(1)_{j=1}^n\right\|_{(c_1 N_i)_i} + \left\|(1)_{i=1}^n\right\|_{(c_2 \widetilde{N}_j)_j}$$

und

$$E\left(\max_{i=1,\dots,n} \left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right) + E\left(\max_{j=1,\dots,n} \left\|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\right\|_2\right) \lesssim \left\|(1)_{j=1}^n\right\|_{(c_3 N_i)_i} + \left\|(1)_{i=1}^n\right\|_{(c_4 \widetilde{N}_j)_j},$$

wobei c_1, c_2, c_3 und c_4 absolute Konstanten bezeichnen.

Bemerkung 4.1.9. Nach Lemma 4.1.7 sind für alle $i, j = 1, ..., n$ die Funktionen N_i, bzw. $\widetilde{N}_j$, Orliczfunktionen und damit sind $\|\cdot\|_{(N_i)_i}$, bzw. $\|\cdot\|_{(\widetilde{N}_j)_j}$, in unserem Sinne, Definition 2.1.6, verallgemeinerte Orlicznormen.

Beweis. (Satz 4.1.8) Nach Satz 3.1.5 gilt

$$E\left(\max_{i=1,\dots,n} \left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right) + E\left(\max_{j=1,\dots,n} \left\|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\right\|_2\right) \sim \left\|(1)_{j=1}^n\right\|_{(M_i)_i} + \left\|(1)_{i=1}^n\right\|_{(\widetilde{M}_j)_j},$$

wobei für alle $i = 1, .., n$ mit Bemerkung 3.1.3 gilt

$$M_i(s) = \int_0^s \left\{ \frac{1}{t} P\left(\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{t}\right) + \int_{\frac{1}{t}}^{\infty} P\left(\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq u\right) du \right\} dt,$$

bzw. für alle $j = 1, ..., n$

$$\widetilde{M}_j(s) = \int_0^s \left\{ \frac{1}{t} P\left(\left(\sum_{i=1}^n a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{t}\right) + \int_{\frac{1}{t}}^{\infty} P\left(\left(\sum_{i=1}^n a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq u\right) du \right\} dt.$$

Im Folgenden sei stets $i \in \{1, ..., n\}$. Wir sind daran interessiert, die Orliczfunktion M_i

genauer zu bestimmen, wir zeigen, dass gilt $M_i \sim N_i$. Hierfür unterscheiden wir zwei Bereiche des Definitionsbereiches von M_i, zunächst interessieren wir uns für "kleine" s:

<u>1. Fall:</u> Es sei $s < \frac{1}{2}\left(E\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}$.

Es gilt für die Integrationsvariable t

$$0 \leq t \leq s < \frac{1}{2}\left(E\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1},$$

also

$$\frac{1}{t} > 2E\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Um die Orliczfunktion M_i zu berechnen, interessieren wir uns zunächst für eine Abschätzung der folgenden Wahrscheinlichkeit

$$P\left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq x\right)$$

für $x > 2E\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Wir werden zeigen, dass gilt

$$P\left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq x\right) \sim \exp\left(-\frac{x^2}{\max_{j=1,\ldots,n} a_{ij}^2}\right).$$

Zunächst die obere Abschätzung:

Hierfür verwenden wir die Konzentrationseigenschaft normalverteilter Zufallsgrößen, Satz 2.2.2. In unserer Situation, $X = l_2^n$ und $x_j = a_{ij}e_j$, gilt

$$\sigma = \sup_{\|x^*\|=1}\left(\sum_{j=1}^{n} |<x^*, a_{ij}e_j>|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sup_{\|x^*\|=1}\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j^* a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \max_{j=1,\ldots,n} a_{ij}.$$

Es folgt mit Satz 2.2.2 für $x > 2E\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$$
\begin{aligned}
&P\left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq x\right) \\
&= P\left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} - E\left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right) \geq \underbrace{x - E\left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)}_{>0}\right) \\
&\leq \exp\left(-c\frac{\left(x - E\left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right)^2}{\sigma^2}\right) \\
&= \exp\left(-c\frac{\left(x - E\left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right)^2}{\max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}^2}\right).
\end{aligned}
$$

Da $x > 2E\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$ gilt $\left(x - E\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \sim x^2$, somit folgt

$$
P\left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq x\right) \lesssim \exp\left(-\frac{cx^2}{\max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}^2}\right).
$$

Nun kommen wir zur unteren Abschätzung von $P\left(\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq x\right)$:

Für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ und für alle $k = 1, ..., n$ gilt

$$P\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2 \geq x^2\right) \geq P\left(a_{ik}^2 g_{ik}^2 \geq x^2\right) = P\left(g_{ik}^2 \geq \frac{x^2}{a_{ik}^2}\right) = \int\limits_{\frac{x^2}{a_{ik}^2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} s^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{s}{2}} ds$$

$$= \int\limits_{\frac{x^2}{a_{ik}^2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\ln(s)} e^{-\frac{s}{2}} ds \gtrsim \int\limits_{\frac{x^2}{a_{ik}^2}}^{\infty} e^{-s} ds = \exp\left(-\frac{x^2}{a_{ik}^2}\right).$$

Also gilt insbesondere

$$P\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2 \geq x^2\right) \gtrsim \exp\left(-\frac{x^2}{\max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}^2}\right).$$

Zusammengefasst gilt somit für alle $x > 2E\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$:

$$P\left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq x\right) \sim \exp\left(-\frac{x^2}{\max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}^2}\right). \tag{4.1}$$

Nun kommen wir zur Bestimmung der Orliczfunktion. Da wir uns zunächst auf den Fall $s < \frac{1}{2}\left(E\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}$ konzentrieren, gilt $\frac{1}{t} > 2E\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$ und wir können (4.1) verwenden und erhalten:

$$M_i(s) = \int\limits_0^s \left\{\frac{1}{t} P\left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{t}\right) + \int\limits_{\frac{1}{t}}^{\infty} P\left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq u\right) du\right\} dt$$

$$\sim \int\limits_0^s \left\{\frac{1}{t} \exp\left(-\frac{1}{t^2 \max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}^2}\right) + \int\limits_{\frac{1}{t}}^{\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{\max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}^2}\right) du\right\} dt$$

Zunächst betrachten wir $\int\limits_{\frac{1}{t}}^{\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{\max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}^2}\right) du$, es gilt mit der Substitution $x = \frac{\sqrt{2}}{\max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}} u$

$\left(\frac{du}{dx} = \frac{\max\limits_{j=1,\ldots,n} a_{ij}}{\sqrt{2}}\right)$

$$\int\limits_{\frac{1}{t}}^{\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{\max\limits_{j=1,\ldots,n} a_{ij}^2}\right) du \quad = \int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{t \max\limits_{j=1,\ldots,n} a_{ij}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \frac{\max\limits_{j=1,\ldots,n} a_{ij}}{\sqrt{2}} dx.$$

An dieser Stelle verwenden wir, dass für alle $s \in \mathbb{R}_{>1}$ gilt

$$\int\limits_{s}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \sim \frac{1}{s} e^{-\frac{s^2}{2}}. \tag{4.2}$$

Da $\frac{\sqrt{2}}{t \max\limits_{j=1,\ldots,n} a_{ij}} > 2\sqrt{2} \frac{\left(E \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\max\limits_{j=1,\ldots,n} a_{ij}}$, folgt

$$\begin{aligned} \int\limits_{\frac{1}{t}}^{\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{\max\limits_{j=1,\ldots,n} a_{ij}^2}\right) du &\sim \left(\frac{\max\limits_{j=1,\ldots,n} a_{ij}}{\sqrt{2}}\right)^2 t \exp\left(-\frac{1}{t^2 \max\limits_{j=1,\ldots,n} a_{ij}^2}\right) \\ &= \frac{\max\limits_{j=1,\ldots,n} a_{ij}^2}{2} t \exp\left(-\frac{1}{t^2 \max\limits_{j=1,\ldots,n} a_{ij}^2}\right). \end{aligned}$$

Zusammengefasst erhalten wir

$$M_i(s) \sim \int\limits_{0}^{s} \left\{ \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{1}{t^2 \max\limits_{j=1,\ldots,n} a_{ij}^2}\right) + t \max_{j=1,\ldots,n} a_{ij}^2 \exp\left(-\frac{1}{t^2 \max\limits_{j=1,\ldots,n} a_{ij}^2}\right) \right\} dt.$$

Da $\frac{1}{t} > 2E\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$ und nach Lemma 2.2.7 gilt $E\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \sim \left\|(a_{ij})_{j=1}^{n}\right\|_2$ erhalten wir $\frac{1}{t} \gtrsim \left\|(a_{ij})_{j=1}^{n}\right\|_2$ und somit gilt

$$\frac{1}{t} + t \max_{j=1,\ldots,n} a_{ij}^2 \lesssim \frac{1}{t} + \frac{1}{\left\|(a_{ij})_{j=1}^{n}\right\|_2} \left\|(a_{ij})_{j=1}^{n}\right\|_2^2 \lesssim \frac{2}{t},$$

außerdem gilt $\frac{1}{t} + t \max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}^2 \geq \frac{1}{t}$ und damit zusammengefasst

$$\frac{1}{t} + t \max_{j=1,\dots,n} a_{ij}^2 \sim \frac{1}{t}.$$

Somit ergibt sich für unsere Orliczfunktion

$$M_i(s) \sim \int\limits_0^s \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{1}{t^2 \max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}^2} \right) dt.$$

Mit der Substitution $x = \frac{\sqrt{2}}{t \max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}}$ $\left(\frac{dt}{dx} = \frac{-\sqrt{2}}{x^2 \max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}} \right)$ folgt

$$M_i(s) \sim \int\limits_0^s \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{1}{t^2 \max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}^2} \right) dt = \int\limits_\infty^{\frac{\sqrt{2}}{s \max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}}} x \frac{\max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2} \right) \left(-\frac{\sqrt{2}}{\max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}} \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$= \int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{s \max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}}}^\infty \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{x^2}{2} \right) dx \sim \int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{s \max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}}}^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{2} \right) dx \overset{(4.2)}{\sim} \frac{s \max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{1}{s^2 \max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}^2} \right).$$

Zusammengefasst gilt somit für alle $s < \frac{1}{2} \left(E \left(\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}^2 g_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{-1}$

$$M_i(s) \sim s \max_{j=1,\dots,n} a_{ij} \exp\left(-\frac{1}{s^2 \max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}^2} \right).$$

<u>2.Fall:</u> Es sei $s \geq \frac{1}{2}\left(E\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}$.

