

Numerische Verfahren für nichtlineare
gemischt-ganzzahlige Optimierungsprobleme im
Wassermanagement

Von der Fakultät für Mathematik und Physik
der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover
zur Erlangung des Grades
Doktor der Naturwissenschaften
Dr. rer. nat.
genehmigte Dissertation
von

Dipl.-Math.Oec. Klaas Eggert
geboren am 11. September 1975 in Soltau

2013

Referent: Prof. Dr. Marc Steinbach
Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover

Korreferent: Prof. Dr. Alexander Martin
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der Promotion: 10. Dezember 2012

Zusammenfassung

In Siedlungsgebieten fallen große Mengen häusliches und gewerbliches Schmutzwasser an sowie erhebliche Mengen an Niederschlagswasser, welche stark vom Versiegelungsgrad des betrachteten Gebietes abhängen. Um die Kapazität eines vorhandenen Abwassersystems und dessen Entwässerungseinrichtungen möglichst vollständig zu nutzen, wird in dieser Arbeit ein Modell zur Abflusssteuerung entwickelt und auf reale Probleminstanzen angewendet. Dieses Modell zur integrierten Steuerung von Kanalnetz und Kläranlagen hat zum Ziel alle Elemente derart zu steuern, dass der Eintrag ungeklärten Abwassers in die Umwelt minimiert wird.

Das Abwassersystem und die darin enthaltene Dynamik der Volumenströme werden mithilfe verschiedener Modelle der gemischt-ganzzahligen und der nichtlinear-kontinuierlichen Optimierung beschrieben. Diese Modelle, beziehungsweise deren optimale Lösung haben zum Ziel, Kläranlagen unter Berücksichtigung physikalischer und technischer Randbedingungen derart zu beschicken, dass die Kapazitäten der Abwassernetzwerks möglichst vollständig genutzt werden. Insbesondere genügen die Modelle den folgenden Kriterien: Elemente des Abwassersystems, sowie die zeitliche und zustandsabhängige Dynamik der Volumenströme werden hinreichend genau abgebildet und die Voraussetzungen zur Verwendung effizienter und schneller Optimierungsverfahren sind erfüllt. Diese Art der Modellierung macht es insbesondere möglich, dass auch für große und komplexe Abwassersysteme mithilfe von Standardsoftware optimale und realistische Lösungen in adäquater Zeit bestimmt werden können. Es werden theoretische Untersuchungen zu verschiedenen Approximationen und Modellierungen der Flussdynamik der Kanalnetze durchgeführt. Der Schwerpunkt der Untersuchungen liegt auf den Überlaufbauwerken, für die bisher keine oder keine hinreichend exakten Formulierungen in der Literatur vorlagen. Diese Approximationen der Flussdynamik, ebenso wie die neuen Modellierungsansätze werden bezüglich ihrer Güte und Verwendbarkeit bezüglich realer Abwassernetzwerken untersucht. Die entstehenden Modellformulierungen werden anhand realer und realistischer Probleminstanzen und mithilfe moderner, frei verfügbarer Standardsoftware zur Lösung nichtlinearer Optimierungsprobleme verifiziert.

Schlagworte:

Abwassermanagement, optimale Steuerung, nichtlineare Optimierung, gemischt-ganzzahliges Modell, nichtlineares Modell

Abstract

In urban areas, large quantities of domestic and industrial waste water are accumulated and also significant amounts of rainwater arise, which strongly depend on the degree of sealing- To make use of the capacity of an existing wastewater system and its drainage facilities as fully as possible, in this thesis a model for the control of the discharge of waste water is developed and applied to real problem instances. This model for the integrated control of the sewer network and the sewage treatment plants aims to control all elements of the wastewater system, such that the discharge of not treated waste water into the environment is minimized.

In this thesis the sewage systems and the dynamics of the arising volume flows are modeled by using techniques of mixed-integer nonlinear and nonlinear continuous optimization. The goals of these models, and especially their optimal solutions are that the treatment are charged, taking into account physical and technical constraints such that the capacity of the wastewater network to be used as fully as possible. In particular, the models meet the following criteria: elements of the waste water system, and the time and state dependent dynamics of the volume flows are mapped with sufficient accuracy and the requirements for using efficient and fast optimization methods are taken into account.

This kind of modeling waste water systems makes it possible that in particular for large and complex systems optimal and realistic solutions can be determined in an adequate time by using standard software.

Various approximations and modeling variants of the dynamics in the sewer networks with open channel flows are studied theoretically and analyzed The focus has been on the overflow structures for which no or not sufficiently precise formulations existed in literature up to now. These approximations of the flow dynamics, as well as new modeling approaches are examined in terms of their quality and usability with respect to real waste water networks. The resulting model formulations are verified using real and realistic problem instances and state of the art, freely available standard software for solving nonlinear optimization problems.

