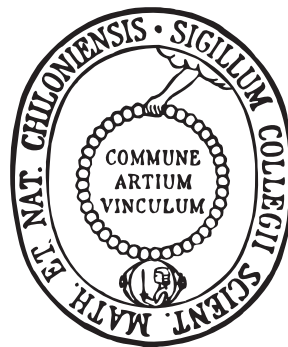


# Über Ränder von mehrfach zusammenhängenden wandernden Gebieten

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades  
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Christian-Albrechts-Universität  
zu Kiel



vorgelegt von  
Markus Baumgartner

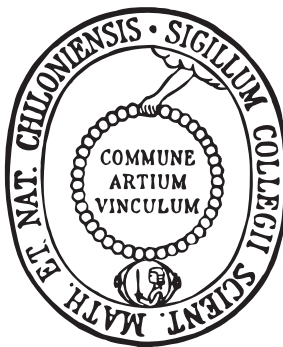
Kiel,  
Juni 2015



# Über Ränder von mehrfach zusammenhängenden wandernden Gebieten

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades  
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Christian-Albrechts-Universität  
zu Kiel



vorgelegt von  
Markus Baumgartner

Kiel,  
Juni 2015

Referent: Prof. Dr. Walter Bergweiler  
Korreferent: Prof. Dr. Norbert Steinmetz

Tag der mündlichen Prüfung: 01.09.2015  
Zum Druck genehmigt: 01.09.2015

Dekan: Prof. Dr. Wolfgang J. Duschl

# Zusammenfassung

Wir untersuchen die Ränder von mehrfach zusammenhängenden wandernden Gebieten ganzer transzendenter Funktionen. Unter anderem zeigen wir, dass mehrfach zusammenhängende wandernde Gebiete ganzer transzendenter Funktionen unter gewissen Voraussetzungen von Jordankurven berandet sind.

Für eine ganze oder rationale Funktion  $f$  ist die *Fatoumenge*  $\mathcal{F}(f)$  die Menge all der Punkte, in denen die Folge  $f^n$  der Iterierten von  $f$  eine normale Familie bildet, und die *Juliamenge*  $\mathcal{J}(f)$  ist ihr Komplement. Eine Komponente  $U$  der Fatoumenge nennen wir *wandernd*, wenn  $f^n(U) \neq f^m(U)$  für alle  $n \neq m$  gilt. Sei  $U = U_0$  ein mehrfach zusammenhängendes wanderndes Gebiet einer ganzen transzendenten Funktion  $f$  und  $U_n := f^n(U)$ . Dann ist  $U_n$  beschränkt. Mit  $\partial_\infty U_n$  bezeichnen wir die Randkomponente von  $U_n$ , die  $U_n$  von  $\infty$  trennt und mit  $\partial_0 U_n$  die Randkomponente, die  $U_n$  von 0 trennt, wenn eine solche existiert.

Wir zeigen, dass unter bestimmten Voraussetzungen  $\partial_\infty U_{n-1} = \partial_0 U_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Weiter zeigen wir, dass diese Ränder Jordankurven sind, und nutzen dies, um zu zeigen, dass viele andere Randkomponenten der  $U_n$  Kurven sind. Unter diesen Voraussetzungen ist jede Randkomponente der  $U_n$  eine Kurve, wenn zusätzlich  $\partial_0 U_n$  isoliert ist, das heißt, wenn sich keine weiteren Randkomponenten von  $U_n$  bei  $\partial_0 U_n$  häufen. Diese Resultate schließen viele komplizierte topologische Strukturen für die Ränder der wandernden Gebiete aus und zeigen demnach, dass wandernde Gebiete vergleichsweise einfache Formen haben können. Schließlich zeigen wir, dass die Randkurven unter zusätzlichen Voraussetzungen sogar rektifizierbar sind.

Außerdem geben wir Beispiele an, die unsere Resultate veranschaulichen. Wir betrachten mehrere Klassen von Funktionen mit wandernden Gebieten, die auf Beispiele von Baker zurückgehen, und zeigen, dass diese in viele Fällen von Kurven berandet sind. Unter anderem zeigen wir, dass für das erste Beispiel eines wandernden Gebietes von Baker aus dem Jahr 1976 und für das erste Beispiel eines unendlich-fach zusammenhängenden wandernden Gebietes aus dem Jahr 1985 die Ränder aus abzählbar vielen Jordankurven bestehen.



# Abstract

We investigate the boundaries of multiply connected wandering domains of entire transcendental functions. Among other things we show that under certain conditions the boundary components of multiply connected wandering domains of entire transcendental functions are Jordancurves.

For an entire or rational function  $f$  the *Fatou set*  $\mathcal{F}(f)$  is the set of all points such that the sequence  $f^n$  of iterates of  $f$  form a normal family and the *Julia set*  $\mathcal{J}(f)$  is its complement. A component  $U$  of the Fatou set is called *wandering* if  $f^n(U) \neq f^m(U)$  holds for all  $n \neq m$ . Let  $U = U_0$  be a multiply connected wandering domain of an entire transcendental function  $f$  and  $U_n := f^n(U)$ . Then  $U_n$  is bounded. By  $\partial_\infty U_n$  we denote the boundary component of  $U_n$  which separates  $U_n$  from  $\infty$  and by  $\partial_0 U_n$  we denote the boundary component which separates  $U_n$  from 0 if such a component exists.

We show that under certain conditions  $\partial_\infty U_{n-1} = \partial_0 U_n$  holds for all  $n \in \mathbb{N}$ . Moreover we show that these boundaries are Jordan curves and we use this to show that many boundary components of the  $U_n$  are curves. Under these conditions all boundary components of  $U_n$  are curves if we have in addition that  $\partial_0 U_n$  is isolated, which means that there are no other boundary components of  $U_n$  which accumulate at  $\partial_0 U_n$ . These results rule out many complicated topological structures for the boundaries and thus show that wandering domains can have comparatively simple forms. Finally we show that under additional conditions the boundary curves are in fact rectifiable.

Furthermore, we give examples which illustrate our results. We consider several classes of functions with wandering domains which go back to Baker and show that these are in many cases bounded by curves. Among others we show that for the first example of a wandering domain by Baker from 1976 and for the first example of an infinitely connected wandering domain from 1985 the boundaries consist of countably many Jordan curves.





# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>13</b>
2.1	Definitionen und Notationen . . . . .	13
2.2	Kurven . . . . .	15
2.3	Funktionentheoretische Grundlagen . . . . .	18
2.4	Analytische Fortsetzung . . . . .	20
2.5	Unendliche Produkte . . . . .	22
2.6	Eigentliche Abbildungen . . . . .	23
2.7	Fatou- und Juliamengen . . . . .	25
2.8	Wandernde Gebiete . . . . .	29
2.9	Lokaler Zusammenhang . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Resultate</b>	<b>39</b>
3.1	Allgemeine Untersuchung von Randkomponenten . . . . .	39
3.2	Kurven als Randkomponenten . . . . .	53
3.3	Rektifizierbarkeit der Randkurven . . . . .	68
<b>4</b>	<b>Beispiele</b>	<b>75</b>
4.1	Das erste Beispiel eines wandernden Gebietes . . . . .	75
4.2	Beispiel unendlich-fachen Zusammenhangs . . . . .	83
4.3	Beispiel beliebiger Ordnung . . . . .	93
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>109</b>



# Kapitel 1

## Einleitung

Die Untersuchung des Iterationsverhaltens ganzer und rationaler Funktionen hat ihren Ursprung in den Arbeiten von Julia [Jul18] und Fatou [Fat19], [Fat26] zu Beginn des 20. Jahrhunderts. Fatou und Julia zerlegten unabhängig voneinander die komplexe Ebene  $\mathbb{C}$  beziehungsweise die Riemannsche Sphäre  $\overline{\mathbb{C}}$  in zwei disjunkte Mengen, die später nach ihnen als Fatou- und Juliamenge benannt wurden. Für eine ganze oder rationale Funktion  $f$  ist die *Fatoumenge*  $\mathcal{F}(f)$  die Menge all der Punkte, in denen die Folge der Iterierten von  $f$  eine normale Familie bildet, und die *Juliamenge*  $\mathcal{J}(f)$  ist ihr Komplement. Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli ist daher das Iterationsverhalten der Punkte aus der Fatoumenge in gewisser Weise stabil. Das Iterationsverhalten der Punkte aus der Juliamenge ist hingegen instabil. Unter Instabilität verstehen wir dabei, dass schon für zwei Punkte innerhalb einer kleinen Umgebung um einen Punkt aus der Juliamenge das Iterationsverhalten stark differieren kann.

Die Fatoumenge ist offen und vollständig invariant unter  $f$ , das heißt, es gilt  $z \in \mathcal{F}(f)$  genau dann, wenn  $f(z) \in \mathcal{F}(f)$  gilt. Ist  $U = U_0$  eine Zusammenhangskomponente von  $\mathcal{F}(f)$ , eine sogenannte Fatoukomponente, so existiert für jedes  $n \in \mathbb{N}$  eine Fatoukomponente  $U_n$ , sodass  $f^n(U) \subset U_n$  gilt. Dabei bezeichnet  $f^n := f \circ \dots \circ f$  die  $n$ -te Iterierte der Funktion  $f$ . Eine Fatoukomponente  $U$  heißt *periodisch*, wenn ein  $p \in \mathbb{N}$  mit  $f^p(U) \subseteq U$  existiert, und *präperiodisch*, wenn ein  $n \in \mathbb{N}$  existiert, sodass  $f^n(U)$  periodisch ist. Periodische Fatoukomponenten können in verschiedene Typen unterteilt werden und sind sehr gut verstanden, siehe zum Beispiel den Klassifikationssatz (Satz 2.7.11). Eine Fatoukomponente, die nicht präperiodisch ist, heißt *wandernd*. Für eine wandernde Fatoukomponente  $U$  gilt dann  $f^n(U) \neq f^m(U)$  für alle  $n \neq m$  (für mehr Informationen zur Iterationstheorie siehe Kapitel 2.7).

Ein sehr bedeutendes Theorem von Sullivan [Sul85] besagt, dass rationale Funktionen keine wandernden Gebiete besitzen können. Damit haben rationale Funktionen nur präperiodische Fatoukomponenten und der Klassifikationssatz liefert somit eine vollständige Beschreibung auf der gesamten Fatoumenge. Baker zeigte jedoch bereits in [Bak76] noch vor Sullivans Arbeit, dass ganze transzendente Funktionen wandernde Gebiete haben können. Damit liefert der Klassifikationssatz hier keine vollständige Klärung der Situation. Tat-

sächlich gab Baker in [Bak63] das erste Beispiel einer ganzen transzendenten Funktion mit mehrfach zusammenhängenden Fatoukomponenten. Die von Baker betrachtete Funktion hat die Form

$$f(z) = C \cdot z^2 \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{r_j}\right),$$

wobei  $C > 0$  eine Konstante ist und  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine positive reelle Folge, die der Rekursionsformel

$$r_{n+1} = Cr_n^2 \prod_{j=1}^n \left(1 + \frac{r_n}{r_j}\right)$$

genügt. Weiter sind  $r_1 > 1$  und  $C > 0$  so gewählt, dass  $C \cdot \exp\left(\frac{2}{r_1}\right) < \frac{1}{4}$  und  $C \cdot r_1 > 1$  gilt, zum Beispiel  $C = \frac{1}{4e}$  und  $r_1 > 4e$ . Baker zeigte, dass für die Annuli  $B_n := \mathbb{A}(r_n^2, \sqrt{r_{n+1}})$  die Ungleichung  $f(B_n) \subset B_{n+1}$  für große  $n$  gilt, wobei wir  $\mathbb{A}(r, R) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$  für  $0 < r < R$  setzen. Es gilt  $f(0) = 0$  und  $f^k(z) \rightarrow \infty$  für  $k \rightarrow \infty$  für alle  $z \in B_n$ . Daher existieren mehrfach zusammenhängende Fatoukomponenten  $U_n$  mit  $B_n \subset U_n$ . Diese  $U_n$  werden dann unter Iteration jeweils aufeinander abgebildet, das heißt, es gilt  $f(U_n) \subseteq U_{n+1}$ . Hierbei war jedoch nicht klar, ob die  $U_n$  alle verschieden sind oder nicht doch alle zu einer großen, mehrfach zusammenhängenden und unbeschränkten Fatoukomponente  $U$  gehören. Baker konnte jedoch mehrere Jahre später in [Bak76] zeigen, dass seine Funktion keine mehrfach zusammenhängende unbeschränkte Fatoukomponente besitzt. Damit müssen die  $U_n$  alle verschieden und demnach wandernde Gebiete sein. Kurz darauf zeigte er in [Bak75, Theorem 1], dass ganze transzendente Funktionen generell keine unbeschränkten mehrfach zusammenhängenden Fatoukomponenten haben. Daraus folgt, dass alle mehrfach zusammenhängenden Gebiete bereits wandernde Gebiete sein müssen (siehe Bemerkung 2.8.5). Weiter zeigte Baker in [Bak84, Theorem 3.1], dass solche mehrfach zusammenhängenden wandernden Gebiete  $U_n$  folgende Eigenschaften besitzen (siehe Abbildung 1.1):

- Alle  $U_n$  sind beschränkt und mehrfach zusammenhängend.
- Es existiert ein  $N \in \mathbb{N}$ , sodass sowohl 0 als auch  $U_n$  für alle  $n \geq N$  in einer beschränkten Komponente von  $\overline{\mathbb{C}} \setminus U_{n+1}$  liegen.
- Es gilt  $\text{dist}(U_n, 0) \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ , also gilt insbesondere  $f^k(z) \rightarrow \infty$  für  $k \rightarrow \infty$  für alle  $z \in U_n$ .

Da alle  $U_n$  beschränkt sind, ist  $f : U_n \rightarrow U_{n+1}$  eine eigentliche Abbildung und es gilt  $f(U_n) = U_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , siehe Satz 2.7.9.

Es gibt inzwischen viele Beispiele sowohl von einfach als auch von mehrfach zusammenhängenden wandernden Gebieten, siehe [Her84], [Bak84], [Sul85], [EL87], [Dev89], [Six12], [Bis15] für Beispiele mit einfach zusammenhängenden wandernden Gebieten und [Bak63], [Bak76], [Bak85], [Hin94], [KS08], [BZ11], [BRS13], [Bis12] für Beispiele mit mehrfach zusammenhängenden wandernden Gebieten sowie [Ber11] und [Osb13] für Beispiele mit einfach und mehrfach zusammenhängenden wandernden Gebieten.

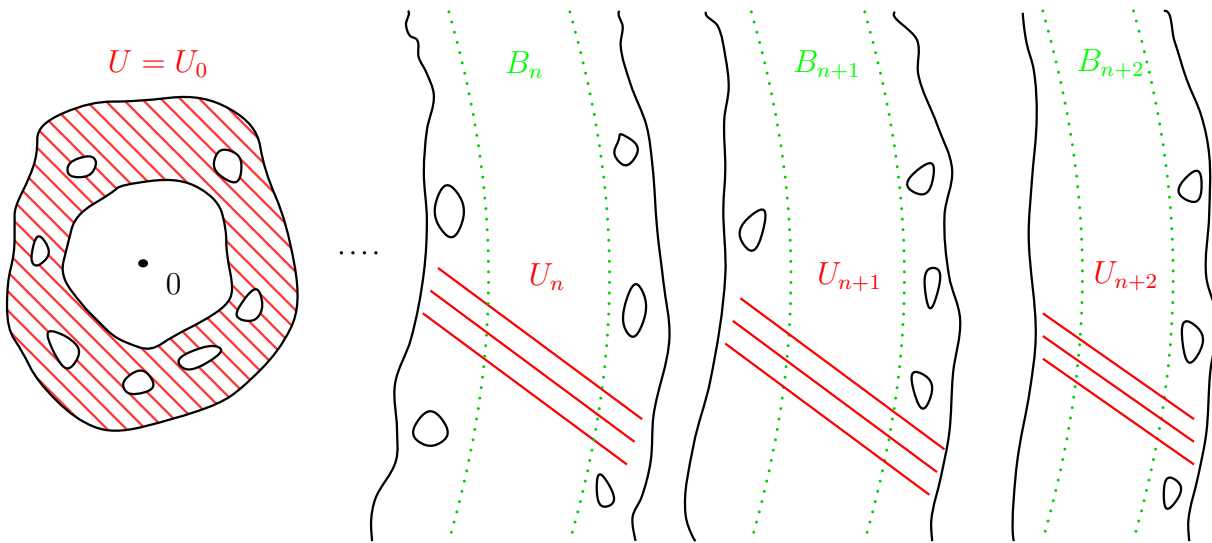


Abbildung 1.1: Aufgrund obiger Eigenschaften ist es sinnvoll, sich mehrfach zusammenhängende wandernde Gebiete als große topologische Annuli um 0 herum vorzustellen, die allerdings viele weitere „kleine Löcher“ haben können. Die  $B_n$  entsprechen den Annuli von Bakers erstem Beispiel. Wir werden später sehen, dass wandernde Gebiete immer solche Annuli enthalten. Alle Bilder von wandernden Gebieten in dieser Arbeit sind vereinfachte Darstellungen und vermitteln nicht die korrekten Größenverhältnisse.

Sowohl Eremenko und Lyubich [EL92] als auch Goldberg und Keen [GK86] zeigten, dass sich das Resultat von Sullivan auf Funktionen der *Speiser-Klasse*  $\mathcal{S}$  erweitern lässt, das heißt, dass Funktionen in  $\mathcal{S}$  keine wandernden Gebiete haben. Die Klasse  $\mathcal{S}$  besteht aus allen ganzen transzendenten Funktionen mit endlich vielen kritischen und asymptotischen Werten (siehe Definition 2.4.7). Eremenko und Lyubich konnten außerdem zeigen, dass es keine mehrfach zusammenhängenden wandernden Gebiete in der *Eremenko-Lyubich-Klasse*  $\mathcal{B}$  geben kann. Die Klasse  $\mathcal{B}$  besteht aus allen ganzen transzendenten Funktionen, für die die Menge der kritischen und asymptotischen Werte beschränkt ist. Eremenko und Lyubich zeigten sogar, dass für  $f \in \mathcal{B}$  die von Eremenko in [Er89] eingeführte *entkommene Menge*  $I(f) := \{z : f^n(z) \rightarrow \infty \text{ für } n \rightarrow \infty\}$  in der Juliamenge enthalten ist. Damit können Funktionen in  $\mathcal{B}$  keine mehrfach zusammenhängenden wandernden Gebiete haben, da diese in der entkommenden Menge liegen.

Es bleibt die Frage offen, ob Funktionen in  $\mathcal{B}$  einfach zusammenhängende wandernde Gebiete haben können. Diese können dann nach Eremenko und Lyubich nicht in der entkommenden Menge liegen. Bishop war der erste, der zeigen konnte, dass einfach zusammenhängende wandernde Gebiete auch in der Klasse  $\mathcal{B}$  auftreten können, siehe [Bis15]. Eremenko und Lyubich zeigten in [EL87, Example 1] bereits selbst, dass ein Beispiel eines einfach zusammenhängenden wandernden Gebietes außerhalb der Klasse  $\mathcal{B}$  existiert, welches nicht in der entkommenden Menge liegt. Sowohl das Beispiel von Eremenko und Lyubich als auch das Beispiel von Bishop liegen zwar nicht in der entkommenden Menge, haben aber auch keinen beschränkten Orbit (siehe Definition 2.7.4). Ob es wandernde Gebiete mit beschränktem

Orbit geben kann, ist nicht bekannt. Mehrfach zusammenhängende wandernde Gebiete liegen sogar inklusive ihres Randes in der in [BH99] eingeführten *schnellentkommenden Menge*  $A(f)$  (siehe Definition 2.7.3), welche die entkommene Menge enthält. Die entkommene und die schnellentkommene Menge sind von großer Bedeutung in der Untersuchung der Dynamik von ganzen transzendenten Funktionen, siehe zum Beispiel [Rem07], [RS12] und [RRRS11]. Einfach zusammenhängende wandernde Gebiete können ebenfalls in der schnellentkommenden Menge liegen, siehe [Ber11] und [Six12] für Beispiele. Rippon und Stallard haben entkommene Fatoukomponenten, wozu neben wandernden Gebieten auch sogenannte *Bakergebiete* (vgl. Satz 2.7.11) gehören können, und deren Ränder in [RS11] genauer untersucht.

Wir untersuchen in dieser Arbeit die Randkomponenten mehrfach zusammenhängender wandernder Gebiete. Im Folgenden sei  $U = U_0$  ein mehrfach zusammenhängendes wanderndes Gebiet einer ganzen transzendenten Funktion  $f$  und  $U_n := f^n(U)$ . Das Gebiet  $U$  heißt *k-fach zusammenhängend*, wenn  $\overline{\mathbb{C}} \setminus U$  genau  $k$  Zusammenhangskomponenten hat. Wir setzen dann  $c(U) := k$ . Baker modifizierte seine Konstruktion in [Bak85], um ein Beispiel eines unendlich-fach zusammenhängenden wandernden Gebietes zu konstruieren. Inzwischen wurde von Bergweiler und Zheng in [BZ11, Theorem 1.2] gezeigt, dass sein erstes Beispiel ebenfalls diese Eigenschaft besitzt. Außerdem untersuchten Bergweiler und Zheng in [BZ11, Theorem 1.1] die gleichmäßige Perfektheit (siehe Definition 2.9.23) von Rändern mehrfach zusammenhängender wandernder Gebiete. Unter anderem zeigten sie in [BZ11, Theorem 1.2], dass der Rand des ersten Beispiels von Baker nicht gleichmäßig perfekt ist. Kisaka und Shishikura zeigten in [KS08, Theorem C], dass für alle  $N \in \mathbb{N}$  ein  $N$ -fach zusammenhängendes wanderndes Gebiet existiert. Außerdem zeigten sie, dass für mehrfach zusammenhängende wandernde Gebiete  $U_n$  entweder  $c(U_n) = 2$  oder  $c(U_n) = \infty$  für alle großen  $n$  gilt, abhängig davon, ob die wandernden Gebiete endlich oder unendlich viele kritische Punkte enthalten. Wir sagen  $U$  hat *letztendlichen Zusammenhang*  $k$ , wenn  $c(U_n) = k$  für alle großen  $n$  gilt.

Bergweiler, Rippon und Stallard führten in [BRS13, Theorem 1.1] eine neue Methode zur Untersuchung von wandernden Gebieten ein, welche auf positiven harmonischen Funktionen basiert. Mit dieser neuen Technik sind sie in der Lage, das Verhalten der Punkte innerhalb eines wandernden Gebietes genau zu beschreiben. Die Resultate ähneln denen aus dem Klassifikationssatz für periodische Fatoukomponenten. Bergweiler, Rippon und Stallard konnten in [BRS13, Theorem 1.3] zeigen, dass für jedes mehrfach zusammenhängende wandernde Gebiet  $U$  Annuli  $E_n \subset U_n$  um 0 existieren, die in gewisser Weise absorbierend sind. Damit ist gemeint, dass für alle kompakten Mengen  $K \subset U$  ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert, sodass  $f^n(K) \subset E_n$  für alle  $n \geq N$  gilt. Siehe Satz 2.8.11 für die genaue Definition von  $E_n$ . Für jede beschränkte Menge  $Z \subset \mathbb{C}$  bezeichnen wir mit  $\tilde{Z}$  die Vereinigung von  $Z$  mit allen beschränkten Komponenten des Komplements von  $Z$ . Da  $\overline{E_n} \subset U_n$  gilt, gibt es sowohl Randkomponenten von  $U_n$  in  $\overline{U_n} \cap \tilde{E_n}$ , welche wir *innere Randkomponenten* nennen, als auch in  $\overline{U_n} \setminus \tilde{E_n}$ , welche wir *äußere Randkomponenten* nennen. Mit  $\partial_\infty U_n$  bezeichnen wir

die Randkomponente von  $U_n$ , die  $U_n$  von  $\infty$  trennt, und nennen sie *großen äußeren Rand*. Für große  $n$  existiert eine Randkomponente, die  $U_n$  von 0 trennt. Diese Randkomponente bezeichnen wir mit  $\partial_0 U_n$  und nennen sie *großen inneren Rand*. Diese beiden Ränder bezeichnen wir als *groß*, alle anderen Randkomponenten von  $U_n$  nennen wir *klein*.

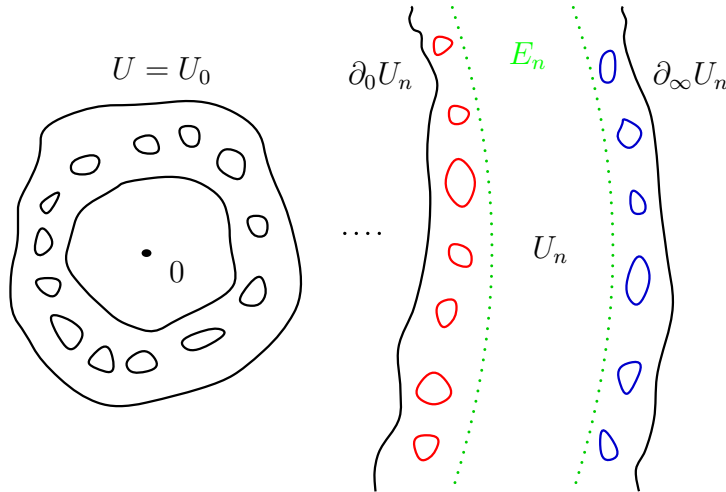


Abbildung 1.2: Das Bild zeigt die Einteilung der Randkomponenten. Die roten zusammen mit  $\partial_0 U_n$  sind die inneren Randkomponenten. Die blauen zusammen mit  $\partial_\infty U_n$  sind die äußeren Randkomponenten. Die roten und blauen sind kleine Randkomponenten.

Wir sagen  $U$  hat *letztendlichen inneren Zusammenhang*  $k$ , wenn  $U_n$  für alle großen  $n$  genau  $k - 1$  innere Randkomponenten besitzt. Weiter sagen wir  $U$  hat *letztendlichen äußeren Zusammenhang*  $k$ , wenn  $U_n$  für alle großen  $n$  genau  $k - 1$  äußere Randkomponenten besitzt. Wir nennen eine Randkomponente  $Z$  von  $U$  *isoliert*, wenn  $\text{dist}(Z, \partial U \setminus Z) > 0$  gilt. In Satz 3.1.6 zeigen wir, dass eine Randkomponente  $Z$  genau dann isoliert ist, wenn jedes Bild und Urbild von  $Z$  unter  $f$  isoliert ist. Weiter zeigen wir, dass der innere beziehungsweise äußere große Rand genau dann isoliert ist, wenn der letztendliche innere beziehungsweise letztendliche äußere Zusammenhang 2 ist.

Dem Maximum- und Minimumprinzip zufolge wird der innere beziehungsweise äußere große Rand von  $U_n$  auf den inneren beziehungsweise äußeren großen Rand von  $U_{n+1}$  abgebildet. In Satz 3.1.9 zeigen wir weiter, dass jede kleine Randkomponente nach endlicher Iteration eine innere Randkomponente ist und bleibt. Besitzt  $U_n$  letztendlichen inneren Zusammenhang 2, so ist die einzige innere Randkomponente von  $U_n$  der große innere Rand  $\partial_0 U_n$ , das heißt, jede kleine Randkomponente  $Z$  wird nach endlicher Iteration auf einen großen inneren Rand abgebildet. Eine Randkomponente, die nach endlicher Iteration auf einen großen Rand abgebildet wird, nennen wir *letztendlich groß*. Eine kleine Randkomponente, die niemals auf einen großen Rand abgebildet wird und demnach für immer eine kleine Randkomponente bleibt, nennen wir *ewig klein*.

Sei  $Z$  eine Randkomponente von  $U$ . Wir zeigen in Satz 3.1.22 unter anderem, dass jede Komponente  $V$  von  $\tilde{Z} \setminus Z$  entweder ein einfach zusammenhängendes wanderndes Gebiet ist oder ein Urbild einer Nullstelle enthält. Gilt  $\tilde{Z} \setminus Z = \emptyset$ , so nennen wir  $Z$  *kollabiert*. In Korollar 3.1.23 zeigen wir, dass eine ewig kleine Randkomponente  $Z$  entweder kollabiert ist oder  $\tilde{Z} \setminus Z$  ausschließlich aus einfach zusammenhängenden wandernden Gebieten besteht. Darüber hinaus zeigen wir, dass jeder Punkt  $z \in Z$  Häufungspunkt von anderen letztendlich großen Randkomponenten ist und  $\tilde{Z} \subset A(f)$  gilt. Außerdem zeigen wir zusammen mit

Rippon und Stallard in Korollar 3.1.26, dass kollabierte Randkomponenten genau dann auftreten, wenn  $\infty$  der letztendliche innere Zusammenhang von  $U$  ist.

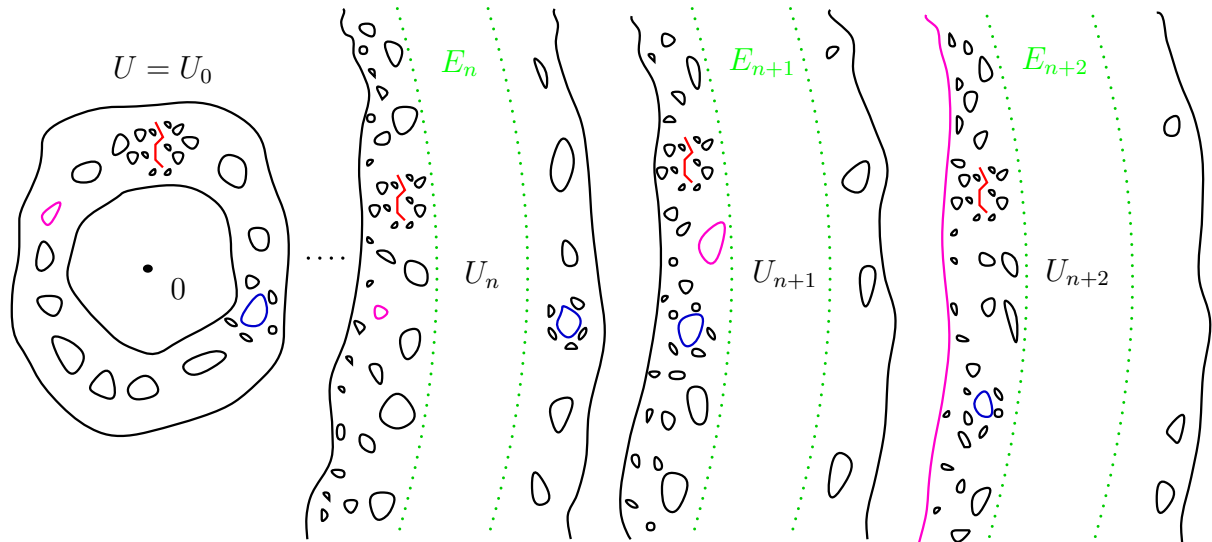


Abbildung 1.3: Das Bild veranschaulicht die verschiedenen Randtypen. Die rote Randkomponente ist kollabiert und die blaue Randkomponente ist der Rand eines einfach zusammenhängenden wandernden Gebietes. Beide sind ewig klein. Die lilafarbene Randkomponente ist letztendlich groß. Alle Randkomponenten außer dem großen äußeren Rand sind nicht isoliert (angedeutet ist dies nur bei den ewig kleinen Rändern und dem großen inneren Rand).

Eine Menge  $A \subseteq \overline{\mathbb{C}}$  heißt *lokal zusammenhängend im Punkt*  $a \in \overline{\mathbb{C}}$ , wenn für alle offenen Umgebungen  $V$  von  $a$  eine offene Umgebung  $U \subset V$  von  $a$  existiert, sodass  $U \cap A$  zusammenhängend ist. Ist dies der Fall für alle Punkte, so nennen wir  $A$  selbst *lokal zusammenhängend*. Die Juliamenge besitzt oft sehr komplizierte geometrische und topologische Eigenschaften. Daher ist es von Interesse, unter welchen Voraussetzungen die Juliamenge lokal zusammenhängend ist. Es ist bekannt, dass die Juliamenge einer rationalen Funktion  $f$  lokal zusammenhängend ist, wenn die Juliamenge zusammenhängend ist und  $f$  hyperbolisch ist (siehe Satz 2.9.20), wobei eine rationale Abbildung  $f$  mit  $\infty \in \mathcal{F}(f)$  hyperbolisch genannt wird, wenn ein  $n \in \mathbb{N}$  und ein  $\lambda > 1$  existieren, sodass für alle  $z \in \mathcal{J}(f)$  die Ungleichung  $|(f^n)'(z)| \geq \lambda$  gilt (siehe Definition 2.7.15). Wie Baker und Domínguez in [BD00, Theorem A] zeigten, ist die Juliamenge einer ganzen transzendenten Funktion allerdings zusammenhängend, wenn sie an mindestens einem Punkt lokal zusammenhängend ist. Im Umkehrschluss bedeutet dies, dass die Juliamenge einer Funktion mit einem mehrfach zusammenhängenden wandernden Gebiet, also einer unzusammenhängenden Juliamenge, niemals lokal zusammenhängend ist. Genauer gesagt ist sie sogar an keinem einzigen Punkt lokal zusammenhängend. Zu klären ist, ob in diesem Fall zumindest die einzelnen Komponenten lokal zusammenhängend sind. Daher untersuchen wir, ob die Ränder beziehungsweise Randkomponenten von mehrfach zusammenhängenden wandernden



Gebieten lokal zusammenhängend sind. Dies bedeutet nach dem Satz von Carathéodory (Satz 2.9.6) zugleich, dass die Randkomponenten Kurven sind.

Bishop konstruierte in [Bis12] eine ganze transzendente Funktion, deren Julia-Menge Hausdorffdimension 1 hat (siehe [Pom92, Chapter 10] für eine Definition der Hausdorffdimension). Ein Teil des Beweises von Bishop ist es zu zeigen, dass die Funktion ein mehrfach zusammenhängendes wanderndes Gebiet besitzt, dessen Randkomponenten rektifizierbare Jordankurven sind. Es ist unklar, ob dies eine besondere Eigenschaft des Beispiels von Bishop ist oder ob die Randkomponenten von mehrfach zusammenhängenden wandernden Gebieten generell rektifizierbare Jordankurven sind. Das folgende Theorem 1 zeigt, dass die großen Ränder von mehrfach zusammenhängenden wandernden Gebieten unter gewissen Voraussetzungen Jordankurven sind.

Die folgende Version ist vereinfacht und wird später in der Arbeit als Korollar formuliert. In der allgemeineren Version von Theorem 1 sind auch topologische Annuli mit zusätzlichen Voraussetzungen als  $C_n$  zugelassen.

**Theorem 1** (Vereinfachte Version)

Sei  $U = U_0$  ein mehrfach zusammenhängendes wanderndes Gebiet einer ganzen transzendenten Funktion  $f$  und  $U_n := f^n(U)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Seien  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folgen positiver reeller Zahlen mit  $\alpha_n < \beta_n$ . Es sei  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $C_n := \overline{\mathbb{A}}(\alpha_n r_n, \beta_n r_n)$  eine Folge von Annuli und  $N \in \mathbb{N}$ , sodass für alle  $n \geq N$  folgende Eigenschaften gelten:

- (i) Es existieren  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{>0}$ , sodass  $\alpha \leq \alpha_n < \beta_n \leq \beta$  gilt.
- (ii)  $C_{n+1} \subset f(C_n)$ .
- (iii)  $\partial_0 C_n \subset U_{n-1}$  und  $\partial_\infty C_n \subset U_n$ .
- (iv) Für ein  $m \in \mathbb{R}_{>0}$  mit  $m \frac{\alpha}{\beta} > 1$  und für alle  $z \in f^{-1}(C_{n+1}) \cap C_n$  gilt

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \geq m.$$

- (v) Für alle  $z \in f^{-1}(C_{n+1}) \cap C_n$  gilt

$$\operatorname{Re} \left( \frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > 0.$$

Dann gilt für alle  $n \geq N$ :

- $\partial_0 U_n$  und  $\partial_\infty U_{n-1}$  sind Jordankurven.
- $\partial_\infty U_{n-1} = \partial_0 U_n$ .

Obwohl die Voraussetzungen von Theorem 1 kompliziert aussehen, sind sie für konkrete Beispiele vergleichsweise einfach zu überprüfen.

Mehrfach zusammenhängende wandernde Gebiete können möglicherweise eine sehr komplexe topologische Struktur besitzen. Beispielsweise ist es denkbar, dass sogenannte „Lakes

of Wada“ (vgl. Definition 2.9.16) auftreten, das heißt, dass ein weiteres Gebiet  $V$  „zwischen“  $\partial_0 U_n$  und  $\partial_\infty U_{n-1}$  liegt und trotzdem  $\partial_\infty U_{n-1} = \partial_0 U_n$ , sogar  $\partial_\infty U_{n-1} = \partial_0 U_n = \partial V$  gilt. In Satz 3.1.28 zeigen wir, dass die Resultate von Theorem 1 implizieren, dass keine „Lakes of Wada“ auftreten. Damit ist die Situation vergleichsweise einfach, siehe Abbildung 1.4.

Der Beweis von Theorem 1 hat in Teilen Ähnlichkeit mit dem Beweis, dass die Ränder von einfach zusammenhängenden Fatoukomponenten von hyperbolischen Abbildungen lokal zusammenhängend sind (siehe Satz 2.9.21). Dort wird eine einfach zusammenhängende und invariante Fatoukomponente  $U$  der hyperbolischen Funktion  $f$  betrachtet. Es ist bekannt, dass alle Fatoukomponenten einer hyperbolischen Funktion attraktiv sind (siehe Definition 2.7.10 und Bemerkung 2.7.16). Demnach ist auch  $U$  attraktiv. Es werden Kurven  $\gamma_n$  so konstruiert, dass  $f(\text{Spur}(\gamma_{n+1})) = \text{Spur}(\gamma_n)$  gilt und der attraktive Fixpunkt in  $U$  jeweils im Inneren der Kurven liegt. Auf der Juliamenge ist  $f$  expandierend, das heißt, jeder Zweig der Umkehrfunktion ist kontrahierend. Dies ist auch für eine kleine Umgebung der Juliamenge noch der Fall. Sind die  $\gamma_n$  nahe genug am Rand der Fatoukomponente, also in dieser Umgebung, so kann gezeigt werden, dass die Kurven  $\gamma_n$  gleichmäßig konvergieren. Aufgrund der Wahl der Kurven müssen diese dann gegen den Rand von  $U$  konvergieren und wir erhalten, dass der Rand von  $U$  eine Kurve und damit nach dem Satz von Carathéodory lokal zusammenhängend ist.

Für unseren Beweis von Theorem 1 können wir die Kurven nicht in der angegebenen Weise wählen, da unsere Fatoukomponenten nicht invariant sind. Die Voraussetzungen (i)–(iv) liefern uns allerdings eine Umgebung  $C_n$  der großen Ränder  $\partial_\infty U_{n-1}$  und  $\partial_0 U_n$ , auf denen  $f$  in einer bestimmten Weise expandierend ist. Unser Ziel ist es, die Randkurven der  $C_n$  nach  $U$  zurückzuziehen. Dann nutzen wir die Tatsache, dass  $f$  in den  $C_n$  expandierend ist, sowie Voraussetzung (v), um zu zeigen, dass die dadurch entstehenden Kurven gleichmäßig konvergieren. Schließlich nutzen wir eine Sandwich-Konstruktion, um zu zeigen, dass die angrenzenden großen Ränder übereinstimmen.

Theorem 1 kann nur auf unendlich-fach zusammenhängende wandernde Gebiete  $U$  angewendet werden. Dies liegt daran, dass die Ränder der wandernden Gebiete als Teilmengen der Juliamenge im Abschluss der abstoßenden periodischen Punkte liegen (siehe Bemerkung 2.7.7). Es gilt  $\bar{U} \subset A(f)$  und demnach enthalten die  $U_n$  keine periodischen Punkte. Gilt  $\partial_\infty U_{n-1} = \partial_0 U_n$  und ist dies eine Jordankurve, also lokal zusammenhängend, so zeigen wir in Satz 3.1.28, dass die periodischen Punkte nur in Komponenten des Komplements von  $U_{n-1} \cup U_n$  liegen können. Das heißt, es müssen sich Komponenten des Komplements von  $U_{n-1} \cup U_n$  bei jedem Punkt des gemeinsamen großen Randes häufen. Also ist  $U_{n-1}$  oder  $U_n$  unendlich-fach zusammenhängend. Damit sind alle  $U_n$  unendlich-fach zusammenhängend. Das heißt, wir können Theorem 1 nicht auf die endlich-fach zusammenhängenden Beispiele von Kisaka und Shishikura [KS08] und auch nicht auf Bergweilers Beispiel [Ber11] anwenden.

In Satz 3.2.1 zeigen wir, dass Urbilder von Jordankurven geschlossene Kurven sind und sogar selbst Jordankurven sind, wenn  $Z$  keine kritischen Punkte enthält. Damit erhalten wir, dass unter den Voraussetzungen von Theorem 1 jede letztendlich große Randkompo-

nente, welche zum großen Orbit (siehe Definition 2.7.4) von  $U$  gehört, eine geschlossene Kurve ist. Ist  $2$  der letztendliche innere Zusammenhang von  $U$ , so ist nach Satz 3.1.9 jede Randkomponente, welche zum großen Orbit von  $U$  gehört, letztendlich groß. Damit sind in diesem Fall alle wandernden Gebiete, welche zum großen Orbit von  $U$  gehören, von abzählbar vielen geschlossenen Kurven berandet.

In Theorem 2 zeigen wir, dass wir durch eine zusätzliche Voraussetzung sogar erreichen können, dass die großen Ränder rektifizierbare Jordankurven sind.

**Theorem 2** (Vereinfachte Version)

Seien  $f$ ,  $U$ ,  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $N$  definiert wie in Theorem 1. Weiter sei  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine summierbare Folge positiver reeller Zahlen, sodass für alle  $n \geq N$  zusätzlich zu den Voraussetzungen von Theorem 1

$$\left| \arg \left( \frac{zf'(z)}{f(z)} \right) \right| \leq \varepsilon_n$$

für alle  $z \in f^{-1}(C_{n+1}) \cap C_n$  gilt.

Dann sind alle großen Ränder für genügend großes  $n \in \mathbb{N}$  sogar rektifizierbare Jordankurven.

In der allgemeineren Version von Theorem 2 sind wieder topologische Annuli mit zusätzlichen Voraussetzungen als  $C_n$  zugelassen.

In Theorem 1 wurde Bedingung (v) genutzt, um die gleichmäßige Konvergenz der Kurven zu beweisen. Durch diese Bedingung erhalten wir, dass die einmal zurückgezogenen Kurven sich nicht zu sehr von Kreisen unterscheiden. Die zusätzliche Bedingung von Theorem 2 verschärft Voraussetzung (v), wodurch wir in der Lage sind zu zeigen, dass alle zurückgezogenen Kurven fast Kreise sind. Dadurch erhalten wir, dass auch die Grenzkurve nahe an einem Kreis und daher rektifizierbar ist.

In Satz 3.2.1 zeigen wir, dass Urbilder von rektifizierbaren Jordankurven ebenfalls rektifizierbar sind. Damit überträgt sich unter den Voraussetzungen von Theorem 2 die Rektifizierbarkeit auf jede letztendlich große Randkomponente, welche zum großen Orbit von  $U$  gehört.

Unsere Resultate können auf einige der oben genannten Beispiele angewendet werden. Wir untersuchen in dieser Arbeit Klassen, die Bakers erste drei Beispiele von Funktionen mit mehrfach zusammenhängenden wandernden Gebieten enthalten (siehe [Bak76] und [Bak85]). Zuerst untersuchen wir eine Klasse von Funktionen, die Bergweiler und Zheng in [BZ11] betrachtet haben und die Bakers erstes Beispiel beinhaltet. Die Funktionen der Klasse haben die Form

$$f(z) = Cz^N \prod_{j=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z}{a_j} \right).$$

Hierbei ist  $C > 0$ ,  $N \in \mathbb{N}$  und  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine komplexe Folge, sodass die Folge der Beträge einer ähnlichen Rekursionsformel genügt wie in Bakers erstem Beispiel. Bergweiler und Zheng haben gezeigt, dass diese Klasse mehrfach zusammenhängende wandernde Gebiete

$U_n$  besitzt. Dabei kann der Zusammenhang dieser Gebiete mithilfe einer Anpassung der Rekursionsformel kontrolliert werden. Theorem 1 kann hier in vielen, aber nicht allen, Fällen angewendet werden. Insbesondere erhalten wir zulässige Beispiele für die der letztendliche innere und äußere Zusammenhang  $\infty$  oder einer der beiden 2 ist. Für Bakers erstes Beispiel ist der letztendliche innere Zusammenhang 2. Damit können wir zeigen, dass jedes wandernde Gebiet von abzählbar vielen geschlossenen Kurven berandet ist und angrenzende große Ränder übereinstimmen. Für das erste Beispiel unendlich-fachen Zusammenhangs von Baker können wir ein ähnliches Resultat beweisen. Wir betrachten eine Klasse von Funktionen der Form

$$f(z) = C^k \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{r_j}\right)^k.$$

Hier ist  $C > 0$ ,  $k \in \mathbb{N}_{>1}$  und  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine positive Folge, die ebenfalls einer Rekursionsformel genügt. Wir können hier ebenfalls zeigen, dass wir Theorem 1 anwenden können und der letztendliche innere Zusammenhang der wandernden Gebiete 2 ist. Damit sind auch hier alle wandernden Gebiete von abzählbar vielen geschlossenen Kurven berandet und angrenzende große Ränder stimmen überein.

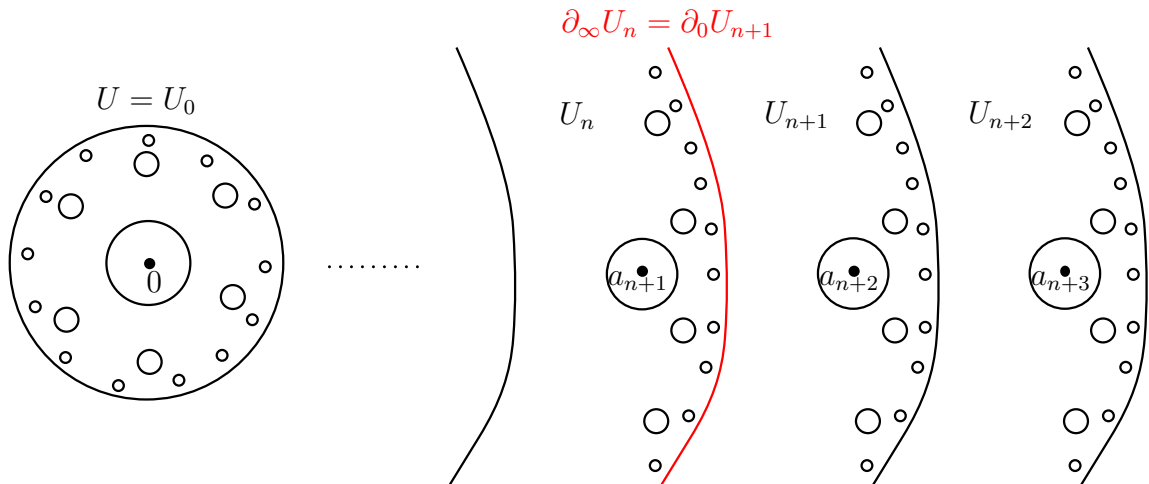


Abbildung 1.4: Das Bild zeigt vereinfacht, wie Bakers erstes (und zweites) Beispiel eines mehrfach zusammenhängenden wandernden Gebietes aussieht. Auch hier vermitteln die Bilder keine korrekten Größenverhältnisse. Tatsächlich sind die „kleinen Löcher“ viel näher am äußeren Rand und entsprechend ist der maximale Annulus, den  $U_n$  enthält, viel größer. Die Situation ist deutlich übersichtlicher als in Abbildung 1.3.

Schließlich betrachten wir eine Klasse von Funktionen der Form

$$f(z) = C \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{z}{r_j}\right)^{k_j}\right).$$

Hier ist  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge natürlicher Zahlen und  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine positive Folge, die ebenfalls einer Rekursionsformel genügt. Für alle  $0 \leq \varrho \leq \infty$  können die  $k_n$  so gewählt werden, dass die Funktion Ordnung  $\varrho$  besitzt. Ebenso kann der Zusammenhang der wandernden Gebiete

über eine Anpassung der Rekursionsformel kontrolliert werden. Auf diese Klasse können wir in vielen, aber nicht in allen Fällen Theorem 2 anwenden. Insbesondere erhalten wir zulässige Beispiele, für die der letztendliche innere Zusammenhang  $\infty$  und der letztendliche äußere Zusammenhang 2 ist. Bishops Beispiel hat eine ähnliche Form, jedoch ist dort der letztendliche innere Zusammenhang 2 und der letztendliche äußere Zusammenhang  $\infty$ . In den vorangegangenen Beispielen konnten wir Theorem 1, aber nicht Theorem 2 anwenden. In den Fällen des letzten Beispiels, in denen wir Theorem 2 nicht anwenden können, liegt dies daran, dass bereits Theorem 1 nicht angewendet werden kann. Zu der Klasse gehört ebenfalls Bakers erstes Beispiel von Funktionen beliebiger Ordnung mit wandernden Gebieten. Bakers Beispiel ist jedoch so gewählt, dass nicht klar ist, ob die wandernden Gebiete unendlich-fach zusammenhängend sind. Daher können hier unsere Theoreme nicht angewendet werden.

Im zweiten Kapitel werden wir zunächst an einige Grundlagen aus der Funktionen- und Iterationstheorie erinnern, die wir für unsere Beweise benötigen werden. Außerdem werden wir hier einen allgemeinen Hintergrund vermitteln und alle Begriffe einführen, die wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit benötigen werden. In Kapitel 3 werden wir unsere Hauptresultate beweisen. Hierzu zählen die allgemeine Untersuchung der Randkomponenten von wandernden Gebieten sowie die Theoreme 1 und 2. Im letzten Kapitel untersuchen wir Beispielklassen von Funktionen, auf die wir unsere Resultate anwenden können.



# Kapitel 2

## Grundlagen

In diesem Kapitel führen wir alle Begriffe und Notationen ein, die wir in dieser Arbeit benutzen werden. Außerdem stellen wir Sätze vor, die für die Beweise in dieser Arbeit benötigt werden oder einen Hintergrund zu den hier betrachteten Fragestellungen liefern.

### 2.1 Definitionen und Notationen

In diesem Abschnitt wollen wir grundlegende Definitionen einführen und Notationen klären.

**Notation 2.1.1** (Definitionsbereich) Sei  $f$  eine Funktion, dann bezeichnen wir mit  $D(f)$  den Definitionsbereich von  $f$ .

**Notation 2.1.2** (Bälle und Kreise) Sei  $z_0 \in \mathbb{C}$  und  $r > 0$ . Dann bezeichnen wir mit

$$\mathbb{B}(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \text{ und mit } \overline{\mathbb{B}}(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$$

den offenen beziehungsweise abgeschlossenen Ball um  $z_0$  mit Radius  $r$ . Außerdem setzen wir  $\mathbb{D} := \mathbb{B}(0, 1)$ . Weiter bezeichnen wir mit

$$\mathbb{K}(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$$

den Kreis um  $z_0$  mit Radius  $r$ . Außerdem setzen wir  $\mathbb{K}(r) := \mathbb{K}(0, r)$  für den Kreis um 0 mit Radius  $r$ .

**Notation 2.1.3** (Annuli) Sei  $z_0 \in \mathbb{C}$  und  $0 < r < R$ . Dann bezeichnen wir mit

$$\mathbb{A}(z_0, r, R) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\} \text{ und mit } \overline{\mathbb{A}}(z_0, r, R) := \{z \in \mathbb{C} : r \leq |z - z_0| \leq R\}$$

den offenen beziehungsweise abgeschlossenen Annulus um  $z_0$  mit Radien  $r$  und  $R$ . Außerdem setzen wir  $\mathbb{A}(r, R) := \mathbb{A}(0, r, R)$  und  $\overline{\mathbb{A}}(r, R) := \overline{\mathbb{A}}(0, r, R)$ .

**Definition 2.1.4** (Kontinuum) Eine kompakte zusammenhängende Menge mit mehr als einem Punkt heißt *Kontinuum*.

**Definition 2.1.5** (Ganze transzendente Funktionen) Sei  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, dann nennen wir  $f$  *ganz*. Ist  $f$  außerdem kein Polynom, so nennen wir  $f$  *ganz transzendent*.

