

# Untersuchungen zur elektromagnetischen Verträglichkeit bei komplexer und nicht-deterministischer Umgebung

## Dissertation

zur Erlangung des Akademischen Grades  
Doktor der Ingenieurwissenschaften  
(Dr.-Ing.)  
der Technischen Fakultät  
der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

**Kai Körber**

2015

---

## Zusammenfassung

Auf dem Gebiet der Elektromagnetischen Verträglichkeit gewinnt durch die immer höhere Komplexität der betrachteten Systeme und die steigende Zahl an potentiellen Störquellen in der elektromagnetischen Umwelt die Einbeziehung statistischer Effekte zunehmend an Bedeutung. Dies betrifft insbesondere den Bereich der Schirmung gegen hochfrequente elektromagnetische Felder.

In dieser Arbeit wird mit der Statistischen Multipolentwicklung eine neue Methode zur Beschreibung hochfrequenter elektromagnetischer Felder mit kleinen statistischen Variationen präsentiert. Dabei werden die Vorteile der Multipolentwicklung zur kompakten Darstellung elektromagnetischer Felder genutzt und um einen statistischen Aspekt erweitert, indem die Koeffizienten der Entwicklung, die Multipolamplituden, als Zufallsvariablen aufgefasst werden.

Neben der Herleitung der Methode auf Basis der Theorie der Multipolentwicklung und Grundlagen der Stochastik werden ihre Eigenschaften, Vor- und Nachteile diskutiert.

Schließlich wird die Methode in unterschiedlichen Kontexten evaluiert. Zunächst wird eine zweidimensionale zylindrische Schirmstruktur betrachtet, die eine große Bedeutung für theoretische Untersuchungen der Elektromagnetischen Schirmdämpfung hat und eine semi-analytische Bestimmung der Statistischen Multipolamplituden aus einer gegebenen Variation des anregenden Feldes ermöglicht.

Anschließend wird als Beispiel für einen realen Schirm eine vereinfachte dreidimensionale Schirmstruktur untersucht. Die Berechnung der Feldstatistik erfolgt hier durch numerische Simulationen, die Ermittlung der statistischen Multipolamplituden durch eine für diesen Zweck entworfene sphärische Multipolschnittstelle. Sowohl die Multipolschnittstelle als auch die Ergebnisse der Statistischen Multipolentwicklung für die dreidimensionale Schirmgeometrie werden eingehend diskutiert.

---

## Summary

In the field of Electromagnetic Compatibility the investigation of increasingly complex systems in the presence of evermore potential sources of electromagnetic interference demands the inclusion of statistics. This is especially true for the examination of shielding enclosures at high frequencies.

This thesis presents the Statistical Multipole Expansion, a new method for describing high frequency electromagnetic fields in the presence of small statistical variations. It makes use of the known advantages of multipole expansion while adding statistical uncertainty by assuming the coefficients of the expansion to be random variables.

The new method is derived from the theory of multipole expansion and basic stochastics. Its properties, advantages and limits are discussed in detail.

The Statistical Multipole Expansion is evaluated in different contexts. First a two-dimensional cylindrical shielding structure is examined. This geometry is of great interest for the theoretical analysis of shielding effectiveness and the statistical multipole amplitudes can be determined semi-analytically.

Next a simple three-dimensional shielding enclosure is investigated. The field statistics are calculated using numerical simulations. From these the statistical multipole amplitudes are derived using a custom made spherical multipole interface. Both the multipole interface and the resulting multipole expansion are discussed in detail.

---

1. Gutachter: Prof. Dr.-Ing- Ludger Klinkenbusch  
2. Gutachter: Prof. Dr. Ursula van Rienen  
Datum der mündlichen Prüfung: 2015-11-03  
Diese Dissertation wurde zum Druck freigegeben.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>13</b>
1.1	Motivation . . . . .	13
1.2	Konventionen . . . . .	15
1.3	Inhalt dieser Arbeit . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Elektrotechnische Grundlagen</b>	<b>17</b>
2.1	Elektromagnetische Verträglichkeit . . . . .	17
2.1.1	Definition und Begriffe . . . . .	17
2.1.2	Schirmung . . . . .	18
2.1.3	Statistische Beschreibungen . . . . .	20
2.2	Multipolentwicklung . . . . .	21
2.2.1	Die Maxwellschen Gleichungen . . . . .	22
2.2.2	Die vektoriellen Helmholtzgleichungen . . . . .	23
2.2.3	Lösung in Kugelkoordinaten . . . . .	23
2.2.4	Lösung in ebenen Polarkoordinaten . . . . .	25
2.2.5	Konvergenz . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Stochastik</b>	<b>29</b>
3.1	Grundlagen . . . . .	29
3.1.1	Wahrscheinlichkeitsbegriff . . . . .	29
3.1.2	Zufallsvariablen . . . . .	30
3.1.3	Spezielle Verteilungen . . . . .	31
3.1.4	Multivariate Verteilungen . . . . .	34
3.2	Momente von Funktionen von Zufallsvektoren . . . . .	35
3.2.1	Einzelne reelle Zufallsvariable $\mathbf{Y}$ . . . . .	37
3.2.2	Lineare Funktion $g$ . . . . .	38
3.2.3	Einzelne reelle Zufallsvariable $\mathbf{X}$ . . . . .	39
3.3	Numerische Verfahren . . . . .	41

3.4	Erzeugung von Zufallszahlen . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Statistische Multipolanalyse</b>	<b>43</b>
4.1	Der Zufallsvektor $\mathbf{V}$ der Multipolamplituden . . . . .	43
4.2	Der Zufallsvektor $\mathbf{W}$ der Feldkomponenten . . . . .	45
4.3	Bestimmung der Statistik der Schirmdämpfung . . . . .	46
4.4	Kompaktheit der Darstellung . . . . .	48
4.5	Implementierung . . . . .	50
<b>5</b>	<b>Kanonische Geometrien</b>	<b>53</b>
5.1	Ebene Welle im Freiraum . . . . .	53
5.1.1	Variation der Phase . . . . .	54
5.1.2	Variation des Einfallswinkels . . . . .	57
5.1.3	Einfluss der Kovarianzen . . . . .	59
5.2	Geschlitzter Zylinder . . . . .	64
5.2.1	Deterministische Beschreibung . . . . .	64
5.2.2	Statistische Beschreibung . . . . .	66
5.2.3	Schirmdämpfung . . . . .	73
<b>6</b>	<b>Nicht-kanonische Geometrien</b>	<b>77</b>
6.1	Multipolschnittstelle . . . . .	77
6.1.1	Abtastung der Kugeloberfläche . . . . .	78
6.1.2	Bestimmung der Multipolamplituden . . . . .	79
6.1.3	Test der Multipolschnittstelle . . . . .	80
6.1.4	Berechnung der Statistik der Multipolamplituden . . . . .	86
6.2	Leerer Schirm . . . . .	88
6.3	Gefüllter Schirm . . . . .	93
<b>7</b>	<b>Schlussbetrachtung</b>	<b>99</b>
<b>A</b>	<b>Multipolentwicklung</b>	<b>101</b>
A.1	Die Helmholtzgleichungen in Kugelkoordinaten . . . . .	101
A.1.1	Die vektoriellen Helmholtz-Gleichungen für das elektromagnetische Feld . . . . .	101
A.1.2	Die skalare Helmholtzgleichung . . . . .	102
A.2	Die Helmholtzgleichung in ebenen Polarkoordinaten . . . . .	105
A.2.1	Die skalare Helmholtzgleichung in ebenen Polarkoordinaten . . .	106
A.3	Wichtige Funktionen und ihre Eigenschaften . . . . .	108

A.3.1 Legendrepolynome . . . . .	108
A.3.2 Zugeordnete Legendrepolynome . . . . .	108
A.3.3 Kugelflächenfunktionen . . . . .	109
A.3.4 Vektorielle Kugelflächenfunktionen . . . . .	109
A.3.5 Zylinderfunktionen . . . . .	110
A.3.6 Sphärische Zylinderfunktionen . . . . .	110
A.4 Vektoroperatoren . . . . .	111
<b>B Stochastik</b>	<b>113</b>
B.1 Momente von Zufallsvariablen . . . . .	113
B.2 Funktionen von Zufallsvariablen . . . . .	114
B.3 Berechnung der statistischen Momente der Schirmdämpfung . . . . .	127
<b>C Geschlitzter Zylinderschirm, <math>TM_z</math>-Fall</b>	<b>131</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>137</b>
<b>Danksagung</b>	<b>141</b>
<b>Lebenslauf</b>	<b>143</b>



# Abbildungsverzeichnis

1.1	Mögliche Lösungsgebiete der sphärischen Multipolentwicklung in Schirmstrukturen mit und ohne Füllungen . . . . .	14
2.1	Sphärische Besselfunktionen $j_n(\kappa R)$ und Absolutbeträge der sphärischen Hankelfunktionen zweiter Art $h_n^{(2)}(\kappa R)$ . . . . .	24
2.2	Besselfunktionen $J_n(\kappa R)$ und Absolutbeträge der Hankelfunktionen zweiter Art $H_n^{(2)}(\kappa R)$ . . . . .	26
3.1	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen . . . . .	32
4.1	Berechnung der statistischen Momente der verschiedenen Größen . . . . .	44
4.2	Kompaktheit der statistischen Multipolentwicklung . . . . .	49
5.1	Statistische Variationen des Feldes einer ebenen Welle . . . . .	54
5.2	Ebene Welle mit variierender Phase . . . . .	56
5.3	Ebene Welle mit variierendem Einfallswinkel . . . . .	58
5.4	Untersuchung der Kovarianzen des Zufallsvektors $\mathbf{V}$ der Multipolamplituden für eine ebene Welle mit variierender Phase $\psi$ bei einem Einfallswinkel von $\varphi_0 = 0^\circ$ . . . . .	60
5.5	Vektor der Erwartungswerte und Kovarianzmatrix des Zufallsvektors $\mathbf{V}$ der Multipolamplituden für eine ebene Welle mit variierender Phase $\psi$ bei einem Einfallswinkel von $\varphi_0 = 30^\circ$ . . . . .	62
5.6	Untersuchung der Kovarianzen des Zufallsvektors $\mathbf{V}$ der Multipolamplituden für eine ebene Welle mit variierendem Einfallswinkel $\varphi_0$ . . . . .	63
5.7	Geschlitzter PEC-Zylinder in zwei Dimensionen . . . . .	65
5.8	Eine ebene Welle fällt auf einen leeren geschlitzten Zylinder (deterministischer Fall, ohne statistische Variationen) . . . . .	67
5.9	Berechnung der statistischen Momente der Koeffizienten und Feldamplituden beim geschlitzten Zylinder . . . . .	67

---

5.10	Elektrisches Feld für eine ebene Welle mit variierendem Einfallswinkel, die auf einen leeren geschlitzten Zylinder fällt; nicht-resonanter Fall . . .	68
5.11	Elektrisches Feld für eine ebene Welle mit variierendem Einfallswinkel, die auf einen leeren geschlitzten Zylinder fällt; resonanter Fall . . . . .	69
5.12	Elektromagnetische Schirmdämpfung für eine ebene Welle mit variierendem Einfallswinkel, die auf einen leeren geschlitzten Zylinder fällt; nicht-resonanter Fall . . . . .	71
5.13	Elektromagnetische Schirmdämpfung für eine ebene Welle mit variierendem Einfallswinkel, die auf einen leeren geschlitzten Zylinder fällt; resonanter Fall . . . . .	72
5.14	Elektromagnetische Schirmdämpfung entlang $y = 0$ unter Berücksichtigung statistischer Momente der Multipolamplituden und Feldkomponenten bis einschließlich dritter Ordnung (Legende: vgl. Abbildung 5.2b)	74
5.15	Alternatives Schirmwirkungsmaß $K$ für eine ebene Welle mit variierendem Einfallswinkel, die auf einen leeren geschlitzten Zylinder fällt; resonanter Fall . . . . .	75
6.1	Gleichmäßige Verteilung von Punkten auf einer Kugeloberfläche . . . . .	79
6.2	Einfluss verschiedener Parameter auf die Rekonstruktionsfehler $\epsilon_E$ und $\epsilon_H$ für eine ebene Welle im freien Raum unter Annäherung der Integrale durch eine einfache Summe. . . . .	83
6.3	Einfluss verschiedener Parameter auf die Rekonstruktionsfehler $\epsilon_E$ und $\epsilon_H$ für eine ebene Welle im freien Raum nach multiquadratischem Fit der Messwerte auf der Kugel. . . . .	85
6.4	Einfluss des Rekonstruktionsradius $r_{\text{rec}}$ auf die Rekonstruktionsfehler $\epsilon_E$ und $\epsilon_H$ für eine ebene Welle im freien Raum mit verschiedenen maximalen Ordnungen $n_{\text{max}}$ der Multipolentwicklung unter Annäherung der Integrale durch eine einfache Summe. . . . .	87
6.5	Leerer Schirm mit Rekonstruktionskugel und Messfläche zur Validierung	89
6.6	Ergebnisse der statistischen Multipolentwicklung beim leeren quaderförmigen Schirm . . . . .	90
6.7	Ergebnisse der punktweisen Auswertung der Feldstatistik beim leeren quaderförmigen Schirm . . . . .	91
6.8	Vergleich der statistischen Multipolentwicklung mit punktweiser Auswertung der Feldstatistik beim leeren quaderförmigen Schirm . . . . .	92
6.9	Gefüllter Schirm mit Absorptionsfolie und unbestückter Platine . . . . .	93

6.10	Ergebnisse der statistischen Multipolentwicklung beim leeren quaderförmigen Schirm . . . . .	94
6.11	Ergebnisse der punktweisen Auswertung der Feldstatistik beim leeren quaderförmigen Schirm . . . . .	95
6.12	Vergleich der statistischen Multipolentwicklung mit punktweiser Auswertung der Feldstatistik beim leeren quaderförmigen Schirm . . . . .	96



# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Motivation

Die Schirmung elektrischer Geräte ist ein essentieller Bestandteil heutiger Maßnahmen zur Sicherstellung der Elektromagnetischen Verträglichkeit (EMV). Ihr kommt im Bereich der Unterdrückung hochfrequenter elektromagnetischer Beeinflussung – von der Trennung verschiedener Komponenten innerhalb eines Smartphone-Gehäuses bis zu mehrere Meter durchmessenden Abschirmkammern – eine zentrale Rolle zu.

Für komplexe Systeme lassen sich jedoch nur schwer verlässliche Aussagen über die zu erwartende Feldverteilung in einem gegebenen Schirm bei vorgegebener äußerer Beeinflussung machen. Zum einen sind sämtliche Parameter stets nur im Rahmen gewisser Toleranzen bekannt und zum anderen sind reale Systeme häufig so komplex, dass bereits kleine Abweichungen von der untersuchten Geometrie zu großen Abweichungen der Feldverteilung führen. Holland und St. John illustrieren diese Situation in [4] anhand des Beispiels eines Messtechnikers, der zu Beginn einer Messreihe versehentlich eine Getränkedose in der Abschirmkammer vergisst und damit die folgenden Ergebnisse signifikant verfälscht. Das folgende Zitat aus [5] bringt das Dilemma der deterministischen Lösung komplexer Schirmungsprobleme auf den Punkt:

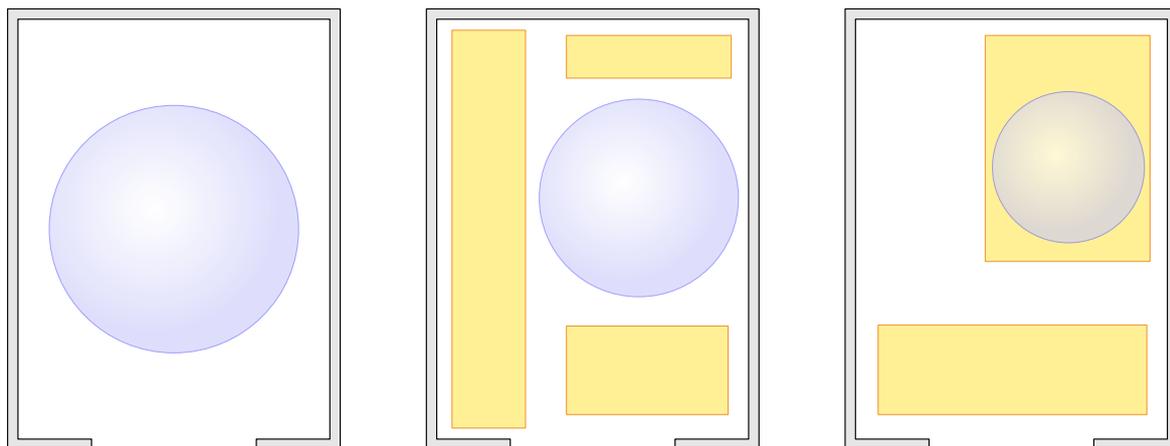
*„[...] an exact treatment of the problem [...] is both hopelessly complex and equally useless.“*

Abhilfe schafft hier nur eine statistische Herangehensweise an das Problem, die Ungenauigkeiten mitberücksichtigt.

Es gibt viele Ansätze einer statistischen Beschreibung von Schirmungsproblemen, einen Überblick liefert Abschnitt 2.1.3. Ein Großteil der Forschung der vergangenen

---

Teile dieser Arbeit wurden bereits in [1], [2] und [3] veröffentlicht.



**Abbildung 1.1:** Mögliche Lösungsgebiete (blau) der sphärischen Multipolentwicklung in Schirmstrukturen mit und ohne Füllungen (gelb)

Zeit beschäftigt sich dabei mit Feldern, wie sie in Modenverwirbelungskammern vorliegen, also extrem nicht-deterministischen Feldern bei denen trotz geringer Information über die konkrete Geometrie sehr genaue Aussagen über die Feldstatistik gemacht werden können. Dies vorliegende Arbeit beschäftigt sich dagegen mit kleinen Schwankungen ansonsten deterministischer Felder, wie sie häufig durch geometrische oder Materialungenauigkeiten – beispielweise aufgrund von Herstellungsprozessen – hervorgerufen werden.

Die sphärische Multipolentwicklung ist eine Entwicklung des elektromagnetischen Feldes innerhalb eines sphärisch berandeten Gebietes. Sie ist insbesondere zur Beschreibung kanonischer, kugelsymmetrischer Geometrien geeignet, kann aber prinzipiell in allen sphärisch berandeten Gebieten verwendet werden, die bestimmte Voraussetzungen erfüllen. Unter anderem lässt sich damit das Feld in homogenen, sphärischen Teilgebieten von Schirminnenräumen beschreiben, wie in Abbildung 1.1 dargestellt, egal ob es sich um den zentralen Bereich eines leeren Schirms, einen leeren Teil eines teilweise gefüllten Schirms oder gar einen homogenen Bereich innerhalb der Schirmfüllung handelt.

In dieser Arbeit wird eine neue Methode präsentiert und evaluiert, die die (sphärische) Multipolentwicklung um statistische Aspekte erweitert und somit ihre Stärken in der Beschreibung von Schirmungsproblemen für Felder mit kleinen statistischen Schwankungen nutzbar macht.

## 1.2 Konventionen

Wenn nicht anders angegeben, werden in dieser Arbeit folgende Konventionen verwendet:

- Vektoren werden durch einen Vektorpfeil gekennzeichnet:  $\vec{r}, \vec{E}, \vec{J}, \dots$
- Zufallsvariablen und -vektoren werden fett gedruckt:  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \dots$
- Phasoren werden mit einem positiven Zeitfaktor  $e^{+j\omega t}$  definiert und durch einen Unterstrich gekennzeichnet:  $\underline{H}_x, \underline{\vec{E}}, \underline{\vec{J}}, \dots$
- Fremdsprachliche Begriffe werden *kursiv* gedruckt.

## 1.3 Inhalt dieser Arbeit

Diese Arbeit gliedert sich in sieben Kapitel. In Kapitel 2 werden die elektrotechnischen Grundlagen dargelegt, die zum Verständnis der folgenden Kapitel nötig sind. Dabei wird sowohl auf die Grundlagen der Elektromagnetischen Verträglichkeit eingegangen, als auch auf die Maxwellsche Theorie und die Multipolentwicklungen des elektromagnetischen Feldes.

Kapitel 3 befasst sich anschließend mit Grundlagen der Stochastik sowie einigen vorbereitenden Herleitungen dazu. Dies umfasst auch einige Anmerkungen zu numerischen Verfahren und zur Erzeugung von Pseudozufallszahlen.

Kapitel 4 behandelt das Kernstück dieser Arbeit, die statistische Multipolentwicklung. Es werden die Grundprinzipien dieser Felddarstellung in zwei und drei Dimensionen sowie einige Eigenschaften vorgestellt. Tests und Anwendungen erfolgen in den beiden folgenden Kapiteln.

In Kapitel 5 wird die statistische Multipolentwicklung auf einfache kanonische Geometrien angewandt. Anhand einer ebenen Welle im freien Raum und einer zylindrischen Schirmstruktur werden verschiedene Eigenschaften, Vor- und Nachteile der Methode erläutert.

In Kapitel 6 schließlich wird die Methode auf realistische dreidimensionale Schirmstrukturen angewandt. Dabei wird insbesondere auf den Einfluss von absorbierenden Materialien im Schirm eingegangen.

Kapitel 7 schließt die Arbeit mit einer Schlussbetrachtung und einem Ausblick auf zukünftige Forschungsthemen ab.



# Kapitel 2

## Elektrotechnische Grundlagen

In diesem Kapitel wird auf zwei für diese Arbeit grundlegende Teilbereiche der Elektrotechnik eingegangen. In Abschnitt 2.1 wird zunächst die Elektromagnetische Verträglichkeit dargestellt, ein Thema mit hoher praktischer Relevanz. Anschließend beschreibt Abschnitt 2.2 die theoretischen Grundlagen der Arbeit und erläutert die hier verwendeten Multipolentwicklungen des elektromagnetischen Feldes.

### 2.1 Elektromagnetische Verträglichkeit

Als Teilgebiet der Elektrotechnik spielt die Elektromagnetische Verträglichkeit (EMV) insbesondere in der Praxis eine wichtige Rolle. Sie beschreibt Maßnahmen zur Koexistenz verschiedener elektronischer und nichtelektronischer Systeme in der elektromagnetischen Umwelt und hat daher eine Vielzahl unterschiedlicher physikalischer Effekte zu berücksichtigen.

Im folgenden Abschnitt 2.1.1 werden zunächst die Definition der EMV sowie zentrale Begriffe erläutert, die in dieser Arbeit benötigt werden. In Abschnitt 2.1.2 wird dann genauer auf das Thema Schirmung eingegangen. Abschnitt 2.1.3 befasst sich schließlich mit statistischen Ansätzen zur Beschreibung der Schirmdämpfung.

#### 2.1.1 Definition und Begriffe

Die EMV-Richtlinie 2004/108/EG [6] und ihre Umsetzung im deutschen EMV-Gesetz [7] definieren den Begriff der Elektromagnetischen Verträglichkeit übereinstimmend als

*„die Fähigkeit eines Betriebsmittels, in seiner elektromagnetischen Umgebung zufriedenstellend zu arbeiten, ohne dabei selbst elektromagnetische*

*Störungen zu verursachen, die für andere Betriebsmittel in derselben Umgebung unannehmbar wären.“*

Diese Definition beinhaltet also sowohl die Begrenzung möglicher Störaussendungen als auch die Widerstandsfähigkeit gegenüber einem gewissen Niveau an Störimmissionen aus der Umgebung.

Ein System, das Störungen aussendet, wird als *Störquelle* bezeichnet, ein System, das durch Störungen beeinflusst wird, als *Störsenke*. Der Übertragungsweg der Störung heißt *Kopplungspfad*, die Störung am Ort der Störquelle *Störgröße*.

Man unterscheidet verschiedene Kopplungsarten: *Galvanische Kopplung* liegt vor, wenn die Störung über eine leitende Verbindung erfolgt, beispielsweise durch einen gemeinsamen Rückleiter zweier Schaltkreise. *Elektrische Kopplung* (auch: *kapazitive Kopplung*) liegt vor, wenn die Störung vorrangig über ein elektrisches Feld erfolgt. Im Falle zweier Schaltkreise kann sie durch Koppelkapazitäten beschrieben werden. *Magnetische Kopplung* (auch: *induktive Kopplung*) bezeichnet die Beeinflussung durch magnetische Felder und wird bei Schaltkreisen entsprechend durch Koppelinduktivitäten modelliert. *Elektromagnetische Kopplung* (auch: *Strahlungskopplung*) ist der allgemeinste Fall und schließt die beiden vorhergehenden Fälle mit ein. Insbesondere bei hohen Frequenzen, bei denen Wellenausbreitung eine Rolle spielt, liegt diese Kopplungsart vor. *Elektrostatische Entladung* ist ein weiterer Spezialfall elektromagnetischer Kopplung. Aufgrund seiner großen praktischen Relevanz wird er jedoch häufig separat behandelt.

Die in dieser Arbeit behandelten Effekte fallen aufgrund hoher Frequenzen gänzlich in den Bereich der elektromagnetischen Kopplung.

### 2.1.2 Schirmung

Schirme gegen elektromagnetische Felder sind ein unverzichtbares Mittel zur Sicherstellung Elektromagnetischer Verträglichkeit. Es geht dabei um Vorrichtungen, die elektromagnetische Felder in einem Raumbereich durch Reflexion, Absorption oder sonstige Effekte abschwächen. Schirme können sowohl am Ort der Störquelle eingesetzt werden, um deren Störaussendung zu reduzieren, als auch am Ort der Störsenke, um vor externen Störungen zu schützen. Im Folgenden wird von Schirmen ausgegangen, die ein zu schützendes Gerät (sog. *Device Under Test*, DUT) umschließen und vor elektromagnetischer Beeinflussung schützen.

Je nach Art der vorliegenden Störung können Material und Geometrie sehr unterschiedlich ausfallen. Während gegen elektrostatische Felder bereits ein dünner, löchriger

leitfähiger Schirm sehr gute Abschirmeigenschaften bietet (Faraday'scher Käfig), sind zur Abschirmung magnetostatischer Felder – wie dem Erdmagnetfeld – dicke Schichten hochpermeablen Materials nötig.

Zur Beurteilung der Schirmwirkung und zum Vergleich verschiedener Schirme wird ein Maß benötigt, das die Störgröße am Ort des DUT in Anwesenheit des Schirms mit der Störgröße in Abwesenheit des Schirms vergleicht. Dabei wird davon ausgegangen, dass sämtliche anderen Bedingungen – wie die Messumgebung und die Art der Störanregung – identisch sind. Für niedrige Frequenzen bietet es sich an die Quadrate der entsprechenden Feldstärken in Relation zu setzen. Da diese Quotienten über viele Größenordnungen variieren, werden sie üblicherweise logarithmisch in Form der elektrischen und magnetischen Schirmdämpfung am Ort  $\vec{r}_0$  angegeben [8]:

$$SE_e(\vec{r}_0) = 20 \log_{10} \frac{|\vec{E}^{un}|_{\vec{r}_0}}{|\vec{E}^{sh}|_{\vec{r}_0}} \text{ dB} \quad (2.1)$$

$$SE_m(\vec{r}_0) = 20 \log_{10} \frac{|\vec{H}^{un}|_{\vec{r}_0}}{|\vec{H}^{sh}|_{\vec{r}_0}} \text{ dB} \quad (2.2)$$

Der Index  $^{sh}$  steht dabei für den geschirmten Fall (*shielded*), der Index  $^{un}$  für den Fall in Abwesenheit des Schirms (*unshielded*). Für hochfrequente Felder ist eine Unterscheidung zwischen elektrischer und magnetischer Schirmdämpfung nicht mehr sinnvoll, da elektrische und magnetische Felder in diesem Fall stark verkoppelt sind. Stattdessen wird die in einem verlustbehafteten Gebiet umgesetzte Leistung für den Grenzfall eines verschwindend kleinen Gebiets betrachtet:

$$a_P(\vec{r}_0) = 10 \log_{10} \frac{P^{un}|_{\vec{r}_0}}{P^{sh}|_{\vec{r}_0}} \text{ dB} \quad (2.3)$$

Dies führt schließlich zur Definition der Elektromagnetischen Schirmdämpfung [8]:

$$SE_{em}(\vec{r}_0) = 10 \log_{10} \frac{2}{\frac{|\vec{E}^{sh}|_{\vec{r}_0}^2}{|\vec{E}^{un}|_{\vec{r}_0}^2} + \frac{|\vec{H}^{sh}|_{\vec{r}_0}^2}{|\vec{H}^{un}|_{\vec{r}_0}^2}} \text{ dB} \quad (2.4)$$

Diese Definitionen haben zwei Nachteile. Zum einen beziehen sie sich stets auf einen einzelnen Punkt  $\vec{r}_0$ , d.h. sie hängen vom Ort innerhalb des Schirms ab. Diese Ortsabhängigkeit ist nicht zu vernachlässigen. Insbesondere in Schirmen, die eine hohe Güte aufweisen, bilden sich bei äußerer Anregung stehende Wellen (Moden) aus, die dafür sorgen, dass sich die Schirmdämpfung zweier nah beieinander liegender Punkte im

selben Schirm leicht um mehrere Größenordnungen unterscheiden kann. Möchte man zwei Schirme vergleichen, die möglicherweise unterschiedlich geformt sind, stellt sich die Frage, an welchem Ort man die Schirmdämpfung angibt. Üblicherweise wird die Schirmdämpfung daher auf den Mittelpunkt des Schirms bezogen. Dies ist eine zweifelhafte Wahl, da der Mittelpunkt nicht repräsentativ für den Rest des Schirms sein muss. Er ist sogar eher ungeeignet, da er häufig einen Symmetriepunkt des Schirms darstellt.

Zum anderen berücksichtigen diese Definitionen keinerlei Unsicherheiten, sei es im Schirm selbst oder in der Art der Anregung. In der Praxis ist es häufig interessanter zu wissen, wie sich ein Schirm unter typischen Bedingungen wahrscheinlich verhält, statt genau zu wissen, wie er sich unter Einfluss einer ganz spezifischen Störquelle verhält.

Ein Weg, diese Schwierigkeiten in den Griff zu bekommen – oder besser gesagt: sie zu umgehen – ist die Betrachtung des *worst case*. Messtechnisch wird hierzu beispielsweise ein Schirm aus unterschiedlichen Richtungen mit elektromagnetischen Feldern bestrahlt, während von einer Messantenne im Inneren lediglich der höchste Wert aufgezeichnet wird.

Befriedigend lösen lassen sich diese Probleme jedoch nur durch statistische Beschreibungen, wie sie im nächsten Abschnitt vorgestellt werden.

### 2.1.3 Statistische Beschreibungen

Einen Überblick über die statistische EMV liefert Kapitel 19 aus [9] sowie [4] und [10]. Eine besondere Bedeutung kommt auf diesem Gebiet in den letzten Jahrzehnten den Modenverwirbelungskammern [11, 12, 13] zu. Dies sind Abschirmkammern hoher Güte, in denen viele Moden gleichzeitig angeregt werden (engl. *overmoded*). Durch einen – zumeist mechanisch als unsymmetrischer Rotor realisierten – Modenverwirbler lassen sich dann für unterschiedliche Rotorpositionen stark unterschiedliche Feldkonfigurationen erreichen. Jede Rotorposition stellt damit eine Stichprobe eines extrem nicht-deterministischen Feldes dar. In einer idealen Modenverwirbelungskammer ist das Feld schließlich unabhängig von der Geometrie von Kammer und Rotor und kann in seinen statistischen Eigenschaften sehr genau beschrieben werden. Zum Beispiel ist jede Komponente des elektrischen Feldes Rayleigh-verteilt und die mit einer linearen Antenne empfangene Leistung exponentialverteilt (siehe Abschnitt 3.1.3).

Aber auch das entgegengesetzte Regime kleiner statistischer Schwankungen ist von Interesse. In [14] wird die *Direct Solution Technique* vorgestellt, die die *Transmission Line Matrix* Methode (TLM) um die Berücksichtigung kleiner Variationen erweitert, indem diese durch niedrige statistische Momente angenähert werden.

In [15] werden zwei neue Maße der Schirmwirkung vorgeschlagen: die *global shield-*

*ing efficiency* (GSE) als Maß der mittleren Schirmdämpfung innerhalb des Schirms und die *disuniformity reduction efficiency* (DRE) als Maß für die Verringerung der Feldinhomogenität durch den Schirm. Beide Größen werden als Integrale über das Schirmvolumen definiert und verzichten damit auf eine ortsabhängige Beschreibung des Feldes. Diese Beschreibung hätte den Vorteil, dass nur zwei skalare Größen zur Charakterisierung eines Schirms herangezogen werden müssten. In [16] wird dagegen argumentiert, dass für eine adäquate Beschreibung der Feldstatistik innerhalb eines Schirms einzelne skalare Größen nicht ausreichen.

In [17] wird vorgeschlagen Histogramme der Schirmdämpfung, die über das Volumen des Schirminnenraumes ermittelt wurden, zu verwenden. Außerdem wird die Robustheit dieser Histogramme gegenüber kleinen Änderungen der Geometrie demonstriert. Allerdings geht auch hier die räumliche Auflösung verloren und zur Beschreibung eines Histogrammes sind je nach Größe der Klassen (engl. *bins*) viele Kenngrößen anzugeben.

Letztendlich ist ein grundsätzliches Problem bei der Wahl eines Schirmwirkungsmaßes der Widerspruch zwischen dem Anspruch, das Feld in seiner ganzen Komplexität zu beschreiben, dies aber gleichzeitig durch möglichst wenige Kenngrößen zu tun.

In dieser Arbeit wird daher ein Mittelweg eingeschlagen, indem das Feld bei kleinen statistischen Variationen durch eine statistische Formulierung der Multipolentwicklung beschrieben wird. Dafür wird zwar eine ganze Reihe skalarer Größen – nämlich die statistischen Momente der Multipolamplituden – benötigt, im Gegenzug bleibt aber bei der Beschreibung die räumliche Auflösung erhalten und die Feldstatistik wird mit einer hohen Genauigkeit wiedergegeben. Somit ist es möglich innerhalb des Schirmes zwischen Regionen hoher und solchen niedriger Schirmdämpfung und gleichzeitig zwischen Regionen stark variierender und Regionen schwach variierender Schirmdämpfung zu unterscheiden.

## 2.2 Multipolentwicklung

Zur Beschreibung elektromagnetischer Felder kommen in dieser Arbeit Multipolentwicklungen zum Einsatz. In den Abschnitten 2.2.1 und 2.2.2 werden die vektoriellen Helmholtzgleichungen aus den Maxwellschen Gleichungen hergeleitet. Deren Lösung in Kugelkoordinaten in Form der sphärischen Multipolentwicklung wird in Abschnitt 2.2.3 angegeben, für den zweidimensionalen Fall liefert Abschnitt 2.2.4 eine Lösung in Zylinderkoordinaten. Abschnitt 2.2.5 befasst sich abschließend mit der Konvergenz bei Abbruch der Entwicklung nach endlicher Ordnung.

## 2.2.1 Die Maxwell'schen Gleichungen

Die Grundlage sämtlicher klassischer elektromagnetischer Effekte bilden die Maxwell'schen Gleichungen. Sie lauten in differentieller Form [18]

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.5)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.6)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.7)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \varrho \quad (2.8)$$

In einem linearen, isotropen und nichtdispersiven Medium gelten zusätzlich die Materialgleichungen

$$\vec{D} = \varepsilon(\vec{r})\vec{E} \quad (2.9)$$

$$\vec{B} = \mu(\vec{r})\vec{H} \quad (2.10)$$

$$\vec{J} = \sigma(\vec{r})\vec{E} \quad (2.11)$$

mit den skalaren Größen Permittivität  $\varepsilon$ , Permeabilität  $\mu$  und elektrischer Leitfähigkeit  $\sigma$ . Ist das betrachtete Gebiet zudem homogen und quellenfrei, vereinfachen sich die Maxwell'schen Gleichungen zu:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \sigma\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.12)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (2.13)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \quad (2.14)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (2.15)$$

Für zeitharmonische Vorgänge bietet sich eine Beschreibung durch Phasoren an. In dieser Arbeit wird folgende Konvention für den Zusammenhang einer Zeitbereichsgröße  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  mit dem zugehörigen Phasor  $\underline{\vec{A}}(\vec{r})$  verwendet:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \text{Re}\{\underline{\vec{A}}(\vec{r}) e^{+j\omega t}\} \quad (2.16)$$

Mit der Abkürzung

$$\varepsilon_{\text{eff}} = \varepsilon - j \frac{\sigma}{\omega} \quad (2.17)$$

ergibt sich für die Maxwell'schen Gleichungen im Phasorbereich dann folgende symmetrische Form:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = j\omega\varepsilon_{\text{eff}}\vec{E} \quad (2.18)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \quad (2.19)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \quad (2.20)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (2.21)$$

### 2.2.2 Die vektoriellen Helmholtzgleichungen

Gegenseitiges Einsetzen der Gleichungen (2.18) und (2.19) ineinander ergibt

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \kappa^2 \vec{E} \quad (2.22)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{H} = \kappa^2 \vec{H} \quad (2.23)$$

mit der Wellenzahl  $\kappa = \omega\sqrt{\mu\varepsilon_{\text{eff}}}$ . Die Verwendung von Gleichung (A.84) führt unter Berücksichtigung der Gleichungen (2.20) und (2.21) auf die vektoriellen Helmholtzgleichungen für das elektrische und das magnetische Feld:

$$\Delta \vec{E} + \kappa^2 \vec{E} = 0 \quad (2.24)$$

$$\Delta \vec{H} + \kappa^2 \vec{H} = 0 \quad (2.25)$$

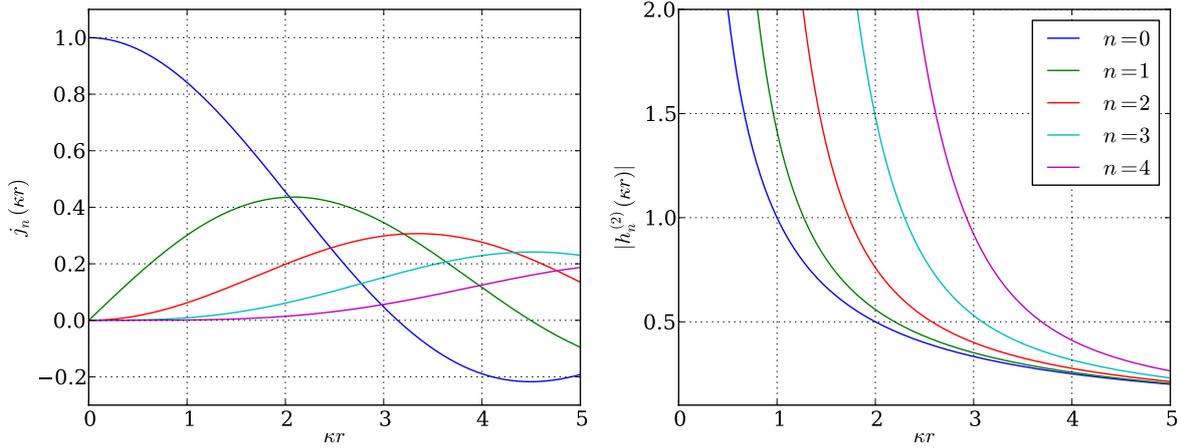
### 2.2.3 Lösung in Kugelkoordinaten

Die sphärische Multipolentwicklung [19]

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} A_{n,m} \vec{N}_{n,m}(\vec{r}) + \frac{Z}{j} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} B_{n,m} \vec{M}_{n,m}(\vec{r}) \quad (2.26)$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{j}{Z} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} A_{n,m} \vec{M}_{n,m}(\vec{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} B_{n,m} \vec{N}_{n,m}(\vec{r}) \quad (2.27)$$

mit dem Wellenwiderstand  $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_{\text{eff}}}}$  stellt, wie in Abschnitt A.1.1 gezeigt, eine Lösung der Helmholtzgleichungen des elektromagnetischen Feldes in Kugelkoordinaten dar. Die Entwicklungskoeffizienten  $A_{n,m}$  und  $B_{n,m}$  werden als elektrische und mag-



**Abbildung 2.1:** Sphärische Besselfunktionen  $j_n(\kappa R)$  und Absolutbeträge der sphärischen Hankelfunktionen zweiter Art  $h_n^{(2)}(\kappa R)$

netische Multipolamplituden bezeichnet. Die Entwicklungsfunktionen

$$\vec{M}_{n,m}(\vec{r}) = z_n(\kappa r) \vec{m}_{n,m}(\vartheta, \varphi) \quad (2.28)$$

$$\vec{N}_{n,m}(\vec{r}) = -\frac{1}{\kappa r} z_n(\kappa r) n(n+1) Y_{n,m}(\vartheta, \varphi) \vec{e}_r - \frac{1}{\kappa r} \frac{d}{dr} [r z_n(\kappa r)] \vec{n}_{n,m}(\vartheta, \varphi) \quad (2.29)$$

heißen vektorielle sphärische Multipolfunktionen und setzen sich aus den vektoriellen Kugelflächenfunktionen

$$\vec{m}_{n,m}(\vartheta, \varphi) = -\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial Y_{n,m}(\vartheta, \varphi)}{\partial \varphi} \vec{e}_\vartheta + \frac{\partial Y_{n,m}(\vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta} \vec{e}_\varphi \quad (2.30)$$

$$\vec{n}_{n,m}(\vartheta, \varphi) = \frac{\partial Y_{n,m}(\vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta} \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial Y_{n,m}(\vartheta, \varphi)}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \quad (2.31)$$

und sphärischen Zylinderfunktionen  $z_n(\kappa r)$  zusammen. Dabei sind  $Y_{n,m}(\vartheta, \varphi)$  die Kugelflächenfunktionen. Die wichtigsten Eigenschaften all dieser Funktionen sind in Abschnitt A.3 aufgeführt.

## Randbedingungen

Je nach Wahl des Lösungsgebietes ist Vorsicht bei der Wahl der sphärischen Zylinderfunktionen  $z_n$  geboten. Gehört der Koordinatenursprung zum Lösungsgebiet, so ist ein  $z_n$  zu wählen, das sich im Ursprung regulär verhält. Von den in Abschnitt A.3.6 genannten sphärischen Zylinderfunktionen hat nur die sphärische Besselfunktion (erster Art)  $j_n(\kappa r)$  diese Eigenschaft.

Erstreckt sich dagegen der Lösungsraum bis ins Unendliche, so muss das gestreute

Feld die Silver-Müller-Ausstrahlungsbedingung [19, 20]

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left\{ \vec{\nabla} \times \begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{bmatrix} + j\kappa \vec{e}_r \times \begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{bmatrix} \right\} = 0 \quad (2.32)$$

erfüllen.<sup>1</sup> Dies ist dann gewährleistet, wenn die verwendeten sphärischen Zylinderfunktionen die Sommerfeld'sche Ausstrahlungsbedingung [21, 20]

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial}{\partial r} + j\kappa \right) \psi(\kappa r) = 0 \quad (2.33)$$

erfüllen.<sup>1</sup> Von den in Abschnitt A.3.6 genannten sphärischen Zylinderfunktionen hat nur die sphärische Hankelfunktion zweiter Art  $h_n^{(2)}(\kappa r)$  diese Eigenschaft, da sie sich im Fernfeld wie eine auslaufende Kugelwelle verhält [22]:

$$h_n^{(2)}(\kappa r) \sim \frac{e^{-j\kappa r}}{\kappa r} \quad \text{für } r \rightarrow \infty \quad (2.34)$$

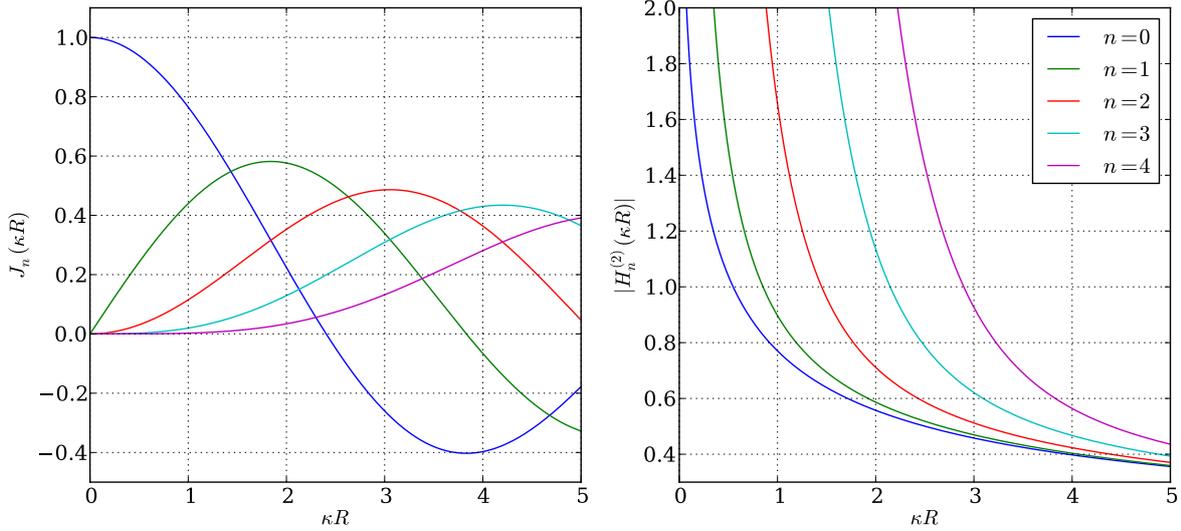
Für eine allgemeine Lösung sind Entwicklungen nach zwei linear unabhängigen sphärischen Zylinderfunktionen erforderlich. In diesem Fall werden zweckmäßigerweise ebenfalls die sphärischen Besselfunktionen  $j_n(\kappa r)$  und die sphärischen Hankelfunktionen zweiter Art  $h_n^{(2)}(\kappa r)$  verwendet. Die niedrigsten Ordnungen dieser Funktionen sind in Abbildung 2.1 skizziert.

## 2.2.4 Lösung in ebenen Polarkoordinaten

Ist das betrachtete Problem translationsinvariant in  $z$ -Richtung, so lässt es sich als rein zweidimensionales Problem auffassen und durch ebene Polarkoordinaten  $R$  und  $\varphi$  beschreiben. Das elektromagnetische Feld lässt sich in diesem Fall in zwei Anteile zerlegen. Ein Anteil besitzt ein lediglich in  $z$ -Richtung polarisiertes elektrisches Feld  $\vec{E} = E_z \vec{e}_z$  und ein rein transversales magnetisches Feld  $\vec{H} = H_R \vec{e}_R + H_\varphi \vec{e}_\varphi$ . Dies wird als transversal magnetischer oder  $\text{TM}_z$ -Fall bezeichnet. Entsprechend besitzt der zweite, transversale elektrische oder  $\text{TE}_z$ -Fall nur ein magnetisches Feld in  $z$ -Richtung  $\vec{H} = H_z \vec{e}_z$  und ein rein transversales elektrisches Feld  $\vec{E} = E_R \vec{e}_R + E_\varphi \vec{e}_\varphi$ .

Eine Lösung der Helmholtzgleichungen für den  $\text{TM}_z$ -Fall ist, wie in Abschnitt A.2

<sup>1</sup>In [20] und [21] werden Phasoren mit einem negativen Zeitfaktor  $e^{-j\omega t}$  definiert. Daher unterscheiden sich die Vorzeichen in den dortigen Formulierungen der Ausstrahlungsbedingungen gegenüber der Darstellung in dieser Arbeit.



**Abbildung 2.2:** Besselfunktionen  $J_n(\kappa R)$  und Absolutbeträge der Hankelfunktionen zweiter Art  $H_n^{(2)}(\kappa R)$

beschrieben, durch die Entwicklung

$$\underline{E}_z = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n Z_n(\kappa R) e^{jn\varphi} \quad (2.35)$$

$$\underline{H}_R = \frac{1}{Z} \frac{1}{\kappa R} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n Z_n(\kappa R) n e^{jn\varphi} \quad (2.36)$$

$$\underline{H}_\varphi = -\frac{j}{Z} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n Z_n'(\kappa R) e^{jn\varphi} \quad (2.37)$$

gegeben. Dabei ist  $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_{eff}}}$  der Wellenwiderstand und die  $Z_n(\kappa R)$  heißen Zylinderfunktionen.  $Z_n'$  bezeichnet hierbei die Ableitung der Zylinderfunktion  $Z_n$  nach ihrem Argument. Eine entsprechende Lösung für den  $TE_z$ -Fall lässt sich analog angeben.