Keywords:

wastewater management, optimal control, nonlinear programming, mixed-integer model, nonlinear model

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	7
2	Nichtlineare Optimierungsprobleme	9
2.1	Grundlegende Eigenschaften und Definitionen	10
2.2	Lösungskonzepte	14
2.2.1	Konvergenztest	15
2.2.2	Das lokale Modell	16
2.2.3	Globalisierungsstrategien	21
2.2.4	Globalisierungsmechanismen	25
3	Nichtlineare gemischt-ganzzahlige Optimierungsprobleme	29
3.1	Konvexe gemischt-ganzzahlige Optimierungsprobleme	30
3.2	Allgemeine gemischt-ganzzahlige Optimierungsprobleme	34
4	Das Abwassersystem	36
4.1	Das Kanalnetz	36
4.1.1	Abwasserkanäle	37
4.1.2	Reservoirs	41
4.1.3	Öffnungen	41
4.1.4	Drosseln und Drosselstrecken	69
4.1.5	Pumpen	74
4.2	Das ADL-Netz	75
4.2.1	Verzweigungen	76
4.2.2	Rohrleitungen	76
4.2.3	Ventile	79
4.3	Die Klärwerke	80

5	Optimierungsmodelle	83
5.1	Grundsätzliches	83
5.1.1	Zeitdiskretisierung	83
5.1.2	Das Abwassernetzwerk als Graph	84
5.1.3	Dynamische Variablen	85
5.2	Nichtlineares gemischt-ganzzahliges Modell	86
5.2.1	Die Knotenmenge \mathbb{V}	86
5.2.2	Die Kantenmenge \mathbb{E}	90
5.3	Nichtlineares kontinuierliches Modell	103
5.3.1	Die Knotenmenge \mathbb{V}	103
5.3.2	Die Kantenmenge \mathbb{E}	103
5.4	Anfangsbedingungen	112
5.5	Zielfunktion	113
5.6	Vergleich der Modelle	113
6	Numerische Ergebnisse	116
6.1	Abwassernetzwerk I	117
6.2	Abwassernetzwerk II	119
6.3	Abwassernetzwerk III	122
6.4	Abwassernetzwerk IV	125
6.5	Abwassernetzwerk V	128
6.6	Abwassernetzwerk VI	130
7	Zusammenfassung und Ausblick	134

Kapitel 1

Einleitung

In Siedlungsgebieten fallen häusliches und gewerbliches Schmutzwasser sowie in Abhängigkeit vom Versiegelungsgrad erhebliche Mengen an Niederschlagswasser an. Seit Mitte der 70er Jahre wurde die Abflusssteuerung angewandt, um gezielt vorhandene Entwässerungseinrichtungen zu bewirtschaften und somit die Kapazität der zuvor rein statischen Systeme möglichst vollständig zu nutzen [SEW08]. Nach wie vor wurde eine betriebliche Umsetzung für große, komplexe Systeme kaum realisiert. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es ein Modell zur integrierten Steuerung von Kanalnetz und Kläranlagen zu entwickeln, so dass später auf Basis dieser Modelle Entscheidungshilfesysteme zur Steuerung komplexer Abwassersysteme dichtbesiedelter urbaner Gebiete entwickelt und eingesetzt werden können.

Ziel ist es die steuerbaren Elemente des Abwassersystems, wie z. B. insbesondere Pumpen und Pumpwerke, so zu steuern, dass der Eintrag ungeklärten Abwassers in die Umwelt minimiert wird. Vorwiegend während starker Regenfälle ist der Zufluss in die Kanalnetze aufgrund des hohen Versiegelungsgrades urbaner Gebiete substantiell größer als während des alltäglichen Betriebs. In diesen Situationen wird häufig, um Havarien zu vermeiden, ungeklärtes Abwasser in erheblichen Mengen in die Umwelt entlastet.

In dieser Arbeit entwickeln wir ein Optimierungsmodell in verschiedenen Formulierungen, um das Abwassersystem und die darin enthaltene Dynamik der Volumenströme abzubilden und zu beschreiben. Die Modelle bzw. deren optimale Lösung haben zum Ziel die Abwasserströme in den Kanalnetzen und dem Abwasserdruckleitungsnetz so zu steuern, dass eine flexible und variable Beschickung der Kläranlagen ermöglicht wird und damit die Kapazitäten der Abwassernetzwerks vollständig ausgenutzt werden können.

Insbesondere müssen Modelle folgenden Kriterien genügen. Zum Einen muss das Modell des Abwassernetzwerks dessen Elemente sowie die zeitliche und zustandsabhängige Dynamik der Volumenströme hinreichend genau abbilden, um valide und verwendbare Ergebnisse zu erhalten. Auf der anderen Seite muss das Modell den Voraussetzungen effizienter und schneller Lösungsverfahren genügen, um auch

für reale, also große und komplexe, Abwassersysteme Lösungen in adäquater Zeit zu bestimmen.