**Definition 2.1.6** (Konforme Abbildungen) Wir nennen eine biholomorphe oder bijektive und meromorphe Abbildung  $f$  *konform*.

**Definition 2.1.7** (Minimal- und Maximalbetrag) Sei  $r > 0$  und  $f$  eine holomorphe Funktion. Dann setzen wir

$$m(r, f) := \min_{|z|=r} |f(z)| \quad \text{und} \quad M(r, f) := \max_{|z|=r} |f(z)|$$

und bezeichnen diese als *Minimal-* beziehungsweise *Maximalbetrag* von  $f$  auf dem Kreis mit Radius  $r$ .

**Notation 2.1.8** (Durchmesser und Abstand von Mengen) Seien  $A, B \subset \mathbb{C}$  Mengen. Dann bezeichnen wir mit

$$\text{diam}(A) := \sup_{a, b \in A} |b - a|$$

den *Durchmesser* von  $A$ . Weiter bezeichnen wir mit

$$\text{dist}(A, B) := \inf_{a \in A, b \in B} |b - a|$$

den *Abstand* von  $A$  zu  $B$ .

**Definition 2.1.9** (Hausdorffabstand) Seien  $A, B \subset \mathbb{C}$  Mengen. Dann bezeichnen wir mit

$$\text{dist}_H(A, B) := \inf \{ \varepsilon > 0 \mid B \subseteq U_\varepsilon(A) \text{ und } A \subseteq U_\varepsilon(B) \}$$

den *Hausdorffabstand* der Mengen  $A$  und  $B$ , wobei wir mit

$$U_\varepsilon(A) := \{ z \in \mathbb{C} \mid \exists a \in A : |z - a| < \varepsilon \}$$

die  $\varepsilon$  Umgebung um  $A$  bezeichnen.

**Bemerkung 2.1.10** (Konvergenz von Mengen) Auf der Menge der kompakten Teilmengen von  $\mathbb{C}$  ist der Hausdorffabstand eine Metrik.

**Definition 2.1.11** ( $k$ -fach zusammenhängend) Sei  $U \subsetneq \overline{\mathbb{C}}$  ein Gebiet und  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Wir sagen,  $U$  ist  *$k$ -fach zusammenhängend*, wenn  $\overline{\mathbb{C}} \setminus U$  genau  $k$  Zusammenhangskomponenten besitzt. In diesem Fall setzen wir  $c(U) := k$ . Außerdem werden  $\overline{\mathbb{C}}$  und alle 1-fach zusammenhängenden Gebiete *einfach zusammenhängend* genannt.

**Definition 2.1.12** (Umringen) Sei  $U \subsetneq \overline{\mathbb{C}}$ . Wir sagen,  $U$  *umringt* die Menge  $A$ , wenn  $A$  in einer beschränkten Komponente von  $\overline{\mathbb{C}} \setminus U$  liegt.

**Definition 2.1.13** (Trennen) Sei  $A \subsetneq \overline{\mathbb{C}}$  abgeschlossen. Wir sagen,  $U$  *trennt* die Mengen  $B$  und  $C$ , wenn  $B$  und  $C$  in zwei verschiedenen Komponenten von  $\overline{\mathbb{C}} \setminus A$  liegen.

**Definition 2.1.14** (Komponenten des Komplements) Sei  $U \subset \mathbb{C}$  eine beschränkte Menge und  $a \in \overline{\mathbb{C}} \setminus U$ . Wir bezeichnen mit  $C(a, U)$  die Komponente von  $\overline{\mathbb{C}} \setminus U$ , die  $a$  enthält. Mit  $\tilde{U} := \mathbb{C} \setminus C(\infty, U)$  bezeichnen wir die Vereinigung von  $U$  mit all seinen beschränkten Komponenten des Komplements.



**Definition 2.1.15** (Innerer und äußerer Rand) Sei  $U \subset \mathbb{C}$  eine beschränkte Menge. Wir definieren  $\partial_\infty U := \partial C(\infty, U)$  als die *äußere Randkomponente von  $U$* . Außerdem definieren wir  $\partial_0 U := \partial C(0, U)$  als die *innere Randkomponente von  $U$* , falls  $0$  von  $U$  umringt wird.

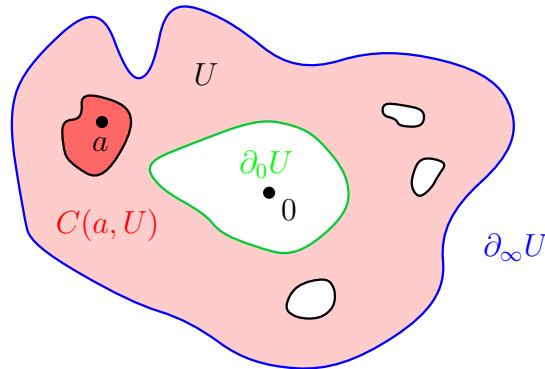


Abbildung 2.1: Komponenten des Komplements sowie innerer und äußerer Rand.

**Bemerkung 2.1.16** (Varianten des inneren und äußeren Randes) Man beachte, dass im Allgemeinen nicht  $\partial_0 U = \partial_0 \bar{U}$  oder  $\partial_\infty U = \partial_\infty \bar{U}$  gilt.

Wir setzen die Landau-Symbole  $o(\cdot)$  und  $\mathcal{O}(\cdot)$  als bekannt voraus. Außerdem nutzen wir die folgende Notation.

**Notation 2.1.17** ( $f \sim g$ ) Sei  $G \subset \mathbb{C}$  und  $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$ . Sei  $z_0$  Häufungspunkt von  $G$ , insbesondere ist  $z_0 = \infty$  für unbeschränkte Mengen zugelassen. Wir schreiben  $f \sim g$ , wenn

$$f(z) = (1 + o(1))g(z) \quad \text{für } z \rightarrow z_0$$

gilt. Ist  $g(z) \neq 0$  für  $z$  nahe bei  $z_0$ , so ist dies gleichbedeutend zu

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 1.$$

## 2.2 Kurven

Kurven und deren Eigenschaften sind ein wichtiger Bestandteil dieser Arbeit. Dieser Abschnitt befasst sich mit Definitionen und grundlegenden Sätzen zu diesem Bereich. Weitere Details zu Kurven findet man zum Beispiel in [Pom92].

**Definition 2.2.1** (Kurven) Sei  $[a, b]$  ein Intervall in  $\mathbb{R}$  und  $\gamma : [a, b] \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$  eine stetige Abbildung. Dann heißt  $\gamma$  *Kurve* oder auch *Weg*. Wenn zusätzlich  $\gamma(a) = \gamma(b)$  gilt, heißt  $\gamma$  *geschlossene Kurve*. Ist  $\gamma|_{[a, b]}$  injektiv, so heißt  $\gamma$  *Jordanbogen*, ist  $\gamma|_{[a, b]}$  injektiv und gilt zusätzlich  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , so heißt  $\gamma$  *Jordankurve*.

Sind  $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$  Kurven mit  $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ , so bezeichnen wir mit  $\gamma_1 + \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$  die Kurve, die  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  nacheinander mit doppelter Geschwindigkeit durchläuft.

**Definition 2.2.2** (Glatte Kurven) Sei  $[a, b]$  ein Intervall in  $\mathbb{R}$  und  $\gamma : [a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  eine Kurve. Sei  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Wir nennen  $\gamma$  eine  $C^k$ -Kurve, wenn  $\gamma$  mindestens  $k$ -mal stetig differenzierbar ist. Ist  $\gamma$  lokal in eine Potenzreihe entwickelbar, so nennen wir  $\gamma$  *analytisch*. Ist  $\gamma$  eine  $C^1$ -Kurve mit  $\gamma'(t) \neq 0$  für alle  $t \in [a, b]$  und gilt  $\gamma'(a) = \gamma'(b)$ , falls  $\gamma$  geschlossen ist, so nennen wir  $\gamma$  *glatt*.

Wir bezeichnen eine Menge  $M$  als glatte,  $C^k$ - oder analytische Kurve, wenn es eine Kurve  $\gamma$  mit entsprechender Eigenschaft und  $M = \text{Spur}(\gamma)$  gibt.

**Notation 2.2.3** (Strahlen und direkte Verbindungsstrecken) Für alle  $t \in \mathbb{R}$  setzen wir

$$R(t) := \{r \cdot e^{it} : r \in \mathbb{R}_{>0}\}.$$

Seien  $z, w \in \mathbb{C}$ , dann bezeichnen wir mit

$$[z, w] := \{(1-t)z + tw : t \in [0, 1]\}$$

die direkte Verbindungsstrecke von  $z$  nach  $w$ .

In den Beweisen von Theorem 1 und 2 benötigen wir Aussagen über Winkel zwischen Kurven. Die folgende Notation klärt, was wir damit meinen.

**Notation 2.2.4** (Schnittwinkel von Kurven) Seien  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  glatte Jordanbögen. Außerdem sei  $t_0 \in D(\gamma_1) \cap D(\gamma_2)$ . Dann bezeichnen wir mit

$$\sphericalangle(t_0, \gamma_1, \gamma_2) := \arg(\gamma_2'(t_0)\overline{\gamma_1'(t_0)}) \in [-\pi, \pi)$$

den Winkelunterschied der Kurven  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  an der Stelle  $t_0$ , wobei wir  $\arg(\cdot)$  als Funktion nach  $[-\pi, \pi)$  auffassen.

Seien  $z_0 \in \text{Spur}(\gamma_1) \cap \text{Spur}(\gamma_2)$  und  $t_1 \in D(\gamma_1), t_2 \in D(\gamma_2)$  mit  $\gamma_1(t_1) = z_0 = \gamma_2(t_2)$ . Dann bezeichnen wir mit

$$\sphericalangle(z_0, \gamma_1, \gamma_2) := \arg\left(\frac{\gamma_2'(t_2)}{\gamma_1'(t_1)}\right) \in [-\pi, \pi)$$

den Winkel von  $\gamma_1$  zu  $\gamma_2$  in  $z_0$ , wobei wir wieder  $\arg(\cdot)$  als Funktion nach  $[-\pi, \pi)$  auffassen. Ist  $t_1 = t_2$ , so gilt  $\sphericalangle(t_1, \gamma_1, \gamma_2) = \sphericalangle(z_0, \gamma_1, \gamma_2)$ .

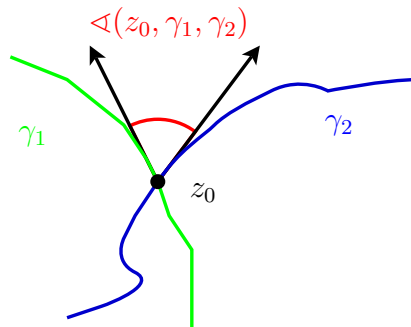


Abbildung 2.2: Schnittwinkel zwischen den Kurven  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  in  $z_0$ .

Außerdem gilt

$$\sphericalangle(z_0, \gamma_1, \gamma_2) = \sphericalangle(z_0, \gamma_1, \gamma_3) + \sphericalangle(z_0, \gamma_3, \gamma_2)$$

für  $z_0 \in \text{Spur}(\gamma_1) \cap \text{Spur}(\gamma_2) \cap \text{Spur}(\gamma_3)$ , wenn  $\sphericalangle(z_0, \gamma_1, \gamma_3) + \sphericalangle(z_0, \gamma_3, \gamma_2) \in [-\pi, \pi)$  gilt.

**Definition 2.2.5** (Umlaufzahl) Sei  $\gamma$  eine geschlossene Kurve in  $\mathbb{C}$  und  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \text{Spur}(\gamma)$  sowie  $\sigma$  eine rektifizierbare Kurve, die homotop zu  $\gamma$  in  $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$  ist. Dann definieren wir die *Umlaufzahl von  $\gamma$  um  $z_0$*  als

$$n(\gamma, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{1}{\zeta - z_0} d\zeta.$$

**Satz 2.2.6** (Jordanscher Kurvensatz) Sei  $U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$  ein Gebiet und  $\gamma$  eine Jordankurve in  $U$ . Dann hat  $U \setminus \text{Spur}(\gamma)$  genau zwei Zusammenhangskomponenten.

Für den letzten Satz findet sich ein Beweis in [Hal07]. Der Satz ermöglicht die folgende Definition.

**Definition 2.2.7** (Das Äußere und das Innere einer Jordankurve) Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  eine Jordankurve, dann bezeichnen wir mit  $\text{ext}(\gamma)$  die Komponente des Komplements in  $\overline{\mathbb{C}}$  von  $\text{Spur}(\gamma)$ , die  $\infty$  enthält und mit  $\text{int}(\gamma) := \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\text{ext}(\gamma)}$ . Wir nennen  $\text{ext}(\gamma)$  und  $\text{int}(\gamma)$  das *Äußere* beziehungsweise das *Innere der Jordankurve  $\gamma$* .

**Definition 2.2.8** (Crosscut) Sei  $U \subset \overline{\mathbb{C}}$  ein Gebiet. Dann nennen wir einen Jordanbogen  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  einen *Crosscut in  $U$* , wenn  $\gamma((a, b)) \subset U$  und  $\gamma(a) \cup \gamma(b) \subset \partial U$  gilt.

**Konvention 2.2.9** (Orientierung von Kurven und Kreisen) Ist  $\gamma$  eine Jordankurve mit  $0 \in \text{int}(\gamma)$  und ist die Orientierung beziehungsweise Parametrisierung von  $\gamma$  nicht explizit erwähnt, so gehen wir davon aus, dass  $\gamma$  positiv orientiert ist, das heißt, dass  $n(\gamma, 0) = 1$  gilt. Insbesondere fassen wir  $\mathbb{K}(r)$  für alle  $r > 0$  als positiv orientierte Jordankurve  $\mathbb{K}_r$  auf. Das heißt, wir setzen  $\mathbb{K}_r : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\mathbb{K}_r(t) = re^{it}$ .

**Satz 2.2.10** (Trennung von Komponenten durch Kurven) Seien  $X, Y \subset \overline{\mathbb{C}}$  disjunkt und kompakt. Dann existiert eine Jordankurve  $\gamma$  in  $\overline{\mathbb{C}} \setminus X \cup Y$ , die  $X$  und  $Y$  voneinander trennt. Das heißt, dass eine der Mengen  $X, Y$  in  $\text{int}(\gamma)$  und eine in  $\text{ext}(\gamma)$  liegt.

Einen Beweis des Satz findet sich in [New51, Chapter VI, §4, Theorem 3.3].

**Definition 2.2.11** (Länge und Rektifizierbarkeit) Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  eine Kurve. Wir definieren die *Länge* von  $\gamma$  als

$$L(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |\gamma(t_{i-1}) - \gamma(t_i)| \mid n \in \mathbb{N}, a = t_0 < \dots < t_n = b \right\}.$$

Ist  $\gamma$  stückweise stetig differenzierbar, so gilt

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Ist  $L(\gamma)$  endlich, so nennen wir  $\gamma$  *rektifizierbar*.

**Bemerkung 2.2.12** (Parametrisierung nach Bogenlänge) Ist  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  eine rektifizierbare Kurve, so kann sie nach Bogenlänge parametrisiert werden. Das heißt, es existiert eine Umparametrisierung  $\beta : [0, L(\gamma)] \rightarrow \mathbb{C}$  von  $\gamma$  derart, dass  $L(\beta|_{[0,t]}) = t$  für alle  $t \in [0, L(\gamma)]$  gilt. Damit existiert eine streng monoton wachsende Funktion  $\tau : [0, L(\gamma)] \rightarrow [a, b]$ , sodass

$\beta = \gamma \circ \tau$  gilt. Ist  $\gamma$  stetig differenzierbar, so kann  $\tau$  so gewählt werden, dass  $\beta$  ebenfalls stetig differenzierbar ist und  $|\beta'| \equiv 1$  gilt.

**Bemerkung 2.2.13** (Glatt impliziert rektifizierbar) Nach [Pom92, Proposition 3.3] sind glatte Kurven rektifizierbar.

**Bemerkung 2.2.14** (Kurve als Abbildung oder Menge) Häufig wird  $\text{Spur}(\gamma)$  mit der Kurve  $\gamma$  identifiziert. Wir verzichten in dieser Arbeit weitgehend auf diese Vereinfachung, da die folgende Definition sonst problematisch ist.

**Definition 2.2.15** (Eigenschaften von Rändern) Sei  $U \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $Z$  eine Komponente von  $\partial U$ . Dann heißt  $Z$  *glatt, analytisch, rektifizierbar* oder *Lipschitz-stetig*, wenn  $Z$  eine Parametrisierung durch eine Kurve mit entsprechender Eigenschaft besitzt. Das heißt, es existiert eine Kurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\gamma([a, b]) = Z$  und entsprechender Eigenschaft. Ist  $\partial U$  eine Jordankurve, so nennen wir  $U$  ein *Jordangebiet*.

**Bemerkung 2.2.16** (Rektifizierbarkeit und Lipschitz-Stetigkeit) Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  eine Lipschitz-stetige Kurve. Dann ist  $\gamma$  auch rektifizierbar. Ist  $L > 0$  die zugehörige Lipschitz-Konstante, so gilt  $L(\gamma) \leq L \cdot |b - a|$ .

Jedoch ist nicht jede rektifizierbare Kurve Lipschitz-stetig. Betrachte dazu  $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\gamma(t) = t + i \cdot \sqrt{|t|}$ .

Allerdings kann jede rektifizierbare Kurve nach Bogenlänge parametrisiert werden. Die dadurch entstehende neue Kurve ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1. Eine Randkomponente  $Z$  eines Gebietes  $U \subset \mathbb{C}$  ist also genau dann Lipschitz-stetig, wenn sie rektifizierbar ist.

## 2.3 Funktionentheoretische Grundlagen

Die Sätze und Aussagen in diesem Abschnitt sind allgemein bekannt und in den meisten Büchern über Funktionentheorie zu finden, wie zum Beispiel [Con78], [Gol69] und [Nev70]. Die folgenden beiden Sätze liefern uns Aussagen über die Konvergenz von Kurven. Diese werden in den Beweisen von Theorem 1 und 2 benötigt.

**Satz 2.3.1** (Majorantenkriterium) Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von komplexwertigen Funktionen auf einem beschränkten Intervall  $I$  und sei  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge positiver Zahlen mit  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$ , sodass für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $x \in I$

$$|f_n(x)| \leq M_n$$

gilt, so konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

gleichmäßig auf  $I$ .

Das Majorantenkriterium liefert auch eine Aussage über die Konvergenz einer Funktionenfolge.

**Korollar 2.3.2** (Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen) *Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von komplexwertigen Funktionen auf einem beschränkten Intervall  $I$  und sei  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge positiver Zahlen mit  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$ , sodass für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $x \in I$*

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq M_n$$

*gilt, so konvergiert  $f_n$  gleichmäßig auf  $I$ .*

*Beweis:* Wir wenden Satz 2.3.1 auf  $g_n(x) := f_{n+1}(x) - f_n(x)$  an und erhalten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) + f_1(x).$$

□

**Bemerkung 2.3.3** (Stetige Folgen) Sind die  $f_n$  stetig, so ist auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  als gleichmäßiger Grenzwert von stetigen Funktionen stetig.

**Satz 2.3.4** (Gleichmäßige Konvergenz der Ableitungen) *Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von komplexwertigen, differenzierbaren Funktionen auf einem beschränkten Intervall  $I$ . Konvergiert  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in einem Punkt und konvergiert  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig, dann konvergiert  $f_n$  gleichmäßig gegen eine differenzierbare Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  und es gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = f'(x)$$

*für alle  $x \in I$ .*

**Definition 2.3.5** (Vielfachheit) Es seien  $U, V \subseteq \overline{\mathbb{C}}$  Gebiete und  $f : U \rightarrow V$  eine meromorphe Funktion. Seien  $z \in U \setminus \{\infty\}$ ,  $a \in V \setminus \{\infty\}$  und  $k \in \mathbb{N}$ . Ist  $f(z) = a$  und  $f^{(j)}(z) = 0$  für alle  $j < k$  und  $f^{(k)}(z) \neq 0$ , so bezeichnen wir  $z$  als  $k$ -fache  $a$ -Stelle. Ist  $a = \infty$ , so ist  $z$  ein Pol und wir sagen,  $z$  ist  $k$ -fache  $a$ -Stelle, wenn  $z$  ein Pol der Ordnung  $k$  ist. Weiter sagen wir, dass  $z = \infty$  eine  $k$ -fache  $a$ -Stelle ist, wenn 0 eine  $k$ -fache  $a$ -Stelle der Funktion  $g := f\left(\frac{1}{z}\right)$  ist.

Für einen Beweis des folgenden Satzes siehe [Ahl78, Corollary S. 152].

**Satz 2.3.6** (Satz von Rouché) *Seien  $h$  und  $g$  meromorphe Funktionen auf einem Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$ . Sei  $\gamma$  eine Jordankurve in  $G$  mit  $\text{int}(\gamma) \subset G$ . Haben  $g, h$  keine Nullstellen oder Polstellen auf  $\text{Bild}(\gamma)$  und gilt für alle  $z \in \text{Bild}(\gamma)$  die Ungleichung  $|g(z) - h(z)| < |h(z)|$ , dann stimmen für  $h$  und  $g$  die Differenzen*

$$(\text{Anzahl der Nullstellen}) - (\text{Anzahl der Polstellen})$$

*(entsprechend der Vielfachheit beziehungsweise Polordnung gezählt) auf  $\overline{\text{int}(\gamma)}$  überein.*

**Definition 2.3.7** (Ordnung einer Funktion) Sei  $f$  eine ganze Funktion. Dann bezeichnen wir mit

$$\text{ord}(f) := \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log^+ \log^+ M(r, f)}{\log r}$$

die *Ordnung der Funktion*  $f$ , wobei wir  $\log^+(x) := \max\{0, \log(x)\}$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  setzen.

**Notation 2.3.8** (Anzahlfunktion) Sei  $f$  eine meromorphe Funktion und  $a \in \overline{\mathbb{C}}$ . Dann bezeichnen wir für  $r > 0$  mit  $n(r, a, f)$  die Anzahl der  $a$ -Stellen in  $\overline{\mathbb{B}}(0, r)$  gezählt gemäß Vielfachheit.

Ist klar, welche Funktion  $f$  betrachtet wird, und  $a = 0$ , so setzen wir  $n(r) := n(r, a, f)$ .

**Satz 2.3.9** (Integrierte Anzahlfunktion) Sei  $f$  eine meromorphe Funktion und  $a \in \overline{\mathbb{C}}$  mit  $a \neq f(0)$ . Seien  $r > 0$  und  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{B}(0, r)$  die  $a$ -Stellen von  $f$ . Dann gilt

$$\int_0^r \frac{n(t, a, f)}{t} dt = \sum_{k=1}^n \log \left( \frac{r}{|c_k|} \right).$$

Einen Beweis dieser Aussage findet man in [Nev70, Chapter III, §4].

Der Riemannsche Abbildungssatz ist einer der grundlegenden Sätze der Funktionentheorie, einen Beweis findet man in [Gol69, Kapitel II, § 2].

**Satz 2.3.10** (Riemannscher Abbildungssatz) Sei  $U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet und  $|\overline{\mathbb{C}} \setminus U| \geq 2$ . Sei  $z_0 \in U \setminus \{\infty\}$ . Dann existiert genau eine konforme Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{D}$  mit  $f(z_0) = 0$  und  $f'(z_0) > 0$ .

Eine ähnliche Version des Riemannschen Abbildungssatzes gilt auch für zweifach zusammenhängende Gebiete. Ein Beweis des folgenden Satzes ist in [Gol69, Kapitel V, § 1] zu finden.

**Satz 2.3.11** (Abbildungssatz für Ringgebiete) Sei  $A \subseteq \overline{\mathbb{C}}$  ein zweifach zusammenhängendes Gebiet, sodass jede Komponente von  $\overline{\mathbb{C}} \setminus A$  mindestens 2 Punkte enthält. Dann existiert eine konforme Abbildung  $f : A \rightarrow \mathbb{A}(1, r)$  für ein eindeutig bestimmtes  $r > 1$ .

## 2.4 Analytische Fortsetzung

Wir wollen nun eine Einführung zu analytischer Fortsetzung geben. Beweise und weitergehende Aussagen zu diesem Thema finden sich in [Con78].

**Definition 2.4.1** (Analytische Fortsetzung) Seien  $G, H \subset \overline{\mathbb{C}}$  Gebiete mit  $G \subsetneq H$ . Weiter seien  $f : G \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  und  $F : H \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  meromorph und  $F|_G = f$ . Dann heißt  $F$  *analytische Fortsetzung* von  $f$ .

**Definition 2.4.2** (Analytische Fortsetzung entlang einer Kurve) Sei  $G \subset \overline{\mathbb{C}}$  ein Gebiet und  $f : G \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  meromorph. Seien  $z_0 \in G, z_1 \notin G$  und  $\gamma$  eine Kurve mit Anfangspunkt  $z_0$  und Endpunkt  $z_1$ . Sei  $H \subset \overline{\mathbb{C}}$  ein Gebiet mit  $\text{Spur}(\gamma) \subset H$  und  $F : H \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  meromorph mit  $F(z) = f(z)$  für  $z$  aus einer Umgebung von  $z_0$ . Dann heißt  $F$  *analytische Fortsetzung* von  $f$  entlang  $\gamma$ .

Seien allgemeiner  $\gamma_1, \dots, \gamma_n : [0, 1] \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  Kurven mit  $\gamma_{j-1}(1) = \gamma_j(0)$  für alle  $j \in \{2, \dots, n\}$  und sei  $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$  die zusammengefasste Kurve. Sei  $f_0$  meromorph in einer Umgebung  $U_0$  mit  $\text{Spur}(\gamma_1) \subset U_0$  und  $f_1$  meromorphe Fortsetzung von  $f_0$  entlang  $\gamma_1$ . Weiter sei für alle  $j \in \{0, \dots, n-1\}$  die Funktion  $f_{j+1} : U_{j+1} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  meromorphe Fortsetzung von  $f_j$  entlang  $\gamma_{j+1}$  mit  $\text{Spur}(\gamma_{j+1}) \subset U_j$ . Dann heißt  $f_n$  *analytische Fortsetzung* von  $f_0$  entlang  $\gamma$ .

Für einen Beweis des folgenden Satzes siehe [Con78, Proposition 2.4].

**Satz 2.4.3** *Die analytische Fortsetzung einer Funktion entlang einer Kurve ist eindeutig bestimmt. Seien also  $G$ ,  $f$  und  $\gamma$  wie in Definition 2.4.2 und seien  $g$  und  $h$  analytische Fortsetzungen von  $f$  entlang  $\gamma$ . Dann gilt  $g(z) = h(z)$  für alle  $z$  aus einer Umgebung von  $z_1$ .*

**Bemerkung 2.4.4** Ist  $\gamma$  eine geschlossene Kurve oder gilt nur  $U_0 \cap U_n \neq \emptyset$ , so gilt im Allgemeinen  $f_0|_{U_0 \cap U_n} \neq f_n|_{U_0 \cap U_n}$ .

**Definition 2.4.5** (Singularitäten) Seien  $G, H \subset \overline{\mathbb{C}}$  Gebiete und  $f : G \rightarrow H$  meromorph. Sei  $w \in H$ . Dann heißt  $w$  *Singularität von  $f^{-1}$* , falls gilt: Es gibt eine glatte Kurve  $\gamma : [0, 1] \rightarrow H$  mit  $\gamma(1) = w$ , ein Gebiet  $U \subseteq H$  mit  $\gamma([0, 1)) \subseteq U$  und es gibt einen meromorphen Zweig  $\varphi$  der Umkehrfunktion von  $f$  auf  $U$ . Aber es gibt kein Gebiet  $V \subseteq H$  mit  $\gamma([0, 1]) \subseteq V$ , auf dem ein meromorpher Zweig  $\psi$  der Umkehrfunktion von  $f$  existiert, der auf der Zusammenhangskomponente von  $\text{Spur}(\gamma)$  in  $U \cap V$  mit  $\varphi$  übereinstimmt. Mit anderen Worten,  $\varphi$  lässt sich entlang  $\gamma|_{[0, t]}$  für alle  $t \in (0, 1)$  analytisch fortsetzen, aber nicht entlang  $\gamma$ .

Die Menge alle Singularitäten von  $f^{-1}$  sei mit  $\text{Sing}(f^{-1})$  bezeichnet.

**Satz 2.4.6** (Klassifikation von Singularitäten) *Seien  $G, H \subset \overline{\mathbb{C}}$  Gebiete und sei außerdem  $f : G \rightarrow H$  meromorph. Seien  $w$  eine Singularität von  $f^{-1}$ ,  $U \subset H$  ein Gebiet,  $\varphi$  ein Zweig der Umkehrfunktion von  $f$  auf  $U$  und  $\gamma : [0, 1] \rightarrow H$  eine glatte Kurve mit  $\gamma(1) = w$  und  $\gamma([0, 1)) \subseteq U$ . Für  $t \in (0, 1)$  sei  $\varphi_t$  die in einer Umgebung  $U_t$  von  $\gamma(t)$  definierte Fortsetzung von  $\varphi$  entlang  $\gamma$ .*

Dann gilt einer der folgenden Fälle:

- (i)  $\text{dist}(\varphi_t(\gamma(t)), \partial G) \rightarrow 0$ , für  $t \rightarrow 1$ .
- (ii)  $\xi := \lim_{t \rightarrow 1} \varphi_t(\gamma(t)) \in G$ ,  $f(\xi) = w$  und  $f$  ist in keiner Umgebung von  $\xi$  injektiv.

**Definition 2.4.7** (Kritische und asymptotische Werte) In Fall (i) des Satzes 2.4.6 heißt  $w$  *asymptotischer Wert von  $f$*  und in Fall (ii) heißt  $w$  *kritischer Wert von  $f$*  und  $\xi$  *kritischer Punkt von  $f$* .

**Bemerkung 2.4.8** (Charakterisierung kritischer Punkte) Gilt  $f(\xi) = w$  und  $\xi, w \neq \infty$ , so ist  $\xi$  genau dann kritischer Punkt und  $w$  kritischer Wert, wenn  $f'(\xi) = 0$  gilt.

Ist  $\xi \neq \infty$  und  $w = \infty$ , also  $\xi$  Pol, so ist  $\xi$  kritischer Punkt, falls  $\xi$  ein mehrfacher Pol ist.

**Bemerkung 2.4.9** (Charakterisierung asymptotischer Werte) Sei  $f$  eine ganze Funktion. Dann ist  $w$  ein asymptotischer Wert von  $f$ , wenn eine Kurve  $\gamma : [0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$  existiert, sodass  $\gamma(t) \rightarrow \infty$  und  $f(\gamma(t)) \rightarrow w$  für  $t \rightarrow 1$  gilt.

**Definition 2.4.10** (Menge der kritischen Punkte) Es seien  $U, V \subseteq \overline{\mathbb{C}}$  Gebiete und es sei  $f : U \rightarrow V$  eine meromorphe Abbildung. Dann bezeichnen wir mit  $\text{Crit}_f$  die *Menge der kritischen Punkte von  $f$* .

**Bemerkung 2.4.11** (Singuläre Menge von rationalen Funktionen) Ist  $f$  rational, so gilt  $\text{Sing}(f^{-1}) = f(\text{Crit}_f)$ , da rationale Funktionen auf ganz  $\overline{\mathbb{C}}$  definiert sind.

**Definition 2.4.12** (Postsinguläre Menge) Wir definieren

$$P(f) := \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(\text{Sing}(f^{-1}))}$$

als die *postsinguläre Menge von  $f$* . Besitzt  $f$  keine asymptotischen Werte so wird  $P(f)$  auch *postkritische Menge von  $f$*  genannt.

Der folgende Satz ist einer der grundlegenden Sätze für analytische Fortsetzungen. Für einen Beweis des Satzes siehe [Con78, Theorem 3.6].

**Satz 2.4.13** (Monodromiesatz) *Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet und  $U \subseteq G$  ein Gebiet. Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Es sei  $f$  holomorph fortsetzbar entlang jeder Kurve in  $G$ . Dann existiert eine holomorphe Funktion  $F : G \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $F|_U = f$ .*

## 2.5 Unendliche Produkte

Alle Beispiele von ganzen transzendenten Funktionen in dieser Arbeit werden über unendliche Produkte definiert. Deshalb fassen wir hier grundlegende Dinge zu unendlichen Produkten zusammen. Für mehr Informationen siehe [FL80, Kapitel VII].

**Definition 2.5.1** (Unendliche Produkte) Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{C}$ . Dann heißt

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n$$

*konvergent*, wenn ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert, sodass der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=N}^n a_k$$

existiert und von 0 verschieden ist. Wir setzen dann

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n := \prod_{k=1}^{N-1} a_k \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=N}^n a_k$$

**Bemerkung 2.5.2** ( $a_n$  konvergiert gegen 1) Ist  $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergent, so existiert ein  $N \in \mathbb{N}$ , sodass  $a_n \neq 0$  für alle  $n \geq N$  gilt. Es gilt sogar  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ . Damit ist es sinnvoll,  $a_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  als  $a_n = 1 + b_n$  zu schreiben, wobei  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{C}$  ist.



**Satz 2.5.3** (Konvergenzkriterium für unendliche Produkte) Sei  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ . Dann gilt

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + b_n) \text{ konvergiert} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konvergiert}$$

**Bemerkung 2.5.4** (Anwendung des Konvergenzkriteriums in dieser Arbeit) Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{C}$ . Dann genügt es zu zeigen, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

absolut konvergiert, um zu erhalten, dass

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$$

konvergiert. In dieser Arbeit betrachten wir für  $z \in \mathbb{C}$  Produkte der Form

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \left( \frac{z}{a_n} \right)^{k_n} \right)^l$$

mit einer Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  und einer Folge  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{N}$  sowie  $l \in \mathbb{N}$ . Dabei gilt für die Folge der Beträge  $|a_{n+1}| \geq 2|a_n|$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Die Zahl  $l$  ist unerheblich für die Konvergenz des Produkts. Es bleibt also nach dem letzten Satz zu überprüfen, ob die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z}{a_n} \right|^{k_n}$$

konvergiert. Für alle  $z \in \mathbb{C}$  existiert ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $|z| < |a_N|$ . Dann gilt

$$\sum_{j=N}^n \left| \frac{z}{a_j} \right|^{k_j} = \sum_{j=1}^n \left| \frac{z}{a_{N+j}} \right|^{k_{N+j}} \leq \sum_{j=1}^n \left| \frac{z}{2^j a_N} \right|^{k_{N+j}} \leq \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{2^j} \right)^{k_{N+j}} \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{2^j}$$

für alle  $n > N$ . Mit  $n \rightarrow \infty$  folgt, dass das Produkt für alle  $z \in \mathbb{C}$  konvergiert. Darüber hinaus konvergiert das Produkt lokal gleichmäßig. Damit liefert die Definition

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \left( \frac{z}{a_n} \right)^{k_n} \right)^l$$

eine holomorphe Abbildung.

## 2.6 Eigentliche Abbildungen

In diesem Abschnitt stellen wir Resultate über eigentliche Abbildungen zusammen, die in dieser Arbeit gebraucht werden. Für Beweise der Aussagen siehe [Ste93].

**Definition 2.6.1** (Eigentliche Abbildungen) Es seien  $U, V \subseteq \overline{\mathbb{C}}$  Gebiete und  $f : U \rightarrow V$  eine meromorphe Funktion. Dann heißt  $f$  *eigentlich*, wenn für jede kompakte Teilmenge  $K \subseteq V$  auch  $f^{-1}(K)$  kompakt ist.

**Definition 2.6.2** (Abbildungsgrad) Es seien  $U, V \subseteq \overline{\mathbb{C}}$  Gebiete und  $f : U \rightarrow V$  eine meromorphe Funktion. Ferner sei  $k \in \mathbb{N}$ . Dann heißt  $k$  *Abbildungsgrad von  $f$  im Punkt  $y \in V$* , wenn genau  $k$  Urbilder von  $y$  in  $U$  gezählt gemäß Vielfachheit existieren. Wir nennen  $k$  den *Abbildungsgrad* von  $f$ , wenn der Abbildungsgrad von  $f$  in allen Punkten aus  $V$  gleich  $k$  ist. Wir bezeichnen den Abbildungsgrad von  $f$  mit  $\deg(f)$ . Für rationale Funktionen  $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  entspricht  $\deg(f)$  dann genau dem Grad von  $f$ .

**Bemerkung 2.6.3** (Endlicher Abbildungsgrad) Sei  $f$  eine ganze Funktion und  $U \subset \mathbb{C}$  beschränkt. Dann gilt nach dem Identitätssatz  $f^{-1}(z) \cap U < \infty$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Das heißt, obwohl der Abbildungsgrad einer ganzen Funktion auf einem beschränkten Gebiet nicht existieren muss, besitzt jeder Punkt in  $U$  nur endlich viele Urbilder.

**Satz 2.6.4** (Charakterisierung eigentlicher Abbildungen) *Es seien  $U, V \subseteq \overline{\mathbb{C}}$  Gebiete und  $f : U \rightarrow V$  eine meromorphe Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (i)  $f$  ist eine eigentliche Abbildung.
- (ii) Es gibt ein  $k \in \mathbb{N}$  derart, dass  $f$  den Abbildungsgrad  $k$  besitzt.
- (iii) Für jede Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in U^{\mathbb{N}}$  mit

$$z_n \rightarrow \partial U \text{ für } n \rightarrow \infty$$

*gilt*

$$f(z_n) \rightarrow \partial V \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

**Bemerkung 2.6.5** (Eigentliche Abbildungen auf dem Rand) Es seien  $U, V \subseteq \overline{\mathbb{C}}$  Gebiete und  $f : U \rightarrow V$  eine eigentliche Abbildung. Besitzt  $f$  eine stetige Fortsetzung auf  $\partial U$ , so folgt  $f(\partial U) = \partial V$  aus der letzten Eigenschaft. Allerdings überträgt sich der Abbildungsgrad im Allgemeinen nicht auf den Rand. Man betrachte zum Beispiel

$$f : \{z = re^{it} : 0 < r < 1, 0 < t < \pi\} \rightarrow \mathbb{D} \setminus [0, 1], \quad f(z) = z^2.$$

In [Pom92, Corollary 2.10] wird gezeigt, dass sich der Abbildungsgrad überträgt, wenn  $U$  und  $V$  Jordangebiete sind.

**Satz 2.6.6** (Abbildungsgrad eigentlicher Abbildungen auf dem Rand) *Seien  $U, V \subseteq \overline{\mathbb{C}}$  Jordangebiete und  $f : U \rightarrow V$  eine eigentliche Abbildung. Dann besitzt  $f$  eine stetige Fortsetzung auf  $\partial U$  und der Abbildungsgrad von  $f$  in  $U$  überträgt sich auf  $\partial U$ .*

Für den folgenden Satz findet man einen Beweis in [Ste93, Kapitel 1.3].

**Satz 2.6.7** (Riemann-Hurwitz-Formel) *Seien  $U$  und  $V$  Gebiete in  $\overline{\mathbb{C}}$ . Des Weiteren sei  $f : U \rightarrow V$  eine eigentliche Abbildung vom Grad  $k \in \mathbb{N}$  und  $r \in \mathbb{N}_0$  die Anzahl der kritischen Punkte von  $f$  gezählt gemäß Vielfachheit. Dann gilt*

$$c(U) - 2 = k(c(V) - 2) + r.$$

**Bemerkung 2.6.8** (Riemann-Hurwitz-Formel für Annuli) Mit Satz 2.6.7 folgt direkt, dass  $U$  zweifach zusammenhängend ist, wenn  $V$  zweifach zusammenhängend ist und  $U$  keine kritischen Punkte enthält.

## 2.7 Fatou- und Juliamengen

In diesem Abschnitt behandeln wir die Fatou- und die Juliamenge. Wir geben neben der Definition einige für diese Arbeit wichtige Resultate an.

Es sei im Folgenden  $f$  eine ganze Funktion oder eine rationale Funktion mit Grad größer gleich 2. Ist  $f$  ganz, so gilt  $D(f) = \mathbb{C}$ , ist  $f$  rational, so gilt  $D(f) = \overline{\mathbb{C}}$ .

Alle Aussagen dieses Kapitels lassen sich für rationale Funktionen in [Bea91], [CG93], [Mil06] und [Ste93] finden. Für ganze transzendente Funktionen siehe [Ber93] und [Sch10]. Einige der Aussagen gelten auch in noch allgemeinerer Form.

**Definition 2.7.1** (Normale Familien) Es sei  $U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$  offen und  $F$  eine Familie von Funktionen von  $U$  nach  $\overline{\mathbb{C}}$ . Wir nennen  $F$  *normal*, falls jede Folge in  $F$  eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzt. Hierbei ist die Konvergenz bezüglich der chordalen beziehungsweise sphärischen Metrik gemeint. Für  $z \in U$  nennen wir  $F$  *normal in  $z$* , falls eine Umgebung  $V$  von  $z$  existiert, sodass  $\{f|_V : f \in F\}$  normal ist.

**Definition 2.7.2** (Fatou- und Juliamenge) Wir nennen

$$\mathcal{F}(f) := \{z \in D(f) : \{f^n : n \in \mathbb{N}\} \text{ ist normal in } z\}$$

die *Fatoumenge* von  $f$  und

$$\mathcal{J}(f) := D(f) \setminus \mathcal{F}(f)$$

die *Juliamenge* von  $f$ .

**Definition 2.7.3** (Entkommende und schnellentkommende Menge) Sei  $f$  eine ganze Funktion. Wir nennen

$$I(f) := \{z \in \mathbb{C} : f^n(z) \rightarrow \infty, \text{ für } n \rightarrow \infty\}$$

die *entkommende Menge* von  $f$ . Weiter nennen wir

$$A(f) := \{z \in \mathbb{C} : \text{es existiert ein } L \in \mathbb{N}, \text{ sodass } |f^n(z)| > M(R, f^{n-L}), \text{ für } n > L\}$$

die *schnellentkommende Menge* von  $f$ , wobei  $R > \min_{z \in \mathcal{J}(f)} |z|$ .

Es gilt insbesondere  $A(f) \subset I(f)$ .

Die entkommende Menge wurde in [Erë89] und die schnellentkommende Menge in [BH99] eingeführt.

**Definition 2.7.4** (Orbit) Sei  $z \in D(f)$ . Dann heißt

$$O^+(z) := \{f^n(z) : n \in \mathbb{N}_0\}$$

Vorwärtsorbit von  $z$  (unter  $f$ ) und

$$O^-(z) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(z)$$

Rückwärtsorbit von  $z$  (unter  $f$ ). Weiter heißt

$$O(z) := O^+(z) \cup O^-(z)$$

Orbit von  $z$  (unter  $f$ ). Wir nennen

$$GO(z) := \{x : \exists n \in \mathbb{N} : f^n(x) \in O(z)\}$$

den großen Orbit von  $z$  (unter  $f$ ). Damit gilt  $O(z) \subset GO(z)$ .

**Definition 2.7.5** (Ausnahmepunkt) Ein Punkt  $z \in D(f)$  heißt *Ausnahmepunkt*, falls  $O^-(z)$  endlich ist. Die Menge der Ausnahmepunkte von  $f$  bezeichnen wir mit  $E(f)$ .

**Definition 2.7.6** (Klassifikation periodischer Punkte) Sei  $z_0 \in D(f)$ . Der Punkt  $z_0$  heißt *periodisch*, falls ein  $n \in \mathbb{N}$  existiert mit  $f^n(z_0) = z_0$ . Das kleinste  $n$  mit dieser Eigenschaft heißt *Periode* von  $z_0$ .

Sei nun  $z_0$  periodisch mit Periode  $n$ . Der *Multiplikator*  $\lambda$  von  $z_0$  ist dann definiert durch

$$\lambda := \begin{cases} (f^n)'(z_0), & \text{falls } z_0 \in \mathbb{C} \\ \left. \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{f^n\left(\frac{1}{z}\right)} \right) \right|_{z=0}, & \text{falls } z_0 = \infty. \end{cases}$$

Der Punkt  $z_0$  heißt

- *anziehend* oder *attraktiv*, falls  $|\lambda| < 1$  gilt,
- *indifferent*, falls  $|\lambda| = 1$  gilt und
- *abstoßend*, falls  $|\lambda| > 1$  gilt.

Falls  $|\lambda| = 1$  gilt, so existiert  $\alpha \in [0, 1)$  mit  $\lambda = e^{2\pi i \alpha}$ . Der Punkt  $z_0$  heißt *rational indifferent*, falls  $\alpha \in \mathbb{Q}$  gilt, und *irrational indifferent*, falls  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  gilt.

Der Punkt  $z_0$  heißt *superattraktiv*, falls  $\lambda = 0$  gilt. Ist  $z_0$  anziehender periodischer Punkt der Periode  $p$ , so bezeichnen wir mit

$$A(z_0) := \{z \in D(f) : \lim_{n \rightarrow \infty} f^{pn}(z) = z_0\}$$

den *Einzugsbereich* von  $z_0$  und mit  $A^*(z_0)$  die Komponente von  $A(z_0)$ , die  $z_0$  enthält.  $A^*(z_0)$  wird auch *unmittelbarer Einzugsbereich* von  $z_0$  genannt. Periodische Punkte der Periode 1 heißen *Fixpunkte*.

**Bemerkung 2.7.7** (Eigenschaften der Fatou- und Juliamengen) Die folgenden Eigenschaften entsprechen bekannten Sätzen aus der Komplexen Dynamik.

- Die Fatoumenge ist offen und die Juliamenge ist abgeschlossen.
- Die Julia- und die Fatoumenge sind beide unter Vorwärts- und Rückwärtsiteration invariant, das heißt, für  $z \in D(f)$  gilt

$$f(z) \in \mathcal{F}(f) \Leftrightarrow z \in \mathcal{F}(f) \text{ und } f(z) \in \mathcal{J}(f) \Leftrightarrow z \in \mathcal{J}(f).$$

- Es gilt  $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(f^n)$ ,  $\mathcal{J}(f) = \mathcal{J}(f^n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .
- Sei  $z \notin E(f)$ . Dann gilt  $\mathcal{J}(f) \subset \overline{O^-(z)}$ . Ist außerdem  $z \in \mathcal{J}(f)$ , so gilt  $\mathcal{J}(f) = \overline{O^-(z)}$ .
- Ist  $U \subset D(f)$  offen mit  $U \cap \mathcal{J}(f) \neq \emptyset$ , so gilt

$$O^+(U) \supset D(f) \setminus E(f) \quad \text{und} \quad O^+(U \cap \mathcal{J}(f)) \supset \mathcal{J}(f) \setminus E(f).$$

- Sind  $f$  und  $g$  rationale Funktionen, die durch eine Möbiustransformation  $T$  konjugiert sind, etwa  $f = T^{-1} \circ g \circ T$ , dann gilt  $\mathcal{F}(f) = T(\mathcal{F}(g))$  und  $\mathcal{J}(f) = T(\mathcal{J}(g))$ .
- Abstoßende und rational indifferente periodische Punkte liegen in der Juliamenge. Anziehende periodische Punkte liegen in der Fatoumenge.
- $\mathcal{J}(f)$  ist der Abschluss der Menge der abstoßenden periodischen Punkte von  $f$ .
- Ist  $z_0$  anziehender periodischer Punkt von  $f$ , so gilt  $\mathcal{J}(f) = \partial A(z_0)$ .
- Sei  $f$  rational,  $U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$  offen mit  $U \cap \mathcal{J}(f) \neq \emptyset$ . Dann existiert ein  $N \in \mathbb{N}$ , sodass  $f^n(U \cap \mathcal{J}(f)) = \mathcal{J}(f)$  für alle  $n \geq N$  gilt.
- Es gilt  $|\mathcal{J}(f)| = \infty$ .
- Ist  $\mathcal{F}(f) \neq \emptyset$ , also  $\mathcal{J}(f) \neq D(f)$ , so hat  $\mathcal{J}(f)$  keine inneren Punkte.
- Ist  $f$  ganz transzendent, so gilt  $\mathcal{J}(f) = \partial I(f)$ .

**Definition 2.7.8** (Fatoukomponenten) Sei  $U$  eine Komponente von  $\mathcal{F}(f)$ . Dann heißt  $U$  *periodisch*, wenn ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $f^n(U) \subseteq U$  existiert. Das kleinste  $n$  mit dieser Eigenschaft heißt *Periode* von  $U$ . Im Falle  $n = 1$  heißt  $U$  *invariant*. Weiter heißt  $U$  *präperiodisch*, wenn ein  $n \in \mathbb{N}$  existiert, sodass  $f^n(U) \subseteq V$  für eine periodische Komponente  $V$  gilt. Eine nicht präperiodische Komponente von  $\mathcal{F}(f)$  heißt *wandernd*.

**Satz 2.7.9** (Eigentliche Abbildungen und Fatoukomponenten) *Ist  $U$  eine Fatoukomponente einer rationalen Funktion  $f$ , so ist  $f|_U$  eigentlich. Ist  $U$  eine beschränkte Fatoukomponente einer ganzen Funktion  $f$ , so ist  $f|_U$  eigentlich.*

Der erste Teil dieses Satzes folgt direkt aus der Invarianz der Juliamenge und Satz 2.6.4. Der zweite Teil wird in [Her98, Corollary 1] bewiesen.

**Definition 2.7.10** (Periodische Fatoukomponenten) Sei  $U$  eine periodische Komponente der Periode  $p$  von  $\mathcal{F}(f)$ . Dann nennen wir  $U$

- *Böttchergebiet*, falls  $U$  einen superattraktiven periodischen Punkt enthält,
- *Schrödergebiet*, falls  $U$  einen attraktiven periodischen Punkt enthält, der nicht superattraktiv ist,
- *parabolisches Gebiet* oder auch *Leauegebiet*, falls ein rational indifferent periodischer Punkt  $z \in \partial U$  existiert, sodass  $f^{np+j}|_U \rightarrow f^j(z)$  für  $j \in \{0, \dots, p-1\}$ ,  $n \rightarrow \infty$ ,
- *Siegelscheibe*, falls ein  $r > 0$  und eine konforme Abbildung  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{B}(0, r)$  sowie  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  existieren, sodass  $\varphi(f^p(z)) = e^{2\pi i \alpha} \varphi(z)$  für  $z \in U$  gilt,
- *Herman-Ring*, falls  $R > r > 0$  und eine konforme Abbildung  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{A}(r, R)$  sowie  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  existieren, sodass  $\varphi(f^p(z)) = e^{2\pi i \alpha} \varphi(z)$  für  $z \in U$  gilt und
- *Bakergebiet*, falls  $z_0 \in \overline{\mathbb{C}} \setminus D(f)$  existiert mit  $f^n|_U \rightarrow z_0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Die ersten beiden Typen werden unter dem Begriff *Attraktionsgebiete* und die letzten beiden Typen unter dem Begriff *Rotationsgebiete* oder auch *singuläre Gebiete* zusammengefasst.

**Satz 2.7.11** (Klassifikation periodischer Fatoukomponenten) *Sei  $U$  eine periodische Komponente von  $\mathcal{F}(f)$ . Dann gilt genau einer der folgenden Fälle:*

- *$U$  ist ein Attraktionsgebiet.*
- *$U$  ist ein parabolisches Gebiet.*
- *$U$  ist ein Rotationsgebiet.*
- *$U$  ist ein Bakergebiet*

**Satz 2.7.12** (Satz von Sullivan) *Rationale Funktionen haben keine wandernden Gebiete.*

Einen Beweis des Satzes von Sullivan findet man in [Sul85]. Sullivans Satz besagt, dass rationale Funktionen nur präperiodische Fatoukomponenten haben. Damit liefert Satz 2.7.11 eine vollständige Beschreibung des Verhaltens der Funktion auf der gesamten Fatoumenge. Die folgenden Klassen spielen eine wichtige Rolle in der Untersuchung von ganzen Funktionen.

**Definition 2.7.13** (Speiser-Klasse  $\mathcal{S}$  und Eremenko-Lyubich-Klasse  $\mathcal{B}$ ) Die Eremenko-Lyubich-Klasse  $\mathcal{B}$  ist die Menge aller ganzen transzendenten Funktionen, für die die Menge der kritischen und asymptotischen Werte beschränkt ist, und die Speiser-Klasse  $\mathcal{S}$  ist die Menge aller ganzen transzendenten Funktionen, für die die Menge der kritischen und asymptotischen Werte endlich ist.

**Bemerkung 2.7.14** (Keine wandernden Gebiete in Klasse  $\mathcal{S}$ ) Sowohl Eremenko und Lyubich [EL92], als auch Goldberg und Keen [GK86] zeigten, dass sich das Resultat von Sullivan auf Funktionen der *Speiser-Klasse*  $\mathcal{S}$  erweitern lässt, das heißt, dass Funktionen in  $\mathcal{S}$  keine wandernden Gebiete haben.