Es gilt

$$M_i(s) = \int_0^s \left\{\frac{1}{t}P\left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{t}\right) + \int_{\frac{1}{t}}^{\infty} P\left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq u\right) du\right\} dt$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\left(E\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}} \left\{\frac{1}{t}P\left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{t}\right) + \int_{\frac{1}{t}}^{\infty} P\left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq u\right) du\right\} dt$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}\left(E\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}}^{s} \left\{\frac{1}{t}P\left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{t}\right) + \int_{\frac{1}{t}}^{\infty} P\left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq u\right) du\right\} dt$$

Nach Fall 1 gilt

$$\int_0^{\frac{1}{2}\left(E\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}} \left\{\frac{1}{t}P\left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{t}\right) + \int_{\frac{1}{t}}^{\infty} P\left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq u\right) du\right\} dt$$

$$\sim \frac{\max\limits_{j=1,\ldots,n} a_{ij}}{E\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{\left(E\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2}{\max\limits_{j=1,\ldots,n} a_{ij}^2}\right).$$

Nun betrachten wir

$$\int\limits_{\frac{1}{2}\left(E\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}}^{s} \left\{ \frac{1}{t} P\left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{t} \right) + \int\limits_{\frac{1}{t}}^{\infty} P\left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq u \right) du \right\} dt$$

$$\leq \int\limits_{\frac{1}{2}\left(E\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}}^{s} \left\{ \frac{1}{t} P\left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{t} \right) + \int\limits_{0}^{\infty} P\left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq u \right) du \right\} dt$$

$$= \int\limits_{\frac{1}{2}\left(E\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}}^{s} \left\{ \frac{1}{t} P\left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{t} \right) + E\left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \right) \right\} dt.$$

Nach Lemma 2.2.6 gilt

$$\left| E\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} - \bar{M}_{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}} \right| \leq \sqrt{2\pi},$$

wobei $\bar{M}_{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}}$ den Median der Zufallsgröße $\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$, wie in Kapitel 2 eingeführt, bezeichnet. Somit existiert insbesondere eine absolute Konstante c so, dass

$$P\left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq 2E\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \right) \geq c.$$

Es ergibt sich

$$\int\limits_{\frac{1}{2}\left(E\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}}^{s} \left\{ \underbrace{\frac{1}{t} P\left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{t}\right)}_{\leq 1} + \underbrace{\int\limits_{\frac{1}{t}}^{\infty} P\left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq u\right) du}_{\leq E\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}} \right\} dt$$

$$\leq \int\limits_{\frac{1}{2}\left(E\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}}^{s} \left\{ \frac{1}{t} + E\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \right\} dt$$

$$\leq \int\limits_{\frac{1}{2}\left(E\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}}^{s} 3E\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} dt$$

$$= 3E\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(s - \frac{1}{2}\left(E\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\right)$$

In diesem Fall ist ebenfalls die untere Abschätzung der M_i zu zeigen, hierfür betrachten wir die ursprüngliche Darstellung der M_i, aus Satz 3.1.5, also

$$M_i(s) = \int\limits_{0}^{s} \int\limits_{\frac{1}{t} \leq \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} dPdt.$$

Wir interessieren uns also für eine untere Abschätzung von

$$\int\limits_{\frac{1}{2}\left(E\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}}^{s} \int\limits_{\frac{1}{t} \leq \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} dPdt.$$

Da $\frac{1}{2}\left(E\left(\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} \leq t \leq s$, bzw. $\frac{1}{t} \leq 2E\left(\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$ gilt, erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\frac{1}{2}\left(E\left(\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}}^{s} \int\limits_{\frac{1}{t} \leq \left(\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} dP dt \\
\geq &\int\limits_{\frac{1}{2}\left(E\left(\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}}^{s} \int\limits_{2E\left(\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} dP dt \\
\geq c &\int\limits_{\frac{1}{2}\left(E\left(\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}}^{s} 2E\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} dt \\
= 2cE &\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(s - \frac{1}{2}\left(E\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\right).
\end{aligned}
$$

Zusammengefasst erhalten wir somit, dass für $s \geq \frac{1}{2}\left(E\left(\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}$ gilt

$$
\begin{aligned}
&M_i(s) \\
\sim &\frac{\max\limits_{j=1,\ldots,n} a_{ij}}{E\left(\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{\left(E\left(\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2}{\max\limits_{j=1,\ldots,n} a_{ij}^2}\right) + E\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(s - \left(E\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\right).
\end{aligned}
$$

Nach Lemma 2.2.7 gilt insbesondere

$$
E\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \sim \left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2
$$

und damit für alle $s < \frac{1}{2}\left(E\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} \sim \frac{1}{\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2}$

$$M_i(s) \sim s \max_{j=1,\dots,n} a_{ij} \exp\left(-\frac{1}{s^2 \max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}^2}\right) \sim N_i(s),$$

wobei

$$N_i(s) = \begin{cases} s \max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij} e^{-\frac{1}{s^2 \max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}^2}} & , s < \frac{1}{\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2} \\ \frac{\max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}}{\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2} e^{-\frac{\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2^2}{\max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}^2}} + \frac{3}{e}\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2 \left(s - \frac{1}{\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2}\right) & , s \geq \frac{1}{\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2}, \end{cases}$$

für alle $i = 1, ..., n$ ist. Des Weiteren gilt für alle $s \geq \frac{1}{2}\left(E\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} \sim \frac{1}{\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2}$

$$\begin{aligned} &M_i(s) \\ &\sim \frac{\max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}}{E\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{\left(E\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2}{\max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}^2}\right) + E\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(s - \left(E\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 g_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\right) \\ &\sim \frac{\max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}}{\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2} \exp\left(-\frac{\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2^2}{\max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}^2}\right) + \left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2 \left(s - \frac{1}{\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2}\right) \\ &= N_i(s). \end{aligned}$$

Zusammengefasst gilt für alle $i = 1, ..., n$

$$N_i \sim M_i,$$

bzw. für alle $j = 1, ..., n$

$$\widetilde{N_j} \sim \widetilde{M_j}.$$

Also gilt

$$\left\|(1)_{j=1}^n\right\|_{(c_1N_i)_i}+\|(1)_{i=1}^n\|_{(c_2\widetilde{N_j})_j} \lesssim \left\|(1)_{j=1}^n\right\|_{(M_i)_i}+\|(1)_{i=1}^n\|_{(\widetilde{M_j})_j} \lesssim \left\|(1)_{j=1}^n\right\|_{(c_3N_i)_i}+\|(1)_{i=1}^n\|_{(c_4\widetilde{N_j})_j},$$

wobei c_1, c_2, c_3 und c_4 absolute Konstanten sind. Damit gilt nach Satz 3.1.5 insbesondere

$$E\left(\max_{i=1,\dots,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right)+E\left(\max_{j=1,\dots,n}\|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\|_2\right)\gtrsim \left\|(1)_{j=1}^n\right\|_{(c_1N_i)_i}+\|(1)_{i=1}^n\|_{(c_2\widetilde{N_j})_j}$$

und

$$E\left(\max_{i=1,\dots,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right)+E\left(\max_{j=1,\dots,n}\|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\|_2\right)\lesssim \left\|(1)_{j=1}^n\right\|_{(c_3N_i)_i}+\|(1)_{i=1}^n\|_{(c_4\widetilde{N_j})_j}.$$

$\square$

Um dieses Resultat im Folgenden besser anwenden zu können, untersuchen wir im nächsten Teilabschnitt die genaue Gestalt der verallgemeinerten Orlicznorm, die durch die in Lemma 4.1.7 bzw. Satz 4.1.8 bestimmten Orliczfunktionen gegeben ist.

Untersuchung der Orlicznorm

Um die durch Satz 4.1.8 gegebenen Orlicznormen genauer zu bestimmen, betrachten wir zunächst den Fall, dass für alle $i,j=1,...,n$ gilt $a_{ij}\in\{0,1\}$ und bestimmen die Größenordnung der resultierenden Orlicznorm in diesem Fall. Im Anschluss geben wir eine Abschätzung im allgemeinen Fall an.

Lemma 4.1.10. *Für alle $i,j=1,...,n$ seien $a_{ij}\in\{0,1\}$ und*

$$N_i(s)=\begin{cases} s\max\limits_{j=1,\dots,n}a_{ij}e^{-\frac{1}{s^2\max\limits_{j=1,\dots,n}a_{ij}^2}} & ,s<\frac{1}{\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2}\\ \frac{\max\limits_{j=1,\dots,n}a_{ij}}{\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2}e^{-\frac{\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2^2}{\max\limits_{j=1,\dots,n}a_{ij}^2}}+\frac{3}{e}\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\left(s-\frac{1}{\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2}\right) & ,s\geq\frac{1}{\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2}.\end{cases}$$

Dann gilt, wobei c eine absolute Konstante bezeichnet,

$$\left\|(1)_{j=1}^n\right\|_{(cN_i)_i}\sim\max\left\{\sqrt{\left|\ln\left(\sum_{i=1}^n\max_{j=1,\dots,n}a_{ij}\right)\right|},\max_{i=1,\dots,n}\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right\}.$$

Beweis. Wir unterteilen den Beweis der Übersicht halber in zwei Teile. Zunächst betrachten wir den Fall, dass für alle $i = 1, ..., n$ ein $j_0 \in \{1, ..., n\}$ existiert so, dass $a_{ij_0} = 1$. In dieser Situation gilt $\max_{j=1,...,n} a_{ij} = 1$, für alle $i = 1, ..., n$.

Es gilt

$$\left\|(1)_{j=1}^n\right\|_{(cN_i)_i} = \inf\left\{\rho > 0 \,\middle|\, \sum_{i=1}^n cN_i\left(\frac{1}{\rho}\right) \leq 1\right\}.$$

Es sei $\rho_0 > 0$ so, dass gilt

$$\sum_{i=1}^n cN_i\left(\frac{1}{\rho_0}\right) \leq 1. \tag{4.3}$$

Nun interessieren wir uns dafür, welche Bedingungen ρ_0 erfüllen muss, damit (4.3) gilt.