In den Kapiteln 2 und 3 geben wir zunächst einen kurzen Überblick in die Problemklassen der nichtlinearen kontinuierlichen und der nichtlinearen gemischt-ganzzahligen Optimierungsprobleme. Wir stellen jeweils eine allgemeine Formulierung der Problemklasse vor und charakterisieren deren Eigenschaften. Anschließend beschreiben wir verschiedene Lösungsstrategien und -algorithmen, wie sie in aktuellen Implementierungen verwendet werden, sowie deren Eigenschaften.

Das Kapitel 4 gibt einen detaillierten Überblick über die verschiedenen Bauwerke und Elemente in Abwassersystemen. Insbesondere stellen wir die Flussdynamik abhängig von Zeit und Zustand des Systems dar und diskutieren verschiedene Modelle im Hinblick auf deren Verwendbarkeit in nichtlinearen Optimierungsmodellen. Insbesondere entwickeln wir Approximationen der Flussdynamik oder neue Modellierungsansätze, in den Fällen, für die bisher keine oder keine hinreichend exakte Formulierungen vorlagen.

In Kapitel 5 entwickeln wir auf Basis der Ergebnisse des Kapitels 4 die eigentlichen Optimierungsmodelle. Ein vollständiges MINLP eines Abwassersystems wird in Abschnitt 5.2 vorgestellt. Hier liegt das Hauptaugenmerk auf einer möglichst exakten Formulierung des Abwassersystems. In Abschnitt 5.3 ist das Abwassersystem als nichtlineares Optimierungsproblem formuliert. Insbesondere ist das Modell so formuliert, dass es mit verfügbarer Standardsoftware für reale Probleminstanzen lösbar ist. Dennoch ist in diesem Modell die Realität hinreichend exakt abbildet, so dass die Lösungen dieser Formulierung zur Entscheidungshilfe verwendet werden können. Abschließend werden in Kapitel 6 an realistischen und realen Abwassernetzwerken die Modelle verifiziert und die Ergebnisse diskutiert. Insbesondere untersuchen wir die Ergebnisse bezüglich deren Verwendbarkeit in Entscheidungshilfesystemen.

Kapitel 2

Nichtlineare Optimierungsprobleme

Da wir das Abwassernetzwerk unter anderem als nichtlineares Optimierungsproblem (NLP) formulieren wollen, werden wir in diesem Kapitel zunächst ein NLP ganz allgemein formulieren. Anschließend führen wir einige grundlegende Begriffe und Definitionen ein, die wir benötigen, um Aussagen über Optimalität und stationäre Punkte formulieren zu können. Ausführliche Einführungen in die Theorie nichtlinearer Optimierungsprobleme liefern unter anderem [NW06] und [BSS06], sowie [BGLS06].

In den darauf folgenden Abschnitten beschäftigen wir uns mit Lösungsalgorithmen für nichtlineare Optimierungsprobleme, beginnend mit allgemeinen Konzepten, um dann zwei grundlegende Verfahrenstypen, die Innere-Punkte-Methoden (IPM) und die SQP-Methoden, genauer zu untersuchen.

In diesem Abschnitt werden wir zunächst ein allgemeines restringiertes nichtlineares Optimierungsproblem (NLP) formulieren. Im Anschluss daran führen wir grundlegende Begriffe und Eigenschaften nichtlinearer Optimierungsprobleme ein, die wir zum Einen benötigen, um die Optimalitätskriterien herauszuarbeiten und zum Anderen die verschiedenen Methoden in den darauf folgenden Abschnitten zu verstehen.

Wir betrachten das allgemeine nichtlineare Optimierungsproblem der Form

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{subject to} & c_i(x) = 0, \quad i \in \mathcal{E} \\ & c_i(x) \geq 0, \quad i \in I \end{array} \quad (\text{NLP})$$

wobei $x \in \mathbb{R}^n$. Die Funktionen f und c_i seien reellwertige, zweimal stetig differenzierbare Funktionen auf einer Teilmenge des \mathbb{R}^n . Außerdem seien \mathcal{E} und I zwei disjunkte endliche Indexmengen. Die zu minimierende Funktion f bezeichnen wir als Zielfunktion. Die Funktionen c_i heißen Gleichungsrestriktionen, falls $i \in \mathcal{E}$ und Ungleichungsrestriktionen, falls $i \in I$.

2.1 Grundlegende Eigenschaften und Definitionen

Die folgenden zwei Definitionen beschreiben zulässige Punkte bzw. zulässige Mengen eines beschränkten nichtlinearen Optimierungsproblems.

Definition 2.1 (zulässige Punkte)

Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ heißt zulässig in Bezug auf das Optimierungsproblem (NLP), falls $c_i(x) = 0$, für alle $i \in \mathcal{E}$ und $c_i(x) \geq 0$, für alle $i \in I$.