**Definition 2.7.15** (Hyperbolische Abbildungen) Eine rationale Abbildung  $f$  heißt *hyperbolisch*, wenn alle kritischen Punkte in Einzugsbereichen von attraktiven periodischen Punkten liegen. Ist  $\infty \in \mathcal{F}(f)$ , so ist diese Definition äquivalent dazu, dass ein  $n \in \mathbb{N}$  und ein  $\lambda > 1$  existieren, sodass für alle  $z \in \mathcal{J}(f)$  die Ungleichung  $|(f^n)'(z)| \geq \lambda$  gilt.

**Bemerkung 2.7.16** (Fatoukomponenten von hyperbolischen Abbildungen) Alle periodischen Fatoukomponenten einer hyperbolischen Abbildung sind attraktiv, siehe [Mil06, Theorem 19.1].

## 2.8 Wandernde Gebiete

Sullivans Satz liefert zusammen mit dem Klassifikationssatz eine vollständige Beschreibung des Verhaltens von rationalen Funktionen auf ihrer Fatoumenge. Baker zeigte jedoch bevor Sullivan seinen Satz bewies, dass ganze transzendente Funktionen wandernde Gebiete haben können. Wir wollen nun einige bekannte Aussagen und Definitionen zu wandernden Gebieten zusammenfassen. Im Folgenden sei  $U = U_0$  immer ein mehrfach zusammenhängendes wanderndes Gebiet einer ganzen transzendenten Funktion  $f$  und es sei  $U_n := f^n(U)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Der folgende Satz fasst einige bekannte Eigenschaften von mehrfach zusammenhängenden wandernden Gebieten zusammen. Baker zeigte einige bereits selbst für sein erstes Beispiel.

**Satz 2.8.1** (Eigenschaften von mehrfach zusammenhängenden wandernden Gebieten) *Es gilt:*

- (i)  $f^n \Big|_{U_0} \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ . Also gilt  $U \subset I(f)$ .
- (ii) Jedes  $U_n$  enthält eine geschlossene Kurve  $\gamma_n$  mit  $\mathfrak{n}(\gamma_n, 0) \neq 0$  sofern  $n$  groß genug ist. Ist  $\gamma_0$  eine nicht nullhomotope Jordankurve in  $U_0$  ist, so hat  $\gamma_n := f^n(\gamma_0)$  diese Eigenschaft.
- (iii) Alle  $U_n$  sind beschränkt.
- (iv)  $U_{n+1}$  umringt  $U_n$  für große  $n$ .
- (v) Es existieren Folgen  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \infty$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \infty$ , sodass  $\mathbb{A}(r_n, R_n) \subseteq U_n$  für große  $n$  gilt und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n}{r_n} = \infty$  gilt.
- (vi) Es gilt  $\overline{U} \subset \mathbb{A}(f)$ .
- (vii)  $U_n$  umringt 0 für große  $n$ .

Die Aussage (i) ist eine einfache Beobachtung, siehe [Töp39, S. 67] Die Aussagen (ii) und (iii) wurden von Baker in [Bak84, Theorem 3.1] bewiesen, wobei von (ii) nur der erste Teil behauptet wird, der zweite Teil aber aus dem Beweis hervorgeht. Aussage (iv) ist eine einfache Konsequenz von (ii). Aussage (v) wurde in [Zhe06] bewiesen. Aussage (vi) folgt aus [RS05, Theorem 2] und [RS12, Theorem 4.4]. Aussage (vii) ist eine Folgerung aus (ii) und (iv).

**Bemerkung 2.8.2** (Einfach zusammenhängende wandernde Gebiete und  $I(f)$ ) Für einfach zusammenhängende wandernde Gebiete  $U$  muss  $U \subset I(f)$  nicht gelten. Beispiele hierfür kommen von Eremenko und Lyubich (siehe [EL87, Example 1]) sowie von Bishop (siehe [Bis15]).

**Bemerkung 2.8.3** (Keine asymptotischen Werte) Ist  $f$  eine ganze Funktion mit einem mehrfach zusammenhängenden wandernden Gebiet, so wird jede unbeschränkte Kurve auf eine unbeschränkte Kurve abgebildet, da sie nach Satz 2.8.1 unendlich viele mehrfach zusammenhängende wandernde Gebiete schneiden muss. Damit hat  $f$  keine asymptotischen Werte und es gilt  $\text{Sing}(f^{-1}) = f(\text{Crit}(f))$ .

Der folgende Satz stammt von Baker, siehe [Bak75, Theorem 1].

**Satz 2.8.4** (Mehrfach zusammenhängende Fatoukomponenten sind beschränkt) *Ganze transzendente Funktionen haben keine mehrfach zusammenhängenden unbeschränkten Fatoukomponenten.*

**Bemerkung 2.8.5** (Keine mehrfach zusammenhängenden periodischen Fatoukomponenten) Mehrfach zusammenhängende Fatoukomponenten von ganzen transzendenten Funktionen liegen in der entkommenden Menge, siehe zum Beispiel [Töp39, S. 67] oder [Bak84, Theorem 3.1]. Damit können also Herman-Ringe für ganze transzendente Funktionen nicht auftreten. Der letzte Satz zeigt damit, dass auch Bakergebiete nicht mehrfach zusammenhängend sein können. Demnach haben ganze transzendente Funktionen keine mehrfach zusammenhängenden periodischen Fatoukomponenten.

**Korollar 2.8.6** (Entkommende Annuli gehören zu mehrfach zusammenhängenden wandernden Gebieten) *Seien  $B_n := \mathbb{A}(r_n, R_n)$  Annuli für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \infty$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \infty$  sowie  $r_n < R_n < r_{n+1} < R_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Sei  $f$  eine ganze transzendente Funktion mit  $f(B_n) \subset B_{n+1}$ . Seien  $U_n$  die Fatoukomponenten mit  $B_n \subset U_n$ . Dann sind die  $U_n$  mehrfach zusammenhängende wandernde Gebiete.*

*Beweis:* Es gilt  $\tilde{U}_n \cap \mathcal{J}(f) \neq \emptyset$  für großes  $n$ , da  $\mathcal{J}(f) \neq \emptyset$  und  $\mathcal{J}(f)$  (abstoßende) periodische Punkte enthält. Damit sind die  $U_n$  für großes  $n$  mehrfach zusammenhängend. Angenommen, es gilt  $U_n = U_{n+k}$  für ein  $n$  und ein  $k$  in  $\mathbb{N}$ . Dann sind  $B_n$  und  $B_{n+k}$  über eine Kurve in  $U_n$  verbindbar. Dann schneidet diese Kurve  $B_{n+1}, \dots, B_{n+k-1}$ , somit gilt ebenfalls

$$U_n = U_{n+1} = \dots = U_{n+k-1} = U_{n+k}.$$



Betrachtet man nun  $f(U_n)$ , so erhält man

$$U_{n+1} = U_{n+2} = \dots = U_{n+k} = U_{n+k+1}.$$

Es folgt, dass  $U_m = U_n$  gilt für alle  $m \geq n$ . Demnach muss  $U_n$  unbeschränkt sein. Dies ist ein Widerspruch zum letzten Satz. Damit sind alle  $U_n$  verschieden und demnach mehrfach zusammenhängende wandernde Gebiete.  $\square$

Den folgenden Satz findet man in [EL92, Theorem 1].

**Satz 2.8.7** (Eremenko-Lyubich) *Ist  $f \in \mathcal{B}$ , so gilt  $I(f) \subset \mathcal{J}(f)$ .*

**Bemerkung 2.8.8** (Keine mehrfach zusammenhängenden wandernden Gebiete in  $\mathcal{B}$ )  
Nach dem letzten Satz können Funktionen in  $\mathcal{B}$  keine mehrfach zusammenhängenden wandernden Gebiete und keine Bakergebiete haben. Einfach zusammenhängende wandernde Gebiete sind aber möglich. Für ein Beispiel eines solchen Gebietes siehe [Bis15].

Folgender Satz wurde in [BRS13, Theorem 1.2] bewiesen.

**Satz 2.8.9** (Iterationsverhalten von offenen Teilmengen wandernder Gebiete) *Für jedes  $z_0 \in U$  und jede offene Menge  $D \subset U$ , die  $z_0$  enthält, existiert ein  $\alpha > 0$ , sodass für genügend großes  $n \in \mathbb{N}$*

$$\mathbb{A}(|f^n(z_0)|^{1-\alpha}, |f^n(z_0)|^{1+\alpha}) \subset f^n(D) \subset U_n$$

*gilt.*

**Bemerkung 2.8.10** (Maximaler Annulus) Der letzte Satz impliziert, dass der maximale Annulus, der in  $U_n$  enthalten ist und  $f^n(z_0)$  enthält, von der Form  $F_n := \mathbb{A}(r_n^{a_n}, r_n^{b_n})$  ist, wobei  $r_n := |f^n(z_0)|$  und  $0 < a_n < 1 - \alpha < 1 + \alpha < b_n$  (siehe [BRS13]).

Der folgende Satz entspricht [BRS13, Theorem 1.3]. Er wird von uns vor allem in 3.1 genutzt, um das Verhalten von Randkomponenten unter Iteration zu untersuchen. Außerdem liefert er eine Beschreibung des Verhaltens von Funktionen auf mehrfach zusammenhängenden wandernden Gebieten. Zusammen mit dem Klassifikationssatz bleiben damit nur noch einfach zusammenhängende wandernde Gebiete, um auch für ganze transzendente Funktionen eine vollständige Klärung der Situation zu erhalten.

**Satz 2.8.11** (Absorbierender Annulus) *Sei  $z_0 \in U$  und  $F_n$  definiert wie oben beschrieben. Dann existiert für jede kompakte Menge  $K \subset U$  ein  $N \in \mathbb{N}$ , sodass*

$$f^n(K) \subset F_n$$

*für alle  $n \geq N$ . Darüber hinaus haben wir*

$$f^n(K) \subset E_n$$

*für alle  $n \geq N$ , wobei  $E_n := \mathbb{A}(r_n^{a_n+2\pi\delta_n}, r_n^{b_n(1-3\pi\delta_n)})$  mit  $\delta_n = 1/\sqrt{\log r_n}$ .*

**Satz 2.8.12** (Kritische Punkte im absorbierenden Annulus) Sei  $z_0 \in U$  und  $E_n$  definiert wie oben beschrieben.

Dann existiert ein  $N \in \mathbb{N}$ , sodass für alle  $n \geq N$  und  $m \in \mathbb{N}$  keine kritischen Punkte von  $f^m$  in  $E_n$  liegen.

Für einen Beweis des letzten Satzes siehe [BRS13, Theorem 1.4] und für einen Beweis des Folgenden siehe [BRS13, Theorem 1.7]. Der Beweis nutzt [KS08, Theorem A] und die Riemann-Hurwitz-Formel (Satz 2.6.7).

**Satz 2.8.13** (Mehrfacher Zusammenhang von wandernden Gebieten) Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt:

- $c(U_n) = 2$  genau dann, wenn  $\bigcup_{m=n}^{\infty} U_m$  keine kritischen Punkte von  $f$  enthält.
- $2 < c(U_n) < \infty$  genau dann, wenn  $\bigcup_{m=n}^{\infty} U_m$  eine endliche Anzahl von kritischen Punkten von  $f$  enthält.
- $c(U_n) = \infty$  genau dann, wenn  $\bigcup_{m=n}^{\infty} U_m$  unendlich viele kritische Punkte von  $f$  enthält.

**Definition 2.8.14** (Letztendlicher Zusammenhang) Wir sagen, dass eine Folge von Gebieten  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{C}$  *letztendlichen Zusammenhang  $k$*  hat, wenn  $c(V_n) = k$  für alle großen  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Wir setzen dann  $ec(V_n) := k$ .

**Bemerkung 2.8.15** (Letztendlicher Zusammenhang von wandernden Gebieten) Nach dem letzten Satz ist der letztendliche Zusammenhang eines mehrfach zusammenhängenden wandernden Gebietes  $U$  entweder 2 oder  $\infty$ , abhängig von der Anzahl der kritischen Punkte im Vorwärtsorbit von  $U$ . Dies wurde bereits von Kisaka und Shishikura in [KS08, Theorem B] gezeigt.

**Definition 2.8.16** (Innerer und äußerer Zusammenhang) Sei  $z_0 \in U$  und  $r_n = |f^n(z_0)|$ . Dann setzen wir für große  $n \in \mathbb{N}$

$$U_n^+ = U_n \cap \{z : |z| > r_n\} \text{ und } U_n^- = U_n \cap \{z : |z| < r_n\}.$$

Wir definieren  $c(U_n^-)$  als den *inneren Zusammenhang* von  $U_n$  und  $c(U_n^+)$  als den *äußeren Zusammenhang* von  $U_n$ . Weiter sagen wir, dass  $U$  *letztendlichen inneren Zusammenhang  $k$*  hat, wenn  $ec(U^-) := ec(U_n^-) = k$  gilt. Genauso sagen wir, dass  $U$  *letztendlichen äußeren Zusammenhang  $c$*  hat, wenn  $ec(U^+) := ec(U_n^+) = k$  gilt.

Man sieht leicht ein, dass diese Definition mit der aus der Einleitung übereinstimmt.

**Bemerkung 2.8.17** (Unabhängigkeit von  $z_0$ ) Da alle Punkte  $z_0 \in U$  nach genügend großer Iteration in dem absorbierenden Annulus  $E_n$  liegen, ist der Zusammenhang von  $U_n^+$  und  $U_n^-$  unabhängig von der Wahl von  $z_0$ , vorausgesetzt  $n$  ist groß genug. Im Folgenden werden wir daher häufig darauf verzichten,  $z_0$  explizit einzuführen.

Für einen Beweis des folgenden Satzes siehe [BRS13, Theorem 8.1]. Der Satz überträgt die bereits aus Satz 2.8.13 bekannten Resultate auf den inneren und den äußeren Zusammenhang.

**Satz 2.8.18** (Eigenschaften des inneren und des äußeren Zusammenhangs) *Sei  $N \in \mathbb{N}$ , sodass  $f^m$  keine kritischen Punkte in  $E_n$  für alle  $n \geq N$  und  $m \in \mathbb{N}$  besitzt (für große  $N$  ist das nach Satz 2.8.12 der Fall).*

Dann gilt:

- (i) •  $c(U_n^-) = 2$  für alle  $n \geq N$  genau dann, wenn  $\bigcup_{m=n}^{\infty} U_m^-$  keine kritischen Punkte von  $f$  enthält.
- $2 < c(U_n^-) < \infty$  für alle  $n \geq N$  genau dann, wenn  $\bigcup_{m=n}^{\infty} U_m^-$  eine endliche Anzahl von kritischen Punkten von  $f$  enthält.
- $c(U_n^-) = \infty$  für alle  $n \geq N$  genau dann, wenn  $\bigcup_{m=n}^{\infty} U_m^-$  unendlich viele kritische Punkte von  $f$  enthält.

(ii) Ist  $c(U_N^-) < \infty$ , so gilt:

- $c(U_n^+) = 2$  für alle  $n \geq N$  genau dann, wenn  $\bigcup_{m=N}^{\infty} U_m^+$  keine kritischen Punkte von  $f$  enthält.
- $2 < c(U_n^+) < \infty$  für alle  $n \geq N$  genau dann, wenn  $\bigcup_{m=N}^{\infty} U_m^+$  eine endliche Anzahl von kritischen Punkten von  $f$  enthält.
- $c(U_n^+) = \infty$  für alle  $n \geq N$  genau dann, wenn  $\bigcup_{m=N}^{\infty} U_m^+$  unendlich viele kritische Punkte von  $f$  enthält.

(iii) Ist  $c(U_N^-) = \infty$ , so gilt einer der folgenden Fälle:

- $c(U_n^+) = 2$  für alle  $n \geq N$  und  $\bigcup_{m=N}^{\infty} U_m^+$  enthält keine kritischen Punkte von  $f$ .
- Es existiert ein  $N_0 \geq N$ , sodass  $c(U_n^+) = \infty$  für alle  $N \leq n \leq N_0$  und  $c(U_n^+) = 2$  für alle  $n \geq N_0$  gilt und  $\bigcup_{m=N}^{N_0} U_m^+$  eine endliche Anzahl von kritischen Punkten von  $f$  enthält.
- $c(U_n^+) = \infty$  für alle  $n \geq N$  und  $\bigcup_{m=N}^{\infty} U_m^+$  enthält unendlich viele kritische Punkte von  $f$ .

**Bemerkung 2.8.19** (Letztendlicher innerer und äußerer Zusammenhang) Nach dem letzten Satz ist der letztendliche innere und äußere Zusammenhang eines mehrfach zusammenhängenden wandernden Gebietes entweder 2 oder  $\infty$ , abhängig von der Anzahl der kritischen Punkte im Vorwärtsorbit von  $U^-$  und  $U^+$ .

## 2.9 Lokaler Zusammenhang

In diesem Abschnitt stellen wir einige Aussagen über lokal zusammenhängende Mengen zusammen. Wir benötigen diese, um später zu zeigen, dass die Ränder von wandernden Gebieten unter bestimmten Voraussetzungen lokal zusammenhängend sind. Für mehr Informationen zu lokalem Zusammenhang und verwandten Konzepten der Topologie siehe [CL66], [Mil06], [New51], [Pom92], [Ste93] und [Why42].

**Definition 2.9.1** (Lokaler Zusammenhang) Eine Menge  $A \subseteq \overline{\mathbb{C}}$  heißt *lokal zusammenhängend im Punkt*  $a \in \overline{\mathbb{C}}$ , wenn für alle offenen Umgebungen  $V$  von  $a$  eine offene Umgebung  $U \subset V$  von  $a$  existiert, sodass  $U \cap A$  zusammenhängend ist.

Eine Menge  $A \subseteq \overline{\mathbb{C}}$  heißt *lokal zusammenhängend*, wenn  $A$  in allen Punkten  $a \in A$  lokal zusammenhängend ist.

**Bemerkung 2.9.2** (Lokaler Zusammenhang von Gebieten) Sei  $U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$  ein Gebiet. Dann ist  $U$  in allen Punkten  $x \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \partial U$  lokal zusammenhängend, da jede genügend kleine Umgebung von  $x$  entweder keine Punkte aus  $U$  enthält oder komplett in  $U$  enthalten ist. Daher ist hierbei nur der lokale Zusammenhang in den Randpunkten von Interesse. Wichtig ist, dass der lokale Zusammenhang von  $U$  in  $x \in \partial U$  nicht gleichzusetzen ist mit dem lokalen Zusammenhang von  $\partial U$  in  $x \in \partial U$ . Beide Aussagen können unabhängig voneinander gelten oder nicht gelten.

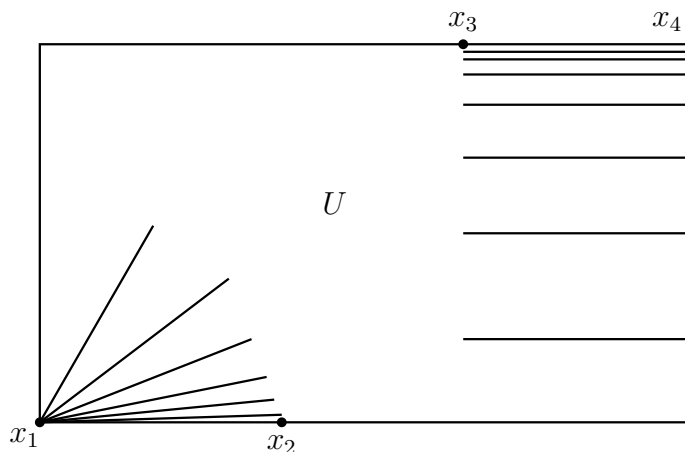


Abbildung 2.3: Das Gebiet  $U$  ist lokal zusammenhängend in  $x_2$  und  $x_3$  und nicht lokal zusammenhängend in  $x_1$  und  $x_4$ . Hingegen ist  $\partial U$  lokal zusammenhängend in  $x_1$  und  $x_4$  und nicht lokal zusammenhängend in  $x_2$  und  $x_3$ . Die Punkte  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$  sind aus  $U$  erreichbar,  $x_4$  dagegen nicht.

**Satz 2.9.3** (Stetige Funktionen und lokaler Zusammenhang) *Das Bild einer kompakten, lokal zusammenhängenden Menge unter einer stetigen Abbildung ist ebenfalls kompakt und lokal zusammenhängend.*

Für einen Beweis dieser Aussage siehe [Mil06, Lemma 17.15].

**Bemerkung 2.9.4** (Lokaler Zusammenhang von Kurven) Jede Kurve ist damit lokal zusammenhängend.

**Satz 2.9.5** (Komplemente eines Kontinuums sind einfach zusammenhängend) *Sei  $K \subset \overline{\mathbb{C}}$  ein Kontinuum. Dann ist jede Komponente von  $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet.*

Einen Beweis des letzten Satzes findet man in [New51, Chapter VI, §1, Theorem 4.4]. Der folgende Satz ist von grundlegender Bedeutung für die Theorie der konformen Abbildungen, einen Beweis findet man in [Mil06, Theorem 17.14 und 17.16].

**Satz 2.9.6** (Satz von Carathéodory) *Es sei  $U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit mindestens zwei Randpunkten. Dann besitzt die Riemann-Abbildung  $f : \mathbb{D} \rightarrow U$  genau dann eine stetige Fortsetzung auf  $\partial\mathbb{D}$ , wenn  $\partial U$  lokal zusammenhängend ist. Weiter ist diese Fortsetzung genau dann injektiv, wenn  $\partial U$  eine Jordankurve ist.*

**Bemerkung 2.9.7** (Lokaler Zusammenhang und Kurven) Der Satz von Carathéodory zeigt damit, dass der Rand von  $U$  genau dann eine Kurve ist, wenn  $\partial U$  lokal zusammenhängend ist. Siehe dazu auch [Pom92, Theorem 2.1]. In diesem Satz wird ebenfalls bewiesen, dass  $\partial U$  genau dann lokal zusammenhängend ist, wenn  $\overline{\mathbb{C}} \setminus U$  lokal zusammenhängend ist.

**Bemerkung 2.9.8** (Lokaler Zusammenhang von Randkomponenten) Jede Randkomponente  $Z$  eines mehrfach zusammenhängenden Gebietes  $U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$  ist ebenfalls genau dann eine Kurve, wenn  $Z$  lokal zusammenhängend ist. Man betrachte dazu die Komponente von  $\overline{\mathbb{C}} \setminus Z$ , die  $U$  enthält, und wende den Satz von Carathéodory auf diese Komponente an.

**Definition 2.9.9** (Erreichbarkeit) Sei  $U \subset \overline{\mathbb{C}}$  eine offene Menge. Dann heißt  $x \in \partial U$  *erreichbar* aus  $U$ , wenn ein Jordanbogen  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  existiert, sodass  $\gamma([0, 1)) \subset U$  und  $\gamma(1) = x$  gilt. Wir sagen,  $\partial U$  ist *erreichbar* von  $U$ , wenn jeder Punkt von  $\partial U$  aus  $U$  erreichbar ist.

**Bemerkung 2.9.10** (Erreichbare Randpunkte) Die Menge der erreichbaren Punkte von  $U$  ist dicht in  $\partial U$  (siehe Bemerkung nach [New51, Chapter VI, §4, Theorem 14.2]).

**Definition 2.9.11** (Vollständig erreichbare Mengen) Sei  $Z \subset \overline{\mathbb{C}}$  abgeschlossen. Wir nennen  $Z$  *vollständig erreichbar*, wenn jeder Punkt  $z \in Z$  von jeder Komponente  $V$  von  $\overline{\mathbb{C}} \setminus Z$  mit  $z \in \partial V$  aus erreichbar ist.

**Satz 2.9.12** (Lokal zusammenhängende Kontinua sind vollständig erreichbar) *Jedes lokal zusammenhängende Kontinuum  $K$  ist vollständig erreichbar.*

*Beweis:* Nach Satz 2.9.5 ist jede Komponente  $U$  von  $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Dann ist  $\overline{\mathbb{C}} \setminus U$  lokal zusammenhängend, da jeder Jordanbogen, der zwei Punkte  $x, y \in \overline{\mathbb{C}} \setminus U$  verbindet entweder vollständig in  $\overline{\mathbb{C}} \setminus U$  liegt oder Punkte des lokal zusammenhängenden Kontinuums  $K$  enthält. Nach [Pom92, Theorem 2.1] ist damit  $\partial U$  ebenfalls lokal zusammenhängend. Mit dem Satz von Carathéodory können wir die Riemann-Abbildung  $f : \mathbb{D} \rightarrow U$  dann stetig auf den Rand fortsetzen. Da  $f$  eine eigentliche Abbildung ist, existiert

tiert zu jedem  $y \in \partial U$  ein  $x \in \partial \mathbb{D}$  mit  $f(x) = y$ . Dann ist  $f([0, x])$  bis auf den Endpunkt  $y$  ein Jordanbogen in  $U$ . Damit ist  $y$  erreichbar.  $\square$

**Bemerkung 2.9.13** (Vollständige Erreichbarkeit von Kurven) Damit sind Kurven vollständig erreichbar.

**Bemerkung 2.9.14** (Erreichbarkeit von Rändern) Sei  $U \subset \overline{\mathbb{C}}$  ein Gebiet und  $\partial U$  lokal zusammenhängend. Dann ist  $\partial U$  vollständig erreichbar.

**Bemerkung 2.9.15** (Erreichbare Randpunkte und lokaler Zusammenhang des Randes) Der lokale Zusammenhang des ganzen Randes eines Gebietes ist notwendig für die vollständige Erreichbarkeit. Auch wenn  $\partial U$  in  $x \in \partial U$  lokal zusammenhängend ist, muss  $x$  nicht von  $U$  aus erreichbar sein.

**Definition 2.9.16** (Lakes of Wada) Existieren mindestens drei Gebiete  $U_1, U_2, U_3 \subset \overline{\mathbb{C}}$ , sodass  $\partial U_1 = \partial U_2 = \partial U_3$  oder  $\partial U_1 \cap \partial U_2 \cap \partial U_3$  zumindest ein ganzes Kontinuum enthält, so nennen wir dies eine „Lakes of Wada“-Situation. Die Existenz solcher Beispiele scheint der Intuition zu widersprechen, tatsächlich können sie jedoch auftreten. Eine ausgiebige Einführung zum diesem Thema findet sich in [KY91].

Nach dem Jordanschen Kurvensatz (Satz 2.2.6) hat das Komplement einer Jordankurve stets zwei Komponenten. Der folgende Satz liefert eine ergänzende Aussage. Einen Beweis findet man in [New51, Chapter VI, §4, Theorem 16.1].

**Satz 2.9.17** (Satz von Schönflies) Sei  $D \subset \overline{\mathbb{C}}$  eine abgeschlossene Menge. Besitzt die Menge  $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$  genau zwei Komponenten, sodass jeder Punkt von  $D$  von beiden Komponenten aus erreichbar ist, so ist  $D$  eine Jordankurve.

Der folgende Satz entspricht einem Teil von [BD00, Theorem A].

**Satz 2.9.18** (Lokaler Zusammenhang der Juliamenge) Sei  $f$  eine ganze transzendente Funktion. Ist die Juliamenge in einem Punkt lokal zusammenhängend, so ist sie zusammenhängend.

**Bemerkung 2.9.19** (Unzusammenhängende Juliamengen) Umgekehrt gilt damit, ist die Juliamenge unzusammenhängend, so ist sie in keinem Punkt lokal zusammenhängend. Dies ist insbesondere der Fall, wenn die Fatoumenge mehrfach zusammenhängende Komponenten, also nach Bemerkung 2.8.5 mehrfach zusammenhängende wandernde Gebiete, besitzt.

**Satz 2.9.20** (Juliamengen hyperbolischer Funktionen) Ist  $f$  eine rationale, hyperbolisch Abbildung und  $\mathcal{J}(f)$  zusammenhängend, so ist  $\mathcal{J}(f)$  lokal zusammenhängend.

Für einen Beweise dieser Aussage siehe [Mil06, Theorem 19.2] oder [Ste93, Chapter 5.5 Theorem 1]. Tatsächlich kann in Satz 2.9.20 die Voraussetzung, dass  $f$  hyperbolisch ist, auch durch schwächere Voraussetzungen ersetzt werden, siehe zum Beispiel [Mil06, Theorem 19.7]. Der Beweis nutzt den folgenden Satz. Ein Beweis findet sich in [Mil06, Lemma 19.3] oder [Ste93, Chapter 5.5 Theorem 1].

**Satz 2.9.21** (Ränder von Fatoukomponenten hyperbolischer Funktionen) *Ist  $f$  hyperbolisch und  $U$  eine einfach zusammenhängende Fatoukomponente, so ist  $\partial U$  lokal zusammenhängend.*

**Bemerkung 2.9.22** (Spezialfall Polynome) Für Polynome folgt daraus bereits, dass die Julia-Menge lokal zusammenhängend ist, da in diesem Fall  $\infty$  ein superattraktiver Fixpunkt ist und  $\mathcal{J}(f) = A^*(\infty)$  gilt.

**Definition 2.9.23** (Gleichmäßig perfekte Mengen) Sei  $K \subset \mathbb{C}$  abgeschlossen. Wir nennen  $K$  *gleichmäßig perfekt*, wenn ein  $c \in (0, 1)$  existiert, sodass für alle  $0 < r < \text{diam}(K)$  und  $a \in K$

$$\mathbb{A}(a, cr, r) \cap K \neq \emptyset$$

gilt.





# Kapitel 3

## Resultate

In diesem Kapitel stellen wir neben den Hauptresultaten dieser Arbeit auch kleinere Aussagen vor, die von eigenständigem Interesse sein können.

### 3.1 Allgemeine Untersuchung von Randkomponenten

Wir wollen nun die topologischen Eigenschaften von Randkomponenten mehrfach zusammenhängender wandernder Gebiete untersuchen. Hierzu betrachten wir außerdem das Iterationsverhalten der einzelnen Komponenten. Zu diesem Zweck führen wir neue Begriffe und Typen von Rändern ein, um diese gegeneinander abzugrenzen. Viele der hier gezeigten Resultate sind nicht schwer zu beweisen. Dennoch sind die hier bewiesenen Sätze von Interesse, da sie Voraussetzungen für unsere Hauptresultate liefern. Außerdem dienen sie uns dazu die Hauptresultate besser einzuordnen.

Im Folgenden sei  $U = U_0$  immer ein mehrfach zusammenhängendes Gebiet einer ganzen transzendenten Funktion  $f$  und es sei  $U_n := f^n(U)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Wir nehmen stets an, dass  $U$  bereits selbst ein „großes“ wanderndes Gebiet ist in dem Sinne, dass alle Eigenschaften von Satz 2.8.1 bereits für  $U$  gelten. Insbesondere nehmen wir an, dass  $0$  von  $U_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  umringt wird und demnach  $\partial_0 U_n$  definiert ist.

**Definition 3.1.1** (Klassifizierung der Randkomponenten) Sei  $Z$  eine Randkomponente von  $U_n$ . Wir bezeichnen die Ränder  $\partial_0 U_n$  und  $\partial_\infty U_n$  als große Ränder. Wir nennen  $Z$  eine *kleine Randkomponente*, wenn es keine große Randkomponente ist.

Weiter nennen wir  $Z$  eine *innere Randkomponente*, wenn sie eine Randkomponente von  $U_n^-$  ist und eine *äußere Randkomponente*, wenn sie eine Randkomponente von  $U_n^+$  ist (siehe Abbildung 3.1). Hierbei wird vorausgesetzt, dass  $n$  groß genug ist, damit  $U_n^-$  und  $U_n^+$  definiert sind (siehe Bemerkung 2.8.17).

Demnach bezeichnen wir  $\partial_0 U_n$ , also die innere Randkomponente von  $U_n$ , als den *großen inneren Rand* und  $\partial_\infty U_n$ , also die äußere Randkomponente von  $U_n$ , als den *großen äußeren Rand*. Wir nennen die großen Randkomponenten  $\partial_\infty U_{n-1}$  und  $\partial_0 U_n$  *angrenzend*.

Diese Definition stimmt mit der aus der Einleitung überein.

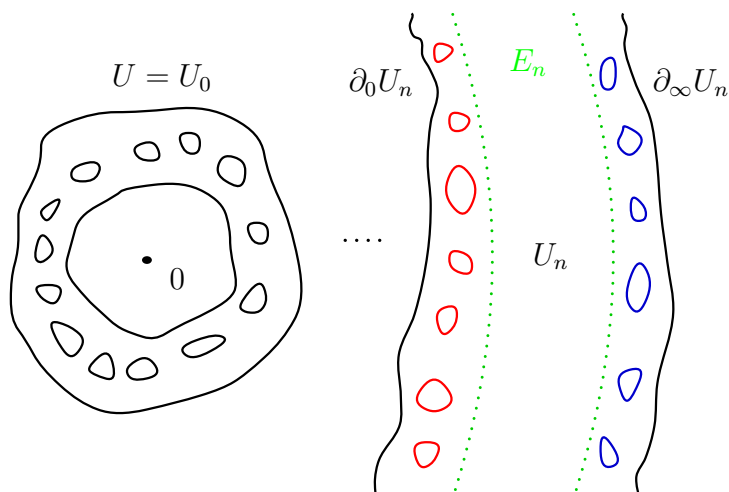


Abbildung 3.1: Das Bild zeigt die Einteilung der Randkomponenten. Die roten zusammen mit  $\partial_0 U_n$  sind die inneren Randkomponenten. Die blauen zusammen mit  $\partial_\infty U_n$  sind die äußeren Randkomponenten. Die roten und blauen sind kleine Randkomponenten.

**Bemerkung 3.1.2** (Varianten des inneren und äußeren Randes) Man beachte, dass im Allgemeinen nicht  $\partial_0 U = \partial_0 \bar{U}$  oder  $\partial_\infty U = \partial_\infty \bar{U}$  gilt.

**Bemerkung 3.1.3** (Randkomponenten auf Randkomponenten) Nach Satz 2.7.9 ist  $f$  eingeschränkt auf eine beschränkte Fatoukomponente eine eigentliche Abbildung. Da mehrfach zusammenhängende wandernde Gebiete nach Satz 2.8.1 beschränkt sind, werden daher Randkomponenten auf Randkomponenten abgebildet.

**Definition 3.1.4** (Isolierter Rand) Sei  $V \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $Z$  eine Komponente von  $\partial V$ . Wir nennen  $Z$  *isoliert*, wenn  $\text{dist}(Z, \partial V \setminus Z) > 0$  gilt.

**Bemerkung 3.1.5** (Nicht isolierte Ränder) Sei  $V \subset \mathbb{C}$  ein beschränktes Gebiet und  $Z$  eine Komponente von  $\partial V$ . Ist  $Z$  nicht isoliert, so müssen sich unendlich viele verschiedene Randkomponenten von  $V$  bei  $Z$  häufen, da jede Randkomponente kompakt ist und disjunkte kompakte Mengen stets einen echten Abstand haben.

Hierbei ist allerdings nicht klar, ob in jeder Umgebung von  $Z$  eine komplette andere Randkomponente liegen muss, oder ob sich nur Teile der Randkomponenten bei  $Z$  häufen.

**Satz 3.1.6** (Isoliertheit der Randkomponenten) Sei  $Z$  eine Komponente von  $\partial U$ .

- (i)  $Z$  ist genau dann isoliert, wenn jedes Bild und jedes Urbild von  $Z$  isoliert ist.
- (ii) Der große innere beziehungsweise große äußere Rand von  $U$  ist genau dann isoliert, wenn der letztendliche innere beziehungsweise äußere Zusammenhang 2 ist.

*Beweis:* (i): Ist  $Z$  isoliert, so wählen wir mit Satz 2.2.10 eine Jordankurve  $\gamma$  in  $U$ , sodass  $Z$  die einzige Randkomponente von  $U$  in  $\text{int}(\gamma)$  ist. Sei  $Z_n = f^n(Z)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt  $Z_n \subset f^n(\text{int}(\gamma))$ . Angenommen,  $Z_n$  ist nicht isoliert. Dann existiert eine Randkomponente  $Y$  von  $U_n$  mit  $Y \cap f^n(\text{int}(\gamma)) \neq \emptyset$ . Da  $\text{Spur}(\gamma) \subset U$  gilt, muss auch  $\text{Spur}(f^n \circ \gamma) \subset U_n$  gelten. Damit gilt  $Y \cap \text{Spur}(f^n \circ \gamma) = \emptyset$ , also muss bereits  $Y \subset f^n(\text{int}(\gamma))$  gelten. Dann muss aber mindestens ein Urbild von  $Y$  in  $\text{int}(\gamma)$  liegen. Das heißt, es gibt mindestens zwei verschiedene Randkomponenten von  $U$  in  $\text{int}(\gamma)$ . Dort liegt aber nur  $Z$ . Also sind alle  $Z_n$  ebenfalls isoliert. Insbesondere ist damit  $Z$  isoliert, wenn ein Urbild von  $Z$  isoliert ist.

Es verbleibt zu zeigen, dass alle Urbilder von  $Z$  isoliert sind, wenn  $Z$  isoliert ist. Dieses ist gleichbedeutend dazu zu zeigen, dass alle Bilder von  $Z$  nicht isoliert sind, wenn  $Z$  nicht isoliert ist. Sei also  $Z$  nicht isoliert und  $Z_n = f^n(Z)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Angenommen,  $Z_n$  ist isoliert. Wähle wieder mit Satz 2.2.10 eine Jordankurve  $\gamma$  in  $U_n$ , sodass  $Z_n$  die einzige Randkomponente von  $U_n$  in  $\text{int}(\gamma)$  ist. Sei  $D$  die Komponente von  $f^{-1}(\text{int}(\gamma))$ , die  $Z$  enthält. Da  $Z$  nicht isoliert ist, existieren unendlich viele Randkomponenten  $Y_k$  von  $U$ , die vollständig in  $D$  liegen. Für alle  $Y_k$  gilt  $f^n(Y_k) \subset \text{int}(\gamma)$  und damit  $f^n(Y_k) = Z_n$ , da  $Z_n$  die einzige Randkomponente von  $U_n$  in  $\text{int}(\gamma)$  ist. Dann besitzt  $Z_n$  aber unendlich viele Urbilder in  $\overline{U}$ . Dies ist ein Widerspruch zu Bemerkung 2.6.3.

(ii): Ist der letztendliche innere beziehungsweise letztendliche äußere Zusammenhang 2, so ist der große innere beziehungsweise große äußere Rand von  $U_n$  für alle großen  $n \in \mathbb{N}$  isoliert. Dann ist auch der große innere beziehungsweise große äußere Rand von  $U$  isoliert nach (i).

Es bleibt also zu zeigen, dass in beiden Fällen aus der Isoliertheit des großen inneren beziehungsweise äußeren Randes bereits folgt, dass der jeweilige letztendliche Zusammenhang 2 ist.

Sei  $\partial_\infty U$  isoliert. Wähle mit Satz 2.2.10 eine Jordankurve  $\gamma$  in  $U$ , sodass  $\partial_\infty U$  die einzige Randkomponente von  $U$  in  $\text{ext}(\gamma)$  ist. Dann liegen alle Komponenten von  $\partial U \setminus \partial_\infty U$  in  $\text{int}(\gamma)$ . Da  $\text{Spur}(\gamma)$  eine kompakte Teilmenge von  $U$  ist, existiert nach Satz 2.8.11 ein  $N \in \mathbb{N}$ , sodass

$$f^n(\text{Spur}(\gamma)) \subset E_n \subset U_n$$

für alle  $n \geq N$  gilt. Dann gilt  $f^n(\text{int}(\gamma)) \subset (E_n \cup U_n^-)$  für alle  $n \geq N$  und alle Randkomponenten von  $U_n$  außer  $\partial_\infty U_n$ . Solche Randkomponenten müssen in  $\overline{U_n^-}$  liegen, da  $E_n \subset U_n$ . Damit ist  $\partial_\infty U_n$  die einzige Randkomponente von  $U_n$  in  $U_n^+$ , also ist 2 der letztendliche äußere Zusammenhang von  $U_n$ .

Sei  $\partial_0 U$  isoliert. Wähle mit Satz 2.2.10 eine Jordankurve  $\gamma$  in  $U$ , sodass  $\partial_0 U$  die einzige Randkomponente von  $U$  in  $\text{int}(\gamma)$  ist.  $\text{Spur}(\gamma)$  ist eine kompakte Teilmenge von  $U$  und damit existiert nach Satz 2.8.11 ein  $N \in \mathbb{N}$ , sodass  $f^n(\text{Spur}(\gamma)) \subset E_n \subset U_n$  für alle  $n \geq N$  gilt. Dann gilt  $\partial U_n \cap \overline{U_n^-} \subset f^n(\text{int}(\gamma))$  für alle  $n \geq N$ . Angenommen, es gibt eine Randkomponente  $Z$  von  $U_n$  in  $\overline{U_n^-}$ , die nicht  $\partial_0 U_n$  ist. Dann müsste es mindestens zwei verschiedene Randkomponenten von  $U$  in  $\text{int}(\gamma)$  geben. Dort liegt aber nur  $\partial_0 U$ . Daher ist 2 der letztendliche innere Zusammenhang von  $U_n$ .  $\square$

**Bemerkung 3.1.7** (Nicht isolierte Randkomponenten) Aus dem letzten Satz folgt insbesondere auch, dass eine Randkomponente  $Z$  genau dann nicht isoliert ist, wenn alle Bilder und Urbilder von  $Z$  nicht isoliert sind.

**Bemerkung 3.1.8** (Charakterisierung der Isoliertheit über kritische Punkte) Satz 2.8.18 stellt eine Beziehung zwischen dem letztendlichen inneren und äußeren Zusammenhang und der Anzahl der kritischen Punkte in  $U_n^+$  und  $U_n^-$  her. Nach dem letzten Satz gilt diese Beziehung nun auch für die Isoliertheit des inneren und äußeren Randes.

**Satz 3.1.9** (Iterationsverhalten von Randkomponenten) *Sei  $Z$  eine Randkomponente von  $U$ . Dann gilt:*

- (i)  $f^n(Z) = \partial_\infty U_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  genau dann, wenn  $Z = \partial_\infty U$  gilt.
- (ii)  $f^n(\partial_0 U) = \partial_0 U_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .
- (iii) Ist  $Z$  eine kleine Randkomponente, so existiert ein  $N \in \mathbb{N}$ , sodass  $f^n(Z)$  für alle  $n \geq N$  eine innere Randkomponente ist.
- (iv) Ist  $ec(U^-) = 2$  und ist  $Z$  eine kleine Randkomponente von  $U$ , so existiert ein  $N \in \mathbb{N}$ , sodass  $f^n(Z) = \partial_0 U_n$  für alle  $n \geq N$  gilt.

*Beweis:* (i): Es folgt direkt mit dem Maximumprinzip, dass nur der große äußere Rand von  $U$  auf den großen äußeren Rand von  $U_n$  abgebildet wird. Für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt also  $f^n(Z) = \partial_\infty U_n$  genau dann, wenn  $Z = \partial_\infty U$  gilt.

(ii): Sei  $Z = \partial_0 U$ , dann gilt  $0 \in \tilde{Z}$  und nach Satz 2.8.1 liegt außerdem eine Nullstelle von  $f$  in  $\tilde{Z}$ . Demnach muss  $f(Z)$  das Gebiet  $U_1$  von 0 trennen. Da  $\partial_0 U_1$  die einzige Randkomponente von  $U_1$  ist, die 0 von  $U_1$  trennt, muss  $f(Z) = \partial_0 U_1$  gelten. Mit Induktion folgt  $f^n(Z) = \partial_0 U_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

(iii): Sei nun  $Z$  eine kleine Randkomponente von  $U$ , also  $Z \neq \partial_0 U$  und  $Z \neq \partial_\infty U$ . Dann existiert mit Satz 2.2.10 eine Jordankurve  $\gamma$  in  $U$  mit  $Z \subset \text{int}(\gamma)$ , sodass  $\gamma$  die Randkomponente  $Z$  von  $\partial_0 U$  und von  $\partial_\infty U$  trennt.  $\text{Spur}(\gamma)$  ist eine kompakte Teilmenge von  $U$  und damit existiert nach Satz 2.8.11 ein  $N \in \mathbb{N}$ , sodass  $f^n(\text{Spur}(\gamma)) \subset E_n \subset U_n$  für alle  $n \geq N$  gilt. Da  $f^n(Z) \subset f^n(\text{int}(\gamma))$  und  $Z \not\subset U_n$  muss  $n(f^n \circ \gamma, 0) \neq 0$  gelten und  $f^n(Z)$  muss eine innere Randkomponente sein.

(iv): Gilt  $ec(U^-) = 2$ , so ist für große  $n$  die einzige innere Randkomponente von  $U_n$  der große innere Rand  $\partial_0 U_n$ . Also existiert aufgrund derselben Argumente wie oben ein  $N \in \mathbb{N}$ , sodass  $Z$  für alle  $n \geq N$  auf den großen inneren Rand  $\partial_0 U_n$  abgebildet wird.  $\square$

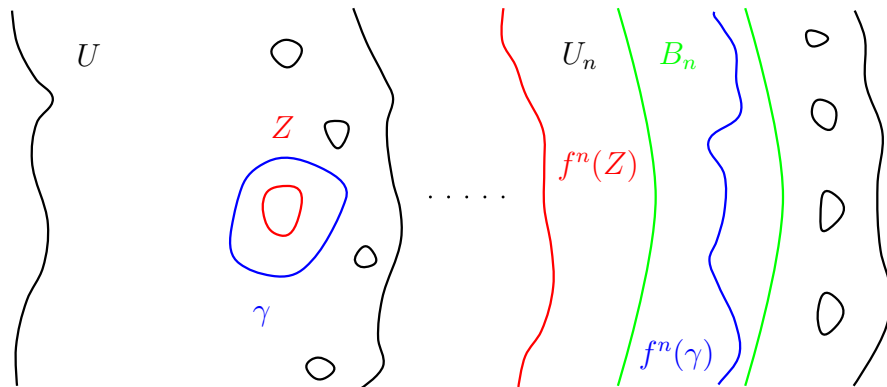


Abbildung 3.2: Das Bild der Randkomponente  $Z$  muss in  $\text{int}(f^n \circ \gamma)$  liegen. Dort ist aber  $\partial_0 U_n$  die einzig mögliche Randkomponente.

**Bemerkung 3.1.10** (Level der Randkomponenten) Nach Satz 3.1.9 wird jede Randkomponente eines mehrfach zusammenhängenden Gebietes  $U$  mit letztendlich inneren Zusammenhang 2 nach endlich vielen Iterationen auf einen großen Rand abgebildet. Da  $f$  eingeschränkt auf beschränkte Fatoukomponenten nach Bemerkung 2.7.9 einen endlichen Abbildungsgrad besitzt, werden in jedem Schritt nur endlich viele Komponenten auf einen großen Rand abgebildet. Damit ergibt sich sowohl eine Abzählung der Randkomponenten jedes wandernden Gebietes, als auch eine Einteilung in verschiedene Level in dem Sinne, dass Randkomponenten des Levels  $k \in \mathbb{N}$  nach genau  $k$  Iterationen auf einen großen Rand abgebildet werden.

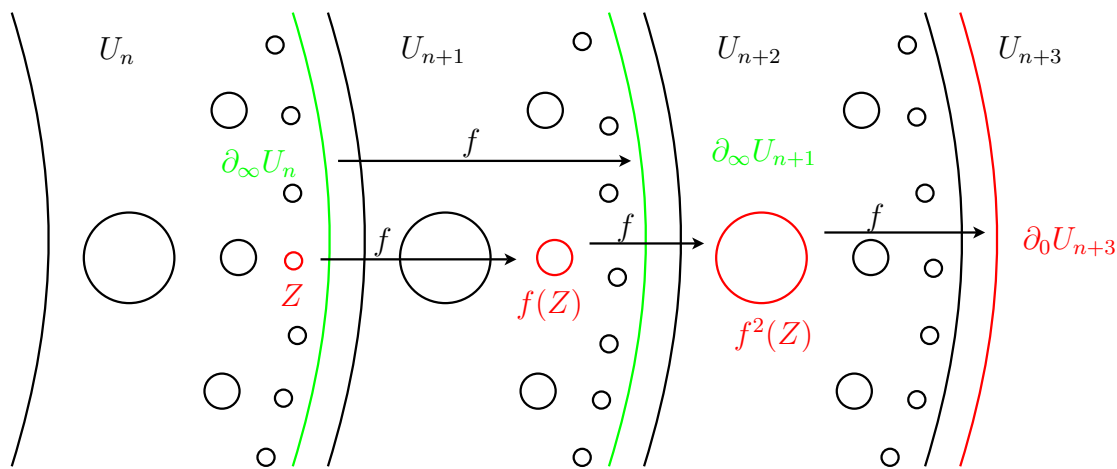


Abbildung 3.3: Das Abbildungsverhalten der letztendlich großen Randkomponenten.

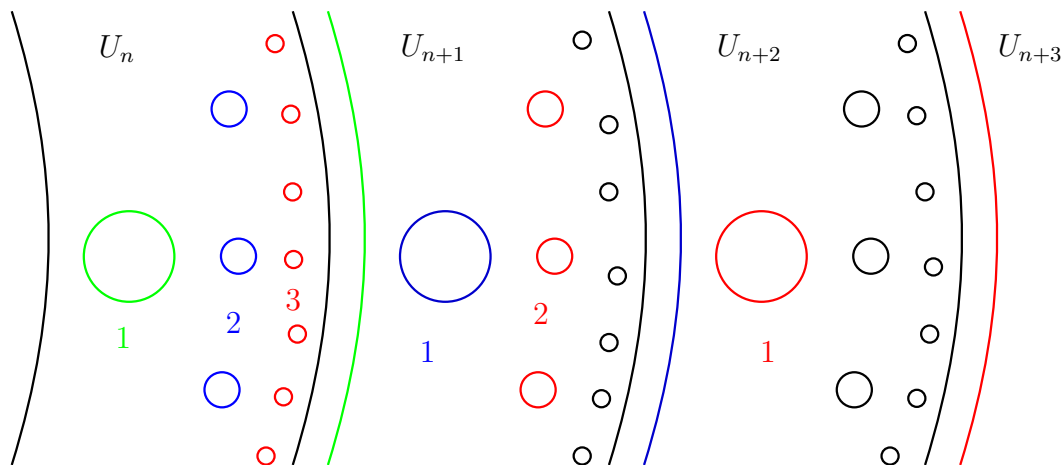


Abbildung 3.4: Die Einteilung in verschiedene Level. Der Level der Randkomponenten nimmt mit jedem Iterationsschritt ab.

**Bemerkung 3.1.11** (Vergleich mit anderen Resultaten) Satz 3.1.9 (iii) ähnelt [BRS13, Theorem 1.6 (b)] und auch [Six13, Lemma 4.4]. In [BRS13, Theorem 1.6 (b)] wird die harmonische Funktion, die in [BRS13, Theorem 1.1] konstruiert wurde, auf den Rand

fortgesetzt und damit das Verhalten der Randkomponenten untersucht. Der Beweis ähnelt dem hier gegebenen.

**Definition 3.1.12** (Einfache und mehrfache Ränder) Sei  $Z$  eine Randkomponente von  $U$ . Dann nennen wir  $Z$  eine *mehrfache Randkomponente*, wenn  $\tilde{Z} \setminus Z$  mehr als eine Komponente besitzt. Besitzt  $\tilde{Z} \setminus Z$  genau eine Komponente, so nennen wir sie *einfache Randkomponente*.

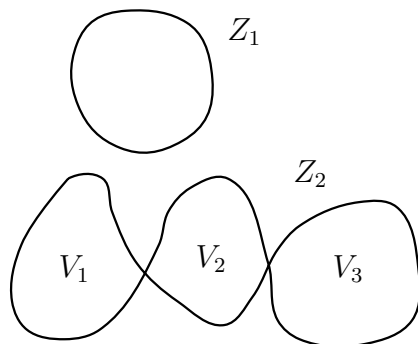


Abbildung 3.5: Eine einfach und eine mehrfach Randkomponente. Hier hat  $\tilde{Z}_2 \setminus Z_2$  genau drei Komponenten. Es sind aber auch noch kompliziertere Strukturen wie in Abbildung 3.6 denkbar.

**Bemerkung 3.1.13** (Abzählbarkeit von einfachen und mehrfachen Randkomponenten) Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gibt es nur endlich viele Randkomponenten  $Z$  von  $U$ , sodass ein  $z \in \tilde{Z}$  existiert mit  $B(z, \frac{1}{n}) \subset \tilde{Z}$ , da  $U$  beschränkt ist. Das heißt, es gibt nur abzählbar viele Randkomponenten  $Z$  mit  $\tilde{Z} \setminus Z \neq \emptyset$ , da  $\partial\tilde{Z} = Z$  gilt und damit  $\tilde{Z} \setminus Z$  offen ist. Damit hat  $U$  nur abzählbar viele einfach und mehrfache Randkomponenten.