<u>1. Fall:</u> Falls für alle $i = 1, ..., n$ gilt

$$\frac{1}{\rho_0} < \frac{1}{\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2} \qquad \text{d.h.} \qquad \rho_0 > \left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2,$$

also insbesondere $\rho_0 > \max_{i=1,...,n} \left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2$, erhalten wir

$$\sum_{i=1}^n cN_i\left(\frac{1}{\rho_0}\right) \leq 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad c\sum_{i=1}^n \frac{1}{\rho_0}e^{-\rho_0^2} \leq 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \rho_0 \gtrsim \sqrt{\ln(n)}.$$

Damit (4.3) erfüllt ist, muss in dieser Situation gelten

$$\rho_0 \gtrsim \max\left\{\sqrt{\ln(n)}, \max_{i=1,...,n} \left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right\}.$$

<u>2. Fall:</u> Falls $i_1, ..., i_k \in \{1, ..., n\}$, $k \in \{1, ..., n\}$, existieren so, dass für alle $i \neq i_l$, $l = 1, ..., k$

$$\frac{1}{\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2} > \frac{1}{\rho_0} \geq \frac{1}{\left\|(a_{i_lj})_{j=1}^n\right\|_2} \qquad \text{d.h.} \qquad \left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2 < \rho_0 \leq \left\|(a_{i_lj})_{j=1}^n\right\|_2,$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n cN_i\left(\frac{1}{\rho_0}\right) \leq 1 \\
\Leftrightarrow\quad & c\sum_{i\notin\{i_1,...,i_k\}} \frac{1}{\rho_0}e^{-\rho_0^2} + c\sum_{l=1}^k \left(\frac{1}{\left\|(a_{i_lj})_{j=1}^n\right\|_2}e^{-\left\|(a_{i_lj})_{j=1}^n\right\|_2^2} + \frac{3}{e}\left\|(a_{i_lj})_{j=1}^n\right\|_2\left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\left\|(a_{i_lj})_{j=1}^n\right\|_2}\right)\right) \leq 1.
\end{aligned}$$

Sei $l \in \{1, ..., k\}$. Wir betrachten zunächst

$$\frac{3}{e}\left\|(a_{i_l j})_{j=1}^n\right\|_2\left(\frac{1}{\rho_0}-\frac{1}{\left\|(a_{i_l j})_{j=1}^n\right\|_2}\right).$$

Falls $\rho_0 = \left\|(a_{i_l j})_{j=1}^n\right\|_2$, dann gilt

$$\frac{3}{e}\left\|(a_{i_l j})_{j=1}^n\right\|_2\left(\frac{1}{\rho_0}-\frac{1}{\left\|(a_{i_l j})_{j=1}^n\right\|_2}\right)=0.$$

Falls $\rho_0 < \frac{1}{\frac{e}{3}+1}\left\|(a_{i_l j})_{j=1}^n\right\|_2$ gilt $\frac{1}{\rho_0} > \left(\frac{e}{3}+1\right)\frac{1}{\left\|(a_{i_l j})_{j=1}^n\right\|_2}$ und damit

$$\frac{3}{e}\left\|(a_{i_l j})_{j=1}^n\right\|_2\left(\frac{1}{\rho_0}-\frac{1}{\left\|(a_{i_l j})_{j=1}^n\right\|_2}\right) > \frac{3}{e}\left\|(a_{i_l j})_{j=1}^n\right\|_2\left(\left(\frac{e}{3}+1\right)\frac{1}{\left\|(a_{i_l j})_{j=1}^n\right\|_2}-\frac{1}{\left\|(a_{i_l j})_{j=1}^n\right\|_2}\right)=1.$$

Damit also (4.3) in dieser Situation erfüllt ist, muss gelten

$$\frac{1}{\frac{e}{3}+1}\max_{l=1,\dots,n}\left\|(a_{i_l j})_{j=1}^n\right\|_2 \le \rho_0 \le \max_{l=1,\dots,n}\left\|(a_{i_l j})_{j=1}^n\right\|_2,$$

also

$$\rho_0 \sim \max_{l=1,\dots,n}\left\|(a_{i_l j})_{j=1}^n\right\|_2 = \max_{i=1,\dots,n}\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2.$$

Als nächstes betrachten wir

$$\sum_{i\notin\{i_1,\dots,i_k\}}\frac{1}{\rho_0}e^{-\rho_0^2}.$$

Es gilt

$$c\sum_{i\notin\{i_1,\dots,i_k\}}\frac{1}{\rho_0}e^{-\rho_0^2}\le 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \rho_0 \gtrsim \sqrt{\ln(n-k)}.$$

Als letztes betrachten wir

$$\sum_{l=1}^k\frac{1}{\left\|(a_{i_l j})_{j=1}^n\right\|_2}e^{-\left\|(a_{i_l j})_{j=1}^n\right\|_2^2}.$$

Es gilt

$$c\sum_{l=1}^k\frac{1}{\left\|(a_{i_l j})_{j=1}^n\right\|_2}e^{-\left\|(a_{i_l j})_{j=1}^n\right\|_2^2}\le 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \rho_0 \gtrsim \sqrt{\ln(k)}.$$

Folglich muss für alle $\rho_0 > 0$, die (4.3) erfüllen, gelten

$$\rho_0 \gtrsim \max\left\{\sqrt{\ln(n-k)}, \sqrt{\ln(k)}, \max_{i=1,\dots,n} \left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right\}.$$

Da außerdem gilt

$$\max\left\{\sqrt{\ln(n-k)}, \sqrt{\ln(k)}\right\} \geq \sqrt{\ln\left(\frac{n}{2}\right)},$$

folgt

$$\rho_0 \gtrsim \max\left\{\sqrt{\ln(n)}, \max_{i=1,\dots,n} \left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right\}.$$

Damit gilt zusammengefasst

$$\left\|(1)_{j=1}^n\right\|_{(cN_i)_i} = \inf\left\{\rho > 0 \,\middle|\, \sum_{i=1}^n N_i\left(\frac{1}{\rho}\right) \leq 1\right\} \sim \max\left\{\sqrt{\ln(n)}, \max_{i=1,\dots,n} \left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right\}.$$

Falls nicht für jedes $i = 1, \dots, n$ ein $j_0 \in \{1, \dots, n\}$ existiert so, dass $a_{ij_0} = 1$, das heißt falls nur für $i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, n\}$, $m \in \{1, \dots, n-1\}$, ein $j_0 \in \{1, \dots, n\}$ existiert so, dass $a_{i_l j_0} = 1$, $l = 1, \dots, n$, und für alle $i \notin \{i_1, \dots, i_m\}$ und alle $j \in \{1, \dots, n\}$ gilt $a_{ij} = 0$, gilt insbesondere für alle $i \notin \{i_1, \dots, i_m\}$, $\max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij} = 0$ und damit $N_i(s) = 0$, also

$$\sum_{i=1}^n N_i\left(\frac{1}{\rho_0}\right) = \sum_{i\in\{i_1,\dots,i_m\}} N_i\left(\frac{1}{\rho_0}\right),$$

dann ergibt sich analog zum Term $\sqrt{\ln(n)}$ jetzt $\sqrt{\ln(m)}$ und damit

$$\rho_0 \gtrsim \max\left\{\sqrt{\ln(m)}, \max_{i=1,\dots,n} \left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right\},$$

also

$$\left\|(1)_{j=1}^n\right\|_{(cN_i)_i} = \inf\left\{\rho > 0 \,\middle|\, \sum_{i=1}^n cN_i\left(\frac{1}{\rho}\right) \leq 1\right\} \sim \max\left\{\sqrt{\ln(m)}, \max_{i=1,\dots,n} \left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right\}.$$

Insgesamt erhalten wir somit

$$\left\|(1)_{j=1}^n\right\|_{(cN_i)_i} \sim \max\left\{\sqrt{\left|\ln\left(\sum_{i=1}^n \max_{j=1,\dots,n} a_{ij}\right)\right|}, \max_{i=1,\dots,n} \left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right\}. \quad \square$$

In der folgenden Bemerkung untersuchen wir, was Satz 4.1.8 und Lemma 4.1.10 für zwei spezielle Wahlen von $a_{ij} \in \{0,1\}$, $i,j = 1,...,n$, liefern:

Bemerkung 4.1.11.

(i) 1. Fall: Für alle $i,j = 1,...,n$ seien $a_{ij} = 1$. In diesem Fall gilt für alle $i = 1,...,n$ bzw. $j = 1,...,n$

$$\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2 = \sqrt{n} = \|(a_{ij})_{i=1}^n\|_2 \,,$$

also

$$\left\|(1)_{j=1}^n\right\|_{(cN_i)_i} \sim \max\left\{\sqrt{\ln(n)}, \max_{i=1,...,n} \left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right\} = \sqrt{n}.$$

Folglich gilt nach Satz 4.1.8

$$E\left(\max_{i=1,...,n} \left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right) + E\left(\max_{j=1,...,n} \|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\|_2\right) \sim \sqrt{n}.$$

(ii) 1. Fall: Für alle $i,j = 1,...,n$ sei $a_{ij} = \begin{cases} 1 & ,i=j \\ 0 & ,i \neq j. \end{cases}$ In diesem Fall gilt für alle $i = 1,...,n$ bzw. $j = 1,...,n$

$$\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2 = 1 = \|(a_{ij})_{i=1}^n\|_2 \,,$$

also

$$\left\|(1)_{j=1}^n\right\|_{(cN_i)_i} \sim \max\left\{\sqrt{\ln(n)}, \max_{i=1,...,n} \left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right\} = \sqrt{\ln(n)}.$$

Folglich gilt nach Satz 4.1.8

$$E\left(\max_{i=1,...,n} \left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right) + E\left(\max_{j=1,...,n} \|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\|_2\right) \sim \sqrt{\ln(n)}.$$

Damit gilt in dieser Situation

$$\begin{aligned} E\left(\|\mathrm{diag}(g_{11},...,g_{nn})\|_{2\to 2}\right) &= E \max_{i=1,...,n} |g_{ii}| \\ &= \frac{1}{2}\left(E\left(\max_{i=1,...,n} \left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2 + \max_{j=1,...,n} \|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\|_2\right)\right) \\ &\sim \sqrt{\ln(n)}. \end{aligned}$$

Dieses entspricht dem bekannten Ergebnis im normalverteilten Diagonalmatrizenfall. Als nächstes geben wir in der allgemeinen Situation eine Abschätzung der Orlicznorm an:

Lemma 4.1.12. *Für alle $i, j = 1, ..., n$ seien $a_{ij} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und*

$$N_i(s) = \begin{cases} s \max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij} e^{-\frac{1}{s^2 \max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}^2}} & , s < \frac{1}{\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2} \\ \frac{\max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}}{\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2} e^{-\frac{\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2^2}{\max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}^2}} + \frac{3}{e}\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2 \left(s - \frac{1}{\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2}\right) & , s \geq \frac{1}{\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2}. \end{cases}$$

Dann gilt

(i) $\|(1)_{i=1}^n\|_{(cN_i)_i} \gtrsim \max\limits_{i=1,\dots,n} \left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2$

(ii) $\|(1)_{i=1}^n\|_{(cN_i)_i} \lesssim \max\left\{ \sqrt{\left|\ln\left(\sum\limits_{i=1}^n \frac{\max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}}{\max\limits_{l,j=1,\dots,n} a_{lj}}\right)\right|} \max\limits_{i,j=1,\dots,n} a_{ij}, \max\limits_{i=1,\dots,n} \left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2 \right\},$

wobei c eine absolute Konstante ist.