Definition 2.2 (zulässige Menge)

Die zulässige Menge Ω ist die Menge aller zulässigen Punkte:

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n : c_i(x) = 0, i \in \mathcal{E}; c_i(x) \geq 0, i \in I\}. \quad (2.1)$$

Die zulässige Menge erlaubt uns nun eine kompaktere Formulierung des Problems (NLP):

$$\min_{x \in \Omega} f(x). \quad (2.2)$$

Mithilfe der zulässigen Menge Ω lassen sich die Lösungen des Optimierungsproblems (NLP) charakterisieren. Lösungen sind die zulässigen Punkte x^* , an denen die Zielfunktion f ihr Minimum annimmt. Wir unterscheiden zwischen lokalen und globalen Lösungen.

Definition 2.3 (globales Minimum)

Ein Punkt x^* heißt globales Minimum (Optimum) des Problems (NLP), falls x^* ein zulässiger Punkt ist und es gilt: $f(x) \geq f(x^*)$ für alle $x \in \Omega$.

Definition 2.4 (lokales Minimum)

Sei $\varepsilon > 0$ und $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm. Ein Punkt x^* heißt lokales Minimum (Optimum) des Problems (NLP), falls x^* ein zulässiger Punkt ist und für alle $x \in \Omega$ mit $\|x^* - x\| < \varepsilon$ gilt: $f(x) \geq f(x^*)$.

Wir betrachten in dieser Arbeit ausschließlich Algorithmen und Lösungskonzepte die lokale Minima bestimmen. Mitunter wäre es zwar wünschenswert die global beste Lösung zu kennen, doch es ist nicht einfach eine globale Lösung zu identifizieren und noch schwerer zu lokalisieren. Einen Überblick über globale nichtlineare Optimierung geben zum Beispiel Floudas und Gounaris [FG09].

Ein weiterer Begriff der im Folgenden häufig verwendet wird, ist die Aktive Menge. Sie charakterisiert die Beschränkungen eines nichtlinearen Optimierungsproblems.

Definition 2.5 (Aktive Menge)

Die aktive Menge $\mathcal{A}(x)$ an einem beliebigen zulässigen Punkt x besteht aus den Indices \mathcal{E} der Gleichungsrestriktionen und den Indices I der Ungleichungsrestriktionen für die gilt $c_i(x) = 0$, das heißt

$$\mathcal{A}(x) := \mathcal{E} \cup \{i \in I : c_i(x) = 0\} \quad (2.3)$$

Weiter heißt eine Ungleichungsrestriktion $i \in I$ in einem zulässigen Punkt x aktiv, falls $c_i(x) = 0$ und inaktiv falls $c_i(x) > 0$, die Ungleichungsrestriktion also strikt erfüllt ist.

Um Optimalitätsbedingungen für beschränkte nichtlineare Optimierungsprobleme der Form (NLP) aufstellen zu können, muss das Optimierungsproblem in der Lösung bestimmte Anforderungen an die Nebenbedingungen erfüllen. Diese sogenannten Regularitätsbedingungen oder auch Constraint Qualifications sorgen dafür, dass die Linearisierung der zulässigen Menge Ω diese in einem zulässigen Punkt hinreichend genau beschreibt.

Zwei der am häufigsten verwendeten Regularitätsbedingungen sind die LICQ (Linear Inequality Constraint Qualification) und die MFCQ (Mangasarian-Fromovitz-Constraint-Qualification) [MF67]. Die LICQ stellen sicher, dass die Menge der Restriktionen wohldefiniert ist, in dem Sinne dass keine redundanten Restriktionen existieren oder der Gradient einer Restriktion konstant Null ist.

Definition 2.6 (Linear Inequality Constraint Qualification (LICQ))

Seien ein Punkt x und die zugehörige aktive Menge $\mathcal{A}(x)$ gegeben. Dann ist die LICQ im Punkt x erfüllt, wenn die Menge der Gradienten der aktiven Restriktionen $\{\nabla c_i(x) : i \in \mathcal{A}(x)\}$ in diesem Punkt linear unabhängig sind.

Die MFCQ hingegen stellen sicher, dass immer eine Richtung existiert, entlang derer die Restriktionen bis zur ersten Ordnung strikt ansteigen [FGW02].

Definition 2.7 (Mangasarian-Fromovitz-Constraint-Qualification (MFCQ))

Die Mangasarian-Fromovitz Regularitätsbedingungen (MFCQ) sind in einem Punkt x erfüllt, wenn die Gradienten der Gleichungsrestriktionen $\{\nabla c_i(x) : i \in \mathcal{E}\}$ linear unabhängig sind, und falls ein Vektor $w \in \mathbb{R}^n$ existiert, so dass

$$\begin{aligned} \nabla c_i(x)^T w &> 0, \quad \text{für alle } i \in \mathcal{A}(x) \cap I \\ \nabla c_i(x)^T w &= 0, \quad \text{für alle } i \in \mathcal{E} \end{aligned}$$

Die LICQ sind stärkere Bedingungen als die MFCQ, das heißt dass falls die LICQ gelten immer auch die MFCQ gelten, aber nicht andersherum [Fle05]. Darüberhinaus gibt es eine Vielzahl weiterer Regularitätsbedingungen, unter anderem die Abadie Regularitätsbedingung (ACQ) und die Guignard Regularitätsbedingung (GCQ), auf die wir in dieser Arbeit aber nicht weiter eingehen. Eine tiefergehender Diskussion zu den Regularitätsbedingungen findet man z. B. bei [Pet73], [GK02] und [Fle05].