Sei  $Z$  eine mehrfache Randkomponente. Dann hat  $\tilde{Z} \setminus Z$  nach demselben Argument nur abzählbar viele Komponenten.

**Definition 3.1.14** (Benachbarte Mengen und Knotenpunkte) Seien  $V_1, V_2 \subset \mathbb{C}$  Mengen. Gilt  $|\partial V_1 \cap \partial V_2| \geq 1$ , so nennen wir  $V_1$  und  $V_2$  *benachbart*. Außerdem nennen wir  $z_0 \in \mathbb{C}$  *Knotenpunkt von  $V_1$  und  $V_2$* , wenn  $z_0 \in \partial V_1 \cap \partial V_2$  gilt.

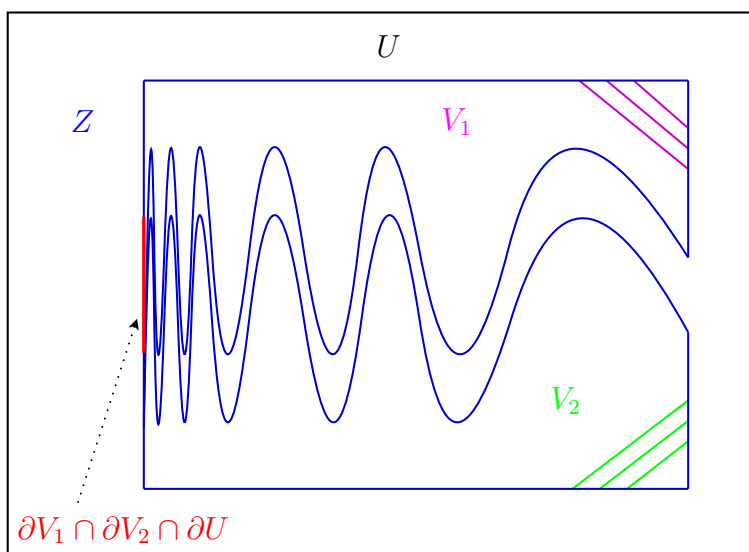


Abbildung 3.6: Es kann vorkommen, dass  $|\partial V_1 \cap \partial V_2| > 1$  gilt. Dies ist auch möglich, wenn  $U$  ein Gebiet ist und  $Z$  eine Randkomponente von  $U$  und  $V_1, V_2$  Komponenten von  $\tilde{Z} \setminus Z$  sind. In diesem Fall können „Lakes of Wada“-ähnliche Strukturen auftreten.

**Definition 3.1.15** (Letztendlich große und ewig kleine Ränder) Wir nennen eine Randkomponente  $Z$  von  $U$  *letztendlich groß*, wenn  $Z$  nach einer endlichen Iteration auf eine große Randkomponente abgebildet wird. Wir nennen  $Z$  *ewig klein*, wenn dies nicht der Fall ist.

**Definition 3.1.16** (Letztendlich große Teile und Komponenten) Sei  $Z$  eine mehrfache Randkomponente von  $U$  und  $V$  eine Komponente von  $\tilde{Z} \setminus Z$ . Dann nennen wir  $\partial V$  einen *letztendlich großen Teil von  $Z$*  beziehungsweise  $V$  eine *letztendlich große Komponente von  $\tilde{Z} \setminus Z$*  oder auch *letztendlich große Komponente von  $\mathbb{C} \setminus \overline{U}$* , wenn ein  $n \in \mathbb{N}$  existiert, sodass  $0 \in f^n(V)$  gilt beziehungsweise  $0$  von  $f^n(\partial V)$  umringt wird.

**Bemerkung 3.1.17** (Letztendlich große Teile und große Ränder) Da  $\partial_0 \overline{U}_n$  und  $\partial_\infty \overline{U}_n$  die einzigen Teile von Randkomponenten von  $U_n$  sind, die  $0$  umringen, muss für eine letztendlich große Komponente  $V$  von  $\tilde{Z} \setminus Z$  dann  $\partial_0 \overline{U}_n \subseteq f^n(\partial V)$  oder  $\partial_\infty \overline{U}_n \subseteq f^n(\partial V)$  gelten. Es kann dabei nach Satz 3.1.9 nur dann  $\partial_\infty \overline{U}_n \subseteq f^n(\partial V)$  gelten, wenn  $Z = \partial_\infty U$  gilt.

**Bemerkung 3.1.18** (Abzählbarkeit von letztendlich großen Randkomponenten) Sei  $Z$  eine letztendlich große Randkomponente und  $f^n(Z)$  eine große Randkomponente für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt  $\widehat{\partial_0 U} \subset f^n(Z)$ . Weiter gilt  $\widehat{\partial_0 U} \cap \mathcal{F}(f) \neq \emptyset$ . Es folgt  $(\tilde{Z} \setminus Z) \cap \mathcal{F}(f) \neq \emptyset$ . Also gilt  $\tilde{Z} \setminus Z \neq \emptyset$ . Nach Bemerkung 3.1.13 kann es also nur abzählbar viele letztendlich große Randkomponenten geben.

Gilt  $ec(U^-) = 2$ , so ist nach Satz 3.1.9 jede kleine Randkomponente  $Z$  von  $U$  letztendlich groß. Damit hat  $U$  nur abzählbar viele Randkomponenten, wenn der letztendliche innere Zusammenhang 2 ist.

**Definition 3.1.19** (Wandernde Ränder) Wir nennen eine Randkomponente  $Z$  von  $U$  *wandernd*, wenn  $\tilde{Z} \setminus Z$  aus einem oder auch mehreren einfach zusammenhängenden wandernden Gebieten besteht. Wir nennen  $Z$  *teilweise wandernd*, wenn  $\tilde{Z} \setminus Z$  mindestens eine Komponente besitzt, die ein einfach zusammenhängendes wanderndes Gebiet ist. Sei  $V$  eine Komponente von  $\tilde{Z} \setminus Z$ , sodass  $V$  ein einfach zusammenhängendes wanderndes Gebiet ist. Dann nennen wir  $\partial V$  einen *wandernden Teil von  $Z$* .

**Definition 3.1.20** (Kollabierte Ränder) Wir nennen eine Randkomponente  $Z$  von  $U$  *kollabiert*, wenn  $\tilde{Z} = Z$  gilt. Dies bedeutet, dass  $\tilde{Z}$  keinen Punkt der Fatoumenge enthält. Weiter nennen wir  $Z$  *teilweise kollabiert*, wenn

$$Z \setminus \partial(\overline{\tilde{Z} \setminus Z}) \neq \emptyset$$

gilt. Wir nennen dann eine Komponente von

$$\overline{Z \setminus \partial(\overline{\tilde{Z} \setminus Z})}$$

*kollabierten Teil von  $Z$* .

**Bemerkung 3.1.21** (Kollabierte und wandernde Randkomponenten sind ewig klein) Sowohl kollabierte Randkomponenten als auch wandernde Randkomponenten sind ewig klein.

Dies folgt direkt daraus, dass für diese Komponenten  $\tilde{Z} \setminus Z$  weder eine Nullstelle noch ein Urbild einer Nullstelle enthält. Demnach kann eine solche Komponente unter Iteration niemals ein großer Rand werden.

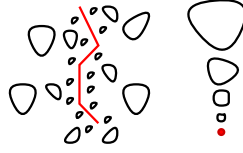


Abbildung 3.7: Verschiedene kollabierte Randkomponenten: Möglich sind Kontinua und Ein-Punkt-Komponenten. Wir werden in Satz 3.1.23 beweisen, dass kein Punkt einer kollabierten Randkomponente isoliert ist.

Der folgende Satz fasst einige Eigenschaften von Randkomponenten zusammen.

**Satz 3.1.22** (Eigenschaften von Randkomponenten wandernder Gebiete) *Sei  $Z$  eine Randkomponente von  $U$  und seien  $(V_k)_{k \in \mathbb{N}}$  die Komponenten von  $\tilde{Z} \setminus Z$ . Dann gilt:*

- (i) *Alle  $V_k$  sind einfach zusammenhängend.*
- (ii) *Ist  $Z$  lokal zusammenhängend, so gilt  $|\partial V_i \cap \partial V_j| \leq 1$  für alle  $V_i \neq V_j$ .*
- (iii) *Für alle  $k \in \mathbb{N}$  ist  $\partial V_k$  entweder ein wandernder Teil von  $Z$  und  $V_k$  damit ein einfach zusammenhängendes wanderndes Gebiet, oder  $\partial V_k$  ist ein letztendlich großer Teil von  $Z$ .*
- (iv) *Ist  $Z$  eine Randkomponente und  $K$  entweder ein kollabierter oder ein wandernder Teil von  $Z$ , so gilt  $\tilde{K} \subset A(f)$ .*
- (v) *Ist  $Z$  eine Randkomponente und  $K$  entweder ein kollabierter oder ein wandernder Teil von  $Z$  und  $z \in K$ , so gilt mindestens eine der drei Aussagen:*
  - (a)  *$z$  ist Knotenpunkt eines letztendlich großen Teils von  $Z$ .*
  - (b)  *$z$  ist Häufungspunkt von verschiedenen letztendlich großen Randkomponenten von  $U$ .*
  - (c)  *$z$  ist Häufungspunkt von verschiedenen letztendlich großen Teilen von  $Z$ .*
- (vi) *Ist  $z_0$  ein Knotenpunkt von zwei benachbarten, letztendlich großen Komponenten  $V_1$  und  $V_2$  von  $\tilde{Z} \setminus Z$  und ist  $n \in \mathbb{N}$  minimal mit  $f^n(\partial V_1) = \partial_0 \overline{U_n} = f^n(\partial V_2)$ , so ist  $f^{n-1}(z_0)$  ein kritischer Punkt von  $f$ .*

*Beweis:* (i): Angenommen,  $V_k$  ist nicht einfach zusammenhängend. Dann existiert eine Kurve  $\gamma$  in  $V_k$ , die eine Komponente von  $\partial V_k \setminus \partial_\infty V_k$  von  $\partial_\infty V_k$  trennt. Es gilt  $\tilde{\gamma} \subseteq \tilde{Z}$ . Dies ist ein Widerspruch, da  $\text{int}(\gamma)$  nur dann eine Komponente von  $\partial V_k$  enthalten kann, wenn  $\text{int}(\gamma)$  auch Punkte von  $U$  enthält.



(ii): Angenommen, es gilt  $|\partial V_1 \cap \partial V_2| \geq 2$  und  $V_1 \neq V_2$ . Seien  $z_1, z_2 \in \partial V_1 \cap \partial V_2$  mit  $z_1 \neq z_2$ . Dann sind  $z_1, z_2$  von  $V_1$  und von  $V_2$  aus erreichbar nach Satz 2.9.12. Damit existiert ein Crosscut  $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  in  $V_1$ , der  $z_1$  mit  $z_2$  verbindet. Sei  $v_1 \in V_1 \cap \text{Spur}(\gamma_1)$ . Ebenso existiert ein Crosscut  $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  in  $V_2$ , der  $z_1$  mit  $z_2$  verbindet. Sei  $v_2 \in V_2 \cap \text{Spur}(\gamma_2)$ . Sei  $\gamma$  die Jordankurve, die erst  $\gamma_1$  und dann  $\gamma_2$  durchläuft. Dann gilt  $\text{Spur}(\gamma) \subseteq \overline{V_1} \cup \overline{V_2}$  und  $v_1, v_2 \in \text{Spur}(\gamma)$ . Damit gilt  $\text{int}(\gamma) \subseteq \tilde{Z}$ . Dann muss bereits  $\text{int}(\gamma) \subseteq \tilde{Z} \setminus Z$  gelten, da sonst Punkte aus  $U$  in  $\text{int}(\gamma)$  liegen müssten. Da  $\gamma$  eine Kurve ist, sind  $v_1$  und  $v_2$  durch einen Jordanbogen  $\sigma$  in  $\text{int}(\gamma) \cup \{v_1, v_2\}$  verbindbar. Damit liegt  $\text{Spur}(\sigma)$  vollständig in  $\tilde{Z} \setminus Z$  und verbindet  $V_1$  und  $V_2$ , das heißt, es gilt  $V_1 = V_2$ . Dies ist ein Widerspruch.

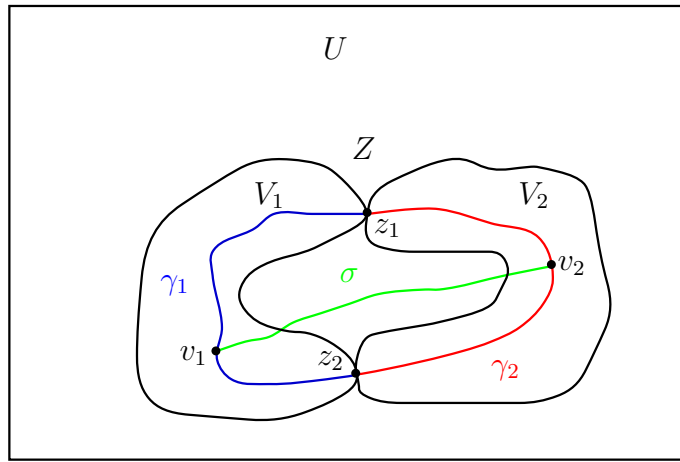


Abbildung 3.8: Darstellung des Beweises von (ii).

(iii): Nach Satz 2.8.1 gilt  $\partial V_k \subset \overline{U} \subset A(f)$ . Enthält also  $f^n(V_k)$  keine Nullstelle für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so gilt  $\overline{V_k} \subset A(f)$  nach dem Minimumprinzip. Damit enthält  $V_k$  keine periodischen Punkte, also gilt  $V_k \cap \mathcal{J}(f) = \emptyset$ . Daher gilt  $V_k \subset \mathcal{F}(f)$ . Da  $V_k$  beschränkt ist und wandernde Gebiete die einzigen Fatoukomponenten sind, die gleichzeitig beschränkt sein können und in der entkommenden Menge liegen können, ist  $V_k$  ein einzelnes einfach zusammenhängendes wanderndes Gebiet. Enthält hingegen  $f^n(V_k)$  eine Nullstelle für ein  $n \in \mathbb{N}$ , so ist  $\partial V_k$  nach Definition ein letztendlich großer Teil von  $Z$ .

(iv): Nach Satz 2.8.1 gilt  $K \subset \overline{U} \subset A(f)$ . Da  $\tilde{K}$  keine Nullstellen enthält, folgt mit dem Minimumprinzip  $\tilde{K} \subset A(f)$ .

(v): Sei  $z \in K$ . Mit  $K \subset \partial U$  folgt  $z \in \mathcal{J}(f)$ . Dann existiert eine Folge von abstoßenden periodischen Punkten  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z.$$

Damit liegen in jeder Umgebung  $W$  von  $z$  abstoßende periodische Punkte. Nach (iv) gilt aber  $\tilde{K} \subset A(f)$ , also enthält  $\tilde{K}$  keine periodischen Punkte. Dann müssen in jeder Umgebung  $W$  von  $z$  Punkte liegen, die weder zu  $\tilde{K}$ , noch zu  $U$  gehören, da beide Mengen keine periodischen Punkte enthalten. Dann müssen die  $z_n$  jeweils in beschränkten Komponenten des Komplements von  $U$  liegen. Ist  $V$  eine Komponente von  $\mathbb{C} \setminus \overline{U}$  und enthält  $V$  periodische

Punkte, so ist  $V$  eine letztendlich große Komponente von  $\mathbb{C} \setminus \overline{U}$ . Demnach müssen in jeder Umgebung von  $z$  Teile von letztendlich großen Randkomponenten von  $U$  liegen.

Liegt  $z$  auf dem Rand eines letztendlich großen Teils von  $Z$ , ist  $z$  also Knotenpunkt einer letztendlich großen Komponente von  $\tilde{Z} \setminus Z$ , so liegen in jeder Umgebung von  $z$  Teile von letztendlich großen Randkomponenten von  $U$ . Damit gilt Aussage (a).

Angenommen,  $z$  ist kein Knotenpunkt einer letztendlich großen Komponente von  $\tilde{Z} \setminus Z$ . Dann müssen in jeder Umgebung  $W$  von  $z$  letztendlich große Komponenten von  $\mathbb{C} \setminus \overline{U}$  liegen. Auf keinem der Ränder dieser Komponenten liegt  $z$ . Damit ist der Abschluss jeder dieser Komponenten kompakt und besitzt einen echten Abstand zu  $z$ . Daher können immer nur endlich viele  $z_n$  in derselben Komponente von  $\mathbb{C} \setminus \overline{U}$  liegen. Also müssen sich die Komponenten von  $\mathbb{C} \setminus \overline{U}$  bei  $z$  häufen. Dann müssen sich letztendlich große Randkomponenten oder Teile bei  $z$  häufen. Demnach ist  $z$  Häufungspunkt von verschiedenen letztendlich großen Randkomponenten von  $U$  und es gilt Aussage (b) oder  $Z$  ist ein mehrfacher Rand und  $z$  ist Häufungspunkt von verschiedenen letztendlich großen Teilen von  $Z$  und es gilt Aussage (c).

(vi): Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $n = 1$ . Betrachte eine Umgebung  $W$  von  $f(z_0) \in \partial_0 \overline{U}_1$ . Dann gilt  $f(\partial V_1) \cap W = \partial_0 \overline{U}_1 \cap W = f(\partial V_2) \cap W$ . Außerdem gilt dann  $\partial V_1 \cap \partial V_2 = \{z_0\}$ . Damit ist  $f$  in keiner Umgebung von  $z_0$  injektiv, das heißt,  $z_0$  ist ein kritischer Punkt.  $\square$

Ist der letztendliche innere Zusammenhang eines mehrfach zusammenhängenden wandernden Gebietes  $\infty$ , so können ewig kleine Randkomponenten auftreten. Der folgende Korollar fasst einige Bedingungen für derartige Randkomponenten zusammen.

**Korollar 3.1.23** (Ewig kleine Randkomponenten) *Sei  $Z$  eine ewig kleine Randkomponente von  $U$ . Dann gilt:*

- (i) *Der letztendliche innere Zusammenhang von  $U$  ist  $\infty$ .*
- (ii)  *$\tilde{Z} \subset A(f)$ .*
- (iii)  *$Z$  ist entweder kollabiert oder wandernd.*
- (iv) *Jeder Randpunkt von  $Z$  ist Häufungspunkt von letztendlich großen Randkomponenten von  $U$ . Insbesondere ist  $Z$  nicht isoliert.*

*Beweis:* (i): Dass der letztendliche innere Zusammenhang  $\infty$  ist, folgt aus Satz 3.1.9 und Bemerkung 2.8.19 sowie der Existenz von  $Z$ .

(ii): Da  $Z$  ewig klein ist, besitzt  $Z$  keinen letztendlich großen Teil. Nach Satz 3.1.22 (iii) besteht  $\tilde{Z} \setminus Z$  aus einfach zusammenhängenden wandernden Gebieten. Demnach besteht  $Z$  aus wandernden und kollabierten Teilen. Mit Satz 3.1.22 (iv) folgt  $\tilde{Z} \subset A(f)$ .

(iii): Ist  $Z$  kollabiert, so ist nichts zu zeigen. Ist  $Z$  nicht kollabiert, so gilt  $\tilde{Z} \setminus Z \neq \emptyset$ . Da  $\tilde{Z} \subset A(f)$  gilt, enthält  $Z$  keine letztendlich großen Teile. Damit sind nach Satz 3.1.22 (iii) alle Komponenten von  $\tilde{Z} \setminus Z$  einfach zusammenhängende wandernde Gebiete. Damit ist  $Z$  wandernd.

(iv): Nach (iii) besitzt  $Z$  keine letztendlich großen Teile. Nach Satz 3.1.22 (iv) müssen sich damit letztendlich große Randkomponenten von  $U$  bei  $z$  häufen.  $\square$

**Korollar 3.1.24** (Isoliertheit von kleinen Randkomponenten) *Sei  $Z$  eine kleine Randkomponente von  $U$ . Dann ist  $Z$  genau dann isoliert, wenn  $ec(U^-) = 2$  gilt.*

*Beweis:* Gilt  $ec(U^-) = 2$ , so werden nach Satz 2.8.1 alle kleinen Randkomponenten letztendlich auf einen großen inneren Rand abgebildet. Nach Satz 3.1.6 ist  $\partial_0 U_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  isoliert. Mit Satz 3.1.6 sind dann auch alle kleinen Randkomponenten isoliert.

Ist umgekehrt eine kleine Randkomponente isoliert, so kann diese nach Korollar 3.1.23 nicht ewig klein sein. Demnach wird diese auf einen großen inneren Rand abgebildet. Mit Satz 3.1.6 folgt, dass dann auch  $\partial_0 U$  isoliert ist, und damit ist 2 der letztendliche innere Zusammenhang von  $U$ .  $\square$

Eine Reihe der hier aufgeführten Resultate bezieht sich auf kollabierte Ränder. Zunächst aber ist überhaupt nicht klar, ob diese überhaupt existieren. Die Frage habe ich mit Phil Rippon und Gwyneth Stallard in mehreren Gesprächen erörtert. Darauf aufbauend haben mir diese dann einen Beweis mitgeteilt, der zeigt, dass kollabierte Ränder tatsächlich auftreten können. Genauer zeigten sie das folgende Resultat.

**Satz 3.1.25** (Kollabierte Ränder) *Gilt  $ec(U^-) = \infty$ , so hat  $U$  überabzählbar viele kollabierte Randkomponenten.*

*Beweis:* Nach Bemerkung 3.1.13 kann  $U$  nur abzählbar viele nicht kollabierte Randkomponenten haben. Das heißt, wenn  $U$  überabzählbar viele Randkomponenten hat, so muss  $U$  schon überabzählbar viele kollabierte Randkomponenten haben. Es bleibt also zu zeigen, dass  $U$  überabzählbar viele Randkomponenten besitzt.

Gilt  $ec(U^-) = \infty$ , so ist nach Satz 3.1.6  $\partial_0 U$  nicht isoliert. Außerdem sind nach Korollar 3.1.24 alle kleinen Randkomponenten nicht isoliert.

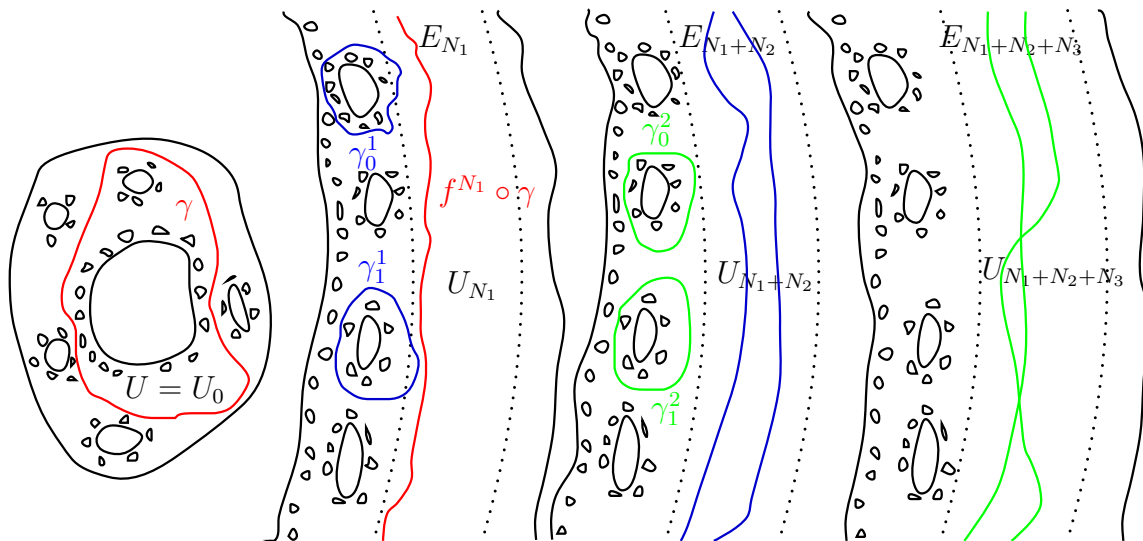


Abbildung 3.9: Die ersten drei Schritte des Iterationsprozesses.

Wähle mit Satz 2.2.10 eine Jordankurve  $\gamma$  in  $U$  mit  $\partial_0 U \subset \text{int}(\gamma)$ . Dann sind unendlich viele andere Randkomponenten von  $U$  in  $\text{int}(\gamma)$ . Da  $\text{Spur}(\gamma)$  eine kompakte Teilmenge von  $U$  ist, existiert nach Satz 2.8.11 ein  $N_1 \in \mathbb{N}$ , sodass  $f^n(\text{Spur}(\gamma)) \subset E_n \subset U_n$  für alle  $n \geq N_1$  gilt. Wähle nun zwei Jordankurven  $\gamma_0^1, \gamma_1^1$  in  $U_{N_1}$  mit  $\text{int}(\gamma_0^1) \cap \text{int}(\gamma_1^1) = \emptyset$ , sodass jeweils unendlich viele Randkomponenten von  $U_{N_1}$  in  $\text{int}(\gamma_0^1)$  und  $\text{int}(\gamma_1^1)$  liegen. Dies ist nach Satz 2.2.10 möglich, indem zuerst eine Kurve gewählt wird und die zweite so gewählt wird, dass sie eine kleine Randkomponente vom Inneren der ersten Kurve trennt.

Wir wiederholen diesen Prozess nun mit den Kurven  $\gamma_0^1$  und  $\gamma_1^1$ . Wieder existiert  $N_2 \in \mathbb{N}$ , sodass  $f^n(\text{Spur}(\gamma_0^1)) \subset E_n \subset U_n$  und  $f^n(\text{Spur}(\gamma_1^1)) \subset E_n \subset U_n$  für alle  $n \geq N_2$  gilt. Wähle nun wieder zwei Jordankurven  $\gamma_0^2, \gamma_1^2$  in  $U_{N_1+N_2}$  mit  $\text{int}(\gamma_0^2) \cap \text{int}(\gamma_1^2) = \emptyset$ , sodass jeweils unendlich viele Randkomponenten von  $U_{N_1+N_2}$  in  $\text{int}(\gamma_0^2)$  und  $\text{int}(\gamma_1^2)$  liegen.

Führen wir diesen Prozess fort, so erhalten wir Kurven  $\gamma_0^k$  und  $\gamma_1^k$  in

$$U_{\sum_{j=1}^k N_j}$$

mit disjunktem Inneren, die unendlich viele Randkomponenten im Inneren enthalten.

Dann können wir jeder Folge in  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  eine Randkomponente  $Z$  von  $U$  zuweisen, für die für alle  $k \in \mathbb{N}$  ein  $i \in \{0, 1\}$  mit

$$f^{\sum_{j=1}^k N_j}(Z) \subset \text{int}(\gamma_i^k)$$

existiert.

Nach Konstruktion erhalten wir so eine injektive Abbildung von  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  in die Menge der Randkomponenten von  $U$ . Da  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  überabzählbar ist, muss  $U$  überabzählbar viele Randkomponenten besitzen.  $\square$

Bemerkung 2.8.19, Satz 3.1.9 (iv) und Satz 3.1.25 ergeben zusammen den folgenden Korollar.

**Korollar 3.1.26** (Randkomponenten und letztendlicher innerer Zusammenhang) *Es gilt  $ec(U^-) = 2$  genau dann, wenn alle Randkomponenten von  $U$  letztendlich groß sind. Gleichbedeutend gilt  $ec(U^-) = \infty$  genau dann, wenn  $U$  ewig kleine Randkomponenten besitzt.*

Der folgende Satz ist rein topologischer Natur. Wir nutzen ihn, um zu zeigen, dass bei unseren wandernden Gebieten unter bestimmten Voraussetzungen keine „Lakes of Wada“-Situation auftritt.

**Satz 3.1.27** (Lakes of Wada) *Seien  $U_1, U_2, U_3 \subset \overline{\mathbb{C}}$  Gebiete. Existieren drei Punkte*

$$z_1, z_2, z_3 \in \partial U_1 \cap \partial U_2 \cap \partial U_3.$$

*Dann ist mindestens einer der drei Punkte nicht erreichbar aus mindestens einem der drei Gebiete.*

*Beweis:* Angenommen, alle drei Punkte wären von allen drei Gebieten aus erreichbar. Seien  $u_1 \in U_1$ ,  $u_2 \in U_2$  und  $u_3 \in U_3$ . Wir wollen nun Jordanbögen  $\sigma_{i,j}$  konstruieren, die für alle  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  die Punkte  $u_i$  und  $z_j$  miteinander verbinden, sodass die  $\sigma_{i,j}$  bis auf die Endpunkte disjunkt sind.

Es existieren Crosscuts  $\gamma_i$  in  $U_i$  mit  $u_i \in \text{Spur}(\gamma_i)$  für  $i \in \{1, 2, 3\}$ , die jeweils  $z_1$  mit  $z_2$  verbinden. Dann wählen wir einen Crosscut  $\sigma_{i,3}$  in  $U_i \setminus \text{Spur}(\gamma_i)$ , der  $u_i$  und  $z_3$  miteinander verbindet. Dies ist möglich, da  $U_i \setminus \text{Spur}(\gamma_i)$  nach [Pom92, Proposition 2.12] höchstens zwei Zusammenhangskomponenten hat und  $u_i$  auf dem Rand von beiden Komponenten liegt. Wir teilen nun die Jordanbögen  $\gamma_i$  in bis auf die Anfangspunkte disjunkte Jordanbögen  $\sigma_{i,j}$  auf, sodass  $\sigma_{i,j}$  die Punkte  $u_i$  und  $z_j$  miteinander verbindet. Dann entsprechen die  $u_i$ ,  $z_j$  und  $\sigma_{i,j}$  den Knoten beziehungsweise den Kanten eines vollständigen bipartiten Graphen mit jeweils drei Knoten pro Teilmenge. Es ist ein bekanntes Theorem der Graphentheorie, dass solch ein Graph nicht planar sein kann, das heißt, dass sich die Kanten überschneiden müssen, siehe [Die00, Kuratowskis Theorem 4.4.6]. Da die  $\sigma_{i,j}$  für festes  $i$  aber bis auf den Anfangspunkt disjunkt sind, müssen sich damit Kanten aus zwei verschiedenen Gebieten  $U_i$  außerhalb des Endpunktes überschneiden. Dies ist ein Widerspruch.  $\square$

Eines der Hauptresultate dieser Arbeit ist, dass unter bestimmten Voraussetzungen die großen Ränder Jordankurven und damit lokal zusammenhängend sind und  $\partial_\infty U_{n-1} = \partial_0 U_n$  gilt. Der folgende Satz zeigt, dass in diesem Fall keine „Lakes of Wada“-Situation auftritt, das heißt, dass nichts „zwischen“  $\partial_\infty U_{n-1}$  und  $\partial_0 U_n$  liegt.

**Satz 3.1.28** (Lakes of Wada und angrenzende große Ränder) *Gilt  $\partial_\infty U_{n-1} = \partial_0 U_n =: Z_n$  und ist  $Z_n$  lokal zusammenhängend für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so gilt:*

- (i)  $\widetilde{Z}_n \setminus Z_n$  besitzt für alle  $n \in \mathbb{N}$  nur eine Komponente  $V$  und diese enthält das wandernde Gebiet  $U_{n-1}$ .
- (ii)  $ec(U) = \infty$ .
- (iii) Es gilt  $Z_n = \partial_\infty U_{n-1} = \partial_\infty \overline{U_{n-1}} = \partial_0 \overline{U_n} = \partial_0 U_n$ .
- (iv)  $Z_n$  ist für alle  $n \in \mathbb{N}$  nicht teilweise kollabiert.

*Beweis:* (i): Angenommen,  $\widetilde{Z}_n \setminus Z_n$  enthält mehr als eine Komponente. Dann existiert eine Komponente  $V$  von  $\widetilde{Z}_n \setminus Z_n$ , die das wandernde Gebiet  $U_{n-1}$  nicht enthält. Dann gilt

$$\partial V \subseteq Z_n = \partial_\infty U_{n-1} = \partial_0 U_n.$$

Insbesondere besitzen dann die drei Gebiete  $V$ ,  $\widetilde{U_{n-1}}$  und  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{C(0, U_n)}$  drei gemeinsame Randpunkte. Diese Randpunkte sind nach Satz 2.9.12 von jedem der drei Gebiete aus erreichbar, da  $Z_n$  lokal zusammenhängend ist. Dann liefert Satz 3.1.27 einen Widerspruch.

(ii): Es müssen sich die periodischen Punkte bei jedem Punkt von  $Z_n$  häufen. Da

$$\widetilde{Z}_n \setminus (Z_n \cup \widetilde{U_{n-1}}) = \emptyset$$

nach (i) gilt, müssen die periodischen Punkte in  $\widetilde{U}_{n-1} \cup \overline{\mathbb{C} \setminus C(0, U_n)}$  liegen. Da aber weder  $U_{n-1}$  noch  $U_n$  periodische Punkte enthalten, müssen sich Komponenten des Komplements von  $\overline{\mathbb{C} \setminus (U_{n-1} \cup U_n)}$  bei  $Z_n$  häufen. Damit muss  $c(U_{n-1}) = \infty$  oder  $c(U_n) = \infty$  gelten. Nach Satz 2.8.13 muss dann  $ec(U) = \infty$  gelten.

(iii): Es gilt

$$\partial_\infty \overline{U_{n-1}} = \partial C(\infty, \overline{U_{n-1}}) \subseteq \partial C(\infty, U_{n-1}) = \partial_\infty U_{n-1}$$

und

$$\partial_0 \overline{U_n} = \partial C(0, \overline{U_n}) \subseteq \partial C(0, U_n) = \partial_0 U_n.$$

Sei  $z \in Z_n$ . Dann gilt  $z \in \partial_0 U_n$  und  $z \in \partial_\infty U_{n-1}$ . Dann existieren Folgen  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $U_{n-1}$  und  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $U_n$  mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = z = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k.$$

Es gilt  $U_n \subset C(\infty, \overline{U_{n-1}})$  und  $U_{n-1} \subset \mathbb{C} \setminus C(\infty, \overline{U_{n-1}})$ . Damit gilt  $z \in \partial C(\infty, \overline{U_{n-1}})$ . Ebenso gilt  $U_{n-1} \subset C(0, \overline{U_n})$  und  $U_n \subset \mathbb{C} \setminus C(0, \overline{U_n})$ . Damit gilt  $z \in \partial C(0, \overline{U_n})$ . Es folgt

$$\partial_\infty U_{n-1} = \partial_\infty \overline{U_{n-1}} = \partial_0 \overline{U_n} = \partial_0 U_n.$$

(iv): Nach (iii) gilt  $Z_n = \partial_\infty U_{n-1} = \partial_\infty \overline{U_{n-1}} = \partial_0 \overline{U_n} = \partial_0 U_n$ . Dann gilt

$$\partial_\infty U_{n-1} \setminus \partial \left( \overline{\partial_\infty \widetilde{U}_{n-1} \setminus \partial_\infty U_{n-1}} \right) \subseteq \partial_\infty U_{n-1} \setminus \partial_\infty \overline{U_{n-1}} = \emptyset.$$

Damit ist  $Z_n$  für alle  $n$  nicht teilweise kollabiert.  $\square$

**Bemerkung 3.1.29** (Gleichheit der angrenzenden Ränder) Man beachte, dass für den Beweis von Satz 3.1.28 (iii) und (iv) der lokale Zusammenhang von  $Z_n$  nicht benötigt wurde. Für den Beweis von Satz 3.1.28 (ii) wurde der lokale Zusammenhang jedoch genutzt. Es ist denkbar, dass  $\partial_\infty U_{n-1} = \partial_0 U_n$  und  $ec(U) = 2$  gleichzeitig gelten. Auch dann müssen sich die periodischen Punkte bei jedem Punkt von  $Z_n$  häufen. Enthält eine Komponente von  $\widetilde{Z}_n \setminus (Z_n \cup \widetilde{U}_{n-1})$  periodische Punkte, so muss sie letztendlich groß sein, das heißt, ein Urbild einer Nullstelle enthalten, da sie ansonsten nach Minimumprinzip in  $A(f)$  liegen würde. Ist  $V$  also eine solche letztendlich große Komponente von  $\widetilde{Z}_n \setminus (Z_n \cup \widetilde{U}_{n-1})$ , so gilt  $f^k(\partial V) = Z_{n+k}$  für ein  $k \in \mathbb{N}$ . Würden sich periodische Punkte in  $V$  bei  $\partial V$  häufen, so würden sich auch periodische Punkte in  $f^k(V) = \widetilde{Z}_{n+k} \setminus Z_{n+k}$  bei  $f^k(\partial V) = Z_{n+k}$  häufen. Daher würde eine letztendlich große Randkomponente mit  $\partial_\infty U_{n-1} = \partial_0 U_n = \partial V$  nicht ausreichen. Jedoch könnten sich abzählbar viele dieser Komponenten bei den Rändern häufen.

Die Gleichheit  $\partial_\infty U_{n-1} = \partial_0 U_n$  gilt nicht für alle mehrfach zusammenhängenden wandernden Gebiete, da es ein Beispiel einer Funktion mit unendlich vielen verschiedenen Orbits von zweifach zusammenhängenden wandernden Gebieten gibt, siehe [KS08, Theorem F]. Ist  $U$  eines dieser wandernden Gebiete, so müssen zwischen  $U_n$  und  $U_{n+1}$  unendlich viele andere Orbits von mehrfach zusammenhängenden wandernden Gebieten liegen. Damit gilt sogar  $\partial_\infty \overline{U_{n-1}} \cap \partial_0 \overline{U_n} = \emptyset$ .

**Bemerkung 3.1.30** (Auftreten der verschiedenen Randtypen) Wie Korollar 3.1.26 zeigt, treten kollabierte Randkomponenten genau dann auf, wenn der letztendliche innere Zusammenhang  $\infty$  ist (siehe 4.1 und 4.3 für Beispiele). Nach [Pom92, Proposition 2.18] können sogenannte „Triods“ nur abzählbar oft auftreten. Nach Satz 3.1.25 müssen demnach Ein-Punkt-Komponenten oder Kontinua, die keine „Triods“ sind, unendlich oft auftreten. Ob Ein-Punkt-Komponenten auftreten können, ist eine Frage von Rippon aus einem persönlichen Gespräch. Beispiele für echt teilweise kollabierte Randkomponenten sind nicht bekannt.

Ob wandernde oder teilweise wandernde Randkomponenten auftreten können, ist ebenfalls nicht bekannt. Bergweiler nutzte eine Konstruktion von Kisaka und Shishikura aus [KS08], um selbst ein Beispiel (siehe [Ber11]) einer Funktion mit einem einfach zusammenhängenden und einem mehrfach zusammenhängenden wandernden Gebiet zu konstruieren. In dem speziellen Beispiel liegt das einfach zusammenhängende Gebiet „zwischen“ den großen Rändern von zwei verschiedenen Komponenten des mehrfach zusammenhängenden wandernden Gebietes. Damit könnte dies höchstens ein Beispiel für eine teilweise wandernde große Randkomponente sein. Ob dies hier der Fall ist, ist unklar.

Rippon und Stallard fragten in einem persönlichen Gespräch, ob mehrfache, große Randkomponenten auftreten können. Dies ist nach wie vor unklar. Es ist denkbar, Kisakas und Shishikuras Konstruktion abzuwandeln, wie Bergweiler es bereits getan hat, um einen kritischen Punkt auf eine große Randkomponente eines mehrfach zusammenhängenden wandernden Gebietes abzubilden. Damit könnte ein letztendlich großer Teil konstruiert werden. Interessant wäre es auch, ob dann  $\partial_\infty U_{n-1} \neq \partial_\infty \overline{U_{n-1}}$  beziehungsweise  $\partial_0 U_n \neq \partial_0 \overline{U_n}$  gelten kann. Genauso ist es interessant, ob  $\partial_\infty \overline{U_{n-1}} \neq \partial_0 \overline{U_n}$  gelten kann, wenn es nur einen Orbit von mehrfach zusammenhängenden wandernden Gebieten gibt. Dies ist vermutlich bei Kisakas und Shishikuras Beispiel eines zweifach zusammenhängenden wandernden Gebietes der Fall.

## 3.2 Kurven als Randkomponenten

Wir wollen nun zeigen, dass die Komponenten der Ränder von mehrfach zusammenhängenden wandernden Gebieten unter gewissen Voraussetzungen, die in vielen bisher untersuchten Beispielen erfüllt sind, Kurven sind. Außerdem zeigen wir, dass unter bestimmten Voraussetzungen  $\partial_\infty U_n = \partial_0 U_{n+1}$  gilt. Diese beiden Bedingungen schließen zusammen viele der gerade betrachteten verschiedenen Randtypen oder komplizierten Situationen aus.

Der folgende Satz fasst zusammen, welche Eigenschaften von Kurven sich unter Iteration erhalten beziehungsweise welche Bedingungen dafür notwendig sind. Einige der Aussagen sind bekannt, sie werden jedoch aus Gründen der Vollständigkeit hier noch einmal formuliert und bewiesen.

**Satz 3.2.1** (Urbildkomponenten von Jordankurven) *Sei  $f$  eine ganze Funktion. Sei  $\gamma$  eine Jordankurve in  $\mathbb{C}$  und  $Z$  eine beschränkte Komponente von  $f^{-n}(\text{Spur}(\gamma))$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ .*

(i) Dann ist  $Z$

- eine geschlossene Kurve. Genauer besteht  $Z$  aus Jordanbögen, die bis auf die Endpunkte paarweise disjunkt sind. Außerdem ist jede Komponente von  $\tilde{Z} \setminus Z$  ein Jordangebiet.
- Lipschitz-stetig, wenn  $\gamma$  Lipschitz-stetig ist.
- rektifizierbar, wenn  $\gamma$  rektifizierbar ist.

(ii) Enthält  $Z$  zusätzlich keine kritischen Punkte von  $f^n$ , so ist  $Z$

- eine Jordankurve.
- eine  $C^k$ -Kurve, wenn  $\gamma$  eine  $C^k$ -Kurve ist.
- analytisch, wenn  $\gamma$  analytisch ist.
- glatt, wenn  $\gamma$  glatt ist.

**Bemerkung 3.2.2** (Lipschitz-Stetigkeit und Rektifizierbarkeit) Nach Bemerkung 2.2.16 sind die Rektifizierbarkeit und Lipschitz-Stetigkeit einer Menge äquivalent, das heißt es genügt eine der beiden Aussagen zu zeigen.

*Beweis:* Sei  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ . Sei  $x$  kein kritischer Wert von  $(f|_Z)^n$ . Sei  $z \in Z$  ein Urbild von  $x$  unter  $f^n$ . Dann ist  $z$  kein kritischer Punkt von  $f^n$ . Aufgrund der Stetigkeit von  $(f^n)'$  existiert eine Umgebung  $V$  von  $z$ , in der keine kritischen Punkte von  $f^n$  liegen. Damit existiert ein Zweig  $\varphi$  der Umkehrfunktion  $f^{-n}$  auf einer Umgebung  $V'$  von  $x$  mit  $\varphi(x) = z$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $\gamma(0) = x$ . Wir beweisen nun zuerst (ii), bevor wir (i) beweisen.

(ii): Angenommen,  $Z$  enthält keine kritischen Punkte von  $f^n$ . Nach Identitätssatz existiert dann eine Umgebung  $W$  von  $Z$ , in der keine kritischen Punkte von  $f^n$  liegen. Dann ist  $f^n(W)$  eine Umgebung von  $\text{Spur}(\gamma)$ , in der keine kritischen Werte von  $(f|_W)^n$  liegen. Damit lässt sich  $\varphi$  stückweise entlang von  $\gamma$  fortsetzen. Setzt man  $\varphi$  auf diese Weise immer weiter fort, also gegebenenfalls auch mehrmals über die geschlossene Kurve  $\gamma$  hinweg, so erhält man einander fortsetzende Kurvenstücke, die einen Teil von  $Z$  parametrisieren. Wir bezeichnen die Summe dieser Kurvenstücke als die Kurve  $\Gamma$ . Da  $Z$  beschränkt ist, hat  $x$  nur endlich viele Urbilder in  $Z$ . Also muss nach einer endlichen Anzahl von Fortsetzungen durch  $x$  die Kurve  $\Gamma$  sich wieder zu einem Urbild von  $x$  schließen, welches bereits auf  $\text{Spur}(\Gamma)$  liegt. Würde sich  $\Gamma$  bei einem Urbild  $w$  von  $x$  schließen, welches nicht  $z$  ist, so wäre  $w$  ein kritischer Punkt von  $f^n$ , da es keine Umgebung von  $w$  gibt, in der  $f^n$  injektiv ist. Da aber keine kritischen Punkte von  $f^n$  auf  $Z$  liegen, muss sich  $\Gamma$  zu  $z$  schließen und damit, bis auf den Endpunkt, injektiv sein. Wir erhalten auf diese Weise eine Jordankurve  $\Gamma : [0, d] \rightarrow \mathbb{C}$ , die  $Z$  parametrisiert, wobei  $d$  die Anzahl der Urbilder von  $x$  in  $Z$  ist. Alle Urbilder von  $x$  müssen einfache Urbilder sein, da es sonst kritische Punkte von  $f^n$  wären. Sei  $\gamma$  analytisch beziehungsweise  $C^k$  und  $\Gamma$  die Kurve, die  $Z$  parametrisiert und aus der obigen Konstruktion stammt. Dann existiert lokal ein Zweig  $\varphi$  der Umkehrfunktion von



$f^{-n}$ , sodass (möglicherweise nach einer Umparametrisierung von  $\Gamma$  mit einer Konstanten)  $\Gamma = \varphi \circ \gamma$  gilt. Da  $\varphi$  konform ist, überträgt sich daher die Analytizität beziehungsweise  $C^k$ -Eigenschaft von  $\gamma$  stückweise auf  $\Gamma$ .

Es bleibt zu zeigen, dass  $Z$  glatt ist, also durch eine  $C^1$ -Kurve  $\Gamma : [0, d] \rightarrow \mathbb{C}$  parametrisiert werden kann, mit  $\Gamma'(t) \neq 0$  für alle  $t \in [0, d]$ , wenn  $\gamma$  glatt ist. Wie oben angedeutet, setzen wir stückweise  $\Gamma(t+j) = \varphi \circ \gamma(t)$ , wobei  $\varphi$  ein lokaler Zweig von  $f^{-n}$  ist und  $j \in \{0, \dots, d-1\}$  gilt. Dann ist  $\Gamma$  eine  $C^1$ -Kurve, da  $\varphi$  konform ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $j = 0$ . Dann gilt

$$\Gamma'(t) = \varphi'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \frac{\gamma'(t)}{(f^n)'(\varphi(\gamma(t)))} \neq 0,$$

da  $\gamma$  glatt ist. Damit ist  $\Gamma$  ebenfalls glatt.

(i): Angenommen,  $Z$  enthält kritische Punkte von  $f^n$ . Dies sind nach Identitätssatz nur endlich viele. Dann existiert nach Identitätssatz eine Umgebung  $W$  von  $Z$ , sodass alle kritischen Punkte von  $f^n|_W$  auf  $Z$  liegen. Dann ist  $f^n(W)$  eine Umgebung von  $\text{Spur}(\gamma)$ , in der alle kritischen Werte von  $f^n|_W$  auf  $\text{Spur}(\gamma)$  liegen. Bezeichne die kritischen Werte mit  $y_1, \dots, y_k$  für ein  $k \in \mathbb{N}$ . Seien

$$x_1 := x, x_2, \dots, x_k \in \text{Spur}(\gamma) \setminus \{y_1, \dots, y_k\},$$

sodass  $x_j$  vor  $y_j$  von  $\gamma$  durchlaufen wird. Weiter seien  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  die Kurvenstücke von  $\gamma$ , sodass für alle  $j \in \{1, \dots, k\}$  die Kurve  $\gamma_j$  die Punkte  $y_{j-1}$  und  $y_j$  miteinander verbindet, wobei  $\gamma_1$  die Punkte  $y_k$  und  $y_1$  miteinander verbindet. Insbesondere liegt also  $x_j$  auf  $\gamma_j$  (siehe Abbildung 3.10). Jeder Punkt  $x_j$  hat eine endliche Anzahl von Urbildern  $l_j$  in  $Z$ . Für jedes dieser Urbilder existiert ein Zweig der Umkehrfunktion von  $f^{-n}$ , der  $x_j$  auf dieses Urbild abbildet. Jeder dieser Zweige kann entlang von  $\gamma_j$  fortgesetzt werden und liefert damit einen Jordanbogen, der einen Teil von  $Z$  parametrisiert und zwei der kritischen Punkte von  $f^n$  auf  $Z$  miteinander verbindet. Auf diese Weise erhalten wir eine endliche Anzahl von Jordanbögen, die alle Teile von  $Z$  parametrisieren. Die Jordanbögen sind bis auf die Endpunkte paarweise disjunkt. Die Summe dieser Jordanbögen ist eine geschlossene Kurve  $\Gamma$ , aber keine Jordankurve mehr. Allerdings ist jede Komponente von  $\tilde{Z} \setminus Z$  von endlich vielen solchen Jordanbögen berandet. Damit setzen sich diese Jordanbögen zu einer Jordankurve zusammen, das heißt, jede Komponente  $V$  von  $\tilde{Z} \setminus Z$  ist ein Jordangebiet. (Für  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \tilde{Z}$  gilt dies nicht.) Damit ist  $f|_V$  eine eigentliche Abbildung und nach Satz 2.6.6 lässt sich  $f$  inklusive des Abbildungsgrades auf  $\partial V$  fortsetzen. Damit besitzt auch  $f|_Z$  einen Abbildungsgrad  $d$ , das heißt, es gilt insbesondere  $l_1 = \dots = l_k = d$ . Damit können wir wie bereits in (ii)  $\Gamma$  als eine geschlossene Kurve von  $\Gamma : [0, d] \rightarrow \mathbb{C}$  parametrisieren.

Sei  $\gamma$  Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante  $L_1 > 0$  und  $\Gamma : [0, d] \rightarrow \mathbb{C}$  die Kurve, die  $Z$  parametrisiert und aus der obigen Konstruktion stammt. Seien dann  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  die Kurvenstücke von  $\gamma$  zwischen den kritischen Werten  $y_1, \dots, y_k$  von  $f^n$ . Weiter seien  $\varphi_{1,1}, \dots, \varphi_{1,d}, \dots, \varphi_{k,1}, \dots, \varphi_{k,d}$  die zugehörigen Zweige der Umkehrfunktionen wie oben. Dann sind die  $\varphi_{i,j}$  alle Lipschitz-stetig mit einer gemeinsamen Lipschitz-Konstante  $L_2 > 0$ . Seien  $t_1, t_2 \in [0, d]$  nahe beieinander. Dann existieren Zweige  $\varphi_{i,j}$  und  $\varphi_{i+1,j}$  von  $f^{-n}$ , sodass

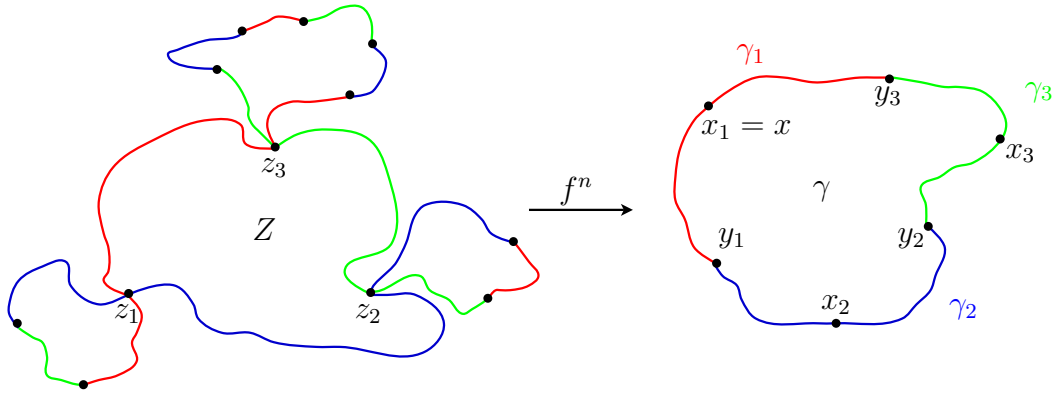


Abbildung 3.10: Hier sind die  $z_i$  die zu den  $y_i$  gehörigen kritischen Punkte von  $f^n$ . Jeder Jordanbogen hat in dieser Situation fünf Urbilder. Der Abbildungsgrad von  $f^n$  auf dem oberen Gebiet ist 2, auf den anderen Gebieten ist er 1.