## Randbedingungen

Wie im dreidimensionalen Fall ist auch hier auf eine korrekte Wahl der Zylinderfunktionen  $Z_n(\kappa R)$  zu achten. Gehört der Koordinatenursprung zum Lösungsgebiet, wählt man daher die Besselfunktionen (erster Art)  $J_n(\kappa R)$ , da diese dort regulär bleiben. Erstreckt sich das Lösungsgebiet bis ins Unendliche, werden zur Erfüllung der Sommerfeld'schen Ausstrahlungsbedingung in zwei Dimensionen [20] <sup>1</sup>

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{R} \left( \frac{\partial}{\partial R} + j\kappa \right) \psi(\kappa R) = 0 \quad (2.38)$$

die Hankelfunktionen zweiter Art  $H_n^{(2)}(\kappa R)$  verwendet, da sich diese im Fernfeld wie auslaufende Zylinderwellen verhalten [22]:

$$H_n^{(2)}(\kappa R) \sim \frac{e^{-j\kappa R}}{\sqrt{\kappa R}} \quad \text{für } R \rightarrow \infty \quad (2.39)$$

Für eine allgemeine Lösung sind Entwicklungen nach zwei linear unabhängigen sphärischen Zylinderfunktionen erforderlich. In diesem Fall werden zweckmäßigerweise ebenfalls die Besselfunktionen  $J_n(\kappa R)$  und die Hankelfunktionen zweiter Art  $H_n^{(2)}(\kappa R)$  verwendet. Die niedrigsten Ordnungen dieser Funktionen sind in Abbildung 2.2 skizziert, ihre wichtigsten Eigenschaften werden in Abschnitt A.3.5 aufgeführt.

### 2.2.5 Konvergenz

Eine exakte Darstellung des elektromagnetischen Feldes durch Multipolentwicklungen erfordert stets eine unendliche Summe. In der Praxis – z.B. in der Darstellung der Entwicklung auf einem Computer – ist das jedoch nicht realisierbar.

Ist man an einer Entwicklung des elektromagnetischen Feldes nur innerhalb einer quellenfreien Region um den Koordinatenursprung interessiert, die durch einen maximalen Abstand  $r_{\max}$  zum Koordinatenursprung gekennzeichnet ist, ist es in der Regel ausreichend, die Multipolentwicklung nach der maximalen Ordnung

$$n_{\max} \approx \kappa r_{\max} + 5 \quad (2.40)$$

abzubrechen, um Berechnungen bei einfacher Genauigkeit durchzuführen. Diese Abschätzung gilt sowohl für die sphärische Multipolentwicklung als auch für eine Multipolentwicklung in ebenen Polarkoordinaten [8, 23]. Im Fall der sphärischen Multipolentwicklung entspricht  $r_{\max}$  einem maximalen Kugelradius, im Fall der Entwicklung in ebenen Polarkoordinaten einem maximalen Kreisradius.



# Kapitel 3

## Stochastik

In diesem Kapitel werden die in dieser Arbeit benötigten Teilgebiete der Stochastik präsentiert, so weit sie im Folgenden benötigt werden. Abschnitt 3.1 beschreibt einige Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik. In Abschnitt 3.2 werden einige Rechnungen zu Funktionen von Zufallsvariablen präsentiert, die im nächsten Kapitel wieder aufgegriffen werden. Abschnitt 3.3 befasst sich mit numerischen Methoden in der Stochastik und Abschnitt 3.4 gibt schließlich einen kurzen Überblick über die Erzeugung von Pseudozufallszahlen auf Computersystemen.

### 3.1 Grundlagen

Im Folgenden sollen einige Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik eingeführt werden, die bei der weiteren Diskussion in dieser Arbeit benötigt werden. Auf Herleitungen wird dabei weitestgehend verzichtet; stattdessen wird auf entsprechende Literatur verwiesen. Ein Großteil der stochastischen Grundlagen ist beispielsweise in [24] zu finden.

#### 3.1.1 Wahrscheinlichkeitsbegriff

Ausgangspunkt ist eine Ergebnismenge  $\Omega$ . Innerhalb dieser Ergebnismenge gibt es ein System von Teilmengen von  $\Omega$ , die als Ereignisse bezeichnet werden. Die Ereignisse bilden eine Borel-Algebra auf dem Ergebnisraum. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird jedem Ereignis  $e \subset \Omega$  eine reelle Zahl  $P(e)$  zugeordnet, die als Wahrscheinlichkeit bezeichnet wird und folgende Eigenschaften hat:

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\Omega) = 1$

- $a \subset b \Rightarrow P(a) \leq P(b)$  für  $a, b \subset \Omega$

Daraus folgt, dass die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses stets im Intervall  $[0,1]$  liegt.

### 3.1.2 Zufallsvariablen

Eine Zufallsvariable  $\mathbf{X}$  ordnet jedem Ergebnis  $\omega \in \Omega$  eine reelle Zahl  $X$  zu. Die Zufallsvariable  $\mathbf{X}$  kann durch die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung (*probability density function*, pdf)  $f_X(x)$  beschrieben werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable  $\mathbf{X}$  einen Wert zwischen  $x_0$  und  $x_1$  annimmt, ist dann gegeben durch:

$$P(x_0 < \mathbf{X} < x_1) = \int_{x_0}^{x_1} f_X(x) dx \quad (3.1)$$

Die kumulative Verteilungsfunktion (*cumulative distribution function*, cdf) wird wie folgt definiert:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x') dx' = P(\mathbf{X} < x) \quad (3.2)$$

Sie beschreibt also die Wahrscheinlichkeit, dass  $\mathbf{X}$  kleiner als  $x$  ist und ergibt sich aus dem Integral über die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung  $f_X(x)$ .

Für eine gegebene Zufallsvariable  $\mathbf{X}$  und eine reelle Funktion  $g(x)$  ist  $\mathbf{Y} = g(\mathbf{X})$  wieder eine Zufallsvariable. Der Erwartungswert  $E\{\mathbf{Y}\}$  ist dann gegeben durch:

$$E\{\mathbf{Y}\} = E\{g(\mathbf{X})\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx \quad (3.3)$$

Insbesondere ist der Erwartungswert der Zufallsvariablen  $\mathbf{X}$  selbst – im Folgenden mit  $\eta_X$  bezeichnet – gegeben durch:

$$\eta_X = E\{\mathbf{X}\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \quad (3.4)$$

Eine weitere Möglichkeit zur Beschreibung einer Zufallsvariablen sind ihre Momente. Das  $n$ -te Moment  $m_n$  der Zufallsvariablen  $\mathbf{X}$  wird wie folgt definiert:

$$m_n = E\{\mathbf{X}^n\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x) dx \quad (3.5)$$

Durch Vergleich mit Gleichung (3.3) ist erkennbar, dass der Erwartungswert  $\eta_X$  das erste Moment der Zufallsvariablen  $\mathbf{X}$  ist. Die um den Erwartungswert korrigierten

Momente bezeichnet man als zentrale Momente  $\mu_n$ :

$$\mu_n = E\{(\mathbf{X} - \eta_X)^n\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \eta_X)^n f_X(x) dx \quad (3.6)$$

Das erste zentrale Moment einer Zufallsvariablen ist stets null. Das zweite zentrale Moment  $\mu_2$  wird als Varianz  $\sigma_X^2$  bezeichnet.<sup>2</sup> Die Quadratwurzel aus der Varianz heißt Standardabweichung  $\sigma_X$ .

### 3.1.3 Spezielle Verteilungen

Die einfachste kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung ist die gleichförmige Verteilung, bei der jedem Wert im Intervall  $[a, b]$  ( $a < b$ ) die gleiche Wahrscheinlichkeitsdichte zugeordnet wird:

$$f(x) = U(a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.7)$$

Ihr Erwartungswert  $\eta$  und ihre Standardabweichung  $\sigma$  lauten:

$$\eta = \frac{b+a}{2}, \quad \sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} \quad (3.8)$$

Eine der wichtigsten Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen ist die Gauß- oder Normalverteilung:

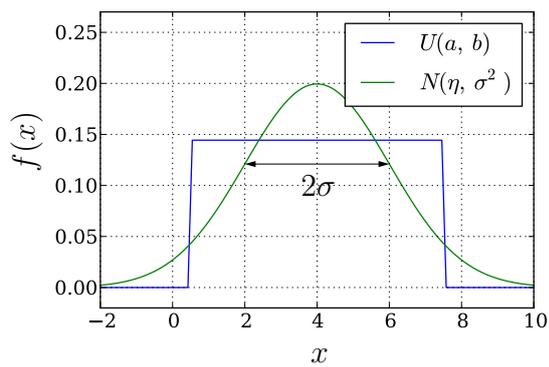
$$f(x) = N(\eta, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.9)$$

mit dem Erwartungswert  $\eta$  und der Standardabweichung  $\sigma$  (siehe Abbildung 3.1a). Die besondere Bedeutung der Normalverteilung liegt in ihrem häufigen Auftreten in der Natur. So beschreibt sie z.B. die Geschwindigkeit von Molekülen eines idealen Gases, die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion im Grundzustand eines quantenmechanischen Oszillators und physikalische Messfehler. Außerdem kann sie für den Fall  $x = k$ ,  $\mu = np$  und  $\sigma^2 = npq$  als kontinuierlicher Grenzfall der diskreten Binomialverteilung

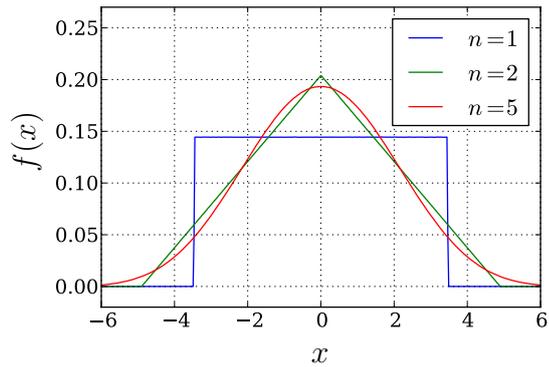
$$P(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \text{mit } p + q = 1, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (3.10)$$

für  $n \rightarrow \infty$  aufgefasst werden und kommt daher als Näherung in der Kombinatorik zum Einsatz. Sämtliche zentralen Momente lassen sich durch die Varianz ausdrücken,

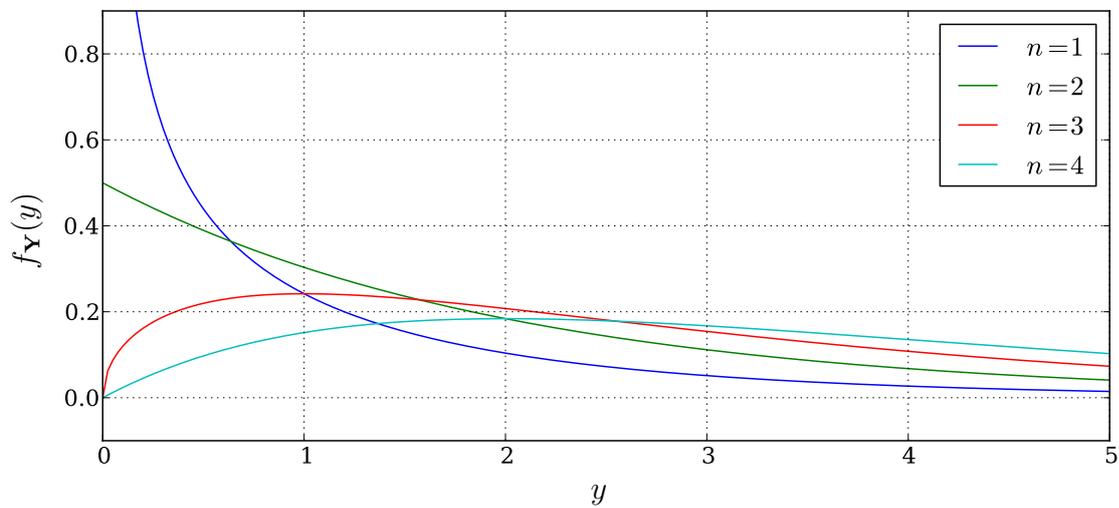
<sup>2</sup>Das dritte bzw. vierte Moment heißt Schiefe bzw. Kurtosis.



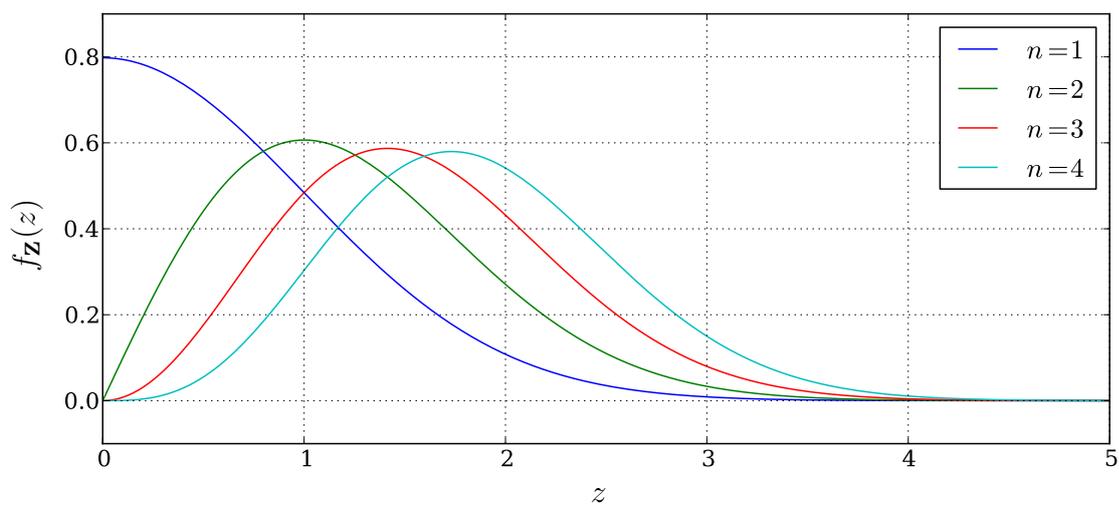
(a) Gleichförmige Verteilung  $U(a, b)$  und Normalverteilung  $N(\eta, \sigma^2)$  (jeweils:  $\eta = 4, \sigma = 2$ )



(b) Annäherung der Normalverteilung durch eine Summe von  $n$  gleichverteilten Zufallsvariablen



(c)  $\chi^2$ -Verteilungen mit  $n$  Freiheitsgraden



(d)  $\chi$ -Verteilungen mit  $n$  Freiheitsgraden

**Abbildung 3.1:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$\mu_n$	0	$\sigma^2$	0	$3\sigma^4$	0	$15\sigma^6$	0	$105\sigma^8$	...

**Tabelle 3.1:** Zentrale Momente  $\mu_n$  einer normalverteilten Zufallsvariablen (nach [22])

wie in Tabelle 3.1 angegeben, wobei insbesondere alle zentralen Momente ungerader Ordnung Null sind. Der Spezialfall  $\eta = 0$ ,  $\sigma = 1$  heißt Standard-Normalverteilung.

Mathematisch wird die Bedeutung der Normalverteilung durch den zentralen Grenzwertsatz untermauert. Dieser besagt, dass unter sehr allgemeinen Annahmen die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Summe

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i \quad (3.11)$$

von kontinuierlichen Zufallsvariablen für  $n \rightarrow \infty$  gegen die Normalverteilung konvergiert

$$f_{\mathbf{X}}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.12)$$

mit  $\eta = \eta_{\mathbf{X}_1} + \dots + \eta_{\mathbf{X}_n}$  und  $\sigma = \sigma_{\mathbf{X}_1} + \dots + \sigma_{\mathbf{X}_n}$ .

Die Normalverteilung ist außerdem mit einer ganzen Familie von weiteren Verteilungen verknüpft, den  $\chi^2$ - und  $\chi$ -Verteilungen. Seien  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$  unabhängige standard-normalverteilte Zufallsvariablen, dann bezeichnet man die Zufallsvariable

$$\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i^2 \quad (3.13)$$

als  $\chi^2$ -verteilt mit  $n$  Freiheitsgraden. Sie wird durch die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f_{\mathbf{Y}}(y) = \begin{cases} \frac{y^{n/2-1}}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} e^{-y/2} & \text{für } y \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.14)$$

beschrieben, die in Abbildung 3.1c dargestellt ist. Die Gamma-Funktion ist wie folgt definiert:

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx \quad (3.15)$$

Ein wichtiger Spezialfall der  $\chi^2$ -Verteilungen ist die Exponentialverteilung (für  $n = 2$ ). Unter denselben Voraussetzungen bezeichnet man die Zufallsvariable

$$\mathbf{Z} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i^2} \quad (3.16)$$

als  $\chi$ -verteilt mit  $n$  Freiheitsgraden. Sie wird durch die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f_{\mathbf{Z}}(z) = \begin{cases} \frac{2}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} z^{n-1} e^{-z^2/2} & \text{für } z \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.17)$$

beschrieben, die in Abbildung 3.1d dargestellt ist. Wichtige Spezialfälle sind hier die Rayleigh-Verteilung (für  $n = 2$ ) sowie die Maxwell-Verteilung (für  $n = 3$ ).

### 3.1.4 Multivariate Verteilungen

Eine Folge von Zufallsvariablen  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n)$  wird als Zufallsvektor bezeichnet, seine Wahrscheinlichkeitsverteilung als multivariate Verteilung. Seine kumulative Verteilungsfunktion  $F_X(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n)$  lässt sich wie folgt interpretieren:

$$F_X(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_X(x'_1, \dots, x'_n) dx'_1 \dots dx'_n = P(\mathbf{X}_1 < x_1, \dots, \mathbf{X}_n < x_n) \quad (3.18)$$

Entsprechendes gilt analog zu Gleichung (3.1) für die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung  $f_X(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n)$  eines Zufallsvektors.

Auch Zufallsvektoren lassen sich durch ihre Momente beschreiben. Die  $p$ -ten Momente eines Zufallsvektors  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n)$  sind definiert als:

$$m_p(\mathbf{X})_{i_1, \dots, i_p} = E\{\mathbf{X}_{i_1} \dots \mathbf{X}_{i_p}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_{i_1} \dots x_{i_p} f_X(x) d^n x \quad (3.19)$$

Die  $p$ -ten zentralen Momente lauten:

$$\begin{aligned} \mu_p(\mathbf{X})_{i_1, \dots, i_p} &= E\{(\mathbf{X}_{i_1} - \eta_{\mathbf{X}_{i_1}}) \dots (\mathbf{X}_{i_p} - \eta_{\mathbf{X}_{i_p}})\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (x_{i_1} - \eta_{\mathbf{X}_{i_1}}) \dots (x_{i_p} - \eta_{\mathbf{X}_{i_p}}) f_X(x) d^n x \end{aligned} \quad (3.20)$$

Von besonderem Interesse sind die Erwartungswerte

$$\begin{aligned} \eta_{\mathbf{X}_i} &= m_1(\mathbf{X})_i = E\{\mathbf{X}_i\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_i f_X(x) d^n x \end{aligned} \quad (3.21)$$

von  $\mathbf{X}$ , die einen Vektor  $\eta_{\mathbf{X}} = (\eta_{\mathbf{X}_1}, \dots, \eta_{\mathbf{X}_n})$  bilden, sowie die zentralen Momente

höherer Ordnung. Die zentralen Momente zweiter Ordnung bilden die Kovarianzmatrix

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) &= C_{\mathbf{X}_i \mathbf{X}_j} = \mu_2(\mathbf{X})_{i,j} = E\{(\mathbf{X}_i - \eta_{\mathbf{X}_i})(\mathbf{X}_j - \eta_{\mathbf{X}_j})\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \eta_{\mathbf{X}_i})(x_j - \eta_{\mathbf{X}_j}) f_X(x) d^m x \end{aligned} \quad (3.22)$$

bestehend aus den Varianzen (Diagonalelemente) und den Kovarianzen (Nichtdiagonalelemente) von  $\mathbf{X}$ .

Die zentralen Momente ab der zweiten Ordnung lassen sich auch anders formulieren. Bis einschließlich vierter Ordnung kann man die relevanten Momente wie folgt schreiben (siehe B.1):

$$\eta_{\mathbf{X}_i} = m_1(\mathbf{X})_i = E\{\mathbf{X}_i\} \quad (3.23)$$

$$C_{\mathbf{X}_i \mathbf{X}_j} = \mu_2(\mathbf{X})_{i,j} = E\{\mathbf{X}_i \mathbf{X}_j\} - \eta_{\mathbf{X}_i} \eta_{\mathbf{X}_j} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \mu_3(\mathbf{X})_{i,j,k} &= E\{\mathbf{X}_i \mathbf{X}_j \mathbf{X}_k\} + 2\eta_{\mathbf{X}_i} \eta_{\mathbf{X}_j} \eta_{\mathbf{X}_k} \\ &\quad - E\{\mathbf{X}_i \mathbf{X}_j\} \eta_{\mathbf{X}_k} - E\{\mathbf{X}_i \mathbf{X}_k\} \eta_{\mathbf{X}_j} - E\{\mathbf{X}_j \mathbf{X}_k\} \eta_{\mathbf{X}_i} \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \mu_4(\mathbf{X})_{i,j,k,l} &= E\{\mathbf{X}_i \mathbf{X}_j \mathbf{X}_k \mathbf{X}_l\} - 3\eta_{\mathbf{X}_i} \eta_{\mathbf{X}_j} \eta_{\mathbf{X}_k} \eta_{\mathbf{X}_l} \\ &\quad - E\{\mathbf{X}_i \mathbf{X}_j \mathbf{X}_k\} \eta_{\mathbf{X}_l} - E\{\mathbf{X}_i \mathbf{X}_j \mathbf{X}_l\} \eta_{\mathbf{X}_k} \\ &\quad - E\{\mathbf{X}_j \mathbf{X}_k \mathbf{X}_l\} \eta_{\mathbf{X}_i} - E\{\mathbf{X}_j \mathbf{X}_k \mathbf{X}_i\} \eta_{\mathbf{X}_l} \\ &\quad - E\{\mathbf{X}_i \mathbf{X}_j\} \eta_{\mathbf{X}_k} \eta_{\mathbf{X}_l} - E\{\mathbf{X}_i \mathbf{X}_k\} \eta_{\mathbf{X}_j} \eta_{\mathbf{X}_l} - E\{\mathbf{X}_i \mathbf{X}_l\} \eta_{\mathbf{X}_j} \eta_{\mathbf{X}_k} \\ &\quad - E\{\mathbf{X}_j \mathbf{X}_k\} \eta_{\mathbf{X}_i} \eta_{\mathbf{X}_l} - E\{\mathbf{X}_j \mathbf{X}_l\} \eta_{\mathbf{X}_i} \eta_{\mathbf{X}_k} - E\{\mathbf{X}_k \mathbf{X}_l\} \eta_{\mathbf{X}_i} \eta_{\mathbf{X}_j} \end{aligned} \quad (3.26)$$

## 3.2 Momente von Funktionen von Zufallsvektoren

Gegeben seien zwei Zufallsvektoren  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_m)$  und  $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n) = g(\mathbf{X})$ , so dass gilt:

$$\mathbf{Y}_\mu = g_\mu(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_m) \quad \text{für } 1 \leq \mu \leq n \quad (3.27)$$

Sind die Funktionen  $g_\mu$  in geschlossener Form gegeben, dann lassen sich die Momente von  $\mathbf{Y}$  direkt aus den Momenten von  $\mathbf{X}$  berechnen. Für die Berechnung der Momente

von  $\mathbf{Y}$  bis einschließlich vierter Ordnung werden nach Gleichungen (3.23) bis (3.26) zunächst folgende Erwartungswerte benötigt:

$$E\{\mathbf{Y}_\mu\} = \int \dots \int g_\mu(x) f_x(x) d^m x \quad (3.28)$$

$$E\{\mathbf{Y}_\mu \mathbf{Y}_\nu\} = \int \dots \int g_\mu(x) g_\nu(x) f_x(x) d^m x \quad (3.29)$$

$$E\{\mathbf{Y}_\mu \mathbf{Y}_\nu \mathbf{Y}_\xi\} = \int \dots \int g_\mu(x) g_\nu(x) g_\xi(x) f_x(x) d^m x \quad (3.30)$$

$$E\{\mathbf{Y}_\mu \mathbf{Y}_\nu \mathbf{Y}_\xi \mathbf{Y}_\zeta\} = \int \dots \int g_\mu(x) g_\nu(x) g_\xi(x) g_\zeta(x) f_x(x) d^m x \quad (3.31)$$

Die Funktionen  $g_\nu(x_1, \dots, x_m)$  lassen sich wie folgt um die Erwartungswerte  $\eta_{\mathbf{X}_1}, \eta_{\mathbf{X}_2}, \dots, \eta_{\mathbf{X}_m}$  in Taylorreihen entwickeln [25]

$$\begin{aligned} g_\nu(x_1, \dots, x_m) &= g_\nu(\eta_{\mathbf{X}_1}, \dots, \eta_{\mathbf{X}_m}) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \sum_{i=1}^m (x_i - \eta_{\mathbf{X}_i}) \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^n g_\nu(\eta_{\mathbf{X}_1}, \dots, \eta_{\mathbf{X}_m}) \end{aligned} \quad (3.32)$$

und in die Ausdrücke 3.28 bis 3.31 einsetzen. Die Taylorentwicklung ist eine unendliche Summe und sorgt dafür, dass jedes Moment von  $\mathbf{Y}$  von unendlich vielen Momenten von  $\mathbf{X}$  abhängt. Im Folgenden werden die Funktionen  $g$  – wenn nicht anders angegeben – stets am Ort  $\eta_{\mathbf{X}}$  ausgewertet. Bricht man die Entwicklungen nach der vierten Ordnung in  $(x_i - \eta_{\mathbf{X}_i})$  ab, so erhält man für die Erwartungswerte von  $\mathbf{Y}$

$$\begin{aligned} \eta_{\mathbf{Y}_\nu} &= m_1(\mathbf{Y})_\nu = E\{\mathbf{Y}_\nu\} \\ &= g_\nu + \sum_{i,j} \frac{\mu_2(\mathbf{X})_{i,j}}{2} \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i,j,k} \frac{\mu_3(\mathbf{X})_{i,j,k}}{6} \frac{\partial^3 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \\ &+ \sum_{i,j,k,l} \frac{\mu_4(\mathbf{X})_{i,j,k,l}}{24} \frac{\partial^4 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} + \dots \end{aligned} \quad (3.33)$$

und für die Kovarianzmatrix:

$$\begin{aligned}
 C_{\mathbf{Y}_\nu \mathbf{Y}_\mu} &= \mu_2(\mathbf{Y})_{\nu, \mu} = E\{\mathbf{Y}_\nu \mathbf{Y}_\mu\} - \eta_{\mathbf{Y}_\nu} \eta_{\mathbf{Y}_\mu} = \sum_{i,j} \mu_2(\mathbf{X})_{i,j} \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial g_\mu}{\partial x_j} \\
 &+ \sum_{i,j,k} \frac{\mu_3(\mathbf{X})_{i,j,k}}{2} \left( \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial g_\mu}{\partial x_k} + \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_j \partial x_k} \right) \\
 &+ \sum_{i,j,k,l} \frac{\mu_4(\mathbf{X})_{i,j,k,l}}{6} \left( \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial^3 g_\mu}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^3 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \frac{\partial g_\mu}{\partial x_l} \right) \\
 &+ \sum_{i,j,k,l} \frac{\mu_4(\mathbf{X})_{i,j,k,l} - \mu_2(\mathbf{X})_{i,j} \mu_2(\mathbf{X})_{k,l}}{4} \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_k \partial x_l} \\
 &+ \dots \tag{3.34}
 \end{aligned}$$

Ausführliche Herleitungen und Ergebnisse für die Momente dritter und vierter Ordnung von  $\mathbf{Y}$  sind im Anhang B.2 zu finden.

Da diese Rechnungen insbesondere unter Berücksichtigung höherer Ordnungen sehr aufwändig sind, werden im Folgenden mehrere wichtige Spezialfälle vorgestellt, auf die im weiteren Verlauf der Arbeit immer wieder zurückgegriffen wird.

### 3.2.1 Einzelne reelle Zufallsvariable $\mathbf{Y}$

Ist  $\mathbf{Y} = g(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_m)$  nur eine einzelne reelle Zufallsvariable (oder ist man nicht an den Korrelationen zwischen den einzelnen  $\mathbf{Y}_\nu$  interessiert), so sind nur die Diagonalelemente der zentralen Momente von Interesse, d.h.  $\nu = \mu = \xi = \zeta$ . Daraus ergibt sich der Erwartungswert

$$\begin{aligned}
 \eta_{\mathbf{Y}} &= m_1(\mathbf{Y}) = E\{\mathbf{Y}\} \\
 &= g + \sum_{i,j} \frac{\mu_2(\mathbf{X})_{i,j}}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i,j,k} \frac{\mu_3(\mathbf{X})_{i,j,k}}{6} \frac{\partial^3 g}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \\
 &+ \sum_{i,j,k,l} \frac{\mu_4(\mathbf{X})_{i,j,k,l}}{24} \frac{\partial^4 g}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} + \dots, \tag{3.35}
 \end{aligned}$$

das zweite zentrale Moment (die Varianz)

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\mathbf{Y}}^2 &= \mu_2(\mathbf{Y}) = E\{\mathbf{Y}^2\} - \eta_{\mathbf{Y}}^2 \\
 &= \sum_{i,j} \mu_2(\mathbf{X})_{i,j} \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} \\
 &\quad + \sum_{i,j,k} \mu_3(\mathbf{X})_{i,j,k} \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_k} \\
 &\quad + \sum_{i,j,k,l} \frac{\mu_4(\mathbf{X})_{i,j,k,l}}{3} \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial^3 g}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} \\
 &\quad + \sum_{i,j,k,l} \frac{\mu_4(\mathbf{X})_{i,j,k,l} - \mu_2(\mathbf{X})_{i,j} \mu_2(\mathbf{X})_{k,l}}{4} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 g}{\partial x_k \partial x_l} + \dots, \quad (3.36)
 \end{aligned}$$

das dritte zentrale Moment (die Schiefe)

$$\begin{aligned}
 \mu_3(\mathbf{Y}) &= E\{\mathbf{Y}^3\} + 2\eta_{\mathbf{Y}}^3 - 3E\{\mathbf{Y}^2\}\eta_{\mathbf{Y}} \\
 &= \sum_{i,j,k} \mu_3(\mathbf{X})_{i,j,k} \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_k} \\
 &\quad + \sum_{i,j,k,l} \frac{3}{2} (\mu_4(\mathbf{X})_{i,j,k,l} - \mu_2(\mathbf{X})_{i,j} \mu_2(\mathbf{X})_{k,l}) \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\partial^2 g}{\partial x_k \partial x_l} + \dots \quad (3.37)
 \end{aligned}$$

und das vierte zentrale Moment (die Kurtosis)

$$\begin{aligned}
 \mu_4(\mathbf{Y}) &= \sum_{i,j,k,l} \mu_4(\mathbf{X})_{i,j,k,l} \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_k} \frac{\partial g}{\partial x_l} \right) \\
 &\quad - \sum_{i,j,k,l} \mu_2(\mathbf{X})_{i,j} \mu_2(\mathbf{X})_{k,l} \left( 9 g^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 g}{\partial x_k \partial x_l} + 12 g \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\partial^2 g}{\partial x_k \partial x_l} \right) + \dots \quad (3.38)
 \end{aligned}$$

### 3.2.2 Lineare Funktion $g$

Für den Fall, dass die Funktionen  $g_\nu$  linear sind, vereinfachen sich die Gleichungen (3.33), (3.34), (B.26) und (B.27) wie folgt, da alle zweiten und höheren Ableitungen von  $g_\nu$  verschwinden:

$$\eta_{\mathbf{Y}\nu} = m_1(\mathbf{Y})_\nu = g_\nu(\eta_{\mathbf{X}}) \quad (3.39)$$

$$C_{\mathbf{Y}\nu\mathbf{Y}\mu} = \mu_2(\mathbf{Y})_{\nu,\mu} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \mu_2(\mathbf{X})_{i,j} \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \Big|_{\eta_{\mathbf{X}}} \frac{\partial g_\mu}{\partial x_j} \Big|_{\eta_{\mathbf{X}}} \quad (3.40)$$

$$\mu_3(\mathbf{Y})_{\nu,\mu,\xi} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \mu_3(\mathbf{X})_{i,j,k} \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \Big|_{\eta_{\mathbf{X}}} \frac{\partial g_\mu}{\partial x_j} \Big|_{\eta_{\mathbf{X}}} \frac{\partial g_\xi}{\partial x_k} \Big|_{\eta_{\mathbf{X}}} \quad (3.41)$$

$$\mu_4(\mathbf{Y})_{\nu,\mu,\xi,\zeta} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \mu_4(\mathbf{X})_{i,j,k,l} \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \Big|_{\eta_{\mathbf{X}}} \frac{\partial g_\mu}{\partial x_j} \Big|_{\eta_{\mathbf{X}}} \frac{\partial g_\xi}{\partial x_k} \Big|_{\eta_{\mathbf{X}}} \frac{\partial g_\zeta}{\partial x_l} \Big|_{\eta_{\mathbf{X}}} \quad (3.42)$$

Insbesondere ist hierbei anzumerken, dass für lineare Funktionen  $g_\nu$  die zentralen Momente  $n$ -ter Ordnung von  $\mathbf{Y}$  nur von den zentralen Momenten  $n$ -ter Ordnung sowie den Erwartungswerten von  $\mathbf{X}$  abhängen.

### 3.2.3 Einzelne reelle Zufallsvariable $\mathbf{X}$

Für den Fall, dass der Zufallsvektor  $\mathbf{Y}$  nur von einer einzelnen reellen Zufallsvariablen  $\mathbf{X}$  (nicht notwendigerweise linear) abhängt, ergeben sich die Momente von  $\mathbf{Y}$  wie folgt:

$$\eta_{\mathbf{Y}_\nu} = m_1(\mathbf{Y})_\nu = g_\nu + \frac{\mu_2(\mathbf{X})}{2} g_\nu'' + \frac{\mu_3(\mathbf{X})}{6} g_\nu''' + \frac{\mu_4(\mathbf{X})}{24} g_\nu'''' + \dots \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{Y}_\nu \mathbf{Y}_\mu} = \mu_2(\mathbf{Y})_{\nu,\mu} &= \mu_2(\mathbf{X}) g'_\nu g'_\mu + \frac{\mu_3(\mathbf{X})}{2} (g''_\nu g'_\mu + g'_\nu g''_\mu) \\ &+ \frac{\mu_4(\mathbf{X})}{6} (g'_\nu g'''_\mu + g'''_\nu g'_\mu) + \frac{\mu_4(\mathbf{X}) - (\mu_2(\mathbf{X}))^2}{4} g''_\nu g''_\mu + \dots \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} \mu_3(\mathbf{Y})_{\nu,\mu,\xi} &= \mu_3(\mathbf{X}) g'_\nu g'_\mu g'_\xi \\ &+ \frac{\mu_4(\mathbf{X}) - (\mu_2(\mathbf{X}))^2}{2} (g'_\nu g'_\mu g''_\xi + g'_\nu g''_\mu g'_\xi + g''_\nu g'_\mu g'_\xi) + \dots \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \mu_4(\mathbf{Y})_{\nu,\mu,\xi,\zeta} &= \mu_4(\mathbf{X}) g'_\nu g'_\mu g'_\xi g'_\zeta \\ &- (\mu_2(\mathbf{X}))^2 \left( \frac{3}{2} g''_\nu g''_\mu g'_\xi g'_\zeta + \frac{3}{2} g''_\nu g'_\mu g''_\xi g'_\zeta + \frac{3}{2} g''_\nu g'_\mu g'_\xi g''_\zeta \right. \\ &+ \frac{3}{2} g'_\nu g''_\mu g''_\xi g'_\zeta + \frac{3}{2} g'_\nu g''_\mu g'_\xi g''_\zeta + \frac{3}{2} g'_\nu g'_\mu g''_\xi g''_\zeta \\ &+ g'_\nu g'_\mu g'_\xi g''_\zeta + g'_\nu g'_\mu g'_\xi g''_\zeta + g'_\nu g'_\mu g'_\xi g''_\zeta + g'_\nu g'_\mu g''_\xi g'_\zeta \\ &+ g'_\nu g'_\mu g''_\xi g'_\zeta + g'_\nu g'_\mu g''_\xi g'_\zeta + g'_\nu g''_\mu g'_\xi g'_\zeta + g'_\nu g''_\mu g'_\xi g'_\zeta \\ &\left. + g'_\nu g''_\mu g'_\xi g'_\zeta + g''_\nu g'_\mu g'_\xi g'_\zeta + g''_\nu g'_\mu g'_\xi g'_\zeta \right) + \dots \end{aligned} \quad (3.46)$$

Zwar hängen auch in diesem Fall die Momente von  $\mathbf{Y}$  von sämtlichen Momenten von  $\mathbf{X}$  ab, doch falls  $\mathbf{X}$  eine Verteilung aufweist, von der alle Momente bekannt sind, lassen sich die Momente von  $\mathbf{Y}$  mit beliebiger Genauigkeit berechnen. Dies ist zum Beispiel bei einer normalverteilten Zufallsvariable der Fall (siehe Tabelle 3.1). Für diesen Fall ergeben sich für die ersten drei Ordnungen statistischer Momente von  $\mathbf{Y}$  bei Berücksichtigung der Momente von  $\mathbf{X}$  bis einschließlich achter Ordnung folgende Ausdrücke.  $g^{(n)}$  bezeichnet dabei die  $n$ -te Ableitung der Funktion  $g(x)$  nach  $x$ :

$$\eta_{\mathbf{Y}_\nu} = m_1(\mathbf{Y})_\nu = g_\nu(\eta_{\mathbf{X}}) + \frac{\sigma_{\mathbf{X}}^2}{2} g_\nu'' + \frac{\sigma_{\mathbf{X}}^4}{8} g_\nu^{(4)} + \frac{\sigma_{\mathbf{X}}^6}{48} g_\nu^{(6)} + \frac{\sigma_{\mathbf{X}}^8}{384} g_\nu^{(8)} + \dots \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{Y}_\nu \mathbf{Y}_\mu} = \mu_2(\mathbf{Y})_{\nu, \mu} &= \sigma_{\mathbf{X}}^2 [g'_\nu g'_\mu] + \frac{\sigma_{\mathbf{X}}^4}{2} [g'_\nu g''_\mu + g''_\nu g'_\mu + g'''_\nu g'_\mu] \\ &+ \frac{\sigma_{\mathbf{X}}^6}{24} [3 (g'_\nu g_\mu^{(5)} + g_\nu^{(5)} g'_\mu) + 6 (g''_\nu g_\mu^{(4)} + g_\nu^{(4)} g''_\mu) + 10 (g'''_\nu g''_\mu)] \\ &+ \frac{\sigma_{\mathbf{X}}^8}{48} [g'_\nu g_\mu^{(7)} + g_\nu^{(7)} g'_\mu + 3 (g''_\nu g_\mu^{(6)} + g_\nu^{(6)} g''_\mu) \\ &\quad + 7 (g'''_\nu g_\mu^{(5)} + g_\nu^{(5)} g'''_\mu) + 8 (g_\nu^{(4)} g_\mu^{(4)})] \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} \mu_3(\mathbf{Y})_{\nu, \mu, \xi} &= \sigma_{\mathbf{X}}^4 [g'_\nu g'_\mu g''_\xi + g'_\nu g''_\mu g'_\xi + g''_\nu g'_\mu g'_\xi] \\ &+ \sigma_{\mathbf{X}}^6 [g'''_\nu g''_\mu g'_\xi + g'''_\nu g'_\mu g''_\xi + g''_\nu g''_\mu g'_\xi + g'_\nu g'''_\mu g''_\xi + g''_\nu g'_\mu g'''_\xi + g'_\nu g''_\mu g'''_\xi \\ &\quad + \frac{1}{2} (g_\nu^{(4)} g'_\mu g'_\xi + g'_\nu g_\mu^{(4)} g'_\xi + g'_\nu g'_\mu g_\xi^{(4)}) + g''_\nu g''_\mu g''_\xi] \\ &+ \sigma_{\mathbf{X}}^8 \left[ \frac{1}{8} (g_\nu^{(6)} g'_\mu g'_\xi + g'_\nu g_\mu^{(6)} g'_\xi + g'_\nu g'_\mu g_\xi^{(6)}) \right. \\ &\quad + \frac{3}{8} (g_\nu^{(5)} g''_\mu g'_\xi + g_\nu^{(5)} g'_\mu g''_\xi + g''_\nu g_\mu^{(5)} g'_\xi \\ &\quad \quad \left. + g'_\nu g_\mu^{(5)} g''_\xi + g''_\nu g'_\mu g_\xi^{(5)} + g'_\nu g''_\mu g_\xi^{(5)}) \right. \\ &\quad + \frac{2}{3} (g_\nu^{(4)} g'''_\mu g'_\xi + g_\nu^{(4)} g'_\mu g'''_\xi + g'''_\nu g_\mu^{(4)} g'_\xi \\ &\quad \quad \left. + g'_\nu g_\mu^{(4)} g'''_\xi + g'''_\nu g'_\mu g_\xi^{(4)} + g'_\nu g'''_\mu g_\xi^{(4)}) \right. \\ &\quad + \frac{5}{4} (g'''_\nu g'''_\mu g''_\xi + g'''_\nu g''_\mu g'''_\xi + g''_\nu g'''_\mu g'''_\xi) \\ &\quad \left. + \frac{3}{32} (g_\nu^{(4)} g''_\mu g''_\xi + g''_\nu g_\mu^{(4)} g''_\xi + g''_\nu g''_\mu g_\xi^{(4)}) \right] \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (3.49)$$

### 3.3 Numerische Verfahren

In den meisten Fällen ist ein Vorgehen, wie es im letzten Abschnitt beschrieben wurde, nicht möglich, da der funktionale Zusammenhang zwischen  $\mathbf{X}$  und  $\mathbf{Y}$  nicht in geschlossener Form bekannt ist. Mit Hilfe von Monte-Carlo-Simulationen ist es aber auch in diesem Fall möglich, die Statistik von  $\mathbf{Y}$  aus der Statistik von  $\mathbf{X}$  zu bestimmen. Dazu wird eine große Zahl  $N$  von Werten der Zufallsvariable  $\mathbf{X}$  gemäß ihrer Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung  $f_{\mathbf{X}}(x)$  zufällig gezogen und für jeden Wert  $x$  der zugehörige Wert  $y$  bestimmt. Aus diesen gesammelten Werten kann schließlich die Statistik von  $\mathbf{Y}$  (d.h. die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung  $f_{\mathbf{Y}}(y)$  oder die Momente von  $\mathbf{Y}$ ) rekonstruiert werden. Um die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $f_{\mathbf{X}}(x)$  hinreichend genau abzutasten und somit ein konvergentes Ergebnis zu erhalten, sind häufig sehr große Zahlen  $N$  an Rechnungen durchzuführen. Wenn die Berechnung eines einzelnen Wertes  $y$  aus einem gegebenen  $x$  überdies aufwändig ist, z.B. weil jede Rechnung eine numerische Simulation erfordert, dann kann der Zeitbedarf einer Monte-Carlo-Simulation schnell sehr groß werden. Eine Parallelisierung der Rechnungen ist hierbei häufig eine wichtige Maßnahme, um die Rechenzeit in Grenzen zu halten.

### 3.4 Erzeugung von Zufallszahlen

Die Erzeugung von Zufallszahlen auf einem Computer ist nicht trivial. Im allgemeinen kommen Pseudozufallszahlengeneratoren (*pseudorandom number generators*, PRNG) zum Einsatz, die deterministische Folgen von Pseudo-Zufallszahlen erzeugen. Es handelt sich dabei nicht um echte Zufallszahlen, da zwei identische PRNGs, die mit dem gleichen Anfangswert (*Seed*) initialisiert werden, stets die selbe Folge von Pseudo-Zufallszahlen erzeugen. Dies ist insbesondere für kryptografische Anwendungen unzureichend, da diese auf eine möglichst starke Unvorhersehbarkeit der Zahlen angewiesen sind. Zur Anwendung z.B. in Monte-Carlo-Simulationen sind dagegen andere Eigenschaften der (Pseudo-)Zufallszahlen entscheidend. Ein robuster und sehr verbreiteter PRNG ist der Mersenne-Twister MT19937 [26]. Dieser wird auch in der Funktion `numpy.random.random` der im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Python-Programmbibliothek `numpy` eingesetzt, um gleichverteilte Zufallszahlen auf einem gegebenen Intervall zu erzeugen [27, 28].<sup>3</sup>

Ist ein PRNG vorhanden, der gleichverteilte Zufallszahlen mit hinreichender Qualität erzeugt, lassen sich aus dessen Ergebnissen auch andere Verteilungen modellieren.

<sup>3</sup>Auch die Python-Standardbibliothek verwendet MT19937 in der Funktion `random.random` [29].

Insbesondere werden im Rahmen dieser Arbeit normalverteilte Pseudo-Zufallszahlen benötigt. Eine einfache, wenn auch ineffiziente, Methode zur Erzeugung von normalverteilten (Pseudo-)Zufallszahlen aus gleichverteilten (Pseudo-)Zufallszahlen macht sich den zentralen Grenzwertsatz zunutze. Addiert man  $n$  unabhängige, auf einem Intervall gleichverteilte Zufallsvariablen, so strebt die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der Summe gemäß Gleichung (3.12) für  $n \rightarrow \infty$  gegen eine Normalverteilung:

$$\sum_{i=1}^n U(-d, d) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0, \sqrt{\frac{n}{3}}d) \quad (3.50)$$

Dies ist in Abbildung 3.1b dargestellt. In der Programmbibliothek `numpy` wird für die Funktion `numpy.random.normal` die effizientere und weit verbreitete Box-Muller-Methode [30, 31] verwendet [27, 28].

# Kapitel 4

## Statistische Multipolanalyse

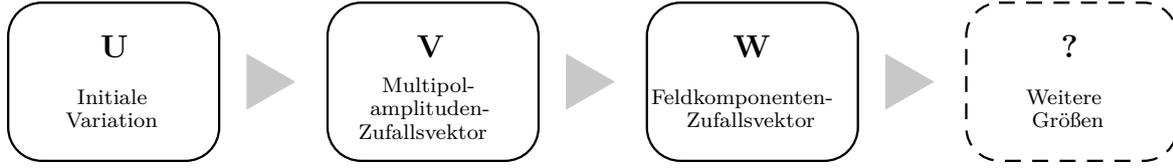
Die in diesem Kapitel vorgestellte statistische Multipolanalyse ist eine äußerst kompakte Darstellung des elektromagnetischen Feldes in einem begrenzten Gebiet, z.B. im Innenraum eines Schirms. Das Verfahren beruht auf einer Multipolentwicklung des Feldes bei gleichzeitiger Behandlung der Multipolamplituden als Zufallsvariablen. Diese Zufallsvariablen werden zu einem Zufallsvektor  $\mathbf{V}$  der Multipolamplituden zusammengefasst und für kleine Variationen durch ihre niedrigsten statistischen Momente beschrieben. In Abschnitt 4.1 wird dies detailliert erläutert. Abschnitt 4.2 widmet sich der Berechnung der Statistik der elektromagnetischen Feldkomponenten aus der Statistik der Multipolamplituden, während sich Abschnitt 4.3 mit der anschließenden Berechnung weiterer abhängiger Größen wie der Schirmdämpfung beschäftigt. Abschnitt 4.4 demonstriert schließlich die besondere Kompaktheit dieser Darstellung eines statistisch variierenden elektromagnetischen Feldes.

### 4.1 Der Zufallsvektor $\mathbf{V}$ der Multipolamplituden

Entwickelt man das elektromagnetische Feld in einem durch einen maximalen Radius begrenzten Gebiet nach Multipolen, so steckt die gesamte Information des Feldes in den Entwicklungskoeffizienten, den Multipolamplituden. Um nun elektromagnetische Felder statistisch zu beschreiben, werden sämtliche Multipolamplituden als Zufallsvariablen aufgefasst.

In der Praxis wird die Multipolentwicklung nach einer endlichen Anzahl von Ordnungen abgebrochen. Die maximale Ordnung sei im Folgenden mit  $n_{max}$  bezeichnet.