Abschließend definieren wir die Lagrangefunktion für ein allgemeines Problem der Form (NLP).

Definition 2.8 (Lagrange-Funktion)

Die Lagrange-Funktion für das Optimierungsproblem (NLP) lautet:

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) - \sum_{i \in \mathcal{E} \cup I} \lambda_i c_i(x). \quad (2.4)$$

Mithilfe der vorhergehenden Definitionen und Eigenschaften können wir nun die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster und zweiter Ordnung zum Problem (NLP) formulieren.

Die Begriffe *erster* und *zweiter Ordnung* beziehen sich auf die Eigenschaften der ersten und zweiten Ableitungen der Zielfunktion und Beschränkungen. Diese Bedingungen bilden die Grundlage für viele Algorithmen zur Lösung von nichtlinearen Optimierungsproblemen. Insbesondere die in dieser Arbeit beschriebenen Algorithmen basieren auf diesen Bedingungen.

Satz 2.9 (Notwendige Bedingungen erster Ordnung, KKT-Bedingungen)

Sei x^* ein lokales Minimum von (NLP). Außerdem seien f und c_i stetig differenzierbar und zusätzlich sei eine Regularitätsbedingung in x^* erfüllt. Dann existieren Lagrange-Multiplikatoren λ_i , $i \in \mathcal{E} \cup I$, so dass folgende Bedingungen in (x^*, λ^*) erfüllt sind:

$$\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) = 0, \quad (2.5a)$$

$$c_i(x^*) = 0, \text{ für alle } i \in \mathcal{E} \quad (2.5b)$$

$$c_i(x^*) \geq 0, \text{ für alle } i \in I \quad (2.5c)$$

$$\lambda_i^* \geq 0, \text{ für alle } i \in I \quad (2.5d)$$

$$\lambda_i^* c_i(x^*) = 0, \text{ für alle } i \in \mathcal{E} \cup I \quad (2.5e)$$

Die Bedingungen (2.5) werden oft auch als Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen (KKT-Bedingungen) bezeichnet. Einen Beweis von Satz 2.9 findet man unter anderem in [NW06], [BSS06] und [BGLS06].

Nimmt man in Satz 2.9 an, dass die LICQ gelten, dann sind die Lagrange-Multiplikatoren λ^* eindeutig bestimmt. Sind die MFCQ, aber nicht die LICQ erfüllt, so sind die Lagrange-Multiplikatoren beschränkt.

Die Komplementaritätsbedingungen (2.5e) implizieren, dass entweder der Lagrange-Multiplikator $\lambda_i^* = 0$ ist oder $c_i(x^*) = 0$ gilt, oder aber beides. Insbesondere sind die zu nichtaktiven Beschränkungen gehörenden Lagrange-Multiplikatoren gleich null, so dass die Bedingung (2.5a) auch folgendermaßen formuliert werden kann:

$$0 = \nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) = \nabla f(x^*) - \sum_{i \in \mathcal{A}(x^*)} \lambda_i^* \nabla c_i(x^*) \quad (2.6)$$

Ein Spezialfall der Komplementarität ist die strikte Komplementarität:

Definition 2.10 (strikte Komplementarität)

Sei x^* eine lokale Lösung von (NLP) und erfülle λ^* die KKT-Bedingungen (2.5). Dann gilt die strikte Komplementarität, falls für jeden Index $i \in I$ entweder λ_i^* , oder $c_i(x^*) = 0$ gilt.

Ist die strikte Komplementarität erfüllt, so ist es in der Regel für Algorithmen einfacher die aktive Menge $\mathcal{A}(x^*)$ zu bestimmen und damit gegen eine optimale Lösung zu konvergieren [NW06].

Bisher wurden notwendige Optimalitätsbedingungen beschrieben, also Bedingungen, die ein lokales Optimum einer differenzierbaren Optimierungsaufgabe erfüllen muss.

Viele Optimierungsverfahren bestimmen lediglich KKT-Punkte, also überprüfen nur ob die errechneten Lösungen stationäre Punkte sind. Die notwendigen Bedingungen lassen aber eine Entscheidung, ob ein stationärer Punkt ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum nicht zu. Unter der Annahme, dass es entweder keine lokalen Maxima gibt oder die Startschätzungen nahe genug an einem zu findenden lokalen Minimum liegen, ist dies auch ausreichend. Anderenfalls gibt es so genannte Globalisierungsstrategien, die dieses Problem umgehen.