Beweis. Es gilt

$$\left\|(1)_{j=1}^n\right\|_{(cN_i)_i} = \inf\left\{\rho > 0 \,\middle|\, \sum_{i=1}^n cN_i\left(\frac{1}{\rho}\right) \leq 1\right\}.$$

Es sei also $\rho_0 > 0$ so, dass gilt

$$\sum_{i=1}^n cN_i\left(\frac{1}{\rho_0}\right) \leq 1, \tag{4.4}$$

Wie im Beweis von Lemma 4.1.10 folgt, dass $\rho_0 \gtrsim \max\limits_{i=1,\dots,n} \left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2$ und damit

$$\left\|(1)_{j=1}^n\right\|_{(cN_i)_i} \gtrsim \max_{i=1,\dots,n} \left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2.$$

Außerdem muss erfüllt sein

$$\sum_{i=1}^n c\frac{\max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}}{\rho_0} \exp\left(-\frac{\rho_0^2}{\max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}^2}\right) \leq 1.$$

Es sei $\rho_0 = \sqrt{\left|\ln\left(c\sum_{i=1}^n \frac{\max_{j=1,\dots,n} a_{ij}}{\max_{l,j=1,\dots,n} a_{lj}}\right)\right|} \max_{i,j=1,\dots,n} a_{ij}$, dann gilt

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n c\frac{\max_{j=1,\dots,n} a_{ij}}{\rho_0} \exp\left(-\frac{\rho_0^2}{\max_{j=1,\dots,n} a_{ij}^2}\right) \\
&= \sum_{i=1}^n c\frac{\max_{j=1,\dots,n} a_{ij}}{\max_{l,j=1,\dots,n} a_{lj}} \frac{1}{\sqrt{\left|\ln\left(c\sum_{i=1}^n \frac{\max_{j=1,\dots,n} a_{ij}}{\max_{l,j=1,\dots,n} a_{lj}}\right)\right|}} \left(c\sum_{k=1}^n \frac{\max_{j=1,\dots,n} a_{kj}}{\max_{l,j=1,\dots,n} a_{lj}}\right)^{-\frac{\max_{l,j=1,\dots,n} a_{lj}^2}{\max_{j=1,\dots,n} a_{ij}^2}} \\
&\leq \sum_{i=1}^n c\frac{\max_{j=1,\dots,n} a_{ij}}{\max_{l,j=1,\dots,n} a_{lj}} \left(\sum_{k=1}^n c\frac{\max_{j=1,\dots,n} a_{kj}}{\max_{l,j=1,\dots,n} a_{lj}}\right)^{-\frac{\max_{l,j=1,\dots,n} a_{lj}^2}{\max_{j=1,\dots,n} a_{ij}^2}} \leq \sum_{i=1}^n c\frac{\max_{j=1,\dots,n} a_{ij}}{\max_{l,j=1,\dots,n} a_{lj}} \left(\sum_{k=1}^n c\frac{\max_{j=1,\dots,n} a_{kj}}{\max_{l,j=1,\dots,n} a_{lj}}\right)^{-1} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Also gilt

$$
\begin{aligned}
\left\|(1)_{j=1}^n\right\|_{(cN_i)_i} &= \inf\left\{\rho > 0 \,\middle|\, \sum_{i=1}^n cN_i\left(\frac{1}{\rho}\right) \leq 1\right\} \\
&\lesssim \max\left\{\sqrt{\left|\ln\left(\sum_{i=1}^n \frac{\max_{j=1,\dots,n} a_{ij}}{\max_{l,j=1,\dots,n} a_{lj}}\right)\right|} \max_{i,j=1,\dots,n} a_{ij}, \max_{i=1,\dots,n}\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right\}.
\end{aligned}
$$

□

Bemerkung 4.1.13.

(i) In der Situation von Lemma 4.1.12 erhalten wir immer die folgende Abschätzung, die wir unter anderem zum Beweis des Hauptsatzes in 4.2 benötigen:

$$\max_{i=1,\dots,n}\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2 \lesssim \left\|(1)_{j=1}^n\right\|_{(cN_i)_i} \lesssim \sqrt{\ln(n)} \max_{i=1,\dots,n}\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2.$$

Dies gilt da

$$\sqrt{\ln\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}}{\max\limits_{l,j=1,\dots,n} a_{lj}}\right)}\max_{i,j=1,\dots,n} a_{ij} \leq \sqrt{\ln(n)}\max_{i=1,\dots,n}\left\|(a_{ij})_{j=1}^{n}\right\|_2 .$$

(ii) Falls

$$\max_{i=1,\dots,n}\left\|(a_{ij})_{j=1}^{n}\right\|_2 \geq \sqrt{\ln\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}}{\max\limits_{l,j=1,\dots,n} a_{lj}}\right)}\max_{i,j=1,\dots,n} a_{ij}, \tag{4.5}$$

liefert uns Lemma 4.1.12

$$\left\|(1)_{j=1}^{n}\right\|_{(cN_i)_i} \sim \max_{i=1,\dots,n}\left\|(a_{ij})_{j=1}^{n}\right\|_2 ,$$

und damit erhalten wir in diesem Fall die korrekte Größenordnung. Falls zum Beispiel ein $i_0 \in \{1,...,n\}$ existiert so, dass gilt

$$\left\|(a_{i_0 j})_{j=1}^{n}\right\|_2 \geq \sqrt{\ln(n)},$$

so liefert Lemma 4.1.12 die korrekte Größenordnung. Allgemein gilt dies sobald in mindestens einer Zeile "genügend" viele Einträge von 0 wegbeschränkt sind, genauer falls ein $i_0 \in \{1,...,n\}$ existiert so, dass gilt $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i_0 j}^2 \gtrsim \ln(n)$. Dies ist zum Beispiel erfüllt für $a_{i_0 j} = \frac{1}{\sqrt{j}}$, $j = 1,...,n$, oder falls mindestens $\ln(n)$-Einträge in dieser Zeile 1 sind.

4.1.4 Obere Abschätzung

Für alle $i, j = 1,...,n$ seien weiterhin $a_{ij} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $g_{ij} \sim N(0,1)$ unabhängig und es sei $G = (a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^{n}$. In diesem Abschnitt interessieren wir uns für eine obere Abschätzung der größten singulären Zahl von G und damit für eine obere Abschätzung von $E(\|G\|_{2\to 2})$. Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, dass gilt

$$E\left(\|G\|_{2\to 2}\right) \lesssim (\ln(n))^{\frac{3}{2}}\left(E\max_{i=1,\dots,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^{n}\right\|_2 + E\max_{j=1,\dots,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^{n}\right\|_2\right),$$

wobei wir an dieser Stelle nicht direkt den Erwartungswert abschätzen, wie bei der unteren Abschätzung, sondern zeigen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass $\|G\|_{2\to 2}$ größer als $(\ln(n))^{\frac{3}{2}}\,(E\max_i \|(a_{ij}g_{ij})_j\|_2 + E\max_j \|(a_{ij}g_{ij})_i\|_2)$ ist "klein" ist. Hierfür verwenden wir die Konzentrationseigenschaft normalverteilter Zufallsgrößen, sowie Satz 4.1.8 der besagt, dass gilt

$$E\max_{i=1,\dots,n} \left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2 \sim \left\|(1)_{j=1}^n\right\|_{(N_i)_i},$$

wobei

$$N_i(s) = \begin{cases} s\max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij} e^{-\frac{1}{s^2 \max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}^2}} & , s < \frac{1}{\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2} \\ \frac{\max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}}{\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2} e^{-\frac{\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2^2}{\max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}^2}} + \frac{3}{e}\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2 \left(s - \frac{1}{\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2}\right) & , s \geq \frac{1}{\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2}. \end{cases}$$

Um das Hauptresultat dieses Kapitels formulieren und beweisen zu können, benötigen wir zunächst zwei Lemmata, welche insbesondere eine Aussage über die Berechnung der Operatornorm von l_2^n nach l_2^n machen:

Lemma 4.1.14. *Es sei*

$$x^{(l)} = \frac{1}{\sqrt{l}}(\underbrace{1,\dots,1}_{l},\underbrace{0,\dots,0}_{n-l}),$$

also der Vektor im $\mathbb{R}^n$ bei dem die ersten l-Koordinaten $\frac{1}{\sqrt{l}}$ und die restlichen 0 sind. B_T sei die konvexe Hülle der Vektoren

$$\left(\varepsilon_1 x_{\pi(1)}^{(l)},\dots,\varepsilon_n x_{\pi(n)}^{(l)}\right),$$

wobei $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1,\dots,n$ und π Permutationen der Menge $\{1,\dots,n\}$ bezeichnen. Dann gilt

$$B_T \subseteq B_2^n \subseteq (2\log_2(n))B_T.$$

Bemerkung 4.1.15. Es gilt

$$|B_T^n| = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} 2^i = 3^n.$$

Beweis. (Lemma 4.1.14) Es sei $x \in B_T$, dann gilt $\|x\|_2 \leq 1$ und damit $x \in B_2^n$. Es bleibt also noch zu zeigen, dass $B_2^n \subseteq (2\log_2(n))B_T$. Sei also $x \in B_2^n$ mit $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq 0$, um zu zeigen, dass gilt $x \in (2\log_2(n))B_T$, zerlegen wir x dyadisch. Es sei also n_0 die größte ganze Zahl so, dass gilt

$$x_1 \leq 2^{-n_0}.$$

Da $\|x\|_2 \leq 1$, gilt $n_0 \geq 0$. Für alle $j = 1, 2, ...$ sei k_j die kleinste ganze Zahl so, dass gilt

$$x_{k_j} \leq 2^{-n_0 - j}.$$

Wir beenden dieses Vorgehen, falls kein entsprechendes k_j existiert oder falls $j_0 \in \mathbb{N}$ erreicht ist so, dass gilt $n_0 + j_0 \geq \log_2(n)$, das heißt

$$x_{k_{j_0}} \leq \frac{1}{n}.$$

Insbesondere gilt aufgrund der fallenden Anordnung für alle $i = 1, ..., n - k_{j_0}$

$$x_{k_{j_0}+i} \leq \frac{1}{n}.$$

Somit ist

$$\sum_{i=k_{j_0}+1}^{n} x_i e_i$$

in der konvexen Hülle der Vektoren

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=k_{j_0}+1}^{n} \varepsilon_i e_i, \qquad \varepsilon_i = \pm 1, i = k_{j_0} + 1, ..., n.$$

Für alle $i = k_{j-1} + 1, ..., k_j$ gilt

$$0 \leq x_i \leq 2^{-n_0 - j + 1}$$

und damit ist

$$\sum_{i=k_{j-1}+1}^{k_j} x_i e_i$$

in der konvexen Hülle der Vektoren

$$2^{-n_0 - j + 1} \sum_{i=k_{j-1}+1}^{k_j} \varepsilon_i e_i, \qquad \varepsilon_i = \pm 1, i = k_{j-1} + 1, ..., k_j.$$