Bei der sphärischen Multipolentwicklung gemäß Gleichungen (2.26) und (2.27) ist die Zahl der Multipolamplituden  $A_{n,m}$  bzw.  $B_{n,m}$  bis zur Ordnung  $n_{max}$  gleich  $n_{max}^2 + 2n_{max}$ . Berücksichtigt man, dass sowohl  $A_{n,m}$  als auch  $B_{n,m}$  als komplexe Größen jeweils



**Abbildung 4.1:** Berechnung der statistischen Momente der verschiedenen Größen

aus Real- und Imaginärteil zusammengesetzt sind,<sup>4</sup> so lässt sich das elektromagnetische Feld durch

$$i_{\max}^{sph} = 4(n_{\max}^2 + 2n_{\max}) \quad (4.1)$$

reelle skalare Zufallsvariablen beschreiben.

Bei der Multipolentwicklung in ebenen Polarkoordinaten gemäß Gleichung (2.35) ist die Zahl der Multipolamplituden  $a_n$  bis zur Ordnung  $n_{\max}$  gleich  $2n_{\max} + 1$ . Nach Zerlegung in Real- und Imaginärteile ergeben sich somit

$$i_{\max}^{cyl} = 4n_{\max} + 2 \quad (4.2)$$

reelle skalare Zufallsvariablen.

Die Gesamtheit dieser Zufallsvariablen bildet einen Zufallsvektor, der im Folgenden als  $\mathbf{V}$  bezeichnet wird. Im Falle der sphärischen Multipolentwicklung lautet er also

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^{sph} = & \left( \operatorname{Re}\{A_{1,-1}\}, \operatorname{Im}\{A_{1,-1}\}, \operatorname{Re}\{B_{1,-1}\}, \operatorname{Im}\{B_{1,-1}\}, \right. \\ & \operatorname{Re}\{A_{1,0}\}, \operatorname{Im}\{A_{1,0}\}, \operatorname{Re}\{B_{1,0}\}, \operatorname{Im}\{B_{1,0}\}, \\ & \dots, \\ & \left. \operatorname{Re}\{A_{n_{\max}, n_{\max}}\}, \operatorname{Im}\{A_{n_{\max}, n_{\max}}\}, \operatorname{Re}\{B_{n_{\max}, n_{\max}}\}, \operatorname{Im}\{B_{n_{\max}, n_{\max}}\} \right), \end{aligned} \quad (4.3)$$

im Falle der Multipolentwicklung in ebenen Polarkoordinaten dagegen

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^{cyl} = & \left( \operatorname{Re}\{a_0\}, \operatorname{Im}\{a_0\}, \dots, \operatorname{Re}\{a_{n_{\max}}\}, \operatorname{Im}\{a_{n_{\max}}\}, \right. \\ & \left. \operatorname{Re}\{a_{-n_{\max}}\}, \operatorname{Im}\{a_{-n_{\max}}\}, \dots, \operatorname{Re}\{a_{-1}\}, \operatorname{Im}\{a_{-1}\} \right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Für kleine Variationen des Feldes ist es zweckmäßig, diesen Zufallsvektor  $\mathbf{V}$  näherungsweise durch seine niedrigsten statistischen Momente zu beschreiben. Dies sind zunächst seine Erwartungswerte  $\eta_{\mathbf{V}_i}$ , die einen Vektor der Länge  $i_{\max}$  bilden, sowie seine Kovarianzmatrix  $C_{\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j}$ , die aus  $i_{\max}^2$  Elementen besteht. Auch höhere Momente können berücksichtigt werden, wobei für die Momente  $n$ -ter Ordnung jeweils  $i_{\max}^n$  reelle Werte

<sup>4</sup>Alternativ wäre auch eine Zerlegung in Amplitude und Phase möglich. Dies ist jedoch, wie im folgenden Abschnitt 4.2 gezeigt wird, nicht zweckmäßig.

anzugeben sind.

## 4.2 Der Zufallsvektor $\mathbf{W}$ der Feldkomponenten

Aus dem Zufallsvektor  $\mathbf{V}$  der Multipolamplituden lassen sich die Statistiken sämtlicher (z.B. kartesischer) Feldkomponenten im entwickelten Gebiet direkt bestimmen. Dazu wird ein neuer Zufallsvektor  $\mathbf{W}$  der Feldkomponenten eingeführt, welcher Real- und Imaginärteile beliebiger elektromagnetischer Feldkomponenten an beliebigen Orten im Entwicklungsgebiet umfasst. Die statistischen Momente von  $\mathbf{W}$  lassen sich nun aus den statistischen Momenten von  $\mathbf{V}$  berechnen. Für die sphärische Multipolentwicklung folgt aus den Gleichungen (2.26) und (2.27):

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{\vec{\underline{E}}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \left[ \operatorname{Re}\{A_{n,m}\} \operatorname{Re}\{\vec{N}_{n,m}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\} - \operatorname{Im}\{A_{n,m}\} \operatorname{Im}\{\vec{N}_{n,m}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\} \right] \\ &+ Z \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \left[ \operatorname{Re}\{B_{n,m}\} \operatorname{Im}\{\vec{M}_{n,m}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\} + \operatorname{Im}\{B_{n,m}\} \operatorname{Re}\{\vec{M}_{n,m}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\} \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\{\vec{\underline{E}}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \left[ \operatorname{Re}\{A_{n,m}\} \operatorname{Im}\{\vec{N}_{n,m}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\} + \operatorname{Im}\{A_{n,m}\} \operatorname{Re}\{\vec{N}_{n,m}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\} \right] \\ &+ Z \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \left[ \operatorname{Im}\{B_{n,m}\} \operatorname{Im}\{\vec{M}_{n,m}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\} - \operatorname{Re}\{B_{n,m}\} \operatorname{Re}\{\vec{M}_{n,m}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\} \right] \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{\vec{\underline{H}}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\} &= \frac{1}{Z} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \left[ -\operatorname{Re}\{A_{n,m}\} \operatorname{Im}\{\vec{M}_{n,m}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\} - \operatorname{Im}\{A_{n,m}\} \operatorname{Re}\{\vec{M}_{n,m}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\} \right] \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \left[ \operatorname{Re}\{B_{n,m}\} \operatorname{Re}\{\vec{N}_{n,m}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\} - \operatorname{Im}\{B_{n,m}\} \operatorname{Im}\{\vec{N}_{n,m}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\} \right] \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\{\vec{\underline{H}}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\} &= \frac{1}{Z} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \left[ \operatorname{Re}\{A_{n,m}\} \operatorname{Re}\{\vec{M}_{n,m}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\} - \operatorname{Im}\{A_{n,m}\} \operatorname{Im}\{\vec{M}_{n,m}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\} \right] \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \left[ \operatorname{Re}\{B_{n,m}\} \operatorname{Im}\{\vec{N}_{n,m}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\} + \operatorname{Im}\{B_{n,m}\} \operatorname{Re}\{\vec{N}_{n,m}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\} \right] \end{aligned} \quad (4.8)$$

Dabei ist  $\hat{n}$  ein Einheitsvektor, der in Richtung der gewünschten Koordinate zeigt, für kartesische Koordinaten also  $\hat{n} \in \{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ . Für die Entwicklung eines  $\text{TM}_z$ -Feldes in

ebenen Polarkoordinaten folgt aus Gleichung (2.35):

$$\operatorname{Re}\{\underline{E}_z\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \operatorname{Re}\{a_n\} \operatorname{Re}\{Z_n(\kappa R) e^{jn\varphi}\} - \operatorname{Im}\{a_n\} \operatorname{Im}\{Z_n(\kappa R) e^{jn\varphi}\} \right] \quad (4.9)$$

$$\operatorname{Im}\{\underline{E}_z\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \operatorname{Re}\{a_n\} \operatorname{Im}\{Z_n(\kappa R) e^{jn\varphi}\} + \operatorname{Im}\{a_n\} \operatorname{Re}\{Z_n(\kappa R) e^{jn\varphi}\} \right] \quad (4.10)$$

$$\operatorname{Re}\{\underline{H}_R\} = -\frac{1}{Z} \frac{1}{\kappa R} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \operatorname{Re}\{a_n\} \operatorname{Re}\{Z_n(\kappa R) n e^{jn\varphi}\} - \operatorname{Im}\{a_n\} \operatorname{Im}\{Z_n(\kappa R) n e^{jn\varphi}\} \right] \quad (4.11)$$

$$\operatorname{Im}\{\underline{H}_R\} = -\frac{1}{Z} \frac{1}{\kappa R} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \operatorname{Re}\{a_n\} \operatorname{Im}\{Z_n(\kappa R) n e^{jn\varphi}\} + \operatorname{Im}\{a_n\} \operatorname{Re}\{Z_n(\kappa R) n e^{jn\varphi}\} \right] \quad (4.12)$$

$$\operatorname{Re}\{\underline{H}_\varphi\} = \frac{1}{Z} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \operatorname{Re}\{a_n\} \operatorname{Im}\{Z'_n(\kappa R) e^{jn\varphi}\} + \operatorname{Im}\{a_n\} \operatorname{Re}\{Z'_n(\kappa R) e^{jn\varphi}\} \right] \quad (4.13)$$

$$\operatorname{Im}\{\underline{H}_\varphi\} = -\frac{1}{Z} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \operatorname{Re}\{a_n\} \operatorname{Re}\{Z'_n(\kappa R) e^{jn\varphi}\} - \operatorname{Im}\{a_n\} \operatorname{Im}\{Z'_n(\kappa R) e^{jn\varphi}\} \right] \quad (4.14)$$

Da in beiden Fällen der Zusammenhang zwischen Real- und Imaginärteilen der Multipolamplituden und Real- und Imaginärteilen der Feldkomponenten linear ist, kann zur Berechnung die Vereinfachung aus Abschnitt 3.2.2 herangezogen werden. Die dafür benötigten ersten Ableitungen lassen sich direkt aus den Gleichungen (4.5) bis (4.8) (für sphärische Multipolentwicklung) bzw. aus den Gleichungen (4.9) bis (4.14) (für die Entwicklung in ebenen Polarkoordinaten) ablesen. Aus bekannten Momenten der Multipolamplituden bis einschließlich  $n$ -ter Ordnung lassen sich also die Momente der Feldkomponenten ebenfalls bis einschließlich  $n$ -ter Ordnung berechnen, ohne dass weitere Näherungen erforderlich sind.

Hier zeigt sich auch, dass die Zerlegung der komplexen Multipolamplituden in Real- und Imaginärteil vorteilhafter ist, als etwa eine Aufteilung in Amplitude und Phase. Im letzteren Fall wäre der Zusammenhang zu den Feldkomponenten nicht mehr linear und man müsste zusätzliche Fehler in Kauf nehmen oder von vornherein höhere Ordnungen mit einbeziehen, was den Rechenaufwand stark erhöhen würde.

### 4.3 Bestimmung der Statistik der Schirmdämpfung

Aus den Momenten der Feldstärkekomponenten lässt sich die Statistik weiterer abhängiger Größen bestimmen. Im Folgenden werden die Momente der Elektromagnetis-

chen Schirmdämpfung

$$SE_{em} = 10 \log_{10} \frac{2}{\frac{|\vec{E}^{sh}|^2}{|\vec{E}^{un}|^2} + \frac{|\vec{H}^{sh}|^2}{|\vec{H}^{un}|^2}} \text{dB} \quad (4.15)$$

an einem einzelnen Raumpunkt bestimmt. Für den ungeschirmten Fall wird das Feld einer ebenen Welle im Vakuum mit elektrischer Feldstärkeamplitude 1 V/m angenommen, das heißt:

$$|\vec{E}^{un}| = 1 \text{ V/m} \quad , \quad |\vec{H}^{un}| = \frac{1}{Z_0} \text{ V/m} \quad (4.16)$$

Die elektromagnetische Feldstärke des geschirmten Feldes sei durch die statistischen Momente des Feldamplituden-Zufallsvektors  $\mathbf{W}$  gegeben, der im Falle einer sphärischen Multipolentwicklung aus zwölf

$$\mathbf{W}^{sph} = \left( \underbrace{\text{Re}\{E_x^{sh}\}}_{\mathbf{W}_1}, \text{Im}\{E_x^{sh}\}, \text{Re}\{E_y^{sh}\}, \text{Im}\{E_y^{sh}\}, \dots, \underbrace{\text{Im}\{H_z^{sh}\}}_{\mathbf{W}_{12}} \right) \quad , \quad (4.17)$$

im Falle einer zylindrischen Entwicklung in ebenen Polarkoordinaten aus sechs reellwertigen Komponenten besteht (hier:  $\text{TM}_z$ -Fall):

$$\mathbf{W}^{cyl} = \left( \underbrace{\text{Re}\{E_z^{sh}\}}_{\mathbf{W}_1}, \text{Im}\{E_z^{sh}\}, \text{Re}\{H_R^{sh}\}, \text{Im}\{H_R^{sh}\}, \text{Re}\{H_\varphi^{sh}\}, \underbrace{\text{Im}\{H_\varphi^{sh}\}}_{\mathbf{W}_6} \right) \quad (4.18)$$

Fasst man die Schirmdämpfung als Zufallsvariable  $\mathbf{X} = g(\mathbf{W})$  auf, so ergibt sich

$$\begin{aligned} g^{sph}(w_1, \dots, w_{12}) &= 10 \log_{10} \frac{2}{\sum_{n=1}^6 w_n^2 + Z_0^2 \sum_{n=7}^{12} w_n^2} \\ &= -\frac{10}{\ln 10} \ln \left( \frac{1}{2} \left( \sum_{n=1}^6 w_n^2 + Z_0^2 \sum_{n=7}^{12} w_n^2 \right) \right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

bzw.

$$g^{cyl}(w_1, \dots, w_6) = -\frac{10}{\ln 10} \ln \left( \frac{1}{2} \left( \sum_{n=1}^2 w_n^2 + Z_0^2 \sum_{n=3}^6 w_n^2 \right) \right) \quad (4.20)$$

Die Momente von  $\mathbf{X}$  können in diesem Fall gemäß Abschnitt 3.2.1 bestimmt werden. Die benötigten Ableitungen von  $g$  sind im Anhang B.3 zu finden.

## 4.4 Kompaktheit der Darstellung

Wie oben beschrieben enthält der Zufallsvektor  $\mathbf{V}$  sämtliche Informationen über die Statistik des elektromagnetischen Feldes im betrachteten Gebiet, inklusive aller Korrelationen verschiedener Feldkomponenten zwischen unterschiedlichen Punkten. Um die Kompaktheit dieser Darstellung zu demonstrieren, soll sie mit einer punktweisen Beschreibung der Feldstatistik verglichen werden.

Gegeben sei ein zeitharmonisches elektromagnetisches Feld bei der Frequenz  $f$  in einem sphärischen Gebiet mit dem Radius  $r_0$ . Für eine hinreichende Genauigkeit kann eine sphärische Multipolentwicklung dieses Feldes etwa nach der Ordnung

$$n_{\max} \approx \kappa r_0 + 5 = \frac{2\pi f}{c} r_0 + 5 \quad (4.21)$$

abgebrochen werden. Dabei ist  $c$  die Lichtgeschwindigkeit im Medium. Für eine Beschreibung durch eine statistische Multipolentwicklung folgt daraus gemäß Gleichung (4.1) für die Länge des Multipolamplituden-Zufallsvektors  $\mathbf{V}$ :

$$i_{\max}^{\text{StatME}} = 4(n_{\max}^2 + 2n_{\max}) \quad (4.22)$$

Versucht man andererseits die Feldstatistik punktweise zu beschreiben, benötigt man bei einer üblichen kartesischen Rasterung von 10 Punkten pro Wellenlänge

$$N = \frac{\frac{4}{3}\pi r_0^3}{\left(\frac{\lambda}{10}\right)^3} = \frac{4000}{3c^3} \pi r_0^3 f^3 \quad (4.23)$$

Punkte, an denen das Feld bestimmt werden muss. Pro Punkt sind sechs reelle Feldkomponenten zu berücksichtigen – z.B. die Quadraturkomponenten des elektrischen Feldes –, während sich die übrigen sechs Komponenten daraus rekonstruieren lassen. Die Länge des Zufallsvektors zur punktweisen Beschreibung der Feldstatistik beträgt also:

$$i_{\max}^{\text{Punktweise}} = 6N = \frac{8000}{c^3} \pi r_0^3 f^3 \quad (4.24)$$

Abbildung 4.2a zeigt den Quotienten  $i_{\max}^{\text{Punktweise}}/i_{\max}^{\text{StatME}}$  in Abhängigkeit von der Frequenz  $f$  und dem Radius  $r_0$ .

Für die Multipolentwicklung in ebenen Polarkoordinaten auf einem kreisförmigen Gebiet mit dem Radius  $r_0$  lassen sich die gleichen Überlegungen anstellen. Die Länge des Zufallsvektors der Multipolamplituden ist hier gemäß Gleichung (4.2)

$$i_{\max}^{\text{StatME}} = 2n_{\max} + 1, \quad (4.25)$$

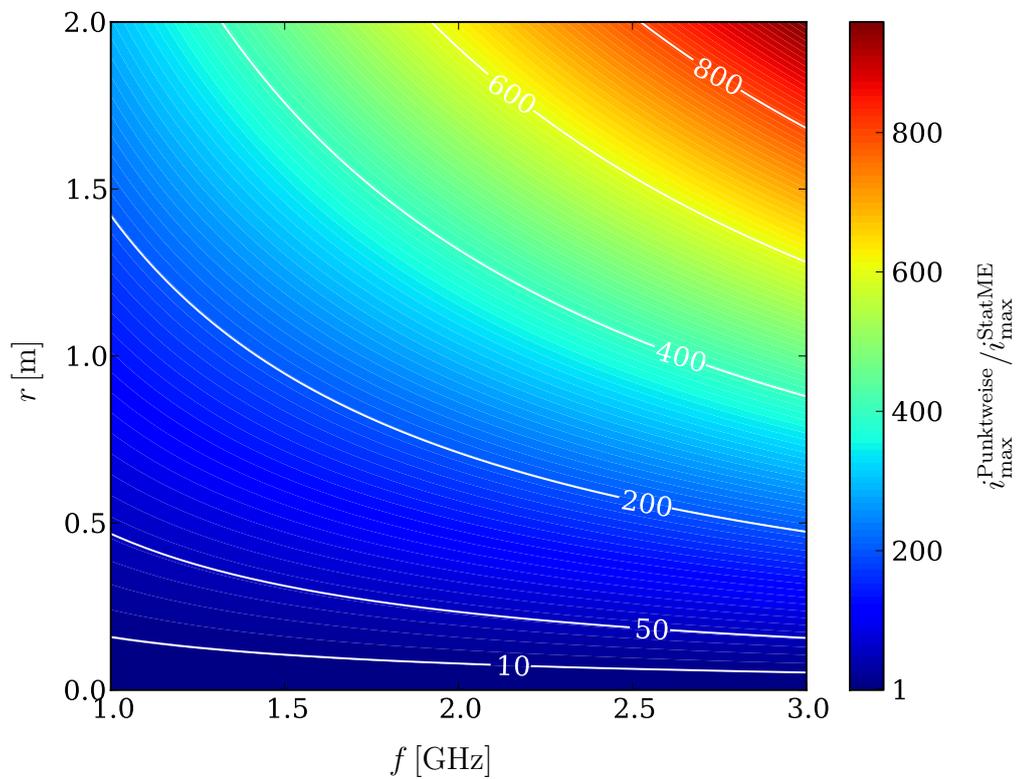
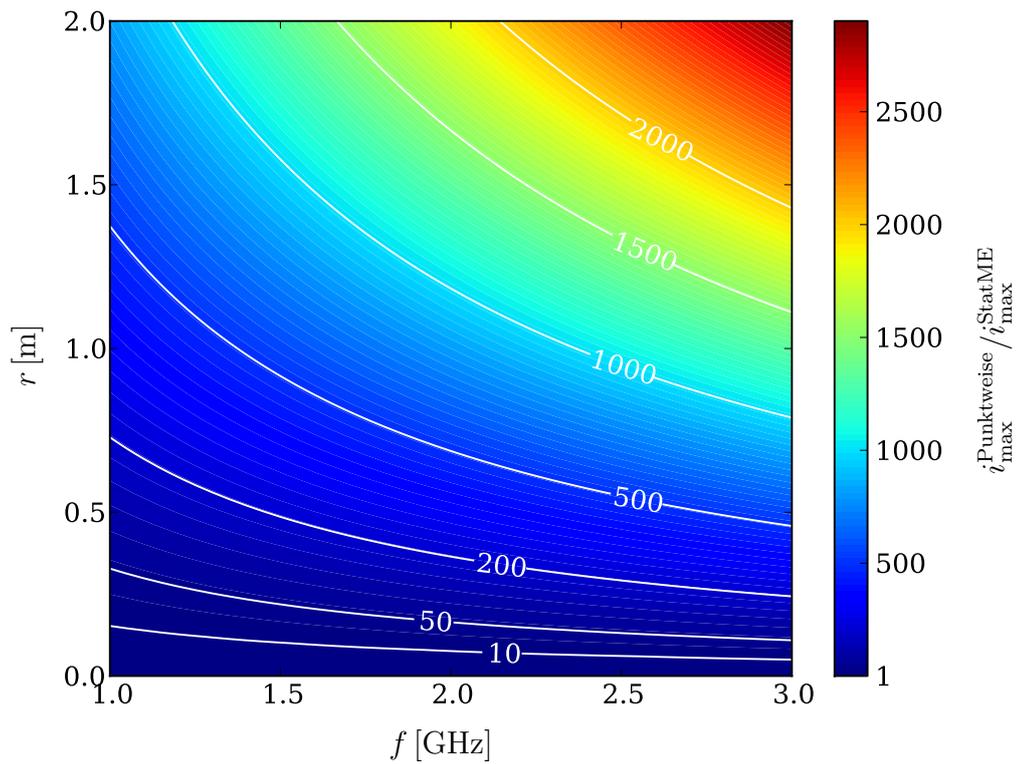


Abbildung 4.2: Kompaktheit der statistischen Multipolentwicklung

während eine kartesische Abtastung der Kreisfläche mit 10 Punkten pro Wellenlänge

$$N = \frac{\pi r_0^2}{\left(\frac{\lambda}{10}\right)^2} = \frac{100}{c^2} \pi r_0^2 f^2 \quad (4.26)$$

Punkte und damit einen Zufallsvektor der Länge

$$i_{\max}^{\text{Punktweise}} = 2N = \frac{200}{c^2} \pi r_0^2 f^2 \quad (4.27)$$

erfordert, da Real- und Imaginärteil von  $E_z$  zusammen die gesamte Feldinformation beinhalten. Der Quotient  $i_{\max}^{\text{Punktweise}}/i_{\max}^{\text{StatME}}$  in Abhängigkeit von der Frequenz  $f$  und dem Radius  $r_0$  ist in Abbildung 4.2b dargestellt.

In beiden Fällen ist deutlich zu sehen, dass für Frequenzen im Gigahertz-Bereich und für Radien größer als einige Zentimeter die statistische Multipolentwicklung deutlich kompakter als die vergleichbare punktweise Beschreibung der Statistik ist. Selbst eine gröbere Abtastung zur punktweisen Beschreibung der Statistik ändert die Situation nicht grundlegend, wie ein Vergleich der Gleichungen (4.24) und (4.22) (bzw. (4.27) und (4.25)) zeigt:  $i_{\max}^{\text{Punktweise}}$  steigt stets mit höheren Potenzen von  $f$  und  $r_0$  an als  $i_{\max}^{\text{StatME}}$ . Dieser Umstand wirkt sich besonders stark aus, da zur Beschreibung statistischer Momente  $n$ -ter Ordnung  $i_{\max}^n$  reelle Werte gespeichert werden müssen.

## 4.5 Implementierung

Die statistische Multipolentwicklung wurde im Rahmen dieser Arbeit in Python implementiert. Dafür wurden sowohl für den zylindrischen als auch für den sphärischen Fall Datenstrukturen definiert, die die in diesem Kapitel beschriebenen statistischen Multipolentwicklungen und statistischen Felder realisieren. Darauf aufbauend wurden verschiedene Programme geschrieben, um die in den folgenden Kapiteln präsentierten Ergebnisse zu generieren. In Kapitel 6 kommt zur numerischen Berechnung des Feldes in zwei verschiedenen Schirmgeometrien zusätzlich die Software CST Microwave Studio<sup>©</sup> [32] zum Einsatz. Sämtliche Datenauswertungen inklusive der im dortigen Kapitel eingeführten Multipolschnittstelle wurden jedoch wieder in Python implementiert.

Python bot sich für diese Arbeit an, da es mit Hilfe der numerischen Bibliotheken `numpy` und `scipy` sowie der Plotbibliothek `matplotlib` und der interaktiven Konsole `IPython` – zusammen häufig als `PyLab` bezeichnet – eine performante Plattform für numerische Berechnungen darstellt. Als interpretierte Hochsprache für den Einsatz in

den Natur- und Ingenieurwissenschaften ist es damit Matlab sehr ähnlich, bietet aber verschiedene Vor- und Nachteile. Im Gegensatz zu letzterem ist Python eine *General Purpose Language*, die sich sowohl für kleine Skripte als auch für große Softwareprojekte eignet und verschiedene Programmierparadigmen – wie objektorientierte oder funktionale Programmierung – unterstützt. Außerdem sind Python und die genannten Bibliotheken freie Software [33] und damit ohne kommerzielle Lizenzen für jeden nutzbar. Andererseits bietet Matlab deutlich mehr spezialisierte Erweiterungen für verschiedene Anwendungsbereiche in Form von *Toolboxes*, ein Nachteil der für die Programmierung im Rahmen dieser Arbeit nicht von Belang war.



# Kapitel 5

## Kanonische Geometrien

Das im vorangegangenen Kapitel beschriebene Verfahren der statistischen Multipolentwicklung lässt sich zwar auf beliebige Schirmgeometrien anwenden, doch ist i.A. nicht klar, wie die statistischen Momente der Multipolamplituden bestimmt werden können. Für gewisse kanonische Geometrien ist die Bestimmung der statistischen Multipolamplituden analytisch oder semianalytisch möglich. In Abschnitt 5.1 wird die statistische Multipolentwicklung zunächst an einer ebenen Welle im freien Raum demonstriert. Anschließend wird in Abschnitt 5.2 eine einfache zweidimensionale Schirmgeometrie vorgestellt, die sich ebenfalls semianalytisch beschreiben lässt, bevor sich Kapitel 6 mit praxisrelevanteren, dreidimensionalen Schirmgeometrien beschäftigt.

### 5.1 Ebene Welle im Freiraum

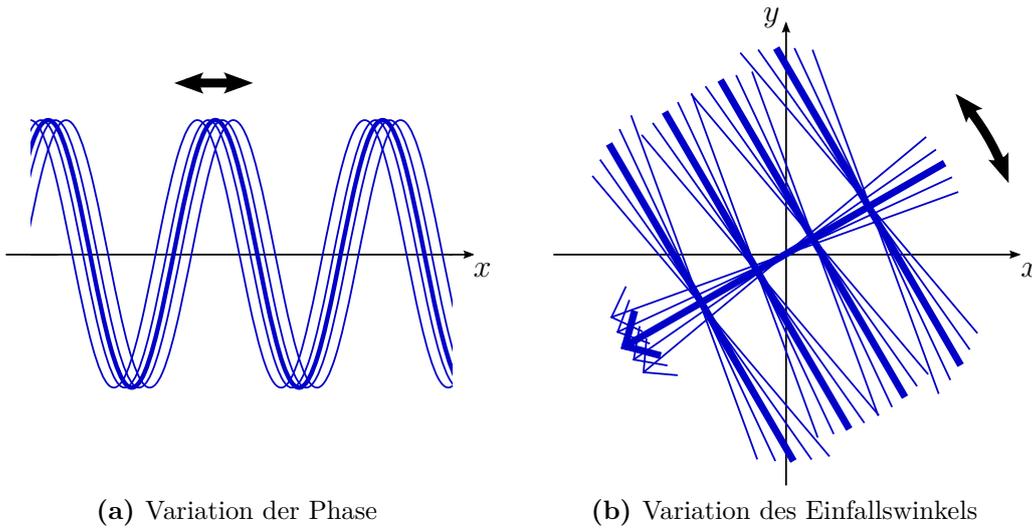
Die sphärischen Multipolamplituden einer ebenen elektromagnetischen Welle im Vakuum lauten wie folgt [19]:

$$A_{nm} = E_0 4\pi j^{n+1} \frac{(-1)^m}{n(n+1)} [\vec{n}_{n,-m}(\vartheta, \varphi) \cdot \vec{e}_p]_{\vartheta=\vartheta_0, \varphi=\varphi_0} \quad (5.1)$$

$$B_{nm} = \frac{E_0}{Z_0} 4\pi j^{n+1} \frac{(-1)^m}{n(n+1)} [\vec{m}_{n,-m}(\vartheta, \varphi) \cdot \vec{e}_p]_{\vartheta=\vartheta_0, \varphi=\varphi_0} \quad (5.2)$$

Dabei ist  $E_0$  die elektrische Amplitude der Welle, der Einheitsvektor  $\vec{e}_p$  gibt die Polarisationsrichtung des elektrischen Feldes an und das Winkelpaar  $(\vartheta_0, \varphi_0)$  definiert die Raumrichtung aus der die Welle einfällt. Als sphärische Zylinderfunktionen kommen bei dieser Entwicklung die sphärischen Besselfunktionen (erster Art)  $j_n(\kappa r)$  zum Einsatz, da das Entwicklungsgebiet den Koordinatenursprung beinhaltet.

Alternativ kann eine ebene Welle im Freiraum, deren Ausbreitungsrichtung inner-



**Abbildung 5.1:** Statistische Variationen des Feldes einer ebenen Welle

halb der  $xy$ -Ebene liegt, auch durch die zylindrische Entwicklung aus Abschnitt 2.2.4 dargestellt werden. Für eine solche Welle, die elektrisch in  $z$ -Richtung polarisiert ist (TM <sub>$z$</sub> -Fall), ergeben sich folgende Koeffizienten [8]:

$$a_n = E_0 j^n e^{-jn\varphi_0} \quad (5.3)$$

Auch hier ist  $E_0$  die elektrische Amplitude und  $\varphi_0$  ist der Winkel, unter dem das Feld einfällt. Als Zylinderfunktionen werden in dieser Entwicklung die Besselfunktionen (erster Art)  $J_n(\kappa R)$  verwendet.

Im Folgenden wird letztere Darstellung gewählt, um einige grundlegende Eigenschaften der statistischen Multipolentwicklung zu demonstrieren.

### 5.1.1 Variation der Phase

Eine statistische Variation wird nun auf zwei verschiedene Weisen eingebracht. Zunächst soll die Phase der einfallenden Welle variiert werden, was einem Verschmieren der Wellenfronten in Ausbreitungsrichtung entspricht, wie es in Abbildung 5.1a angedeutet ist. Dazu werden die Multipolamplituden der ebenen Welle aus Gleichung (5.3) mit einem Phasenfaktor  $e^{j\Psi}$  multipliziert, wobei  $\Psi$  eine normalverteilte Zufallsvariable ist:

$$a'_n = a_n e^{j\Psi} \quad (5.4)$$

Aus den statistischen Momenten von  $\Psi$  lassen sich dann die statistischen Momente des Multipolamplituden-Zufallsvektors  $\mathbf{V}$  errechnen, der die Real- und Imaginärteile

der Koeffizienten  $a'_n$  beschreibt. Da der Zusammenhang von  $\Psi$  und  $\mathbf{V}$  hier nicht linear ist, ist eine Bestimmung der Momente von  $\mathbf{V}$  trotz Kenntnis der Momente von  $\Psi$  nur näherungsweise möglich. Weil  $\Psi$  aber nur eine einzelne reelle Zufallsvariable und darüber hinaus normalverteilt ist, lässt sich das in Abschnitt 3.2.3 beschriebene Vorgehen zur Berechnung nutzen.

Die statistischen Momente bis einschließlich der zweiten Ordnung  $\eta_{\mathbf{V}}$  und  $C_{\mathbf{V}\mathbf{V}}$  werden also gemäß der Gleichungen (3.47) und (3.48) aus den Momenten von  $\Psi$  bis einschließlich achter Ordnung bestimmt. Die benötigten Funktionen  $v_\nu = g_\nu(\psi)$ , die den Zusammenhang zwischen  $\Psi$  und den Real- und Imaginärteilen von  $\mathbf{V}$  darstellen, haben in diesem Fall folgende Form:

$$\operatorname{Re}\{a'_n\} = g_1^n(\psi) = \operatorname{Re}\{a_n e^{j\psi}\} = \operatorname{Re}\{a_n\} \cos \psi - \operatorname{Im}\{a_n\} \sin \psi \quad (5.5)$$

$$\operatorname{Im}\{a'_n\} = g_2^n(\psi) = \operatorname{Im}\{a_n e^{j\psi}\} = \operatorname{Re}\{a_n\} \sin \psi + \operatorname{Im}\{a_n\} \cos \psi \quad (5.6)$$

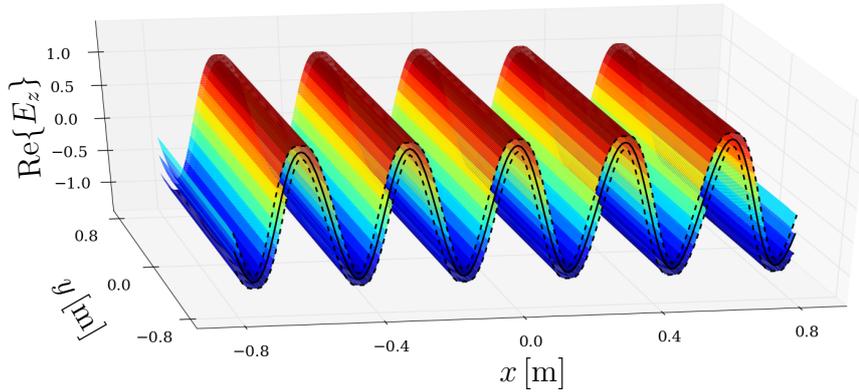
Die ebenfalls benötigten Ableitungen nach  $\psi$  sind also leicht zu bestimmen. Die anschließende Berechnung der Momente des Feldamplituden-Zufallsvektors  $\mathbf{W}$  erfolgt gemäß Abschnitt 4.2.

Abbildung 5.2 zeigt eine ebene Welle, die sich in positive  $x$ -Richtung ausbreitet, bei variierender Phase  $\psi$  mit:

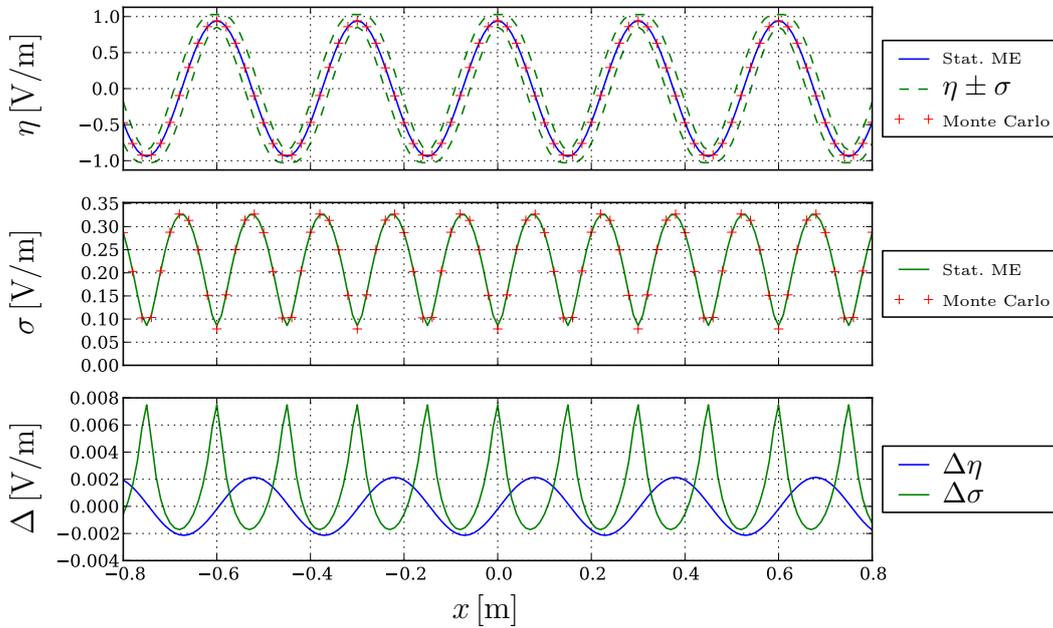
$$\eta_\psi = 0, \quad \sigma_\psi = 20^\circ \quad (5.7)$$

Abbildung 5.2a zeigt exemplarisch den Realteil der  $z$ -Komponente der elektrischen Feldstärke. Die mittlere Fläche gibt den Erwartungswert an, während die obere und untere Fläche den Erwartungswert zuzüglich bzw. abzüglich einer Standardabweichung kennzeichnen. Gut zu erkennen ist die sinusförmige Struktur der in  $x$ -Richtung laufende Welle, deren ebene Wellenfronten nicht von  $y$  abhängen.

Für eine genauere Betrachtung sind in Abbildung 5.2b entlang eines Schnittes bei  $y = 0$  der Erwartungswert  $\eta(\operatorname{Re}\{E_z\})$  sowie die Standardabweichung  $\sigma(\operatorname{Re}\{E_z\})$  dargestellt. Die blaue durchgezogene Linie im oberen Plot beschreibt den durch die statistische Multipolentwicklung analytisch bestimmten Erwartungswert. Die roten Kreuze markieren die Ergebnisse einer Monte-Carlo-Simulation mit 10.000 Samples. Die grüne durchgezogene Linie im mittleren Plot beschreibt die durch die statistische Multipolentwicklung bestimmte Standardabweichung. Auch hier stehen die roten Kreuze für die Ergebnisse einer entsprechenden Monte-Carlo-Simulation mit 10.000 Samples. Der untere Plot zeigt schließlich die Fehler, d.h. die Abweichungen von Erwartungswert (blau) bzw. Standardabweichung (grün) von der jeweiligen vergleichen-



(a) Die drei Surface-Plots zeigen von oben nach unten den Erwartungswert plus eine Standardabweichung (gestrichelte Linie), den Erwartungswert (durchgezogene Linie) sowie den Erwartungswert minus eine Standardabweichung (gestrichelte Linie) des Realteils der  $z$ -Komponente des elektrischen Feldes.



(b) Realteil der  $z$ -Komponente des elektrischen Feldes entlang der  $x$ -Achse. Der obere Plot zeigt den Erwartungswert gemäß statistischer Multipolentwicklung (blaue durchgezogene Linie), den Erwartungswert plus bzw. minus eine Standardabweichung gemäß statistischer Multipolentwicklung (grüne gestrichelte Linien), sowie den Erwartungswert gemäß Monte-Carlo-Simulation (rote Kreuze). Der mittlere Plot zeigt die Standardabweichung gemäß statistischer Multipolentwicklung (grüne Linie) sowie gemäß Monte-Carlo-Simulation (rote Kreuze). Der untere Plot zeigt die Differenz zwischen den Ergebnissen der statistischen Multipolentwicklung und der Monte-Carlo-Simulation für den Erwartungswert (blaue Linie) und die Standardabweichung (grüne Linie).

**Abbildung 5.2:** Ebene Welle mit variierender Phase  $\psi$  ( $\sigma_\psi = 20^\circ$ ). Dargestellt ist jeweils der Realteil der  $z$ -Komponente des elektrischen Feldes der sich in positive  $x$ -Richtung ausbreitenden und in  $z$ -Richtung polarisierten Welle, basierend auf einer Multipolentwicklung des elektromagnetischen Feldes bis zur maximalen Ordnung  $n_{\max} = 28$ .

den Monte-Carlo-Simulation.

Offensichtlich weicht der sinusförmige Verlauf des Erwartungswertes nicht wesentlich von einer ungestörten ebenen Welle ab, was bei einer solch kleinen Variation der Phase auch zu erwarten war. Auch die Standardabweichung zeigt deutlich das erwartete Verhalten. An den Wendepunkten des Sinusverlaufes, an denen die Auswirkung der Phasenverschiebung am stärksten ist, ist die Standardabweichung maximal und beträgt etwa ein Drittel der maximalen Feldamplitude. An den Extrema des Sinusverlaufes ist die Standardabweichung dagegen minimal, da sich die Phasenvariation dort kaum auswirkt. Die Ergebnisse der statistischen Multipolentwicklung sind also mit dem in Abbildung 5.1a skizzierten, erwarteten Verhalten verträglich.

Auch die Monte-Carlo-Simulationen bestätigen diese Ergebnisse, wie die geringen Fehler im unteren Plot von Abbildung 5.2b zeigen. Die Fehler der Erwartungswerte bleiben durchweg unterhalb von 0,5% der maximalen Feldamplitude, während die Fehler der Standardabweichung sich stets unterhalb von 1% der maximalen Standardabweichung bewegen.

Dieses erste einfache Beispiel bestätigt also die statistische Multipolentwicklung als sehr genaue Beschreibung eines elektromagnetischen Feldes mit kleinen Variationen.

### 5.1.2 Variation des Einfallswinkels

Als zweites Beispiel einer statistischen Variation des Feldes einer ebenen Welle wird nun der Einfallswinkel variiert, wie in Abbildung 5.1b angedeutet. Dazu wird in Gleichung (5.3) der Winkel  $\varphi_0$  als normalverteilte reelle Zufallsvariable  $\Phi_0$  aufgefasst:

$$a_n = E_0 j^n e^{-jn\Phi_0} \quad (5.8)$$

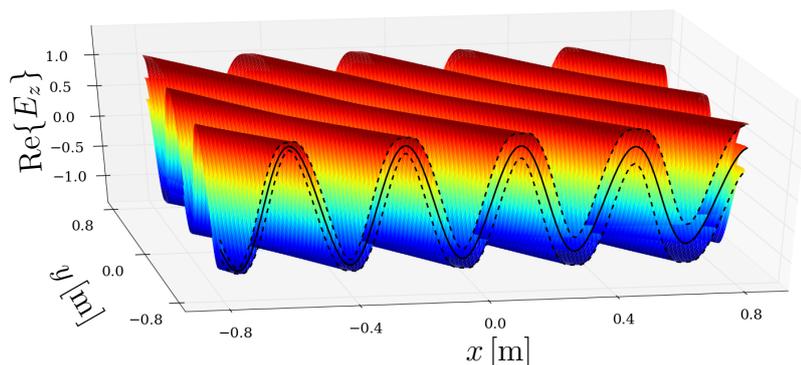
Wieder werden die statistischen Momente bis zweiter Ordnung  $\eta_{\mathbf{V}}$  und  $C_{\mathbf{V}\mathbf{V}}$  gemäß der Gleichungen (3.47) und (3.48) aus den Momenten von  $\Phi_0$  bis einschließlich achter Ordnung bestimmt. Die Funktionen  $v_\nu = g_\nu(\varphi_0)$  lauten in diesem Fall:

$$\operatorname{Re}\{a_n\} = g_1^n(\varphi_0) = E_0 \operatorname{Re}\{e^{jn(\frac{\pi}{2}-\varphi_0)}\} = E_0 \cos\left(n\left[\varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right]\right) \quad (5.9)$$

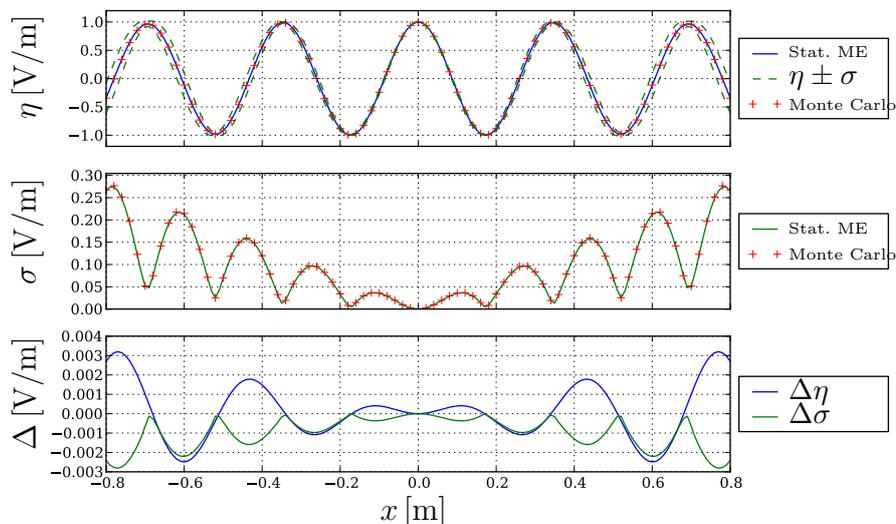
$$\operatorname{Im}\{a_n\} = g_2^n(\varphi_0) = E_0 \operatorname{Im}\{e^{jn(\frac{\pi}{2}-\varphi_0)}\} = -E_0 \sin\left(n\left[\varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right]\right) \quad (5.10)$$

Auch hier sind die Ableitungen nach  $\varphi_0$  leicht zu ermitteln und die anschließende Berechnung der Momente von  $\mathbf{W}$  erfolgt gemäß Abschnitt 4.2.

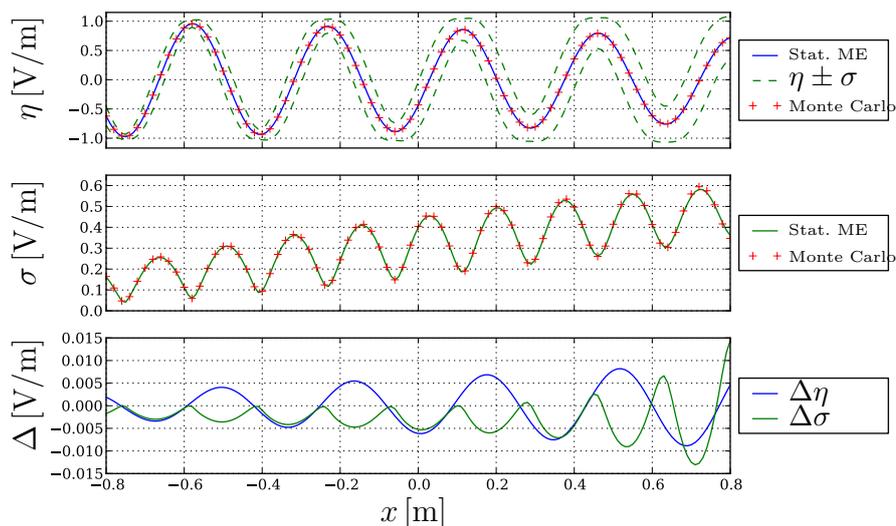
Abbildung 5.3 zeigt eine ebene Welle, die unter dem variierenden Winkel  $\varphi_0$  einfällt,



(a) Erwartungswert ( $\pm$  Standardabweichung) des elektrischen Feldes (Legende: siehe Abbildung 5.2a)



(b) Realteil der  $z$ -Komponente des elektrischen Feldes entlang  $y = 0$  (Legende: siehe Abbildung 5.2b)



(c) Realteil der  $z$ -Komponente des elektrischen Feldes entlang  $y = -0,8$  m (Legende: siehe Abbildung 5.2b)

**Abbildung 5.3:** Ebene Welle mit variierendem Einfallswinkel  $\varphi_0$  ( $\sigma_{\varphi_0} = 2^\circ$ ). Dargestellt ist jeweils der Realteil der  $z$ -Komponente des elektrischen Feldes der in  $z$ -Richtung polarisierten Welle, basierend auf einer Multipolentwicklung bis zur maximalen Ordnung  $n_{\max} = 28$ .

wobei gilt:

$$\eta_{\varphi_0} = 30^\circ, \quad \sigma_{\varphi_0} = 2^\circ \quad (5.11)$$

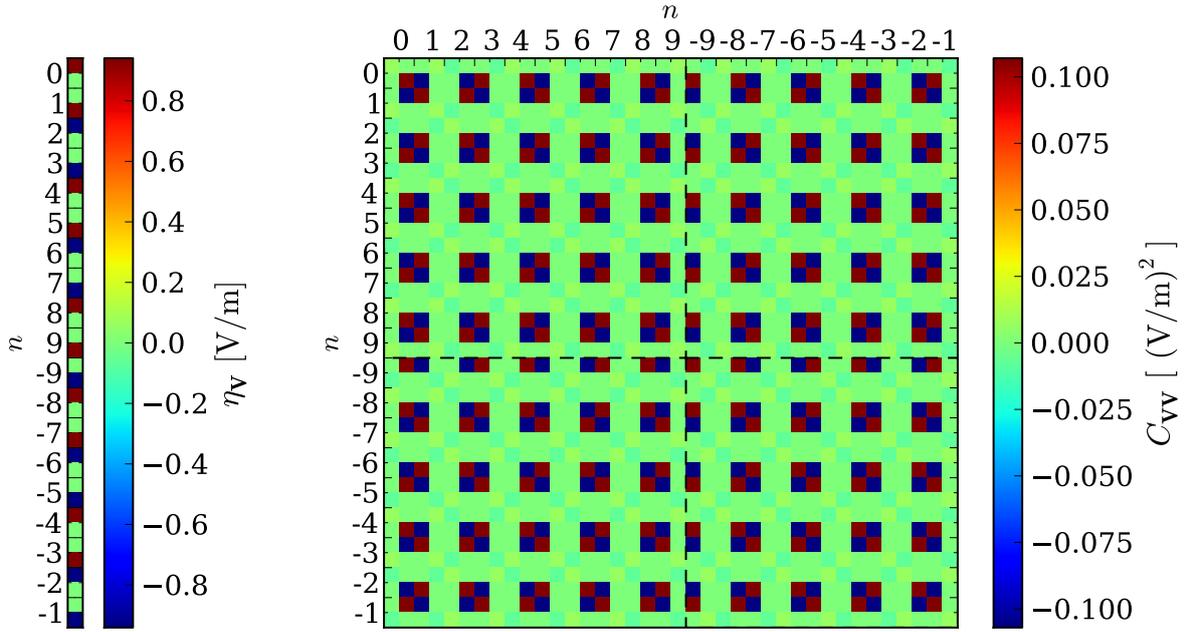
Abbildung 5.3a zeigt wieder den Realteil der  $z$ -Komponente der elektrischen Feldstärke. Dargestellt sind auch hier der Erwartungswert selbst, sowie der Erwartungswert zuzüglich bzw. abzüglich einer Standardabweichung. Wie gemäß Abbildung 5.1b zu erwarten, ist die durch die Variation des Einfallswinkels hervorgerufene Standardabweichung des Feldes entlang der Ausbreitungsachse nur sehr gering, was im vorderen linken Bereich des Plots zu erkennen ist. Weit ab der Achse, z.B. im vorderen rechten Bereich des Plots, nimmt die Standardabweichung dagegen deutlich zu. Um dies genauer zu betrachten zeigen die folgenden beiden Abbildungen Schnitte durch das betrachtete Gebiet.