Ob hinreichende Nebenbedingungen erfüllt sind, ist in der Regel schwer nachzuweisen und daher werden sie von vielen Algorithmen auch nicht überprüft. Wir werden sie der Vollständigkeit halber im Folgenden aber dennoch kurz beschreiben. Die hinreichende Bedingungen garantieren, dass ein stationärer Punkt auch tatsächlich ein lokales Optimum ist. Desweiteren verlangen viele Lösungsalgorithmen für nichtlineare Optimierungsprobleme zumindest für die Herleitung von Konvergenzgeschwindigkeiten, dass das Verfahren gegen einen Punkt konvergiert, der eine hinreichende Optimalitätsbedingung erfüllt.

Der folgende Satz präsentiert zunächst eine notwendige Bedingung zweiter Ordnung: Falls x^* ein lokales Minimum ist, dann besitzt die Hessematrix der Lagrange-Funktion eine nichtnegative Krümmung entlang der kritischen Richtungen, also den Richtungen, die innerhalb des kritischen Kegels liegen.

Definition 2.11 (Kritischer Kegel)

Seien $\mathcal{F}(x^*)$ die Menge der linearisierten zulässigen Richtungen

$$\mathcal{F}(x^*) = \{d \in \mathbb{R}^n : d^T \nabla c_i(x^*) = 0, \forall i \in \mathcal{E}, d^T \nabla c_i(x^*) \geq 0 \forall i \in \mathcal{A}(x^*) \cap I\}. \quad (2.7)$$

und λ^* Lagrange-Multiplikatoren, die die KKT-Bedingungen (2.5a) - (2.5e) erfüllen. Dann ist der kritische Kegel wie folgt definiert:

$$\mathcal{C}(x^*, \lambda^*) = \{w \in \mathcal{F}(x^*) : \nabla c_i(x^*)^T w = 0, \forall i \in \mathcal{A}(x^*) \cap I \text{ mit } \lambda_i^* > 0\}, \quad (2.8)$$

Satz 2.12 (Notwendige Bedingungen zweiter Ordnung)

Sei x^* ein lokales Minimum von (NLP) und die LICQ in x^* erfüllt. Weiter sei λ^* der Vektor mit Lagrange-Multiplikatoren, so dass die KKT-Bedingungen (2.5a) - (2.5e) erfüllt sind. Dann gilt

$$w^T \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) w \geq 0, \quad \text{für alle } w \in \mathcal{C}(x^*, \lambda^*) \quad (2.9)$$

Hinreichende Bedingungen stellen sicher, dass x^* tatsächlich eine lokale Lösung des Problems (NLP) sind. Die folgende hinreichende Bedingung zweiter Ordnung ähnelt der notwendigen Bedingung zweiter Ordnung, unterscheidet sich aber darin dass zum Einen keine Regularitätsbedingung gefordert wird und zum Anderen wird die Ungleichung in (2.9) durch eine strikte Ungleichung ersetzt.

Satz 2.13 (Hinreichende Bedingungen zweiter Ordnung)

Sei x^* ein zulässiger Punkt des Problems (NLP) und λ^* ein Vektor mit Lagrange-Multiplikatoren, so dass die KKT-Bedingungen (2.5a) - (2.5e) erfüllt sind. Außerdem gelte

$$w^T \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) w > 0, \quad \text{für alle } w \in \mathcal{C}(x^*, \lambda^*), w \neq 0. \quad (2.10)$$

Dann ist x^* ein striktes lokales Minimum für (NLP).

Beweise der Sätze 2.12 und 2.13 findet man z. B. in [NW06] oder [BGLS06].

2.2 Lösungskonzepte

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit Algorithmen, die nichtlineare Optimierungsprobleme der Form (NLP) lösen. Im Allgemeinen können beschränkte nichtlineare Optimierungsprobleme nicht explizit oder direkt gelöst werden [LM10]. Daher betrachten wir hier ausschließlich Algorithmen, die lokal optimale Lösungen iterativ bestimmen.

Diese Algorithmen gehen alle nach dem selben Prinzip vor (vgl. Algorithmus 2.1): Ausgehend von einer Startnäherung x_0 wird eine Folge von Iterierten x_k , $k = 1, 2, \dots$ bestimmt, die gegen eine lokale Lösung x^* konvergiert, in der die KKT-Bedingungen (2.5), also die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung aus Satz 2.9 erfüllt sind. Zur Bestimmung der Iterierten x_{k+1} werden in der Regel einfachere, approximierte Subprobleme von (NLP) um x_k gelöst.

Algorithmus 2.1 Grundgerüst von Verfahren zur Lösung von NLP's

- 1: Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ eine Startnäherung für (NLP)
 - 2: Setze $k = 0$
 - 3: **repeat**
 - 4: **while** x_{k+1} ist nicht besser als x_k **do**
 - 5: Löse ein lokales Modell von (NLP) um x_k um den Schritt s_k zu bestimmen
 - 6: Bestimme x_{k+1} abhängig von x_k und s_k
 - 7: **end**
 - 8: Setze $k = k + 1$
 - 9: **until** Konvergenztest erfüllt
 - 10: x_k ist optimale Lösung
-

Effiziente Algorithmen zur Lösung von NLP's bestehen in der Regel aus folgenden Basiskomponenten: dem Konvergenztest, dem lokalen Modell, einer Globalisierungsstrategie und einem Globalisierungsmechanismus, der die Globalisierungsstrategie durchsetzt [LM10].