$\Gamma(t_1) = (\varphi_{i,j} \circ \gamma)(t_1 - c)$  und  $\Gamma(t_2) = (\varphi_{i+1,j} \circ \gamma)(t_2 - c)$  für ein  $0 \leq c \leq d$  gilt (möglicherweise muss dafür umparametrisiert werden). Sei  $t_3 \in [t_1, t_2]$  so gewählt, dass

$$\Gamma(t_3) = (\varphi_{i,j} \circ \gamma)(t_3 - c) = (\varphi_{i+1,j} \circ \gamma)(t_3 - c)$$

gilt. Dann folgt

$$\begin{aligned} |\Gamma(t_1) - \Gamma(t_2)| &= |\varphi_{i,j}(\gamma(t_1 - c)) - \varphi_{i+1,j}(\gamma(t_2 - c))| \\ &\leq |\varphi_{i,j}(\gamma(t_1 - c)) - \varphi_{i,j}(\gamma(t_3 - c)) + \varphi_{i+1,j}(\gamma(t_3 - c)) - \varphi_{i+1,j}(\gamma(t_2 - c))| \\ &\leq |\varphi_{i,j}(\gamma(t_1 - c)) - \varphi_{i,j}(\gamma(t_3 - c))| + |\varphi_{i+1,j}(\gamma(t_3 - c)) - \varphi_{i+1,j}(\gamma(t_2 - c))| \\ &\leq L_2 |\gamma(t_1 - c) - \gamma(t_3 - c)| + L_2 |\gamma(t_3 - c) - \gamma(t_2 - c)| \\ &\leq L_1 \cdot L_2 |t_1 - c - (t_3 - c)| + L_1 \cdot L_2 |t_3 - c - (t_2 - c)| \\ &= L_1 \cdot L_2 (|t_1 - t_3| + |t_3 - t_2|) \\ &= L_1 \cdot L_2 |t_1 - t_2|. \end{aligned}$$

Damit ist  $\Gamma$  lokal Lipschitz-stetig jeweils mit derselben Lipschitz-Konstante  $L := L_1 \cdot L_2$ . Also ist  $\Gamma$  auch global Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante  $L$ .

Sei  $\gamma$  rektifizierbar. Nach Bemerkung 2.2.16 ist  $\gamma$  dann auch Lipschitz-stetig. Nach obiger Überlegung ist damit auch  $Z$  Lipschitz-stetig. Nach Bemerkung 2.2.16 ist  $Z$  genau dann rektifizierbar, wenn  $Z$  Lipschitz-stetig ist, also folgt die Behauptung.  $\square$

Das folgende Theorem ist das Hauptresultat dieser Arbeit. Es zeigt, dass die großen Ränder von mehrfach zusammenhängenden wandernden Gebieten unter bestimmten Voraussetzungen Jordankurven sind, und dass die angrenzenden großen Ränder gleich sind. Damit können viele der in 3.1 untersuchten Situationen nicht auftreten. Wir zeigen also, dass die Ränder von mehrfach zusammenhängenden wandernden Gebieten einfache Formen annehmen können.

**Theorem 1** (Große Ränder von mehrfach zusammenhängenden wandernden Gebieten)

Sei  $U = U_0$  ein mehrfach zusammenhängendes wanderndes Gebiet einer ganzen transzendenten Funktion  $f$  und  $U_n := f^n(U)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Sei  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge positiver reeller Zahlen. Es sei  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von abgeschlossenen topologischen Annuli und  $N \in \mathbb{N}$ , sodass für alle  $n \geq N$  folgende Eigenschaften gelten:

- (i) Es existieren  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{>0}$  mit  $\alpha r_n \leq |z| \leq \beta r_n$  für alle  $z \in C_n$ .
- (ii)  $\partial_0 C_n$  und  $\partial_\infty C_n$  können als glatte Jordankurven  $\zeta_n^0$  und  $\zeta_n^\infty$  parametrisiert werden.
- (iii) Es existiert  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$  mit  $|\angle(z_1, \mathbb{K}_{|z_1|}, \zeta_n^\infty)| \leq \theta$  für alle  $z_1 \in \text{Spur}(\zeta_n^\infty)$ . Außerdem gilt  $|\angle(z_0, \mathbb{K}_{|z_0|}, \zeta_n^0)| < \frac{\pi}{2}$  für alle  $z_0 \in \text{Spur}(\zeta_n^0)$ .
- (iv)  $C_{n+1} \subset f(C_n)$ .
- (v)  $\partial_0 C_n \subset U_{n-1}$  und  $\partial_\infty C_n \subset U_n$ .
- (vi) Für ein  $m \in \mathbb{R}_{>0}$  mit  $m \frac{\alpha}{\beta} > 1$  und für alle  $z \in f^{-1}(C_{n+1}) \cap C_n$  gilt

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \geq m. \quad (3.2.1)$$

- (vii) Für alle  $z \in f^{-1}(C_{n+1}) \cap C_n$  gilt

$$\left| \arg \left( \frac{zf'(z)}{f(z)} \right) \right| < \frac{\pi}{2} - \theta.$$

Dann gilt für alle  $n \geq N$ :

- $\partial_0 U_n$  und  $\partial_\infty U_{n-1}$  sind Jordankurven.
- $\partial_\infty U_{n-1} = \partial_0 U_n$ .

**Bemerkung 3.2.3** (Große äußere Ränder und  $C_n$ ) Es gilt  $(\partial_\infty U_{n-1} \cup \partial_0 U_n) \subset C_n$  aufgrund der Wahl von  $C_n$  und der Lage der  $U_n$  zueinander.

**Bemerkung 3.2.4** ( $C_n$  als expandierende Umgebung) Die Voraussetzungen (i)-(vi) von Theorem 1 besagen, dass eine Umgebung  $C_n$  der großen Ränder  $\partial_0 U_n \cup \partial_\infty U_{n-1}$  existiert, auf der  $f$  in bestimmter Weise expandierend ist.

**Bemerkung 3.2.5** (Größe der Annuli  $C_n$ ) In den meisten Anwendungen wachsen die  $r_n$  exponentiell, das heißt, es gilt  $r_{n+1} > 2r_n$  oder es gilt sogar  $r_{n+1} = M(r_n, f)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Für alle großen  $n$  sind damit die  $C_n$  disjunkt und für alle  $k > n + 1$  gilt  $f(C_n) \cap C_{n+k} = \emptyset$ . Dies ist unabhängig von der Wahl von  $\alpha$  und  $\beta$ .

**Bemerkung 3.2.6** (Vertauschte Rollen von  $\zeta_n^\infty$  und  $\zeta_n^0$ ) Der Beweis des Theorems funktioniert auch mit vertauschten Rollen für die Kurven  $\zeta_n^\infty$  und  $\zeta_n^0$ . Das heißt, dass die Voraussetzungen  $|\angle(z_1, \mathbb{K}_{|z_1|}, \zeta_n^\infty)| < \frac{\pi}{2}$  für alle  $z_1 \in \text{Spur}(\zeta_n^\infty)$  und  $|\angle(z_0, \mathbb{K}_{|z_0|}, \zeta_n^0)| \leq \theta$  für alle  $z_0 \in \text{Spur}(\zeta_n^0)$  ebenfalls ausreichen.

**Bemerkung 3.2.7** (Voraussetzung (vi)) Der Term  $\frac{zf'(z)}{f(z)}$  ist die Ableitung von  $f$  nach einem logarithmischen Variablenwechsel. Bedingungen für  $\frac{zf'(z)}{f(z)}$  sind in den meisten Fällen leicht zu überprüfen, da viele Beispiele von Funktionen mit mehrfach zusammenhängenden wandernden Gebieten über unendliche Produkte definiert sind. Eine Arbeit von Eke befasst sich ausgiebig mit dem Realteil von  $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ , siehe [Eke68].

**Bemerkung 3.2.8** (Abhängigkeit der beiden Resultate) Die Aussagen, dass  $\partial_0 U_n$  und  $\partial_\infty U_{n-1}$  Jordankurven sind, und dass  $\partial_\infty U_{n-1} = \partial_0 U_n$  gilt, lassen sich durch Theorem 1 nicht unabhängig voneinander erreichen. Lässt sich also auf anderem Weg zeigen, dass zum Beispiel  $\partial_\infty U_{n-1} = \partial_0 U_n$  nicht gelten kann, so lässt sich Theorem 1 nicht anwenden.

Der Beweis, dass  $\partial_0 U_n$  und  $\partial_\infty U_{n-1}$  Jordankurven sind, ließe sich theoretisch von der Aussage  $\partial_\infty U_{n-1} = \partial_0 U_n$  lösen. In diesem Fall müssten die Voraussetzungen von Theorem 1 „einseitig“ gelten. Diese Voraussetzung ist in allen praktischen Fällen jedoch sehr schwer nachzuweisen.

**Bemerkung 3.2.9** (Theorem 1 nur für unendlich-fachen Zusammenhang) Das Theorem 1 kann nach Satz 3.1.28 nur auf unendlich-fach zusammenhängende wandernde Gebiete angewendet werden.

**Bemerkung 3.2.10** (Keine Lakes of Wada) Nach Satz 3.1.28 können keine „Lakes of Wada“-Situationen auftreten, das heißt, dass nichts „zwischen“  $\partial_\infty U_{n-1}$  und  $\partial_0 U_n$  liegt.

Sind die  $C_n$  Annuli, so sind  $\partial_0 C_n$  und  $\partial_\infty C_n$  Kreise und können damit als analytische Jordankurven parametrisiert werden. In diesem Fall kann  $\theta = 0$  gewählt werden. Damit genügt es zu zeigen, dass  $\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0$  gilt, um  $\left|\arg\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)\right| < \frac{\pi}{2}$  zu erhalten. Da wir in vielen Anwendungen die  $C_n$  als Annuli wählen können, fassen wir diese einfachere Version von Theorem 1 als Korollar zusammen.

**Korollar 3.2.11** (Theorem 1 für Annuli) Sei  $U = U_0$  ein mehrfach zusammenhängendes wanderndes Gebiet einer ganzen transzendenten Funktion  $f$  und  $U_n := f^n(U)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Seien  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folgen positiver reeller Zahlen mit  $\alpha_n < \beta_n$ . Es sei  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $C_n := \overline{\mathbb{A}}(\alpha_n r_n, \beta_n r_n)$  eine Folge von Annuli und  $N \in \mathbb{N}$ , sodass für alle  $n \geq N$  folgende Eigenschaften gelten:

- (i) Es existieren  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{>0}$ , sodass  $\alpha \leq \alpha_n < \beta_n \leq \beta$  gilt.
- (ii)  $C_{n+1} \subset f(C_n)$ .
- (iii)  $\partial_0 C_n \subset U_{n-1}$  und  $\partial_\infty C_n \subset U_n$ .
- (iv) Für ein  $m \in \mathbb{R}_{>0}$  mit  $m \frac{\alpha}{\beta} > 1$  und für alle  $z \in f^{-1}(C_{n+1}) \cap C_n$  gilt

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \geq m.$$

- (v) Für alle  $z \in f^{-1}(C_{n+1}) \cap C_n$  gilt

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0.$$

Dann gilt für alle  $n \geq N$ :

- $\partial_0 U_n$  und  $\partial_\infty U_{n-1}$  sind Jordankurven.
- $\partial_\infty U_{n-1} = \partial_0 U_n$ .

Der Beweis von Theorem 1 hat in Teilen Ähnlichkeit mit dem Beweis, dass die Ränder von Fatoukomponenten von hyperbolischen Abbildungen lokal zusammenhängend sind (siehe Satz 2.9.21). Hier wird eine invariante Fatoukomponente  $U$  der hyperbolischen Funktion  $f$  betrachtet. Nach Bemerkung 2.7.16 ist  $U$  attraktiv. Es werden Kurven  $\gamma_n$  konstruiert, sodass  $f(\text{Spur}(\gamma_{n+1})) = \text{Spur}(\gamma_n)$  gilt. Außerdem werden die  $\gamma_n$  so gewählt, dass der attraktive Fixpunkt in  $U$  jeweils im Inneren der Kurven liegt. Auf der Juliamenge ist  $f$  hyperbolisch, das heißt, jeder Zweig der Umkehrfunktion ist kontrahierend. Dies ist auch für eine kleine Umgebung der Juliamenge noch der Fall. Sind die  $\gamma_n$  nahe genug am Rand der Fatoukomponente, also in dieser Umgebung, so kann gezeigt werden, dass die Kurven  $\gamma_n$  gleichmäßig konvergieren. Aufgrund der Wahl der Kurven müssen diese dann gegen den Rand von  $U$  konvergieren und wir erhalten, dass der Rand von  $U$  eine Kurve ist und damit nach dem Satz von Carathéodory lokal zusammenhängend ist.

Für unseren Beweis von Theorem 1 können wir die Kurven nicht in der angegebenen Weise wählen, da wandernde Fatoukomponenten nicht invariant sind. Unser Ziel ist es, die Randkurven der  $C_n$  nach  $U$  zurückzuziehen. Dann nutzen wir, dass  $f$  in den  $C_n$  expandierend ist, sowie Voraussetzung (3.2.1), um zu zeigen, dass die dadurch entstehenden Kurven gleichmäßig konvergieren. Schließlich nutzen wir eine Sandwich-Konstruktion, um zu zeigen, dass die großen Ränder übereinstimmen.

**Beweis von Theorem 1:** Sei im folgenden Beweis  $n \geq N$ . Definiere für alle  $k \in \mathbb{N}$

$$G_{n,k} := \{z \in C_n : f^j(z) \in C_{n+j} \text{ für alle } j = 1, \dots, k\}.$$

Sei  $\Gamma_{n,k}$  die Komponente von  $G_{n,k}$  mit  $0 \in \widetilde{\Gamma}_{n,k}$ . Nach dem Maximumprinzip ist die Wahl dieser Komponente eindeutig. Die Ungleichung  $\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \geq m > 0$  für alle  $z \in f^{-1}(C_{n+1}) \cap C_n$

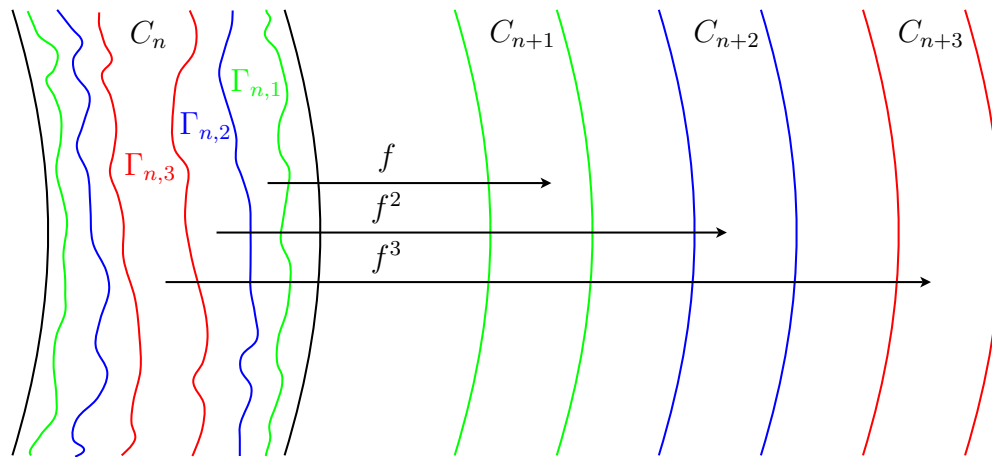


Abbildung 3.11: Die topologischen Annuli  $\Gamma_{n,k}$ .

impliziert  $\text{Crit}(f) \cap f^{-1}(C_{n+1}) \cap C_n = \emptyset$ . Also enthalten die  $\Gamma_{n,k}$  keine kritischen Punkte. Nach der Bemerkung 2.6.8 zur Riemann-Hurwitz-Formel sind damit alle  $\Gamma_{n,k}$  topologische Annuli, also zweifach zusammenhängende Gebiete.

**Lemma 3.2.12** (Abschätzung für die Ableitung) *Es existiert ein  $\varrho > 1$ , sodass für alle  $k \in \mathbb{N}$  und  $z \in \Gamma_{n,k}$*

$$\left| (f^k)'(z) \right| \geq \varrho^k \cdot \frac{r_{n+k}}{r_n}$$

*gilt.*

*Beweis:* Sei  $z \in \Gamma_{n,1} = f^{-1}(C_{n+1}) \cap C_n$ , dann gilt mit (vii)

$$|f'(z)| \geq m \cdot \frac{|f(z)|}{|z|} \geq m \cdot \frac{\alpha r_{n+1}}{\beta r_n} = \varrho \cdot \frac{r_{n+1}}{r_n}$$

für  $\varrho := \frac{m\alpha}{\beta} > 1$ .

Damit folgt für  $k \in \mathbb{N}$  und  $z \in \Gamma_{n,k}$ :

$$\begin{aligned} \left| (f^k)'(z) \right| &= |f'(f^{k-1}(z))| \cdot |f'(f^{k-2}(z))| \cdot \dots \cdot |f'(z)| \\ &\geq \varrho \cdot \frac{r_{n+k}}{r_{n+(k-1)}} \cdot \varrho \cdot \frac{r_{n+(k-1)}}{r_{n+(k-2)}} \cdot \dots \cdot \varrho \cdot \frac{r_{n+1}}{r_n} \\ &= \varrho^k \cdot \frac{r_{n+k}}{r_n} \end{aligned}$$

□

Wir wollen  $\partial_\infty \Gamma_{n,k}$  und  $\partial_0 \Gamma_{n,k}$  als geschlossene Kurven parametrisieren. Da  $f^k$  eingeschränkt auf eine Urbildkomponente einer Menge unter  $f^k$  eine eigentliche Abbildung ist, sind beide Ränder Urbilder von  $\partial_\infty C_{n+k}$  beziehungsweise  $\partial_0 C_{n+k}$ . Nach Satz 3.2.1 sind damit  $\partial_\infty \Gamma_{n,k}$  und  $\partial_0 \Gamma_{n,k}$  glatte Jordankurven, da die  $\Gamma_{n,k}$  keine kritischen Punkte enthalten. Seien also  $\gamma_{n,k}^\infty : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  und  $\gamma_{n,k}^0 : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  geschlossene und glatte Kurven, sodass  $\text{Spur}(\gamma_{n,k}^\infty) = \partial_\infty \Gamma_{n,k}$  und  $\text{Spur}(\gamma_{n,k}^0) = \partial_0 \Gamma_{n,k}$  gilt, wobei die Parametrisierung dieser Kurven erst später genauer bestimmt werden soll. Für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt

$$\text{Spur}(f^k \circ \gamma_{n,k}^\infty) = f^k(\text{Spur}(\gamma_{n,k}^\infty)) = \partial_\infty C_{n+k} \quad \text{und} \quad \text{Spur}(f^k \circ \gamma_{n,k}^0) = f^k(\text{Spur}(\gamma_{n,k}^0)) = \partial_0 C_{n+k}.$$

**Lemma 3.2.13** (Winkel von Kurven) *Es gilt  $|\partial_\infty \Gamma_{n+k,1} \cap R(t)| = 1$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $t \in [-\pi, \pi]$ , wobei  $R(t) = \{r \cdot e^{it} : r \in \mathbb{R}_{>0}\}$ .*

*Beweis:* Sei  $z_1 \in \partial_\infty \Gamma_{n+k,1}$  und  $z_0 = f(z_1)$ . Dann gilt  $z_0 \in f(\partial_\infty \Gamma_{n+k,1}) = \partial_\infty C_{n+k+1}$ . Sei  $\zeta_{n+k+1}^\infty : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  die Jordankurve, die  $\partial_\infty C_{n+k+1}$  parametrisiert mit  $\zeta_{n+k+1}^\infty(0) = z_0$ . Sei  $\varphi$  der Zweig von  $f^{-1}$  in einer Umgebung  $V$  von  $z_0$ , sodass  $\varphi(z_0) = z_1$  gilt. Sei weiter  $V' = (-\eta, \eta)$  für ein genügend kleines  $\eta > 0$ , sodass  $\zeta_{n+k+1}^\infty(V') \subset V$  gilt. Betrachte den glatten Jordanbogen  $\gamma : V' \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\gamma = \varphi \circ \zeta_{n+k+1}^\infty$ .

Wir wollen nun zeigen, dass der Schnittwinkel  $|\sphericalangle(z_1, \mathbb{K}_{|z_1|}, \gamma)| < \frac{\pi}{2}$  ist. Dafür betrachten wir einen Zweig des Logarithmus in einer kleinen Umgebung von  $\gamma(0) = z_1$ . Zur Erinnerung sei gesagt, dass wir hier  $\arg(\cdot)$  als Funktion nach  $[-\pi, \pi)$  auffassen. Es gilt

$$\begin{aligned} \sphericalangle(z_1, \mathbb{K}_{|z_1|}, \gamma) &= \arg(-i \cdot (\log(\gamma))'(0)) = \arg\left(-i \cdot \frac{\gamma'(0)}{\gamma(0)}\right) = \arg\left(-i \cdot \frac{(\varphi \circ \zeta_{n+k+1}^\infty)'(0)}{\varphi \circ \zeta_{n+k+1}^\infty(0)}\right) \\ &= \arg\left(-i \cdot (\zeta_{n+k+1}^\infty)'(0) \cdot \frac{\varphi'(z_0)}{\varphi(z_0)}\right). \end{aligned}$$

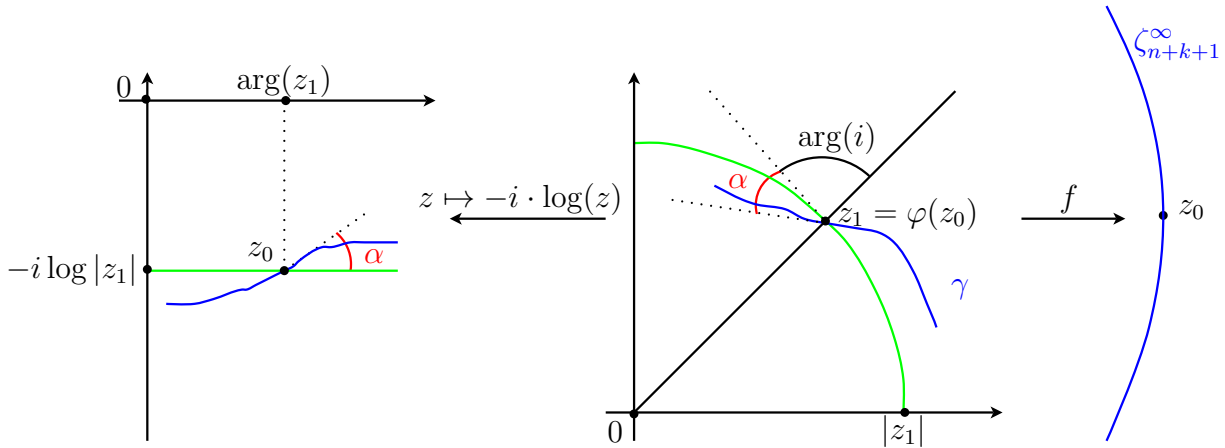


Abbildung 3.12: Das Bild veranschaulicht die zugrunde liegende Überlegung. Wir nehmen hier an, dass die  $C_n$  echte Annuli sind, also von Kreisen berandet sind. Damit sind alle  $\theta = 0$ .

Weiter gilt

$$\arg((\zeta_{n+k+1}^\infty)'(0)) = \arg(\exp(i \cdot \sphericalangle(z_0, \mathbb{K}_{|z_0|}, \zeta_{n+k+1}^\infty)) \cdot i \cdot z_0),$$

da  $\zeta_{n+k+1}^\infty(0) = z_0$  und  $\sphericalangle(|z_0|, \mathbb{K}_{|z_0|}, R(0)) = \frac{\pi}{2} = \arg(i)$  gilt. Damit folgt

$$\begin{aligned} \arg\left(-i \cdot (\zeta_{n+k+1}^\infty)'(0) \cdot \frac{\varphi'(z_0)}{\varphi(z_0)}\right) &= \arg\left(-i \cdot \exp(i \cdot \sphericalangle(z_0, \mathbb{K}_{|z_0|}, \zeta_{n+k+1}^\infty)) \cdot i \cdot z_0 \cdot \frac{\varphi'(z_0)}{\varphi(z_0)}\right) \\ &= \arg\left(\exp(i \cdot \sphericalangle(z_0, \mathbb{K}_{|z_0|}, \zeta_{n+k+1}^\infty)) \cdot \frac{z_0 \varphi'(z_0)}{\varphi(z_0)}\right). \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\left|\arg\left(\frac{z_0 \varphi'(z_0)}{\varphi(z_0)}\right)\right| = \left|\arg\left(\frac{f(z_1)}{z_1 f'(z_1)}\right)\right| = \left|-\arg\left(\frac{z_1 f'(z_1)}{f(z_1)}\right)\right| = \left|\arg\left(\frac{z_1 f'(z_1)}{f(z_1)}\right)\right|.$$

Weiter gilt nach (viii) für  $z \in \Gamma_{n+k,1}$

$$\left|\arg\left(\frac{z f'(z)}{f(z)}\right)\right| < \frac{\pi}{2} - \theta,$$

und es gilt nach (iii)

$$|\sphericalangle(z, \mathbb{K}_{|z|}, \zeta_{n+k+1}^\infty)| \leq \theta$$

für alle  $z \in \text{Spur}(\zeta_{n+k+1}^\infty)$ . Damit folgt

$$\arg \left( \exp(i \cdot \angle(z_0, \mathbb{K}_{|z_0|}, \zeta_{n+k+1}^\infty)) \cdot \frac{z_0 \varphi'(z_0)}{\varphi(z_0)} \right) = \angle(z_0, \mathbb{K}_{|z_0|}, \zeta_{n+k+1}^\infty) + \arg \left( \frac{z_0 \varphi'(z_0)}{\varphi(z_0)} \right).$$

Insgesamt folgt damit

$$\begin{aligned} |\angle(z_1, \mathbb{K}_{|z_1|}, \gamma)| &= \left| \arg \left( \exp(i \cdot \angle(z_0, \mathbb{K}_{|z_0|}, \zeta_{n+k+1}^\infty)) \cdot \frac{z_0 \varphi'(z_0)}{\varphi(z_0)} \right) \right| \\ &= \left| \angle(z_0, \mathbb{K}_{|z_0|}, \zeta_{n+k+1}^\infty) + \arg \left( \frac{z_0 \varphi'(z_0)}{\varphi(z_0)} \right) \right| \\ &\leq |\angle(z_0, \mathbb{K}_{|z_0|}, \zeta_{n+k+1}^\infty)| + \left| \arg \left( \frac{z_0 \varphi'(z_0)}{\varphi(z_0)} \right) \right| \\ &= |\angle(z_0, \mathbb{K}_{|z_0|}, \zeta_{n+k+1}^\infty)| + \left| \arg \left( \frac{z_1 f'(z_1)}{f(z_1)} \right) \right| \end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$|\angle(z_1, \mathbb{K}_{|z_1|}, \gamma)| < \theta + \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = \frac{\pi}{2},$$

da  $z_0 \in \text{Spur}(\zeta_{n+k+1}^\infty)$  und  $z_1 \in \Gamma_{n+k,1}$  gilt. Weiter gilt  $|\angle(re^{it}, \mathbb{K}_r, R(t))| = \frac{\pi}{2}$  für alle  $t \in [-\pi, \pi)$  und  $r > 0$ . Damit kann die Kurve  $\gamma$  jeden Strahl  $R(t)$  für alle  $t \in [-\pi, \pi]$  nur in einem Punkt schneiden.  $\square$

**Bemerkung 3.2.14** (Kurven und Kreise) Im Beweis von Lemma 3.2.13 zeigen wir eigentlich, dass die geschlossene Kurve  $\gamma_{n+k,1}^\infty$  Kreise um 0 in einem Winkel echt kleiner als  $\frac{\pi}{2}$  schneidet.

**Bemerkung 3.2.15** (Parametrisierung über das Argument) Es gilt

$$f^k(\partial_\infty \Gamma_{n,k+1}) = \partial_\infty \Gamma_{n+k,1}$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Nach Lemma 3.2.13 existiert eine Funktion  $r : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  mit

$$\text{Spur}(r(t)e^{it}) = \text{Spur}(f^k \circ \gamma_{n,k+1}^\infty) = \partial_\infty \Gamma_{n+k,1}.$$

Also kann die Kurve  $f^k \circ \gamma_{n,k+1}^\infty$  über das Argument parametrisiert werden.

Nach Lemma 3.2.13 können wir nun die geschlossenen Kurven  $\gamma_{n,k}^\infty$  wie folgt rekursiv parametrisieren:

Für alle  $t \in [-\pi, \pi)$  setze  $\gamma_{n,1}^\infty(t) := \partial_\infty \Gamma_{n,1} \cap R(t)$ , dann ist  $\gamma_{n,1}^\infty : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  parametrisiert. Ist  $\gamma_{n,k}^\infty : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  für ein  $k \in \mathbb{N}$  bereits parametrisiert, so parametrisiere  $\gamma_{n,k+1}^\infty : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  in folgender Form:

Sei  $t \in [-\pi, \pi]$ , betrachte  $f^k(\gamma_{n,k}^\infty(t))$ . Dann existiert nach Lemma 3.2.13 genau ein Punkt  $w(t) \in \partial_\infty \Gamma_{n+k,1}$  mit  $\arg(w(t)) = \arg(f^k(\gamma_{n,k}^\infty(t)))$ .

Da  $f^k$  in  $\Gamma_{n,k}$  keine kritischen Punkte besitzt, können wir den Zweig  $\varphi_{t,k}$  von  $f^{-k}$  mit  $\gamma_{n,k}^\infty(t) = \varphi_{t,k}(f^k(\gamma_{n,k}^\infty(t)))$  wählen. Die direkte Verbindungsstrecke  $[f^k(\gamma_{n,k}^\infty(t)), w(t)]$  enthält ebenfalls keine kritischen Werte von  $f^k|_{\Gamma_{n,k}}$ . Daher existiert ein einfach zusammenhängendes Gebiet  $V_t$  mit  $[f^k(\gamma_{n,k}^\infty(t)), w(t)] \subset V_t$  auf das  $\varphi_{t,k}$  fortgesetzt werden kann.



Setze nun  $\gamma_{n,k+1}^\infty(t) := \varphi_{t,k}(w(t))$ . Dann gilt  $\gamma_{n,k}^\infty(t) = \varphi_{t,k}(f^k(\gamma_{n,k}^\infty(t)))$  und  $\gamma_{n,k+1}^\infty(t) = \varphi_{t,k}(f^k(\gamma_{n,k+1}^\infty(t)))$  mit demselben Zweig  $\varphi_{t,k}$ . Damit sind die geschlossenen Kurven  $\gamma_{n,k}^\infty$  parametrisiert.

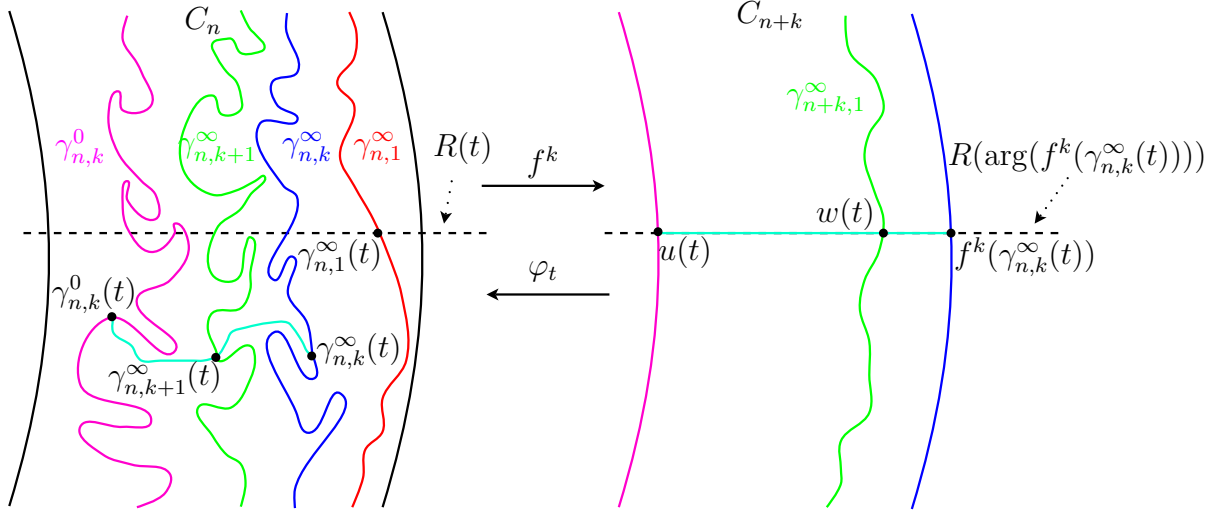


Abbildung 3.13: Die Parametrisierung der Kurven in Bildern.

Parametrisiere nun die geschlossenen Kurven  $\gamma_{n,k}^0$  wie folgt:

Sei  $t \in [-\pi, \pi]$ . Wir betrachten nun  $f^k(\gamma_{n,k}^\infty(t))$  für ein  $k \in \mathbb{N}$ . Dann existiert mindestens ein  $u(t) \in \partial_0 \Gamma_{n+k,1}$ , mit  $\arg(u(t)) = \arg(f^k(\gamma_{n,k}^\infty(t)))$ . Außerdem ist dieses  $u(t)$  eindeutig, denn es gilt  $\text{Spur}(f^k \circ \gamma_{n,k}^0) = \partial_0 C_{n+k} = \text{Spur}(\zeta_{n+k}^0)$  sowie  $|\langle z, \mathbb{K}_{|z|}, \zeta_{n+k}^0 \rangle| < \frac{\pi}{2}$  für alle  $z \in \text{Spur}(\zeta_{n+k}^0)$ . Weiter enthält  $C_{n+k}$  keine kritischen Werte von  $f^k|_{\Gamma_{n,k}}$ . Wähle also wieder den Zweig  $\varphi_{t,k}$  von  $f^{-k}$  mit  $\gamma_{n,k}^\infty(t) = \varphi_{t,k}(f^k(\gamma_{n,k}^\infty(t)))$  und setze ihn auf ein einfach zusammenhängendes Gebiet  $V'_t$  mit  $[f^k(\gamma_{n,k}^\infty(t)), u(t)] \subset V'_t$  fort. Setze dann  $\gamma_{n,k}^0(t) := \varphi_{t,k}(u(t))$ . Wir haben nun die Kurven  $(\gamma_{n,k}^\infty)_{k \in \mathbb{N}}$  und  $(\gamma_{n,k}^0)_{k \in \mathbb{N}}$  als Jordankurven parametrisiert. Außerdem haben wir für alle  $t \in [-\pi, \pi]$  (und  $k \in \mathbb{N}$ ) einen Zweig  $\varphi_{t,k}$  von  $f^{-k}$ , der auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet  $W_t$  definiert ist, welches  $[f^k(\gamma_{n,k}^\infty(t)), f^k(\gamma_{n,k}^\infty(t))]$  enthält. Weiter gilt  $f^k(\gamma_{n,k+1}^\infty(t)) \in [f^k(\gamma_{n,k}^0(t)), f^k(\gamma_{n,k}^\infty(t))]$ .

**Lemma 3.2.16** (Konvergenz der geschlossenen Kurven) *Die Folgen  $(\gamma_{n,k}^\infty)_{k \in \mathbb{N}}$  und  $(\gamma_{n,k}^0)_{k \in \mathbb{N}}$  konvergieren beide gleichmäßig gegen dieselbe geschlossene Kurve  $\gamma_n$ .*

*Beweis:* Es seien im Folgenden  $k \in \mathbb{N}$  und  $t \in [-\pi, \pi]$ . Aufgrund der Parametrisierung der Kurven gilt:

$$\begin{aligned} |\gamma_{n,k}^\infty(t) - \gamma_{n,k+1}^\infty(t)| &= |\varphi_{t,k}(f^k(\gamma_{n,k}^\infty(t))) - \varphi_{t,k}(f^k(\gamma_{n,k+1}^\infty(t)))| \\ &\leq \max_{z \in [f^k(\gamma_{n,k}^\infty(t)), f^k(\gamma_{n,k+1}^\infty(t))]} |\varphi'_{t,k}(z)| \cdot L([f^k(\gamma_{n,k}^\infty(t)), f^k(\gamma_{n,k+1}^\infty(t))]) \end{aligned}$$

Da  $[f^k(\gamma_{n,k}^\infty(t)), f^k(\gamma_{n,k+1}^\infty(t))] \subset C_{n+k} \cap R(t)$  gilt, folgt

$$L([f^k(\gamma_{n,k}^\infty(t)), f^k(\gamma_{n,k+1}^\infty(t))]) \leq (\beta - \alpha)r_{n+k}.$$

Weiter gilt mit Lemma 3.2.12

$$\begin{aligned} \max_{z \in [f^k(\gamma_{n,k}^\infty(t)), f^k(\gamma_{n,k+1}^\infty(t))]} |\varphi'_{t,k}(z)| &\leq \max_{z \in [f^k(\gamma_{n,k}^\infty(t)), f^k(\gamma_{n,k+1}^\infty(t))]} \frac{1}{|(f^k)'(\varphi_{t,k}(z))|} \\ &\leq \max_{z \in \Gamma_{n,k}} \frac{1}{|(f^k)'(z)|} \\ &\leq \varrho^{-k} \cdot \frac{r_n}{r_{n+k}}. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir damit

$$|\gamma_{n,k}^\infty(t) - \gamma_{n,k+1}^\infty(t)| \leq \varrho^{-k} \cdot \frac{r_n}{r_{n+k}} \cdot (\beta - \alpha)r_{n+k} = r_n(\beta - \alpha)\varrho^{-k}.$$

Weiter ist  $M_k := r_n(\beta - \alpha)\varrho^{-k}$  unabhängig von  $t$  und summierbar über  $k$ . Wir setzen  $g_k := \gamma_{n,k+1}^\infty - \gamma_{n,k}^\infty$  und erhalten dann mit Korollar 2.3.2, dass die Folge  $(\gamma_{n,k}^\infty)_{k \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig auf  $[-\pi, \pi]$  gegen

$$\gamma_n := \sum_{k=1}^{\infty} g_k - \gamma_{n,1}^\infty$$

konvergiert.

Wir zeigen nun, dass die Folge der Abstände  $|\gamma_{n,k}^0(t) - \gamma_{n,k}^\infty(t)|$  summierbar ist. Im Anschluss zeigen wir, dass dann die geschlossenen Kurven  $\gamma_{n,k}^0$  ebenfalls gleichmäßig gegen die geschlossene Kurve  $\gamma_n$  konvergieren.

Wie oben folgt

$$\begin{aligned} |\gamma_{n,k}^0(t) - \gamma_{n,k}^\infty(t)| &= |\varphi_{t,k}(f^k(\gamma_{n,k}^0(t))) - \varphi_{t,k}(f^k(\gamma_{n,k}^\infty(t)))| \\ &\leq \max_{z \in [f^k(\gamma_{n,k}^0(t)), f^k(\gamma_{n,k}^\infty(t))]} |\varphi'_{t,k}(z)| \cdot L([f^k(\gamma_{n,k}^0(t)), f^k(\gamma_{n,k}^\infty(t))]) \\ &\leq \max_{z \in [f^k(\gamma_{n,k}^0(t)), f^k(\gamma_{n,k}^\infty(t))]} \frac{1}{|(f^k)'(\varphi_{t,k}(z))|} \cdot (\beta - \alpha)r_{n+k} \\ &\leq \max_{z \in \Gamma_{n,k}} \frac{1}{|(f^k)'(z)|} \cdot (\beta - \alpha)r_{n+k} \\ &\leq \varrho^{-k} \cdot \frac{r_n}{r_{n,k}} \cdot (\beta - \alpha)r_{n+k} \\ &= (r_n(\beta - \alpha)) \varrho^{-k}. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} |\gamma_{n,k}^0(t) - \gamma_n(t)| &= |\gamma_{n,k}^0(t) - \gamma_{n,k}^\infty(t) + \gamma_{n,k}^\infty(t) - \gamma_{n,k+1}^\infty(t) + \gamma_{n,k+1}^\infty(t) - \gamma_n(t)| \\ &\leq |\gamma_{n,k}^0(t) - \gamma_{n,k}^\infty(t)| + |\gamma_{n,k}^\infty(t) - \gamma_{n,k+1}^\infty(t)| + |\gamma_{n,k+1}^\infty(t) - \gamma_n(t)| \\ &\leq 2 \cdot (r_n(\beta - \alpha)) \varrho^{-k} + |\gamma_{n,k+1}^\infty(t) - \gamma_n(t)|. \end{aligned}$$

Da  $\gamma_{n,k}^\infty$  gleichmäßig gegen  $\gamma_n$  konvergiert, geht  $2 \cdot (r_n(\beta - \alpha)) \varrho^{-k} + |\gamma_{n,k+1}^\infty(t) - \gamma_n(t)|$  gleichmäßig gegen 0 für  $k \rightarrow \infty$ .

Damit konvergieren die Folgen  $(\gamma_{n,k}^\infty)_{k \in \mathbb{N}}$  und  $(\gamma_{n,k}^0)_{k \in \mathbb{N}}$  beide gleichmäßig gegen dieselbe geschlossene Kurve  $\gamma_n$ .  $\square$

**Bemerkung 3.2.17** ( $\text{Spur}(\gamma_n)$ ) Da  $\text{Spur}(\gamma_{n,k}^\infty) = \partial_\infty \Gamma_{n,k}$  und  $\text{Spur}(\gamma_{n,k}^0) = \partial_0 \Gamma_{n,k}$  gilt

$$\text{Spur}(\gamma_n) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \Gamma_{n,k}.$$

Wir haben gezeigt, dass  $\gamma_n$  eine geschlossene Kurve ist, wobei  $\gamma_{n,k}^\infty$  und  $\gamma_{n,k}^0$  sogar glatte Jordankurven sind, da die  $\Gamma_{n,k}$  keine kritischen Punkte enthalten und die Ränder der  $C_n$  selbst glatte Jordankurven sind.

**Lemma 3.2.18** (Große Ränder sind Jordankurven) *Die geschlossene Kurve  $\gamma_n$  ist eine Jordankurve und es gilt  $\partial_0 U_n = \text{Spur}(\gamma_n) = \partial_\infty U_{n-1}$ .*

*Beweis:* Es gilt  $\text{Spur}(\gamma_{n,k}^0) \subset U_{n-1}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ , da  $\text{Spur}(f^k \circ \gamma_{n,k}^0) = \partial_0 C_{n+k} \subset U_{n+k-1}$  gilt. Ferner gilt  $\text{Spur}(\gamma_{n,k}^\infty) \subset U_n$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ , da  $\text{Spur}(f^k \circ \gamma_{n,k}^\infty) = \partial_\infty C_{n+k} \subset U_{n+k}$  gilt. Damit gilt  $\text{Spur}(\gamma_n) \subset \partial U_n \cap \partial U_{n-1}$ , da für jedes  $z \in \text{Spur}(\gamma_n)$  eine Folge sowohl in  $U_n$ , als auch in  $U_{n-1}$  existiert, die gegen  $z$  konvergiert (Betrachte dazu für  $z = \gamma_n(t_0)$  die Folgen  $(\gamma_{n,k}^\infty(t_0))_{k \in \mathbb{N}}$  und  $(\gamma_{n,k}^0(t_0))_{k \in \mathbb{N}}$ ). Aufgrund der Lage von  $U_n$  und  $U_{n-1}$  zueinander muss

$$\text{Spur}(\gamma_n) \subset \partial_0 U_n \cap \partial_\infty U_{n-1}$$

gelten. Aufgrund der gemeinsamen gleichmäßigen Konvergenz von  $\gamma_{n,k}^\infty$  und  $\gamma_{n,k}^0$  gegen die Kurve  $\gamma_n$  gilt

$$\sup_{t \in [-\pi, \pi]} \text{dist}(\gamma_{n,k}^\infty(t), \gamma_{n,k}^0(t)) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Wir wollen nun

$$\partial_0 U_n \cup \partial_\infty U_{n-1} \subset \text{Spur}(\gamma_n)$$

zeigen. Angenommen es existiert ein  $z_0 \in (\partial_0 U_n \cup \partial_\infty U_{n-1}) \setminus \text{Spur}(\gamma_n)$ . Da  $\text{Spur}(\gamma_n)$  kompakt ist, existiert ein  $\varepsilon > 0$  mit

$$\text{dist}(z_0, \text{Spur}(\gamma_n)) > \varepsilon$$

Aufgrund der Konstruktion von  $\gamma_n$  muss  $z_0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  zwischen  $\gamma_{n,k}^\infty$  und  $\gamma_{n,k}^0$  liegen. Es existiert aber ein  $k \in \mathbb{N}$ , sodass

$$\sup_{t \in [-\pi, \pi]} \text{dist}(\gamma_{n,k}^\infty(t), \gamma_{n,k}^0(t)) < \varepsilon$$

gilt. Dann schneidet eine der beiden Kurven die Kreisscheibe  $\mathbb{B}(z_0, \varepsilon)$ . Dies ist ein Widerspruch. Das heißt, es gilt

$$\partial_0 U_n = \text{Spur}(\gamma_n) = \partial_\infty U_{n-1}.$$

Wir wollen nun zeigen, dass das Komplement von  $\gamma_n$  in  $\overline{\mathbb{C}}$  genau zwei Komponenten besitzt. Angenommen, es existiert neben  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{C(0, U_n)}$ , also der Komponente, die  $U_n$  enthält, und  $\tilde{U}_{n-1}$ , also der Komponente, die  $U_{n-1}$  enthält, noch eine weitere Komponente  $V$ . Dann ist  $V$  offen und es existiert ein  $v \in V$  mit  $\mathbb{B}(v, \varepsilon) \subset V$  für ein  $\varepsilon > 0$ . Aufgrund der Konstruktion von  $\gamma_n$  muss  $V$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  zwischen  $\gamma_{n,k}^\infty$  und  $\gamma_{n,k}^0$  liegen. Wieder existiert aber ein  $k \in \mathbb{N}$ , sodass

$$\sup_{t \in [-\pi, \pi]} \text{dist}(\gamma_{n,k}^\infty(t), \gamma_{n,k}^0(t)) < \varepsilon$$

gilt. Dann schneidet eine der beiden Kurven die Kreisscheibe  $\mathbb{B}(v, \varepsilon)$  und damit auch  $V$ . Dies ist ein Widerspruch. Das heißt, das Komplement von  $\gamma_n$  in  $\mathbb{C}$  besitzt genau zwei Komponenten.

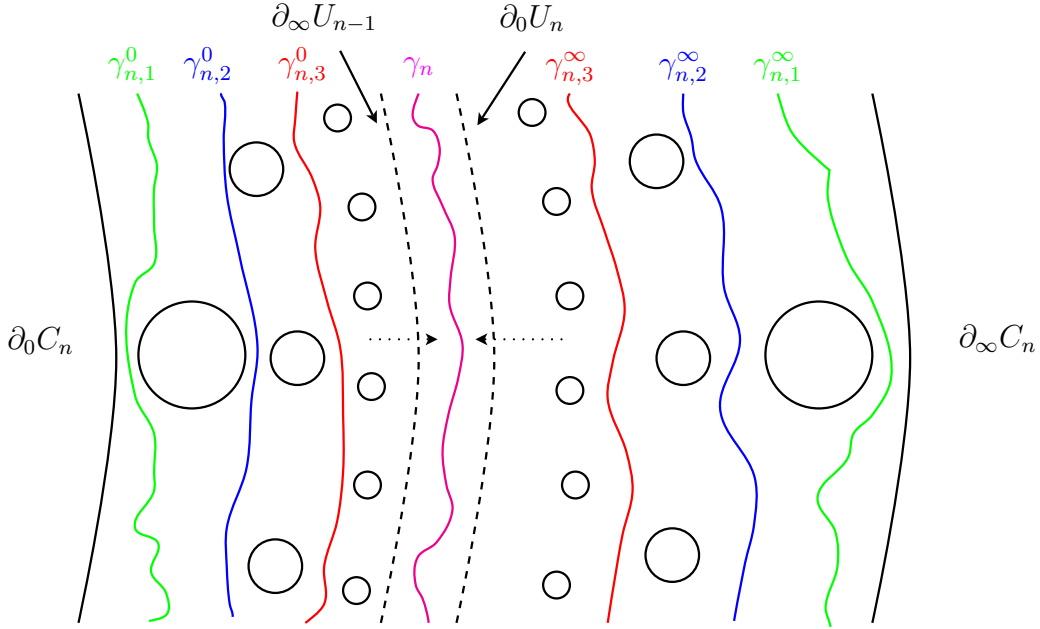


Abbildung 3.14: Darstellung der Sandwich-Konstruktion. Die großen Ränder liegen für alle  $k$  zwischen  $\gamma_{n,k}^0$  und  $\gamma_{n,k}^\infty$ .

Außerdem ist  $\text{Spur}(\gamma_n)$  lokal zusammenhängend. Nach Satz 2.9.12 ist damit jeder Punkt von  $\gamma_n$  von  $\tilde{U}_{n-1}$  und von  $\overline{\mathbb{C} \setminus C(0, U_n)}$  aus erreichbar.

Damit sind die Voraussetzungen des Satzes von Schönflies (Satz 2.9.17) erfüllt. Also ist  $\gamma_n$  eine Jordankurve.  $\square$

Da  $n \geq N$  zu Beginn beliebig gewählt war, ist Theorem 1 mit Lemma 3.2.18 vollständig bewiesen.  $\square$

**Bemerkung 3.2.19** (Hausdorffkonvergenz der Ränder) Aus dem letzten Beweis folgt insbesondere

$$\text{dist}_H(\text{Spur}(\gamma_{n,k}^\infty), \partial_0 U_n) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \text{und} \quad \text{dist}_H(\text{Spur}(\gamma_{n,k}^0), \partial_\infty U_{n-1}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Außerdem haben wir direkt gezeigt, dass nichts „zwischen“ zwei angrenzenden großen Rändern liegt. Das heißt, es treten hier keine „Lakes of Wada“-ähnlichen Strukturen auf (vgl. Satz 3.1.27).

**Bemerkung 3.2.20** (Erreichbarkeit der großen Ränder) Wir haben gezeigt, dass jeder Punkt von  $\text{Spur}(\gamma_n)$  von  $\tilde{U}_{n-1}$  und von  $\overline{\mathbb{C} \setminus C(0, U_n)}$  aus erreichbar ist. Unser Beweis ist allerdings nicht konstruktiv. Wir wollen nun konstruktiv zeigen, dass jeder Punkt von  $\text{Spur}(\gamma_n)$  von  $\tilde{U}_{n-1}$  und von  $\overline{\mathbb{C} \setminus C(0, U_n)}$  aus erreichbar ist. Wir definieren dafür Homotopien  $\sigma_{n,k}^\infty(s, t)$  und  $\sigma_{n,k}^0(s, t)$ , die das Gebiet zwischen  $\gamma_{n,k}^\infty$  und  $\gamma_{n,k+1}^\infty$  beziehungsweise  $\gamma_{n,k}^0$

und  $\gamma_{n,k+1}^0$  ausschöpfen. Sei  $t \in [-\pi, \pi]$ . Sei weiter  $\varphi_{t,k}$  der in Lemma 3.2.16 verwendete Zweig von  $f^{-k}$  und sei  $\tau_{t,k} := [f^k(\gamma_{n,k}^\infty(t)), f^k(\gamma_{n,k+1}^\infty(t))]$  die direkte Verbindungsstrecke von  $f^k(\gamma_{n,k}^\infty(t))$  zu  $f^k(\gamma_{n,k+1}^\infty(t))$ . Wir definieren dann

$$\sigma_{n,k}^\infty(s, t) := (\varphi_{t,k} \circ \tau_{t,k})(s).$$

In Lemma 3.2.16 wurde gezeigt, dass  $L(\sigma_{n,k}^\infty(\cdot, t)) \leq (r_n(\beta - \alpha)) \varrho^{-k}$  gilt. Damit gilt

$$\sum_{j=k}^{\infty} L(\sigma_{n,j}^\infty(\cdot, t)) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Sei  $\varepsilon > 0$ , dann sind für alle großen  $k$  die Kurven  $\sigma_{n,k}^\infty(\cdot, t)$  in  $\mathbb{B}(\gamma_n(t), \varepsilon)$  enthalten, da die  $\gamma_{n,k}^\infty(t)$ , also die Endpunkte der Kurven, gegen  $\gamma_n(t)$  konvergieren. Sei also  $\sigma_n^\infty(\cdot, t)$  die Kurve, die die  $\sigma_{n,k}^\infty(\cdot, t)$  nacheinander durchläuft. Dann verbindet  $\sigma_n^\infty(\cdot, t)$  den Punkt  $\gamma_{n,1}^\infty(t)$  mit  $\gamma_n(t)$ . Außerdem liegt  $\sigma_{n,k}^\infty(s, t)$  nach Konstruktion für alle  $s \in [0, 1]$  und  $k \in \mathbb{N}$  in

$$\overline{\text{ext}(\gamma_{n,k+1}^\infty)} \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{C(0, U_n)},$$

da  $\tau_{t,k}$  bis auf den Endpunkt in  $C_{n+k} \setminus \Gamma_{n+k,1}$  liegt. Damit liegt  $\sigma_n^\infty(s, t)$  nach Konstruktion für alle  $s \in [0, 1)$  in  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{C(0, U_n)}$ . Damit ist  $\gamma_n(t)$  erreichbar von  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{C(0, U_n)}$ . Auf die gleiche Art können wir Kurven  $\sigma_{n,k}^0(s, t)$  und  $\sigma_n^0(s, t)$  konstruieren und erhalten, dass  $\gamma_n(t)$  von  $\widetilde{U}_{n-1}$  aus erreichbar ist.