In Abbildung 5.3b sind der Erwartungswert  $\eta(\text{Re}\{E_z\})$  sowie die Standardabweichung  $\sigma(\text{Re}\{E_z\})$  entlang eines Schnittes bei  $y = 0$  dargestellt, in Abbildung 5.3c entlang eines Schnittes bei  $y = -0,8\text{ m}$ , also entlang der vorderen Kante des Plots aus Abbildung 5.3a. Auch hier ist wie erwartet zu erkennen, dass die Standardabweichungen dort am größten sind, wo der sinusförmige Verlauf der Feldstärke Wendepunkte aufweist. Außerdem nimmt die Standardabweichung generell mit dem Abstand zum Drehmittelpunkt zu, d.h. in Abbildung 5.3b von der Mitte zu den Rändern bzw. in Abbildung 5.3c von links nach rechts. Wie im vorherigen Beispiel weicht der Erwartungswert nur leicht von einem ungestörten Feld ab, lediglich weit entfernt von der Drehachse, in Abbildung 5.3c ganz rechts, nimmt seine maximale Amplitude durch den dort stark verschmierten Sinusverlauf ab.

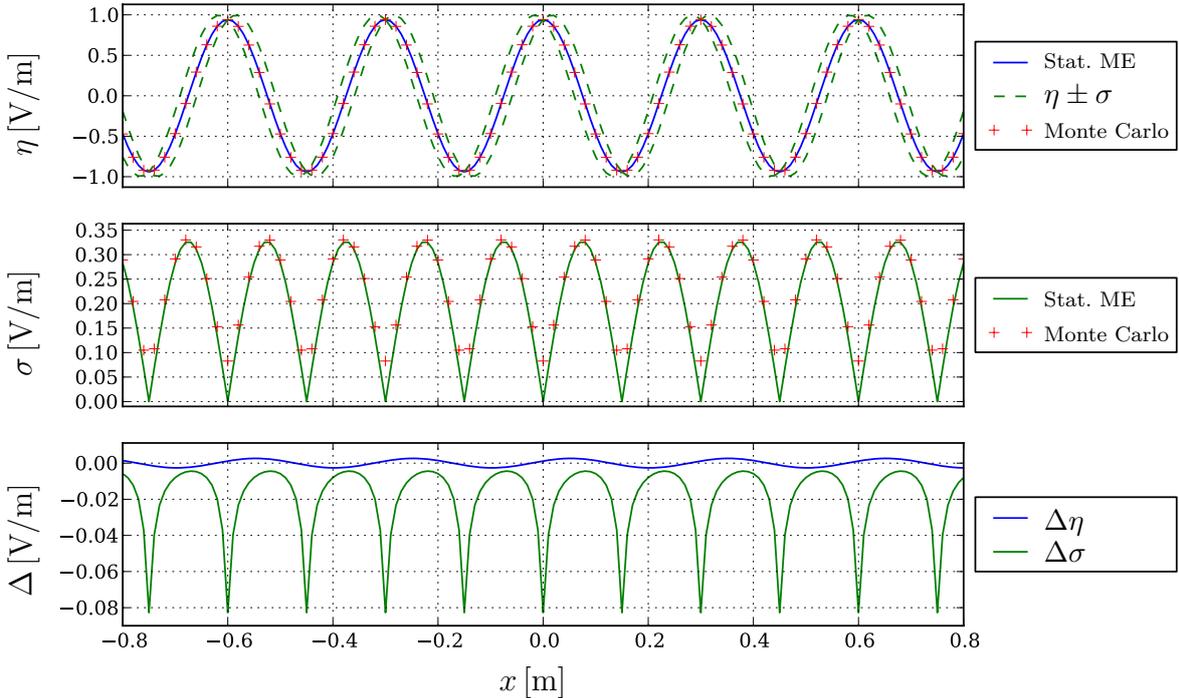
Auch für einen variierenden Einfallswinkel werden die Ergebnisse der statistischen Multipolentwicklung durch die vergleichenden Monte-Carlo-Simulationen sehr gut bestätigt. Der Fehler des Erwartungswertes liegt auch hier überall unterhalb von 1 % der maximalen Feldamplitude, und auch der Fehler der Standardabweichung übersteigt 1 % ihres Maximalwertes lediglich weit entfernt vom Drehmittelpunkt.

### 5.1.3 Einfluss der Kovarianzen

Betrachtet man die statistische Multipolentwicklung eines Feldes bis einschließlich zweiter statistischer Ordnung, so ist ersichtlich, dass der Großteil des Speicherbedarfs für die Kovarianzmatrix aufgewendet wird. Wie in Abschnitt 4.4 dargelegt ist diese Darstellung zwar deutlich kompakter als eine punktweise Beschreibung der Statistik, doch stellt sich die Frage, ob zur korrekten Beschreibung des statistischen Feldes überhaupt die gesamte Kovarianzmatrix des Multipolamplitudenzufallsvektors  $\mathbf{V}$  bekannt



(a) Vektor der Erwartungswerte (links, siehe Gleichung (4.4)) und Kovarianzmatrix (rechts, siehe Gleichung (5.12)) des Zufallsvektors  $\mathbf{V}$  der Multipolamplituden (Darstellung gekürzt auf die ersten 9 Multipolordnungen)



(b) Realteil der  $z$ -Komponente des elektrischen Feldes bei  $y = 0$  unter Vernachlässigung sämtlicher Kovarianzmatrixelemente  $|C_{\mathbf{v}_i \mathbf{v}_j}| < 0,05 \text{ (V/m)}^2$  (Legende: siehe Abbildung 5.2b)

**Abbildung 5.4:** Untersuchung der Kovarianzen des Zufallsvektors  $\mathbf{V}$  der Multipolamplituden für eine ebene Welle mit variierender Phase  $\psi$  bei einem Einfallswinkel von  $\varphi_0 = 0^\circ$  ( $\sigma_\psi = 20^\circ$ ,  $n_{\max} = 28$ )

sein muss. Wäre die Kovarianzmatrix beispielsweise nur dünn besetzt, ließen sich die Informationen noch weiter komprimieren.

Dies soll im Folgenden am Beispiel einer ebenen Welle im freien Raum überprüft werden. Wie im vorangegangenen Abschnitt wird dazu sowohl eine Variation der Phasenlage als auch eine Variation des Einfallswinkels herangezogen. Für die Multipolentwicklung in ebenen Polarkoordinaten, wie sie hier verwendet wird, hat die Kovarianzmatrix von  $\mathbf{V}$  folgende Form:

$$C_{\mathbf{V}\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} \alpha_{0,0} & \cdots & \alpha_{0,n_{\max}} & \alpha_{0,-n_{\max}} & \cdots & \alpha_{0,-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n_{\max},0} & \cdots & \alpha_{n_{\max},n_{\max}} & \alpha_{n_{\max},-n_{\max}} & \cdots & \alpha_{n_{\max},-1} \\ \alpha_{-n_{\max},0} & \cdots & \alpha_{-n_{\max},n_{\max}} & \alpha_{-n_{\max},-n_{\max}} & \cdots & \alpha_{-n_{\max},-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{-1,0} & \cdots & \alpha_{-1,n_{\max}} & \alpha_{-1,-n_{\max}} & \cdots & \alpha_{-1,-1} \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

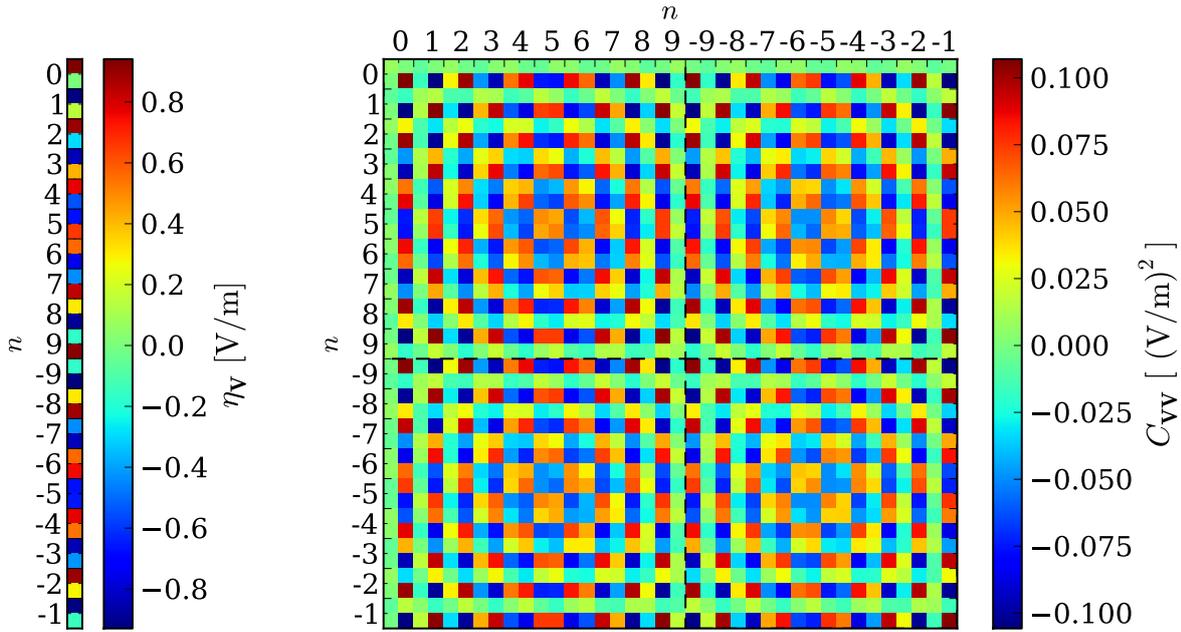
mit

$$\alpha_{n,m} = \begin{pmatrix} \text{Cov}(\text{Re}\{a_n\}, \text{Re}\{a_m\}) & \text{Cov}(\text{Re}\{a_n\}, \text{Im}\{a_m\}) \\ \text{Cov}(\text{Im}\{a_n\}, \text{Re}\{a_m\}) & \text{Cov}(\text{Im}\{a_n\}, \text{Im}\{a_m\}) \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

Abbildung 5.4a zeigt den Vektor der Erwartungswerte sowie die Kovarianzmatrix von  $\mathbf{V}$  für eine in  $z$ -Richtung polarisierte ebene Welle, die sich in negativer  $x$ -Richtung ausbreitet und deren Phase wie in Abschnitt 5.1.1 beschrieben mit einer Standardabweichung von  $20^\circ$  variiert. Aufgrund der hohen Symmetrie dieser Geometrie liegen die Erwartungswerte vieler Multipolamplituden nahe bei Null, wie es auch ohne Variation der Phase gemäß Gleichung (5.3) zu erwarten war. Dies betrifft alle Imaginärteile von Multipolamplituden gerader Ordnung sowie alle Realteile von Multipolamplituden ungerader Ordnung. Die Variation verändert also die Erwartungswerte nicht wesentlich. Bei den Kovarianzen stellt sich das Ergebnis anders dar. Da die Variation zu einer Beimischung weiterer Multipolamplituden führt, sind die Kovarianzen gerade dieser Komponenten, deren Erwartungswerte nahe bei Null liegen, sehr groß.

Abbildung 5.4b zeigt das Feld der ebenen Welle unter Vernachlässigung der Kovarianzen, die in Abbildung 5.4a nahe bei Null liegen. Im Vergleich zu Abbildung 5.2b ist der Fehler der Standardabweichung an den Minima und Maxima der Welle deutlich gestiegen. Im Gegenzug konnten durch die Vernachlässigung der genannten Kovarianzen ca. 75% der Kovarianzmatrix eingespart werden.

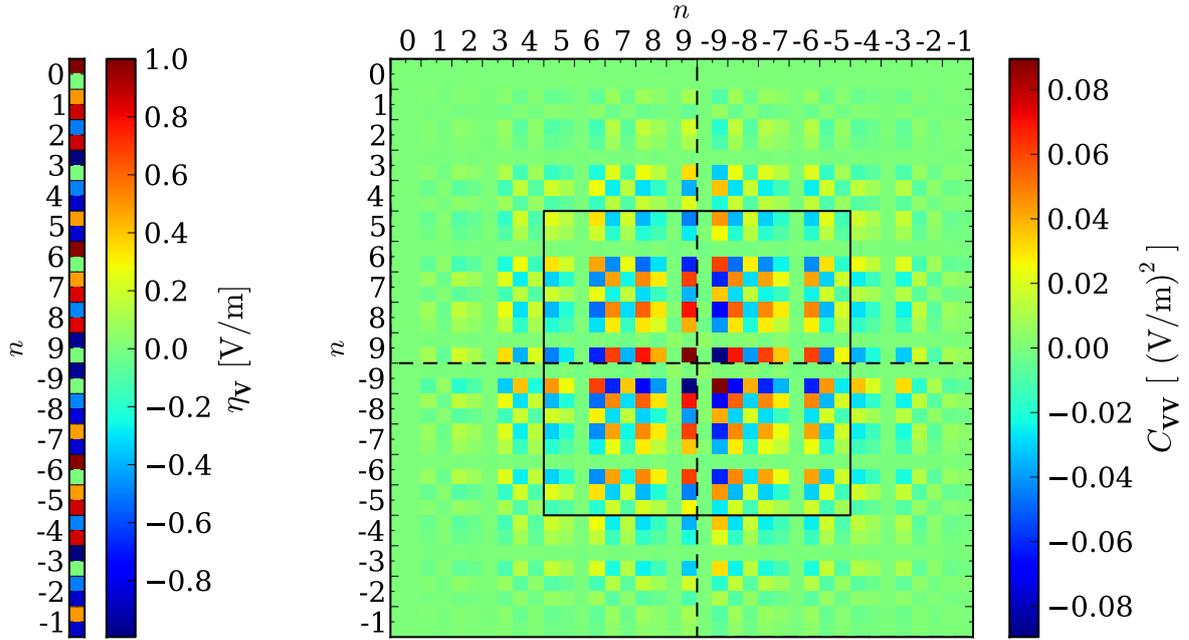
Anders sieht das ganze für eine schräg einfallende Welle aus. Abbildung 5.5 zeigt



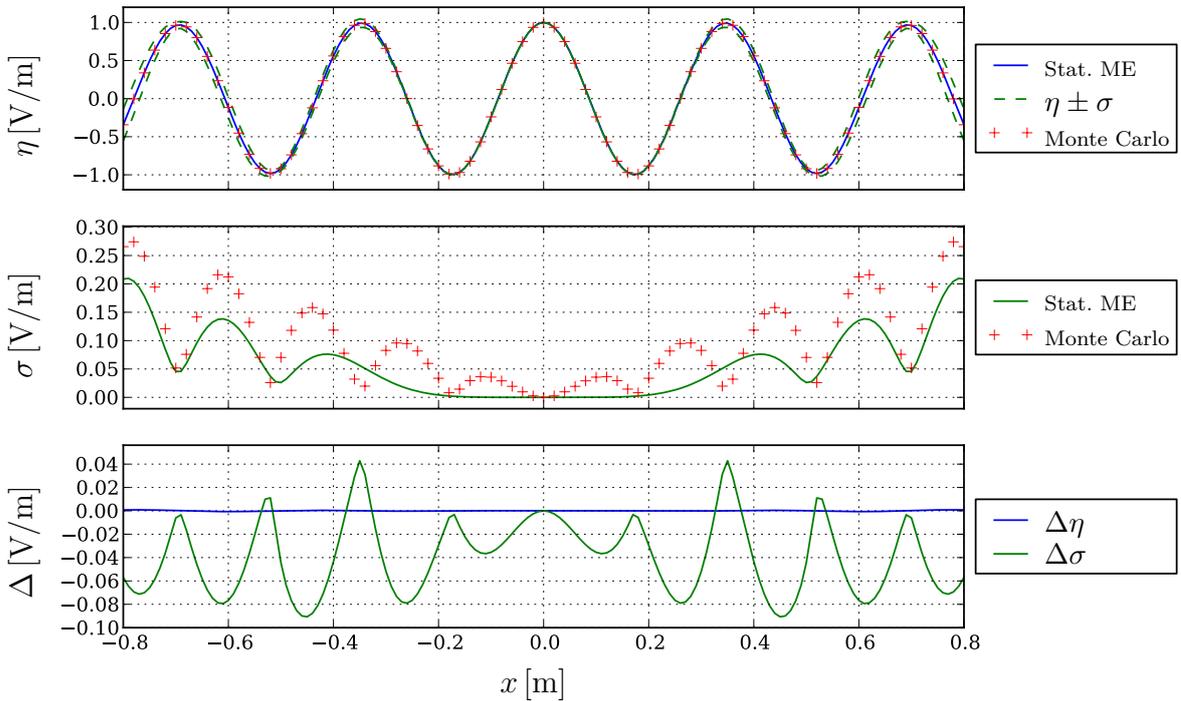
**Abbildung 5.5:** Vektor der Erwartungswerte (links, siehe Gleichung (4.4)) und Kovarianzmatrix (rechts, siehe Gleichung (5.12)) des Zufallsvektors  $\mathbf{V}$  der Multipolamplituden für eine ebene Welle mit variierender Phase  $\psi$  bei einem Einfallswinkel von  $\varphi_0 = 30^\circ$  ( $\sigma_\psi = 20^\circ$ , Darstellung gekürzt auf die ersten 9 Multipolordnungen)

die Kovarianzmatrix von  $\mathbf{V}$  für eine ebene Welle, die unter dem Winkel  $\varphi_0 = 30^\circ$  einfällt. Die Standardabweichung der Phase beträgt wieder  $20^\circ$ . Durch diesen Bruch der Symmetrie sind hier, wie an den Erwartungswerten erkennbar, deutlich mehr Multipolamplituden ungleich Null involviert. Wie der Plot der Kovarianzmatrix zeigt, sind diese außerdem stark korreliert. Zwar sind auch hier wiederkehrende Muster zu erkennen, doch gibt es keine größeren Bereiche, in denen die Kovarianzen als vernachlässigbar klein bezeichnet werden können. Eine Kompression der Kovarianzmatrix, wie im vorherigen Beispiel ist hier also nicht einfach möglich.

Abbildung 5.6a zeigt die Kovarianzmatrix von  $\mathbf{V}$  für eine ebene Welle, die unter einem variierenden Winkel  $\varphi_0$  mit  $\eta_{\varphi_0} = 30^\circ$  und  $\sigma_{\varphi_0} = 2^\circ$  einfällt. Auch hier sind fast alle Erwartungswerte deutlich ungleich Null. Die Kovarianzmatrix jedoch zeigt eine deutliche Zunahme der Beträge der Multipolamplituden für höhere Multipolordnungen  $n$ . Die niedrigen Ordnungen  $n \leq 4$  weisen dagegen nur eine geringe Variation auf, erkennbar an den niedrigen Werten der Varianzen auf der Hauptdiagonalen. Auch die Korrelationen zwischen niedrigen und höheren Ordnungen sowie der niedrigen Ordnungen untereinander sind sehr gering. Dies lässt sich dadurch erklären, dass die Multipolamplituden niedriger Ordnung primär für die Beschreibung des Feldes



(a) Vektor der Erwartungswerte (links, siehe Gleichung (4.4)) und Kovarianzmatrix (rechts, siehe Gleichung (5.12)) des Zufallsvektors  $\mathbf{V}$  der Multipolamplituden (Darstellung gekürzt auf die ersten 9 Multipolordnungen)



(b) Realteil der  $z$ -Komponente des elektrischen Feldes bei  $y = 0$  unter Vernachlässigung sämtlicher Kovarianzmatrixelemente für Multipolordnungen  $|n| \leq 4$  (Legende: siehe Abbildung 5.2b)

**Abbildung 5.6:** Untersuchung der Kovarianzen des Zufallsvektors  $\mathbf{V}$  der Multipolamplituden für eine ebene Welle mit variierendem Einfallswinkel  $\varphi_0$  ( $\eta_{\varphi_0} = 30^\circ$ ,  $\sigma_{\varphi_0} = 2^\circ$ ,  $n_{\max} = 28$ )

nahe am Koordinatenursprung verantwortlich sind, die Variation des Einfallswinkels aber gerade in diesem Bereich nur geringe Auswirkungen hat. Die stärksten Effekte der Variation des Einfallswinkels zeigen sich weit entfernt vom Drehpunkt, weshalb die Varianzen und Kovarianzen unter den höheren Ordnungen deutlich größer sind.

Abbildung 5.6b zeigt das Feld dieser Welle unter Vernachlässigung sämtlicher Kovarianzen mit Beteiligung von Multipolordnungen  $n \leq 4$ , also aller Werte außerhalb des durchgezogenen Quadrates in Abbildung 5.6a. Die Fehler der Standardabweichungen sind hier gegenüber Abbildung 5.3b deutlich gestiegen. Die Speicherplatzersparnis liegt dagegen nur bei etwa 2,5%.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass die Kovarianzmatrix im Allgemeinen dicht besetzt ist und sich daher nicht auf einfache Weise Informationen einsparen lassen. Zwar gibt es spezielle hochsymmetrische Fälle in denen größere Bereiche der Matrix nahe bei Null liegen, doch lässt sich eine Platzersparnis auch hier nur durch deutliche Zunahme von Fehlern erreichen.

## 5.2 Geschlitzter Zylinder

Als idealisierte Schirmgeometrie wird ein dünner, ideal leitender (*perfectly electrically conducting*, PEC) Zylinder mit dem Radius  $R_S$  verwendet, der auf einer Seite eine Öffnung mit dem Öffnungswinkel  $\beta$  aufweist. Ferner befinde sich im Inneren koaxial zum äußeren Schirm ein zylinderförmiges Gebiet mit dem Radius  $R_L$ , das aus einem anderen Material bestehen kann als der Außenraum. Dies kann zur Modellierung einer Schirmfüllung genutzt werden. Somit ergeben sich drei verschiedene Gebiete in denen das elektromagnetische Feld jeweils nach Multipolen entwickelt werden kann. Abbildung 5.7 gibt einen Überblick über die verwendete Geometrie.

### 5.2.1 Deterministische Beschreibung

Gebiet I ( $R \leq R_L$ ) schließt den Koordinatenursprung ein, daher kommt nur eine Entwicklung nach Besselfunktionen erster Art in Frage. In Gebiet II ( $R_L \leq R \leq R_S$ ) und Gebiet III ( $R \geq R_S$ ) sind beide Entwicklungen erforderlich. Die Besselfunktionen beschreiben dabei Feldanteile, die von außen einfallen, während die Hankelfunktionen Feldanteile mit Quellen im Inneren darstellen. Für den  $\text{TM}_z$ -Fall lässt sich das elektrische Feld gemäß Gleichung (2.35) also wie folgt entwickeln:

$$\underline{E}_z^I(R, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^I J_n(\kappa R) e^{jn\varphi} \quad \text{für } R \leq R_L \quad (5.14)$$

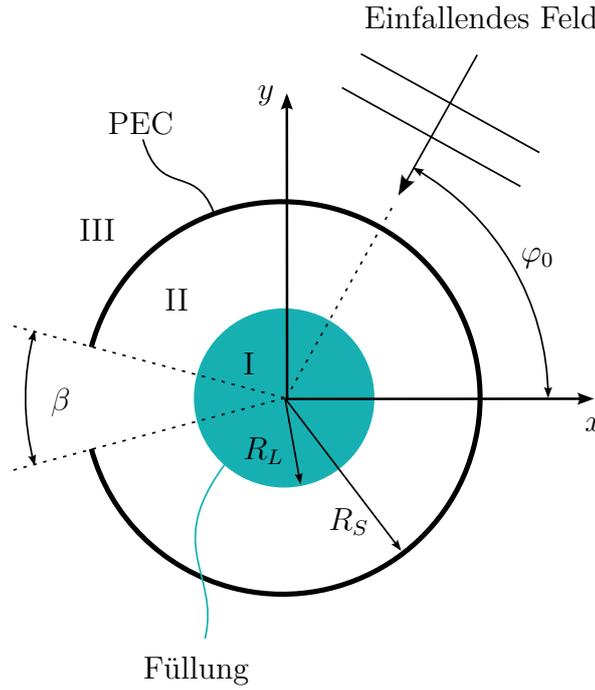


Abbildung 5.7: Geschlitzter PEC-Zylinder in zwei Dimensionen

$$\underline{E}_z^{\text{II}}(R, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ a_n^{\text{II}} J_n(\kappa R) + b_n^{\text{II}} H_n^{(2)}(\kappa R) \right] e^{jn\varphi} \quad \text{für } R_L \leq R \leq R_S \quad (5.15)$$

$$\underline{E}_z^{\text{III}}(R, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ a_n^{\text{III}} J_n(\kappa R) + b_n^{\text{III}} H_n^{(2)}(\kappa R) \right] e^{jn\varphi} \quad \text{für } R_S \leq R \quad (5.16)$$

Das zugehörige magnetische Feld ergibt sich gemäß den Gleichungen (2.36) und (2.37).

Die Koeffizienten  $a_n^{\text{III}}$  beschreiben ein äußeres auf den Schirm einwirkendes Feld. Ist dieses bekannt, lassen sich alle weiteren Koeffizienten daraus berechnen [8]:

$$b_n^{\text{III}} = \frac{W_{n,1}}{W_{n,2}} a_n^{\text{III}} - \frac{\kappa_0 R_S Z_0}{4} \left[ J_n(\kappa_0 R_S) + \frac{W_{n,1}}{W_{n,2}} H_n^{(2)}(\kappa_0 R_S) \right] \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{j(m\frac{\pi}{\alpha} - n)\varphi} d\varphi \quad (5.17)$$

$$a_n^{\text{II}} = \frac{a_n^{\text{III}} J_n(\kappa_0 R_S) + b_n^{\text{III}} H_n^{(2)}(\kappa_0 R_S)}{J_n(\kappa_0 R_S) + \frac{W_{n,1}}{W_{n,2}} H_n^{(2)}(\kappa_0 R_S)} \quad (5.18)$$

$$b_n^{\text{II}} = \frac{W_{n,1}}{W_{n,2}} a_n^{\text{II}} \quad (5.19)$$

$$a_n^{\text{I}} = \frac{J_n(\kappa_0 R_L) a_n^{\text{II}} + H_n^{(2)}(\kappa_0 R_L) b_n^{\text{II}}}{J_n(\kappa_L R_L)} \quad (5.20)$$

mit

$$W_{n,1} = Z^{\text{II}} J_n(\kappa^{\text{II}} R_L) J'_n(\kappa^{\text{I}} R_L) - Z^{\text{I}} J'_n(\kappa^{\text{II}} R_L) J_n(\kappa^{\text{I}} R_L) \quad (5.21)$$

$$W_{n,2} = Z^{\text{I}} H_n^{(2)'}(\kappa^{\text{II}} R_L) J_n(\kappa^{\text{I}} R_L) - Z^{\text{II}} H_n^{(2)}(\kappa^{\text{II}} R_L) J'_n(\kappa^{\text{I}} R_L) \quad (5.22)$$

Eine Herleitung dieser Formeln ist in Abschnitt C des Anhangs zu finden.

Als einfallendes Feld wird eine in  $z$ -Richtung polarisierte ebene Welle mit Einfallswinkel  $\varphi_0$  angenommen, wie sie in Abschnitt 5.1 definiert wurde.

Abbildung 5.8 zeigt beispielhaft die Feldverteilung für eine ebene Welle, die unter einem Winkel  $\varphi_0 = 180^\circ$  auf einen leeren, geschlitzten Zylinder mit Öffnungswinkel  $\beta = 40^\circ$  einfällt. Bei einer Frequenz von 900 MHz und einem Zylinderradius von  $R_S = 0,5$  m ergibt sich im Inneren eine Feldverteilung, die von stehenden Wellen geprägt ist. Zum Teil ist die Feldstärke im Schirm höher als außerhalb, während sie im Zentrum, einem Knotenpunkt des Wellenmusters, verhältnismäßig klein bleibt. Dies ist also ein gutes Beispiel dafür, dass die alleinige Betrachtung des Schirmmittelpunktes als Maß für die Schirmwirkung i.A. nicht ausreichend ist.

## 5.2.2 Statistische Beschreibung

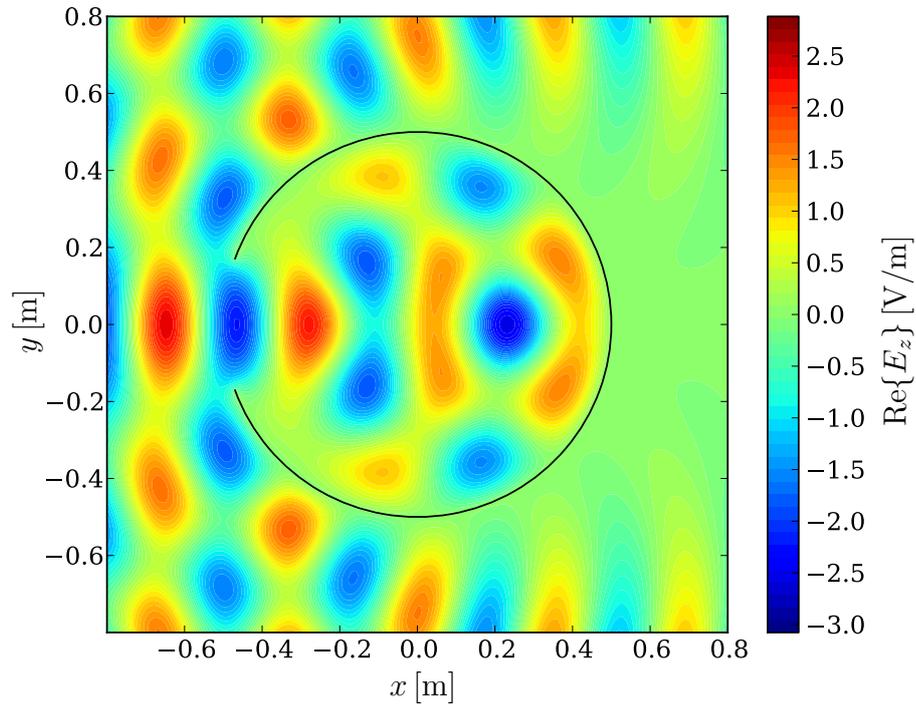
Abbildung 5.9 gibt einen Überblick über die Berechnung der Koeffizienten und Feldkomponenten ausgehend von einem normalverteilten Einfallswinkel  $\varphi_0$  des einfallenden Feldes.

Zunächst werden die Momente der Koeffizienten  $a_n^{\text{III}}$  aus denen des normalverteilten Einfallswinkels  $\varphi_0$  bestimmt, wie in Abschnitt 5.1.2 beschrieben. Die Beziehungen der Koeffizienten untereinander sind linear, ebenso wie die zwischen Koeffizienten und Feldkomponenten innerhalb der einzelnen Gebiete. Zur Berechnung der Momente der Koeffizienten und Feldkomponenten ausgehend von bekannten statistischen Momenten von  $a_n^{\text{III}}$  kann also die Methode aus Abschnitt 3.2.2 bzw. Abschnitt 4.2 angewandt werden.

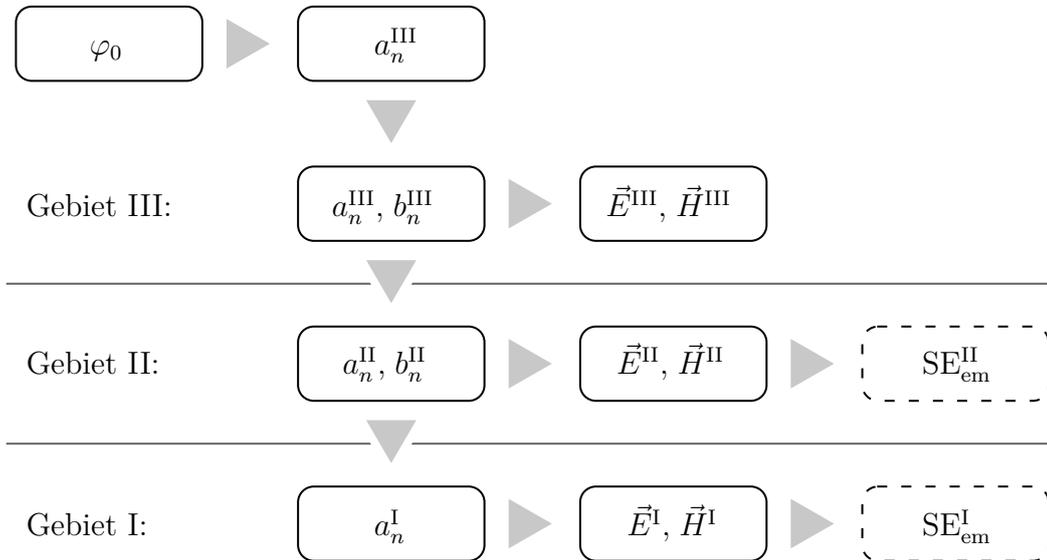
Abbildung 5.10 zeigt die Ergebnisse für einen nicht resonanten Fall. Betrachtet wird hier ein geschlitzter Zylinder mit einem Radius  $R_S$  von 50 cm und einem Öffnungswinkel  $\beta$  von  $40^\circ$ . Angeregt wird die Struktur durch eine ebene Welle bei einer Frequenz  $f$  von 750 MHz, die unter einem variierenden Winkel  $\varphi_0$  mit

$$\eta_{\varphi_0} = 135^\circ \quad , \quad \sigma_{\varphi_0} = 5^\circ \quad (5.23)$$

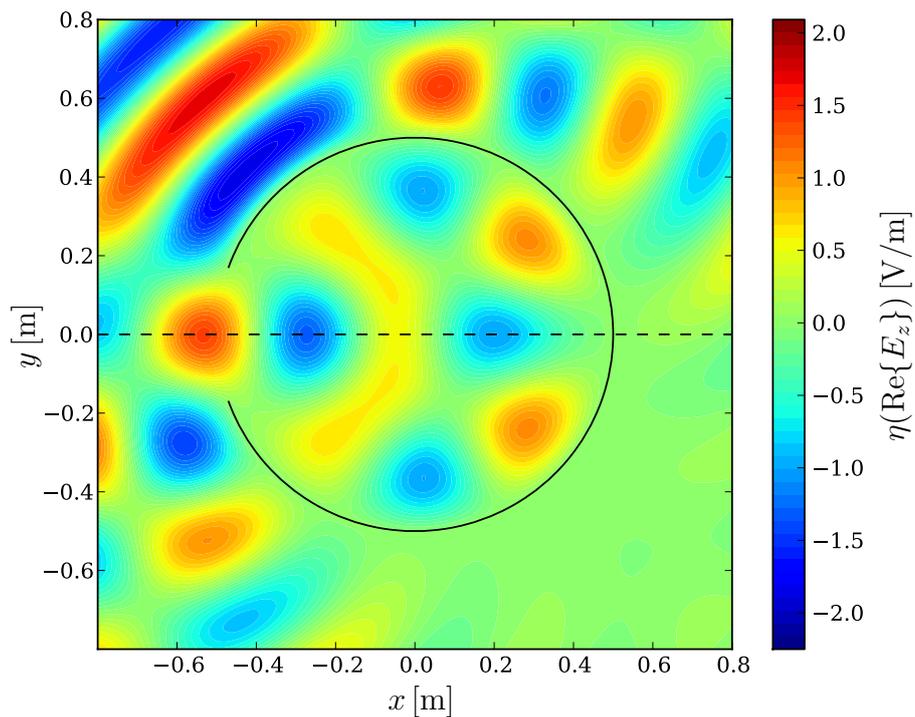
einfällt. Abbildung 5.10a zeigt den Erwartungswert des Realteiles der  $z$ -Komponente



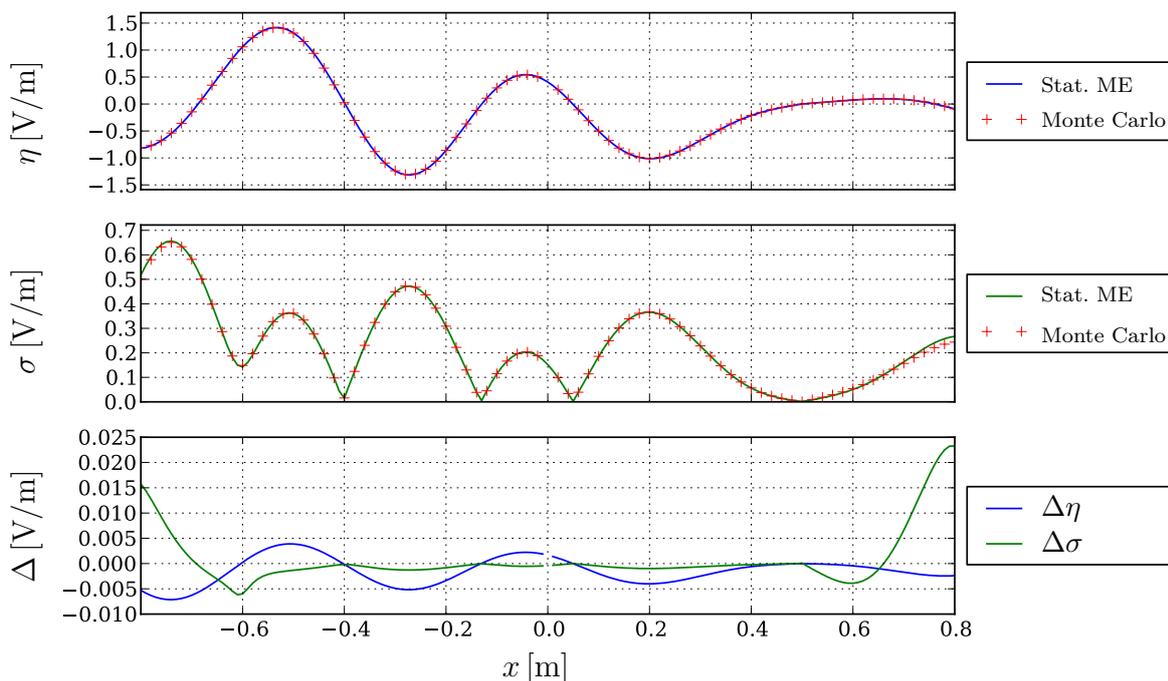
**Abbildung 5.8:** Eine ebene Welle fällt auf einen leeren geschlitzten Zylinder (deterministischer Fall, ohne statistische Variationen)



**Abbildung 5.9:** Berechnung der statistischen Momente der Koeffizienten und Feldamplituden beim geschlitzten Zylinder

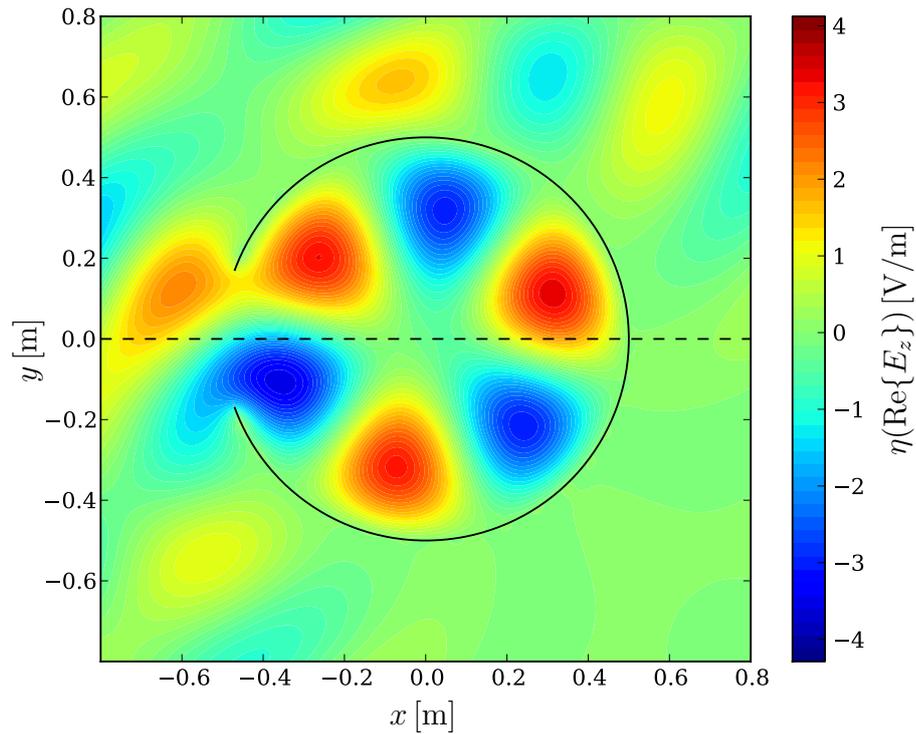


(a) Erwartungswert des elektrischen Feldes

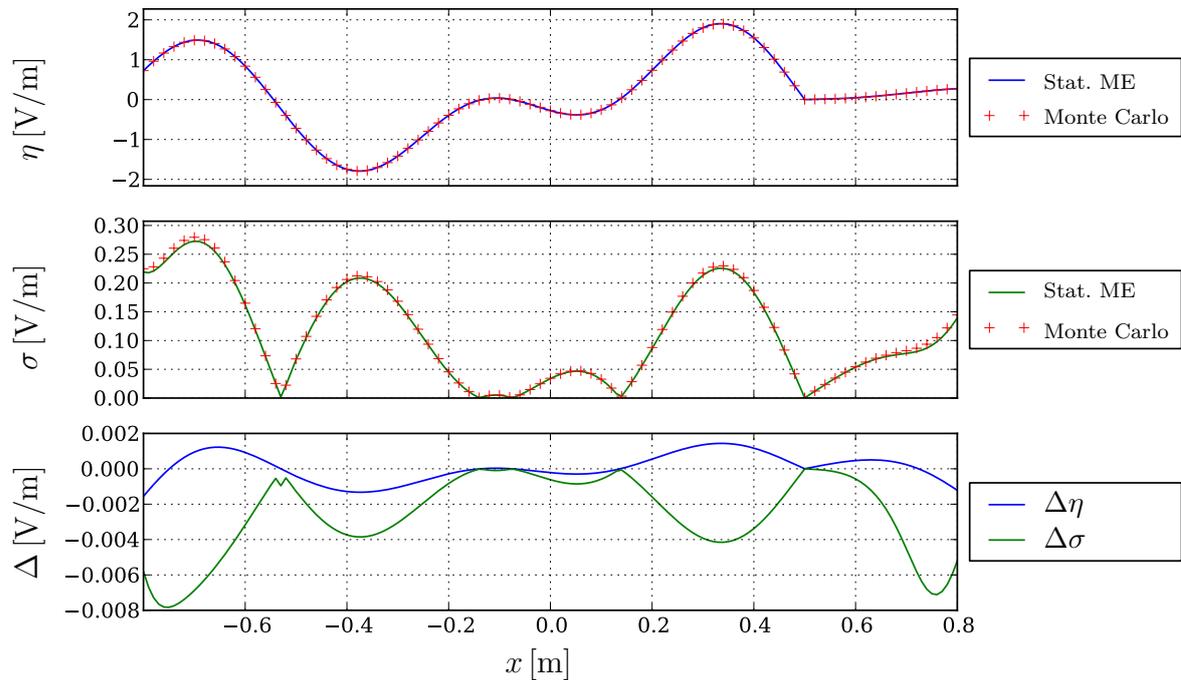


(b) Realteil der  $z$ -Komponente des elektrischen Feldes entlang  $y = 0$  (Legende: siehe Abbildung 5.2b)

**Abbildung 5.10:** Elektrisches Feld für eine ebene Welle mit variierendem Einfallswinkel, die auf einen leeren geschlitzten Zylinder fällt; nicht-resonanter Fall



(a) Erwartungswert des elektrischen Feldes

(b) Realteil der  $z$ -Komponente des elektrischen Feldes entlang  $y = 0$  (Legende: siehe Abbildung 5.2b)

**Abbildung 5.11:** Elektrisches Feld für eine ebene Welle mit variierendem Einfallswinkel, die auf einen leeren geschlitzten Zylinder fällt; resonanter Fall

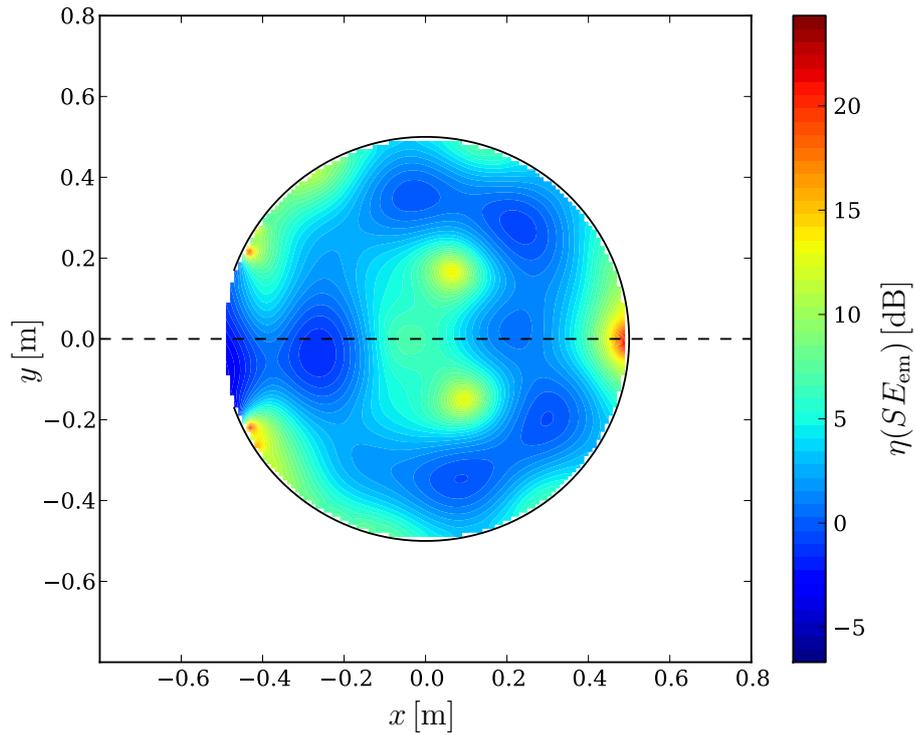
des elektrischen Feldes in der  $x$ - $y$ -Ebene. Für eine genauere Untersuchung zeigt Abbildung 5.10b einen Schnitt entlang der  $y$ -Achse, der in Abbildung 5.10a durch eine gestrichelte Linie markiert ist. Auch hier wurde zur Validierung der statistischen Multipolentwicklung eine Monte-Carlo-Simulation mit 10.000 Samples durchgeführt. Dazu wurde für jedes Sample ein zufälliger Wert für  $\varphi_0$  gemäß der entsprechenden Normalverteilung generiert und für diesen das deterministische Problem gelöst, wie in Abschnitt 5.2.1 beschrieben. Die Statistik dieser Ergebnisse ist in Form der roten Kreuze dargestellt.