Der Konvergenztest überprüft, ob die Optimalitätsbedingungen erster Ordnung hinreichend genau erfüllt sind. Das lokale Modell wird um jede Iterierte x_k aufgestellt. Aus diesem Modell wird dann ein Schritt bestimmt, der zu einer verbesserten Iterierten führt. In dieser Arbeit betrachten wir zwei Klassen von Verfahren

die SQP-Verfahren und die Innere-Punkte-Methoden. Die Globalisierungsstrategie legt fest, was genau eine verbesserte Iterierte ist und stellt damit globale Konvergenz des Verfahrens sicher. Zu den Globalisierungsstrategien zählen unter anderem Gütefunktionen, die erweiterte Lagrangefunktion und Filter. Der Globalisierungsmechanismus verändert die aus dem lokalen Modell errechneten Schritte bzw. die Schrittlänge, dass die Ziele der gewählten Globalisierungsstrategie eingehalten wird. Zu diesen Mechanismen zählen wir die Line-Search und die Trust-Region-Strategie. Zum Teil lassen sich die einzelnen Komponenten nicht immer klar voneinander trennen, sie sind aber in jedem effizienten Algorithmus zur Lösung nichtlinearer Optimierungsprobleme vorhanden.

Wir betrachten in den folgenden Abschnitten, soweit nicht anders erwähnt, ein allgemeines NLP in der Form:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{subject to} \quad & c(x) = 0 \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{2.11}$$

um die Notation einfach zu halten. Es sei $x \in \mathbb{R}^n$ und wir bezeichnen mit $c(x)$ den Vektor der Gleichungsrestriktionen. Man kann leicht sehen, dass sich ein nichtlineares Problem der Form (NLP) mithilfe von Variablensplitting und dem Einführen von Schlupfvariablen in die Form (2.11) bringen kann.

Die zugehörigen KKT-Bedingungen lauten

$$\nabla f(x^*) - \nabla c(x^*)\lambda^* - \mu^* = 0, \tag{2.12a}$$

$$c(x^*) = 0, \tag{2.12b}$$

$$\mu^* \geq 0, \tag{2.12c}$$

$$(\mu^*)^T x^* = 0, \tag{2.12d}$$

wobei mit λ der Vektor mit zu den Gleichungsrestriktionen gehörenden den Lagrange-Multiplikatoren bezeichnet ist und mit μ die Lagrange-Multiplikatoren, die zu den Ungleichungsrestriktionen gehören.

2.2.1 Konvergenztest

Alle iterativen Verfahren haben gemeinsam, dass in jedem Punkt x_k überprüft werden muss, ob dieser Punkt die Optimalitätsbedingungen hinreichend genau erfüllt. Die folgende Abbruchkriterium überprüft, ob die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung des Problems (2.11) mit einer Genauigkeit $\epsilon_{\text{tol}} > 0$ erfüllt sind [LM10]:

$$\max \{ \|\nabla f(x_k) - \nabla c(x_k)\lambda_k - \mu_k\|, \|c(x_k)\|, \|\min(\mu_k, x_k)\| \} \leq \epsilon_{\text{tol}}. \tag{2.13}$$

Das Minimum bezüglich der Komplementarität ist komponentenweise zu verstehen. Die hinreichenden Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung sind in der Praxis schwer zu überprüfen, so dass effiziente Algorithmen dies nicht tun, sondern

die KKT-Bedingungen überprüfen. Dies stellt aber nur die Konvergenz gegen einen stationären Punkt sicher. Konvergenz gegen ein lokales Minimum wird durch die im Folgenden beschriebenen Globalisierungsstrategien sichergestellt.

2.2.2 Das lokale Modell

Die Konstruktion und das Lösen eines lokalen Modells ist eines der wichtigsten Merkmale eines Verfahrens zur Lösung allgemeiner nichtlinearer Optimierungsprobleme.

In dieser Arbeit beschreiben wir zwei der meist verwendeten Konzepte: Die Innere-Punkte-Methoden (IPM) und die SQP-Verfahren.

Die SQP-Verfahren lösen eine Folge quadratischer Optimierungsprobleme, die das Ausgangsproblem in der aktuellen Iterierten approximieren. SQP steht für sequentielle quadratische Programmierung.

Die Innere-Punkte-Methoden können als Barriere-Methoden aufgefasst werden. Sie erzeugen die nächste Iterierte durch Lösen des Problems

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) - \mu \sum_{i \in I} \log s_i \\ \text{subject to} \quad & c(x) = 0, \quad i \in \mathcal{E} \\ & c(x) - s_i = 0, \quad i \in I \end{aligned} \quad (2.14)$$

für einen Barriereparameter $\mu > 0$ und Schlupfvariablen $s_i > 0$ [NW06].