Außerdem gilt für alle $i = k_{j-1}+1, ..., k_j$

$$x_i \geq 2^{-n_0-j}$$

und damit

$$1 \geq \|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{j_0} \sum_{i=k_{j-1}+1}^{k_j} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \geq \left(\sum_{j=1}^{j_0} (k_j - k_{j-1}) \left| 2^{-n_0-j} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

falls wir die Zerlegung bereits vor j_0 abgebrochen haben, so setzen wir die restlichen Summanden 0. Folglich gilt für alle j

$$\left| 2^{-n_0-j} \right|^2 (k_j - k_{j-1}) \leq 1$$

und damit

$$\frac{1}{2^{n_0+j}} \leq \frac{1}{\sqrt{k_j - k_{j-1}}}. \tag{4.6}$$

Mit (4.6) gilt aufgrund der Definition von B_T

$$2^{-n_0-j+1} \sum_{i=k_{j-1}+1}^{k_j} \varepsilon_i e_i = 2 \sum_{i=k_{j-1}+1}^{k_j} \frac{\varepsilon_i}{2^{n_0+j}} e_i \in 2B_T.$$

Es folgt

$$x \in 2 \log_2(n) B_T.$$

□

Als unmittelbare Folgerung erhalten wir:

Lemma 4.1.16. *Es seien* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *und*

$$S_T^{n-1} = \left\{ x = (x_1, ..., x_n) \in S^{n-1} \middle| \exists i = 1, ..., n \left| \left\{ j = 1, ..., n | x_j = \pm \frac{1}{\sqrt{i}} \right\} \right| = i \right\}.$$

Dann gilt

$$\|A\|_{l_2^n \to l_2^n} = \sup_{x \in S^{n-1}} \|Ax\|_2 \leq \frac{2}{\ln(2)} \ln(n) \sup_{x \in S_T^{n-1}} \|Ax\|_2 .$$

An dieser Stelle formulieren wir das entscheidende Lemma zum Beweis des Hauptresultates aus diesem Abschnitt, das heißt der oberen Abschätzung des Erwartungswertes der größten singulären Zahl von $G = (a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n$, welches aus der Konzentrationseigenschaft normalverteilter Zufallsgrößen, Satz 2.2.2, und Lemma 2.2.7 folgt:

Lemma 4.1.17. *Für alle $i, j = 1, ..., n$ seien $a_{ij} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $g_{ij} \sim N(0,1)$ unabhängig. Außerdem sei $x \in B_2^n$. Dann gilt für alle $\beta \in \mathbb{R}_{>0}$*

$$P\left(\|Gx\|_2 > \beta\left(E\left(\max_{i=1,...,n} \left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right) + E\left(\max_{j=1,...,n} \|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\|_2\right)\right)\right)$$
$$\lesssim \exp\left(-\frac{\left(\beta\left(E\left(\max_{i=1,...,n} \left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right) + E\left(\max_{j=1,...,n} \|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\|_2\right)\right) - \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2}{\max_{i=1,...,n}\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 x_j^2\right)}\right).$$

Beweis. Es seien h_i, $i = 1, ..., n$, unabhängige standardnormalverteilte Zufallsgrößen und e_i, $i = 1, ..., n$ die Einheitsbasis im $\mathbb{R}^n$, dann gilt für alle $x \in B_2^n$

$$\|Gx\|_2 = \left\|\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}g_{ij}x_j\right) e_i\right\|_2 \overset{\mathfrak{D}}{=} \left\|\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 x_j^2\right)^{\frac{1}{2}} h_i e_i\right\|_2.$$

Des Weiteren gilt für σ aus Satz 2.2.2

$$\sigma = \sup_{\|x^*\|_2=1} \left(\sum_{i=1}^n \left| < x^*, \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 x_j^2\right)^{\frac{1}{2}} e_i > \right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sup_{\|x^*\|_2=1} \left(\sum_{i=1}^n \left| x_i^* \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 x_j^2\right)^{\frac{1}{2}} \right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \max_{i=1,...,n} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Es sei $\beta \in \mathbb{R}_{>0}$, dann gilt

$$
\begin{aligned}
&P\left(\|Gx\|_2 > \beta\left(E\left(\max_{i=1,\dots,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right) + E\left(\max_{j=1,\dots,n}\|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\|_2\right)\right)\right)\\
&= P\left(\left\|\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2x_j^2\right)^{\frac{1}{2}} h_ie_i\right\|_2 > \beta\left(E\left(\max_{i=1,\dots,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right) + E\left(\max_{j=1,\dots,n}\|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\|_2\right)\right)\right)\\
&= P\left(\left\|\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2x_j^2\right)^{\frac{1}{2}} h_ie_i\right\|_2 - E\left\|\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2x_j^2\right)^{\frac{1}{2}} h_ie_i\right\|_2\right.\\
&\qquad\left. > \beta\left(E\left(\max_{i=1,\dots,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right) + E\left(\max_{j=1,\dots,n}\|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\|_2\right)\right) - E\left\|\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2x_j^2\right)^{\frac{1}{2}} h_ie_i\right\|_2\right).
\end{aligned}
$$

Also folgt mit Satz 2.2.2

$$
\begin{aligned}
&P\left(\|Gx\|_2 > \beta\left(E\left(\max_{i=1,\dots,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right) + E\left(\max_{j=1,\dots,n}\|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\|_2\right)\right)\right)\\
&= P\left(\left\|\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2x_j^2\right)^{\frac{1}{2}} h_ie_i\right\|_2 - E\left\|\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2x_j^2\right)^{\frac{1}{2}} h_ie_i\right\|_2\right.\\
&\qquad\left. > \beta\left(E\left(\max_{i=1,\dots,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right) + E\left(\max_{j=1,\dots,n}\|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\|_2\right)\right) - E\left\|\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2x_j^2\right)^{\frac{1}{2}} h_ie_i\right\|_2\right)\\
&\leq \exp\left(-\frac{K\left(\beta\left(E\left(\max_{i=1,\dots,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right) + E\left(\max_{j=1,\dots,n}\|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\|_2\right)\right)\right.}{\max_{i=1,\dots,n}\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2x_j^2\right)}\right.\\
&\qquad\qquad\left.-\frac{\left.E\left(\left\|\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2x_j^2\right)^{\frac{1}{2}} h_ie_i\right\|_2\right)\right)^2}{\max_{i=1,\dots,n}\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2x_j^2\right)}\right),
\end{aligned}
$$

wobei K die aus Satz 2.2.2 resultierende Konstante ist. Wir berücksichtigen nochmals, dass mit Lemma 2.2.7 gilt

$$E\left(\left\|\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 x_j^2\right)^{\frac{1}{2}} h_i e_i\right\|_2\right) \sim \left\|\left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)_{i=1}^{n}\right\|_2 = \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 x_j^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

somit ergibt sich

$$\begin{aligned} &P\left(\|Gx\|_2 > \beta\left(E\left(\max_{i=1,\dots,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right) + E\left(\max_{j=1,\dots,n}\|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\|_2\right)\right)\right) \\ &\lesssim \exp\left(-\frac{\left(\beta\left(E\left(\max_{i=1,\dots,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right) + E\left(\max_{j=1,\dots,n}\|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\|_2\right)\right) - \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2}{\max_{i=1,\dots,n}\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 x_j^2\right)}\right). \end{aligned}$$

□

Satz 4.1.18. *Für alle $i, j = 1, \dots, n$ seien $a_{ij} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $g_{ij} \sim N(0,1)$ unabhängig. Dann gilt für alle $\beta \in \mathbb{R}_{\geq C}$*

$$\begin{aligned} &P\left(\|G\|_{2\to 2} > \beta \ln(n)\left(E\left(\max_{i=1,\dots,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right) + E\left(\max_{j=1,\dots,n}\|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\|_2\right)\right)\right) \\ &\lesssim \sum_{l=1}^{n} \exp\left(l\ln(2n) - l\beta^2\right), \end{aligned}$$

wobei C eine absolute Konstante bezeichnet. Damit gilt insbesondere für $\beta = \sqrt{3\ln(2n)}$

$$\begin{aligned} &P\left(\|G\|_{2\to 2} > \sqrt{3}\,(\ln(2n))^{\frac{3}{2}}\left(E\left(\max_{i=1,\dots,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right) + E\left(\max_{j=1,\dots,n}\|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\|_2\right)\right)\right) \\ &\lesssim \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Zum Beweis dieses Satzes verwenden wir Lemma 4.1.16 um uns auf Vektoren aus S_T^{n-1} zu beschränken. Im Anschluss wenden wir die Abschätzung aus Lemma 4.1.17 auf diese an.

Beweis. Nach Lemma 4.1.16 gilt

$$\|G\|_{2\to 2} \leq c\ln(n) \sup_{x\in S_T^{n-1}} \|Gx\|_2,$$

wobei $c = \frac{2}{\ln(2)}$. Es sei nun $\beta \in \mathbb{R}_{>0}$, dann gilt

$$\begin{aligned}
&\left\{ \|G\|_{2\to 2} > \beta \ln(n) \left(E\left(\max_{i=1,\dots,n} \left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2 \right) + E\left(\max_{j=1,\dots,n} \|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\|_2 \right) \right) \right\} \\
&\subseteq \left\{ c\ln(n) \sup_{x\in S_T^{n-1}} \|Gx\|_2 > \beta \ln(n) \left(E\left(\max_{i=1,\dots,n} \left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2 \right) + E\left(\max_{j=1,\dots,n} \|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\|_2 \right) \right) \right\}
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
&P\left(\|G\|_{2\to 2} > \beta \ln(n) \left(E\left(\max_{i=1,\dots,n} \left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2 \right) + E\left(\max_{j=1,\dots,n} \|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\|_2 \right) \right) \right) \\
&\leq P\left(c\ln(n) \sup_{x\in S_T^{n-1}} \|Gx\|_2 > \beta \ln(n) \left(E\left(\max_{i=1,\dots,n} \left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2 \right) + E\left(\max_{j=1,\dots,n} \|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\|_2 \right) \right) \right) \\
&= P\left(\sup_{x\in S_T^{n-1}} \|Gx\|_2 > \frac{\beta}{c} \left(E\left(\max_{i=1,\dots,n} \left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2 \right) + E\left(\max_{j=1,\dots,n} \|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\|_2 \right) \right) \right).
\end{aligned}$$

An dieser Stelle verwenden wir Lemma 4.1.17, denn danach gilt für alle $x \in B_2^n$, also insbesondere für alle $x \in S_T^{n-1}$

$$\begin{aligned}
&P\left(\|Gx\|_2 > \frac{\beta}{c} \left(E\left(\max_{i=1,\dots,n} \left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2 \right) + E\left(\max_{j=1,\dots,n} \|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\|_2 \right) \right) \right) \\
&\lesssim \exp\left(- \frac{\left(\frac{\beta}{c} \left(E\left(\max_{i=1,\dots,n} \left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2 \right) + E\left(\max_{j=1,\dots,n} \|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\|_2 \right) \right) - \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2}{\max_{i=1,\dots,n} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 x_j^2 \right)} \right).
\end{aligned}$$