Während es außerhalb des Schirms, auf der Seite von der der Strahl einfällt, durch Reflektion zu einer Überhöhung des Feldes aufgrund von stehenden Wellen kommt, ist insbesondere im hinteren Teil des Schirms eine Dämpfung des Feldes gegenüber der ungeschirmten Amplitude von 1 V/m zu erkennen. Das Feld im Inneren des Schirms wird durch die Symmetrie der Schirmstruktur dominiert: obwohl die anregende Welle schräg einfällt, zeigt das Stehwellenmuster die gleiche Spiegelsymmetrie zur  $y$ -Achse wie der Schirm selbst. Wie auch im Fall der ebenen Welle im freien Raum werden die Ergebnisse der statistischen Multipolentwicklung sehr gut durch die Monte-Carlo-Simulationen bestätigt. Der Fehler des Erwartungswertes steigt nie über 1 % der Amplitude der einfallenden Welle und auch der Fehler der Standardabweichung im Inneren des Schirms bleibt stets unterhalb von 1 % ihres Maximalwertes.

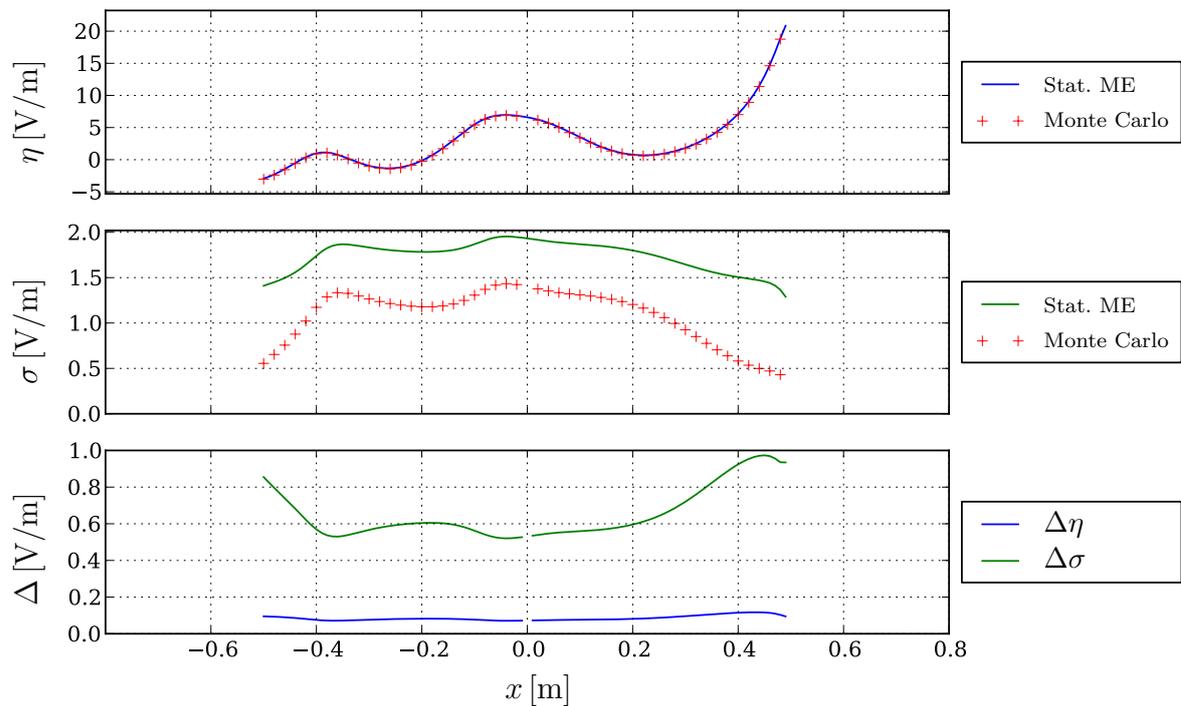
Abbildung 5.11 zeigt die Ergebnisse für eine Frequenz  $f$  von 600 MHz bei ansonsten gleicher Geometrie. Im Gegensatz zum vorherigen Fall wird hier eine Resonanz des Resonators getroffen, da der Schirmdurchmesser ungefähr einem ganzzahligen Vielfachen der halben Wellenlänge entspricht:

$$3\lambda = 3\frac{c_0}{f} \approx 2R_S \quad (5.24)$$

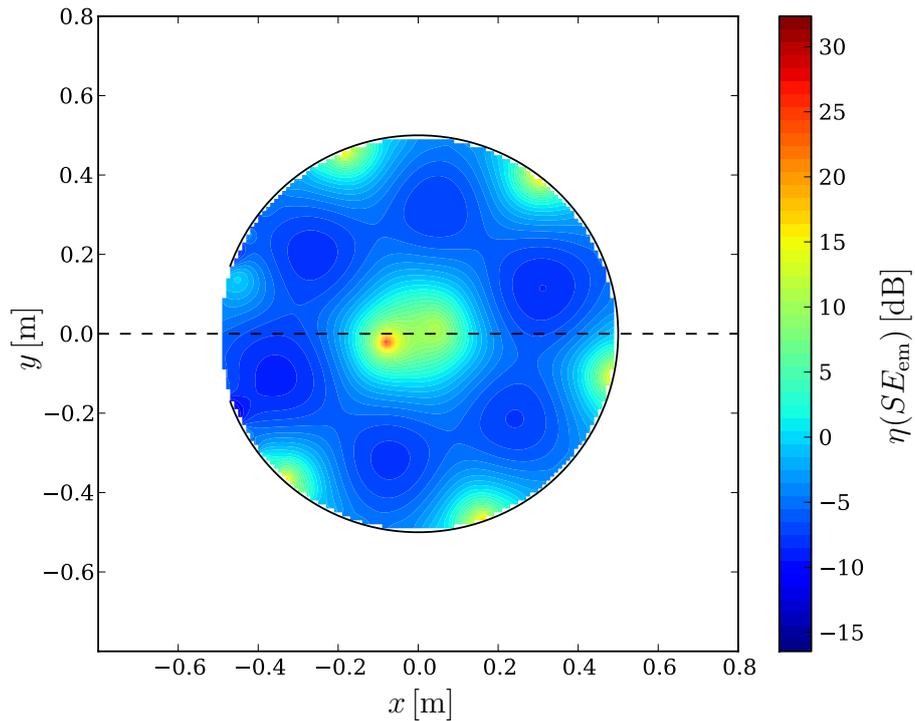
Dies führt zu einer deutlich sichtbaren Überhöhung des Feldes innerhalb des Schirms und daher zu sehr schlechten Schirmungseigenschaften. Dennoch wird das Feld auch in diesem Fall sehr gut durch die statistische Multipolentwicklung beschrieben, wie der Vergleich mit der Monte-Carlo-Simulation zeigt. Der Fehler des Erwartungswertes bleibt stets unterhalb von 0,5 % der Amplitude des einfallenden Feldes. Lediglich der Fehler der Standardabweichung steigt stellenweise auf bis zu 2 % ihres Maximalwertes an.



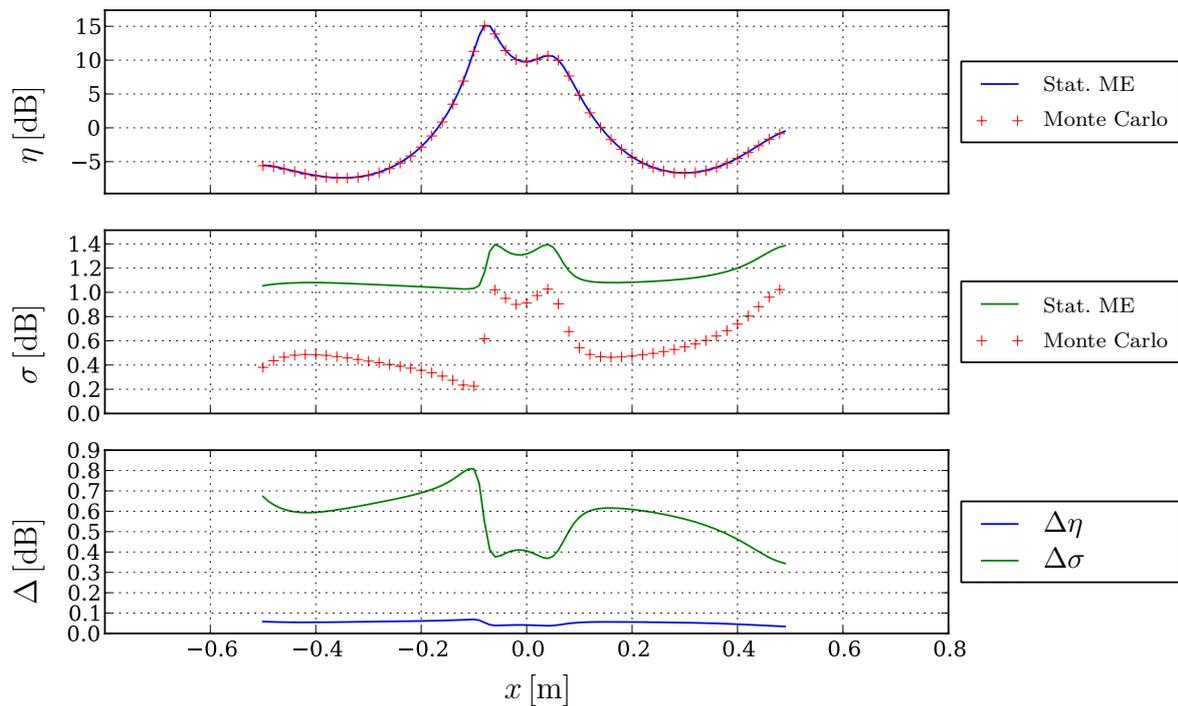
(a) Erwartungswert der Elektromagnetischen Schirmdämpfung

(b) Elektromagnetische Schirmdämpfung entlang  $y = 0$  (Legende: vgl. Abbildung 5.2b)

**Abbildung 5.12:** Elektromagnetische Schirmdämpfung für eine ebene Welle mit variierendem Einfallswinkel, die auf einen leeren geschlitzten Zylinder fällt; nicht-resonanter Fall



(a) Erwartungswert der Elektromagnetischen Schirmdämpfung



(b) Elektromagnetische Schirmdämpfung entlang  $y = 0$  (Legende: vgl. Abbildung 5.2b)

**Abbildung 5.13:** Elektromagnetische Schirmdämpfung für eine ebene Welle mit variierendem Einfallswinkel, die auf einen leeren geschlitzten Zylinder fällt; resonanter Fall

### 5.2.3 Schirmdämpfung

Interessanter und aussagekräftiger als die Betrachtung einzelner Feldkomponenten ist die Betrachtung der Elektromagnetischen Schirmdämpfung. Hier treten bei der Methode der statistischen Multipolentwicklung jedoch Schwierigkeiten auf. Während die Feldkomponenten linear von den Multipolamplituden abhängen, ist dies für die Elektromagnetische Schirmdämpfung nicht der Fall (vgl. Gleichung (2.4)). Daher lassen sich die statistischen Momente von  $SE_{\text{em}}$  nur bei Kenntnis sämtlicher Momente der Feldkomponenten exakt berechnen. Da diese aber nur bis einschließlich zweiter Ordnung betrachtet wurden, sind Abweichungen in den Ergebnissen zu erwarten.

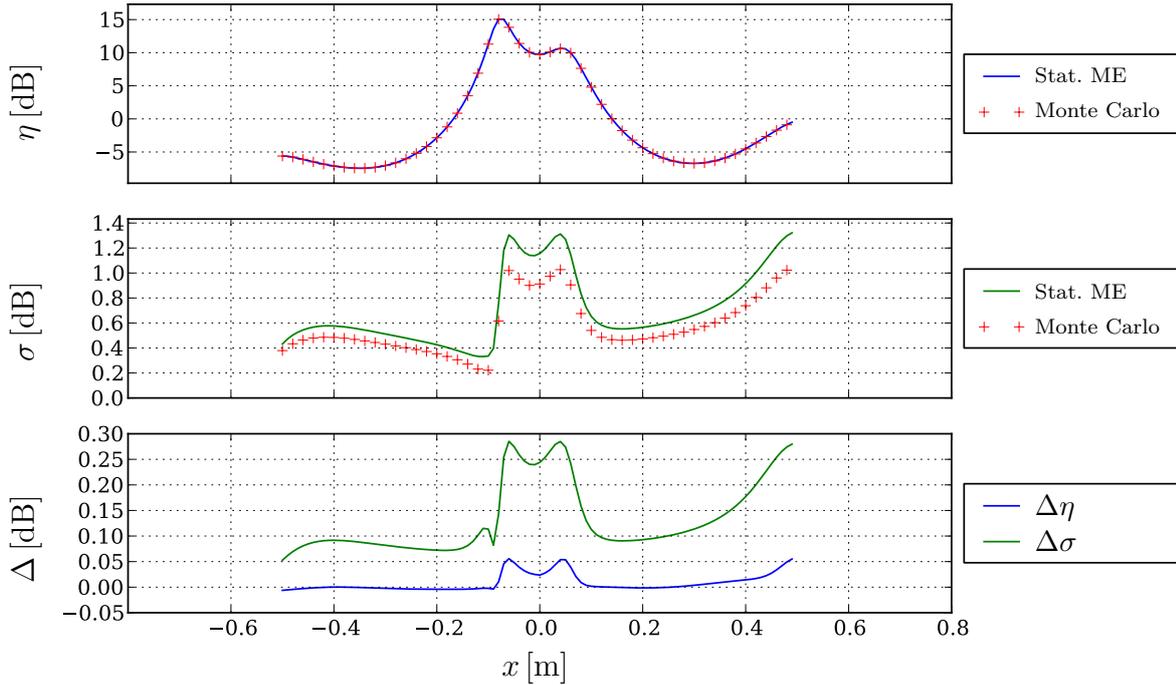
Abbildungen 5.12 und 5.13 zeigen die Elektromagnetische Schirmdämpfung für die auch im vorangegangenen Abschnitt behandelten Fälle einer nicht-resonanten und einer resonanten Anregung durch eine ebene Welle mit variablem Einfallswinkel. Anhand der Schirmdämpfung erkennt man noch deutlicher als anhand der Feldkomponenten die deutlich unterschiedliche Schirmwirkung, je nach Frequenz des einfallenden Feldes. Während die Schirmdämpfung im ersten Fall größtenteils positive Werte aufweist, ist sie im resonanten Fall bis auf einen schmalen Bereich im Zentrum des Schirmes negativ.

Der Vergleich der statistischen Multipolentwicklung mit der Monte-Carlo-Simulation zeigt für die Erwartungswerte noch sehr gute Ergebnisse. Die Fehler bleiben in beiden Fällen unterhalb von 1% des Maximalwertes der Schirmdämpfung. Für die Standardabweichung sind jedoch signifikante Abweichung zu erkennen. Zwar ähnelt der qualitative Verlauf der durch statistische Multipolentwicklung bestimmten Standardabweichung in seiner Ortsabhängigkeit dem der Ergebnisse aus der Monte-Carlo-Simulation, doch sind die quantitativen Abweichungen beträchtlich.

Um dieses Problem zu beheben, ist es naheliegend von vornherein höhere statistische Ordnungen zu berücksichtigen. Wenn bereits die Momente der Multipolamplituden bis zur  $n$ -ten Ordnung bestimmt würden, ließen sich daraus die entsprechenden Ordnungen der Feldamplituden ohne zusätzliche Fehler berechnen. Mit Hilfe dieser zusätzlichen Ordnungen der Feldamplituden sollte dann eine genauere Bestimmung der Momente zweiter Ordnung – und damit der Standardabweichung – der Schirmdämpfung möglich sein.

Abbildung 5.14 zeigt die Ergebnisse für den Fall, dass zur Beschreibung der Multipolamplituden und Feldkomponenten die statistischen Momente bis einschließlich dritter Ordnung herangezogen werden. Die Momente des normalverteilten Einfallswinkels, der die Ursache der Variation darstellt, sind wie zuvor bis einschließlich achter Ordnung berücksichtigt. Es ist der resonante Fall mit  $f = 600$  MHz dargestellt.

Im Vergleich zu Abbildung 5.13b wurden die Fehler der Standardabweichungen



**Abbildung 5.14:** Elektromagnetische Schirmdämpfung entlang  $y = 0$  unter Berücksichtigung statistischer Momente der Multipolamplituden und Feldkomponenten bis einschließlich dritter Ordnung (Legende: vgl. Abbildung 5.2b)

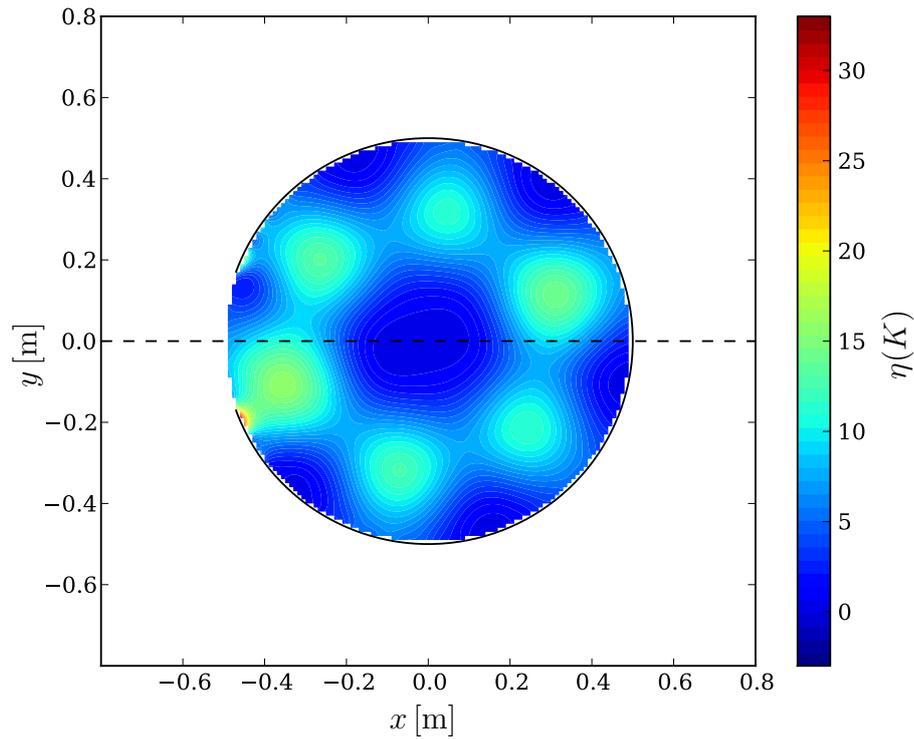
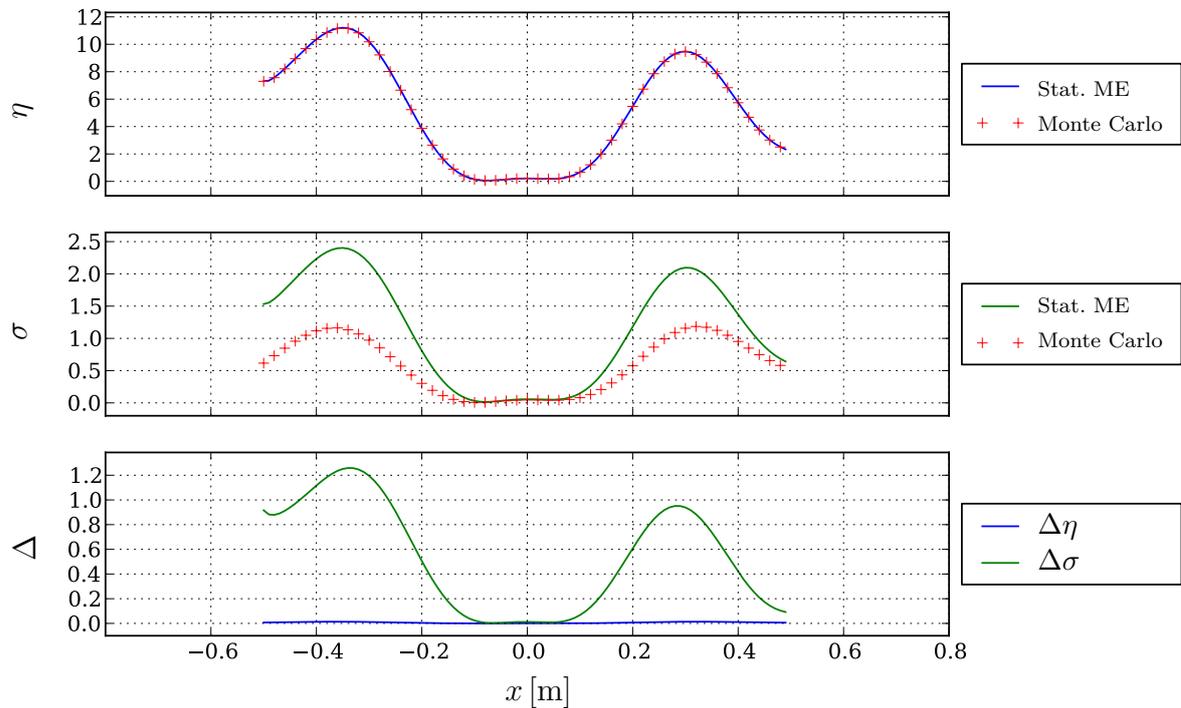
deutlich reduziert, dennoch erreichen sie Werte von bis zu 30% der maximalen Standardabweichung. Außerdem wird diese Verringerung des Fehlers mit einem deutlich höheren Rechenaufwand und Speicherbedarf (siehe Abschnitt 4.4) erkauft.

Alternativ wäre es denkbar eine für diese Methode geeignetere Formulierung der Schirmdämpfung zu verwenden. Der Ausdruck

$$K = \frac{|\vec{E}^{sh}|_{\vec{r}_0}^2}{|\vec{E}^{un}|_{\vec{r}_0}^2} + \frac{|\vec{H}^{sh}|_{\vec{r}_0}^2}{|\vec{H}^{un}|_{\vec{r}_0}^2} \quad (5.25)$$

beispielsweise beinhaltet im Wesentlichen die gleichen Informationen wie die Elektromagnetische Schirmdämpfung  $SE_{em}$ , lässt sich jedoch auf einfacherem Wege – d.h. ohne die Kehrwertbildung und ohne die Berechnung eines Logarithmus – aus den Feldamplituden berechnen.

Abbildung 5.15 zeigt das Ergebnis für das alternative Schirmwirkungsmaß  $K$  im resonanten Fall. Da ein hoher Wert für  $K$  definitionsgemäß eine schlechte Schirmwirkung bedeutet, weist das Zentrum des Schirms die niedrigsten Werte für  $K$  auf (vgl. Abbildung 5.13). Wie im Falle der Elektromagnetischen Schirmdämpfung ist auch hier der

(a) Erwartungswert von  $K$ (b) Alternatives Schirmwirkungsmaß  $K$  entlang  $y = 0$  (Legende: vgl. Abbildung 5.2b)

**Abbildung 5.15:** Alternatives Schirmwirkungsmaß  $K$  für eine ebene Welle mit variierendem Einfallswinkel, die auf einen leeren geschlitzten Zylinder fällt; resonanter Fall

Fehler des Erwartungswertes sehr gering. Die per statistischer Multipolentwicklung bestimmte Standardabweichung weicht jedoch auch hier z.T. um den Faktor zwei von den Ergebnissen der Monte-Carlo-Simulationen ab.

# Kapitel 6

## Nicht-kanonische Geometrien

Für beliebige Schirmgeometrien ist eine analytische Bestimmung der Statistik der Multipolamplituden i.A. nicht möglich. Daher ist es in diesen Fällen erforderlich die Statistik der Multipolamplituden aus einer gewissen Zahl an repräsentativen Samples zu gewinnen. Diese Samples können sowohl Ergebnisse von Simulationen als auch Messergebnisse sein. In beiden Fällen muss für jedes Sample zunächst die Multipolentwicklung des Feldes bestimmt und anschließend deren Statistik ermittelt werden. Im Folgenden wird nur von dreidimensionalen Geometrien und damit von einer sphärischen Multipolentwicklung ausgegangen.

Der folgende Abschnitt 6.1 beschreibt eine Methode zur Bestimmung der Multipolamplituden aus dem Ergebnis einer numerischen Feldsimulation oder einer Reihe von Messungen sowie die anschließende Berechnung der Statistik der Multipolamplituden. In Abschnitt 6.2 werden Ergebnisse für eine einfache leere Schirmgeometrie präsentiert, während sich Abschnitt 6.3 mit dem für die Praxis relevanteren Fall eines gefüllten Schirmes beschäftigt.

### 6.1 Multipolschnittstelle

Zur Bestimmung der sphärischen Multipolamplituden aus einem gegebenen elektromagnetischen Feld wird ausgenutzt, dass sich die Multipolamplituden aus den Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes auf einer Kugeloberfläche bestimmen lassen. Dies ist mathematisch einfach zu bewerkstelligen und führt wie im Folgenden dargestellt auch bei verhältnismäßig wenigen Messpunkten zu einer hohen Genauigkeit der erhaltenen Multipolamplituden.

Ausgangspunkt ist die spärliche Multipolentwicklung des elektrischen Feldes, wie sie durch Gleichung (2.26) gegeben ist. Multipliziert man die Gleichung einmal mit

$\vec{n}_{n,m}^*$  und einmal mit  $\vec{m}_{n,m}^*$ , so erhält man mit den Gleichungen (2.28) und (2.29)

$$\begin{aligned} \underline{\vec{E}}(\vec{r}) \cdot \vec{n}_{n,m}^* &= - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} A_{n,m} \frac{1}{\kappa r} \frac{d}{dr} [r j_n(\kappa r)] \vec{n}_{n,m} \cdot \vec{n}_{n,m}^* \\ &\quad + \frac{Z}{j} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} B_{n,m} j_n(\kappa r) \vec{m}_{n,m} \cdot \vec{n}_{n,m}^* \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} \underline{\vec{E}}(\vec{r}) \cdot \vec{m}_{n,m}^* &= - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} A_{n,m} \frac{1}{\kappa r} \frac{d}{dr} [r j_n(\kappa r)] \vec{n}_{n,m} \cdot \vec{m}_{n,m}^* \\ &\quad + \frac{Z}{j} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} B_{n,m} j_n(\kappa r) \vec{m}_{n,m} \cdot \vec{m}_{n,m}^* . \end{aligned} \quad (6.2)$$

Die Integration dieser Gleichungen über die Oberfläche einer Kugel mit Radius  $r_{\text{rec}}$  unter Berücksichtigung der Orthogonalitätsrelationen (A.68), (A.69) und (A.70) liefert

$$A_{n,m} = - \frac{1}{n(n+1)} \frac{\kappa r}{\frac{d}{dr} [r j_n(\kappa r)]} \bigg|_{r=r_{\text{rec}}} \iint_{r=r_{\text{rec}}} \underline{\vec{E}}(r, \vartheta, \varphi) \cdot \vec{n}_{n,m}^*(\vartheta, \varphi) d\Omega \quad (6.3)$$

$$B_{n,m} = \frac{j}{Z} \frac{1}{n(n+1)} \frac{1}{j_n(\kappa r_{\text{rec}})} \iint_{r=r_{\text{rec}}} \underline{\vec{E}}(r, \vartheta, \varphi) \cdot \vec{m}_{n,m}^*(\vartheta, \varphi) d\Omega . \quad (6.4)$$

Die Multipolamplituden lassen sich also bestimmen, wenn die tangentialen Komponenten des elektrischen Feldes auf der gesamten Kugeloberfläche bekannt sind.<sup>5</sup>

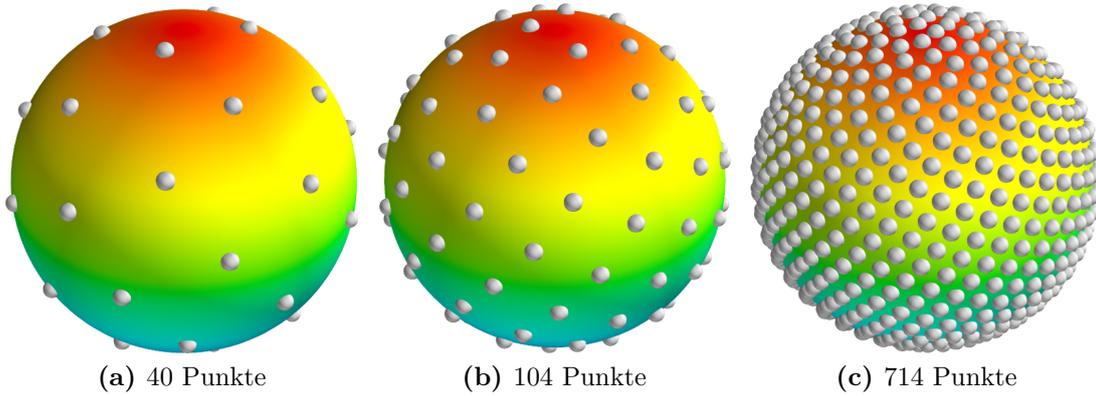
### 6.1.1 Abtastung der Kugeloberfläche

Für die praktische Berechnung der Multipolamplituden aus Simulationen oder Messungen ist das Feld jedoch nur an einer endlichen Zahl von Punkten bekannt. Daher müssen die Integrale in den Gleichungen (6.3) und (6.4) näherungsweise berechnet werden. Im Folgenden wird angenommen, dass das tangential elektrische Feld an  $N$  Punkten auf der Kugeloberfläche bekannt ist, wobei diese Punkte möglichst gleichmäßig auf der Kugel verteilt sind.

Es gibt verschiedene Verfahren, um eine solche Anordnung zu erzielen [35, 36]. Eine besonders einfache Variante, die für eine gute Gleichverteilung der Punkte sorgt, ist in [35] und [34] beschrieben. Ausgangspunkt für dieses Verfahren sind zwei aufeinanderfolgende Fibonaccizahlen  $P$  und  $Q$ . Die Winkelkoordinaten der Punkte auf der Kugel

---

<sup>5</sup>Die Berechnung der Multipolamplituden allein aus den tangentialen Komponenten der *magnetischen* Feldstärke oder aus den radialen Komponenten elektrischer *und* magnetischer Feldstärke lässt sich ganz analog herleiten.



**Abbildung 6.1:** Gleichmäßige Verteilung von Punkten auf einer Kugeloberfläche gemäß der in [34] dargestellten Methode

lauten dann:

$$\begin{aligned} \vartheta_i &= \arccos \frac{2i}{PQ} & \text{mit } -\frac{PQ-1}{2} \leq i \leq \frac{PQ-1}{2} \\ \varphi_i &= 2\pi i s \end{aligned} \quad (6.5)$$

Dabei ist  $i$  der Laufindex, der die insgesamt  $N = PQ$  Punkte auf der Kugelfläche durchnummeriert. Die Zahl  $s$  bezeichnet die um eins verminderte goldene Zahl

$$s = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} - 1. \quad (6.6)$$

Da das Produkt zweier aufeinander folgender Fibonaccizahlen größer als zwei stets ungerade ist, ist  $\frac{PQ-1}{2}$  (und damit auch der Laufindex  $i$ ) für  $P, Q > 2$  garantiert ganzzahlig. Die Zahl  $N$  der Punkte, die mittels dieser Methode auf der Kugel verteilt werden können, ist also auf Produkte  $PQ$  aufeinander folgender Fibonaccizahlen beschränkt, beispielsweise auf  $N = 15, 40, 104, 273, 714, \text{etc.}$  Dies stellt jedoch für die Untersuchung der Multipolschnittstelle keine wesentliche Einschränkung dar. Einige dieser Punkteverteilungen sind in Abbildung 6.1 dargestellt. In Abbildung 6.1c ist das typische Spiralmuster dieser Methode zu erkennen.

### 6.1.2 Bestimmung der Multipolamplituden

Die einfachste Methode zur Bestimmung der Multipolamplituden aus den Feldkomponenten an gleichverteilten Punkten auf der Kugel ist die Ersetzung des Integrals durch

eine Summe, wie hier am Beispiel des Integrals aus Gleichung (6.3) dargestellt:

$$\oint_{r=r_{\text{rec}}} \vec{E}(r, \vartheta, \varphi) \cdot \vec{n}_{n,m}^*(\vartheta, \varphi) d\Omega \approx \frac{4\pi}{N} \sum_{i=-\frac{PQ-1}{2}}^{\frac{PQ-1}{2}} \vec{E}(r_{\text{rec}}, \vartheta_i, \varphi_i) \cdot \vec{n}_{n,m}^*(\vartheta_i, \varphi_i) \quad (6.7)$$

Die Kugel wird hierbei in  $N$  gleichgroße Umgebungen der  $N$  gleichverteilten Punkte aufgeteilt, die jeweils den Raumwinkel  $\frac{4\pi}{N}$  einschließen. Auf diesen Umgebungen wird der Integrand jeweils als konstant angenommen.

Auch wenn diese Näherung offensichtlich für große  $N$  gegen das tatsächliche Integral konvergiert, ist die Näherung vergleichsweise grob. Als Alternative wird zunächst eine Approximation des Feldes durch radiale Basisfunktionen (RBF) vorgenommen und anschließend numerisch integriert. Eine Approximation einer Funktion durch eine RBF lautet [31]

$$f(\vec{r}) \approx \sum_{\nu=1}^{\nu_{\text{max}}} \lambda_{\nu} \phi(|\vec{r} - \vec{r}_{\nu}|), \quad (6.8)$$

wobei die Vektoren  $\vec{r}_{\nu}$  die Stützstellen bezeichnen, an denen die Funktion vorgegeben ist. Die radialen Basisfunktionen  $\phi$  sind von der Form:

$$\phi(\vec{r}) = \phi(|\vec{r}|) \quad (6.9)$$

Für diese Auswertung wurden „multiquadratische“ Basisfunktionen (*multiquadric basis functions*) verwendet:

$$\phi(\vec{r}) = \sqrt{1 + (\alpha r)^2} \quad (6.10)$$

Diese lieferten im Vergleich zu den anderen Basisfunktionen (*linear, cubic, quintic, gaussian, inverse multiquadric* und *thin-plate*), die in der verwendeten Programmbibliotheksfunktion `scipy.interpolate.Rbf` verfügbar sind, die besten Ergebnisse. Die numerische Integration über die Kugeloberfläche erfolgte mit der Funktion `scipy.integrate.dblquad`, die intern die Fortran-Bibliothek QUADPACK nutzt.

### 6.1.3 Test der Multipolschnittstelle

Um die Multipolschnittstelle unter idealen Bedingungen zu testen, wird nun ein bekanntes elektromagnetisches Feld an den Messpunkten auf der Oberfläche der Kugel ausgewertet, mit Hilfe der Multipolschnittstelle die Multipolamplituden bestimmt und das daraus rekonstruierte Feld  $\vec{E}^{\text{rec}}$  mit dem vorgegebenen Feld  $\vec{E}^{\text{ref}}$  verglichen. Zur Quantifizierung der Abweichung wird folgender, über die Oberfläche einer Kugel mit

Radius  $r_{\text{err}}$  integrierter, relativer Fehler des elektrischen Feldes definiert:

$$\epsilon_E(r_{\text{err}}) = \frac{\oint_{r=r_{\text{err}}} \left| \vec{E}_{\text{tan}}^{\text{rec}} - \vec{E}_{\text{tan}}^{\text{ref}} \right|^2 d\Omega}{\oint_{r=r_{\text{err}}} \left| \vec{E}_{\text{tan}}^{\text{ref}} \right|^2 d\Omega} \quad (6.11)$$

Das Integral über das tangentielle elektrische Feld lässt sich dabei durch die Multipolamplituden des Feldes ausdrücken. Mit  $\tilde{N}_{n,m} = \vec{N}_{n,m}^{\text{tan}}$  gilt:

$$\begin{aligned} \oint_{r=r_{\text{err}}} \left| \vec{E}_{\text{tan}} \right|^2 d\Omega &= \oint_{r=r_{\text{err}}} \vec{E}_{\text{tan}} \cdot \vec{E}_{\text{tan}}^* d\Omega \\ &= \oint_{r=r_{\text{err}}} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} A_{n,m} \tilde{N}_{n,m} + \frac{Z}{j} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} B_{n,m} \vec{M}_{n,m} \right) \\ &\quad \left( \sum_{n'=1}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} A_{n',m'}^* \tilde{N}_{n',m'}^* + jZ \sum_{n'=1}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} B_{n',m'}^* \vec{M}_{n',m'}^* \right) d\Omega \\ &= \oint_{r=r_{\text{err}}} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \sum_{n'=1}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} A_{n,m} A_{n',m'}^* \tilde{N}_{n,m} \cdot \tilde{N}_{n',m'}^* \right. \\ &\quad + Z^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \sum_{n'=1}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} B_{n,m} B_{n',m'}^* \vec{M}_{n,m} \cdot \vec{M}_{n',m'}^* \\ &\quad + jZ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \sum_{n'=1}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} A_{n,m} B_{n',m'}^* \tilde{N}_{n,m} \cdot \vec{M}_{n',m'}^* \\ &\quad \left. + \frac{Z}{j} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \sum_{n'=1}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} A_{n',m'}^* B_{n,m} \tilde{N}_{n',m'}^* \cdot \vec{M}_{n,m} \right) d\Omega \quad (6.12) \end{aligned}$$

Einsetzen der Vektor-Multipolfunktionen gemäß den Gleichungen (2.28) und (2.29)

$$\vec{M}_{n,m} = j_n(\kappa r) \vec{m}_{n,m}(\vartheta, \varphi) \quad (6.13)$$

$$\tilde{N}_{n,m} = -\frac{1}{\kappa r} \frac{d}{dr} [r j_n(\kappa r)] \vec{n}_{n,m}(\vartheta, \varphi) \quad (6.14)$$

und Ausnutzen der Orthogonalität der vektoriiellen Kugelflächenfunktionen (A.68), (A.69) und (A.70) liefert schließlich:

$$\begin{aligned}
 \iint |\vec{E}_{tan}|^2 d\Omega &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} n(n+1) \left( A_{nm} A_{nm}^* \left| \frac{1}{\kappa r} \frac{d}{dr} [r j_n(\kappa r)] \right|^2 + B_{nm} B_{nm}^* Z^2 |j_n(\kappa r)|^2 \right) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \left( \left| \frac{1}{\kappa r} \frac{d}{dr} [r j_n(\kappa r)] \right|^2 \sum_{m=-n}^{+n} |A_{nm}|^2 \right. \\
 &\quad \left. + Z^2 |j_n(\kappa r)|^2 \sum_{m=-n}^{+n} |B_{nm}|^2 \right) \tag{6.15}
 \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in Gleichung (6.11) lässt sich der Fehler des elektrischen Feldes wie folgt durch die Multipolamplituden des Feldes ausdrücken

$$\epsilon_E(r_{err}) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \left( C' \sum_{m=-n}^{+n} |A_{n,m}^{rec} - A_{n,m}^{ref}|^2 + Z^2 C \sum_{m=-n}^{+n} |B_{n,m}^{rec} - B_{n,m}^{ref}|^2 \right)}{\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \left( C' \sum_{m=-n}^{+n} |A_{n,m}^{ref}|^2 + Z^2 C \sum_{m=-n}^{+n} |B_{n,m}^{ref}|^2 \right)} \tag{6.16}$$

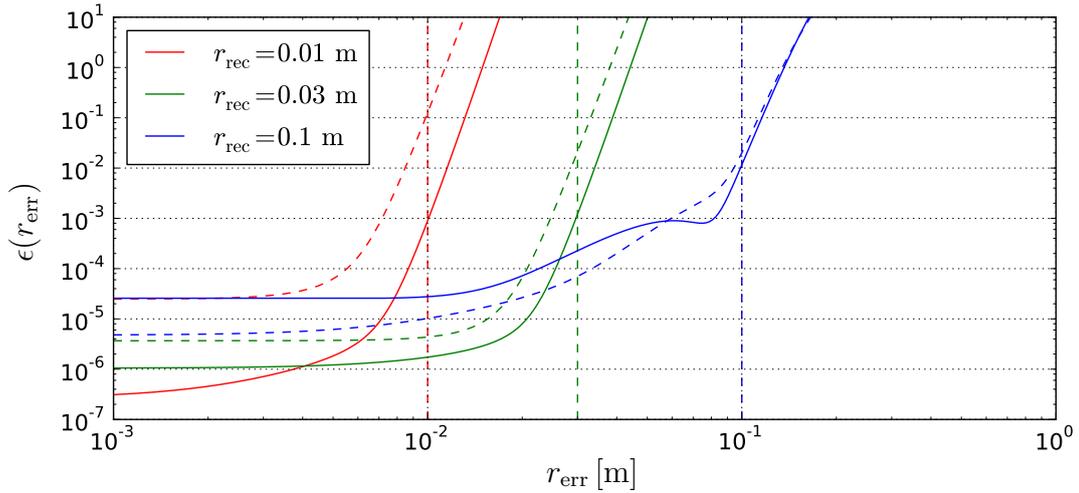
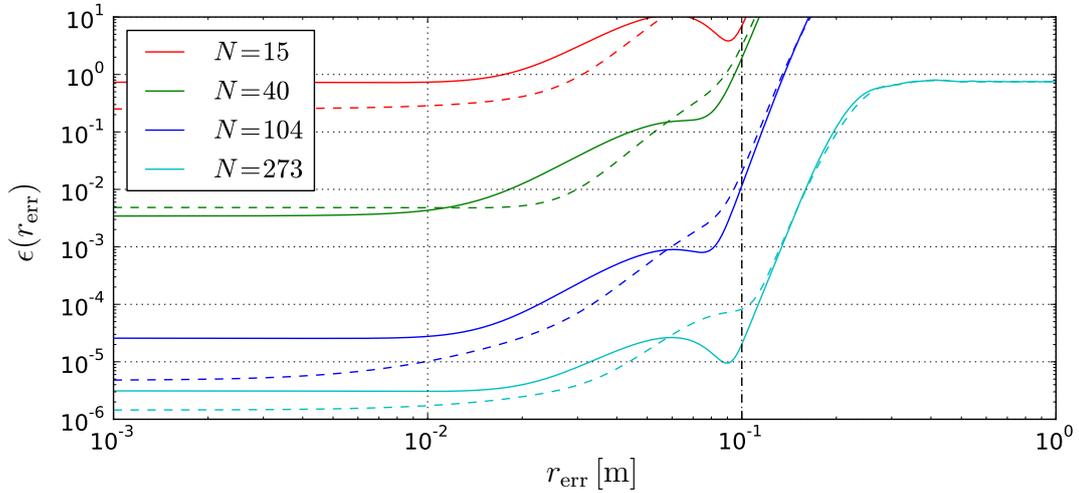
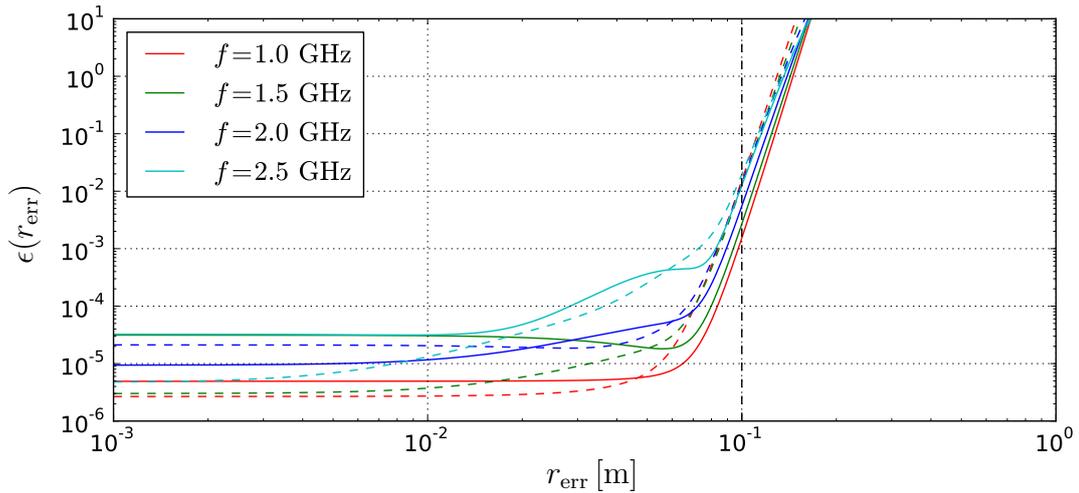
mit den Abkürzungen

$$C = |j_n(\kappa r)|^2, \quad C' = \left| \frac{1}{\kappa r} \frac{d}{dr} [r j_n(\kappa r)] \right|^2. \tag{6.17}$$

Als Referenzfeld wird im Folgenden das einer ebenen Welle angenommen. Die entsprechenden Multipolamplituden sind bekannt und durch die Gleichungen (5.1) und (5.2) gegeben, so dass die Formulierung (6.16) des Rekonstruktionsfehlers direkt ausgewertet werden kann. Ganz analog kann der Fehler der magnetischen Feldstärke definiert und durch die Multipolamplituden ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_H(r_{err}) &= \frac{\iint_{r=r_{err}} \left| \vec{H}_{tan}^{rec} - \vec{H}_{tan}^{ref} \right|^2 d\Omega}{\iint_{r=r_{err}} \left| \vec{H}_{tan}^{ref} \right|^2 d\Omega} \tag{6.18} \\
 &= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \left( \frac{1}{Z^2} C \sum_{m=-n}^{+n} |A_{n,m}^{rec} - A_{n,m}^{ref}|^2 + C' \sum_{m=-n}^{+n} |B_{n,m}^{rec} - B_{n,m}^{ref}|^2 \right)}{\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \left( \frac{1}{Z^2} C \sum_{m=-n}^{+n} |A_{n,m}^{ref}|^2 + C' \sum_{m=-n}^{+n} |B_{n,m}^{ref}|^2 \right)} \tag{6.19}
 \end{aligned}$$

Abbildung 6.2 zeigt die Ergebnisse des Tests der Multipolschnittstelle für den Fall,

(a) Einfluss des Rekonstruktionsradius  $r_{\text{rec}}$  für  $f = 2,45$  GHz und  $N = 104$ (b) Einfluss der Zahl  $N$  der Messpunkte für  $f = 2,45$  GHz und  $r_{\text{rec}} = 0,1$  m(c) Einfluss der Frequenz  $f$  für  $r_{\text{rec}} = 0,1$  m und  $N = 104$ 

**Abbildung 6.2:** Einfluss verschiedener Parameter auf die Rekonstruktionsfehler  $\epsilon_E$  (—) und  $\epsilon_H$  (- - -) für eine ebene Welle im freien Raum unter Annäherung der Integrale durch eine einfache Summe.

dass die Integrale aus den Gleichungen (6.3) und (6.4) durch eine einfache Summe angenähert werden, wie in Abschnitt 6.1.2 beschrieben. Abbildung 6.2a zeigt die Rekonstruktionsfehler  $\epsilon_E$  (durchgezogene Linien) und  $\epsilon_H$  (gestrichelte Linien) in Abhängigkeit vom Radius  $r_{\text{err}}$  für verschiedene Rekonstruktionsradien  $r_{\text{rec}}$ . Es ist deutlich zu erkennen, dass der Fehler für kleine Radien  $r_{\text{err}}$  sehr klein ist, aber im Bereich von  $r_{\text{err}} \approx r_{\text{rec}}$  ansteigt. Für  $r_{\text{err}} > r_{\text{rec}}$  steigt der Fehler derart steil an, dass er schnell die Größenordnung eins erreicht und übersteigt. Der Fehler ist also für  $r_{\text{err}} < r_{\text{rec}}$  klein, aber für  $r_{\text{err}} > r_{\text{rec}}$  inakzeptabel.