Wir haben nun konstruktiv gezeigt, dass jeder Punkt von  $\partial_0 U_n = \text{Spur}(\gamma_n) = \partial_\infty U_{n-1}$  von  $\widetilde{U}_{n-1}$  und von  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{C(0, U_n)}$  aus erreichbar ist. Das bedeutet nicht zwangsläufig, dass  $\partial_0 U_n = \text{Spur}(\gamma_n) = \partial_\infty U_{n-1}$  von  $U_{n-1}$  und von  $U_n$  aus erreichbar ist. Können wir allerdings unsere Kurven  $\sigma_{n,k}^\infty(\cdot, t)$  so wählen, dass sie vollständig in  $U_n$  liegen, so liegt auch  $\sigma_n^\infty(\cdot, t)$  in  $U_n$  und wir erhalten die Erreichbarkeit aus  $U_n$ . Hierfür müssen wir anstelle der direkten Verbindungsstrecke  $\tau_{t,k}$  als einen glatten Jordanbogen wählen, der ebenfalls  $f^k(\gamma_{n,k}^\infty(t))$  mit  $f^k(\gamma_{n,k+1}^\infty(t))$  verbindet, aber komplett in  $U_{n+k}$  liegt. Hier muss wieder gezeigt werden, dass die Länge der Kurvenstücke gegen 0 geht. Dazu würde es genügen zu zeigen, dass die  $\tau_{t,k}$  so gewählt werden können, dass  $L(\tau_{t,k}) \leq c \cdot r_{n+k}$  gilt für eine Konstante  $c > 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Es ist nicht klar, ob dies möglich ist. Es hängt unter anderem davon ab, wie viele Nullstellen in  $\widetilde{U}_{n+k} \setminus C(0, U_{n+k})$  liegen. Das Gleiche gilt auch für die  $\sigma_{n,k}^0(\cdot, t)$ .

**Korollar 3.2.21** (Letztendlich große Ränder sind Kurven) *Unter den Voraussetzungen von Theorem 1 ist jede letztendlich große Randkomponente  $Z$  eines wandernden Gebietes, welches zum großen Orbit von  $U$  gehört, eine geschlossene Kurve. Ist  $f^n(Z)$  eine große Randkomponente für ein großes  $n \in \mathbb{N}$  und enthält  $Z$  keine kritischen Punkte von  $f^n$ , so ist  $Z$  sogar eine Jordankurve.*

*Beweis:* Nach Theorem 1 sind alle großen Ränder für großes  $n$  Jordankurven. Die Behauptung folgt dann mit Satz 3.2.1.  $\square$

**Korollar 3.2.22** (Alle Ränder sind Kurven) *Gilt zusätzlich zu den Bedingungen des letzten Satzes, dass 2 der letztendliche innere Zusammenhang des wandernden Gebietes  $U$  ist, so*

sind alle wandernden Gebiete, welche zum großen Orbit von  $U$  gehören, von abzählbar vielen geschlossenen Kurven berandet.

*Beweis:* Nach Satz 3.1.9 sind alle Randkomponenten, welche zum Orbit der  $U_n$  gehören, letztendlich groß und nach Korollar 3.2.21 sind alle letztendlich großen Randkomponenten geschlossene Kurven.  $\square$

### 3.3 Rektifizierbarkeit der Randkurven

Das folgende Theorem basiert auf einer Idee von Bishop [Bis12] und zeigt, dass die Kurven  $\gamma_n$  unter gewissen Voraussetzungen rektifizierbar sind.

**Bemerkung 3.3.1** (Glattheit der Ränder) Obwohl alle  $\gamma_{n,k}^0$  und  $\gamma_{n,k}^\infty$  im Beweis von Theorem 1 glatte Jordankurven sind, folgt aus dem Beweis nicht, dass die  $\gamma_n$  glatte Kurven sind. Dies ist auch nicht der Fall, wenn wir  $\zeta_n^0$  und  $\zeta_n^\infty$  als analytische Jordankurven voraussetzen und demnach auch  $\gamma_{n,k}^0$  und  $\gamma_{n,k}^\infty$  analytische Jordankurven sind.

**Theorem 2** (Rektifizierbare Randkurven)

Seien  $f$ ,  $U$ ,  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $N$  definiert wie in Theorem 1. Weiter seien  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  summierbare Folgen positiver reeller Zahlen, sodass für alle  $n \geq N$  zusätzlich zu den Voraussetzungen von Theorem 1

$$\left| \arg \left( \frac{zf'(z)}{f(z)} \right) \right| \leq \varepsilon_n \quad (3.3.1)$$

für alle  $z \in f^{-1}(C_{n+1}) \cap C_n$  sowie

$$|\angle(z_0, \mathbb{K}_{|z_0|}, \zeta_n^0)| \leq \theta_n \quad \text{und} \quad |\angle(z_1, \mathbb{K}_{|z_1|}, \zeta_n^\infty)| \leq \theta_n$$

für alle  $z_0 \in \text{Spur}(\zeta_n^0)$ ,  $z_1 \in \text{Spur}(\zeta_n^\infty)$  gilt.

Dann sind alle großen Ränder für genügend großes  $n \in \mathbb{N}$  sogar rektifizierbare Jordankurven.

Wie schon bei Theorem 1 vereinfacht sich die Situation, wenn die  $C_n$  Annuli sind.

**Korollar 3.3.2** (Theorem 2 für Annuli) Seien  $f$ ,  $U$ ,  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $N$  definiert wie in Korollar 3.2.11. Weiter sei  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine summierbare Folge positiver reeller Zahlen, sodass für alle  $n \geq N$  zusätzlich zu den Voraussetzungen von Korollar 3.2.11

$$\left| \arg \left( \frac{zf'(z)}{f(z)} \right) \right| \leq \varepsilon_n$$

für alle  $z \in f^{-1}(C_{n+1}) \cap C_n$  gilt.

Dann sind alle großen Ränder für genügend großes  $n \in \mathbb{N}$  sogar rektifizierbare Jordankurven.

Der Beweis von Theorem 2 nutzt die bereits im Beweis von Theorem 1 konstruierten gleichmäßig konvergenten Kurven. Unser Ziel ist es, dies sogar noch auszuweiten und die gesamten  $C_n$  mit solchen Kurven auszuschöpfen. Wir nutzen dann (3.3.1), um zu zeigen, dass die Kurven in jedem Schritt nur leicht von einem Kreis abweichen und die zusätzliche Abweichung in jedem Schritt stark abnimmt. Dadurch erhalten wir, dass die Kurve  $\gamma_n$  nahe an einem Kreis ist.

**Beweis von Theorem 2:** Im Folgenden benutzen wir die Bezeichnungen aus dem Beweis von Theorem 1. Sei  $n \geq N$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass  $\theta_n, \varepsilon_n < \frac{\pi}{2}$  gilt. Da

$$|\angle(z_0, \mathbb{K}_{|z_0|}, \zeta_n^0)| \leq \theta_n < \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad |\angle(z_1, \mathbb{K}_{|z_1|}, \zeta_n^\infty)| \leq \theta_n < \frac{\pi}{2}$$

für alle  $z_0 \in \text{Spur}(\zeta_n^0)$ ,  $z_1 \in \text{Spur}(\zeta_n^\infty)$  gilt, können wir die Kurven über die Winkel parametrisieren, das heißt,  $\zeta_n^0, \zeta_n^\infty : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$\{\zeta_n^0(t)\} = \partial_0 C_n \cap R(t) \quad \text{und} \quad \{\zeta_n^\infty(t)\} = \partial_\infty C_n \cap R(t).$$

Wir wollen nun den topologischen Annulus  $C_n$  durch glatte Jordankurven ausschöpfen. Definiere dazu durch

$$\Gamma_{n,0}^s(t) = (1 - s) \cdot \zeta_n^0(t) + s \cdot \zeta_n^\infty(t)$$

eine Homotopie mit  $s \in [0, 1]$  und  $t \in [-\pi, \pi]$ . Es gilt also  $\Gamma_{n,0}^s : [-\pi, \pi] \rightarrow C_n$  für alle  $s \in [0, 1]$ . Aufgrund der stetigen Deformation gilt

$$|\angle(t, \mathbb{K}_{|\Gamma_{n,0}^s(t)|}, \Gamma_{n,0}^s)| \leq \max \{ |\angle(t, \mathbb{K}_{|\zeta_n^0(t)|}, \zeta_n^0)|, |\angle(t, \mathbb{K}_{|\zeta_n^\infty(t)|}, \zeta_n^\infty)| \} \leq \theta_n < \frac{\pi}{2}$$

für alle  $t \in [-\pi, \pi]$ . Dann gilt für alle  $s \in [0, 1]$  und  $z \in \text{Spur}(\Gamma_{n,0}^s)$

$$|\angle(z, \mathbb{K}_{|z|}, \Gamma_{n,0}^s)| \leq \theta_n < \frac{\pi}{2}.$$

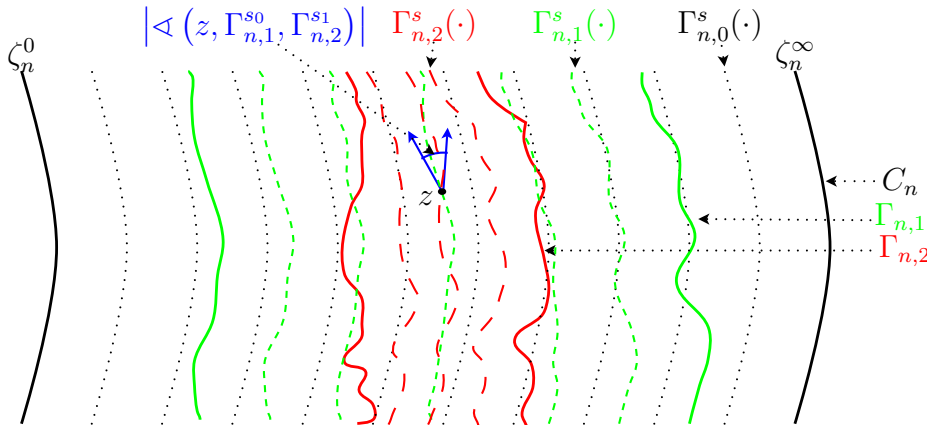


Abbildung 3.15: Das Bild zeigt die Homotopien  $\Gamma_{n,0}^s$ ,  $\Gamma_{n,1}^s$  und  $\Gamma_{n,2}^s$ . Außerdem ist der Winkel  $|\angle(z, \mathbb{K}_{|z|}, \Gamma_{n,0}^s)|$  eingezeichnet.

Wir wollen nun ebenfalls die topologischen Annuli  $\Gamma_{n,k}$  durch glatte Jordankurven ausschöpfen. Hierfür betrachten wir die Pullbacks der Kurven  $\Gamma_{n+k,0}^s$  unter  $f^k$ . Wir definieren also für festes  $s \in [0, 1]$  Kurven  $\Gamma_{n,k}^s$  mit  $\text{Spur}(\Gamma_{n,k}^s) = f^{-k}(\text{Spur}(\Gamma_{n+k,0}^s)) \cap \Gamma_{n,k}$ . Wir fassen  $\Gamma_{n,k}^s$  als Homotopie auf, wobei wir die Parametrisierung der einzelnen Kurven, die für festes  $s \in [0, 1]$  entstehen, erst später genauer bestimmen.

**Lemma 3.3.3** (Schnittwinkel der Kurven  $\Gamma_{n,k}^{s_0}$  und  $\Gamma_{n,k+1}^{s_1}$ ) *Seien  $s_0, s_1 \in [0, 1]$  und  $k \in \mathbb{N}_0$ , sowie  $\text{Spur}(\Gamma_{n,k}^{s_0}) \cap \text{Spur}(\Gamma_{n,k+1}^{s_1}) \neq \emptyset$ . Dann gilt für  $z \in \text{Spur}(\Gamma_{n,k}^{s_0}) \cap \text{Spur}(\Gamma_{n,k+1}^{s_1})$*

$$|\sphericalangle(z, \Gamma_{n,k}^{s_0}, \Gamma_{n,k+1}^{s_1})| \leq \theta_{n+k} + \theta_{n+k+1} + \varepsilon_{n+k}.$$

*Beweis:* Da  $f^k|_{\Gamma_{n,k}}$  als holomorphe Abbildung ohne kritische Punkte lokal konform ist, gilt

$$|\sphericalangle(z, \Gamma_{n,k}^{s_0}, \Gamma_{n,k+1}^{s_1})| = |\sphericalangle(f^k(z), f^k \circ \Gamma_{n,k}^{s_0}, f^k \circ \Gamma_{n,k+1}^{s_1})| = |\sphericalangle(f^k(z), \Gamma_{n+k,0}^{s_0}, \Gamma_{n+k,1}^{s_1})|$$

für alle  $z \in \text{Spur}(\Gamma_{n,k}^{s_0}) \cap \text{Spur}(\Gamma_{n,k+1}^{s_1})$ .

Sei  $z_1 \in \text{Spur}(\Gamma_{n+k,0}^{s_0}) \cap \text{Spur}(\Gamma_{n+k,1}^{s_1})$  und  $z_0 = f(z_1)$ . Dann gilt  $z_0 \in \text{Spur}(\Gamma_{n+k+1,0}^{s_2})$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $\Gamma_{n+k+1,0}^{s_1}(0) = z_0$ . Sei  $\varphi$  der Zweig von  $f^{-1}$  in einer Umgebung  $V$  von  $z_0$ , sodass  $\varphi(z_0) = z_1$  gilt. Sei  $V' = (-\eta, \eta)$  für ein genügend kleines  $\eta > 0$ , sodass  $\Gamma_{n+k+1,0}^{s_1}(V') \subset V$  gilt. Betrachte den glatten Jordanbogen  $\gamma : V' \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\gamma = \varphi \circ \Gamma_{n+k+1,0}^{s_1}$ .

Wir wollen nun zeigen, dass der Schnittwinkel  $|\sphericalangle(z_1, \Gamma_{n+k,0}^{s_0}, \gamma)| < \theta_{n+k} + \theta_{n+k+1} + \varepsilon_{n+k}$  ist. Dafür betrachten wir einen Zweig des Logarithmus in einer kleinen Umgebung von  $\gamma(0)$ . Zur Erinnerung sei gesagt, dass wir hier  $\arg(\cdot)$  als Funktion nach  $[-\pi, \pi)$  auffassen. Es gilt

$$\sphericalangle(z_1, \Gamma_{n+k,0}^{s_0}, \gamma) = \sphericalangle(z_1, \Gamma_{n+k,0}^{s_0}, \mathbb{K}_{|z_1|}) + \sphericalangle(z_1, \mathbb{K}_{|z_1|}, \gamma).$$

Dann gilt, wie im Beweis zu Lemma 3.2.13,

$$\begin{aligned} \sphericalangle(z_1, \mathbb{K}_{|z_1|}, \gamma) &= \arg(-i \cdot (\log(\gamma))'(0)) = \arg\left(-i \cdot \frac{\gamma'(0)}{\gamma(0)}\right) \\ &= \arg\left(-i \cdot \frac{(\varphi \circ \Gamma_{n+k+1,0}^{s_1})'(0)}{\varphi \circ \Gamma_{n+k+1,0}^{s_1}(0)}\right) \\ &= \arg\left(-i \cdot (\Gamma_{n+k+1,0}^{s_1})'(0) \cdot \frac{\varphi'(z_0)}{\varphi(z_0)}\right). \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\arg((\Gamma_{n+k+1,0}^{s_1})'(0)) = \arg(\exp(i \cdot \sphericalangle(z_0, \mathbb{K}_{|z_0|}, \Gamma_{n+k+1,0}^{s_1})) \cdot i \cdot z_0),$$

da  $\Gamma_{n+k+1,0}^{s_1}(0) = z_0$  und  $\sphericalangle(|z_0|, \mathbb{K}_{|z_0|}, R(0)) = \frac{\pi}{2} = \arg(i)$  gilt. Damit folgt

$$\arg\left(-i \cdot (\Gamma_{n+k+1,0}^{s_1})'(0) \cdot \frac{\varphi'(z_0)}{\varphi(z_0)}\right) = \arg\left(\exp(i \cdot \sphericalangle(z_0, \mathbb{K}_{|z_0|}, \Gamma_{n+k+1,0}^{s_1})) \cdot \frac{z_0 \varphi'(z_0)}{\varphi(z_0)}\right).$$

Außerdem gilt

$$\left|\arg\left(\frac{z_0 \varphi'(z_0)}{\varphi(z_0)}\right)\right| = \left|\arg\left(\frac{f(z_1)}{z_1 f'(z_1)}\right)\right| = \left|-\arg\left(\frac{z_1 f'(z_1)}{f(z_1)}\right)\right| = \left|\arg\left(\frac{z_1 f'(z_1)}{f(z_1)}\right)\right|.$$



Es gilt für  $z \in \Gamma_{n+k,1}$

$$\left| \arg \left( \frac{zf'(z)}{f(z)} \right) \right| < \varepsilon_{n+k},$$

und es gilt

$$|\sphericalangle(z, \mathbb{K}_{|z|}, \Gamma_{n+k+1,0}^{s_1})| \leq \theta_{n+k+1}$$

für alle  $z \in \text{Spur}(\Gamma_{n+k+1,0}^{s_1})$ . Für großes  $n$  gilt insbesondere  $\varepsilon_{n+k} + \theta_{n+k+1} < \frac{\pi}{2}$ . Damit folgt

$$\arg \left( \exp(i \cdot \sphericalangle(z_0, \mathbb{K}_{|z_0|}, \Gamma_{n+k+1,0}^{s_1})) \cdot \frac{z_0 \varphi'(z_0)}{\varphi(z_0)} \right) = \sphericalangle(z_0, \mathbb{K}_{|z_0|}, \Gamma_{n+k+1,0}^{s_1}) + \arg \left( \frac{z_0 \varphi'(z_0)}{\varphi(z_0)} \right).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} |\sphericalangle(z_1, \mathbb{K}_{|z_1|}, \gamma)| &= \left| \arg \left( \exp(i \cdot \sphericalangle(z_0, \mathbb{K}_{|z_0|}, \Gamma_{n+k+1,0}^{s_1})) \cdot \frac{z_0 \varphi'(z_0)}{\varphi(z_0)} \right) \right| \\ &= \left| \sphericalangle(z_0, \mathbb{K}_{|z_0|}, \Gamma_{n+k+1,0}^{s_1}) + \arg \left( \frac{z_0 \varphi'(z_0)}{\varphi(z_0)} \right) \right| \\ &\leq |\sphericalangle(z_0, \mathbb{K}_{|z_0|}, \Gamma_{n+k+1,0}^{s_1})| + \left| \arg \left( \frac{z_0 \varphi'(z_0)}{\varphi(z_0)} \right) \right| \\ &= |\sphericalangle(z_0, \mathbb{K}_{|z_0|}, \Gamma_{n+k+1,0}^{s_1})| + \left| \arg \left( \frac{z_1 f'(z_1)}{f(z_1)} \right) \right|. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt damit

$$\begin{aligned} |\sphericalangle(z_1, \Gamma_{n+k,0}^{s_0}, \gamma)| &\leq |\sphericalangle(z_1, \Gamma_{n+k,0}^{s_0}, \mathbb{K}_{|z_1|})| + |\sphericalangle(z_1, \mathbb{K}_{|z_1|}, \gamma)| \\ &\leq |\sphericalangle(z_1, \Gamma_{n+k,0}^{s_0}, \mathbb{K}_{|z_1|})| + |\sphericalangle(z_0, \mathbb{K}_{|z_0|}, \Gamma_{n+k+1,0}^{s_1})| + \left| \arg \left( \frac{z_1 f'(z_1)}{f(z_1)} \right) \right|. \end{aligned}$$

Es gilt für  $z \in \Gamma_{n+k,1}$

$$\left| \arg \left( \frac{zf'(z)}{f(z)} \right) \right| < \varepsilon_{n+k},$$

und es gilt

$$|\sphericalangle(z, \Gamma_{n+k,0}^{s_0}, \mathbb{K}_{|z|})| \leq \theta_{n+k} \quad \text{sowie} \quad |\sphericalangle(z', \mathbb{K}_{|z'|}, \Gamma_{n+k+1,0}^{s_1})| \leq \theta_{n+k+1}$$

für alle  $z \in \text{Spur}(\Gamma_{n+k,0}^{s_0})$  und alle  $z' \in \text{Spur}(\Gamma_{n+k+1,0}^{s_1})$ . Damit gilt

$$|\sphericalangle(z_1, \Gamma_{n+k,0}^{s_0}, \gamma)| < \theta_{n+k} + \theta_{n+k+1} + \varepsilon_{n+k}.$$

□

Seien  $k \in \mathbb{N}$ ,  $s_k \in [0, 1]$  und  $z \in \text{Spur}(\Gamma_{n,k}^{s_k})$ . Dann existieren  $s_0, \dots, s_{k-1} \in [0, 1]$  mit  $z \in \text{Spur}(\Gamma_{n,j}^{s_j})$  für alle  $j \in \{0, \dots, k-1\}$ .

Dann gilt nach Lemma 3.3.3

$$\begin{aligned}
|\langle (z, \mathbb{K}_{|z|}, \Gamma_{n,k}^{s_k}) \rangle| &= |\langle (z, \mathbb{K}_{|z|}, \Gamma_{n,0}^{s_0}) \rangle + \langle (z, \Gamma_{n,0}^{s_0}, \Gamma_{n,k}^{s_k}) \rangle| \\
&= \left| \langle (z, \mathbb{K}_{|z|}, \Gamma_{n,0}^{s_0}) \rangle + \sum_{j=0}^{k-1} \langle (z, \Gamma_{n,j}^{s_j}, \Gamma_{n,j+1}^{s_{j+1}}) \rangle \right| \\
&\leq |\langle (z, \mathbb{K}_{|z|}, \Gamma_{n,0}^{s_0}) \rangle| + \sum_{j=0}^{k-1} |\langle (z, \Gamma_{n,j}^{s_j}, \Gamma_{n,j+1}^{s_{j+1}}) \rangle| \\
&\leq \theta_n + \sum_{j=0}^{k-1} (\theta_{n+j} + \theta_{n+j+1} + \varepsilon_{n+j}).
\end{aligned}$$

Da die Folgen  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  summierbar sind, gilt insbesondere

$$\theta_n + \sum_{j=0}^{k-1} (\theta_{n+j} + \theta_{n+j+1} + \varepsilon_{n+j}) \leq \theta_n + \sum_{j=0}^{\infty} (\theta_{n+j} + \theta_{n+j+1} + \varepsilon_{n+j}) < \frac{\pi}{4},$$

falls  $n$  groß genug ist. Demnach können wir auch die Kurven  $\Gamma_{n,k}^s$  für alle  $s \in [0, 1]$  und  $k \in \mathbb{N}$  über das Argument parametrisieren, das heißt,  $\Gamma_{n,k}^s : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$\Gamma_{n,k}^s(t) = \text{Spur}(\Gamma_{n,k}^s) \cap R(t),$$

sofern  $n$  genügend groß ist. Dann existiert für jedes  $s \in [0, 1]$  eine Folge von Funktionen  $r_{n,k}^s : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  mit  $\Gamma_{n,k}^s(t) = r_{n,k}^s(t) \cdot e^{it}$ . Alle  $r_{n,k}^s$  sind dann stetig differenzierbar, da die  $\Gamma_{n,k}^s$  stetig differenzierbare Jordankurven sind und der Übergang zur Polarkoordinatendarstellung die stetige Differenzierbarkeit erhält.

Es gilt  $\text{Spur}(\Gamma_{n,k}^0) = \text{Spur}(\gamma_{n,k}^0)$  und  $\text{Spur}(\Gamma_{n,k}^1) = \text{Spur}(\gamma_{n,k}^\infty)$ . Nach Theorem 1 konvergieren  $\gamma_{n,k}^\infty$  und  $\gamma_{n,k}^0$  gleichmäßig gegen dieselbe Kurve  $\gamma_n$ . Weiter gilt nach Bemerkung 3.2.19

$$\text{dist}_H(\text{Spur}(\gamma_{n,k}^\infty), \text{Spur}(\gamma_n)) \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad \text{dist}_H(\text{Spur}(\gamma_{n,k}^0), \text{Spur}(\gamma_n)) \rightarrow 0$$

für  $k \rightarrow \infty$ . Demnach konvergiert die Folge  $(\Gamma_{n,k}^s)_{k \in \mathbb{N}}$  von glatten Jordankurven auch gleichmäßig für alle  $s \in [0, 1]$  gegen dieselbe Jordankurve  $\Gamma_n$  mit  $\Gamma_n : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  und  $\Gamma_n(t) = \text{Spur}(\Gamma_n) \cap R(t)$  sowie  $\text{Spur}(\Gamma_n) = \text{Spur}(\gamma_n)$ . Das heißt, es existiert eine stetige Funktion  $r_n(t) : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  mit  $\Gamma_n(t) = r_n(t) \cdot e^{it}$  und die Folge  $(r_{n,k}^s)_{k \in \mathbb{N}}$  konvergiert unabhängig von  $s$  gleichmäßig gegen  $r_n$ .

Nach obiger Überlegung gilt für großes  $n \in \mathbb{N}$

$$|\langle (z, \mathbb{K}_{|z|}, \Gamma_{n,k}^s) \rangle| \leq \frac{\pi}{4}$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$  und  $s \in [0, 1]$ . Damit folgt auch

$$|\langle (z, \mathbb{K}_{|z|}, \Gamma_n) \rangle| \leq \frac{\pi}{4}.$$

Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann gilt für  $t_1, t_2 \in [-\pi, \pi]$  mit  $|t_1 - t_2| < \varepsilon$

$$|\Gamma_n(t_1) - \Gamma_n(t_2)| \leq C\sqrt{2} \cdot \max_{t \in [-\pi, \pi]} r_n(t) \cdot |t_1 - t_2|$$

für eine Konstante  $C = C(\varepsilon)$ .

Seien  $t_1, t_2 \in [-\pi, \pi]$  mit  $|t_1 - t_2| \geq \varepsilon$ . Dann gilt

$$|\Gamma_n(t_1) - \Gamma_n(t_2)| \leq 2 \cdot \max_{t \in [-\pi, \pi]} r_n(t) \leq \frac{2}{\varepsilon} \cdot \max_{t \in [-\pi, \pi]} r_n(t) \cdot |t_1 - t_2|.$$

Insgesamt folgt dann

$$|\Gamma_n(t_1) - \Gamma_n(t_2)| \leq \max \left\{ \frac{2}{\varepsilon} \cdot \max_{t \in [-\pi, \pi]} r_n(t), C\sqrt{2} \cdot \max_{t \in [-\pi, \pi]} r_n(t) \right\} \cdot |t_1 - t_2|$$

für alle  $t_1, t_2 \in [-\pi, \pi]$ . Damit ist  $\Gamma_n$  Lipschitz-stetig und insbesondere nach Bemerkung 2.2.16 rektifizierbar. □

**Korollar 3.3.4** (Letztendlich große Ränder sind rektifizierbare Kurven) *Unter den Voraussetzungen von Theorem 2 ist jede letztendlich große Randkomponente  $Z$  von  $U$  eine rektifizierbare, geschlossene Kurve. Ist  $f^n(Z)$  eine große Randkomponente für ein großes  $n \in \mathbb{N}$  und enthält  $Z$  keine kritischen Punkte von  $f^n$ , so ist  $Z$  sogar eine rektifizierbare Jordankurve.*

*Beweis:* Nach Theorem 2 sind alle großen Ränder für großes  $n$  rektifizierbare Jordankurven. Mit Satz 3.2.1 folgt dann die Behauptung. □

**Bemerkung 3.3.5** (Glatte Ränder) Theorem 2 zeigt, dass mehrfach zusammenhängende wandernde Gebiete von rektifizierbaren Kurven berandet sein können. Es ist hierbei jedoch unklar, ob die Randkomponenten auch glatte Kurven sein können.

Bishop [Bis12] war der Erste, der für eine spezielle Familie von Funktionen mit wandernden Gebieten zeigen konnte, dass diese von rektifizierbaren Kurven berandet sind.



# Kapitel 4

## Beispiele

Das folgende Kapitel soll die in dieser Arbeit gezeigten Resultate anhand von Beispielen verdeutlichen. Wir betrachten verschiedene Familien von Funktionen mit mehrfach zusammenhängenden wandernden Gebieten. Das erste Beispiel ist eine von Baker angegebene Funktion, die zugleich das erste Beispiel einer ganzen Funktion mit einer mehrfach zusammenhängenden Fatoukomponente war. Allgemeiner betrachten wir eine von Bergweiler und Zheng untersuchte Familie von Funktionen, die das Beispiel von Baker als Spezialfall enthält. Das zweite ist eine Verallgemeinerung des ersten bekannten Beispiels mit unendlich-fachem Zusammenhang und das dritte eine Verallgemeinerung des ersten Beispiels von beliebiger Ordnung. Alle genannten Familien gehen auf Baker ([Bak63], [Bak76], [Bak85]) zurück. Das letzte Beispiel ist von Bishop [Bis12] und war Ausgangspunkt dieser Arbeit.

### 4.1 Das erste Beispiel eines wandernden Gebietes

Das folgende Beispiel wurde von Baker im Jahr 1963 in [Bak63] zum ersten Mal betrachtet. Seien  $r_1 > 1$  und  $C > 0$ , sodass  $C \cdot \exp\left(\frac{2}{r_1}\right) < \frac{1}{4}$  und  $C \cdot r_1 > 1$  gilt, zum Beispiel  $C = \frac{1}{4e}$  und  $r_1 > 4e$ . Sei weiter  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine positive reelle Folge, die der Rekursionsformel

$$r_{n+1} = Cr_n^2 \prod_{j \leq n} \left(1 + \frac{r_n}{r_j}\right)$$

genügt. Definiere dann die ganze transzendente Funktion  $f$  durch

$$f(z) = Cz^2 \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{r_j}\right).$$

Baker zeigte, dass die Funktion mehrfach zusammenhängende Teilmengen  $U_n$  von  $\mathcal{F}(f)$  besitzt, welche in der entkommenden Menge liegen und unter Iteration jeweils aufeinander abgebildet werden, das heißt,  $f(U_n) \subseteq U_{n+1}$ . Dies waren die ersten bekannten mehrfach zusammenhängenden Fatoukomponenten. Hierbei war jedoch nicht klar, ob die  $U_n$  alle

verschieden sind, oder nicht doch alle zu einer großen, mehrfach zusammenhängenden und unbeschränkten Fatoukomponente  $U$  gehören. Baker konnte 1976 in [Bak76] zeigen, dass alle  $U_n$  verschieden und damit mehrfach zusammenhängende wandernde Gebiete sind. Er zeigte in [Bak75] sogar, dass ganze transzendente Funktionen keine mehrfach zusammenhängenden und unbeschränkten Fatoukomponenten besitzen können. Sullivan bewies später, dass wandernde Gebiete für rationale Funktionen nicht auftreten können. Damit liefert der Klassifikationssatz für periodische Fatoukomponenten eine vollständige Beschreibung des Verhaltens von rationalen Funktionen auf ihrer Fatoumenge. Bakers Beispiel zeigt damit, dass das Verhalten von transzendenten Funktionen auf ihrer Fatoumenge komplizierter sein kann.

Wir wollen im Folgenden eine größere Familie von Funktionen betrachten, welche das Beispiel von Baker umfasst. Diese Familie wurde von Bergweiler und Zheng in [BZ11] eingeführt.

Sei  $N \in \mathbb{N}_0$ ,  $C \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  und  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine positive, reelle Folge mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{P_n} = 1$ . Sei  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine positive, reelle Folge, sodass  $r_{n+1} \geq 2r_n$  für alle großen  $n$  gilt, wobei

$$r_{n+1} = P_n r_n^N \prod_{j \leq n} \left(1 + \frac{r_n}{r_j}\right).$$

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine komplexe Folge mit  $|a_n| = r_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Definiere dann die ganze transzendente Funktion  $f$  durch

$$f(z) = Cz^N \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_j}\right).$$

**Bemerkung 4.1.1** (Bakers Beispiel) Diese Familie von Funktionen umfasst das erste Beispiel eines wandernden Gebietes von Baker (siehe [Bak63], [Bak76]). Dort gilt für die Parameter  $P_n = C$ ,  $a_n = -r_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $N = 2$ . Weiter gilt  $r_1 > 1$  und  $C > 0$ , sodass  $C \cdot \exp\left(\frac{2}{r_1}\right) < \frac{1}{4}$  und  $C \cdot r_1 > 1$ . Damit gilt in Bakers Beispiel  $\lim_{n \rightarrow \infty} nP_n = \infty$ .

**Bemerkung 4.1.2** (Bekannte Eigenschaften) Die oben beschriebene Familie von Funktionen wurde von Bergweiler und Zheng in [BZ11] genauer untersucht. Sie haben verschiedene Eigenschaften für diese Familie bewiesen:

(i) Ist  $n$  groß, so gilt  $r_{n+1} \geq 2^n r_n$ .

(ii) Es existieren ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  und eine positive, reelle Nullfolge  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , sodass

$$f(\mathbb{A}((1 + \varepsilon_n)r_n, (1 - \varepsilon_{n+1})r_{n+1})) \subseteq \mathbb{A}((1 + \varepsilon_{n+1})r_{n+1}, (1 - \varepsilon_{n+2})r_{n+2})$$

für alle  $n \geq n_0$  gilt (vgl. [BZ11, (1.9)]).

Wir definieren für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} A_n &:= \overline{\mathbb{A}}((1 - \varepsilon_n)r_n, (1 + \varepsilon_n)r_n) \\ B_n &:= \mathbb{A}((1 + \varepsilon_n)r_n, (1 - \varepsilon_{n+1})r_{n+1}). \end{aligned}$$

Es gilt  $f(z) \in B_{n+1}$  für  $|z| = (1 + \varepsilon_n)r_n$  und für  $|z| = (1 - \varepsilon_{n+1})r_{n+1}$  (vgl. [BZ11, (4.5)–(4.8)]).

Damit gilt  $A_{n+1} \subset f(A_n)$  und  $f(B_n) \subset B_{n+1}$ .

Wir bezeichnen für  $n \geq n_0$  mit  $U_n$  die Fatoukomponente, die  $B_n$  enthält.  $U_n$  ist ein mehrfach zusammenhängendes wanderndes Gebiet.

(iii) Ist  $n$  groß, so hat  $f$  in  $\overline{\mathbb{A}}(\sqrt{r_n r_{n-1}}, \sqrt{r_{n+1} r_n})$  genau einen kritischen Punkt, den wir  $c_n$  nennen. Außerdem gilt

$$c_n = \left(1 - \frac{1}{n + N + \delta_n}\right) a_n$$

für eine Nullfolge  $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (vgl. [BZ11, (4.9),(4.10)]).

(iv) Im Fall  $\liminf_{n \rightarrow \infty} nP_n > \frac{|C|}{2e}$  gilt  $f(c_n) \in B_n$  und im Fall  $\limsup_{n \rightarrow \infty} nP_n < \frac{|C|}{2e}$  gilt  $f(c_n) \in B_{n+1}$  für große  $n$  (vgl. [BZ11, (4.11),(4.12)]).

(v) Alle  $U_n$  sind unendlich-fach zusammenhängend, wenn

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} nP_n > \frac{|C|}{2e} \quad \text{oder} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} nP_n < \frac{|C|}{2e}$$

gilt (vgl. [BZ11, Theorem 1.2]).

(vi)  $\partial_0 U_n$  ist isoliert, falls  $\liminf_{n \rightarrow \infty} nP_n > \frac{|C|}{2e}$  gilt.

$\partial_\infty U_n$  ist isoliert, falls  $\limsup_{n \rightarrow \infty} nP_n < \frac{|C|}{2e}$  gilt.

$\partial_0 U_n$  und  $\partial_\infty U_n$  sind beide nicht isoliert, falls  $\liminf_{n \rightarrow \infty} nP_n < \frac{|C|}{2e} < \limsup_{n \rightarrow \infty} nP_n$  gilt (vgl. [BZ11, Remark 5.1]).

(vii) Sei  $c \geq 1$ . Dann gilt

$$|f(w \cdot a_n)| \sim |C| \cdot \frac{|w|^{n-1+N}|w-1|}{2P_n} r_{n+1}$$

gleichmäßig für  $\frac{1}{c} \leq |w| \leq c$  (vgl. [BZ11, (4.2)–(4.4)]).

(viii) Gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} nP_n > \frac{|C|}{2e} \quad \text{oder} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} nP_n = 0,$$

so ist  $\partial U_n$  nicht gleichmäßig perfekt für alle  $n$ . Gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} nP_n < \frac{|C|}{2e} \quad \text{oder} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} nP_n > 0,$$

so ist  $\partial U_n$  gleichmäßig perfekt für alle  $n$  (vgl. [BZ11, Theorem 1.2]).

In Bakers Beispiel gilt  $P_n = C$  und folglich  $\lim_{n \rightarrow \infty} nP_n = \infty$ . Damit ist der Rand in Bakers Beispiel nicht gleichmäßig perfekt.

**Satz 4.1.3** *Es gelte*

$$\text{Fall 1: } \liminf_{n \rightarrow \infty} nP_n > \frac{|C|e}{2} \quad \text{oder} \quad \text{Fall 2: } \limsup_{n \rightarrow \infty} nP_n < \frac{|C|}{2e}.$$

Dann sind für alle großen  $n$  alle großen Randkomponenten der  $U_n$  Jordankurven und es gilt  $\partial_\infty U_{n-1} = \partial_0 U_n$ .

**Bemerkung 4.1.4** (Isoliertheit der Ränder) In Satz 4.1.3 gilt

$$\text{Fall 1: } \liminf_{n \rightarrow \infty} nP_n > \frac{|C|e}{2} > \frac{|C|}{2e} \quad \text{oder} \quad \text{Fall 2: } \limsup_{n \rightarrow \infty} nP_n < \frac{|C|}{2e}.$$

Nach Bemerkung 4.1.2 (vi) ist dann  $\partial_0 U_n$  in Fall 1 isoliert und  $\partial_\infty U_n$  im Fall 2 isoliert. Nach Bemerkung 4.1.2 (v) sind in beiden Fällen die  $U_n$  unendlich-fach zusammenhängend. Damit ist  $\partial_\infty U_n$  im Fall 1 nicht isoliert und  $\partial_0 U_n$  in Fall 2 nicht isoliert.

Zusammengefasst gilt mit Satz 3.1.6:

$$\text{Fall 1: } ec(U^-) = 2, ec(U^+) = \infty \quad \text{und} \quad \text{Fall 2: } ec(U^-) = \infty, ec(U^+) = 2.$$

**Bemerkung 4.1.5** (Unklarer Bereich von  $nP_n$ ) Satz 4.1.3 liefert keine komplette Klärung der Situation. Es ist insbesondere nicht klar, ob die Aussage von Theorem 1 auch gelten kann, wenn

$$\frac{|C|}{2e} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} nP_n \leq \frac{|C|e}{2}$$

gilt. Zum Beispiel für  $C = 1$ ,  $P_n = \frac{1}{n}$  und  $a_n = r_n$ .

Es ist klar, dass Theorem 1 nicht in allen Fällen angewendet werden kann. Denn es sind zwei Beispiele mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} nP_n = \frac{|C|}{2e}$  aus dieser Familie bekannt, für die die Resultate von Theorem 1 nicht gelten können.

Das erste Beispiel von Kisaka und Shishikura ist das erste Beispiel für ein zweifach zusammenhängendes wanderndes Gebiet, siehe [KS08, Theorem B]. Hier sind die Parameter so gewählt, dass der einzige kritische Punkt  $c_n$  auf die Nullstelle  $a_{n+1}$  abgebildet wird (siehe auch [BZ11, Remark 4.1]). Auf diese Weise wird erreicht, dass keine kritischen Punkte innerhalb der mehrfach zusammenhängenden wandernden Gebiete sind. Folglich sind die mehrfach zusammenhängenden wandernden Gebiete nach Satz 2.8.13 und Bemerkung 2.8.15 letztendlich zweifach zusammenhängend. Damit kann Theorem 1 nach Bemerkung 3.2.9 nicht angewendet werden.

Dasselbe gilt für das zweite Beispiel von Bergweiler, siehe [Ber11]. Hier werden die Parameter so gewählt, dass der kritische Punkt  $c_n$  auf  $c_{n+1}$  abgebildet wird. Hierdurch wird eine Folge von einfach zusammenhängenden wandernden Gebieten erzeugt, in denen die kritischen Punkte liegen. Demnach sind auch in diesem Beispiel die mehrfach zusammenhängenden wandernden Gebiete nach Satz 2.8.13 und Bemerkung 2.8.15 letztendlich zweifach zusammenhängend. Insbesondere liegen die einfach zusammenhängenden wandernden Gebiete „zwischen“ jeweils zwei verschiedenen mehrfach zusammenhängenden wandernden Gebieten.



Beide Beispiele werden mittels quasikonformer Chirurgie konstruiert und nicht über die oben beschriebene Variation der Parameter. Jedoch entsprechen die Eigenschaften der Beispiele genau dem eben Beschriebenen. Für mehr über quasikonforme Chirurgie siehe [BF14].

**Beweis von Satz 4.1.3:** Wir wollen Korollar 3.2.11 anwenden und prüfen im Folgenden die einzelnen Voraussetzungen. Es gilt

$$\text{Fall 1 : } \liminf_{n \rightarrow \infty} nP_n > \frac{|C|e}{2} \quad \text{oder} \quad \text{Fall 2 : } \limsup_{n \rightarrow \infty} nP_n < \frac{|C|}{2e}.$$

Damit existiert ein  $\delta > 1$ , sodass

$$\text{Fall 1 : } nP_n > \frac{|C|e^\delta \delta^2}{2} \quad \text{oder} \quad \text{Fall 2 : } nP_n < \frac{|C|\sqrt{\delta}}{2e^\delta} \tag{4.1.1}$$

für alle großen  $n$  gilt. Setze nun

$$\text{Fall 1 : } C_n := A_n = \overline{A}((1 - \varepsilon_n)r_n, (1 + \varepsilon_n)r_n)$$

$$\text{Fall 2 : } C_n := \overline{A}\left((1 - \varepsilon_n)r_n, \left(1 - \frac{\delta}{n}\right)r_n\right).$$

Im späteren Verlauf zeigen wir, dass  $C_n \neq \emptyset$  im Fall 2 gilt. Damit ist die Voraussetzung (i) von Korollar 3.2.11 mit  $\alpha := \frac{1}{2}$  und  $\beta := \frac{3}{2}$  für genügend großes  $n$  erfüllt, da dann  $\varepsilon_n < \frac{1}{2}$  gilt.

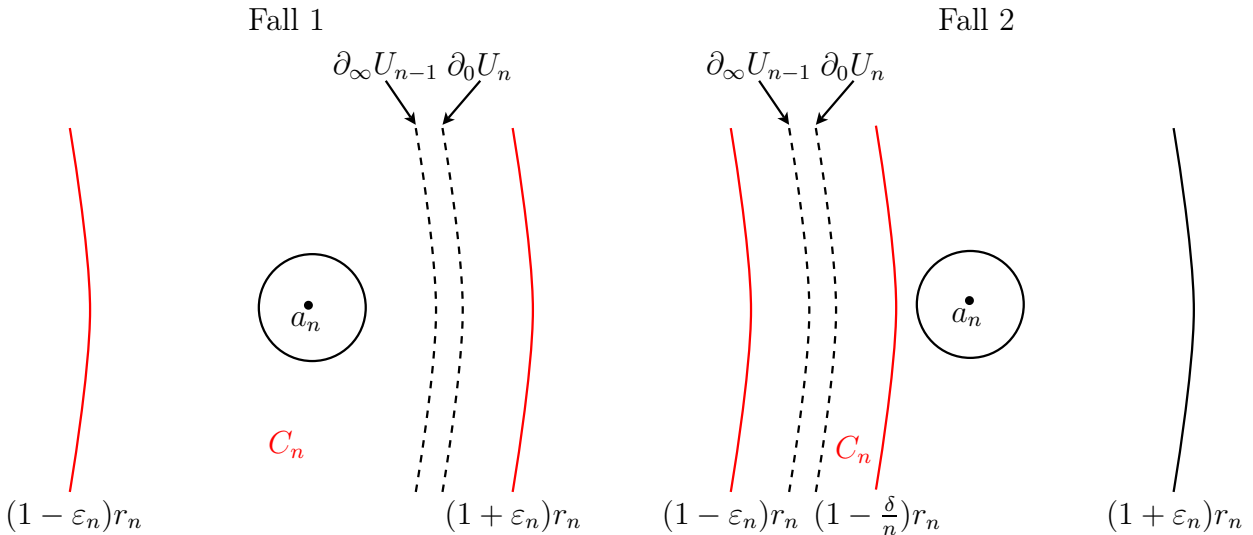


Abbildung 4.1: Darstellung der  $C_n$  in beiden Fällen. Wir werden später sehen, dass die angrenzenden großen Ränder gleich sind, und dass die Ränder im Verhältnis zu den Nullstellen so liegen, wie es hier dargestellt ist.

**Lemma 4.1.6** ( $C_{n+1} \subset f(C_n)$ ) Für genügend großes  $n$  gilt in beiden Fällen

$$C_{n+1} \subset f(C_n).$$

*Beweis:* Fall 1: Es gilt  $C_{n+1} \subset f(C_n)$  nach Bemerkung 4.1.2 (ii).

Fall 2: Es gilt  $f(z) \in B_n$  für  $|z| = (1 - \varepsilon_n)r_n$  nach Bemerkung 4.1.2 (ii) (genauer gilt dies nach [BZ11, (4.6)+(4.7)]). Wir wollen nun zeigen, dass  $f(z) \in B_{n+1}$  für  $|z| = (1 - \frac{\delta}{n})r_n$  gilt, um  $C_{n+1} \subset f(C_n)$  zu zeigen.

Sei  $\varepsilon > 0$  mit  $(1 + \varepsilon)^2 = \sqrt{\delta}$ . Dann gilt nach (4.1.1) Fall 2

$$nP_n < \frac{1}{(1 + \varepsilon)^2} \frac{|C|\delta}{2e^\delta}$$

für alle großen  $n$ . Sei  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| = (1 - \frac{\delta}{n})r_n$ . Folglich gilt  $z = e^{it}(1 - \frac{\delta}{n})a_n$  für ein  $t \in \mathbb{R}$ . Mit Bemerkung 4.1.2 (vii) folgt für alle großen  $n$

$$\begin{aligned} |f(z)| &\geq (1 - o(1)) \cdot \frac{|C| \cdot \left| e^{it} \left(1 - \frac{\delta}{n}\right)^{n-1+N} \right| \cdot \left| e^{it} \left(1 - \frac{\delta}{n}\right) - 1 \right|}{2P_n} r_{n+1} \\ &\geq (1 - o(1)) \cdot \frac{|C| \left(1 - \frac{\delta}{n}\right)^{n-1+N} \delta}{2nP_n} r_{n+1} \\ &\geq (1 - o(1)) \cdot \frac{|C|\delta}{2nP_n e^\delta} r_{n+1} \\ &> (1 - o(1)) \cdot (1 + \varepsilon)^2 r_{n+1} \\ &\geq (1 + \varepsilon)r_{n+1}. \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Ist  $n$  groß genug, so gilt  $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon$ . Damit folgt  $|f(z)| > (1 + \varepsilon_{n+1})r_{n+1}$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| = (1 - \frac{\delta}{n})r_n$ . Also gilt  $f(z) \in B_{n+1}$  für  $|z| = (1 - \frac{\delta}{n})r_n$  und somit  $C_{n+1} \subset f(C_n)$ .  $\square$

Damit ist (ii) in beiden Fällen erfüllt. Aus (4.1.2), Bemerkung 4.1.2 (ii) und dem Maximumprinzip folgt, dass  $1 - \varepsilon_n < 1 - \frac{\delta}{n}$  gelten muss. Damit gilt  $C_n \neq \emptyset$  im Fall 2.

**Lemma 4.1.7** (Die Ränder von  $C_n$ ) *Für genügend großes  $n$  gilt in beiden Fällen*

$$\partial_0 C_n \subset U_{n-1} \quad \text{und} \quad \partial_\infty C_n \subset U_n.$$

*Beweis:* Die folgenden Aussagen gelten nur für genügend großes  $n$ . Nach Bemerkung 4.1.2 (ii) gilt in beiden Fällen  $f(\partial_0 C_n) \subset B_n$ . Damit folgt in beiden Fällen  $\partial_0 C_n \subset U_{n-1}$ . Nach Bemerkung 4.1.2 (ii) gilt in Fall 1 ebenso  $f(\partial_\infty C_n) \subset B_{n+1}$  und damit  $\partial_\infty C_n \subset U_n$ . Es verbleibt  $f(\partial_\infty C_n) \subset B_{n+1}$  im Fall 2 zu zeigen, um  $\partial_\infty C_n \subset U_n$  auch im Fall 2 zu erhalten. Nach Bemerkung 4.1.2 (ii) gilt  $|f(z)| < (1 - \varepsilon_{n+2})r_{n+2}$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| = (1 + \varepsilon_n)r_n$ . Mithilfe des Maximumprinzips folgt dann  $|f(z)| < (1 - \varepsilon_{n+2})r_{n+2}$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| = (1 - \frac{\delta}{n})r_n$ . Nach (4.1.2) gilt außerdem  $|f(z)| > (1 + \varepsilon_{n+1})r_{n+1}$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| = (1 - \frac{\delta}{n})r_n$ . Damit gilt  $f(\partial_\infty C_n) \subset B_{n+1}$  und somit  $\partial_\infty C_n \subset U_n$  auch im Fall 2.  $\square$

Damit ist die Voraussetzung (iii) erfüllt. Es verbleibt, (iv) und (v) zu zeigen.

**Lemma 4.1.8** (Abstand zu  $a_n$ ) *In beiden Fällen gilt für genügend großes  $n$*

$$|z - a_n| \geq \frac{\delta}{n} r_n$$

für alle  $z \in f^{-1}(C_{n+1}) \cap C_n$ .

*Beweis:* Fall 1: Wir zeigen, dass  $f(z) \notin C_{n+1}$  für alle  $z \in \overline{B}(a_n, \frac{\delta}{n}r_n)$  gilt. Sei  $\varepsilon > 0$  mit  $(1 - \varepsilon)^2 = \frac{1}{\delta}$ . Dann gilt nach (4.1.1) Fall 1

$$nP_n > \frac{1}{(1 - \varepsilon)^2} \frac{|C|e^{\delta}\delta}{2}$$

für alle großen  $n$ . Sei  $z \in \mathbb{C}$  mit  $z = (1 + \frac{w}{n})a_n$  für ein  $w \in \mathbb{C}$  mit  $|w| \leq \delta$ . Mit Bemerkung 4.1.2 (vii) folgt dann für alle großen  $n$

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq (1 + o(1)) \cdot \frac{|C| \left|1 + \frac{w}{n}\right|^{n-1+N} \left|\left(1 + \frac{w}{n}\right) - 1\right|}{2P_n} r_{n+1} \\ &\leq (1 + o(1)) \cdot \frac{|C| \left(1 + \frac{\delta}{n}\right)^{n-1+N} \delta}{2nP_n} r_{n+1} \\ &\leq (1 + o(1)) \cdot \frac{|C|e^{\delta}\delta}{2nP_n} r_{n+1} \\ &< (1 + o(1)) \cdot (1 - \varepsilon)^2 r_{n+1} \\ &\leq (1 - \varepsilon)r_{n+1}. \end{aligned}$$

Für  $n$  groß genug gilt  $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon$  und damit folgt mit dem Maximumprinzip  $f(z) \notin C_{n+1}$  für alle  $z \in \overline{B}(a_n, \frac{\delta}{n}r_n)$ .