Im Folgenden bezeichne $x^{(l)} \in S_T^{n-1}$, $l = 1, \dots, n$, einen Vektor mit $x_j^{(l)} \in \{0, \pm\frac{1}{\sqrt{l}}\}$ für alle $j = 1, \dots, n$, also gerade einen Vektor, bei dem l Komponenten $\pm\frac{1}{\sqrt{l}}$ und die restlichen 0 sind, dann gilt

$$
\begin{aligned}
&P\left(\|G\|_{2\to 2} > \beta \ln(n)\left(E\left(\max_{i=1,\dots,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right) + E\left(\max_{j=1,\dots,n}\|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\|_2\right)\right)\right)\\
&\leq P\left(\sup_{x\in S_T^{n-1}}\|Gx\|_2 > \frac{\beta}{c}\left(E\left(\max_{i=1,\dots,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right) + E\left(\max_{j=1,\dots,n}\|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\|_2\right)\right)\right)\\
&\leq \sum_{l=1}^n\sum_{x^{(l)}} P\left(\left\|Gx^{(l)}\right\|_2 > \frac{\beta}{c}\left(E\left(\max_{i=1,\dots,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right) + E\left(\max_{j=1,\dots,n}\|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\|_2\right)\right)\right)\\
&\lesssim \sum_{l=1}^n\sum_{x^{(l)}} \exp\left(-l\left(\frac{\beta}{c}\frac{\left(E\left(\max_{i=1,\dots,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right) + E\left(\max_{j=1,\dots,n}\|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\|_2\right)\right)}{\max_{i=1,\dots,n}\left(\sum_{j\in\{k|x_k^{(l)}\neq 0\}}^n a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right.\right.\\
&\qquad\qquad\left.\left. - \frac{\frac{1}{\sqrt{l}}\left(\sum_{i=1}^n\sum_{j\in\{k|x_k^{(l)}\neq 0\}} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\max_{i=1,\dots,n}\left(\sum_{j\in\{k|x_k^{(l)}\neq 0\}}^n a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right)^2\right).
\end{aligned}
$$

Um diesen Ausdruck weiter abzuschätzen, benötigen wir im Folgenden die Symmetrie in den Ausdrücken, wir verwenden sowohl $E\max_{i=1,\dots,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2$, als auch $E\max_{j=1,\dots,n}\|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\|_2$: Es gilt

$$
\frac{1}{\sqrt{l}}\left(\sum_{i=1}^n\sum_{j\in\{k|x_k^{(l)}\neq 0\}} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \max_{j\in\{k|x_k^{(l)}\neq 0\}}\|(a_{ij})_{i=1}^n\|_2 \leq \max_{j=1,\dots,n}\|(a_{ij})_{i=1}^n\|_2\,.
$$

Da weiterhin ein c_1 existiert mit $E\max_{j=1,\dots,n}\|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\|_2 \geq c_1\max_{j=1,\dots,n}\|(a_{ij})_{i=1}^n\|_2$, folgt für alle $\beta \geq \frac{1}{c_1}$

$$
\beta E\max_{j=1,\dots,n}\|(a_{ij}g_{ij})_i\|_2 - \frac{1}{\sqrt{l}}\left(\sum_{i=1}^n\sum_{j\in\{k|x_k^{(l)}\neq 0\}} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq 0.
$$

Ebenso existiert ein c_2 mit $E\max_{i=1,\dots,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2 \geq c_2\max_{i=1,\dots,n}\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2$ und damit gilt für alle $\beta \geq \frac{1}{c_2}$

$$\beta \frac{E \max\limits_{i=1,\ldots,n} \left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2}{\max\limits_{i=1,\ldots,n} \left(\sum\limits_{j \in \{k | x_k^{(l)} \neq 0\}}^{n} a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \geq \beta.$$

Folglich haben wir für alle $\beta \geq \max\left\{\frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_2}\right\}$

$$\begin{aligned} &P\left(\|G\|_{2\to 2} > \beta \ln(n) \left(E\left(\max_{i=1,\ldots,n} \left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2 \right) + E\left(\max_{j=1,\ldots,n} \|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\|_2 \right)\right)\right) \\ &\lesssim \sum_{l=1}^{n} \sum_{x^{(l)}} \exp\left(-l\beta^2\right) \leq \sum_{l=1}^{n} 2^l n^l \exp\left(-l\beta^2\right) = \sum_{l=1}^{n} \exp\left(l \ln(2n) - l\beta^2\right). \end{aligned}$$

Mit $\beta = \sqrt{3\ln(2n)}$, erhalten wir

$$\begin{aligned} &P\left(\|G\|_{2\to 2} > \sqrt{3\ln(2n)} \ln(n) \left(E\left(\max_{i=1,\ldots,n} \left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2 \right) + E\left(\max_{j=1,\ldots,n} \|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\|_2 \right)\right)\right) \\ &\lesssim \sum_{l=1}^{n} \exp\left(l \ln(2n) - 3l \ln(2n)\right) = \sum_{l=1}^{n} \exp\left(-2l \ln(2n)\right) = \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{1}{4n^2}\right)^l \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{4n^2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4n^2}} - 1 = \frac{1 - \left(\frac{1}{4n^2}\right)^{n}}{4n^2 - 1} \sim \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Abschließend gilt

$$\begin{aligned} &P\left(\|G\|_{2\to 2} > \sqrt{3} \left(\ln(2n)\right)^{\frac{3}{2}} \left(E\left(\max_{i=1,\ldots,n} \left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2 \right) + E\left(\max_{j=1,\ldots,n} \|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\|_2 \right)\right)\right) \\ &\leq P\left(\|G\|_{2\to 2} > \sqrt{3\ln(2n)} \ln(n) \left(E\left(\max_{i=1,\ldots,n} \left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2 \right) + E\left(\max_{j=1,\ldots,n} \|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\|_2 \right)\right)\right) \\ &\lesssim \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.1.19. Falls m Spalten der normalverteilten Zufallsmatrix 0 sind, das heißt, falls $j_1, \ldots, j_m \in \{1, \ldots, n\}$ existieren, so dass für alle $i = 1, \ldots, n$ und $l = 1, \ldots, m$ gilt $a_{ij_l} = 0$, so reicht es zur Bestimmung der Operatornorm B_2^{n-m} statt B_2^n zu betrachten und damit statt S_T^{n-1} auch S_T^{n-m-1} zu betrachten, somit erhalten wir in diesem Fall

$$P\left(\|G\|_{2\to 2} > \sqrt{3}\left(\ln(2(n-m))\right)^{\frac{3}{2}}\left(E\left(\max_{i=1,...,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right) + E\left(\max_{j=1,...,n}\|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\|_2\right)\right)\right)$$
$$\lesssim \frac{1}{(n-m)^2}.$$

An dieser Stelle formulieren wir die obere Abschätzung für den Erwartungswert von der größten singulären Zahl einer normalverteilten Zufallsmatrix, das heißt wir geben eine obere Abschätzung von $E\left(s_1((a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n)\right)$, beziehungsweise $E\left(\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2}\right)$, an:

Satz 4.1.20. *Für alle* $i,j = 1,...,n$ *seien* $a_{ij}\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ *und* $g_{ij}\sim N(0,1)$ *unabhängig, dann gilt*

$$E\left(\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2}\right) \lesssim (\ln(n))^{\frac{3}{2}}\left(E\left(\max_{i=1,...,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right) + E\left(\max_{j=1,...,n}\|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\|_2\right)\right).$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
&E\left(\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2}\right)\\
&= E\Bigg(\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2}\mathbb{1}_{\left(\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2}>\sqrt{3}(\ln(2n))^{\frac{3}{2}}\left(E\left(\max_{i=1,...,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right)+E\left(\max_{j=1,...,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\right\|_2\right)\right)\right)}\\
&\qquad + \left\|(a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2}\mathbb{1}_{\left(\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2}\leq\sqrt{3}(\ln(2n))^{\frac{3}{2}}\left(E\left(\max_{i=1,...,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right)+E\left(\max_{j=1,...,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\right\|_2\right)\right)\right)}\Bigg)\\
&\leq E\left(\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2}\mathbb{1}_{\left(\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2}>\sqrt{3}(\ln(2n))^{\frac{3}{2}}\left(E\left(\max_{i=1,...,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right)+E\left(\max_{j=1,...,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\right\|_2\right)\right)\right)}\right)\\
&\qquad + \sqrt{3}\left(\ln(2n)\right)^{\frac{3}{2}}\left(E\left(\max_{i=1,...,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right) + E\left(\max_{j=1,...,n}\|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\|_2\right)\right)\\
&\qquad P\left(\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2} \leq \sqrt{3}\left(\ln(2n)\right)^{\frac{3}{2}}\left(E\left(\max_{i=1,...,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right) + E\left(\max_{j=1,...,n}\|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\|_2\right)\right)\right)\\
&\leq E\left(\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2}\mathbb{1}_{\left(\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2}>\sqrt{3}(\ln(2n))^{\frac{3}{2}}\left(E\left(\max_{i=1,...,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right)+E\left(\max_{j=1,...,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\right\|_2\right)\right)\right)}\right)\\
&\qquad + \sqrt{3}\left(\ln(2n)\right)^{\frac{3}{2}}\left(E\left(\max_{i=1,...,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right) + E\left(\max_{j=1,...,n}\|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\|_2\right)\right).
\end{aligned}$$

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und Satz 4.1.18 gilt weiter

$$
\begin{aligned}
&E\left(\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2} 1_{\left(\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2}>\sqrt{3}(\ln(2n))^{\frac{3}{2}}\left(E\left(\max\limits_{i=1,\dots,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right)+E\left(\max\limits_{j=1,\dots,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\right\|_2\right)\right)\right)}\right)\\
&\le \left(E\left(\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2}^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\quad\left(E\left(1^2_{\left(\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2}>\sqrt{3}(\ln(2n))^{\frac{3}{2}}\left(E\left(\max\limits_{i=1,\dots,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right)+E\left(\max\limits_{j=1,\dots,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\right\|_2\right)\right)\right)}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \left(\int \sup_{\|x\|_2=1}\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}g_{ij}x_j\right)^2 dP\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\sqrt{P\left(\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2}>\sqrt{3}\,(\ln(2n))^{\frac{3}{2}}\left(E\left(\max_{i=1,\dots,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right)+E\left(\max_{j=1,\dots,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\right\|_2\right)\right)\right)}\\
&\le \left(\int \sup_{\|x\|_2=1}\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}g_{ij}x_j|\right)^2 dP\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{n} \le \left(\int \sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}g_{ij}|\right)^2 dP\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{n}.
\end{aligned}
$$