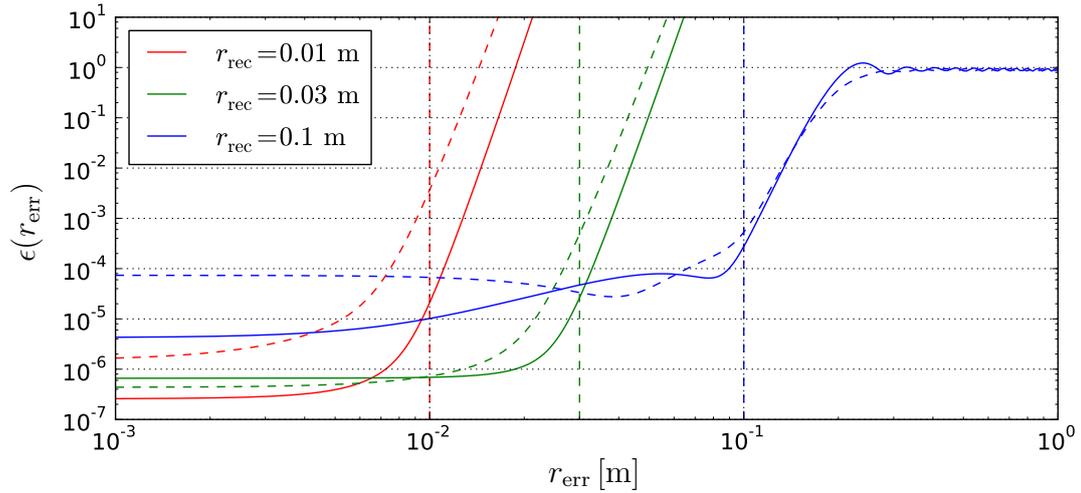
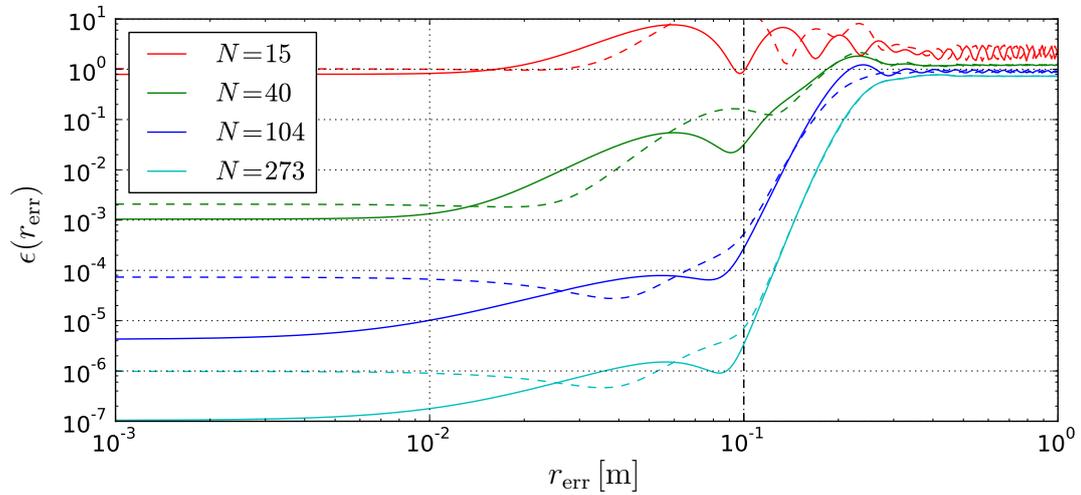
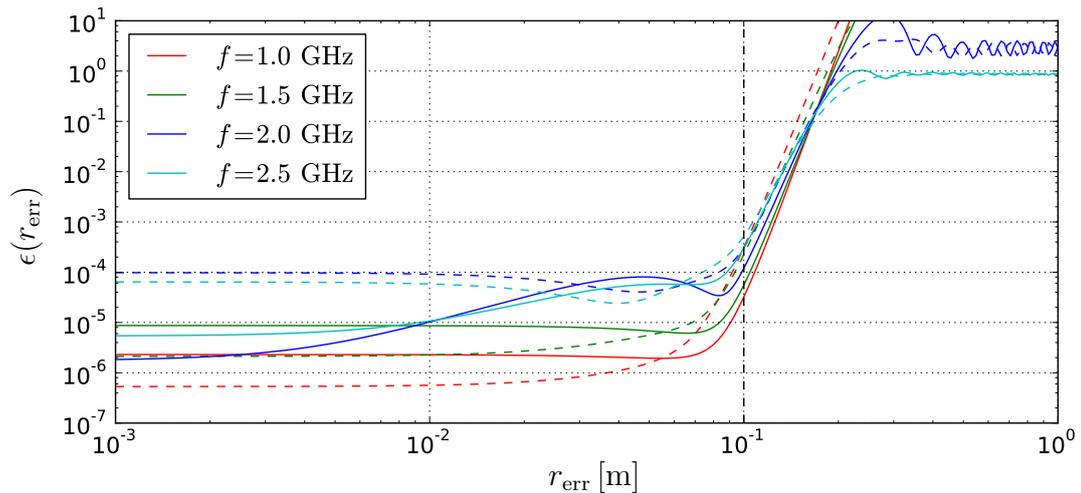
Abbildung 6.2b zeigt den Einfluss der Anzahl  $N$  der Messpunkte auf der Kugeloberfläche. Eine Steigerung von  $N$  senkt die Fehler  $\epsilon_E$  und  $\epsilon_H$  deutlich, so dass für  $r_{\text{err}} < r_{\text{rec}}$  ein fast beliebig kleiner Fehler erreicht werden kann, wenn nur  $N$  hoch genug ist. Insbesondere für numerische Simulationen von elektromagnetischen Feldern ist dies sehr vorteilhaft, da eine Platzierung von vielen virtuellen Feldsonden im Simulationsgebiet für gewöhnlich ohne große Zunahme der Rechenzeit oder des Speicherbedarfs möglich ist. Allerdings ist der starke Anstieg des Fehlers für  $r_{\text{err}} > r_{\text{rec}}$  auch bei hohen Werten von  $N$  sichtbar, so dass der Fehler in diesem Bereich weiterhin als inakzeptabel gelten muss.

Abbildung 6.2c zeigt schließlich den Einfluss der Frequenz auf die Fehler. Offensichtlich bleiben die Fehler für  $r_{\text{err}} > r_{\text{rec}}$  von der Frequenz nahezu unbeeinflusst, steigen aber im Bereich  $r_{\text{err}} \approx r_{\text{rec}}$  leicht mit der Frequenz an. Für  $r_{\text{err}} \ll r_{\text{rec}}$  ist der Einfluss der Frequenz auf die Fehler ebenfalls gering und darüber hinaus nicht monoton, da  $\epsilon_E$  z.B. von 1.0 GHz auf 1.5 GHz ansteigt, bis 2.0 GHz aber wieder abfällt.

Abbildung 6.3 schließlich zeigt die Ergebnisse des Tests der Multipolschnittstelle für eine multiquadratische Interpolation zwischen den Messwerten. Wie erwartet führt die Interpolation der Messwerte durch Approximation durch multiquadratische Basisfunktionen zu einer Verbesserung. Vergleicht man die Ergebnisse aus Abbildung 6.2 mit denen aus Abbildung 6.3, stellt man fest, dass in letzterem Fall der Fehler fast durchweg kleiner wird, zum Teil um mehr als eine Größenordnung. Lediglich in Abbildung 6.3c ist in einem schmalen Bereich um  $4 \cdot 10^{-2}$  m ein Anstieg des Fehlers gegenüber Abbildung 6.2c zu erkennen.

Für Radien  $r_{\text{err}} > r_{\text{rec}}$  bleibt der Fehler zum Teil im Bereich der Größenordnung eins, statt für größere Radien noch weiter zu steigen. Das ist jedoch unerheblich, da der Fehler ab dieser Größenordnung ohnehin inakzeptabel ist.

Insgesamt sorgt die Interpolation und anschließende numerische Integration für eine globale Absenkung des Fehlers, wie sie auch durch eine Erhöhung der Zahl der Messpunkte erreicht werden kann. Der Fehler für 104 Messpunkte mit Interpolation

(a) Einfluss des Rekonstruktionsradius  $r_{\text{rec}}$  für  $f = 2,45$  GHz und  $N = 104$ (b) Einfluss der Zahl  $N$  der Messpunkte für  $f = 2,45$  GHz und  $r_{\text{rec}} = 0,1$  m(c) Einfluss der Frequenz  $f$  für  $r_{\text{rec}} = 0,1$  m und  $N = 104$ 

**Abbildung 6.3:** Einfluss verschiedener Parameter auf die Rekonstruktionsfehler  $\epsilon_E$  (—) und  $\epsilon_H$  (- - -) für eine ebene Welle im freien Raum nach multiquadratischem Fit der Messwerte auf der Kugel.

in Abbildung 6.3b ist zum Beispiel vergleichbar mit dem Fehler für 273 Messpunkte ohne Interpolation in Abbildung 6.2b. Dabei beeinflusst die Interpolation jedoch nicht den charakteristischen starken Anstieg des Fehlers für  $r_{\text{err}} > r_{\text{rec}}$ .

Für die bisherigen Tests wurden Multipolamplituden bis einschließlich zehnter Ordnung sowohl für das Referenzfeld als auch für das rekonstruierte Feld verwendet. Für den maximalen verwendeten Radius von 0,1 m ergibt sich diese Ordnung aus der Abschätzung gemäß Abschnitt 2.2.5. Um zu prüfen, ob dennoch eine zu geringe maximale Multipolordnung den Fehler in der Rekonstruktion verursacht, wurden für Abbildung 6.4 höhere Ordnungen berücksichtigt.

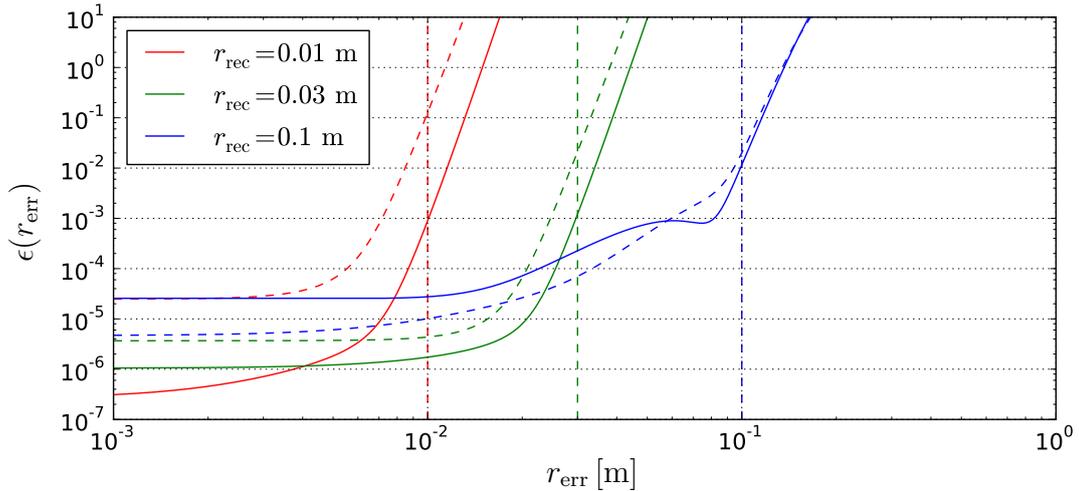
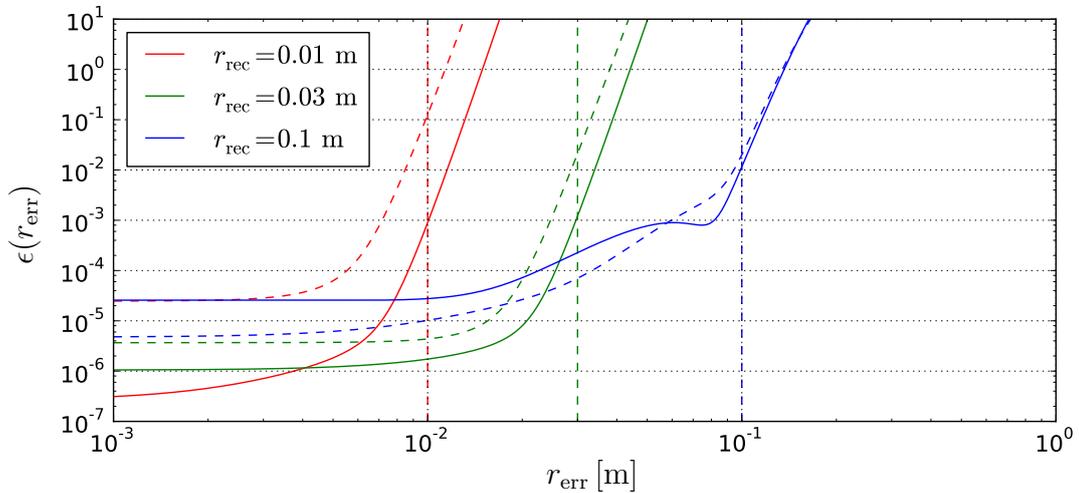
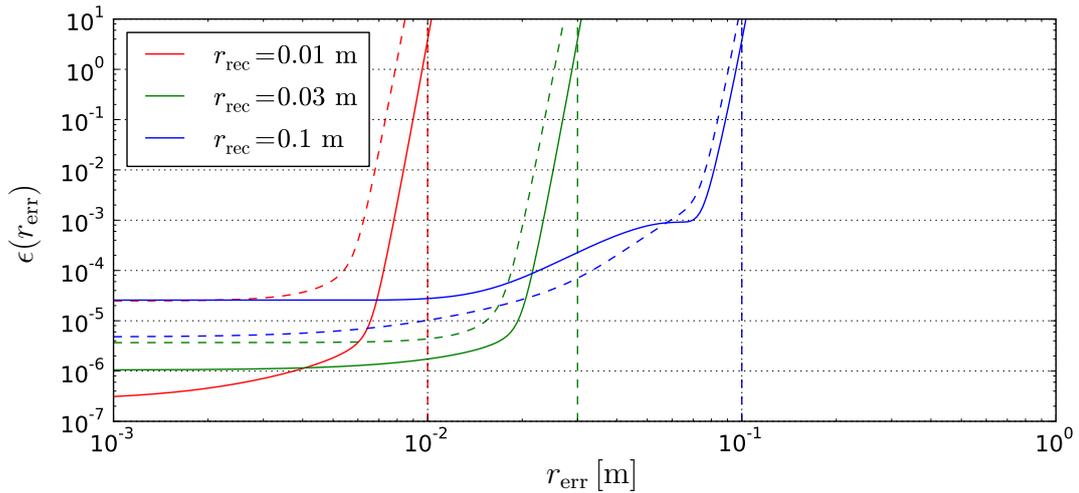
Abbildung 6.4a verwendet wie zuvor jeweils 10 Ordnungen. Abbildung 6.4b berücksichtigt für das Referenzfeld 20 Ordnungen, für das rekonstruierte Feld weiterhin nur 10 Ordnungen. Es ist jedoch kein Unterschied zum vorherigen Fall erkennbar. Abbildung 6.4c berücksichtigt dagegen sowohl für Referenz- als auch rekonstruiertes Feld jeweils 20 Ordnungen. In diesem Fall ist sehr wohl eine Änderung zu erkennen und zwar verschlechtern sich die Ergebnisse insbesondere bei großen Radien. Dies liegt an Fehlern die durch die Verwendung unnötig hoher und daher schlecht bestimmter Multipolordnungen auftreten. Eine weitere Erhöhung der Multipolordnung verbessert also das Ergebnis nicht.

### 6.1.4 Berechnung der Statistik der Multipolamplituden

Im vergangenen Abschnitt wurde demonstriert, wie die sphärische Multipolentwicklung eines elektromagnetischen Feldes aus einer einzelnen Simulation oder Messreihe ermittelt werden kann. Um eine Statistik des Feldes zu erhalten ist jedoch eine große Anzahl  $N$  dieser Messungen nötig. Jede Anwendung der Multipolschnittstelle liefert einen Satz an Multipolamplituden, der durch einen Vektor  $V_n = v_{n,1}, \dots, v_{n,i_{\text{max}}}$  der Real- und Imaginärteile der Multipolamplituden dargestellt werden kann. Die statistischen Momente der Multipolamplituden lassen sich dann aus diesem Ensemble ermitteln. Für die Erwartungswerte  $\eta_{\mathbf{v}_i}$  und die Elemente der Kovarianzmatrix  $C_{\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j}$  bedeutet das

$$\eta_{\mathbf{v}_i} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N v_{n,i} \quad (6.20)$$

$$C_{\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j} = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (v_{n,i} - \eta_{\mathbf{v}_i})(v_{n,j} - \eta_{\mathbf{v}_j}) \quad (6.21)$$

(a)  $n_{\text{max}}^{\text{ref}} = 10, n_{\text{max}}^{\text{rec}} = 10$ (b)  $n_{\text{max}}^{\text{ref}} = 20, n_{\text{max}}^{\text{rec}} = 10$ (c)  $n_{\text{max}}^{\text{ref}} = 20, n_{\text{max}}^{\text{rec}} = 20$ 

**Abbildung 6.4:** Einfluss des Rekonstruktionsradius  $r_{\text{rec}}$  auf die Rekonstruktionsfehler  $\epsilon_E$  (—) und  $\epsilon_H$  (- -) für eine ebene Welle im freien Raum mit verschiedenen maximalen Ordnungen  $n_{\text{max}}$  der Multipolentwicklung unter Annäherung der Integrale durch eine einfache Summe ( $f = 2,45$  GHz und  $N = 104$ ).

mit

$$i, j = 1, \dots, i_{\max} . \quad (6.22)$$

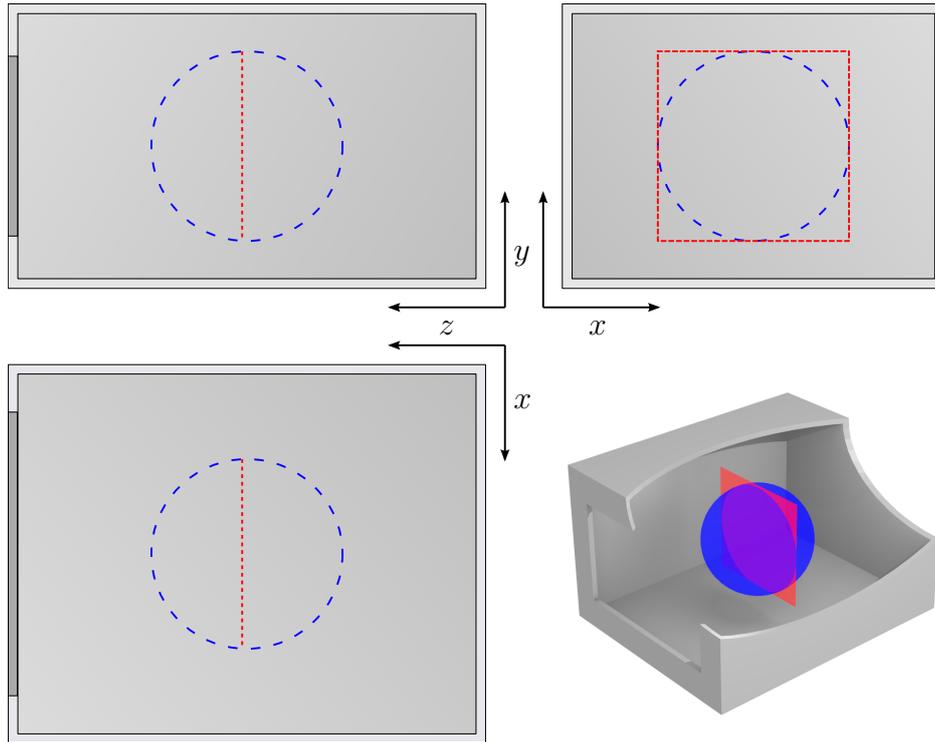
Gleichung (6.21) bezeichnet die korrigierte Ensemble-Kovarianz. Sie unterscheidet sich von der Ensemble-Kovarianz durch die Wahl des Vorfaktors  $\frac{1}{N-1}$  statt des Vorfaktors  $\frac{1}{N}$ . Beide Darstellungen streben für  $N \rightarrow \infty$  gegen die Kovarianz des Ensembles, jedoch führt die unkorrigierte Ensemble-Varianz insbesondere bei kleinen Werten von  $N$  zu Verzerrungen.

## 6.2 Leerer Schirm

Als erste Anwendung der Multipolschnittstelle wurde eine einfache Schirmstruktur untersucht. Es handelt sich um einen quaderförmigen Kasten mit 5 mm dicken idealleitenden Wänden und den Ausmaßen ( $H \times B \times T$ ) 150 mm  $\times$  200 mm  $\times$  250 mm, wie in Abbildung 6.5 dargestellt. In der Mitte der Vorderseite befindet sich eine rechteckige, 150 mm breite Öffnung mit variabler Höhe. Der Schirm wird durch das Feld einer ebenen harmonischen elektromagnetischen Welle bei einer Frequenz von 2,4 GHz angeregt, die in  $y$ -Richtung polarisiert ist und unter einem Winkel von  $45^\circ$  auf die Vorderseite des Kastens trifft.

Diese Geometrie wurde in CST Microwave Studio<sup>®</sup> (CST MWS) [32] modelliert und mit Hilfe des integrierten Frequenzbereichslösers numerisch simuliert. Eine statistische Variation wurde durch die Veränderung der Höhe der Apertur erreicht. Insgesamt wurden 11 Geometrien simuliert, bei denen die Höhe der Apertur mit einer Schrittweite von 1 mm zwischen 90 mm und 100 mm variiert wurde. Dies entspricht einer groben Annäherung einer gleichförmigen Verteilung der Aperturhöhe im Intervall (90 mm, 100 mm).

Für jede Simulation wurde die elektrische Feldstärke an 273 Punkten auf der Oberfläche einer Kugel im Zentrum des Schirms aufgezeichnet, um über die in Abschnitt 6.1 beschriebene Multipolschnittstelle die Multipolamplituden des elektromagnetischen Feldes zu ermitteln. Aus den Multipolamplituden der einzelnen Simulationen wurde schließlich gemäß Abschnitt 6.1.4 die statistische Multipolentwicklung bestimmt. Um diese zu validieren wurden Erwartungswert und Standardabweichung ausgewählter Feldkomponenten auf einem quadratischen Gebiet im Zentrum des Schirms (siehe Abbildung 6.5) ausgewertet. Die quadratische Messfläche verläuft fast genau durch das Zentrum der Kugel, mit einem Abstand von 2,5 mm zu ihrem Mittelpunkt. Die



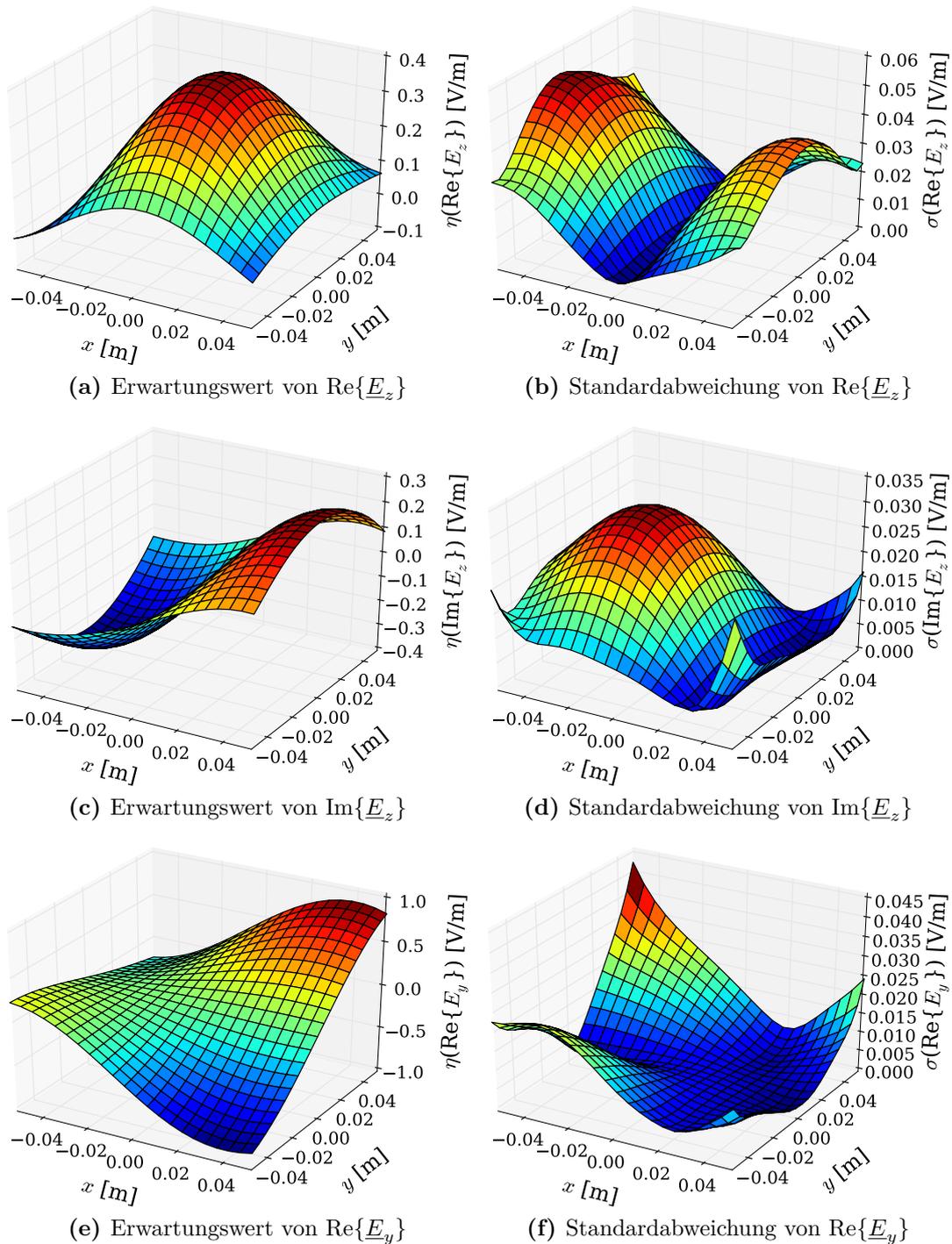
**Abbildung 6.5:** Leerer Schirm mit Rekonstruktionskugel (blau) und Messfläche (rot) zur Validierung

Ergebnisse sind in Abbildung 6.6 dargestellt.

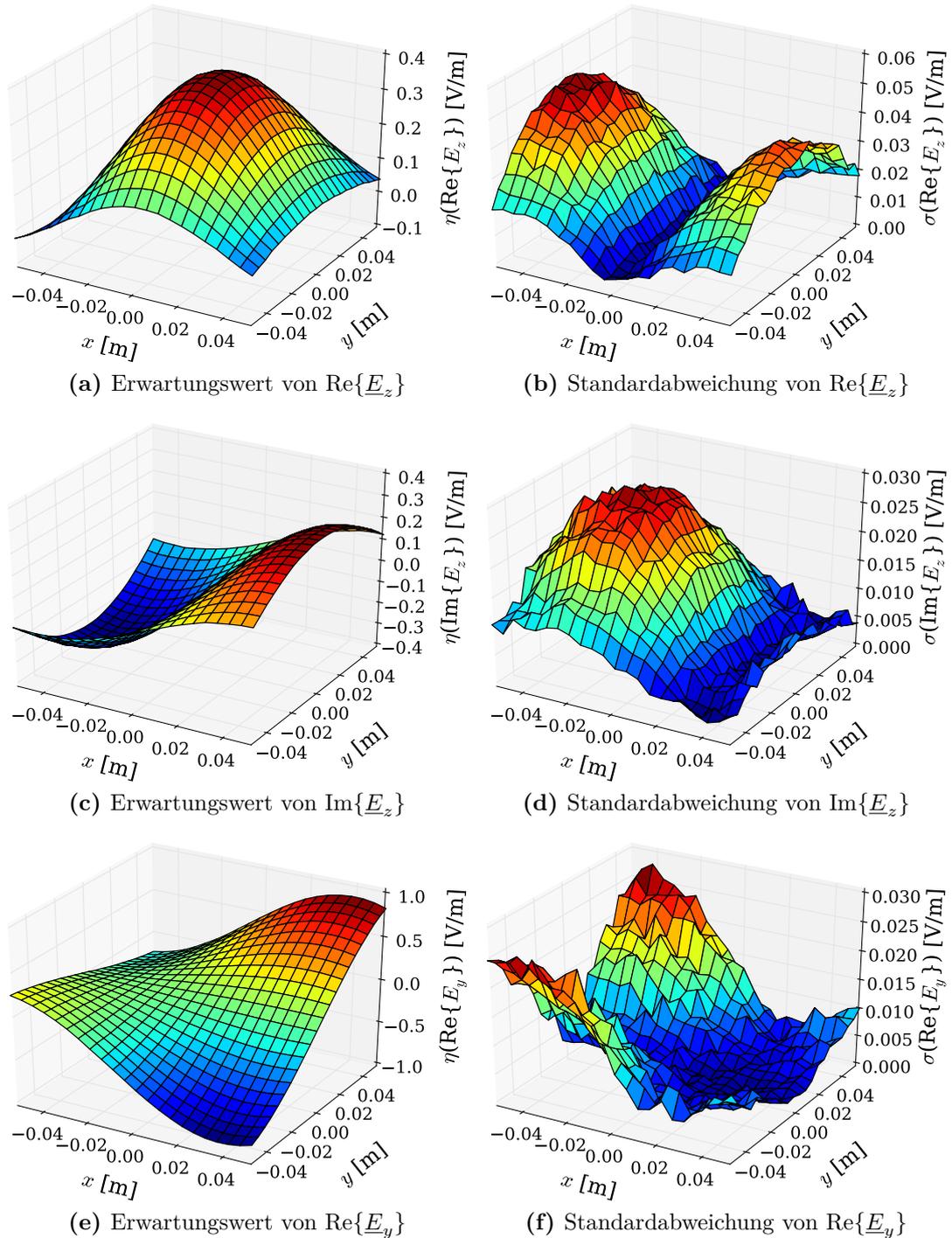
Zum Vergleich wurden diese Feldkomponenten auf der quadratischen Messfläche außerdem bei jeder Simulation aufgezeichnet und ihre Statistik jeweils punktweise berechnet. Die Ergebnisse sind in Abbildung 6.7 dargestellt. Abbildung 6.8 zeigt die Fehler, d.h. die Beträge der Differenzen zwischen beiden Ergebnissen.

Die in Abbildung 6.6 dargestellten Feldkomponenten weisen sowohl in ihren Erwartungswerten als auch in ihren Standardabweichungen deutlich unterschiedliche räumliche Verläufe auf. Die Variation der Apertur führt dabei zu Standardabweichungen des Feldes von bis zu etwa 10% der Erwartungswerte (für die Komponenten  $\text{Re}\{\vec{E}_z\}$  und  $\text{Im}\{\vec{E}_z\}$ ). Auch die zu erkennenden Symmetrien in der Feldverteilung sind für jede Feldkomponente unterschiedlich, so ist die näherungsweise Spiegelsymmetrie der Komponente  $\text{Re}\{\vec{E}_z\}$  bezüglich der Ebene  $x = 0$  in den anderen Komponenten nicht zu erkennen. Lediglich die Symmetrie bezüglich der Ebene  $y = 0$  ist in allen drei Komponenten sichtbar und auf die gemeinsame Symmetrie des Schirmes und der einfallenden Welle zurückzuführen. Trotz der relativ simplen Geometrie dieses Schirms hat man es also mit einer komplexen Feldverteilung im Inneren zu tun, also einem idealen Testfall für die Methode der statistischen Multipolentwicklung.

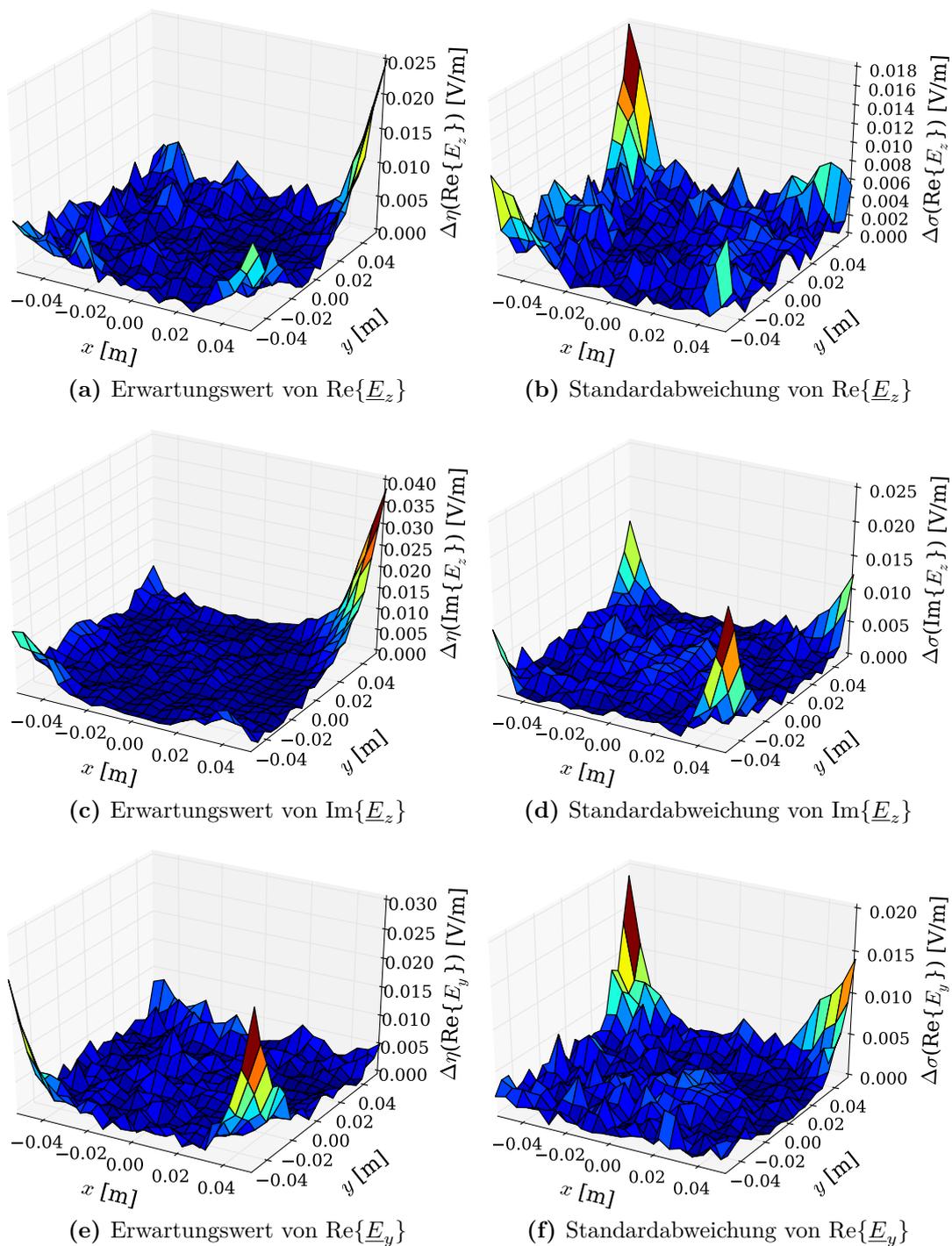
Die Ergebnisse der punktweisen Statistik in Abbildung 6.7 ähneln den Ergeb-



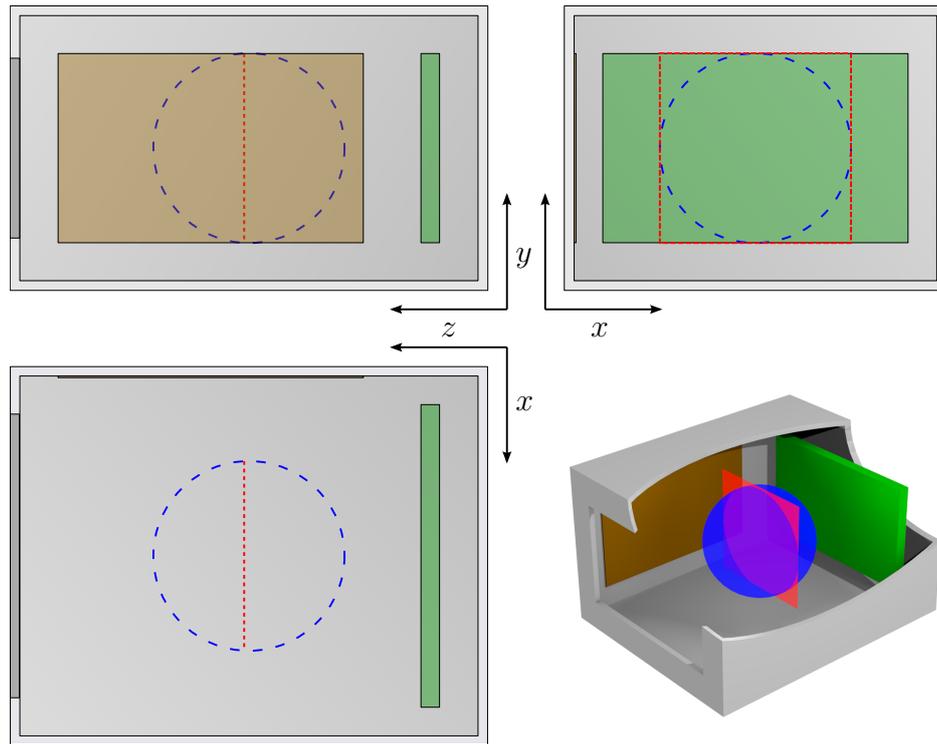
**Abbildung 6.6:** Ergebnisse der statistischen Multipolentwicklung beim leeren quaderförmigen Schirm ( $n_{\max} = 8$ )



**Abbildung 6.7:** Ergebnisse der punktwweisen Auswertung der Feldstatistik beim leeren quaderförmigen Schirm



**Abbildung 6.8:** Vergleich der statistischen Multipolentwicklung ( $n_{\max} = 8$ ) mit punktwiser Auswertung der Feldstatistik beim leeren quaderförmigen Schirm



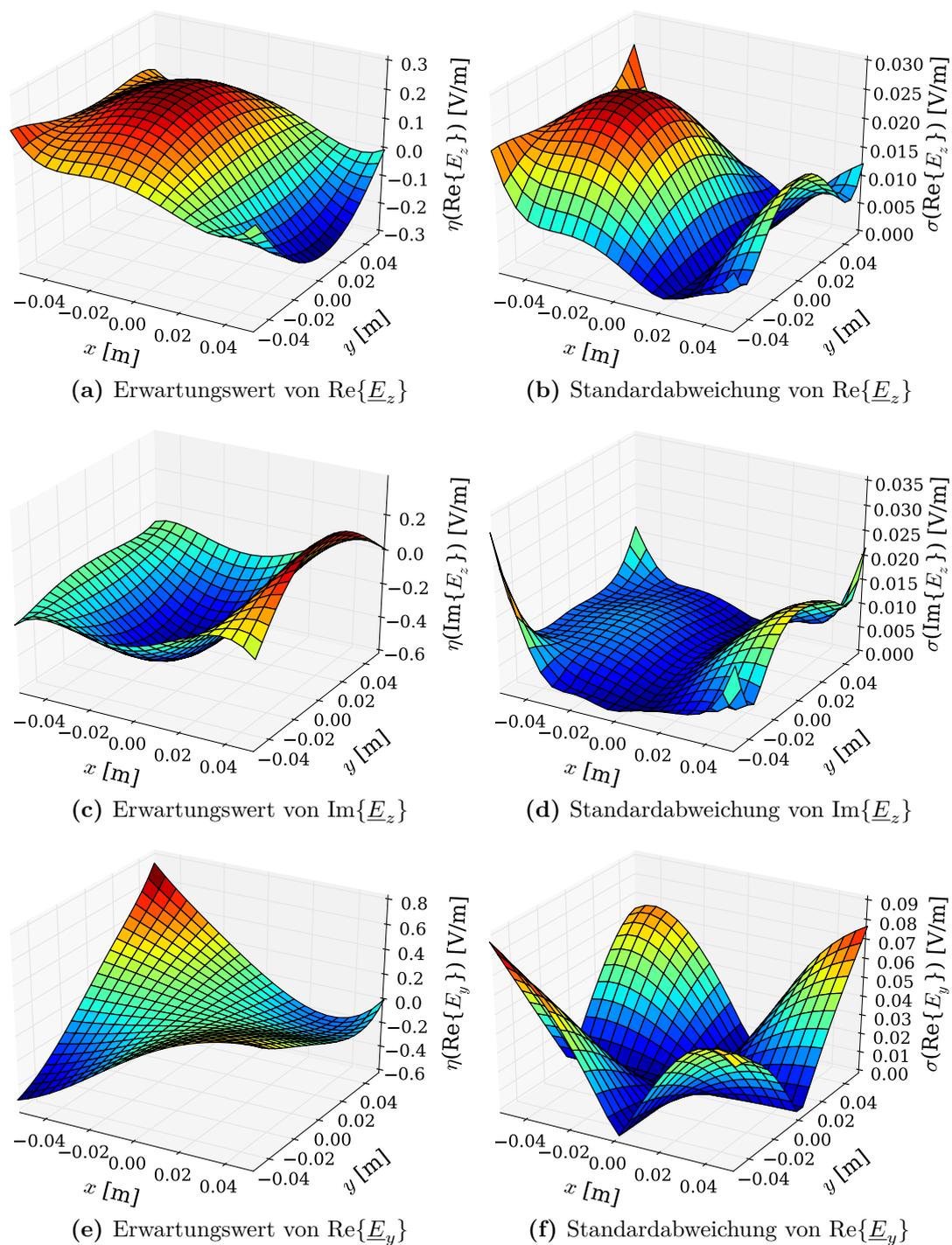
**Abbildung 6.9:** Gefüllter Schirm mit Absorptionsfolie (braun) und unbestückter Platine (grün)

nissen der statistischen Multipolentwicklung sehr stark, sind aber insbesondere im Falle der Standardabweichungen deutlich verrauscht. Die in Abbildung 6.8 dargestellten Differenzen zwischen beiden Resultaten spiegeln dies wider. Die Fehler der Erwartungswerte bleiben größtenteils unterhalb von 1 % der Maximalwerte, die der Standardabweichungen immerhin unter 10 %. Größere Fehler treten nur in den Ecken des quadratischen Gebietes auf. Diese Bereiche liegen gerade außerhalb der Rekonstruktionskugel. Die Fehler sind also auf die in Abschnitt 6.1 diskutierte Eigenschaft der Multipolschnittstelle zurückzuführen.

## 6.3 Gefüllter Schirm

In der Praxis enthält ein Schirm neben der zu schirmenden Komponente häufig eine Vielzahl weiterer Elemente. Daher soll im Folgenden ein gefüllter Schirm untersucht werden.

Als Beispiel für einem gefüllten Schirm wird die gleiche äußere Geometrie wie zuvor verwendet, der zwei Elemente hinzugefügt wurden. Zum einen befindet sich zentral vor der Rückwand des Schirmes eine 10 mm dicke Platte aus FR-4 mit einer Breite von 160 mm und einer Höhe von 100 mm, sowie einem Abstand von 20 mm von der



**Abbildung 6.10:** Ergebnisse der statistischen Multipolentwicklung beim leeren quaderförmigen Schirm ( $n_{\max} = 8$ )

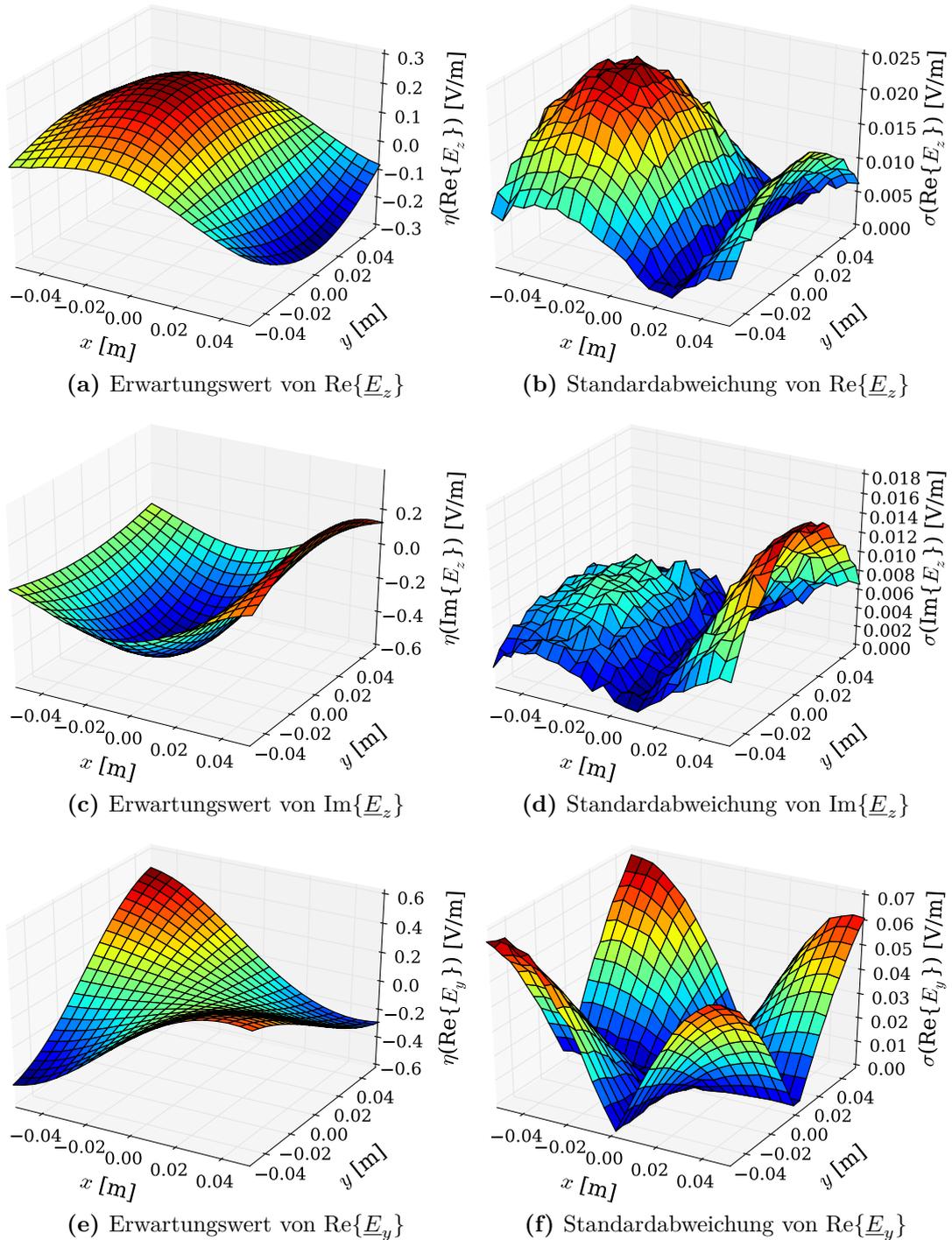
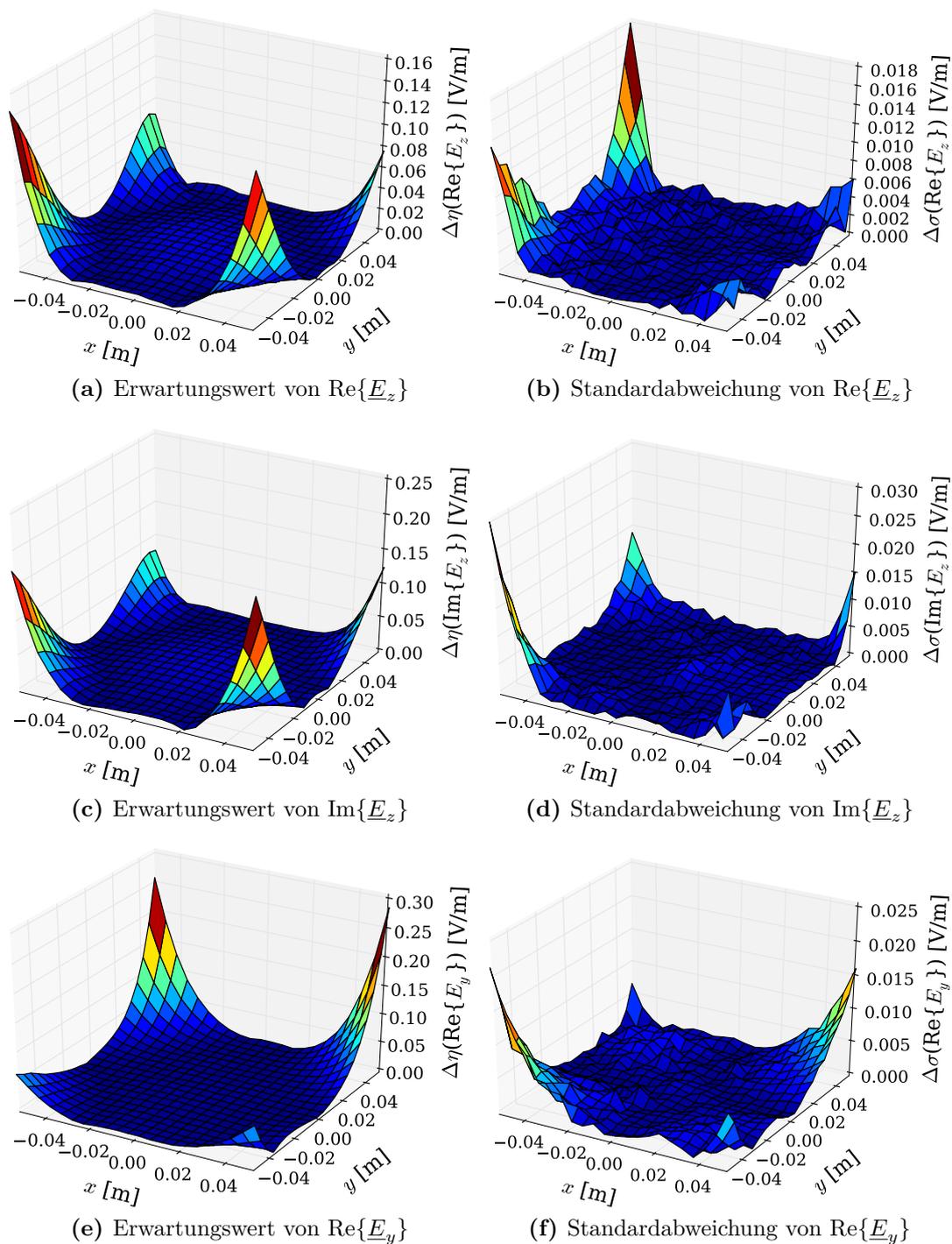


Abbildung 6.11: Ergebnisse der punktwweisen Auswertung der Feldstatistik beim leeren quaderförmigen Schirm



**Abbildung 6.12:** Vergleich der statistischen Multipolentwicklung ( $n_{\max} = 8$ ) mit punktwiser Auswertung der Feldstatistik beim leeren quaderförmigen Schirm

Rückwand. Dieses Element steht stellvertretend für eine unbestückte Platine. Weiter ist die linke Seitenwand auf einer Fläche von 160 mm Breite mal 100 mm Höhe mit einer 1 mm dicken HF-Absorberfolie ECCOSORB<sup>®</sup> MCS beklebt (siehe Abbildung 6.9). Beide Elemente befinden sich außerhalb der in der vorherigen Geometrie verwendeten Kugel, die daher auch für diesen Fall unverändert verwendet werden kann.