Fall 2: Nach der Definition von  $C_n$  gilt  $|z - a_n| \geq \frac{\delta}{n}r_n$  für alle  $z \in \mathbb{C}_n$ .  $\square$

**Lemma 4.1.9** (Approximation der logarithmischen Ableitung) *Es existiert eine summierbare Folge  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , sodass*

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - (n - 1 + N) - \frac{z}{z - a_n} \right| \leq \tau_n$$

für alle  $z \in D_n := \overline{\mathbb{A}}(\sqrt{r_{n-1}r_n}, \sqrt{r_n r_{n+1}})$  gilt.

*Beweis:* Sei  $z \in D_n$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - (n - 1 + N) - \frac{z}{z - a_n} \right| &= \left| z \cdot (\log(f))'(z) - (n - 1 + N) - \frac{z}{z - a_n} \right| \\ &= \left| z \left( \frac{N}{z} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{-\frac{1}{a_j}}{1 - \frac{z}{a_j}} \right) - (n - 1 + N) - \frac{z}{z - a_n} \right| \\ &= \left| \sum_{j < n} \left( \frac{z}{z - a_j} - 1 \right) + \sum_{j > n} \frac{z}{z - a_j} \right| \\ &= \left| \sum_{j < n} \frac{a_j}{z - a_j} + \sum_{j > n} \frac{z}{z - a_j} \right| \\ &\leq \sum_{j < n} \frac{r_j}{|z| - r_j} + \sum_{j > n} \frac{|z|}{r_j - |z|}. \end{aligned}$$

Für große  $n$  gilt  $r_{n+1} \geq 4r_n$ . Damit gilt  $2r_j \leq \sqrt{r_{n-1}r_n}$  für  $j < n$  und  $2r_j \geq \sqrt{r_n r_{n+1}}$  für  $j > n$ . Also folgt

$$\sum_{j < n} \frac{r_j}{|z| - r_j} + \sum_{j > n} \frac{|z|}{r_j - |z|} \leq \sum_{j < n} \frac{2r_j}{|z|} + \sum_{j > n} \frac{2|z|}{r_j}.$$

Die  $r_n$  wurden so gewählt, dass  $r_{n+1} \geq 2r_n$  für alle  $n$  gilt. Damit gilt

$$\sum_{j < n} \frac{2r_j}{|z|} + \sum_{j > n} \frac{2|z|}{r_j} \leq \frac{2}{|z|} \cdot \sum_{j < n} 2^{-j+1} r_{n-1} + 2|z| \cdot \sum_{j > n} 2^{-j+1} r_{n+1}^{-1} \leq 4 \cdot \frac{r_{n-1}}{|z|} + 4 \cdot \frac{|z|}{r_{n+1}}.$$

Da  $z \in D_n = \overline{\mathbb{A}}(\sqrt{r_{n-1}r_n}, \sqrt{r_n r_{n+1}})$ , folgt

$$4 \cdot \frac{r_{n-1}}{|z|} + 4 \cdot \frac{|z|}{r_{n+1}} \leq 4 \cdot \frac{r_{n-1}}{\sqrt{r_{n-1}r_n}} + 4 \cdot \frac{\sqrt{r_n r_{n+1}}}{r_{n+1}} = 4 \left( \sqrt{\frac{r_{n-1}}{r_n}} + \sqrt{\frac{r_n}{r_{n+1}}} \right).$$

Mit Bemerkung 4.1.2 (i) gilt  $r_{n+1} \geq 2^n r_n$  für große  $n$ . Damit gilt

$$4 \left( \sqrt{\frac{r_{n-1}}{r_n}} + \sqrt{\frac{r_n}{r_{n+1}}} \right) \leq 4 \left( \sqrt{\frac{r_{n-1}}{2^{n-1}r_{n-1}}} + \sqrt{\frac{r_n}{2^n r_n}} \right) \leq 12 \cdot 2^{-\frac{n}{2}}.$$

Da  $\tau_n := 12 \cdot 2^{-\frac{n}{2}}$  summierbar ist, folgt die Behauptung.  $\square$

**Lemma 4.1.10** (Abschätzungen für die logarithmische Ableitung) *Für genügend großes  $n$  gilt in beiden Fällen*

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \geq 4 \quad \text{und} \quad \left| \arg \left( \frac{zf'(z)}{f(z)} \right) \right| < \frac{\pi}{2}$$

für alle  $z \in f^{-1}(C_{n+1}) \cap C_n$ .

*Beweis:* Es genügt,  $\operatorname{Re} \left( \frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > 0$  zu zeigen, um  $\left| \arg \left( \frac{zf'(z)}{f(z)} \right) \right| < \frac{\pi}{2}$  zu erhalten. Außerdem gilt  $|z| \geq \operatorname{Re}(z)$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Daher genügt es

$$\operatorname{Re} \left( \frac{zf'(z)}{f(z)} \right) \geq 4$$

zu zeigen, um die Behauptung zu erhalten. Sei  $z \in f^{-1}(C_{n+1}) \cap C_n$ . Dann gilt in beiden Fällen  $|z| \leq (1 + \varepsilon_n)r_n$ . Mit Lemma 4.1.8 folgt

$$\left| \frac{z}{z - a_n} \right| \leq \frac{(1 + \varepsilon_n)r_n}{\left(\frac{\delta}{n}\right)r_n} = n \cdot \frac{1 + \varepsilon_n}{\delta}.$$

Dann gilt mit Lemma 4.1.9

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left( \frac{zf'(z)}{f(z)} \right) &\geq (n - 1 + N) - \left| \frac{z}{z - a_n} \right| - \tau_n \\ &\geq (n - 1 + N) - n \cdot \frac{1 + \varepsilon_n}{\delta} - \tau_n \\ &= n \left( 1 - \frac{1 + \varepsilon_n}{\delta} \right) - 1 + N - \tau_n \\ &\geq 4, \end{aligned}$$

falls  $n$  groß genug ist, denn es gilt  $\frac{1 + \varepsilon_n}{\delta} < 1$  für großes  $n$ .  $\square$

Setze  $m := 4$ , dann gilt  $4 \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{4}{3} > 1$ . Nach Lemma 4.1.10 sind damit die Voraussetzungen (iv) und (v) von Korollar 3.2.11 für die  $U_n$  erfüllt, falls  $n$  groß genug ist. Die Behauptung folgt dann mit Korollar 3.2.11.  $\square$

**Korollar 4.1.11** (Letztendlich große Randkomponenten) *Jede letztendlich große Randkomponente  $Z$ , welche zum großen Orbit der  $U_n$  gehört, ist eine geschlossene Kurve. Ist  $f^n(Z)$  eine große Randkomponente für ein großes  $n \in \mathbb{N}$  und enthält  $Z$  keine kritischen Punkte von  $f^n$ , so ist  $Z$  sogar eine Jordankurve. Ist  $Z$  eine letztendlich große Randkomponente von  $U_n$  für ein großes  $n$ , so ist  $Z$  eine Jordankurve.*

*Beweis:* Die Aussage folgt direkt aus Korollar 3.2.21 und Bemerkung 4.1.2 (iii)+(iv).  $\square$

**Korollar 4.1.12** (Im Fall 1 sind alle Randkomponenten Kurven) *Im Fall 1 sind alle wandernden Gebiete, welche zum großen Orbit der  $U_n$  gehören, von abzählbar vielen geschlossenen Kurven berandet. Ist  $n$  groß genug, so ist  $U_n$  von abzählbar vielen Jordankurven berandet.*

*Beweis:* Nach Bemerkung 4.1.4 ist  $\partial_0 U_n$  im Fall 1 isoliert und damit 2 der letztendliche innere Zusammenhang der  $U_n$  nach Satz 3.1.6. Damit folgt die Behauptung mit Korollar 3.2.21 und 3.2.22.  $\square$

**Korollar 4.1.13** (Beispiel ohne eine große, isolierte Randkomponente) *Besitzt  $(nP_n)_{n \in \mathbb{N}}$  keinen Häufungspunkt in  $\left[\frac{|C|}{2e}, \frac{|C|e}{2}\right]$ , aber je mindestens einen in  $\left[0, \frac{|C|}{2e}\right)$  und  $\left(\frac{|C|e}{2}, \infty\right]$ , so sind für alle großen  $n$  alle großen Randkomponenten der  $U_n$  Jordankurven und es gilt  $\partial_\infty U_{n-1} = \partial_0 U_n$ . In diesem Fall ist dann weder  $\partial_0 U_n$  noch  $\partial_\infty U_n$  isoliert.*

*Beweis:* Nach Bemerkung 4.1.2 (vi) ist weder  $\partial_0 U_n$  noch  $\partial_\infty U_n$  isoliert. Der Beweis verläuft analog zu dem Beweis von Satz 4.1.3 mit einer wechselnden Definition der  $C_n$  zwischen Fall 1 und 2.  $\square$

## 4.2 Beispiel unendlich-fachen Zusammenhangs

Das folgende Beispiel wurde von Baker 1985 in der Arbeit [Bak85] betrachtet.

Sei  $0 < C < \frac{1}{4e^2}$ ,  $r_1 > 1$  und  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $2^{n_0-1}C > 2r_1$ . Außerdem sei  $r_{n+1}$  für alle  $1 \leq n < n_0$  so definiert, dass  $r_{n+1} > 2r_n$  gilt. Sei weiter  $r_{n+1}$  für  $n \geq n_0$  wie folgt definiert

$$r_{n+1} = C^2 \prod_{j \leq n} \left(1 + \frac{r_n}{r_j}\right)^2.$$

Definiere die ganze transzendente Funktion  $f$  durch

$$f(z) = C^2 \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{r_j}\right)^2.$$

Baker zeigte, dass die Funktion unendlich-fach zusammenhängende wandernde Gebiete  $U_n$  besitzt. Zu diesem Zeitpunkt war es das erste Beispiel mit dieser Eigenschaft. Allerdings zeigten Bergweiler und Zheng [BZ11], dass Bakers erstes Beispiel eines mehrfach zusammenhängenden wandernden Gebietes ebenfalls unendlich-fach zusammenhängend ist.

Wir wollen im Folgenden eine leichte Verallgemeinerung von Bakers Beispiel betrachten. Seien  $k \in \mathbb{N}_{>1}$ ,  $C > 0$ ,  $r_1 > 1$  und  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $2^{n_0-1}C > 2r_1$ . Außerdem sei  $r_{n+1}$  für alle  $1 \leq n < n_0$  so definiert, dass  $r_{n+1} > 2r_n$  gilt. Sei weiter  $r_{n+1}$  für  $n \geq n_0$  wie folgt definiert

$$r_{n+1} = C^k \prod_{j \leq n} \left(1 + \frac{r_n}{r_j}\right)^k = 2^k C^k \prod_{j < n} \left(1 + \frac{r_n}{r_j}\right)^k.$$

Definiere die ganze transzendente Funktion  $f$  durch

$$f(z) = C^k \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{r_j}\right)^k.$$

Sei  $\frac{1}{2} < \delta < 1$ . Setze für alle  $n \geq n_0$

$$B_n := \mathbb{A} \left(2r_n, \left(1 - \frac{\delta}{n}\right) r_{n+1}\right).$$

Wir werden zeigen, dass  $f(B_n) \subseteq B_{n+1}$  gilt. Wir bezeichnen mit  $U_n$  die Fatoukomponente, die  $B_n$  enthält. Damit sind die  $U_n$  nach Korollar 2.8.6 mehrfach zusammenhängende wandernde Gebiete.

**Satz 4.2.1** *Alle wandernden Gebiete, welche zum großen Orbit der  $U_n$  gehören, sind von abzählbar vielen geschlossenen Kurven berandet. Für alle großen  $n$  sind alle Randkomponenten der  $U_n$  Jordankurven und es gilt  $\partial_{\infty} U_{n-1} = \partial_0 U_n$ .*

**Bemerkung 4.2.2** (Allgemeinere Klasse möglich) Generell könnten wir auch die  $r_n$  ähnlich wie in 4.1 wählen. Dadurch wäre es möglich, wandernde Gebiete mit unendlich-fachem letztendlichem inneren Zusammenhang zu erzeugen.

**Beweis von Satz 4.2.1:** Wir wollen Korollar 3.2.11 anwenden und prüfen im Folgenden die einzelnen Voraussetzungen. Setze für alle  $n \geq n_0$

$$C_n := \overline{\mathbb{A}} \left( \left(1 - \frac{\delta}{n}\right) r_n, 2r_n \right).$$

Damit ist die Voraussetzung (i) von Korollar 3.2.11 mit  $\alpha := \frac{1}{2}$  und  $\beta := 2$  für genügend großes  $n$  erfüllt, da dann  $\frac{\delta}{n} < \frac{1}{2}$  gilt (siehe Abbildung 4.2).

**Lemma 4.2.3** (Wachstum der  $r_n$ ) *Es gilt  $r_{n+1} > 2r_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und sogar  $r_{n+1} > 2^k r_n^k$  für  $n \geq n_0$ .*

*Beweis:* Es gilt  $r_{n+1} > 2r_n$  für alle  $n < n_0$ . Sei also  $n \geq n_0$ . Wir nehmen an, dass

$$r_n > 2r_{n-1} > 2^2 r_{n-2} > \dots > 2^{n-1} r_1$$

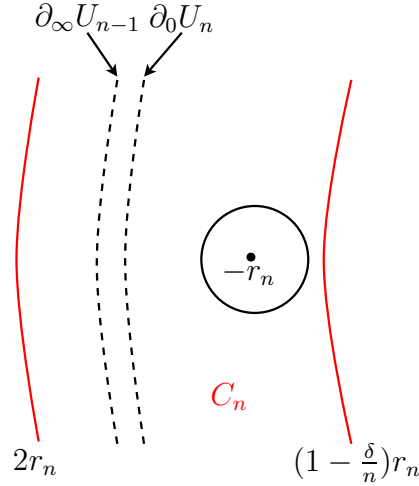


Abbildung 4.2: Die Wahl von  $C_n$ . Wir werden später sehen, dass die angrenzenden großen Ränder gleich sind, und dass die Ränder im Verhältnis zu den Nullstellen so liegen, wie es hier dargestellt ist. Das Bild entspricht Fall 1 von dem Beispiel in 4.1.

gilt. Mit  $2^{n_0-1}C > 2r_1$  gilt dann

$$\begin{aligned}
 r_{n+1} &= C^k \prod_{j=1}^n \left(1 + \frac{r_n}{r_j}\right)^k \\
 &= C^k \left(1 + \frac{r_n}{r_1}\right)^k \cdot \prod_{j=2}^n \left(1 + \frac{r_n}{r_j}\right)^k \\
 &> C^k \left(\frac{r_n}{r_1}\right)^k \cdot (2^k)^{n-1} \\
 &> \left(\frac{2^{n_0-1}C}{r_1}\right)^k \cdot r_n^k \\
 &> 2^k r_n^k.
 \end{aligned}$$

Damit gilt  $r_{n+1} > 2^k r_n^k$  für alle  $n \geq n_0$  und insbesondere  $r_{n+1} > 2r_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Lemma 4.2.4** (Abbildungsverhalten) *Sei  $c \geq 1$ . Dann gilt*

$$|f(w \cdot r_n)| \sim \frac{|w|^{kn-k}|1+w|^k}{2^k} r_{n+1}$$

gleichmäßig für  $\frac{1}{c} \leq |w| \leq c$ .

*Beweis:* Sei  $c \geq 1$  und  $\frac{1}{c} \leq |w| \leq c$ . Dann gilt

$$|f(w \cdot r_n)| = C^k \prod_{j=1}^{\infty} \left|1 + \frac{wr_n}{r_j}\right|^k = C^k \prod_{j < n} \left|1 + \frac{wr_n}{r_j}\right|^k \cdot |1+w|^k \cdot \prod_{j > n} \left|1 + \frac{wr_n}{r_j}\right|^k.$$

Es gilt für großes  $n \in \mathbb{N}$

$$\prod_{j > n} \left(1 - \frac{cr_n}{r_j}\right)^k \leq \prod_{j > n} \left|1 + \frac{wr_n}{r_j}\right|^k \leq \prod_{j > n} \left(1 + \frac{cr_n}{r_j}\right)^k.$$

Mit Lemma 4.2.3 gilt  $r_{n+1} > 2r_n^2$  und  $r_n \geq 2^n$  für  $n \geq n_0$ . Damit folgt

$$\prod_{j>n} \left(1 + \frac{cr_n}{r_j}\right)^k \leq \prod_{j>n} \left(1 + \frac{cr_n}{2^{j-n}r_n^2}\right)^k = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{c}{2^j r_n}\right)^k \leq \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{c}{2^{n+j}}\right)^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Ebenso gilt

$$\prod_{j>n} \left(1 - \frac{cr_n}{r_j}\right)^k \geq \prod_{j>n} \left(1 - \frac{cr_n}{2^{j-n}r_n^2}\right)^k = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{c}{2^j r_n}\right)^k \geq \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{c}{2^{n+j}}\right)^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Damit gilt

$$\prod_{j>n} \left|1 + \frac{wr_n}{r_j}\right|^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Mit  $r_{n+1} > 2^k r_n^k$  für  $n \geq n_0$  gilt außerdem

$$\prod_{j<n} \left|1 + \frac{wr_n}{r_j}\right|^k \sim \prod_{j<n} \left|\frac{wr_n}{r_j}\right|^k = |w|^{kn-k} \prod_{j<n} \left(\frac{r_n}{r_j}\right)^k \sim |w|^{kn-k} \prod_{j<n} \left(1 + \frac{r_n}{r_j}\right)^k$$

für genügend großes  $n \in \mathbb{N}$ . Insgesamt folgt damit

$$\begin{aligned} |f(w \cdot r_n)| &\sim C^k \prod_{j<n} \left|1 + \frac{wr_n}{r_j}\right|^k \cdot |1 + w|^k \\ &\sim |w|^{kn-k} |1 + w|^k C^k \prod_{j<n} \left(1 + \frac{r_n}{r_j}\right)^k \\ &= \frac{|w|^{kn-k} |1 + w|^k}{2^k} 2^k C^k \prod_{j<n} \left(1 + \frac{r_n}{r_j}\right)^k \\ &= \frac{|w|^{kn-k} |1 + w|^k}{2^k} r_{n+1} \end{aligned}$$

für genügend großes  $n \in \mathbb{N}$ . □

**Lemma 4.2.5** ( $f(B_n) \subset B_{n+1}$  und  $C_{n+1} \subset f(C_n)$ ) *Für alle großen  $n$  gilt*

$$f(B_n) \subset B_{n+1} \quad \text{und} \quad C_{n+1} \subset f(C_n).$$

*Beweis:* Wir zeigen, dass

$$\begin{aligned} \max_{|z|=(1-\frac{\delta}{n})r_n} |f(z)| &< \frac{1}{2}r_{n+1} \\ \min_{|z|=(1-\frac{\delta}{n})r_n} |f(z)| &> 2r_n \\ \min_{|z|=2r_n} |f(z)| &> 2r_{n+1} \end{aligned}$$

für alle großen  $n$  gilt. Mit Maximumprinzip folgt dann ebenso

$$\max_{|z|=2r_n} |f(z)| \leq \max_{|z|=(1-\frac{\delta}{n+1})r_{n+1}} |f(z)| < \frac{1}{2}r_{n+2}.$$



Da  $\frac{1}{2} < 1 - \frac{\delta}{n}$  für großes  $n$  gilt, folgt die Behauptung mit dem Minimum- und Maximumprinzip. Mit Lemma 4.2.4 folgt für genügend großes  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \max_{|z|=(1-\frac{\delta}{n})r_n} |f(z)| &= \left| f\left(\left(1 - \frac{\delta}{n}\right)r_n\right) \right| \\ &\leq (1 + o(1)) \frac{\left(1 - \frac{\delta}{n}\right)^{kn-k} \left(2 - \frac{\delta}{n}\right)^k}{2^k} r_{n+1} \\ &\leq (1 + o(1)) \frac{1}{e^{k\delta}} r_{n+1}. \end{aligned}$$

Es gilt  $k\delta > 1$ , da  $k \geq 2$  und  $\delta \geq \frac{1}{2}$  gilt. Damit gilt

$$\max_{|z|=(1-\frac{\delta}{n})r_n} |f(z)| < (1 + o(1)) \frac{1}{e} r_{n+1} < \frac{1}{2} r_{n+1}.$$

Es gilt für genügend großes  $n \in \mathbb{N}$  mit Lemma 4.2.4

$$\begin{aligned} \min_{|z|=(1-\frac{\delta}{n})r_n} |f(z)| &= \left| f\left(\left(\frac{\delta}{n} - 1\right)r_n\right) \right| \\ &\geq (1 - o(1)) \frac{\left|\frac{\delta}{n} - 1\right|^{kn-k} \left|\frac{\delta}{n}\right|^k}{2^k} r_{n+1} \\ &= (1 - o(1)) \frac{\left|1 - \frac{\delta}{n}\right|^{kn-k} \left|\frac{\delta}{n}\right|^k}{2^k} r_{n+1} \\ &\geq (1 - o(1)) \frac{\delta^k}{2^k e^{k\delta}} \frac{1}{n^k} r_{n+1}. \end{aligned}$$

Mit Lemma 4.2.3 folgt

$$\begin{aligned} \min_{|z|=(1-\frac{\delta}{n})r_n} |f(z)| &> (1 - o(1)) \frac{\delta^k}{2^k e^{k\delta}} \frac{1}{n^k} 2^k r_n^k \\ &= (1 - o(1)) \frac{\delta^k}{e^{k\delta}} \frac{r_n^{k-1}}{n^k} r_n \\ &> (1 - o(1)) \frac{\delta^k}{e^{k\delta}} \frac{(2^n)^{k-1}}{n^k} r_n \\ &> 2r_n. \end{aligned}$$

Weiter gilt für genügend großes  $n \in \mathbb{N}$  mit Lemma 4.2.4

$$\begin{aligned} \min_{|z|=2r_n} |f(z)| &= |f(-2r_n)| \\ &\geq (1 - o(1)) \frac{|-2|^{kn-k} |1 - 2|^k}{2^k} r_{n+1} \\ &= (1 - o(1)) \frac{2^{kn-k}}{2^k} r_{n+1} \\ &> 2r_{n+1}. \end{aligned}$$

□

Damit gilt (ii) für genügend großes  $n$ . Insbesondere gilt auch  $\partial_0 C_n \subset U_{n-1}$ ,  $\partial_\infty C_n \subset U_n$ , falls  $n$  genügend groß ist. Damit gilt (iii). Es verbleibt, (iv) und (v) zu zeigen.

Die folgenden Lemmata 4.2.6, 4.2.7 und 4.2.8 sind ähnlich zu den Lemmata 4.1.8, 4.1.9 und 4.1.10.

**Lemma 4.2.6** (Abstand zu  $-r_n$ ) *Es gilt für große  $n$*

$$|z + r_n| \geq \frac{4}{n} r_n$$

für alle  $z \in f^{-1}(C_{n+1}) \cap C_n$ .

*Beweis:* Wir zeigen, dass  $f(z) \notin C_{n+1}$  für alle  $z \in \overline{B}(-r_n, \frac{4}{n} r_n)$  gilt. Sei  $z \in \mathbb{C}$  mit  $z = (\frac{w}{n} - 1) r_n$  für ein  $w \in \mathbb{C}$  mit  $|w| \leq 4$ . Dann gilt mit Lemma 4.2.4 für genügend großes  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |f(z)| &= (1 + o(1)) \frac{|\frac{w}{n} - 1|^{kn-k} |1 + (\frac{w}{n} - 1)|^k}{2^k} \cdot r_{n+1} \\ &= (1 + o(1)) \frac{|\frac{w}{n} - 1|^{kn-k}}{2^k} \cdot \frac{|w|^k}{n^k} \cdot r_{n+1} \\ &\leq (1 + o(1)) \frac{(1 + \frac{4}{n})^{kn-k} 2^k}{n^k} \cdot r_{n+1} \\ &= (1 + o(1)) \frac{e^{4k} 2^k}{n^k} \cdot r_{n+1} \\ &< \frac{1}{2} r_{n+1}. \end{aligned}$$

□

**Lemma 4.2.7** (Approximation der logarithmischen Ableitung) *Es existiert eine summierbare Folge  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , sodass*

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - k(n-1) - \frac{kz}{z+r_n} \right| \leq \tau_n$$

für alle  $z \in D_n := \overline{\mathbb{A}}(\sqrt{r_{n-1}r_n}, \sqrt{r_n r_{n+1}})$  gilt.

*Beweis:* Sei  $z \in D_n$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}
\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - k(n-1) - \frac{kz}{z+r_n} \right| &= \left| z(\log(f))'(z) - k(n-1) - \frac{kz}{z+r_n} \right| \\
&= \left| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{k \frac{z}{r_j}}{1 + \frac{z}{r_j}} - k(n-1) - \frac{kz}{z+r_n} \right| \\
&= \left| \sum_{j<n} \frac{kz}{z+r_j} - k(n-1) + \sum_{j>n} \frac{kz}{r_j+z} \right| \\
&= k \cdot \left| \sum_{j<n} \left( \frac{z}{z+r_j} - 1 \right) + \sum_{j>n} \frac{z}{r_j+z} \right| \\
&= k \cdot \left| \sum_{j<n} \frac{-r_j}{z+r_j} + \sum_{j>n} \frac{z}{r_j+z} \right| \\
&\leq k \cdot \left( \sum_{j<n} \frac{r_j}{|z|-r_j} + \sum_{j>n} \frac{|z|}{r_j-|z|} \right).
\end{aligned}$$

Es gilt  $2r_j \leq \sqrt{r_{n-1}r_n}$  für  $j < n$  und  $2r_j \geq \sqrt{r_n r_{n+1}}$  für  $j > n$ . Damit folgt

$$\sum_{j<n} \frac{r_j}{|z|-r_j} + \sum_{j>n} \frac{|z|}{r_j-|z|} \leq \sum_{j<n} \frac{2r_j}{|z|} + \sum_{j>n} \frac{2|z|}{r_j}.$$

Nach Lemma 4.2.3 gilt  $r_{n+1} \geq 2r_n$  für alle  $n$ . Damit gilt

$$\sum_{j<n} \frac{2r_j}{|z|} + \sum_{j>n} \frac{2|z|}{r_j} \leq \frac{2}{|z|} \cdot \sum_{j<n} 2^{-j+1} r_{n-1} + 2|z| \cdot \sum_{j>n} 2^{-j+1} r_{n+1}^{-1} \leq 4 \cdot \frac{r_{n-1}}{|z|} + 4 \cdot \frac{|z|}{r_{n+1}}.$$

Da  $z \in D_n = \overline{\mathbb{A}}(\sqrt{r_{n-1}r_n}, \sqrt{r_n r_{n+1}})$ , folgt

$$4 \cdot \frac{r_{n-1}}{|z|} + 4 \cdot \frac{|z|}{r_{n+1}} \leq 4 \cdot \frac{r_{n-1}}{\sqrt{r_{n-1}r_n}} + 4 \cdot \frac{\sqrt{r_n r_{n+1}}}{r_{n+1}} = 4 \left( \sqrt{\frac{r_{n-1}}{r_n}} + \sqrt{\frac{r_n}{r_{n+1}}} \right).$$

Nach Lemma 4.2.3 gilt  $r_{n+1} \geq 2^k r_n^k$  für große  $n$ . Damit gilt

$$\sqrt{\frac{r_{n-1}}{r_n}} + \sqrt{\frac{r_n}{r_{n+1}}} \leq \sqrt{\frac{1}{2^k r_{n-1}^{k-1}}} + \sqrt{\frac{1}{2^k r_n^{k-1}}} \leq 2 \cdot 2^{-\frac{k}{2}} (r_{n-1})^{-\frac{k-1}{2}} \leq 2 \cdot 2^{-\frac{k}{2}} (2^{n-2})^{-\frac{k-1}{2}}.$$

Insgesamt folgt damit

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - k(n-1) - \frac{kz}{z+r_n} \right| \leq 8k \cdot 2^{-\frac{k}{2}} \cdot 2^{-\frac{(n-2)(k-1)}{2}}.$$

Da  $\tau_n := 8k \cdot 2^{-\frac{k}{2}} \cdot 2^{-\frac{(n-2)(k-1)}{2}}$  summierbar ist, folgt die Behauptung.  $\square$

**Lemma 4.2.8** (Abschätzungen für die logarithmische Ableitung) *Für genügend großes  $n$  gilt*

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \geq 5 \quad \text{und} \quad \left| \arg \left( \frac{zf'(z)}{f(z)} \right) \right| < \frac{\pi}{2}$$

für alle  $z \in f^{-1}(C_{n+1}) \cap C_n$ .

*Beweis:* Nach Bemerkung 3.2.11 genügt es  $\operatorname{Re} \left( \frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > 0$  zu zeigen, um  $\left| \arg \left( \frac{zf'(z)}{f(z)} \right) \right| < \frac{\pi}{2}$  zu erhalten. Außerdem gilt

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \geq \operatorname{Re} \left( \frac{zf'(z)}{f(z)} \right).$$

Daher genügt es

$$\operatorname{Re} \left( \frac{zf'(z)}{f(z)} \right) \geq 5$$

zu zeigen, um die Behauptung zu erhalten. Sei  $z \in f^{-1}(C_{n+1}) \cap C_n$ . Dann gilt  $|z| \leq 2r_n$ . Mit Lemma 4.2.6 folgt dann für genügend großes  $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{kz}{z + r_n} \right| \leq k \frac{2r_n}{\frac{1}{n}r_n} = \frac{kn}{2}.$$

Dann folgt mit Lemma 4.2.7

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left( \frac{zf'(z)}{f(z)} \right) &\geq k(n-1) - \left| \frac{kz}{z + r_n} \right| - \tau_n \\ &\geq kn - k - \frac{kn}{2} - \tau_n \\ &= \frac{k}{2}n - k - \tau_n. \end{aligned}$$

Damit gilt  $\operatorname{Re} \left( \frac{zf'(z)}{f(z)} \right) \geq 5$ , falls  $n$  groß genug ist.  $\square$

Setze  $m := 5$ , dann gilt  $4 \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{5}{4} > 1$ . Nach Lemma 4.2.8 sind damit die Voraussetzungen (iv) und (v) von Korollar 3.2.11 für die  $U_n$  erfüllt, falls  $n$  groß genug ist. Mit Korollar 3.2.11 gilt dann  $\partial_\infty U_{n-1} = \partial_0 U_n$ . Außerdem sind alle großen Randkomponenten von  $U_n$  Jordankurven für große  $n$ . Wir wollen nun zeigen, dass für großes  $n$  keine kritischen Punkte auf den Randkomponenten von  $U_n$  liegen. Außerdem zeigen wir, dass  $ec(U^-) = 2$  gilt.

**Lemma 4.2.9** (Kritische Punkte) *Für großes  $n$  hat  $f$  in  $D_n$  neben  $-r_n$  genau einen kritischen Punkt  $c_n$ . Für großes  $n$  existiert eine Nullfolge  $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ , sodass  $c_n$  die Form*

$$c_n = \left( \frac{1}{n - \frac{\delta_n}{k}} - 1 \right) r_n$$

hat.

*Beweis:* Sei  $\varphi : \mathbb{C} \setminus \{-r_n : n \in \mathbb{N}\} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = k \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{z + r_j}.$$

Dann gilt

$$\operatorname{Im}(\varphi(z)) = k \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{Im} \left( \frac{1}{z + r_j} \right) = k \sum_{j=1}^{\infty} \frac{-\operatorname{Im}(z)}{|z + r_j|^2} = -\operatorname{Im}(z) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{k}{|z + r_j|^2}.$$

Es folgt

$$\operatorname{Im}(\varphi(z)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Im}(z) = 0.$$

Außerdem ist  $\varphi(z) \neq 0$ , falls  $z \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Demnach sind alle Nullstellen von  $f'$  reell und negativ.

Setze

$$g(z) := \frac{zf'(z)}{f(z)} = k \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z}{z+r_j} \quad \text{und} \quad h(z) := k(n-1) + \frac{kz}{z+r_n} = k(n-1) + \frac{k}{1+\frac{r_n}{z}}.$$

Dann haben  $g$  und  $h$  in  $D_n$  genau einen einfachen Pol bei  $-r_n$ . Außerdem hat  $h$  in  $D_n$  genau eine einfache Nullstelle bei  $\frac{1-n}{n}r_n$ .

Es gilt

$$\min_{z \in \partial D_n} |h(z)| = \min \left\{ \min_{z \in \partial_{\infty} D_n} \left| k(n-1) + \frac{k}{1+\frac{r_n}{z}} \right|, \min_{z \in \partial_0 D_n} \left| k(n-1) + \frac{k}{1+\frac{r_n}{z}} \right| \right\}.$$

Es gilt mit Lemma 4.2.3 für genügend großes  $n$

$$\begin{aligned} \min_{z \in \partial_{\infty} D_n} \left| k(n-1) + \frac{k}{1+\frac{r_n}{z}} \right| &\geq k(n-1) - \max_{z \in \partial_{\infty} D_n} \left| \frac{k}{1+\frac{r_n}{z}} \right| \\ &\geq k(n-1) - \frac{k}{1 - \frac{r_n}{\sqrt{r_{n+1}r_n}}} \\ &= k(n-1) - \frac{k}{1 - \sqrt{\frac{r_n}{r_{n+1}}}} \\ &\geq k(n-1) - \frac{k}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \\ &\geq 2. \end{aligned}$$

Ebenso gilt mit Lemma 4.2.3 für genügend großes  $n$

$$\begin{aligned} \min_{z \in \partial_0 D_n} \left| k(n-1) + \frac{k}{1+\frac{r_n}{z}} \right| &\geq k(n-1) - \max_{z \in \partial_0 D_n} \left| \frac{k}{1+\frac{r_n}{z}} \right| \\ &\geq k(n-1) - \frac{k}{\frac{r_n}{\sqrt{r_{n-1}r_n}} - 1} \\ &= k(n-1) - \frac{k}{\sqrt{\frac{r_n}{r_{n-1}}} - 1} \\ &\geq k(n-1) - \frac{k}{\sqrt{2} - 1} \\ &\geq 2. \end{aligned}$$

Damit gilt  $\min_{z \in \partial D_n} |h(z)| \geq 2$ . Mit Lemma 4.2.7 gilt dann auch  $\min_{z \in \partial D_n} |g(z)| > 1$  für großes  $n$ , da dann  $\tau_n < 1$  gilt.

Also haben beide Funktionen keine Null- oder Polstellen auf  $\partial D_n$  für großes  $n$ . Mit Lemma 4.2.7 gilt dann für großes  $n$

$$|g(z) - h(z)| \leq \tau_n < \min_{z \in \partial D_n} |h(z)|.$$

Nach dem Satz von Rouché (Satz 2.3.6) ist die Differenz der Null- und Polstellen der Funktionen  $g$  und  $h$  in  $D_n$  gleich, vorausgesetzt,  $n$  ist groß genug. Damit hat  $g$  nur eine Nullstelle in  $D_n$  und  $f$  damit neben  $-r_n$  genau einen kritischen Punkt in  $D_n$ , den wir mit  $c_n$  bezeichnen.

Da die kritischen Punkte reell und nichtnegativ sind, erfüllt  $c_n$  nach Lemma 4.2.7 die Gleichung

$$k(n-1) + \frac{kc_n}{c_n + r_n} = \delta_n,$$

wobei  $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge in  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  ist. Dann gilt für genügend großes  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} 0 &= k(n-1) + \frac{kc_n}{c_n + r_n} - \delta_n \\ \Leftrightarrow 0 &= n - \frac{\delta_n}{k} - 1 + \frac{c_n}{c_n + r_n} \\ \Leftrightarrow 0 &= \left(n - \frac{\delta_n}{k} - 1\right)(c_n + r_n) + c_n \\ \Leftrightarrow 0 &= \left(n - \frac{\delta_n}{k} - 1\right)r_n + \left(n - \frac{\delta_n}{k}\right)c_n \\ \Leftrightarrow 0 &= \left(\frac{n - \frac{\delta_n}{k} - 1}{n - \frac{\delta_n}{k}}\right)r_n + c_n \\ \Leftrightarrow 0 &= \left(1 - \frac{1}{n - \frac{\delta_n}{k}}\right)r_n + c_n. \end{aligned}$$

Es folgt

$$c_n = \left(\frac{1}{n - \frac{\delta_n}{k}} - 1\right)r_n.$$

□

**Lemma 4.2.10** (Letztendlicher innerer Zusammenhang) *Alle  $U_n$  sind unendlich-fach zusammenhängend und es gilt  $ec(U^-) = 2$  und  $ec(U^+) = \infty$ .*

*Beweis:* Nach Lemma 4.2.9 sind die einzigen kritischen Punkte, die in  $U_n^-$  liegen können, die  $c_n$ , da  $-r_n$  eine Nullstelle ist und damit nicht in  $U_n$  liegt. Da  $\delta < 1$  ist, gilt  $c_n \in B_{n-1}$  für große  $n$  und damit  $c_n \in U_{n-1}^+$ . Mit Satz 2.8.18 folgt die Behauptung. □

Nach Lemma 4.2.9 sind die einzigen kritischen Punkte  $-r_n$  und  $c_n$ . Weiter ist  $-r_n$  eine Nullstelle und  $c_n$  liegt in  $B_{n-1}$ . Damit sind keine kritischen Punkte auf den Randkomponenten von  $U_n$ . Außerdem gilt  $ec(U^-) = 2$ . Damit sind nach Korollar 3.2.21 und Korollar

3.2.22 alle wandernden Gebiete, welche zum Orbit der  $U_n$  gehören, von abzählbar vielen geschlossenen Kurven berandet. Weiter sind dann für alle großen  $n$  alle Randkomponenten der  $U_n$  Jordankurven. Damit ist Satz 4.2.1 bewiesen.  $\square$

**Bemerkung 4.2.11** (Theorem 2 nicht anwendbar) Auch wenn man die Funktion so abändern würde, dass

$$f(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{r_j}\right)^{k_j}$$

gilt mit  $k_j \rightarrow \infty$  für  $j \rightarrow \infty$ , das heißt, die Vielfachheiten der Nullstellen zunehmen, kann man nicht erwarten, dass das Argument von  $\frac{zf'(z)}{f(z)}$  summierbar wird. Ein ähnliches Beispiel wurde in [BZ11, Theorem 1.3] untersucht.

### 4.3 Beispiel beliebiger Ordnung

Das folgende Beispiel wurde von Baker 1985 in der Arbeit [Bak85] betrachtet.

Seien  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge natürlicher Zahlen,  $0 < C < \frac{1}{4e^2}$ ,  $r_1 > 1$ . Sei weiter  $n_0 \in \mathbb{N}$  so gewählt, dass  $2^{n_0-1}C > 2r_1^{k_1}$  gilt. Außerdem sei  $r_{n+1}$  für alle  $1 \leq n < n_0$  so definiert, dass  $r_{n+1} > 2r_n$  gilt. Sei weiter  $r_{n+1}$  für  $n \geq n_0$  wie folgt definiert

$$r_{n+1} = C \prod_{j \leq n} \left(1 + \left(\frac{r_n}{r_j}\right)^{k_j}\right).$$

Definiere die ganze transzendente Funktion durch

$$f(z) = C \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{z}{r_j}\right)^{k_j}\right).$$

Baker zeigte, dass die Funktion ein mehrfach zusammenhängendes wanderndes Gebiet besitzt. Weiter zeigte er, dass für alle  $0 \leq \varrho \leq \infty$  die  $k_n$  so gewählt werden können, dass die Funktion Ordnung  $\varrho$  besitzt. Zu diesem Zeitpunkt war es das erste Beispiel mit dieser Eigenschaft, jedoch war bereits ein Beispiel mit Ordnung  $\varrho$  zwischen  $1 \leq \varrho \leq \infty$  bekannt, welches ein einfach zusammenhängendes wanderndes Gebiet besitzt (siehe [Bak84, Example 2]).

Wir wollen im Folgenden eine leicht abgewandelte Familie betrachten.

Sei  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge natürlicher Zahlen, sodass

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{k_n}$$

für alle  $|q| < 1$  konvergiert. Sei weiter  $C > 0$ ,  $r_1 > 1$ ,  $\delta \in [\frac{1}{2}, 2] \setminus \{1\}$  und  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $10^{n_0-2}C\delta^{k_1} > 20r_1^{k_1}$ . Außerdem sei  $r_{n+1}$  für alle  $1 \leq n < n_0$  so definiert, dass  $r_{n+1} > 20r_n$  gilt. Sei weiter  $r_{n+1}$  für  $n \geq n_0$  wie folgt definiert

$$r_{n+1} = C \prod_{j=1}^n \left(1 + \left(\frac{\delta r_n}{r_j}\right)^{k_j}\right).$$

Definiere die ganze transzendente Funktion durch

$$f(z) = C \prod_{j=1}^{\infty} \left( 1 + \left( \frac{z}{r_j} \right)^{k_j} \right).$$

Setze

$$A_n := \overline{\mathbb{A}} \left( \frac{1}{4}r_n, 4r_n \right) \quad \text{und} \quad B_n := \mathbb{A} \left( 4r_n, \frac{1}{4}r_{n+1} \right)$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Wir werden zeigen, dass  $f(B_n) \subseteq B_{n+1}$  gilt. Wir bezeichnen mit  $U_n$  die Fatoukomponente, die  $B_n$  enthält. Damit sind die  $U_n$  nach Korollar 2.8.6 mehrfach zusammenhängende wandernde Gebiete.

**Satz 4.3.1** *Alle letztendlich großen Randkomponenten, welche zum großen Orbit der  $U_n$  gehören, sind rektifizierbare, geschlossene Kurven. Für alle großen  $n$  sind alle Randkomponenten von  $U_n$  zusätzlich Jordankurven und es gilt  $\partial_{\infty}U_{n-1} = \partial_0U_n$ .*

*Ist  $\delta > 1$ , so sind alle wandernden Gebiete, welche zum großen Orbit der  $U_n$  gehören, von abzählbar vielen geschlossenen und rektifizierbaren Kurven berandet.*

*Für alle  $0 \leq \rho \leq \infty$  können die  $k_n$  so gewählt werden, dass die Funktion Ordnung  $\rho$  besitzt.*

**Bemerkung 4.3.2** (Fall  $\delta = 1$ ) Ist  $\delta = 1$ , so kann mit den verwendeten Methoden nicht entschieden werden, wohin die kritischen Punkte abgebildet werden. Möglicherweise werden diese auf Nullstellen von  $f$  abgebildet. Daher kann hier (ohne weitere Einschränkungen) nicht einmal Theorem 1 angewendet werden. Ein ähnliches Problem wurde bereits in Bemerkung 4.1.5 diskutiert.

**Bemerkung 4.3.3** (Wahl von  $\delta$ ) Die Behauptung kann auf alle fest gewählten  $\delta \in (0, 1)$  und  $\delta \in (1, \infty)$  erweitert werden. Allerdings müssen dann andere Voraussetzungen angepasst werden. Wir beschränken uns hier auf  $\delta \in [\frac{1}{2}, 2] \setminus \{1\}$ , da dies die Rechnungen vereinfacht.

**Bemerkung 4.3.4** (Wahl der  $k_n$ ) Da

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{k_n}$$

für  $|q| < 1$  konvergiert, gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = \infty$ . Damit gilt  $(k_n)^{\frac{1}{k_n}} \cdot q \leq \frac{q+1}{2}$  für genügend großes  $n$ . Daher konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n q^{k_n}$$

für  $|q| < 1$ .

**Beweis von Satz 4.3.1:** Wir wollen Korollar 3.2.11 und 3.3.2 anwenden und prüfen im Folgenden die einzelnen Voraussetzungen. Sei  $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$  klein, sodass  $1 \notin [\delta - \varepsilon, \delta + \varepsilon]$  gilt. Setze für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$C_n := \overline{\mathbb{A}}((\delta - \varepsilon)r_n, (\delta + \varepsilon)r_n).$$



Es gilt dann  $C_n \subset A_n$ . Weiter ist die Voraussetzung (i) von Korollar 3.2.11 mit  $\alpha := \frac{1}{4}$  und  $\beta := 4$  erfüllt.

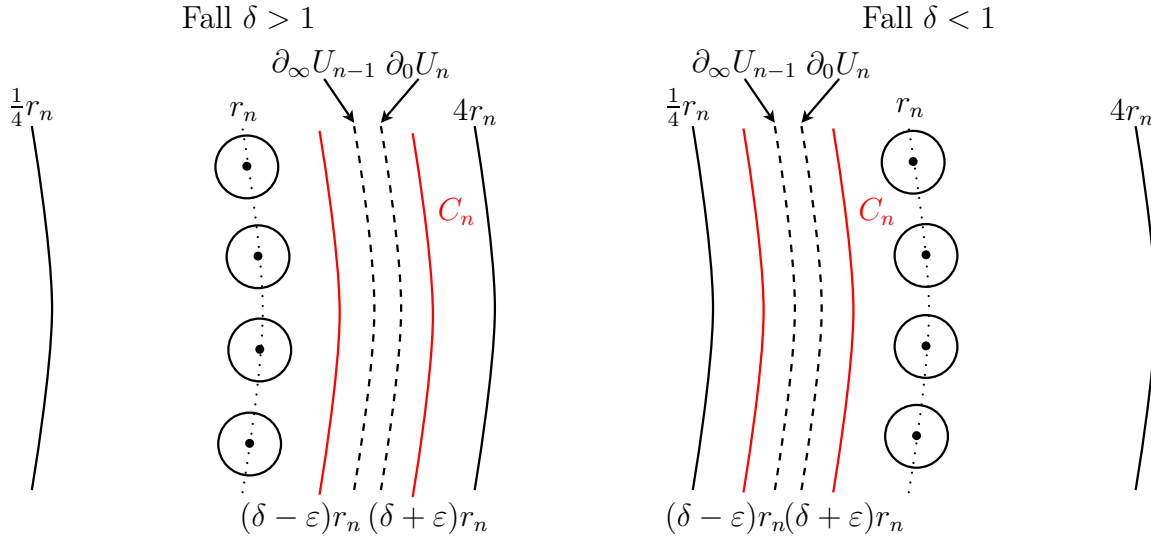


Abbildung 4.3: Die Wahl von  $C_n$  in beiden Fällen. Die Kreise mit Mittelpunkt vom Betrag  $r_n$  zeigen die Randkomponenten, die Nullstellen umringen. Wir werden später sehen, dass die angrenzenden großen Ränder gleich sind, und dass die Ränder im Verhältnis zu den Nullstellen so liegen, wie es hier dargestellt ist.

Die folgenden Lemmata sind ähnlich zu den Lemmata in 4.1 und 4.2. Der Hauptunterschied liegt bei Lemma 4.3.9, da in diesem zusätzlich die Ungleichung (3.3.2) überprüft wird.

**Lemma 4.3.5** (Wachstum der  $r_n$ ) *Es gilt  $r_{n+1} > 20r_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und für  $n \geq n_0$  sogar*

$$r_{n+1} > \frac{(1 + \delta^{k_n}) 10^{\sum_{j < n} k_j}}{10^{k_1 + k_2}} r_n^{k_1} > 10^{n-3} r_n.$$

*Beweis:* Es gilt  $r_{n+1} > 20r_n$  für alle  $n < n_0$ . Sei also  $n \geq n_0$  und gelte  $r_{j+1} > 20r_j$  für alle  $j < n$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= C \prod_{j=1}^n \left( 1 + \left( \frac{\delta r_n}{r_j} \right)^{k_j} \right) \\ &= C (1 + \delta^{k_n}) \left( 1 + \left( \frac{\delta r_n}{r_1} \right)^{k_1} \right) \cdot \prod_{j=2}^{n-1} \left( 1 + \left( \frac{\delta r_n}{r_j} \right)^{k_j} \right) \\ &> C \left( \frac{\delta r_n}{r_1} \right)^{k_1} \cdot \prod_{j=2}^{n-1} \left( \frac{r_n}{2r_j} \right)^{k_j}. \end{aligned}$$

Mit  $r_{j+1} > 20r_j$  für alle  $j < n$  folgt

$$C \left( \frac{\delta r_n}{r_1} \right)^{k_1} \cdot \prod_{j=2}^{n-1} \left( \frac{r_n}{2r_j} \right)^{k_j} > C \left( \frac{\delta r_n}{r_1} \right)^{k_1} \cdot 10^{n-2}.$$

Dann folgt mit  $10^{n_0-2}C\delta^{k_1} > 20r_1^{k_1}$

$$C \left( \frac{\delta r_n}{r_1} \right)^{k_1} \cdot 10^{n-2} \geq \frac{C\delta^{k_1} 10^{n_0-2}}{r_1^{k_1}} r_n > 20r_n.$$

Damit gilt  $r_{n+1} > 20r_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Es bleibt die zweite Aussage zu zeigen. Sei  $n \geq n_0$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= C \prod_{j=1}^n \left( 1 + \left( \frac{\delta r_n}{r_j} \right)^{k_j} \right) \\ &= C (1 + \delta^{k_n}) \left( 1 + \left( \frac{\delta r_n}{r_1} \right)^{k_1} \right) \left( 1 + \left( \frac{\delta r_n}{r_2} \right)^{k_2} \right) \cdot \prod_{j=3}^{n-1} \left( 1 + \left( \frac{\delta r_n}{r_j} \right)^{k_j} \right) \\ &> \frac{C\delta^{k_1}}{r_1^{k_1}} (1 + \delta^{k_n}) \left( \frac{r_n}{2r_2} \right)^{k_2} \cdot \prod_{j=3}^{n-1} \left( \frac{r_n}{2r_j} \right)^{k_j} \cdot r_n^{k_1}. \end{aligned}$$

Mit  $r_{n+1} > 20r_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  folgt dann

$$\begin{aligned} \frac{C\delta^{k_1}}{r_1^{k_1}} (1 + \delta^{k_n}) \left( \frac{r_n}{2r_2} \right)^{k_2} \cdot \prod_{j=3}^{n-1} \left( \frac{r_n}{2r_j} \right)^{k_j} \cdot r_n^{k_1} &> \frac{C\delta^{k_1}}{r_1^{k_1}} (1 + \delta^{k_n}) (10^{n-2})^{k_2} \cdot \prod_{j=3}^{n-1} 10^{k_j} \cdot r_n^{k_1} \\ &> \frac{C\delta^{k_1} 10^{n_0-2}}{r_1^{k_1}} (1 + \delta^{k_n}) \cdot 10^{\sum_{j=3}^{n-1} k_j} \cdot r_n^{k_1}. \end{aligned}$$

Es folgt mit  $10^{n_0-2}C\delta^{k_1} > 20r_1^{k_1}$

$$\frac{C\delta^{k_1} 10^{n_0-2}}{r_1^{k_1}} (1 + \delta^{k_n}) \cdot 10^{\sum_{j=3}^{n-1} k_j} \cdot r_n^{k_1} > \frac{(1 + \delta^{k_n}) 10^{\sum_{j=3}^{n-1} k_j}}{10^{k_1+k_2}} r_n^{k_1}.$$

Mit  $\delta > 0$  und  $k_n \geq 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  folgt dann ebenfalls  $r_{n+1} > 10^{n-3}r_n$ .  $\square$

**Lemma 4.3.6** (Abbildungsverhalten) *Sei  $c \geq 1$ . Dann gilt*

$$|f(w \cdot r_n)| \sim \frac{\left| \frac{w}{\delta} \right|^{\sum_{j < n} k_j} |1 + w^{k_n}|}{1 + \delta^{k_n}} r_{n+1}$$

gleichmäßig für  $\frac{1}{c} \leq |w| \leq c$ .