Mit Korollar 2.2.3 folgt

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n}\left(\int \sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}g_{ij}|\right)^2 dP\right)^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n\left(\left(\int \left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_1^2 dP\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\le \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n\left(c_{2,1}\int \left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_1^1 dP\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \frac{c_{2,1}}{n}\left(\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|\int |g_{ij}|dP\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{c_{2,1}}{n}\left\|\left(\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_1\right)_{i=1}^n\right\|_2\\
&\le \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{c_{2,1}}{n}\sqrt{n}\left\|\left(\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right)_{i=1}^n\right\|_2\\
&\le \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{c_{2,1}}{n}\sqrt{n}\sqrt{n}\left\|\left(\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right)_{i=1}^n\right\|_\infty\\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}c_{2,1}\left\|\left(\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right)_{i=1}^n\right\|_\infty,
\end{aligned}
$$

wobei $c_{2,1}$ die aus Korollar 2.2.3 resultierende Konstante ist. Zusammengefasst gilt also

$$E\left(\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2} 1_{\left(\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2} > \sqrt{3}(\ln(2n))^{\frac{3}{2}}\left(E\left(\max\limits_{i=1,\dots,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right)+E\left(\max\limits_{j=1,\dots,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\right\|_2\right)\right)\right)}\right)$$
$$\lesssim \left\|\left(\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right)_{i=1}^n\right\|_\infty .$$

Nach Satz 4.1.8 und nach Lemma 4.1.12 gilt

$$\max_{i=1,\dots,n}\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2 + \max_{j=1,\dots,n}\left\|(a_{ij})_{i=1}^n\right\|_2 \lesssim E\left(\max_{i=1,\dots,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2 + \max_{j=1,\dots,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\right\|_2\right),$$

also insgesamt

$$E\left(\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2} 1_{\left(\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2} > \sqrt{3}(\ln(2n))^{\frac{3}{2}}\left(E\left(\max\limits_{i=1,\dots,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right)+E\left(\max\limits_{j=1,\dots,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\right\|_2\right)\right)\right)}\right)$$
$$\lesssim E\left(\max_{i=1,\dots,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2 + \max_{j=1,\dots,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\right\|_2\right).$$

Zusammengefasst erhalten wir somit

$$\begin{aligned}
&E\left(\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2}\right)\\
&\lesssim E\left(\max_{i=1,\dots,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2 + \max_{j=1,\dots,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\right\|_2\right)\\
&\qquad + \sqrt{3}\,(\ln(2n))^{\frac{3}{2}}\left(E\left(\max_{i=1,\dots,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right) + E\left(\max_{j=1,\dots,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\right\|_2\right)\right)\\
&\sim (\ln(n))^{\frac{3}{2}}\left(E\left(\max_{i=1,\dots,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right) + E\left(\max_{j=1,\dots,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\right\|_2\right)\right).
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.1.21. Falls m Spalten der Zufallsmatrix 0 sind, erhalten wir entsprechend der Bemerkung 4.1.19

$$E\left(s_1((a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n)\right) \lesssim (\ln(n-m))^{\frac{3}{2}}\left(E\left(\max_{i=1,\dots,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right) + E\left(\max_{j=1,\dots,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\right\|_2\right)\right).$$

Wenn wir das in dem gesamten Abschnitt 4.1 gezeigte zusammenfassen, so erhalten wir unser Hauptresultat Satz 4.1.1, auf welches wir bereits in 4.1.1 eigegangen sind:

Satz (Satz 4.1.1) *Für alle $i, j = 1, ..., n$ seien $a_{ij} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $g_{ij} \sim N(0,1)$ unabhängig, dann gilt*

(i) $E\left(\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2}\right) \gtrsim E\left(\max_{i=1,...,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right) + E\left(\max_{j=1,...,n}\|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\|_2\right)$,

$E\left(\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2}\right) \lesssim (\ln(n))^{\frac{3}{2}}\left(E\left(\max_{i=1,...,n}\left\|(a_{ij}g_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right) + E\left(\max_{j=1,...,n}\|(a_{ij}g_{ij})_{i=1}^n\|_2\right)\right)$.

(ii) $E\left(\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2}\right) \gtrsim \max_{i=1,...,n}\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2 + \max_{j=1,...,n}\|(a_{ij})_{i=1}^n\|_2$,

$E\left(\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2}\right) \lesssim (\ln(n))^2\left(\max_{i=1,...,n}\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2 + \max_{j=1,...,n}\|(a_{ij})_{i=1}^n\|_2\right)$.

(iii) Falls für alle $i, j = 1, ..., n$ gilt $a_{ij} \in \{0,1\}$, so gilt

$$
\begin{aligned}
&\max\left\{\sqrt{\left|\ln\left(\sum_{i=1}^n \max_{j=1,...,n} a_{ij}\right)\right|}, \max_{i=1,...,n}\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right\} \\
&\qquad\qquad + \max\left\{\sqrt{\left|\ln\left(\sum_{j=1}^n \max_{i=1,...,n} a_{ij}\right)\right|}, \max_{j=1,...,n}\|(a_{ij})_{i=1}^n\|_2\right\} \\
&\lesssim E\left(\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2}\right) \\
&\lesssim (\ln(n))^{\frac{3}{2}}\left(\max\left\{\sqrt{\left|\ln\left(\sum_{i=1}^n \max_{j=1,...,n} a_{ij}\right)\right|}, \max_{i=1,...,n}\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right\}\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \max\left\{\sqrt{\left|\ln\left(\sum_{j=1}^n \max_{i=1,...,n} a_{ij}\right)\right|}, \max_{j=1,...,n}\|(a_{ij})_{i=1}^n\|_2\right\}\right).
\end{aligned}
$$

4.2 Größte singuläre Zahl "beliebiger" Zufallsmatrizen

In diesem Kapitel verallgemeinern wir unsere bisherigen Resultate für Zufallsmatrizen mit normalverteilten Einträgen auf solche, deren Einträge beliebige zentrierte und unabhängige Zufallsgrößen mit beschränkten zweiten Momenten sind.

Diese deutliche Verallgemeinerung folgt nahezu direkt aus unseren bisherigen Ergebnissen für normalverteilte Zufallsgrößen. Die untere Abschätzung folgt ganz allgemein und die Verallgemeinerung für die obere Abschätzung besteht im Wesentlichen aus zwei Schritten. Zunächst zeigen wir, dass wir bereits den Erwartungswert von beliebigen Bernoulli-

Matrizen durch unsere normalverteilten Zufallsmatrizen beschränken können, und dann führen wir den allgemeinen Fall durch Betrachten des bedingten Erwartungswerts auf die Bernoulli- und damit unsere normalverteilten Zufallsmatrizen zurück.

Wie gehen zum Beweis ähnlich wie in [10] vor; ursprünglich geht diese Technik auf G. Pisier, [12], zurück.

Satz 4.2.1. Für alle $i,j = 1,...,n$ seien X_{ij} unabhängige, zentrierte Zufallsgrößen mit endlichen zweiten Momenten. Dann gilt

(i)

$$E\left(\left\|(X_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2}\right) \gtrsim E\left(\max_{i=1,...,n}\left\|(X_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right) + E\left(\max_{j=1,...,n}\|(X_{ij})_{i=1}^n\|_2\right)$$

(ii)

$$E\left(\left\|(X_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2}\right) \lesssim (\ln(n))^2\left(E\left(\max_{i=1,...,n}\left\|(X_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right) + E\left(\max_{j=1,...,n}\|(X_{ij})_{i=1}^n\|_2\right)\right).$$

Beweis. Im folgenden Beweis bezeichne $\|\cdot\|$ stets die Operatornorm $\|\cdot\|_{2\to 2}$.

(i) Wie in Lemma 4.1.5 bereits gezeigt, gilt ganz allgemein

$$\begin{aligned} E\left\|(X_{ij})_{i,j=1}^n\right\| &= \int_\Omega \sup_{\substack{\|x\|_2=1\\ \|y\|_2=1}} \left|\sum_{i,j=1,...,n} X_{ij}(\omega)x_jy_i\right| dP(\omega) \\ &\geq \frac{1}{2}\left(E\left(\max_{i=1,...,n}\left\|(X_{ij})_{j=1}^n\right\|_2\right) + E\left(\max_{j=1,...,n}\|(X_{ij})_{i=1}^n\|_2\right)\right). \end{aligned}$$

(ii) Es seien g_{ij}, $i,j = 1,...,n$ unabhängige standardnormalverteilte Zufallsgrößen. Des Weiteren seien $\tilde{X}_{ij}$, $i,j = 1,...,n$ unabhängige Kopien der X_{ij}. Außerdem seien ε_{ij}, $i,j = 1,...,n$ unabhängige (untereinander, von g_{ij} und von X_{ij} und $\tilde{X}_{ij}$) Bernoulli-$\left(\frac{1}{2}\right)$-Zufallsgrößen, das heißt $P(\varepsilon_{ij} = \pm 1) = \frac{1}{2}$.
Es gilt

$$g_{ij} \overset{\mathfrak{D}}{=} \varepsilon_{ij}|g_{ij}|.$$

Um dies einzusehen sei $A \in \mathfrak{B}_\mathbb{R}$ und es seien $A^+ = A \cap \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $A^- = A \cap \mathbb{R}_{<0}$, dann gilt

$$
\begin{aligned}
P(\varepsilon_{ij}|g_{ij}| \in A) &= P(\varepsilon_{ij}|g_{ij}| \in A^+) + P(\varepsilon_{ij}|g_{ij}| \in A^-) \\
&= P(|g_{ij}| \in A^+, \varepsilon_{ij} = 1) + P(-|g_{ij}| \in A^-, \varepsilon_{i,j} = -1) \\
&= \frac{1}{2}P(|g_{ij}| \in A^+) + \frac{1}{2}P(-|g_{ij}| \in A^-) \\
&= \frac{1}{2}P(g_{ij} \in A^+ \vee -g_{ij} \in A^+) + \frac{1}{2}P(g_{ij} \in A^- \vee -g_{ij} \in A^-) \\
&= \frac{1}{2}2P(g_{ij} \in A^+) + \frac{1}{2}2P(g_{ij} \in A^-) \\
&= P(g_{ij} \in A).
\end{aligned}
$$