Abbildung 6.10 zeigt die Ergebnisse der statistischen Multipolentwicklung, Abbildung 6.11 die der punktweise bestimmten Statistik und Abbildung 6.12 die Beträge der Differenzen zwischen beiden Darstellungen.

Gegenüber dem leeren Schirm haben sich die Feldverteilungen im Wesentlichen nur leicht verschoben. Die Symmetrie bezüglich der Ebene  $y = 0$  wurde durch die eingefügte Schirmfüllung nicht gebrochen und ist weiterhin in allen Komponenten erkennbar. Wieder sind die ermittelten Standardabweichungen der punktweisen Statistik (Abbildung 6.11b,d,f) im Vergleich zu denen der statistischen Multipolentwicklung (Abbildung 6.10b,d,f) deutlich verwaschen.

Die Abweichungen zwischen beiden Darstellungen sind innerhalb der Rekonstruktionskugel erneut sehr klein und steigen außerhalb der Kugel wie zuvor stark an.



# Kapitel 7

## Schlussbetrachtung

Die statistische Beschreibung elektromagnetischer Felder in Schirmen ist in der EMV von zunehmender Bedeutung. In dieser Arbeit wurde zu diesem Zweck ein neues Verfahren präsentiert, das in den häufig auftretenden Situationen mit kleinen Variationen eine kompakte und genaue Darstellung des statistischen Feldes liefert.

Ausgangspunkt dieser Methode war die Multipolentwicklung, die um eine statistische Komponente erweitert wurde. Es konnte gezeigt werden, dass diese Methode eine äußerst kompakte Darstellung eines elektromagnetischen Feldes mit kleinen Variationen bietet und dabei die gesamte Statistik des Feldes bis zu gegebener Ordnung getreu wiedergibt.

Am Beispiel ebener Wellen wurde die Methode durch Vergleich mit Monte-Carlo-Simulationen auf ihre Genauigkeit im Hinblick auf die Wiedergabe der Statistik der Feldkomponenten überprüft. Auch die Möglichkeit einer weiteren Kompression der Darstellung durch Ausnutzung eventueller dünn besetzter Kovarianzmatrizen wurde untersucht, jedoch als nicht realisierbar verworfen.

Als erste Schirmstruktur wurde ein geschlitzter Zylinder untersucht. Auch hier zeigte die Methode der statistischen Multipolentwicklung für die Feldkomponenten sehr genaue Ergebnisse. Untersucht wurde dabei sowohl ein Fall, bei dem der Schirm bei einer seiner Resonanzfrequenzen angeregt wurde, als auch ein nichtresonanter Fall.

Bei der Untersuchung der Elektromagnetischen Schirmdämpfung wurden die Grenzen dieser Methode deutlich. Da die Schirmdämpfung in nichtlinearer Weise von den Feldkomponenten abhängt, führen die verwendeten Näherungen durch statistische Momente bis zur zweiten Ordnung zwangsläufig zu Ungenauigkeiten im Ergebnis. Es wurden zwei Ansätze zur Lösung dieses Problems untersucht. Zum einen konnte gezeigt werden, dass eine grundsätzliche Betrachtung höherer statistischer Momente zur Verbesserung der Ergebnisse führt, jedoch einen deutlich höheren Speicher- und

Rechenzeitaufwand mit sich bringt. Als zweite Option wurde die Verwendung eines alternativen Schirmwirkungsmaßes evaluiert.

Zur Ermittlung der statistischen Multipolentwicklung für nichtkanonische Geometrien wurde eine Multipolschnittstelle präsentiert und evaluiert. Diese ermöglicht es aus numerischen Simulationen die Statistiken der Multipolamplituden zu extrahieren und benötigt dafür lediglich die tangentialen Komponenten der elektrischen oder magnetischen Feldstärke auf einer Kugeloberfläche. Es konnte gezeigt werden, dass die derart rekonstruierte Multipolentwicklung innerhalb der Kugel zu sehr guten Ergebnissen führt und in ihrer Genauigkeit durch Wahl der Anzahl der Messpunkte gut skalierbar ist. Außerhalb der Rekonstruktionskugel wird das Feld nur mangelhaft wiedergegeben, was jedoch keine wesentliche Einschränkung darstellt, da der Kugelradius jeweils so groß gewählt werden kann, dass er das gesamte für die Multipolentwicklung relevante sphärische Gebiet einschließt.

Anschließend wurde die gute Übereinstimmung der Ergebnisse der statistischen Multipolentwicklung mit vergleichenden Monte-Carlo-Simulationen für einen leeren und einen teilweise mit absorbierendem Material gefüllten Schirm demonstriert.

Die vorgestellte Methode der statistischen Multipolentwicklung ist also geeignet, das elektromagnetische Feld mit kleinen statistischen Variationen innerhalb eines Schirmes auf kompakte Weise zu beschreiben. Sie lässt sich sowohl bei einigen kanonischen Geometrien semianalytisch bestimmen als auch bei realistischen Schirmgeometrien aus Simulationsdaten gewinnen.

Die Multipolschnittstelle lässt sich prinzipiell auch für Messdaten verwenden, wobei sich dabei das Problem der rückwirkungsfreien Messung der Feldkomponenten stellt. Dies ist neben der Performanceoptimierung der entwickelten Software und der Entwicklung einer Schnittstelle zur in [14] vorgestellten *Direct Solution Technique* ein möglicher Anknüpfungspunkt für zukünftige Forschungsprojekte.

# Anhang A

## Multipolentwicklung

In diesem Kapitel werden zusätzliche Rechnungen präsentiert, die in Abschnitt 2.2 keinen Platz gefunden haben. In Abschnitt A.1 wird die Lösung der Helmholtzgleichungen des elektromagnetischen Feldes in Kugelkoordinaten hergeleitet. In Abschnitt A.2 wird dasselbe für zweidimensionale Probleme (d.h. solche mit Translationsinvarianz in  $z$ -Richtung) in ebenen Polarkoordinaten wiederholt. Abschnitt A.3 gibt schließlich eine Übersicht über wichtige mathematische Funktionen, die im Verlauf der Arbeit verwendet werden, und Abschnitt A.4 listet verwendete Vektoroperationen auf.

### A.1 Die Helmholtzgleichungen in Kugelkoordinaten

#### A.1.1 Die vektoriellen Helmholtz-Gleichungen für das elektromagnetische Feld

Anwendung der Rotation auf (2.18) und Einsetzen von (2.18) und umgekehrt führt unter Berücksichtigung von (2.20) und (2.21) mit der Wellenzahl  $\kappa = \omega\sqrt{\mu\epsilon_{\text{eff}}}$  auf die Helmholtzgleichungen für die elektrische bzw. die magnetische Feldstärke (siehe Abschnitt 2.2.2):

$$\Delta\vec{H} + \kappa^2\vec{H} = 0 \tag{A.1}$$

$$\Delta\vec{E} + \kappa^2\vec{E} = 0 \tag{A.2}$$

## A.1.2 Die skalare Helmholtzgleichung

Die skalare Helmholtzgleichung lautet in Kugelkoordinaten:

$$\Delta\psi(r,\vartheta,\varphi) + \kappa^2\psi(r,\vartheta,\varphi) = 0 \quad (\text{A.3})$$

Einsetzen des Laplaceoperators in Kugelkoordinaten (A.92) in (A.3) und Multiplikation mit  $r^2$  liefert:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \psi(r,\vartheta,\varphi) + r^2 \kappa^2 \psi(r,\vartheta,\varphi) \\ &= -\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \psi(r,\vartheta,\varphi) - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \psi(r,\vartheta,\varphi) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Multiplikation mit  $\frac{1}{\psi(r,\vartheta,\varphi)}$  führt zu:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\psi(r,\vartheta,\varphi)} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \psi(r,\vartheta,\varphi) + r^2 \kappa^2 \\ &= -\frac{1}{\psi(r,\vartheta,\varphi)} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \psi(r,\vartheta,\varphi) - \frac{1}{\psi(r,\vartheta,\varphi)} \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \psi(r,\vartheta,\varphi) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Mit dem Produktansatz  $\psi(r,\vartheta,\varphi) = \zeta(\kappa r)\chi(\vartheta,\varphi)$  erhält man schließlich:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\zeta(\kappa r)} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \zeta(\kappa r) + r^2 \kappa^2 \\ &= -\frac{1}{\chi(\vartheta,\varphi)} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \chi(\vartheta,\varphi) - \frac{1}{\chi(\vartheta,\varphi)} \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \chi(\vartheta,\varphi) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Da diese Gleichung für alle Werte von  $r$ ,  $\vartheta$  und  $\varphi$  erfüllt sein muss, muss gelten

$$\frac{1}{\zeta(\kappa r)} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \right) \zeta(\kappa r) + r^2 \kappa^2 = n(n+1) \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{1}{\chi(\vartheta,\varphi)} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \chi(\vartheta,\varphi) + \frac{1}{\chi(\vartheta,\varphi)} \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \chi(\vartheta,\varphi) = -n(n+1) \quad (\text{A.8})$$

mit einer Konstanten  $n(n+1)$ .

### Radiale Abhängigkeit

Aus (A.7) folgt:

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \right) \zeta(\kappa r) + [r^2 \kappa^2 - n(n+1)] \zeta(\kappa r) = 0 \quad (\text{A.9})$$

$$\kappa \frac{d}{dr} r^2 \zeta'(\kappa r) + [r^2 \kappa^2 - n(n+1)] \zeta(\kappa r) = 0 \quad (\text{A.10})$$

$$(\kappa r)^2 \zeta''(\kappa r) + 2\kappa r \zeta'(\kappa r) + [(\kappa r)^2 - n(n+1)] \zeta(\kappa r) = 0 \quad (\text{A.11})$$

Dies ist die Differentialgleichung für sphärische Zylinderfunktionen  $z_n(\kappa r)$  (siehe Abschnitt A.3.6). Lösungen für ganzzahlige  $n$  sind unter anderem die sphärischen Besselfunktionen erster Art  $z_n(\kappa r) = j_n(\kappa r)$  und die sphärischen Hankelfunktionen zweiter Art  $z_n(\kappa r) = h_n^2(\kappa r)$  [22].

### Winkelabhängigkeit

Aus (A.8) folgt nach Multiplikation mit  $\sin^2 \vartheta$ :

$$\frac{1}{\chi(\vartheta, \varphi)} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \chi(\vartheta, \varphi) + \frac{1}{\chi(\vartheta, \varphi)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \chi(\vartheta, \varphi) + n(n+1) \sin^2 \vartheta = 0 \quad (\text{A.12})$$

Mit dem Produktansatz  $\chi(\vartheta, \varphi) = \theta(\cos \vartheta) \phi(\varphi)$  erhält man:

$$\frac{1}{\theta(\cos \vartheta)} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \theta(\cos \vartheta) + n(n+1) \sin^2 \vartheta = -\frac{1}{\phi(\varphi)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \phi(\varphi) \quad (\text{A.13})$$

Da diese Gleichung für alle Werte von  $\vartheta$  und  $\varphi$  erfüllt sein muss, muss gelten

$$\frac{1}{\theta(\cos \vartheta)} \sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \right) \theta(\cos \vartheta) + n(n+1) \sin^2 \vartheta = m^2 \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{1}{\phi(\varphi)} \frac{d^2}{d\varphi^2} \phi(\varphi) = -m^2 \quad (\text{A.15})$$

mit der Konstanten  $m^2$ . Aus (A.15) folgt

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \phi(\varphi) + m^2 \phi(\varphi) = 0 \quad (\text{A.16})$$

mit der Lösung:

$$\phi(\varphi) = C e^{\pm jm\varphi} \quad (\text{A.17})$$

Da  $\phi(\varphi)$  stetig sein soll, muss  $m$  ganzzahlig sein. Aus (A.14) folgt:

$$\sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \right) \theta(\cos \vartheta) + [n(n+1) \sin^2 \vartheta - m^2] \theta(\cos \vartheta) = 0 \quad (\text{A.18})$$

$$-\sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \sin^2 \vartheta \theta'(\cos \vartheta) + [n(n+1) \sin^2 \vartheta - m^2] \theta(\cos \vartheta) = 0 \quad (\text{A.19})$$

$$-2 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \theta'(\cos \vartheta) + \sin^4 \vartheta \theta''(\cos \vartheta) + [n(n+1) \sin^2 \vartheta - m^2] \theta(\cos \vartheta) = 0 \quad (\text{A.20})$$

$$\sin^4 \vartheta \theta''(\cos \vartheta) - 2 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \theta'(\cos \vartheta) + [n(n+1) \sin^2 \vartheta - m^2] \theta(\cos \vartheta) = 0 \quad (\text{A.21})$$

$$\sin^2 \vartheta \theta''(\cos \vartheta) - 2 \cos \vartheta \theta'(\cos \vartheta) + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \right] \theta(\cos \vartheta) = 0 \quad (\text{A.22})$$

$$(1 - \cos^2 \vartheta) \theta''(\cos \vartheta) - 2 \cos \vartheta \theta'(\cos \vartheta) + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1 - \cos^2 \vartheta} \right] \theta(\cos \vartheta) = 0 \quad (\text{A.23})$$

Endliche eindeutige und stetige Lösungen dieser Gleichung existieren nur für  $n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  und  $|m| \leq n$  und sind durch die zugeordneten Legendre-Polynome gegeben [25]:

$$\theta(\cos \vartheta) = P_n^m(\cos \vartheta) \quad (\text{A.24})$$

Der Winkelabhängige Anteil der Lösung lautet also:

$$\chi(\vartheta, \varphi) = C P_n^m(\cos \vartheta) e^{\pm jm\varphi} \quad (\text{A.25})$$

Die Kugelflächenfunktionen

$$Y_n^m(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos \vartheta) e^{jm\varphi} \quad (\text{A.26})$$

stellen eine orthonormierte Form dieser Lösung dar (siehe Abschnitt A.3.3).

## Lösung

Die Lösung der skalaren Helmholtzgleichung in Kugelkoordinaten lautet also

$$\psi(\vec{r}) = z_n(\kappa r) Y_n^m(\vartheta, \varphi) \quad (\text{A.27})$$

mit  $n = 0, 1, 2, \dots$  und  $m = -n, -n + 1, \dots, n$ .

## A.2 Die Helmholtzgleichung in ebenen Polarkoordinaten

Die Helmholtzgleichungen für das elektrische und magnetische Feld lauten:

$$\Delta \vec{H} + \kappa^2 \vec{H} = 0 \quad (\text{A.28})$$

$$\Delta \vec{E} + \kappa^2 \vec{E} = 0 \quad , \quad (\text{A.29})$$

(2.18) und (2.19)

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = j\omega \varepsilon \vec{E} \quad (\text{A.30})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H} \quad (\text{A.31})$$

Ist das betrachtete Problem translationsinvariant in  $z$ -Richtung, bieten sich Zylinderkoordinaten bzw. ebene Polarkoordinaten zur Beschreibung an. Für die  $R$ - und  $\varphi$ -Komponenten folgt dann:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} = j\omega \varepsilon E_R \quad (\text{A.32})$$

$$-\frac{\partial H_z}{\partial R} = j\omega \varepsilon E_\varphi \quad (\text{A.33})$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} = -j\omega \mu H_R \quad (\text{A.34})$$

$$-\frac{\partial E_z}{\partial R} = -j\omega \mu H_\varphi \quad (\text{A.35})$$

Sind die  $z$ -Komponenten von  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  bekannt, lassen sich also die übrigen Komponenten direkt angeben:

$$\underline{E}_R = \frac{1}{j\omega\varepsilon R} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \varphi} \quad (\text{A.36})$$

$$\underline{E}_\varphi = -\frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial R} \quad (\text{A.37})$$

$$\underline{H}_R = -\frac{1}{j\omega\mu R} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \varphi} \quad (\text{A.38})$$

$$\underline{H}_\varphi = \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial R} \quad (\text{A.39})$$

Die  $z$ -Komponenten von  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  wiederum sind von einander unabhängig und erfüllen gemäß (A.28) und (A.29) jeweils skalare Helmholtzgleichungen

$$\Delta \underline{H}_z + \kappa^2 \underline{H}_z = 0 \quad (\text{A.40})$$

$$\Delta \underline{E}_z + \kappa^2 \underline{E}_z = 0 \quad , \quad (\text{A.41})$$

deren Lösung im folgenden Abschnitt erläutert wird.

### A.2.1 Die skalare Helmholtzgleichung in ebenen Polarkoordinaten

Die skalare Helmholtzgleichung in ebenen Polarkoordinaten lautet:

$$\Delta \psi(R, \varphi) + \kappa^2 \psi(R, \varphi) = 0 \quad (\text{A.42})$$

Einsetzen des Laplaceoperators in Zylinderkoordinaten (A.88) in (A.42) und Multiplikation mit  $R^2$  liefert:

$$R \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial}{\partial R} \right) \psi(R, \varphi) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \psi(R, \varphi) + \kappa^2 R^2 \psi(R, \varphi) = 0 \quad (\text{A.43})$$

$$R \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial}{\partial R} \right) \psi(R, \varphi) + \kappa^2 R^2 \psi(R, \varphi) = -\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \psi(R, \varphi) \quad (\text{A.44})$$

Multiplikation mit  $\frac{1}{\psi(R, \varphi)}$  führt zu:

$$\frac{R}{\psi(R, \varphi)} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial}{\partial R} \right) \psi(R, \varphi) + \kappa^2 R^2 = -\frac{1}{\psi(R, \varphi)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \psi(R, \varphi) \quad (\text{A.45})$$

Mit dem Produktansatz  $\psi(R, \varphi) = \zeta(\kappa R)\phi(\varphi)$  erhält man:

$$\frac{R}{\zeta(\kappa R)\phi(\varphi)} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial}{\partial R} \right) \zeta(\kappa R)\phi(\varphi) + \kappa^2 R^2 = -\frac{1}{\zeta(\kappa R)\phi(\varphi)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \zeta(\kappa R)\phi(\varphi) \quad (\text{A.46})$$

$$\frac{R}{\zeta(\kappa R)} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial}{\partial R} \right) \zeta(\kappa R) + \kappa^2 R^2 = -\frac{1}{\phi(\varphi)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \phi(\varphi) \quad (\text{A.47})$$

Da diese Gleichung für alle Werte von  $R$  und  $\varphi$  erfüllt sein muss, muss gelten

$$\frac{R}{\zeta(\kappa R)} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial}{\partial R} \right) \zeta(\kappa R) + \kappa^2 R^2 = n^2 \quad (\text{A.48})$$

$$\frac{1}{\phi(\varphi)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \phi(\varphi) = -n^2 \quad (\text{A.49})$$

mit einer Konstanten  $n^2$ .

### Radiale Abhängigkeit

Aus (A.48) folgt:

$$R \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial}{\partial R} \right) \zeta(\kappa R) + [\kappa^2 R^2 - n^2] \zeta(\kappa R) = 0 \quad (\text{A.50})$$

$$R \frac{\partial}{\partial R} (\kappa R \zeta'(\kappa R)) + [\kappa^2 R^2 - n^2] \zeta(\kappa R) = 0 \quad (\text{A.51})$$

$$R (\kappa^2 R \zeta''(\kappa R) + \kappa \zeta'(\kappa R)) + [\kappa^2 R^2 - n^2] \zeta(\kappa R) = 0 \quad (\text{A.52})$$

$$\kappa^2 R^2 \zeta''(\kappa R) + \kappa R \zeta'(\kappa R) + [\kappa^2 R^2 - n^2] \zeta(\kappa R) = 0 \quad (\text{A.53})$$

Dies ist die Besselsche Differentialgleichung, ihre Lösungen heißen Zylinderfunktionen  $Z_n(\kappa R)$  (siehe Abschnitt A.3.5). Lösungen für ganzzahlige  $n$  sind unter anderem die Besselfunktionen erster Art  $Z_n(\kappa R) = J_n(\kappa R)$  und die Hankelfunktionen zweiter Art  $Z_n(\kappa R) = H_n^2(\kappa R)$ .

### Winkelabhängigkeit

Aus (A.49) folgt

$$\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \phi(\varphi) + n^2 \phi(\varphi) = 0 \quad (\text{A.54})$$

mit der Lösung

$$\phi(\varphi) = C e^{jn\varphi} \quad . \quad (\text{A.55})$$

Damit  $\phi(\varphi)$  stetig ist, muss  $n$  ganzzahlig sein.

## Lösung

Die Lösung der skalaren Helmholtzgleichung in ebenen Polarkoordinaten lautet also

$$\psi(\vec{r}) = Z_n(\kappa R) e^{jn\varphi} \quad (\text{A.56})$$

mit  $n \in \mathbb{Z}$ .

## A.3 Wichtige Funktionen und ihre Eigenschaften

### A.3.1 Legendrepolynome

Die Legendre-Polynome  $P_n(z)$  sind Lösungen der Differentialgleichung

$$(1 - z^2) \frac{d^2}{dz^2} \psi(z) - 2z \frac{d}{dz} \psi(z) + n(n+1) \psi(z) = 0 \quad (\text{A.57})$$

mit  $n = 0, 1, 2, \dots$  und lassen sich durch die Rodrigues-Formel [22] angeben:

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n \quad (\text{A.58})$$

### A.3.2 Zugeordnete Legendrepolynome

Die zugeordneten Legendre-Polynome  $P_n^m(z)$  sind Lösungen der Legendre'schen Differentialgleichung

$$(1 - z^2) \frac{d^2}{dz^2} \psi(z) - 2z \frac{d}{dz} \psi(z) + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1 - z^2} \right] \psi(z) = 0 \quad (\text{A.59})$$

und sind wie folgt mit den gewöhnlichen Legendrepolynomen verknüpft [22]:

$$P_n^m(z) = (z^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dz^m} P_n(z) \quad (\text{A.60})$$

Für  $m = 0$  gehen die zugeordneten Legendrepolynome in die gewöhnlichen Legendrepolynome über:

$$P_n^0(z) = P_n(z) \quad (\text{A.61})$$

### A.3.3 Kugelflächenfunktionen

Die Kugelflächenfunktionen

$$Y_n^m(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos \vartheta) e^{jm\varphi} \quad (\text{A.62})$$

sind Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial Y_{n,m}(\vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Y_{n,m}(\vartheta, \varphi)}{\partial \varphi^2} + n(n+1) Y_{n,m}(\vartheta, \varphi) = 0 \quad (\text{A.63})$$

mit  $n = 0, 1, 2, \dots$  und  $m = -n, -n+1, \dots, n$ . Sie bilden ein vollständiges

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} Y_{n,m}(\vartheta, \varphi) Y_{n,m}^*(\vartheta', \varphi') = \delta(\cos \vartheta - \cos \vartheta') \delta(\varphi - \varphi') \quad (\text{A.64})$$

und orthonormiertes

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_{n,m}(\vartheta, \varphi) \cdot Y_{n',m'}^*(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \delta_{n,n'} \delta_{m,m'} \quad (\text{A.65})$$

Funktionensystem auf der Einheitskugel.

### A.3.4 Vektorielle Kugelflächenfunktionen

Die transversalen Vektorkugelflächenfunktionen werden wie folgt definiert [19]:

$$\vec{m}_{nm}(\vartheta, \varphi) = -\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial Y_{n,m}(\vartheta, \varphi)}{\partial \varphi} \vec{e}_\vartheta + \frac{\partial Y_{n,m}(\vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta} \vec{e}_\varphi \quad (\text{A.66})$$

$$\vec{n}_{nm}(\vartheta, \varphi) = \frac{\partial Y_{n,m}(\vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta} \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial Y_{n,m}(\vartheta, \varphi)}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \quad (\text{A.67})$$

Sie genügen folgenden Orthogonalitätsrelationen:

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \vec{m}_{n,m} \cdot \vec{m}_{n',m'}^* \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = n(n+1)\delta_{n,n'}\delta_{m,m'} \quad (\text{A.68})$$

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \vec{n}_{n,m} \cdot \vec{n}_{n',m'}^* \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = n(n+1)\delta_{n,n'}\delta_{m,m'} \quad (\text{A.69})$$

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \vec{m}_{n,m} \cdot \vec{n}_{n',m'}^* \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 0 \quad (\text{A.70})$$

Außerdem gelten die Beziehungen:

$$\vec{e}_r \times \vec{n}_{n,m}(\vartheta, \varphi) = \vec{m}_{n,m}(\vartheta, \varphi) \quad (\text{A.71})$$

$$\vec{e}_r \times \vec{m}_{n,m}(\vartheta, \varphi) = -\vec{n}_{n,m}(\vartheta, \varphi) \quad (\text{A.72})$$

$$\vec{m}_{n,m}(\vartheta, \varphi) \cdot \vec{n}_{n,m}(\vartheta, \varphi) = 0 \quad (\text{A.73})$$

### A.3.5 Zylinderfunktionen

Die Lösungen der Besselschen Differentialgleichung

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} f(x) + x \frac{d}{dx} f(x) + (x^2 - \nu^2) f(x) = 0 \quad (\text{A.74})$$

werden als Bessel- oder Zylinderfunktionen bezeichnet. Lösungen sind z.B. die Besselfunktionen erster Art und die Neumannfunktionen (Besselfunktionen zweiter Art)

$$J_\nu(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+\nu}}{\Gamma(\nu+r+1)r!} \quad (\text{A.75})$$

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi} \quad (\text{A.76})$$

sowie die Hankelfunktionen erster und zweiter Art

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + jY_\nu(x) \quad (\text{A.77})$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - jY_\nu(x) \quad (\text{A.78})$$

### A.3.6 Sphärische Zylinderfunktionen

Die Lösungen der Differentialgleichung

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} f(x) + 2x \frac{d}{dx} f(x) + [x^2 - \nu(\nu+1)] f(x) = 0 \quad (\text{A.79})$$

werden als sphärische Bessel- oder Zylinderfunktionen bezeichnet. Lösungen sind z.B. die sphärischen Besselfunktionen erster Art und die sphärischen Neumannfunktionen (sphärische Besselfunktionen zweiter Art)

$$j_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\nu+1/2}(x) \quad (\text{A.80})$$

$$y_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{\nu+1/2}(x) \quad (\text{A.81})$$

sowie die sphärischen Hankelfunktionen erster und zweiter Art

$$h_n^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{\nu+1/2}^{(1)}(x) \quad (\text{A.82})$$

$$h_n^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{\nu+1/2}^{(2)}(x) \quad (\text{A.83})$$

## A.4 Vektoroperatoren

Sei  $\vec{A}(\vec{r})$  ein beliebiges Vektorfeld und  $\phi(\vec{r})$  ein beliebiges Skalarfeld. Die folgenden Gleichungen sind [18] entnommen:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} \quad (\text{A.84})$$

Vektoroperatoren in Zylinderkoordinaten  $(R, \varphi, z)$ :

$$\vec{\nabla} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial R} \vec{e}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z \quad (\text{A.85})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R A_R) + \frac{1}{R} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{A.86})$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right] \vec{e}_R + \left[ \frac{\partial A_R}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial R} \right] \vec{e}_\varphi \\ &\quad + \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R A_\varphi) - \frac{1}{R} \frac{\partial A_R}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_z \end{aligned} \quad (\text{A.87})$$

$$\Delta \phi = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (\text{A.88})$$

Vektoroperatoren in Kugelkoordinaten  $(r, \vartheta, \varphi)$ :

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta}\vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi \quad (\text{A.89})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(A_\vartheta \sin\vartheta) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} \quad (\text{A.90})$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A} = & \frac{1}{r\sin\vartheta} \left[ \frac{\partial}{\partial\vartheta}(A_\varphi \sin\vartheta) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial\varphi} \right] \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r A_\varphi) \right] \vec{e}_\vartheta \\ & + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r}(r A_\vartheta) - \frac{\partial A_r}{\partial\vartheta} \right] \vec{e}_\varphi \end{aligned} \quad (\text{A.91})$$

$$\Delta\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} \quad (\text{A.92})$$

# Anhang B

## Stochastik

### B.1 Momente von Zufallsvariablen

Gegeben sei ein Zufallsvektor  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_m)$ . Die Momente erster Ordnung bezeichnet man als Erwartungswerte  $\eta_{\mathbf{X}_1}, \dots, \eta_{\mathbf{X}_m}$ :

$$\eta_{\mathbf{X}_i} = E\{\mathbf{X}_i\} \quad (\text{B.1})$$

Die zentralen Momente zweiter Ordnung werden als Kovarianzen  $C_{\mathbf{X}_i\mathbf{X}_j}$  bezeichnet. Für den Fall  $i = j$  bezeichnet man sie als Varianzen  $\sigma_{\mathbf{X}_i}^2 = C_{\mathbf{X}_i\mathbf{X}_i}$ :

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{X}_i\mathbf{X}_j} &= \mu_2(\mathbf{X})_{i,j} = E\{(\mathbf{X}_i - \eta_{\mathbf{X}_i})(\mathbf{X}_j - \eta_{\mathbf{X}_j})\} \\ &= E\{\mathbf{X}_i\mathbf{X}_j\} - E\{\mathbf{X}_i\}\eta_{\mathbf{X}_j} - E\{\eta_{\mathbf{X}_i}\}\mathbf{X}_j + \eta_{\mathbf{X}_i}\eta_{\mathbf{X}_j} \\ &= E\{\mathbf{X}_i\mathbf{X}_j\} - \eta_{\mathbf{X}_i}\eta_{\mathbf{X}_j} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Die zentralen Momente dritter und vierter Ordnung sind analog definiert:

$$\begin{aligned} \mu_3(\mathbf{X})_{i,j,k} &= E\{(\mathbf{X}_i - \eta_{\mathbf{X}_i})(\mathbf{X}_j - \eta_{\mathbf{X}_j})(\mathbf{X}_k - \eta_{\mathbf{X}_k})\} \\ &= E\{\mathbf{X}_i\mathbf{X}_j\mathbf{X}_k\} \\ &\quad - E\{\mathbf{X}_i\mathbf{X}_j\}\eta_{\mathbf{X}_k} - E\{\mathbf{X}_i\mathbf{X}_k\}\eta_{\mathbf{X}_j} - E\{\mathbf{X}_j\mathbf{X}_k\}\eta_{\mathbf{X}_i} \\ &\quad + E\{\mathbf{X}_i\}\eta_{\mathbf{X}_j}\eta_{\mathbf{X}_k} + \eta_{\mathbf{X}_i}E\{\mathbf{X}_j\}\eta_{\mathbf{X}_k} + \eta_{\mathbf{X}_i}\eta_{\mathbf{X}_j}E\{\mathbf{X}_k\} \\ &\quad - \eta_{\mathbf{X}_i}\eta_{\mathbf{X}_j}\eta_{\mathbf{X}_k} \\ &= E\{\mathbf{X}_i\mathbf{X}_j\mathbf{X}_k\} + 2\eta_{\mathbf{X}_i}\eta_{\mathbf{X}_j}\eta_{\mathbf{X}_k} \\ &\quad - E\{\mathbf{X}_i\mathbf{X}_j\}\eta_{\mathbf{X}_k} - E\{\mathbf{X}_i\mathbf{X}_k\}\eta_{\mathbf{X}_j} - E\{\mathbf{X}_j\mathbf{X}_k\}\eta_{\mathbf{X}_i} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned}
\mu_4(\mathbf{X})_{i,j,k,l} &= E\{(\mathbf{X}_i - \eta_{\mathbf{X}_i})(\mathbf{X}_j - \eta_{\mathbf{X}_j})(\mathbf{X}_k - \eta_{\mathbf{X}_k})(\mathbf{X}_l - \eta_{\mathbf{X}_l})\} \\
&= E\{\mathbf{X}_i\mathbf{X}_j\mathbf{X}_k\mathbf{X}_l\} \\
&\quad - E\{\mathbf{X}_i\mathbf{X}_j\mathbf{X}_k\}\eta_{\mathbf{X}_l} - E\{\mathbf{X}_i\mathbf{X}_j\mathbf{X}_l\}\eta_{\mathbf{X}_k} \\
&\quad - E\{\mathbf{X}_j\mathbf{X}_k\mathbf{X}_l\}\eta_{\mathbf{X}_i} - E\{\mathbf{X}_j\mathbf{X}_k\mathbf{X}_i\}\eta_{\mathbf{X}_l} \\
&\quad + E\{\mathbf{X}_i\mathbf{X}_j\}\eta_{\mathbf{X}_k}\eta_{\mathbf{X}_l} + E\{\mathbf{X}_i\mathbf{X}_k\}\eta_{\mathbf{X}_j}\eta_{\mathbf{X}_l} + E\{\mathbf{X}_i\mathbf{X}_l\}\eta_{\mathbf{X}_j}\eta_{\mathbf{X}_k} \\
&\quad + E\{\mathbf{X}_j\mathbf{X}_k\}\eta_{\mathbf{X}_i}\eta_{\mathbf{X}_l} + E\{\mathbf{X}_j\mathbf{X}_l\}\eta_{\mathbf{X}_i}\eta_{\mathbf{X}_k} + E\{\mathbf{X}_k\mathbf{X}_l\}\eta_{\mathbf{X}_i}\eta_{\mathbf{X}_j} \\
&\quad - E\{\mathbf{X}_i\}\eta_{\mathbf{X}_j}\eta_{\mathbf{X}_k}\eta_{\mathbf{X}_l} - \eta_{\mathbf{X}_i}E\{\mathbf{X}_j\}\eta_{\mathbf{X}_k}\eta_{\mathbf{X}_l} \\
&\quad - \eta_{\mathbf{X}_i}\eta_{\mathbf{X}_j}E\{\mathbf{X}_k\}\eta_{\mathbf{X}_l} - \eta_{\mathbf{X}_i}\eta_{\mathbf{X}_j}\eta_{\mathbf{X}_k}E\{\mathbf{X}_l\} \\
&\quad + \eta_{\mathbf{X}_i}\eta_{\mathbf{X}_j}\eta_{\mathbf{X}_k}\eta_{\mathbf{X}_l} \\
&= E\{\mathbf{X}_i\mathbf{X}_j\mathbf{X}_k\mathbf{X}_l\} \\
&\quad - E\{\mathbf{X}_i\mathbf{X}_j\mathbf{X}_k\}\eta_{\mathbf{X}_l} - E\{\mathbf{X}_i\mathbf{X}_j\mathbf{X}_l\}\eta_{\mathbf{X}_k} \\
&\quad - E\{\mathbf{X}_j\mathbf{X}_k\mathbf{X}_l\}\eta_{\mathbf{X}_i} - E\{\mathbf{X}_j\mathbf{X}_k\mathbf{X}_i\}\eta_{\mathbf{X}_l} \\
&\quad + E\{\mathbf{X}_i\mathbf{X}_j\}\eta_{\mathbf{X}_k}\eta_{\mathbf{X}_l} + E\{\mathbf{X}_i\mathbf{X}_k\}\eta_{\mathbf{X}_j}\eta_{\mathbf{X}_l} + E\{\mathbf{X}_i\mathbf{X}_l\}\eta_{\mathbf{X}_j}\eta_{\mathbf{X}_k} \\
&\quad + E\{\mathbf{X}_j\mathbf{X}_k\}\eta_{\mathbf{X}_i}\eta_{\mathbf{X}_l} + E\{\mathbf{X}_j\mathbf{X}_l\}\eta_{\mathbf{X}_i}\eta_{\mathbf{X}_k} + E\{\mathbf{X}_k\mathbf{X}_l\}\eta_{\mathbf{X}_i}\eta_{\mathbf{X}_j} \\
&\quad - 3\eta_{\mathbf{X}_i}\eta_{\mathbf{X}_j}\eta_{\mathbf{X}_k}\eta_{\mathbf{X}_l}
\end{aligned} \tag{B.4}$$

## B.2 Funktionen von Zufallsvariablen

Gegeben sei ein Zufallsvektor  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_m)$ , sowie ein weiterer Zufallsvektor  $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_p)$  mit  $\mathbf{Y}_\nu = g_\nu(\mathbf{X}) = g_\nu(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_m)$ . Um die Momente von  $\mathbf{Y}$  zu bestimmen, werden nach (B.1) bis (B.4) folgende Erwartungswerte benötigt:

$$E\{\mathbf{Y}_\nu\} = \int \dots \int g_\nu(x) f_x(x) d^m x \tag{B.5}$$

$$E\{\mathbf{Y}_\nu \mathbf{Y}_\mu\} = \int \dots \int g_\nu(x) g_\mu(x) f_x(x) d^m x \tag{B.6}$$

$$E\{\mathbf{Y}_\nu \mathbf{Y}_\mu \mathbf{Y}_\xi\} = \int \dots \int g_\nu(x) g_\mu(x) g_\xi(x) f_x(x) d^m x \tag{B.7}$$

$$E\{\mathbf{Y}_\nu \mathbf{Y}_\mu \mathbf{Y}_\xi \mathbf{Y}_\zeta\} = \int \dots \int g_\nu(x) g_\mu(x) g_\xi(x) g_\zeta(x) f_x(x) d^m x \tag{B.8}$$

Hierbei wurden die Abkürzungen  $x = (x_1, \dots, x_m)$  und  $\eta_{\mathbf{X}} = (\eta_{\mathbf{X}_1}, \dots, \eta_{\mathbf{X}_m})$  in den Argumenten der Funktionen  $g_\nu$  und  $f_x$  verwendet. Diese Schreibweise wird auch im Folgenden weiterverwendet.

Die Funktionen  $g_\nu(x_1, \dots, x_m)$  lassen sich wie folgt um die Erwartungswerte  $\eta_{\mathbf{X}_1}$ ,

$\dots, \eta_{\mathbf{x}_m}$  in Taylorreihen entwickeln [25]:

$$g_\nu(x_1, \dots, x_m) = g_\nu(\eta_{\mathbf{x}_1}, \dots, \eta_{\mathbf{x}_m}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \sum_{i=1}^m (x_i - \eta_{\mathbf{x}_i}) \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^n g_\nu(\eta_{\mathbf{x}_1}, \dots, \eta_{\mathbf{x}_m}) \quad (\text{B.9})$$

Für eine kompaktere Schreibweise sei von nun an  $\hat{x}_i := (x_i - \eta_{\mathbf{x}_i})$  und die Funktionen  $g$  werden, wenn nicht anders angegeben, stets an der Stelle  $\eta_{\mathbf{x}}$  ausgewertet. Im Folgenden werden diese Taylorentwicklungen jeweils bis einschließlich vierter Ordnung in den  $\hat{x}_I$  mit  $I \in \{i, j, k, l\}$  ausgewertet. Für die in (B.5) bis (B.8) benötigten Produkte aus bis zu vier Funktionen  $g$  erhält man damit:

$$\begin{aligned} g_\nu(x) &= g_\nu \\ &+ \sum_i \hat{x}_i \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \hat{x}_i \hat{x}_j \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} \\ &+ \frac{1}{6} \sum_i \sum_j \sum_k \hat{x}_i \hat{x}_j \hat{x}_k \frac{\partial^3 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \\ &+ \frac{1}{24} \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \hat{x}_i \hat{x}_j \hat{x}_k \hat{x}_l \frac{\partial^4 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{aligned}
g_\nu(x)g_\mu(x) &= g_\nu g_\mu \\
&+ \sum_i \hat{x}_i \left( g_\nu \frac{\partial g_\mu}{\partial x_i} + g_\mu \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \right) \\
&+ \sum_{i,j} \hat{x}_i \hat{x}_j \left( \frac{1}{2} g_\nu \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial g_\mu}{\partial x_j} + \frac{1}{2} g_\mu \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} \right) \\
&+ \sum_{i,j,k} \hat{x}_i \hat{x}_j \hat{x}_k \left( \frac{1}{6} g_\nu \frac{\partial^3 g_\mu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_j \partial x_k} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial g_\mu}{\partial x_i} \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{1}{6} g_\mu \frac{\partial^3 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right) \\
&+ \sum_{i,j,k,l} \hat{x}_i \hat{x}_j \hat{x}_k \hat{x}_l \left( \frac{1}{24} g_\nu \frac{\partial^4 g_\mu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} + \frac{1}{6} \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial^3 g_\mu}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{1}{6} \frac{\partial g_\mu}{\partial x_i} \frac{\partial^3 g_\nu}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} + \frac{1}{24} g_\mu \frac{\partial^4 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} \right) \\
&+ \dots
\end{aligned} \tag{B.11}$$

$$\begin{aligned}
 g_\nu(x)g_\mu(x)g_\xi(x) &= g_\nu g_\mu g_\xi \\
 &+ \sum_i \hat{x}_i \left( g_\nu g_\mu \frac{\partial g_\xi}{\partial x_i} + g_\nu \frac{\partial g_\mu}{\partial x_i} g_\xi + \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} g_\mu g_\xi \right) \\
 &+ \sum_{i,j} \hat{x}_i \hat{x}_j \left( g_\nu \frac{\partial g_\mu}{\partial x_i} \frac{\partial g_\xi}{\partial x_j} + \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} g_\mu \frac{\partial g_\xi}{\partial x_j} + \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial g_\mu}{\partial x_j} g_\xi \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} g_\nu g_\mu \frac{\partial^2 g_\xi}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} g_\nu \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_i \partial x_j} g_\xi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} g_\mu g_\xi \right) \\
 &+ \sum_{i,j,k} \hat{x}_i \hat{x}_j \hat{x}_k \left( \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial g_\mu}{\partial x_j} \frac{\partial g_\xi}{\partial x_k} \right. \\
 &\quad + \frac{1}{2} g_\nu \frac{\partial g_\mu}{\partial x_i} \frac{\partial^2 g_\xi}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{1}{2} g_\nu \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial g_\xi}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} g_\mu \frac{\partial^2 g_\xi}{\partial x_j \partial x_k} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} g_\mu \frac{\partial g_\xi}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_j \partial x_k} g_\xi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial g_\mu}{\partial x_k} g_\xi \\
 &\quad \left. + \frac{1}{6} g_\nu g_\mu \frac{\partial^3 g_\xi}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} + \frac{1}{6} g_\nu \frac{\partial^3 g_\mu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} g_\xi + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} g_\mu g_\xi \right) \\
 &+ \sum_{i,j,k,l} \hat{x}_i \hat{x}_j \hat{x}_k \hat{x}_l \left( \frac{1}{2} \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial g_\mu}{\partial x_j} \frac{\partial^2 g_\xi}{\partial x_k \partial x_l} \right. \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial g_\xi}{\partial x_l} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial g_\mu}{\partial x_k} \frac{\partial g_\xi}{\partial x_l} \\
 &\quad + \frac{1}{4} g_\nu \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 g_\xi}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} g_\mu \frac{\partial^2 g_\xi}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_k \partial x_l} g_\xi \\
 &\quad + \frac{1}{6} g_\nu \frac{\partial g_\mu}{\partial x_i} \frac{\partial^3 g_\xi}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} + \frac{1}{6} g_\nu \frac{\partial^3 g_\mu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \frac{\partial g_\xi}{\partial x_l} + \frac{1}{6} \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} g_\mu \frac{\partial^3 g_\xi}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} \\
 &\quad + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} g_\mu \frac{\partial g_\xi}{\partial x_l} + \frac{1}{6} \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial^3 g_\mu}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} g_\xi + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \frac{\partial g_\mu}{\partial x_l} g_\xi \\
 &\quad + \frac{1}{24} g_\nu g_\mu \frac{\partial^4 g_\xi}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} + \frac{1}{24} g_\nu \frac{\partial^4 g_\mu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} g_\xi \\
 &\quad \left. + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} g_\mu g_\xi \right) \\
 &+ \dots
 \end{aligned} \tag{B.12}$$