*Beweis:* Es gilt

$$|f(w \cdot r_n)| = C \prod_{j=1}^{\infty} \left| 1 + \left( \frac{wr_n}{r_j} \right)^{k_j} \right| = C \prod_{j < n} \left| 1 + \left( \frac{wr_n}{r_j} \right)^{k_j} \right| \cdot |1 + w^{k_n}| \cdot \prod_{j > n} \left| 1 + \left( \frac{wr_n}{r_j} \right)^{k_j} \right|.$$

Es gilt für großes  $n \in \mathbb{N}$

$$\prod_{j > n} \left( 1 - \left( \frac{cr_n}{r_j} \right)^{k_j} \right) \leq \prod_{j > n} \left| 1 + \left( \frac{wr_n}{r_j} \right)^{k_j} \right| \leq \prod_{j > n} \left( 1 + \left( \frac{cr_n}{r_j} \right)^{k_j} \right).$$

Weiter gilt mit Lemma 4.3.5, also  $r_{n+1} > 10^{n-3}r_n$  für  $n \geq n_0$ ,

$$\prod_{j>n} \left( 1 + \left( \frac{cr_n}{r_j} \right)^{k_j} \right) \leq \prod_{j>n} \left( 1 + \left( \frac{cr_n}{(10^{n-3})^{j-n} r_n} \right)^{k_j} \right) = \prod_{j=1}^{\infty} \left( 1 + \left( \frac{c}{10^{j(n-3)}} \right)^{k_j} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Ebenso gilt

$$\prod_{j>n} \left( 1 - \left( \frac{cr_n}{r_j} \right)^{k_j} \right) \geq \prod_{j>n} \left( 1 - \left( \frac{cr_n}{(10^{n-3})^{j-n} r_n} \right)^{k_j} \right) = \prod_{j=1}^{\infty} \left( 1 - \left( \frac{c}{10^{j(n-3)}} \right)^{k_j} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Damit gilt

$$\prod_{j>n} \left| 1 + \left( \frac{wr_n}{r_j} \right)^{k_j} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Mit  $r_{n+1} > 10^{n-3}r_n$  folgt außerdem

$$\prod_{j<n} \left| 1 + \left( \frac{wr_n}{r_j} \right)^{k_j} \right| \sim \prod_{j<n} \left| \frac{wr_n}{r_j} \right|^{k_j} = \left| \frac{w}{\delta} \right|^{\sum_{j<n} k_j} \prod_{j<n} \left( \frac{\delta r_n}{r_j} \right)^{k_j} \sim \left| \frac{w}{\delta} \right|^{\sum_{j<n} k_j} \prod_{j<n} \left( 1 + \left( \frac{\delta r_n}{r_j} \right)^{k_j} \right).$$

Insgesamt folgt damit

$$\begin{aligned} |f(w \cdot r_n)| &\sim C \prod_{j<n} \left| 1 + \left( \frac{wr_n}{r_j} \right)^{k_j} \right| \cdot |1 + w^{k_n}| \\ &\sim C \left| \frac{w}{\delta} \right|^{\sum_{j<n} k_j} \prod_{j<n} \left( 1 + \left( \frac{\delta r_n}{r_j} \right)^{k_j} \right) \cdot |1 + w^{k_n}| \\ &= \frac{\left| \frac{w}{\delta} \right|^{\sum_{j<n} k_j} |1 + w^{k_n}|}{1 + \delta^{k_n}} \cdot C \prod_{j \leq n} \left( 1 + \left( \frac{\delta r_n}{r_j} \right)^{k_j} \right) \\ &= \frac{\left| \frac{w}{\delta} \right|^{\sum_{j<n} k_j} |1 + w^{k_n}|}{1 + \delta^{k_n}} r_{n+1}. \end{aligned}$$

□

**Lemma 4.3.7** ( $f(B_n) \subset B_{n+1}$  und  $C_{n+1} \subset A_{n+1} \subset f(C_n)$ ) Für alle großen  $n$  gilt

$$f(B_n) \subset B_{n+1} \quad \text{und} \quad C_{n+1} \subset A_{n+1} \subset f(C_n).$$

*Beweis:* Wir zeigen, dass

$$\begin{aligned} \max_{|z|=(\delta-\varepsilon)r_n} |f(z)| &< \frac{1}{4}r_{n+1} \\ \min_{|z|=(\delta-\varepsilon)r_n} |f(z)| &> 4r_n \\ \min_{|z|=(\delta+\varepsilon)r_n} |f(z)| &> 4r_{n+1} \\ \min_{|z|=4r_n} |f(z)| &> 4r_{n+1} \\ \min_{|z|=\frac{1}{4}r_n} |f(z)| &> 4r_n \end{aligned}$$

für alle großen  $n$  gilt. Mit Maximumprinzip folgt dann

$$\max_{|z|=(\delta+\varepsilon)r_n} |f(z)| < \max_{|z|=4r_n} |f(z)| < \max_{|z|=(\delta-\varepsilon)r_{n+1}} |f(z)| < \frac{1}{4}r_{n+2}$$

und

$$\max_{|z|=\frac{1}{4}r_n} |f(z)| < \max_{|z|=(\delta-\varepsilon)r_n} |f(z)| < \frac{1}{4}r_{n+1}$$

für alle großen  $n$ . Mit Maximum- und Minimumprinzip folgt dann die Behauptung. Wir nutzen im Folgenden immer wieder Lemma 4.3.6. Für genügend großes  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\begin{aligned} \max_{|z|=(\delta-\varepsilon)r_n} |f(z)| &\leq (1+o(1)) \frac{\left(\frac{\delta-\varepsilon}{\delta}\right)^{\sum_{j<n} k_j} (1+(\delta-\varepsilon)^{k_n})}{1+\delta^{k_n}} r_{n+1} \\ &\leq (1+o(1)) \left(\frac{\delta-\varepsilon}{\delta}\right)^{\sum_{j<n} k_j} r_{n+1} \\ &< \frac{1}{4}r_{n+1}. \end{aligned}$$

Aufgrund der Wahl von  $\delta$  und  $\varepsilon$  gilt  $\left|1 - (\delta - \varepsilon)^{k_n}\right| > 1/10$ . Zusammen mit Lemma 4.3.5 gilt dann

$$\begin{aligned} \min_{|z|=(\delta-\varepsilon)r_n} |f(z)| &\geq (1-o(1)) \frac{\left(\frac{\delta-\varepsilon}{\delta}\right)^{\sum_{j<n} k_j} |1 - (\delta - \varepsilon)^{k_n}|}{1 + \delta^{k_n}} r_{n+1} \\ &\geq (1-o(1)) \frac{\left(\frac{\delta-\varepsilon}{\delta}\right)^{\sum_{j<n} k_j} |1 - (\delta - \varepsilon)^{k_n}|}{1 + \delta^{k_n}} \cdot \frac{(1 + \delta^{k_n}) 10^{\sum_{j<n} k_j}}{10^{k_1+k_2}} r_n^{k_1} \\ &\geq (1-o(1)) \frac{\left(10 \frac{\delta-\varepsilon}{\delta}\right)^{\sum_{j<n} k_j}}{10^{k_1+k_2+1}} r_n^{k_1} \\ &> 4r_n. \end{aligned}$$

Mit  $\frac{|1 - (\delta + \varepsilon)^{k_n}|}{1 + \delta^{k_n}} > \frac{1}{2}$  für großes  $n$  folgt

$$\begin{aligned} \min_{|z|=(\delta+\varepsilon)r_n} |f(z)| &\geq (1-o(1)) \frac{\left(\frac{\delta+\varepsilon}{\delta}\right)^{\sum_{j<n} k_j} |1 - (\delta + \varepsilon)^{k_n}|}{1 + \delta^{k_n}} r_{n+1} \\ &\geq (1-o(1)) \frac{1}{2} \left(\frac{\delta + \varepsilon}{\delta}\right)^{\sum_{j<n} k_j} r_{n+1} \\ &> 4r_{n+1}. \end{aligned}$$

Mit  $\delta < 4$  folgt weiter

$$\begin{aligned} \min_{|z|=4r_n} |f(z)| &\geq (1-o(1)) \frac{\left(\frac{4}{\delta}\right)^{\sum_{j<n} k_j} (4^{k_n} - 1)}{1 + \delta^{k_n}} r_{n+1} \\ &\geq (1-o(1)) \left(\frac{4}{\delta}\right)^{\sum_{j<n} k_j} r_{n+1} \\ &> 4r_{n+1}. \end{aligned}$$

Mit  $\frac{10}{4\delta} > 1$  folgt weiter

$$\begin{aligned}
\min_{|z|=\frac{1}{4}r_n} |f(z)| &\geq (1 - o(1)) \frac{\left(\frac{1}{4\delta}\right)^{\sum_{j<n} k_j} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{k_n}\right)}{1 + \delta^{k_n}} r_{n+1} \\
&\geq (1 - o(1)) \frac{\left(\frac{1}{4\delta}\right)^{\sum_{j<n} k_j} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{k_n}\right)}{1 + \delta^{k_n}} \cdot \frac{(1 + \delta^{k_n}) 10^{\sum_{j<n} k_j}}{10^{k_1+k_2}} r_n^{k_1} \\
&\geq (1 - o(1)) \frac{\left(\frac{10}{4\delta}\right)^{\sum_{j<n} k_j}}{10^{k_1+k_2+1}} r_n^{k_1} \\
&> 4r_n.
\end{aligned}$$

□

Damit gilt (ii) für genügend großes  $n$ . Insbesondere gilt auch  $\partial_0 C_n \subset U_{n-1}$ ,  $\partial_\infty C_n \subset U_n$ , falls  $n$  genügend groß ist. Damit gilt (iii). Es verbleibt, (iv) und (3.3.2) (und damit auch (v)) zu zeigen.

**Lemma 4.3.8** (Approximation der logarithmischen Ableitung) *Es existiert eine summierbare Folge  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , sodass*

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - \sum_{j<n} k_j - \frac{k_n}{\left(\frac{r_n}{z}\right)^{k_n} + 1} \right| \leq \tau_n \quad \text{und} \quad \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - \sum_{j \leq n} k_j + \frac{k_n}{\left(\frac{z}{r_n}\right)^{k_n} + 1} \right| \leq \tau_n$$

für alle  $z \in D_n := \overline{\mathbb{A}}(\sqrt{r_{n-1}r_n}, \sqrt{r_n r_{n+1}})$  gilt.

*Beweis:* Es gilt

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - \sum_{j<n} k_j - \frac{k_n}{\left(\frac{r_n}{z}\right)^{k_n} + 1} \right| = \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - \sum_{j \leq n} k_j + \frac{k_n}{\left(\frac{z}{r_n}\right)^{k_n} + 1} \right|,$$

daher genügt es, die erste Ungleichung zu zeigen. Es gilt

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = z(\log(f))'(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{k_j \left(\frac{z}{r_j}\right)^{k_j}}{1 + \left(\frac{z}{r_j}\right)^{k_j}} = \sum_{j<n} \frac{k_j}{\left(\frac{r_j}{z}\right)^{k_j} + 1} + \frac{k_n}{\left(\frac{r_n}{z}\right)^{k_n} + 1} + \sum_{j>n} \frac{k_j}{\left(\frac{r_j}{z}\right)^{k_j} + 1}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - \sum_{j<n} k_j - \frac{k_n}{\left(\frac{r_n}{z}\right)^{k_n} + 1} \right| &= \left| \sum_{j<n} \left( \frac{k_j}{\left(\frac{r_j}{z}\right)^{k_j} + 1} - k_j \right) + \sum_{j>n} \frac{k_j}{\left(\frac{r_j}{z}\right)^{k_j} + 1} \right| \\
&= \left| \sum_{j<n} \frac{-k_j \left(\frac{r_j}{z}\right)^{k_j}}{\left(\frac{r_j}{z}\right)^{k_j} + 1} + \sum_{j>n} \frac{k_j}{\left(\frac{r_j}{z}\right)^{k_j} + 1} \right| \\
&\leq \sum_{j<n} \frac{k_j}{\left| 1 + \left(\frac{z}{r_j}\right)^{k_j} \right|} + \sum_{j>n} \frac{k_j}{\left| \left(\frac{r_j}{z}\right)^{k_j} + 1 \right|}.
\end{aligned}$$

Für  $z \in D_n$  folgt mit  $r_{n+1} \geq 4r_n$

$$\begin{aligned}
\sum_{j < n} \frac{k_j}{\left|1 + \left(\frac{z}{r_j}\right)^{k_j}\right|} + \sum_{j > n} \frac{k_j}{\left|\left(\frac{r_j}{z}\right)^{k_j} + 1\right|} &\leq \sum_{j < n} \frac{k_j}{\left|\frac{z}{r_j}\right|^{k_j} - 1} + \sum_{j > n} \frac{k_j}{\left|\frac{r_j}{z}\right|^{k_j} - 1} \\
&\leq \sum_{j < n} \frac{k_j}{\left|\frac{z}{r_j}\right|^{k_j} - \frac{1}{2}\left|\frac{z}{r_j}\right|^{k_j}} + \sum_{j > n} \frac{k_j}{\left|\frac{r_j}{z}\right|^{k_j} - \frac{1}{2}\left|\frac{r_j}{z}\right|^{k_j}} \\
&= \sum_{j < n} 2k_j \left|\frac{r_j}{z}\right|^{k_j} + \sum_{j > n} 2k_j \left|\frac{z}{r_j}\right|^{k_j} \\
&\leq \sum_{j < n} 2k_j \left(\frac{r_{n-1}}{\sqrt{r_{n-1}r_n}}\right)^{k_j} + \sum_{j > n} 2k_j \left(\frac{\sqrt{r_n r_{n+1}}}{r_{n+1}}\right)^{k_j} \\
&\leq \sum_{j < n} 2k_j \left(\frac{r_{n-1}}{r_n}\right)^{\frac{k_j}{2}} + \sum_{j > n} 2k_j \left(\frac{r_n}{r_{n+1}}\right)^{\frac{k_j}{2}}.
\end{aligned}$$

Mit Lemma 4.3.5 gilt  $r_{n+1} > 10^{n-3}r_n$  für alle großen  $n$ . Damit folgt für großes  $n$

$$\begin{aligned}
\sum_{j < n} 2k_j \left(\frac{r_{n-1}}{r_n}\right)^{\frac{k_j}{2}} + \sum_{j > n} 2k_j \left(\frac{r_n}{r_{n+1}}\right)^{\frac{k_j}{2}} &\leq \sum_{j < n} 2k_j \left(\frac{1}{10^{n-4}}\right)^{\frac{k_j}{2}} + \sum_{j > n} 2k_j \left(\frac{1}{10^{n-3}}\right)^{\frac{k_j}{2}} \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} 2k_j \left(\frac{1}{10^{n-4}}\right)^{\frac{k_j}{2}} \\
&\leq \frac{2}{\sqrt{10}^{n-5}} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{k_j}{\sqrt{10}^{k_j}}.
\end{aligned}$$

Nach Bemerkung 4.3.4 konvergiert  $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{k_j}{\sqrt{10}^{k_j}}$ . Damit ist

$$\tau_n := \frac{2}{\sqrt{10}^{n-5}} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{k_j}{\sqrt{10}^{k_j}}$$

summierbar. □

**Lemma 4.3.9** (Abschätzungen für die logarithmische Ableitung) *Für genügend großes  $n$  gilt*

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \geq 10 \quad \text{und} \quad \left|\arg\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)\right| < \varepsilon_n$$

für alle  $z \in f^{-1}(C_{n+1}) \cap C_n$ , wobei  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine summierbare Folge ist.

*Beweis:* Ist  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(z) \geq 1$ , so gilt

$$|\arg(z)| = \left|\arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right)\right| \leq \left|\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right| \leq |\operatorname{Im}(z)|.$$

Außerdem gilt

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \geq \operatorname{Re} \left( \frac{zf'(z)}{f(z)} \right).$$

Damit genügt es, zu zeigen, dass eine summierbare Folge  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  existiert, sodass für genügend große  $n$

$$\operatorname{Re} \left( \frac{zf'(z)}{f(z)} \right) \geq 10 \quad \text{und} \quad \left| \operatorname{Im} \left( \frac{zf'(z)}{f(z)} \right) \right| < \varepsilon_n$$

für alle  $z \in f^{-1}(C_{n+1}) \cap C_n$  gilt, um die Behauptung zu erhalten.

Sei  $\delta < 1$ . Dann gilt für  $z \in f^{-1}(C_{n+1}) \cap C_n$

$$\left| \frac{k_n}{\left(\frac{r_n}{z}\right)^{k_n} + 1} \right| \leq \frac{k_n}{\left|\frac{r_n}{z}\right|^{k_n} - \frac{1}{2} \left|\frac{r_n}{z}\right|^{k_n}} \leq 2k_n \left(\frac{|z|}{r_n}\right)^{k_n} \leq 2k_n(\delta + \varepsilon)^{k_n}.$$

Nach Bemerkung 4.3.4 ist  $\varepsilon'_n := 2k_n(\delta + \varepsilon)^{k_n}$  summierbar, da  $\delta + \varepsilon < 1$  gilt. Nach Lemma 4.3.8 gilt für großes  $n$

$$\operatorname{Re} \left( \frac{zf'(z)}{f(z)} \right) \geq \sum_{j < n} k_j - \left| \frac{k_n}{\left(\frac{r_n}{z}\right)^{k_n} + 1} \right| - \tau_n \geq \sum_{j < n} k_j - \varepsilon'_n - \tau_n \geq 10.$$

Ebenso gilt nach Lemma 4.3.8 für großes  $n$

$$\operatorname{Im} \left( \frac{zf'(z)}{f(z)} \right) \leq \operatorname{Im} \left( \sum_{j < n} k_j \right) + \operatorname{Im} \left( \frac{k_n}{\left(\frac{r_n}{z}\right)^{k_n} + 1} \right) + \tau_n \leq \left| \frac{k_n}{\left(\frac{r_n}{z}\right)^{k_n} + 1} \right| + \tau_n \leq \varepsilon'_n + \tau_n$$

Mit  $\varepsilon_n := \varepsilon'_n + \tau_n$  erhalten wir nun die Behauptung für den Fall  $\delta < 1$ .

Sei  $\delta > 1$ . Dann gilt für  $z \in f^{-1}(C_{n+1}) \cap C_n$

$$\left| \frac{k_n}{\left(\frac{z}{r_n}\right)^{k_n} + 1} \right| \leq \frac{k_n}{\left|\frac{z}{r_n}\right|^{k_n} - \frac{1}{2} \left|\frac{z}{r_n}\right|^{k_n}} \leq 2k_n \left(\frac{r_n}{|z|}\right)^{k_n} \leq \frac{2k_n}{(\delta - \varepsilon)^{k_n}}.$$

Nach Bemerkung 4.3.4 ist  $\varepsilon''_n := \frac{2k_n}{(\delta - \varepsilon)^{k_n}}$  summierbar, da  $\delta - \varepsilon > 1$  gilt. Nach Lemma 4.3.8 gilt für großes  $n$

$$\operatorname{Re} \left( \frac{zf'(z)}{f(z)} \right) \geq \sum_{j \leq n} k_j - \left| \frac{k_n}{\left(\frac{z}{r_n}\right)^{k_n} + 1} \right| - \tau_n \geq \sum_{j \leq n} k_j - \varepsilon''_n - \tau_n \geq 10.$$

Ebenso gilt nach Lemma 4.3.8 für großes  $n$

$$\operatorname{Im} \left( \frac{zf'(z)}{f(z)} \right) \leq \operatorname{Im} \left( \sum_{j \leq n} k_j \right) + \operatorname{Im} \left( \frac{k_n}{\left(\frac{z}{r_n}\right)^{k_n} + 1} \right) + \tau_n \leq \left| \frac{k_n}{\left(\frac{z}{r_n}\right)^{k_n} + 1} \right| + \tau_n \leq \varepsilon''_n + \tau_n$$

Mit  $\varepsilon_n := \varepsilon''_n + \tau_n$  erhalten wir nun die Behauptung ebenfalls für den Fall  $\delta > 1$ .  $\square$

Setze  $m := 10$ , dann gilt  $10 \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{10}{8} > 1$ . Nach Lemma 4.2.8 sind damit die Voraussetzungen (iv) und (v) von Korollar 3.2.11 sowie die Voraussetzung (3.3.2) von Korollar 3.3.2 für die  $U_n$  erfüllt, falls  $n$  groß genug ist. Mit Korollar 3.2.11 gilt dann  $\partial_\infty U_{n-1} = \partial_0 U_n$  für alle großen  $n$ . Außerdem sind nach Korollar 3.3.2 alle großen Randkomponenten von  $U_n$  rektifizierbare Jordankurven für große  $n$ . Weiter sind alle letztendlich großen Randkomponenten, welche zum Orbit der  $U_n$  gehören, geschlossene rektifizierbare Kurven. Wir wollen nun zeigen, dass für großes  $n$  keine kritischen Punkte auf den Randkomponenten von  $U_n$  liegen. Außerdem zeigen wir, dass  $ec(U^-) = 2$  gilt, wenn  $\delta > 1$  gilt, und dass  $ec(U^+) = 2$  gilt, wenn  $\delta < 1$  gilt.

**Lemma 4.3.10** (Kritische Punkte)  *$f$  hat in  $D_n$  genau  $k_n$  verschiedene kritische Punkte, die wir mit  $c_{n,k}$  bezeichnen, wobei  $k \in \{1, \dots, k_n\}$  gilt. Für genügend großes  $n$  hat  $c_{n,k}$  die Form*

$$c_{n,k} = e^{2\pi i \frac{k}{k_n}} \left( \frac{k_n}{\sum_{j \leq n} k_j - \delta_{n,k}} - 1 \right)^{\frac{1}{k_n}} r_n,$$

wobei  $|\delta_{n,k}| \leq \delta_n$  für alle  $k \in \{1, \dots, k_n\}$  gilt mit einer Nullfolge  $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

*Beweis:* Setze

$$g(z) := \frac{zf'(z)}{f(z)} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{k_j \left(\frac{z}{r_j}\right)^{k_j}}{1 + \left(\frac{z}{r_j}\right)^{k_j}} \quad \text{und} \quad h(z) := \sum_{j < n} k_j + \frac{k_n}{\left(\frac{r_n}{z}\right)^{k_n} + 1} = \sum_{j \leq n} k_j - \frac{k_n}{\left(\frac{z}{r_n}\right)^{k_n} + 1}$$

Dann haben  $g$  und  $h$  jeweils genau  $k_n$  verschiedene einfache Pole in  $D_n$ . Außerdem hat  $h$  genau  $k_n$  verschiedene einfache Nullstellen bei

$$e^{2\pi i \frac{k}{k_n}} \left( \frac{k_n}{\sum_{j \leq n} k_j} - 1 \right)^{\frac{1}{k_n}} r_n$$

für  $k \in \{1, \dots, k_n\}$ . Es gilt

$$\min_{z \in \partial D_n} |h(z)| = \min \left\{ \min_{z \in \partial_\infty D_n} \left| \sum_{j \leq n} k_j - \frac{k_n}{\left(\frac{z}{r_n}\right)^{k_n} + 1} \right|, \min_{z \in \partial_0 D_n} \left| \sum_{j < n} k_j + \frac{k_n}{\left(\frac{r_n}{z}\right)^{k_n} + 1} \right| \right\}.$$



Es gilt mit Lemma 4.3.5 für genügend großes  $n$

$$\begin{aligned}
\min_{z \in \partial_\infty D_n} \left| \sum_{j \leq n} k_j - \frac{k_n}{\left(\frac{z}{r_n}\right)^{k_n} + 1} \right| &\geq \sum_{j \leq n} k_j - \max_{z \in \partial_\infty D_n} \left| \frac{k_n}{\left(\frac{z}{r_n}\right)^{k_n} + 1} \right| \\
&\geq \sum_{j \leq n} k_j - \frac{k_n}{\left(\frac{\sqrt{r_{n+1} r_n}}{r_n}\right)^{k_n} - 1} \\
&\geq \sum_{j \leq n} k_j - \frac{k_n}{\left(\sqrt{\frac{r_{n+1}}{r_n}}\right)^{k_n} - 1} \\
&\geq \sum_{j \leq n} k_j - \frac{k_n}{\sqrt{20}^{k_n} - 1} \\
&\geq 2.
\end{aligned}$$

Ebenso gilt mit Lemma 4.3.5 für genügend großes  $n$

$$\begin{aligned}
\min_{z \in \partial_0 D_n} \left| \sum_{j < n} k_j + \frac{k_n}{\left(\frac{r_n}{z}\right)^{k_n} + 1} \right| &\geq \sum_{j < n} k_j - \max_{z \in \partial_0 D_n} \left| \frac{k_n}{\left(\frac{r_n}{z}\right)^{k_n} + 1} \right| \\
&\geq \sum_{j < n} k_j - \frac{k_n}{\left(\frac{r_n}{\sqrt{r_{n-1} r_n}}\right)^{k_n} - 1} \\
&\geq \sum_{j < n} k_j - \frac{k_n}{\left(\sqrt{\frac{r_n}{r_{n-1}}}\right)^{k_n} - 1} \\
&\geq \sum_{j < n} k_j - \frac{k_n}{\sqrt{20}^{k_n} - 1} \\
&\geq 2.
\end{aligned}$$

Damit gilt  $\min_{z \in \partial D_n} |h(z)| \geq 2$ . Mit Lemma 4.3.8 gilt dann auch  $\min_{z \in \partial D_n} |g(z)| > 1$  für großes  $n$ , da dann  $\tau_n < 1$  gilt. Also haben  $g$  und  $h$  keine Null- oder Polstellen auf  $\partial D_n$ . Wie bereits in Lemma 4.2.9 folgt dann mit dem Satz von Rouché (Satz 2.3.6), dass  $g$  und  $h$  die gleiche Differenz von Null- und Polstellen in  $D_n$  haben. Damit hat  $g$  ebenfalls  $k_n$  Nullstellen in  $D_n$ , die wir mit  $c_{n,k}$  bezeichnen. Diese  $c_{n,k}$  sind kritische Punkte von  $f$ . Außerdem gilt nach Lemma 4.3.8 für jeden kritischen Punkt  $c_{n,k}$  von  $f$  in  $D_n$

$$\sum_{j \leq n} k_j - \frac{k_n}{\left(\frac{c_{n,k}}{r_n}\right)^{k_n} + 1} = \delta_{n,k},$$

wobei  $|\delta_{n,k}| \leq \delta_n$  für alle  $k \in \{1, \dots, k_n\}$  gilt mit einer Nullfolge  $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Weiter gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{j \leq n} k_j - \frac{k_n}{\left(\frac{c_{n,k}}{r_n}\right)^{k_n} + 1} = \delta_{n,k} \\ \Leftrightarrow & \sum_{j \leq n} k_j - \delta_{n,k} = \frac{k_n}{\left(\frac{c_{n,k}}{r_n}\right)^{k_n} + 1} \\ \Leftrightarrow & \frac{k_n}{\sum_{j \leq n} k_j - \delta_{n,k}} - 1 = \left(\frac{c_{n,k}}{r_n}\right)^{k_n} \\ \Leftrightarrow & c_{n,k} = e^{2\pi i \frac{k}{k_n}} \left( \frac{k_n}{\sum_{j \leq n} k_j - \delta_{n,k}} - 1 \right)^{\frac{1}{k_n}} r_n. \end{aligned}$$

□

**Lemma 4.3.11** (Letztendlicher innerer Zusammenhang) *Die  $U_n$  sind unendlich-fach zusammenhängend. Außerdem gilt:*

- (i) *Ist  $\delta > 1$ , so gilt  $ec(U^-) = 2$  und  $ec(U^+) = \infty$ .*
- (ii) *Ist  $\delta < 1$ , so gilt  $ec(U^-) = \infty$  und  $ec(U^+) = 2$ .*

*Beweis:* Nach dem letzten Lemma sind die einzigen kritischen Punkte, die in  $U_n^-$  beziehungsweise  $U_{n-1}^+$  liegen können, die  $c_{n,k}$ . Es gilt mit Lemma 4.3.6 für genügend großes  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |f(c_{n,k})| & \sim \frac{\left( \frac{1}{\delta} \left| \frac{k_n}{\sum_{j \leq n} k_j - \delta_{n,k}} - 1 \right|^{\frac{1}{k_n}} \right)^{\sum_{j < n} k_j} \left| \frac{k_n}{\sum_{j \leq n} k_j - \delta_{n,k}} \right|}{1 + \delta^{k_n}} r_{n+1} \\ & = \frac{\left( \frac{1}{\delta} \left| \frac{k_n}{\sum_{j \leq n} k_j - \delta_{n,k}} - 1 \right|^{\frac{1}{k_n}} \left| \frac{k_n}{\sum_{j \leq n} k_j - \delta_{n,k}} \right|^{\frac{1}{\sum_{j < n} k_j}} \right)^{\sum_{j < n} k_j}}{1 + \delta^{k_n}} r_{n+1}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\frac{k_n}{\sum_{j \leq n} k_j - \delta_{n,k}} - 1 = \frac{\delta_{n,k} - \sum_{j < n} k_j}{\sum_{j < n} k_j + k_n - \delta_{n,k}} = \frac{-1}{1 + \frac{k_n}{\sum_{j < n} k_j - \delta_{n,k}}}.$$

Weiter gilt

$$\frac{1}{1 + k_n} \leq \left| \frac{1}{1 + \frac{k_n}{\sum_{j < n} k_j - \delta_{n,k}}} \right| \leq 1.$$

Dann folgt

$$\left| \frac{k_n}{\sum_{j \leq n} k_j - \delta_{n,k}} - 1 \right|^{\frac{1}{k_n}} = \left| \frac{1}{1 + \frac{k_n}{\sum_{j < n} k_j - \delta_{n,k}}} \right|^{\frac{1}{k_n}} \rightarrow 1 \quad (4.3.1)$$

für  $n \rightarrow \infty$ , da  $\left(\frac{1}{1+k_n}\right)^{\frac{1}{k_n}} \rightarrow 1$  für  $n \rightarrow \infty$  gilt. Außerdem gilt

$$\left| \frac{k_n}{\sum_{j \leq n} k_j - \delta_{n,k}} \right| = \left| \frac{1}{1 + \frac{\sum_{j < n} k_j - \delta_{n,k}}{k_n}} \right|.$$

Weiter gilt

$$\frac{1}{1 + \sum_{j < n} k_j + |\delta_{n,k}|} \leq \left| \frac{1}{1 + \frac{\sum_{j < n} k_j - \delta_{n,k}}{k_n}} \right| \leq 1.$$

Dann folgt

$$\left| \frac{k_n}{\sum_{j \leq n} k_j - \delta_{n,k}} \right|^{\frac{1}{\sum_{j < n} k_j}} = \left| \frac{1}{1 + \frac{\sum_{j < n} k_j - \delta_{n,k}}{k_n}} \right|^{\frac{1}{\sum_{j < n} k_j}} \rightarrow 1$$

für  $n \rightarrow \infty$ , da  $\left(\frac{1}{1 + \sum_{j < n} k_j + |\delta_{n,k}|}\right)^{\frac{1}{\sum_{j < n} k_j}} \rightarrow 1$  für  $n \rightarrow \infty$  gilt.

Aus (4.3.1) folgt insbesondere  $|c_{n,k}| \sim r_n$ . Nach der Wahl der  $C_n$  gilt für große  $n$  damit  $c_{n,k} \in \widetilde{U}_{n-1} \setminus C(0, U_{n-1})$ , falls  $\delta > 1$ , und  $c_{n,k} \in \widetilde{U}_n \setminus C(0, U_n)$ , falls  $\delta < 1$ .

Gilt  $\delta > 1$ , so gilt für genügend großes  $n$

$$\begin{aligned} |f(c_{n,k})| &\leq (1 + o(1)) \frac{\left(\frac{1}{\delta} \left| \frac{k_n}{\sum_{j \leq n} k_j - \delta_{n,k}} - 1 \right|^{\frac{1}{k_n}} \left| \frac{k_n}{\sum_{j \leq n} k_j - \delta_{n,k}} \right|^{\frac{1}{\sum_{j < n} k_j}}\right)^{\sum_{j < n} k_j}}{1 + \delta^{k_n}} r_{n+1} \\ &\leq (1 + o(1)) \frac{1}{1 + \delta^{k_n}} r_{n+1} \\ &< \frac{1}{4} r_{n+1}. \end{aligned}$$

Weiter gilt mit Lemma 4.3.5

$$\begin{aligned} |f(c_{n,k})| &\geq (1 - o(1)) \frac{\left(\frac{1}{\delta} \left| \frac{k_n}{\sum_{j \leq n} k_j - \delta_{n,k}} - 1 \right|^{\frac{1}{k_n}} \left| \frac{k_n}{\sum_{j \leq n} k_j - \delta_{n,k}} \right|^{\frac{1}{\sum_{j < n} k_j}}\right)^{\sum_{j < n} k_j}}{1 + \delta^{k_n}} r_{n+1} \\ &\geq (1 - o(1)) \frac{\left(\frac{1}{\delta} \left| \frac{k_n}{\sum_{j \leq n} k_j - \delta_{n,k}} - 1 \right|^{\frac{1}{k_n}} \left| \frac{k_n}{\sum_{j \leq n} k_j - \delta_{n,k}} \right|^{\frac{1}{\sum_{j < n} k_j}}\right)^{\sum_{j < n} k_j}}{1 + \delta^{k_n}} \cdot \frac{(1 + \delta^{k_n}) 10^{\sum_{j < n} k_j}}{10^{k_1 + k_2}} r_n^{k_1} \\ &= (1 - o(1)) \frac{\left(\frac{10}{\delta} \left| \frac{k_n}{\sum_{j \leq n} k_j - \delta_{n,k}} - 1 \right|^{\frac{1}{k_n}} \left| \frac{k_n}{\sum_{j \leq n} k_j - \delta_{n,k}} \right|^{\frac{1}{\sum_{j < n} k_j}}\right)^{\sum_{j < n} k_j}}{10^{k_1 + k_2}} r_n^{k_1}. \end{aligned}$$

Wegen  $\frac{10}{\delta} > 4$  gilt damit

$$|f(c_{n,k})| \geq \frac{4^{\sum_{j<n} k_j}}{10^{k_1+k_2}} r_{n+1} > 4r_n$$

für alle großen  $n$  gilt. Damit gilt  $f(c_{n,k}) \in B_n \subset U_n$ . Würde  $c_{n,k} \in \widetilde{U}_{n-1} \setminus U_{n-1}$  gelten, so würde  $f(c_{n,k}) \in B_n$  nicht gelten. Es folgt  $c_{n,k} \in U_{n-1}^+$ .

Gilt  $\delta < 1$ , so gilt

$$|f(c_{n,k})| \geq (1 - o(1)) \frac{\left( \frac{1}{\delta} \left| \frac{k_n}{\sum_{j \leq n} k_j - \delta_{n,k}} - 1 \right|^{\frac{1}{k_n}} \left| \frac{k_n}{\sum_{j \leq n} k_j - \delta_{n,k}} \right|^{\frac{1}{\sum_{j < n} k_j}} \right)^{\sum_{j < n} k_j}}{1 + \delta^{k_n}} r_{n+1}.$$

Damit existiert ein  $q > 1$ , sodass

$$|f(c_{n,k})| \geq (1 - o(1)) \frac{q^{\sum_{j < n} k_j}}{1 + \delta^{k_n}} \geq (1 - o(1)) \frac{q^{\sum_{j < n} k_j}}{2} r_{n+1} > 4r_{n+1}$$

für alle großen  $n$  gilt. Es gilt  $|c_{n,k}| \leq 4r_n$  für alle großen  $n$ . Mit Lemma 4.3.7 und dem Maximumprinzip folgt

$$|f(c_{n,k})| \leq \frac{1}{4} r_{n+2}$$

für alle großen  $n$ . Damit gilt  $f(c_{n,k}) \in B_{n+1} \subset U_{n+1}$ . Würde  $c_{n,k} \in \widetilde{U}_n \setminus U_n$  gelten, so würde  $f(c_{n,k}) \in B_{n+1}$  nicht gelten. Es folgt  $c_{n,k} \in U_n^-$ .

Damit müssen alle  $U_n$  unendlich-fach zusammenhängend sein, da sie für unendlich viele  $n$  kritische Punkte enthalten. Die Behauptung über  $ec(U^+)$  und  $ec(U^-)$  folgt mit Satz 2.8.18 und Bemerkung 2.8.19.  $\square$

Nach Lemma 4.3.10 sind die  $c_{n,k}$  die einzigen kritischen Punkte. Diese liegen für große  $n$  alle in  $\mathcal{F}(f)$ . Damit sind für große  $n$  keine kritischen Punkte auf den Randkomponenten von  $U_n$ . Außerdem gilt  $ec(U^-) = 2$ , falls  $\delta > 1$ . Für  $\delta > 1$  sind damit nach Korollar 3.2.21 und 3.2.22 alle wandernden Gebiete, welche zum Orbit der  $U_n$  gehören, von abzählbar vielen geschlossenen, rektifizierbaren Kurven berandet. Es bleibt zu zeigen, dass die  $k_n$  so gewählt werden können, dass die Funktion eine beliebige Ordnung annimmt.

**Lemma 4.3.12** (Beliebige Ordnung) *Für alle  $0 \leq \varrho \leq \infty$  können die  $k_n$  so gewählt werden, dass  $\text{ord}(f) = \varrho$  gilt.*

*Beweis:* Sei  $r > 0$  und  $n$  so gewählt, dass  $r_n \leq r < r_{n+1}$  gilt. Es gilt

$$\log M(r, f) = \log f(r) = \log C + \sum_{j \leq n} \log \left( 1 + \left( \frac{r}{r_j} \right)^{k_j} \right) + \sum_{j > n} \log \left( 1 + \left( \frac{r}{r_j} \right)^{k_j} \right)$$

Weiter gilt mit Lemma 4.3.5

$$\sum_{j > n} \log \left( 1 + \left( \frac{r}{r_j} \right)^{k_j} \right) \leq \sum_{j > n} \left( \frac{r}{r_j} \right)^{k_j} \leq \sum_{j > n} \left( \frac{r_{n+1}}{r_j} \right)^{k_j} \leq \sum_{j > n} \frac{r_{n+1}}{20^{j-n+1} r_{n+1}} \leq \sum_{j=1}^{\infty} 20^{-j+1}$$

und

$$\sum_{j \leq n} \log \left( 1 + \left( \frac{r_j}{r} \right)^{k_j} \right) \leq \sum_{j \leq n} \left( \frac{r_j}{r} \right)^{k_j} \leq \sum_{j \leq n} \left( \frac{r_j}{r_n} \right)^{k_j} \leq \sum_{j \leq n} \frac{20^{-j+n} r_n}{r_n} \leq \sum_{j \leq n} 20^{-j+n}$$

Mit Satz 2.3.9 folgt

$$\begin{aligned} \log f(r) &= \sum_{j \leq n} \left( \log \left( \frac{r}{r_j} \right)^{k_j} + \log \left( 1 + \left( \frac{r_j}{r} \right)^{k_j} \right) \right) + \mathcal{O}(1) \\ &= \sum_{j \leq n} k_j \log \left( \frac{r}{r_j} \right) + \mathcal{O}(1) \\ &= \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt + \mathcal{O}(1). \end{aligned}$$

Es gilt  $n(t) = \sum_{j \leq n} k_j$  für  $r_n \leq t < r_{n+1}$ . Außerdem gilt

$$r_n = C \prod_{j < n} \left( 1 + \left( \frac{r_n}{r_j} \right)^{k_j} \right).$$

Damit ist  $r_n$  unabhängig von  $k_n$ . Sei zunächst  $0 < \varrho < \infty$ . Setze dann  $k_n := \lfloor r_n^\varrho \rfloor$ . Dann gilt für große  $n$

$$\sum_{j \leq n} k_j = \mathcal{O}(r_n^\varrho)$$

und  $n(t) = \mathcal{O}(t^\varrho)$  für  $t \rightarrow \infty$ . Damit gilt  $\log M(r, f) = \mathcal{O}(r^\varrho)$  für  $r \rightarrow \infty$ . Weiter gilt für großes  $r$  und damit auch großes  $n$

$$\log M(2r, f) = \log f(2r) = \log C + \sum_{j=1}^{\infty} \log \left( 1 + \left( \frac{2r}{r_j} \right)^{k_j} \right) > k_n \log 2 > \lfloor r_n^\varrho \rfloor \log 2.$$

Dann gilt  $\text{ord}(f) = \varrho$ .

Setze nun  $k_n := \lfloor r_n^{\varrho_n} \rfloor$  für eine monotone Folge  $(\varrho_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}_{>0}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n \in [0, \infty]$ . Dann erhalten wir für große  $n$  dieselben Approximationen und Abschätzungen wie oben. Setze  $\varrho_n := n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und wir erhalten  $\text{ord}(f) = \infty$ . Um  $\text{ord}(f) = 0$  zu erhalten, setzen wir  $\varrho_n := \frac{1}{\sqrt{n}}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Hierbei muss sichergestellt werden, dass dann immer noch

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{k_n} = \sum_{n=1}^{\infty} q^{\lfloor r_n^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \rfloor}$$

für alle  $|q| < 1$  konvergiert. Dies ist der Fall, da  $r_{n+1} > 10^{n-3} r_n$  nach Lemma 4.3.5 gilt.  $\square$

Damit ist Satz 4.3.1 vollständig bewiesen.  $\square$

**Bemerkung 4.3.13** (Bishops Beispiel) Bishop hat in [Bis12] ein Beispiel einer ganzen Funktion konstruiert, deren Juliamenge Hausdorffdimension 1 hat. Dieses Beispiel konstruiert er wie folgt:

Seien  $r_1, \lambda \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $K \in \mathbb{N}$  genügend groß gewählt. Sei  $S \subset \mathbb{N}$  mit  $1 \in S$ . Sei  $m_0 = 2^K$  und  $m_n := 2^{K-1+|S_n|}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , wobei  $S_n := S \cap \{1, \dots, n\}$ . Sei  $p_\lambda(z) := \lambda(2z^2 - 1)$  und  $F_0 := p_\lambda^K = \underbrace{p_\lambda \circ \dots \circ p_\lambda}_{K\text{-mal}}$ . Dann setze für  $z \in \mathbb{C}$

$$F_n(z) := 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{z}{r_n} \right)^{m_n},$$

falls  $n \in S$  und  $F_n \equiv 1$  für  $n \notin S$ , wobei

$$r_{n+1} := \max_{|z|=2r_n} \prod_{j=0}^n |F_j(z)|.$$

Definiere nun die Funktion  $f$  als

$$f(z) := \prod_{j=0}^{\infty} F_j(z) = F_0(z) \cdot \prod_{j \in S} \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{z}{r_j} \right)^{m_j} \right).$$

Die Funktion ähnelt dem Beispiel beliebiger Ordnung von Baker sowie der eben behandelten Familie. Bishop zeigte, dass die Funktion mehrfach zusammenhängende wandernde Gebiete besitzt, sodass  $\partial_\infty U_{n-1} = \partial_0 U_n$  gilt und alle Randkomponenten der wandernden Gebiete rektifizierbare Jordankurven sind. Bishops Beispiel war der Ausgangspunkt dieser Arbeit. Daher sind die Techniken, die in unseren Beweisen genutzt werden, ähnlich zu denen von Bishop und es ist nicht schwer, die Voraussetzungen von Theorem 1 und 2 zu überprüfen. Laut Bishop scheint es auch möglich zu sein, zusätzlich zu Rektifizierbarkeit der Kurven zu zeigen, dass diese glatt sind, wenn auch der Beweis dafür in [Bis12] nicht weiter ausgeführt ist.

# Literaturverzeichnis

- [Ahl78] L. V. Ahlfors. *Complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1978.
- [Bak63] I. N. Baker. Multiply connected domains of normality in iteration theory. *Math. Z.*, 81:206–214, 1963.
- [Bak75] I. N. Baker. The domains of normality of an entire function. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, 1(2):277–283, 1975.
- [Bak76] I. N. Baker. An entire function which has wandering domains. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, 22(2):173–176, 1976.
- [Bak84] I. N. Baker. Wandering domains in the iteration of entire functions. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 49(3):563–576, 1984.
- [Bak85] I. N. Baker. Some entire functions with multiply-connected wandering domains. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 5(2):163–169, 1985.
- [BD00] I. N. Baker and P. Domínguez. Some connectedness properties of Julia sets. *Complex Variables Theory Appl.*, 41(4):371–389, 2000.
- [Bea91] A. F. Beardon. *Iteration of rational functions*, volume 132 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [Ber93] W. Bergweiler. Iteration of meromorphic functions. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 29(2):151–188, 1993.
- [Ber11] W. Bergweiler. An entire function with simply and multiply connected wandering domains. *Pure Appl. Math. Q.*, 7(1):107–120, 2011.
- [BF14] B. Branner and N. Fagella. *Quasiconformal surgery in holomorphic dynamics*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 2014.
- [BH99] W. Bergweiler and A. Hinkkanen. On semiconjugation of entire functions. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 126(3):565–574, 1999.
- [Bis12] C. J. Bishop. A transcendental Julia set of dimension 1. Preprint, 2012.

- 
- [Bis15] C. J. Bishop. Constructing entire functions by quasiconformal folding. *Acta Math.*, 214(1):1–60, 2015.
- [BRS13] W. Bergweiler, P. J. Rippon, and G. M. Stallard. Multiply connected wandering domains of entire functions. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 107(6):1261–1301, 2013.
- [BZ11] W. Bergweiler and J.-H. Zheng. On the uniform perfectness of the boundary of multiply connected wandering domains. *J. Aust. Math. Soc.*, 91(3):289–311, 2011.
- [CG93] L. Carleson and T. W. Gamelin. *Complex dynamics*. Universitext: Tracts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [CL66] E. F. Collingwood and A. J. Lohwater. *The theory of cluster sets*. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 56. Cambridge University Press, Cambridge, 1966.
- [Con78] J. B. Conway. *Functions of one complex variable I*, volume 11 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, second edition, 1978.
- [Dev89] R. L. Devaney. Dynamics of entire maps. In *Dynamical systems and ergodic theory (Warsaw, 1986)*, volume 23 of *Banach Center Publ.*, pages 221–228. PWN, Warsaw, 1989.
- [Die00] R. Diestel. *Graph theory*, volume 173 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 2000.
- [Eke68] V. R. Eke. On the real part of  $zf'(z)/f(z)$  for entire functions of small order. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 18:727–744, 1968.
- [EL87] A. È. Erëmenko and M. J. Ljubich. Examples of entire functions with pathological dynamics. *J. London Math. Soc. (2)*, 36(3):458–468, 1987.
- [EL92] A. È. Erëmenko and M. Y. Lyubich. Dynamical properties of some classes of entire functions. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 42(4):989–1020, 1992.
- [Erë89] A. È. Erëmenko. On the iteration of entire functions. In *Dynamical systems and ergodic theory (Warsaw, 1986)*, volume 23 of *Banach Center Publ.*, pages 339–345. PWN, Warsaw, 1989.
- [Fat19] P. Fatou. Sur les équations fonctionnelles. *Bull. Soc. Math. France*, 47:161–271, 1919.
- [Fat26] P. Fatou. Sur l'itération des fonctions transcendentes Entières. *Acta Math.*, 47(4):337–370, 1926.



- [FL80] W. Fischer and I. Lieb. *Funktionentheorie*, volume 47 of *Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik [Vieweg Studies: Mathematics Course]*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 7. edition, 1980.
- [GK86] L. R. Goldberg and L. Keen. A finiteness theorem for a dynamical class of entire functions. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 6(2):183–192, 1986.
- [Gol69] G. M. Goluzin. *Geometric theory of functions of a complex variable*, volume 26 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1969.
- [Hal07] T. C. Hales. The Jordan curve theorem, formally and informally. *Amer. Math. Monthly*, 114(10):882–894, 2007.
- [Her84] M.-R. Herman. Exemples de fractions rationnelles ayant une orbite dense sur la sphère de Riemann. *Bull. Soc. Math. France*, 112(1):93–142, 1984.
- [Her98] M. E. Herring. Mapping properties of Fatou components. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 23(2):263–274, 1998.
- [Hin94] A. Hinkkanen. On the size of Julia sets. In *Complex analysis and its applications (Hong Kong, 1993)*, volume 305 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, pages 178–189. Longman Sci. Tech., Harlow, 1994.
- [Jul18] G. Julia. Sur l’itération des fonctions rationnelles. *J. Math. Pures Appl.*, 1918.
- [KS08] M. Kisaka and M. Shishikura. On multiply connected wandering domains of entire functions. In *Transcendental dynamics and complex analysis*, volume 348 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 217–250. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008.
- [KY91] J. Kennedy and J. A. Yorke. Basins of Wada. *Phys. D*, 51(1-3):213–225, 1991. *Nonlinear science: the next decade* (Los Alamos, NM, 1990).
- [Mil06] J. Milnor. *Dynamics in one complex variable*, volume 160 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, third edition, 2006.
- [Nev70] R. Nevanlinna. *Analytic functions*. Translated from the second German edition by Phillip Emig. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 162. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1970.
- [New51] M. H. A. Newman. *Elements of the topology of plane sets of points*. Cambridge, At the University Press, 1951. 2nd ed.

- [Os13] J. Osborne. Connectedness properties of the set where the iterates of an entire function are bounded. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 155(3):391–410, 2013.
- [Pom92] C. Pommerenke. *Boundary behaviour of conformal maps*, volume 299 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [Rem07] L. Rempe. On a question of Eremenko concerning escaping components of entire functions. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 39(4):661–666, 2007.
- [RRRS11] G. Rottenfusser, J. Rückert, L. Rempe, and D. Schleicher. Dynamic rays of bounded-type entire functions. *Ann. of Math. (2)*, 173(1):77–125, 2011.
- [RS05] P. J. Rippon and G. M. Stallard. On questions of Fatou and Eremenko. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 133(4):1119–1126, 2005.
- [RS11] P. J. Rippon and G. M. Stallard. Boundaries of escaping Fatou components. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 139(8):2807–2820, 2011.
- [RS12] P. J. Rippon and G. M. Stallard. Fast escaping points of entire functions. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 105(4):787–820, 2012.
- [Sch10] D. Schleicher. Dynamics of entire functions. In *Holomorphic dynamical systems*, volume 1998 of *Lecture Notes in Math.*, pages 295–339. Springer, Berlin, 2010.
- [Six12] D. J. Sixsmith. Simply connected fast escaping Fatou components. *Pure Appl. Math. Q.*, 8(4):1029–1046, 2012.
- [Six13] D. J. Sixsmith. On fundamental loops and the fast escaping set. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 88(3):716–736, 2013.
- [Ste93] N. Steinmetz. *Rational iteration*, volume 16 of *de Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1993.
- [Sul85] D. Sullivan. Quasiconformal homeomorphisms and dynamics. I. Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains. *Ann. of Math. (2)*, 122(3):401–418, 1985.
- [Töp39] H. Töpfer. Über die Iteration der ganzen transzendenten Funktionen, insbesondere von  $\sin z$  und  $\cos z$ . *Math. Ann.*, 117:65–84, 1939.
- [Why42] G. T. Whyburn. *Analytic topology*, volume 28 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, New York, 1942.
- [Zhe06] J.-H. Zheng. On multiply-connected Fatou components in iteration of meromorphic functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 313(1):24–37, 2006.

# Danksagung

Ich möchte mich bei allen bedanken, die mich bei der Erstellung dieser Dissertation unterstützt haben. Herrn Professor Bergweiler danke ich für die außerordentlich gute Betreuung dieser Arbeit und für seine vielfältige Unterstützung. Ich hätte mir keinen besseren Doktorvater wünschen können. Ich danke auch meinen Kommilitonen und Bürokollegen Simon Albrecht und Sebastian Vogel. Wir haben eine tolle Zeit zusammen erlebt. Ebenso danke ich meinem Büronachbarn Daniel Sommerfeld für die gemeinsame Zeit und viele hilfreiche Gespräche. Ich danke Phil Rippon und Gwyneth Stallard für zahlreiche befruchtende Unterhaltungen, die wir sowohl persönlich als auch per E-Mail geführt haben. Besonders bedanke ich mich dafür, dass ich ein Ergebnis der beiden in dieser Arbeit verwenden durfte. Eine Arbeit von Christopher Bishop war der Einstieg in meine Dissertation. Nicht nur hierdurch, sondern auch durch viele E-Mails hat er mir bei meiner Arbeit geholfen, wofür ich mich sehr bedanken möchte. Auf Konferenzen oder Besuchen habe ich viele Personen kennengelernt, die mich unterstützt haben. Besonders nennen möchte ich John Osborne, Lasse Rempe und Dave Sixsmith, mit denen ich mehrere Gespräche führen durfte, die mich auf neue Dinge gestoßen und meinen Horizont erweitert haben. Für das Korrekturlesen dieser Arbeit danke ich Simon Albrecht, Juliane Hansmann und Bettina Liebler. Ein besonderer Dank gilt meiner Freundin Karoline Liebler für ihre Geduld und Unterstützung.



# Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit abgesehen von der Beratung durch den Betreuer meiner Promotion selbstständig unter Einhaltung der Regeln guter wissenschaftlicher Praxis der Deutschen Forschungsgemeinschaft angefertigt habe und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Ich versichere außerdem, dass ich die vorstehende Dissertation nur in diesem und keinem anderen Promotionsverfahren eingereicht habe, und dass diesem Promotionsverfahren keine endgültig gescheiterten Promotionsverfahren vorausgegangen sind.

Kiel, den

---

Markus Baumgartner