Mit der Dreiecksungleichung, und da ε_{ij} und g_{ij}, $i,j = 1,...,n$, unabhängig sind, erhalten wir

$$
\begin{aligned}
E\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right\| &= E\left\|(a_{ij}\varepsilon_{ij}|g_{ij}|)_{i,j=1}^n\right\| = E\left(E\left(\left\|(a_{ij}\varepsilon_{ij}|g_{ij}|)_{i,j=1}^n\right\| |(\varepsilon_{ij})\right)\right) \\
&\geq E\left\|(E(a_{ij}\varepsilon_{ij}|g_{ij}||\varepsilon_{ij}))_{i,j=1}^n\right\| = E\left\|(a_{ij}\varepsilon_{ij}E(|g_{ij}||\varepsilon_{ij}))_{i,j=1}^n\right\| \\
&= E\left\|(a_{ij}\varepsilon_{ij}E|g_{ij}|)_{i,j=1}^n\right\| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}E\left\|(a_{ij}\varepsilon_{ij})_{i,j=1}^n\right\|.
\end{aligned}
$$

Mit Satz 4.1.1 gilt

$$
\begin{aligned}
E\left\|(a_{ij}\varepsilon_{ij})_{i,j=1}^n\right\| &\leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}E\left\|(a_{ij}g_{ij})_{i,j=1}^n\right\| \\
&\lesssim (\ln(n))^2\left(\max_{i=1,...,n}\left\|(a_{ij})_{j=1}^n\right\|_2 + \max_{j=1,...,n}\left\|(a_{ij})_{i=1}^n\right\|_2\right).
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

Weiter gilt auf Grund der Unabhängigkeit der X_{ij} und $\tilde{X}_{ij}$, $i,j = 1,...,n$,

$$
\begin{aligned}
&E\left(\left\|(X_{ij})_{i,j=1}^n\right\|\right) - E\left(\left\|(X_{ij} - \tilde{X}_{ij})_{i,j=1}^n\right\|\right) \\
&= E\left(E\left(\left\|(X_{ij})_{i,j=1}^n\right\| \mid (X_{ij})_{i,j}\right)\right) - E\left(E\left(\left\|(X_{ij} - \tilde{X}_{ij})_{i,j=1}^n\right\| \mid (X_{ij})_{i,j}\right)\right) \\
&= \int\left(\left\|(x_{ij})_{i,j=1}^n\right\| - E\left(\left\|(x_{ij} - \tilde{X}_{ij})_{i,j=1}^n\right\|\right)\right) P^{(X_{ij})_{i,j=1}^n}\left(d(x_{ij})_{i,j}\right).
\end{aligned}
$$

Es gilt aufgrund der Dreiecksungleichung

$$
E\left(\left\|(x_{ij} - \tilde{X}_{ij})_{i,j=1}^n\right\|\right) \geq \left\|(x_{ij} - E\tilde{X}_{i,j})_{i,j=1}^n\right\|.
$$

Da $\tilde{X}_{i,j}$ für alle $i, j = 1, ..., n$ zentriert sind, also $E\tilde{X}_{i,j} = 0$, erhalten wir insbesondere

$$E\left(\left\|(x_{ij} - \tilde{X}_{ij})_{i,j=1}^n\right\|\right) \geq \left\|(x_{ij})_{i,j=1}^n\right\|.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
&E\left(\left\|(X_{ij})_{i,j=1}^n\right\|\right) - E\left(\left\|(X_{ij} - \tilde{X}_{ij})_{i,j=1}^n\right\|\right) \\
&= \int \left(\left\|(x_{ij})_{i,j=1}^n\right\| - E\left(\left\|(x_{ij} - \tilde{X}_{ij})_{i,j=1}^n\right\|\right)\right) P^{(X_{ij})_{i,j=1}^n}\left(d(x_{ij})_{i,j}\right) \\
&\leq \int \left(\left\|(x_{ij})_{i,j=1}^n\right\| - \left\|(x_{ij})_{i,j=1}^n\right\|\right) P^{(X_{ij})_{i,j=1}^n}\left(d(x_{ij})_{i,j}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
E\left(\left\|(X_{ij})_{i,j=1}^n\right\|\right) &\leq E\left(\left\|(X_{ij} - \tilde{X}_{ij})_{i,j=1}^n\right\|\right) = E\left(\left\|(\varepsilon_{ij}(X_{ij} - \tilde{X}_{ij}))_{i,j=1}^n\right\|\right) \\
&\leq 2E\left\|(\varepsilon_{ij}X_{ij})_{i,j=1}^n\right\|.
\end{aligned}$$

Es folgt ebenfalls mit der Unabhängigkeit und (4.7)

$$\begin{aligned}
E\left(\left\|(X_{ij})_{i,j=1}^n\right\|\right) &\leq 2E\left\|(\varepsilon_{ij}X_{ij})_{i,j=1}^n\right\| = E\left(E\left(\left\|(\varepsilon_{ij}X_{ij})_{i,j=1}^n\right\| |(X_{ij})\right)\right) \\
&= \int E\left(\left\|(\varepsilon_{ij}x_{ij})_{i,j=1}^n\right\|\right) P^{(X_{ij})}(d(x_{ij})) \\
&\lesssim (\ln(n))^2 \int \left(\max_{i=1,...,n} \left\|(x_{ij})_{j=1}^n\right\|_2 + \max_{j=1,...,n} \left\|(x_{ij})_{i=1}^n\right\|_2\right) P^{(X_{ij})}(d(x_{ij})) \\
&= (\ln(n))^2 E\left(\max_{i=1,...,n} \left\|(X_{ij})_{j=1}^n\right\|_2 + \max_{j=1,...,n} \left\|(X_{ij})_{i=1}^n\right\|_2\right).
\end{aligned}$$

□

Wir berücksichtigen nochmals unsere Ergebnisse aus Kapitel 3, genauer gesagt Satz 3.1.5, und erhalten direkt:

Satz 4.2.2. Für alle $i, j = 1, ..., n$ seien X_{ij} unabhängige, zentrierte Zufallsgrößen mit endlichen zweiten Momenten. Dann gilt

$$\left\|(1)_{j=1}^n\right\|_{(M_i)_i} + \left\|(1)_{i=1}^n\right\|_{(M_j)_j} \lesssim E\left(\left\|(X_{ij})_{i,j=1}^n\right\|_{2\to 2}\right) \lesssim (\ln(n))^2 \left(\left\|(1)_{j=1}^n\right\|_{(M_i)_i} + \left\|(1)_{i=1}^n\right\|_{(M_j)_j}\right),$$

wobei

$$M_i(s) = \int_0^s \int\limits_{\frac{1}{t} \leq \left\| (X_{ij})_{j=1}^n \right\|_2} \left\| (X_{ij})_{j=1}^n \right\|_2 dPdt.$$

Bemerkung 4.2.3. Da für alle $i, j = 1, ..., n$ gilt $EX_{ij}^2 < \infty$, gilt aufgrund der Konkavität der Wurzelfunktion für alle $i = 1, ..., n$

$$E \left\| (X_{ij})_{j=1}^n \right\|_2 \leq \left(\sum_{j=1}^n E\left(X_{ij}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Somit sind die in den Abschätzungen auftretenden Ausdrücke endlich und Satz 3.1.5 kann angewendet werden.

Literaturverzeichnis

[1] Z. D. Bai, Jack W. Silverstein, and Y. Q. Yin. A note on the largest eigenvalue of a large-dimensional sample covariance matrix. *J. Multivariate Anal.*, 26(2):166–168, 1988.

[2] S. Chevet. Séries de variables aléatoires gaussiennes à valeurs dans $E\hat{\otimes}_\varepsilon F$. Application aux produits d'espaces de Wiener abstraits. In *Séminaire sur la Géométrie des Espaces de Banach (1977–1978)*, pages Exp. No. 19, 15. École Polytech., Palaiseau, 1978.

[3] Alan Edelman. Eigenvalues and condition numbers of random matrices. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 9(4):543–560, 1988.

[4] Yehoram Gordon, Alexander Litvak, Carsten Schütt, and Elisabeth Werner. Uniform estimates for order statistics and orlicz functions. *Positivity.*

[5] Yehoram Gordon, Alexander Litvak, Carsten Schütt, and Elisabeth Werner. Orlicz norms of sequences of random variables. *Ann. Probab.*, 30(4):1833–1853, 2002.

[6] Fumio Hiai and Dénes Petz. *The semicircle law, free random variables and entropy*, volume 77 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[7] M. A. Krasnoselski. *Convex Functions and Orlicz Spaces.*

[8] Stanisław Kwapień and Carsten Schütt. Some combinatorial and probabilistic inequalities and their application to Banach space theory. *Studia Math.*, 82(1):91–106, 1985.

[9] Stanisław Kwapień and Carsten Schütt. Some combinatorial and probabilistic inequalities and their application to Banach space theory. II. *Studia Math.*, 95(2):141–154, 1989.

[10] Rafał Latała. Some estimates of norms of random matrices. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 133(5):1273–1282 (electronic), 2005.

[11] Michel Ledoux and Michel Talagrand. *Probability in Banach spaces*, volume 23 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1991. Isoperimetry and processes.

[12] Gilles Pisier. Type des espaces normés. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 276:A1673–A1676, 1973.

[13] Gilles Pisier. *The volume of convex bodies and Banach space geometry*, volume 94 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[14] Mark Rudelson and Roman Vershynin. The least singular value of a random square matrix is $O(n^{-1/2})$. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 346(15-16):893–896, 2008.

[15] Mark Rudelson and Roman Vershynin. The Littlewood-Offord problem and invertibility of random matrices. *Adv. Math.*, 218(2):600–633, 2008.

[16] Stanisław J. Szarek. Condition numbers of random matrices. *J. Complexity*, 7(2):131–149, 1991.

[17] Y. Q. Yin, Z. D. Bai, and P. R. Krishnaiah. On the limit of the largest eigenvalue of the large-dimensional sample covariance matrix. *Probab. Theory Related Fields*, 78(4):509–521, 1988.

Erklärung

Ich habe die vorliegende Arbeit, abgesehen von der Beratung durch den Betreuer meiner Promotion, unter Einhaltung guter wissenschaftlicher Praxis selbstständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht. Diese Arbeit hat weder ganz noch zum Teil an anderer Stelle im Rahmen eines Prüfungsverfahrens vorgelegen. Des Weiteren habe ich noch keinen Promotionsversuch unternommen.

Kiel, 05. Mai 2011

(Stiene Riemer)

Lebenslauf

Zur Person:

Name:	Kirsten Stiene Riemer
Geburtsdatum und -ort:	02.12.1985 in Bremen
Staatsangehörigkeit:	deutsch

Ausbildung:

07/2004	Abitur am Alten Gymnasium Bremen
04/2008	Diplom in Mathematik mit Nebenfach Volkswirtschaftslehre an der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel (CAU)

Beruflicher Werdegang:

10/2006–02/2008	Studentische Hilfskraft am Mathematischen Seminar der CAU
08/2007–10/2007	Praktikum bei KPMG in Frankfurt
seit 05/2008	Wissenschaftliche Mitarbeiterin am Mathematischen Seminar der CAU

Kiel, 05. Mai 2011