Damit können nun die benötigten Erwartungswerte (B.5) bis (B.8) ermittelt werden:

$$\begin{aligned}
 E\{\mathbf{Y}_\nu\} &= \int \dots \int g_\nu(x) f_x(x) d^m x \\
 &= g_\nu + \sum_{i,j} \frac{\mu_2(\mathbf{X})_{i,j}}{2} \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} \\
 &\quad + \sum_{i,j,k} \frac{\mu_3(\mathbf{X})_{i,j,k}}{6} \frac{\partial^3 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \\
 &\quad + \sum_{i,j,k,l} \frac{\mu_4(\mathbf{X})_{i,j,k,l}}{24} \frac{\partial^4 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} \\
 &\quad + \dots
 \end{aligned} \tag{B.14}$$

$$\begin{aligned}
 E\{\mathbf{Y}_\nu \mathbf{Y}_\mu\} &= \int \dots \int g_\nu(x) g_\mu(x) f_x(x) d^m x \\
 &= g_\nu g_\mu + \sum_{i,j} \mu_2(\mathbf{X})_{i,j} \left( \frac{1}{2} g_\nu \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial g_\mu}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} g_\mu \right) \\
 &\quad + \sum_{i,j,k} \mu_3(\mathbf{X})_{i,j,k} \left( \frac{1}{6} g_\nu \frac{\partial^3 g_\mu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial g_\mu}{\partial x_k} \right. \\
 &\quad \quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} g_\mu \right) \\
 &\quad + \sum_{i,j,k,l} \mu_4(\mathbf{X})_{i,j,k,l} \left( \frac{1}{24} g_\nu \frac{\partial^4 g_\mu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} + \frac{1}{6} \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial^3 g_\mu}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} \right. \\
 &\quad \quad \left. + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{1}{6} \frac{\partial g_\mu}{\partial x_i} \frac{\partial^3 g_\nu}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} + \frac{1}{24} g_\mu \frac{\partial^4 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} \right) \\
 &\quad + \dots
 \end{aligned} \tag{B.15}$$

$$\begin{aligned}
E\{\mathbf{Y}_\nu \mathbf{Y}_\mu \mathbf{Y}_\xi\} &= \int \dots \int g_\nu(x) g_\mu(x) g_\xi(x) f_x(x) d^m x \\
&= g_\nu g_\mu g_\xi \\
&+ \sum_{i,j} \mu_2(\mathbf{X})_{i,j} \left( g_\nu \frac{\partial g_\mu}{\partial x_i} \frac{\partial g_\xi}{\partial x_j} + \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} g_\mu \frac{\partial g_\xi}{\partial x_j} + \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial g_\mu}{\partial x_j} g_\xi \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} g_\nu g_\mu \frac{\partial^2 g_\xi}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} g_\nu \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_i \partial x_j} g_\xi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} g_\mu g_\xi \right) \\
&+ \sum_{i,j,k} \mu_3(\mathbf{X})_{i,j,k} \left( \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial g_\mu}{\partial x_j} \frac{\partial g_\xi}{\partial x_k} \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} g_\nu \frac{\partial g_\mu}{\partial x_i} \frac{\partial^2 g_\xi}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{1}{2} g_\nu \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial g_\xi}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} g_\mu \frac{\partial^2 g_\xi}{\partial x_j \partial x_k} \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} g_\mu \frac{\partial g_\xi}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_j \partial x_k} g_\xi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial g_\mu}{\partial x_k} g_\xi \\
&\quad \left. + \frac{1}{6} g_\nu g_\mu \frac{\partial^3 g_\xi}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} + \frac{1}{6} g_\nu \frac{\partial^3 g_\mu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} g_\xi + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} g_\mu g_\xi \right) \\
&+ \sum_{i,j,k,l} \mu_4(\mathbf{X})_{i,j,k,l} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial g_\mu}{\partial x_j} \frac{\partial^2 g_\xi}{\partial x_k \partial x_l} \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial g_\xi}{\partial x_l} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial g_\mu}{\partial x_k} \frac{\partial g_\xi}{\partial x_l} \\
&\quad + \frac{1}{4} g_\nu \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 g_\xi}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} g_\mu \frac{\partial^2 g_\xi}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_k \partial x_l} g_\xi \\
&\quad + \frac{1}{6} g_\nu \frac{\partial g_\mu}{\partial x_i} \frac{\partial^3 g_\xi}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} + \frac{1}{6} g_\nu \frac{\partial^3 g_\mu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \frac{\partial g_\xi}{\partial x_l} + \frac{1}{6} \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} g_\mu \frac{\partial^3 g_\xi}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} \\
&\quad + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} g_\mu \frac{\partial g_\xi}{\partial x_l} + \frac{1}{6} \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial^3 g_\mu}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} g_\xi + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \frac{\partial g_\mu}{\partial x_l} g_\xi \\
&\quad + \frac{1}{24} g_\nu g_\mu \frac{\partial^4 g_\xi}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} + \frac{1}{24} g_\nu \frac{\partial^4 g_\mu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} g_\xi \\
&\quad \left. + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} g_\mu g_\xi \right) \\
&+ \dots
\end{aligned} \tag{B.16}$$



Weiterhin werden folgende Produkte aus Erwartungswerten von  $\mathbf{Y}$  benötigt. Sie ergeben sich aus (B.14) bis (B.17):

$$\begin{aligned} \eta_{\mathbf{Y}_\nu} &= g_\nu + \sum_{i,j} \frac{\mu_2(\mathbf{X})_{i,j}}{2} \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i,j,k} \frac{\mu_3(\mathbf{X})_{i,j,k}}{6} \frac{\partial^3 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \\ &\quad + \sum_{i,j,k,l} \frac{\mu_4(\mathbf{X})_{i,j,k,l}}{24} \frac{\partial^4 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} + \dots \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

$$\begin{aligned} \eta_{\mathbf{Y}_\nu} \eta_{\mathbf{Y}_\mu} &= g_\nu g_\mu \\ &\quad + \sum_{i,j} \frac{\mu_2(\mathbf{X})_{i,j}}{2} \left( g_\nu \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} g_\mu \right) \\ &\quad + \sum_{i,j,k} \frac{\mu_3(\mathbf{X})_{i,j,k}}{6} \left( g_\nu \frac{\partial^3 g_\mu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^3 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} g_\mu \right) \\ &\quad + \sum_{i,j,k,l} \frac{\mu_4(\mathbf{X})_{i,j,k,l}}{24} \left( g_\nu \frac{\partial^4 g_\mu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^4 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} g_\mu \right) \\ &\quad + \sum_{i,j,k,l} \frac{\mu_2(\mathbf{X})_{i,j} \mu_2(\mathbf{X})_{k,l}}{4} \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_k \partial x_l} \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

$$\begin{aligned} \eta_{\mathbf{Y}_\nu} \eta_{\mathbf{Y}_\mu} \eta_{\mathbf{Y}_\xi} &= g_\nu g_\mu g_\xi \\ &\quad + \sum_{i,j} \frac{\mu_2(\mathbf{X})_{i,j}}{2} \left( g_\nu g_\mu \frac{\partial^2 g_\xi}{\partial x_i \partial x_j} + g_\nu \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_i \partial x_j} g_\xi + \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} g_\mu g_\xi \right) \\ &\quad + \sum_{i,j,k} \frac{\mu_3(\mathbf{X})_{i,j,k}}{6} \left( g_\nu g_\mu \frac{\partial^3 g_\xi}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} + g_\nu \frac{\partial^3 g_\mu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} g_\xi + \frac{\partial^3 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} g_\mu g_\xi \right) \\ &\quad + \sum_{i,j,k,l} \frac{\mu_4(\mathbf{X})_{i,j,k,l}}{24} \left( g_\nu g_\mu \frac{\partial^4 g_\xi}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} + g_\nu \frac{\partial^4 g_\mu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} g_\xi \right. \\ &\quad \quad \left. + \frac{\partial^4 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} g_\mu g_\xi \right) \\ &\quad + \sum_{i,j,k,l} \frac{\mu_2(\mathbf{X})_{i,j} \mu_2(\mathbf{X})_{k,l}}{4} \left( g_\nu \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 g_\xi}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} g_\mu \frac{\partial^2 g_\xi}{\partial x_k \partial x_l} \right. \\ &\quad \quad \left. + \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_k \partial x_l} g_\xi \right) \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

$$\begin{aligned}
 \eta_{\mathbf{X}_\nu} \eta_{\mathbf{X}_\mu} \eta_{\mathbf{X}_\xi} \eta_{\mathbf{X}_\zeta} &= g_\nu g_\mu g_\xi g_\zeta \\
 &+ \sum_{i,j} \frac{\mu_2(\mathbf{X})_{i,j}}{2} \left( g_\nu g_\mu g_\xi \frac{\partial^2 g_\zeta}{\partial x_i \partial x_j} + g_\nu g_\mu \frac{\partial^2 g_\xi}{\partial x_i \partial x_j} g_\zeta \right. \\
 &\quad \left. + g_\nu \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_i \partial x_j} g_\xi g_\zeta + \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} g_\mu g_\xi g_\zeta \right) \\
 &+ \sum_{i,j,k} \frac{\mu_3(\mathbf{X})_{i,j,k}}{6} \left( g_\nu g_\mu g_\xi \frac{\partial^3 g_\zeta}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} + g_\nu g_\mu \frac{\partial^3 g_\xi}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} g_\zeta \right. \\
 &\quad \left. + g_\nu \frac{\partial^3 g_\mu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} g_\xi g_\zeta + \frac{\partial^3 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} g_\mu g_\xi g_\zeta \right) \\
 &+ \sum_{i,j,k,l} \frac{\mu_4(\mathbf{X})_{i,j,k,l}}{24} \left( g_\nu g_\mu g_\xi \frac{\partial^4 g_\zeta}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} + g_\nu g_\mu \frac{\partial^4 g_\xi}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} g_\zeta \right. \\
 &\quad \left. + g_\nu \frac{\partial^4 g_\mu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} g_\xi g_\zeta + \frac{\partial^4 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} g_\mu g_\xi g_\zeta \right) \\
 &+ \sum_{i,j,k,l} \frac{\mu_2(\mathbf{X})_{i,j} \mu_2(\mathbf{X})_{k,l}}{4} \left( g_\nu g_\mu \frac{\partial^2 g_\xi}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 g_\zeta}{\partial x_k \partial x_l} + g_\nu \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_i \partial x_j} g_\xi \frac{\partial^2 g_\zeta}{\partial x_k \partial x_l} \right. \\
 &\quad + \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} g_\mu g_\xi \frac{\partial^2 g_\zeta}{\partial x_k \partial x_l} + g_\nu \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 g_\xi}{\partial x_k \partial x_l} g_\zeta \\
 &\quad \left. + \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} g_\mu \frac{\partial^2 g_\xi}{\partial x_k \partial x_l} g_\zeta + \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_k \partial x_l} g_\xi g_\zeta \right) \\
 &+ \dots
 \end{aligned} \tag{B.21}$$

$$\begin{aligned}
E\{\mathbf{Y}_\nu \mathbf{Y}_\mu\} \eta_{\mathbf{X}_\xi} &= g_\nu g_\mu g_\xi \\
&+ \sum_{i,j} \mu_2(\mathbf{X})_{i,j} \left( \frac{1}{2} g_\nu g_\mu \frac{\partial^2 g_\xi}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} g_\nu \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_i \partial x_j} g_\xi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} g_\mu g_\xi + \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial g_\mu}{\partial x_j} g_\xi \right) \\
&+ \sum_{i,j,k} \mu_3(\mathbf{X})_{i,j,k} \left( \frac{1}{6} g_\nu g_\mu \frac{\partial^3 g_\xi}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} + \frac{1}{6} g_\nu \frac{\partial^3 g_\mu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} g_\xi + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} g_\mu g_\xi \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial g_\mu}{\partial x_k} g_\xi + \frac{1}{2} \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_j \partial x_k} g_\xi \right) \\
&+ \sum_{i,j,k,l} \mu_4(\mathbf{X})_{i,j,k,l} \left( \frac{1}{24} g_\nu g_\mu \frac{\partial^4 g_\xi}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} + \frac{1}{24} g_\nu \frac{\partial^4 g_\mu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} g_\xi \right. \\
&\quad + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} g_\mu g_\xi + \frac{1}{6} \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial^3 g_\mu}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} g_\xi \\
&\quad \left. + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 g_\nu}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} \frac{\partial g_\mu}{\partial x_i} g_\xi + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_k \partial x_l} g_\xi \right) \\
&+ \sum_{i,j,k,l} \mu_2(\mathbf{X})_{i,j} \mu_2(\mathbf{X})_{k,l} \left( \frac{1}{4} g_\nu \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial^2 g_\xi}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_\nu}{\partial x_k} \frac{\partial g_\mu}{\partial x_l} \frac{\partial^2 g_\xi}{\partial x_i \partial x_j} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_k \partial x_l} g_\mu \frac{\partial^2 g_\xi}{\partial x_i \partial x_j} \right) \\
&+ \dots
\end{aligned} \tag{B.22}$$

$$\begin{aligned}
 & E\{\mathbf{Y}_\nu \mathbf{Y}_\mu\} \eta_{\mathbf{Y}_\xi} + E\{\mathbf{Y}_\mu \mathbf{Y}_\xi\} \eta_{\mathbf{Y}_\nu} + E\{\mathbf{Y}_\xi \mathbf{Y}_\nu\} \eta_{\mathbf{Y}_\mu} = 3g_\nu g_\mu g_\xi \\
 & + \sum_{i,j} \mu_2(\mathbf{X})_{i,j} \left( \frac{3}{2} g_\nu g_\mu \frac{\partial^2 g_\xi}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{3}{2} g_\nu \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_i \partial x_j} g_\xi + \frac{3}{2} \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} g_\mu g_\xi \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial g_\mu}{\partial x_j} g_\xi + g_\nu \frac{\partial g_\mu}{\partial x_i} \frac{\partial g_\xi}{\partial x_j} + \frac{\partial g_\nu}{\partial x_j} g_\mu \frac{\partial g_\xi}{\partial x_i} \right) \\
 & + \sum_{i,j,k} \mu_3(\mathbf{X})_{i,j,k} \left( \frac{1}{2} g_\nu g_\mu \frac{\partial^3 g_\xi}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} + \frac{1}{2} g_\nu \frac{\partial^3 g_\mu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} g_\xi + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} g_\mu g_\xi \right. \\
 & \quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial g_\mu}{\partial x_k} g_\xi + \frac{1}{2} \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_j \partial x_k} g_\xi \\
 & \quad + \frac{1}{2} g_\nu \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial g_\xi}{\partial x_k} + \frac{1}{2} g_\nu \frac{\partial g_\mu}{\partial x_i} \frac{\partial^2 g_\xi}{\partial x_j \partial x_k} \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} g_\mu \frac{\partial^2 g_\xi}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} g_\mu \frac{\partial g_\xi}{\partial x_k} \right) \\
 & + \sum_{i,j,k,l} \mu_4(\mathbf{X})_{i,j,k,l} \left( \frac{1}{8} g_\nu g_\mu \frac{\partial^4 g_\xi}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} + \frac{1}{8} g_\nu \frac{\partial^4 g_\mu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} g_\xi + \frac{1}{8} \frac{\partial^4 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} g_\mu g_\xi \right. \\
 & \quad + \frac{1}{6} \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial^3 g_\mu}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} g_\xi + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 g_\nu}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} \frac{\partial g_\mu}{\partial x_i} g_\xi \\
 & \quad + \frac{1}{6} g_\nu \frac{\partial g_\mu}{\partial x_i} \frac{\partial^3 g_\xi}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} + \frac{1}{6} g_\nu \frac{\partial^3 g_\mu}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} \frac{\partial g_\xi}{\partial x_i} \\
 & \quad + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} g_\mu \frac{\partial g_\xi}{\partial x_l} + \frac{1}{6} \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} g_\mu \frac{\partial^3 g_\xi}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} \\
 & \quad \left. + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_k \partial x_l} g_\xi + \frac{1}{4} g_\nu \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 g_\xi}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} g_\mu \frac{\partial^2 g_\xi}{\partial x_k \partial x_l} \right) \\
 & + \sum_{i,j,k,l} \mu_2(\mathbf{X})_{i,j} \mu_2(\mathbf{X})_{k,l} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial g_\mu}{\partial x_j} \frac{\partial^2 g_\xi}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial g_\mu}{\partial x_k} \frac{\partial g_\xi}{\partial x_l} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial g_\xi}{\partial x_l} \right. \\
 & \quad + \frac{1}{4} g_\nu \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial^2 g_\xi}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_k \partial x_l} g_\mu \frac{\partial^2 g_\xi}{\partial x_i \partial x_j} \\
 & \quad + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} g_\mu \frac{\partial^2 g_\xi}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_k \partial x_l} g_\xi \\
 & \quad \left. + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_k \partial x_l} g_\xi + \frac{1}{4} g_\nu \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 g_\xi}{\partial x_k \partial x_l} \right) \\
 & + \dots
 \end{aligned} \tag{B.23}$$

Damit lassen sich schließlich die Momente des Zufallsvektors  $\mathbf{Y}$  berechnen. Aus (B.1)

und (B.14) folgt:

$$\begin{aligned}
 \eta_{\mathbf{Y}_\nu} &= m_1(\mathbf{Y})_\nu = E\{\mathbf{Y}_\nu\} \\
 &= g_\nu + \sum_{i,j} \frac{\mu_2(\mathbf{X})_{i,j}}{2} \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i,j,k} \frac{\mu_3(\mathbf{X})_{i,j,k}}{6} \frac{\partial^3 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \\
 &\quad + \sum_{i,j,k,l} \frac{\mu_4(\mathbf{X})_{i,j,k,l}}{24} \frac{\partial^4 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} + \dots
 \end{aligned} \tag{B.24}$$

Aus (B.2) und (B.15) folgt:

$$\begin{aligned}
 C_{\mathbf{Y}_\nu \mathbf{Y}_\mu} &= \mu_2(\mathbf{Y})_{\nu,\mu} = E\{\mathbf{Y}_\nu \mathbf{Y}_\mu\} - \eta_{\mathbf{Y}_\nu} \eta_{\mathbf{Y}_\mu} \\
 &= \sum_{i,j} \mu_2(\mathbf{X})_{i,j} \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial g_\mu}{\partial x_j} \\
 &\quad + \sum_{i,j,k} \frac{\mu_3(\mathbf{X})_{i,j,k}}{2} \left( \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial g_\mu}{\partial x_k} + \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_j \partial x_k} \right) \\
 &\quad + \sum_{i,j,k,l} \frac{\mu_4(\mathbf{X})_{i,j,k,l}}{6} \left( \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial^3 g_\mu}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^3 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \frac{\partial g_\mu}{\partial x_l} \right) \\
 &\quad + \sum_{i,j,k,l} \frac{\mu_4(\mathbf{X})_{i,j,k,l} - \mu_2(\mathbf{X})_{i,j} \mu_2(\mathbf{X})_{k,l}}{4} \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_k \partial x_l} \\
 &\quad + \dots
 \end{aligned} \tag{B.25}$$

Aus (B.3), (B.16), (B.20) und (B.23) folgt:

$$\begin{aligned}
 \mu_3(\mathbf{Y})_{\nu,\mu,\xi} &= E\{\mathbf{Y}_\nu \mathbf{Y}_\mu \mathbf{Y}_\xi\} + 2\eta_{\mathbf{Y}_\nu} \eta_{\mathbf{Y}_\mu} \eta_{\mathbf{Y}_\xi} \\
 &\quad - E\{\mathbf{Y}_\nu \mathbf{Y}_\mu\} \eta_{\mathbf{Y}_\xi} - E\{\mathbf{Y}_\nu \mathbf{Y}_\xi\} \eta_{\mathbf{Y}_\mu} - E\{\mathbf{Y}_\mu \mathbf{Y}_\xi\} \eta_{\mathbf{Y}_\nu} \\
 &= \sum_{i,j,k} \mu_3(\mathbf{X})_{i,j,k} \left( \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial g_\mu}{\partial x_j} \frac{\partial g_\xi}{\partial x_k} \right) \\
 &\quad + \sum_{i,j,k,l} \frac{\mu_4(\mathbf{X})_{i,j,k,l} - \mu_2(\mathbf{X})_{i,j} \mu_2(\mathbf{X})_{k,l}}{2} \left( \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial g_\mu}{\partial x_j} \frac{\partial^2 g_\xi}{\partial x_k \partial x_l} \right. \\
 &\quad \quad \left. + \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial g_\xi}{\partial x_l} + \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial g_\mu}{\partial x_k} \frac{\partial g_\xi}{\partial x_l} \right) \\
 &\quad + \dots
 \end{aligned} \tag{B.26}$$

$$\begin{aligned}
 \mu_4(\mathbf{Y})_{\nu,\mu,\xi,\zeta} &= \sum_{i,j,k,l} \mu_4(\mathbf{X})_{i,j,k,l} \left( \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial g_\mu}{\partial x_j} \frac{\partial g_\xi}{\partial x_k} \frac{\partial g_\zeta}{\partial x_l} \right) \\
 &\quad - \sum_{i,j,k,l} \mu_2(\mathbf{X})_{i,j} \mu_2(\mathbf{X})_{k,l} \left( \frac{3}{2} \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_k \partial x_l} g_\xi g_\zeta + \frac{3}{2} \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} g_\mu \frac{\partial^2 g_\xi}{\partial x_k \partial x_l} g_\zeta \right. \\
 &\quad \quad + \frac{3}{2} \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} g_\mu g_\xi \frac{\partial^2 g_\zeta}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{3}{2} g_\nu \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 g_\xi}{\partial x_k \partial x_l} g_\zeta \\
 &\quad \quad + \frac{3}{2} g_\nu \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_i \partial x_j} g_\xi \frac{\partial^2 g_\zeta}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{3}{2} g_\nu g_\mu \frac{\partial^2 g_\xi}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 g_\zeta}{\partial x_k \partial x_l} \\
 &\quad + g_\nu \frac{\partial g_\mu}{\partial x_i} \frac{\partial g_\xi}{\partial x_j} \frac{\partial^2 g_\zeta}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} g_\mu \frac{\partial g_\xi}{\partial x_j} \frac{\partial^2 g_\zeta}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial g_\mu}{\partial x_j} g_\xi \frac{\partial^2 g_\zeta}{\partial x_k \partial x_l} \\
 &\quad + g_\nu \frac{\partial g_\mu}{\partial x_i} \frac{\partial^2 g_\xi}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial g_\zeta}{\partial x_l} + \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} g_\mu \frac{\partial^2 g_\xi}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial g_\zeta}{\partial x_l} + \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial g_\mu}{\partial x_j} \frac{\partial^2 g_\xi}{\partial x_k \partial x_l} g_\zeta \\
 &\quad + g_\nu \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial g_\xi}{\partial x_k} \frac{\partial g_\zeta}{\partial x_l} + \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_j \partial x_k} g_\xi \frac{\partial g_\zeta}{\partial x_l} + \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial g_\xi}{\partial x_l} g_\zeta \\
 &\quad \left. + \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} g_\mu \frac{\partial g_\xi}{\partial x_k} \frac{\partial g_\zeta}{\partial x_l} + \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial g_\mu}{\partial x_k} \frac{\partial g_\zeta}{\partial x_l} + \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial g_\mu}{\partial x_k} \frac{\partial g_\xi}{\partial x_l} g_\zeta \right) \\
 &\quad + \dots
 \end{aligned} \tag{B.27}$$

## B.3 Berechnung der statistischen Momente der elektromagnetischen Schirmdämpfung

Im Folgenden werden die Ableitungen der Funktion  $g(w)$  angegeben, die im Abschnitt 4.3 zur Berechnung der Momente der elektromagnetischen Schirmdämpfung aus den Momenten der Feldstärkekomponenten benötigt werden. Zur übersichtlicheren Darstellung wird folgende abkürzende Schreibweise verwendet:

$$[x]^{\text{Bedingung}} = \begin{cases} x & \text{falls Bedingung erfüllt} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \tag{B.28}$$

Im Falle der der sphärischen Multipolentwicklung werden folgende Ableitungen von  $g(w)$  benötigt:

$$\frac{\partial g}{\partial w_i} = - \frac{20 w_i [Z_0^2]^{i>6}}{\ln 10 \left( \sum_{n=1}^6 w_n^2 + Z_0^2 \sum_{n=7}^{12} w_n^2 \right)} \tag{B.29}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial w_i^2} = \frac{20}{\ln 10} \left( \frac{2w_i^2 [Z_0^4]^{i>6}}{(\sum_{n=1}^6 w_n^2 + Z_0^2 \sum_{n=7}^{12} w_n^2)^2} - \frac{[Z_0^{21}]^{i>6}}{\sum_{n=1}^{12} w_n^2} \right) \quad (\text{B.30})$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial w_i \partial w_j} = \frac{40w_i w_j [Z_0^2]^{i>6} [Z_0^2]^{j>6}}{\ln 10 (\sum_{n=1}^6 w_n^2 + Z_0^2 \sum_{n=7}^{12} w_n^2)^2} \quad \text{für } i \neq j \quad (\text{B.31})$$

$$\frac{\partial^3 g}{\partial w_i^3} = \frac{40[Z_0^4]^{i>6}}{\ln 10} \left( \frac{3w_i}{(\sum_{n=1}^6 w_n^2 + Z_0^2 \sum_{n=7}^{12} w_n^2)^2} - \frac{4w_i^3 [Z_0^2]^{i>6}}{(\sum_{n=1}^6 w_n^2 + Z_0^2 \sum_{n=7}^{12} w_n^2)^3} \right) \quad (\text{B.32})$$

$$\frac{\partial^3 g}{\partial w_i^2 \partial w_j} = \frac{40}{\ln 10} \left( \frac{w_j [Z_0^2]^{i>6} [Z_0^2]^{j>6}}{(\sum_{n=1}^6 w_n^2 + Z_0^2 \sum_{n=7}^{12} w_n^2)^2} - \frac{4w_i^2 w_j [Z_0^4]^{i>6} [Z_0^2]^{j>6}}{(\sum_{n=1}^6 w_n^2 + Z_0^2 \sum_{n=7}^{12} w_n^2)^3} \right) \quad \text{für } i \neq j \quad (\text{B.33})$$

$$\frac{\partial^3 g}{\partial w_i \partial w_j \partial w_k} = -\frac{160}{\ln 10} \frac{w_i w_j w_k [Z_0^2]^{i>6} [Z_0^2]^{j>6} [Z_0^{21}]^{k>6}}{(\sum_{n=1}^6 w_n^2 + Z_0^2 \sum_{n=7}^{12} w_n^2)^3} \quad \text{für } i \neq j \neq k \quad (\text{B.34})$$

$$\frac{\partial^4 g}{\partial w_i^4} = \frac{120[Z_0^4]^{i>6}}{\ln 10} \left( \frac{1}{(\sum_{n=1}^6 w_n^2 + Z_0^2 \sum_{n=7}^{12} w_n^2)^2} - \frac{8w_i^2 [Z_0^2]^{i>6}}{(\sum_{n=1}^6 w_n^2 + Z_0^2 \sum_{n=7}^{12} w_n^2)^3} - \frac{8w_i^4 [Z_0^4]^{i>6}}{(\sum_{n=1}^6 w_n^2 + Z_0^2 \sum_{n=7}^{12} w_n^2)^4} \right) \quad (\text{B.35})$$

$$\frac{\partial^4 g}{\partial w_i^3 \partial w_j} = -\frac{480[Z_0^4]^{i>6} [Z_0^2]^{j>6}}{\ln 10} \left( \frac{w_i w_j}{(\sum_{n=1}^6 w_n^2 + Z_0^2 \sum_{n=7}^{12} w_n^2)^3} - \frac{2w_i^3 w_j [Z_0^2]^{i>6}}{(\sum_{n=1}^6 w_n^2 + Z_0^2 \sum_{n=7}^{12} w_n^2)^4} \right) \quad \text{für } i \neq j \quad (\text{B.36})$$

$$\frac{\partial^4 g}{\partial w_i^2 \partial w_j^2} = \frac{40[Z_0^2]^{i>6}[Z_0^2]^{j>6}}{\ln 10} \left( \frac{1}{\left(\sum_{n=1}^6 w_n^2 + Z_0^2 \sum_{n=7}^{12} w_n^2\right)^2} - \frac{4(w_i^2[Z_0^2]^{i>6} + w_j^2[Z_0^2]^{j>6})}{\left(\sum_{n=1}^6 w_n^2 + Z_0^2 \sum_{n=7}^{12} w_n^2\right)^3} + \frac{24w_i^2 w_j^2 [Z_0^2]^{i>6} [Z_0^2]^{j>6}}{\left(\sum_{n=1}^6 w_n^2 + Z_0^2 \sum_{n=7}^{12} w_n^2\right)^4} \right) \quad \text{für } i \neq j \quad (\text{B.37})$$

$$\frac{\partial^4 g}{\partial w_i^2 \partial w_j \partial w_k} = \frac{160[Z_0^2]^{i>6}[Z_0^2]^{j>6}[Z_0^2]^{k>6}}{\ln 10} \left( \frac{6w_i^2 w_j w_k [Z_0^2]^{i>6}}{\left(\sum_{n=1}^6 w_n^2 + Z_0^2 \sum_{n=7}^{12} w_n^2\right)^4} - \frac{w_j w_k}{\left(\sum_{n=1}^6 w_n^2 + Z_0^2 \sum_{n=7}^{12} w_n^2\right)^3} \right) \quad \text{für } i \neq j \neq k \quad (\text{B.38})$$

$$\frac{\partial^4 g}{\partial w_i \partial w_j \partial w_k \partial w_l} = \frac{960}{\ln 10} \frac{w_i w_j w_k w_l [Z_0^2]^{i>6} [Z_0^2]^{j>6} [Z_0^2]^{k>6} [Z_0^2]^{l>6}}{\left(\sum_{n=1}^6 w_n^2 + Z_0^2 \sum_{n=7}^{12} w_n^2\right)^4} \quad \text{für } i \neq j \neq k \neq l \quad (\text{B.39})$$

Im Falle zylindrischer Feldentwicklung in ebenen Polarkoordinaten sind lediglich Summen von 1 bis 6 durch Summen von 1 bis 2, Summen von 7 bis 12 durch Summen von 3 bis 6, sowie Bedingungen  $> 6$  durch Bedingungen  $> 2$  zu ersetzen.



# Anhang C

## Geschlitzter Zylinderschirm, TM<sub>z</sub>-Fall

Im Folgenden wird die Berechnung des geschlitzten Zylinderschirms, wie er in Abschnitt 5.2 verwendet wird, präsentiert. Die Herleitung ist [8] entnommen. Die betrachtete Fläche (siehe Abb. 5.7) besteht aus drei Gebieten:

- Gebiet I:  $R \leq R_L$
- Gebiet II:  $R_L \leq R \leq R_S$
- Gebiet III:  $R_S \leq R$

In jedem Gebiet wird das elektrische Feld entwickelt:

$$E_z^{\text{I}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{\text{I}} J_n(\kappa^{\text{I}} R) e^{jn\varphi} \quad (\text{C.1})$$

$$E_z^{\text{II}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ a_n^{\text{II}} J_n(\kappa^{\text{II}} R) + b_n^{\text{II}} H_n^{(2)}(\kappa^{\text{II}} R) \right] e^{jn\varphi} \quad (\text{C.2})$$

$$E_z^{\text{III}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ a_n^{\text{III}} J_n(\kappa^{\text{III}} R) + b_n^{\text{III}} H_n^{(2)}(\kappa^{\text{III}} R) \right] e^{jn\varphi} \quad (\text{C.3})$$

Die Koeffizienten  $a_n^{\text{III}}$  beschreiben das einfallende Feld und werden als bekannt vorausgesetzt. Die Flächenstromdichte auf dem Zylinderschirm wird in eine Fourier-Reihe entwickelt:

$$\vec{J}_F = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\frac{\pi}{\alpha}\varphi} \vec{e}_z & \text{für } -\alpha \leq \varphi \leq \alpha \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

mit

$$\alpha = \pi - \frac{\beta}{2} \quad (\text{C.5})$$

Die magnetische Feldstärke ergibt sich aus der elektrischen wie folgt:

$$H_R = \frac{j}{Z} \frac{1}{\kappa R} \frac{\partial}{\partial \varphi} E_z \quad (\text{C.6})$$

$$H_\varphi = -\frac{j}{Z} \frac{1}{\kappa} \frac{\partial}{\partial R} E_z \quad (\text{C.7})$$

Folgende Randbedingungen müssen erfüllt werden:

$$E_z^{\text{I}}(R_L, \varphi) = E_z^{\text{II}}(R_L, \varphi) \quad \text{für } -\pi \leq \varphi \leq \pi \quad (\text{C.8})$$

$$H_\varphi^{\text{I}}(R_L, \varphi) = H_\varphi^{\text{II}}(R_L, \varphi) \quad \text{für } -\pi \leq \varphi \leq \pi \quad (\text{C.9})$$

$$E_z^{\text{II}}(R_S, \varphi) = E_z^{\text{III}}(R_S, \varphi) \quad \text{für } -\pi \leq \varphi \leq \pi \quad (\text{C.10})$$

$$H_\varphi^{\text{II}}(R_S, \varphi) = H_\varphi^{\text{III}}(R_S, \varphi) - J_F \quad \text{für } -\pi \leq \varphi \leq \pi \quad (\text{C.11})$$

$$E_z^{\text{III}}(R_S, \varphi) = 0 \quad \text{für } -\alpha \leq \varphi \leq \alpha \quad (\text{C.12})$$

Einsetzen der Feldentwicklungen in die Randbedingungen (C.8) bis (C.11), Multiplikation mit  $e^{-jm\varphi}$  und Integration über  $\varphi$  von  $-\pi$  bis  $\pi$  führt unter Ausnutzung der Orthogonalität der Funktionen  $e^{jn\varphi}$  ( $\int_{-\pi}^{\pi} e^{j(n-m)\varphi} d\varphi = 2\pi\delta_{n,m}$ ) zu folgenden Ausdrücken:

$$a_n^{\text{I}} J_n(\kappa^{\text{I}} R_L) = a_n^{\text{II}} J_n(\kappa^{\text{II}} R_L) + b_n^{\text{II}} H_n^{(2)}(\kappa^{\text{II}} R_L) \quad (\text{C.13})$$

$$a_n^{\text{I}} J_n'(\kappa^{\text{I}} R_L) = \frac{Z^{\text{I}}}{Z^{\text{II}}} \left[ a_n^{\text{II}} J_n'(\kappa^{\text{II}} R_L) + b_n^{\text{II}} H_n^{(2)'}(\kappa^{\text{II}} R_L) \right] \quad (\text{C.14})$$

$$a_n^{\text{II}} J_n(\kappa^{\text{II}} R_S) + b_n^{\text{II}} H_n^{(2)}(\kappa^{\text{II}} R_S) = a_n^{\text{III}} J_n(\kappa^{\text{III}} R_S) + b_n^{\text{III}} H_n^{(2)}(\kappa^{\text{III}} R_S) \quad (\text{C.15})$$

$$\begin{aligned} \frac{2\pi j}{Z^{\text{II}}} \left[ a_n^{\text{II}} J_n'(\kappa^{\text{II}} R_S) + b_n^{\text{II}} H_n^{(2)'}(\kappa^{\text{II}} R_S) \right] &= \frac{2\pi j}{Z^{\text{III}}} \left[ a_n^{\text{III}} J_n'(\kappa^{\text{III}} R_S) + b_n^{\text{III}} H_n^{(2)'}(\kappa^{\text{III}} R_S) \right] \\ &+ \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{j(m\frac{\pi}{\alpha}-n)\varphi} d\varphi \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Aus den Gleichungen (C.13) und (C.14) folgt:

$$b_n^{\text{II}} = \frac{W_{n,1}}{W_{n,2}} a_n^{\text{II}} \quad (\text{C.17})$$

mit

$$W_{n,1} = Z^{\text{II}} J_n(\kappa^{\text{II}} R_L) J'_n(\kappa^{\text{I}} R_L) - Z^{\text{I}} J'_n(\kappa^{\text{II}} R_L) J_n(\kappa^{\text{I}} R_L) \quad (\text{C.18})$$

$$W_{n,2} = Z^{\text{I}} H_n^{(2)'}(\kappa^{\text{II}} R_L) J_n(\kappa^{\text{I}} R_L) - Z^{\text{II}} H_n^{(2)}(\kappa^{\text{II}} R_L) J'_n(\kappa^{\text{I}} R_L) \quad (\text{C.19})$$

Einsetzen in Gleichung (C.15) führt zu:

$$a_n^{\text{II}} = \frac{a_n^{\text{III}} J_n(\kappa^{\text{III}} R_S) + b_n^{\text{III}} H_n^{(2)}(\kappa^{\text{III}} R_S)}{J_n(\kappa^{\text{II}} R_S) + \frac{W_{n,1}}{W_{n,2}} H_n^{(2)}(\kappa^{\text{II}} R_S)} \quad (\text{C.20})$$

Einsetzen in Gleichung (C.16) führt unter Berücksichtigung von  $Z^{\text{II}} = Z^{\text{III}} = Z_0$  und  $\kappa^{\text{II}} = \kappa^{\text{III}} = \kappa_0$  zu:

$$b_n^{\text{III}} = \frac{W_{n,1}}{W_{n,2}} a_n^{\text{III}} - \frac{\frac{jZ_0}{2\pi} \left[ J_n(\kappa_0 R_S) + \frac{W_{n,1}}{W_{n,2}} H_n^{(2)}(\kappa_0 R_S) \right]}{J'_n(\kappa_0 R_S) H_n^{(2)}(\kappa_0 R_S) - J_n(\kappa_0 R_S) H_n^{(2)'}(\kappa_0 R_S)} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{j(m\frac{\pi}{\alpha}-n)\varphi} d\varphi \quad (\text{C.21})$$

Mit der Wronski-Determinante [22]

$$W(\kappa_0 R_S; J_n, H_n^{(2)}) := J_n(\kappa_0 R_S) H_n^{(2)'}(\kappa_0 R_S) - J'_n(\kappa_0 R_S) H_n^{(2)}(\kappa_0 R_S) = -\frac{2j}{\pi \kappa_0 R_S} \quad (\text{C.22})$$

wird dies zu:

$$b_n^{\text{III}} = \frac{W_{n,1}}{W_{n,2}} a_n^{\text{III}} - \frac{\kappa_0 R_S Z_0}{4} \left[ J_n(\kappa_0 R_S) + \frac{W_{n,1}}{W_{n,2}} H_n^{(2)}(\kappa_0 R_S) \right] \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{j(m\frac{\pi}{\alpha}-n)\varphi} d\varphi \quad (\text{C.23})$$

Einsetzen der Feldentwicklungen in die letzte Randbedingung (C.12), Multiplikation mit  $e^{-jl\frac{\pi}{\alpha}\varphi}$  und Integration über  $\varphi$  von  $-\alpha$  bis  $\alpha$  führt zu:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ a_n^{\text{III}} J_n(\kappa_0 R_S) + b_n^{\text{III}} H_n^{(2)}(\kappa_0 R_S) \right] \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{j(n-l\frac{\pi}{\alpha})\varphi} d\varphi = 0 \quad (\text{C.24})$$

Setzt man Gleichung (C.23) in Gleichung (C.24) ein, so erhält man schließlich:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \frac{\kappa_0 R_S Z_0}{4} \left( J_n(\kappa_0 R_S) + \frac{W_{n,1}}{W_{n,2}} H_n^{(2)}(\kappa_0 R_S) \right) \\
 & \cdot H_n^{(2)}(\kappa_0 R_S) \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{j(m\frac{\pi}{\alpha}-n)\varphi} d\varphi \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{j(n-l\frac{\pi}{\alpha})\varphi} d\varphi \\
 & = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{\text{III}} \left[ J_n(\kappa_0 R_S) + \frac{W_{n,1}}{W_{n,2}} H_n^{(2)}(\kappa_0 R_S) \right] \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{j(n-l\frac{\pi}{\alpha})\varphi} d\varphi \quad (\text{C.25})
 \end{aligned}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} M_{l,m} c_m = d_l \quad (\text{C.26})$$

mit

$$\begin{aligned}
 M_{l,m} = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\kappa_0 R_S Z_0}{4} \left( J_n(\kappa_0 R_S) + \frac{W_{n,1}}{W_{n,2}} H_n^{(2)}(\kappa_0 R_S) \right) \\
 & \cdot H_n^{(2)}(\kappa_0 R_S) \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{j(m\frac{\pi}{\alpha}-n)\varphi} d\varphi \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{j(n-l\frac{\pi}{\alpha})\varphi} d\varphi \quad (\text{C.27})
 \end{aligned}$$

$$d_l = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{\text{III}} \left[ J_n(\kappa_0 R_S) + \frac{W_{n,1}}{W_{n,2}} H_n^{(2)}(\kappa_0 R_S) \right] \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{j(n-l\frac{\pi}{\alpha})\varphi} d\varphi \quad (\text{C.28})$$

**Konvergenz** Zur Beschreibung des Feldes in den drei Gebieten gilt die Abschätzung aus Abschnitt 2.2.5

$$n_{\max} = \kappa R_S + 5 \quad (\text{C.29})$$

mit dem Radius  $R_S$  des Schirmes. Für die Zahl  $m_{\max}$  der Entwicklungskoeffizienten  $c_m$  der Stromdichte wird

$$m_{\max} = \frac{n_{\max} \alpha}{\pi} + 10 \quad (\text{C.30})$$

angenommen. Für die Summe über  $n$  in Gleichung (C.27) müssen schließlich

$$n_{\max}^{\text{matrix}} = \frac{m_{\max} \pi}{\alpha} + 10 \quad (\text{C.31})$$

Koeffizienten berücksichtigt werden.

**Zusammenfassung** Bei gegebenem einfallendem Feld sind die Koeffizienten  $a_n^{\text{III}}$  und damit die Komponenten von  $d_l$  bekannt. Die Koeffizienten  $c_m$  ergeben sich dann durch  $c_m = (M_{l,m})^{-1} d_l$ . Anschließend lassen sich auch die verbleibenden Koeffizienten  $b_n^{\text{III}}$

---

nach Gleichung (C.23),  $a_n^{\text{II}}$  nach Gleichung (C.20),  $b_n^{\text{II}}$  nach Gleichung (C.17) und  $a_n^{\text{I}}$  nach Gleichung (C.13) berechnen.



# Literaturverzeichnis

- [1] K. Körber and L. Klinkenbusch. Statistical description of shielding problems using multipole analysis. In *General Assembly and Scientific Symposium, 2011 XXXth URSI*, pages 1–4, Aug 2011.
- [2] K. Körber and L. Klinkenbusch. Statistical multipole formulations for shielding problems. *Advances in Radio Science*, 10:233–238, 2012.
- [3] K. Körber and L. Klinkenbusch. Statistical multipole expansion and its application to an arbitrary shielding geometry with small variations. In *Electromagnetic Compatibility (EMC), 2013 IEEE International Symposium on*, pages 38–42, Aug 2013.
- [4] R. Holland and R. St. John. *Statistical Electromagnetics*. Taylor and Francis, 1999.
- [5] R. H. Price, H. T. Davis, and E. P. Wenaas. Determination of the statistical distribution of electromagnetic-field amplitudes in complex cavities. *Phys. Rev. E*, 48(6):4716–4729, Dec 1993.
- [6] EMV-Richtlinie 2004/108/EG. *Amtsblatt der Europäischen Union*, 2004.
- [7] Gesetz über die elektromagnetische Verträglichkeit von Betriebsmitteln (EMVG). *Bundesgesetzblatt Teil 1, Nr. 6*, 2008.
- [8] L. Klinkenbusch. On the shielding effectiveness of enclosures. *Electromagnetic Compatibility, IEEE Transactions on*, 47(3):589–601, aug. 2005.
- [9] C. Christopoulos. *Principles and Techniques of Electromagnetic Compatibility*. 2007.
- [10] S. A. Pignari. Statistics and EMC. *Radio Science Bulletin*, (316):13–26, mar 2006.

- [11] J. G. Kostas and B. Boverie. Statistical model for a mode-stirred chamber. *Electromagnetic Compatibility, IEEE Transactions on*, 33(4):366–370, nov 1991.
- [12] D. A. Hill. Plane wave integral representation for fields in reverberation chambers. *Electromagnetic Compatibility, IEEE Transactions on*, 40(3):209–217, aug 1998.
- [13] C. L. Holloway, D. A. Hill, M. Sandroni, J. M. Ladbury, J. Coder, G. Koepke, A. C. Marvin, and Yuhui He. Use of Reverberation Chambers to Determine the Shielding Effectiveness of Physically Small, Electrically Large Enclosures and Cavities. *Electromagnetic Compatibility, IEEE Transactions on*, 50(4):770–782, nov. 2008.
- [14] A. Ajayi, P. Ingrej, P. Sewell, and C. Christopoulos. Direct Computation of Statistical Variations in Electromagnetic Problems. *Electromagnetic Compatibility, IEEE Transactions on*, 50(2):325–332, may 2008.
- [15] S. Celozzi. New Figures of Merit for the Characterization of the Performance of Shielding Enclosures. *Electromagnetic Compatibility, IEEE Transactions on*, 46(1):1, 2004.
- [16] J. F. Dawson S. M. Ward, A. C. Marvin. Towards an Improved Definition and Measurement of Electromagnetic Shielding Effectiveness. 2000.
- [17] J. Hamalainen, M. Aunola, T. Martin, and M. Backstrom. Comparing and visualising statistical shielding effectiveness for rectangular enclosures with different inner structures. In *Electromagnetic Compatibility, 2005. EMC 2005. 2005 International Symposium on*, volume 2, pages 530–533, Aug 2005.
- [18] Siegfried Blume. *Theorie elektromagnetischer Felder*. Hüthig Buch Verlag Heidelberg, 1994.
- [19] L. Klinkenbusch. *Theorie der sphärischen Absorberkammer und des mehrschaligen Kugelschirmes*. Habilitationsschrift, Ruhr-Universität Bochum, 1996.
- [20] P. A. Martin. *Multiple Scattering: Interaction of Time-Harmonic Waves with N Obstacles*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 2006.
- [21] J. A. Stratton. *Electromagnetic theory*. International series in pure and applied physics. McGraw-Hill book company, inc., 1941.

- [22] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun, editors. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Applied mathematics series 55. US Government Printing Office, Washington, DC, Tenth Printing, with corrections edition, 1972.
- [23] Jost Adam. *Analyse und Verarbeitung numerisch berechneter elektromagnetischer Feler mittels Multipolentwicklungen*. PhD thesis, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, 2009.
- [24] Athanasios Papoulis and S. Unnikrishna Pillai. *Probability, random variables, and stochastic processes*. McGraw-Hill series in electrical and computer engineering. McGraw-Hill, Boston, 4. ed., internat. edition, 2008.
- [25] I. N. Bronštein, K. A. Semendjaev, G. Musiol, and H. Mühlig, editors. *Taschenbuch der Mathematik*. Deutsch, Frankfurt am Main, 6., vollst. überarb. u. erg. Aufl., Nachdruck edition, 2006.
- [26] Makoto Matsumoto and Takuji Nishimura. Mersenne Twister: A 623-dimensionally Equidistributed Uniform Pseudo-random Number Generator. *ACM Trans. Model. Comput. Simul.*, 8(1):3–30, jan 1998.
- [27] NumPy Developers. *NumPy Reference, Release 1.7.0*. <http://docs.scipy.org/doc/numpy-1.7.0/reference/>.
- [28] NumPy Developers. NumPy Quellcode, Release 1.7.2. <http://www.numpy.org>.
- [29] Guido van Rossum and Fred L. Drake Jr. (editor). *The Python Library Reference, Release 2.7.6*. <http://docs.python.org/2.7/library>.
- [30] G. E. P. Box and Mervin E. Muller. A Note on the Generation of Random Normal Deviates. *The Annals of Mathematical Statistics*, 29(2):610–611, 06 1958.
- [31] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, and Brian P. Flannery. *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 3 edition, 2007.
- [32] CST. Microwave Studio<sup>®</sup>, Version 2011. <http://www.cst.com>.
- [33] Free Software Foundation Europe. What is Free Software? <http://fsfe.org/about/basics/freesoftware.html>.

- [34] J. F. Nye. A simple method of spherical near-field scanning to measure the far fields of antennas or passive scatterers. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 51(8):2091–2098, aug. 2003.
- [35] EB Saff and ABJ Kuijlaars. Distributing many points on a sphere. *Mathematical Intelligencer*, 19:5–11, 1997.
- [36] Ali Katanforoush and Mehrdad Shahshahani. Distributing Points on the Sphere, I. *Experimental Mathematics*, 12(2):199–209, 2003.

# Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter in der Arbeitsgruppe Numerische Feldberechnung an der technischen Fakultät der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel.

Ich danke zuallererst meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr.-Ing. Klinkenbusch für die Betreuung und Begutachtung meiner Arbeit. Weiterer Dank geht an Frau Prof. Dr. van Rienen vom Institut für Allgemeine Elektrotechnik der Universität Rostock für die Übernahme der Zweitkorrektur.

Außerdem möchte ich mich bei allen Kollegen und Studenten bedanken, die mich während meiner Zeit am Institut für Elektrotechnik und Informationstechnik begleitet haben.

Mein besonderer Dank gilt meiner Familie für die stete Unterstützung.



# Lebenslauf

Kai Körber, geb. Könecke  
geboren am 13. April 1982 in Hamburg  
verheiratet, zwei Kinder

- 05/2014 – heute Programmierer  
freiheit.com technologies GmbH, Hamburg
- 10/2008 – 04/2014 Wissenschaftlicher Mitarbeiter  
Technische Fakultät der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel  
Arbeitsgruppe Numerische Feldberechnung
- 01/2008 – 07/2008 Vertretungslehrkraft für Mathematik und Physik  
Gymnasium Kronwerk, Rendsburg
- 10/2001 – 12/2007 Studium der Physik  
Universität Hamburg  
Diplomarbeit am Institut für Laserphysik:  
*Magnetischer Transport kalter Rubidiumatome*  
Abschluss: Physik-Diplom
- 08/1994 – 06/2001 Gymnasium Neu Wulmstorf  
Abschluss: Abitur