SQP-Verfahren

Zunächst betrachten wir ein gleichungsbeschränktes nichtlineares Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{subject to} \quad & c(x) = 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Die Zielfunktion $f(x)$ und die Restriktionen $c(x)$ seien zweimal stetig differenzierbar. Die Idee des SQP-Verfahrens ist in der aktuellen Iterierten x_k das Problem (2.15) durch ein quadratisches Problem zu approximieren und dessen Minimum als nächste Iterierte zu benutzen.

Angenommen die aktuelle Iterierte lautet (x_k, λ_k) . Dann können wir das Problem (2.15) in x_k durch folgendes quadratisches Optimierungsproblem approximieren

$$\begin{aligned} \min \quad & f_k + \nabla f_k^T p + \frac{1}{2} p^T \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}_k p \\ \text{subject to} \quad & A_k p + c_k = 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Wir bezeichnen mit f_k die Zielfunktion an der Stelle x_k und analog ist $\mathcal{L}_k = \mathcal{L}(x_k, \lambda_k)$, sowie $c_k = c(x_k)$. Mit $A_k = A(x_k)$ bezeichnen wir die Jakobi-Matrix des Restriktionen

$$A_k = [\nabla c_1(x_k), \nabla c_2(x_k), \dots, \nabla c_m(x_k)]^T. \quad (2.17)$$

Die KKT-Bedingungen für (2.16) lauten

$$\nabla_{xx}^2 \mathcal{L}_k p_k + \nabla f_k - A_k^T l_k = 0 \quad (2.18a)$$

$$A_k p_k + c_k = 0. \quad (2.18b)$$

Die LICQ sind erfüllt, wenn A_k Vollrang besitzt und wenn zusätzlich die Hessematrix der Lagrange-Funktion positiv definit auf dem Tangentialraum der Restriktionen ist, das heißt $d^T \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}_k d > 0$ für alle $d \neq 0$ für die gilt $A_k d = 0$, dann besitzen die KKT-Bedingungen eine eindeutige Lösung. Diese Bedingung an die Lagrange-Funktion ist erfüllt, wenn (x, λ) in der Nähe der Lösung (x^*, λ^*) liegt und die hinreichenden Bedingungen zweiter Ordnung erfüllt sind [NW06].

Wir lösen nun das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}_k & -A_k^T \\ A_k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_k \\ l_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla f_k \\ -c_k \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

und erhalten die neue Iterierte für das Ausgangsproblem durch

$$x_{k+1} = x_k + p_k \quad \text{und} \quad \lambda_{k+1} = l_k \quad (2.20)$$

Die Beziehung $\lambda_{k+1} = l_k$ ist leicht einzusehen, wenn wir die KKT-Bedingungen der k -ten Iteration des Ausgangsproblems (2.15) betrachten:

$$\nabla f_k - A_k^T \lambda = 0 \quad (2.21a)$$

$$c_k = 0. \quad (2.21b)$$

Jede Lösung des Problems (2.15) erfüllt die KKT-Bedingungen (2.21) sofern die Matrix A_k Vollrang besitzt, also die LICQ erfüllt sind. Der entsprechende Newton Schritt lautet

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \lambda_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ \lambda_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_k \\ p_\lambda \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

wobei p_k und p_λ das Newton-System lösen

$$\begin{bmatrix} \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}_k & -A_k^T \\ A_k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_k \\ p_\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla f_k + A_k^T \lambda_k \\ -c_k \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Wir können das Gleichungssystem (2.23) nach (2.19) überführen, indem wir in der ersten Gleichung $+A_k^T \lambda_k$ auf beiden Seiten subtrahieren und $p_k + \lambda_k = \lambda_{k+1}$ setzen. Nun sieht man sofort, dass $\lambda_{k+1} = l_k$

In Algorithmus 2.2 (vgl. [NW06]) ist ein Grundgerüst für ein SQP-Verfahren zur Lösung eines gleichungsbeschränkten nichtlinearen Problems der Form (2.15) angegeben. Es ist zu beachten, dass in jeder Iteration die Koeffizientenmatrix in (2.19) nicht singular sein darf, also die LICQ und die oben eingeführte Definitheitsbedingung an die Hessematrix der Lagrange-Funktion gelten müssen, damit dieses Verfahren konvergiert. Um globale Konvergenz von einem beliebigen Startpunkt

Algorithmus 2.2 Grundgerüst eines SQP-Verfahrens für gleichungsbeschränkte nichtlineare Optimierungsprobleme

- 1: Sei (x_0, λ_0) eine Startnäherung
 - 2: Setze $k = 0$
 - 3: **repeat**
 - 4: Bestimme $f_k, \nabla f_k, \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}_k, c_k$ und A_k
 - 5: Löse (2.19)
 - 6: Setze $x_{k+1} = x_k + p_k$ und $\lambda_{k+1} = l_k$
 - 7: Setze $k = k + 1$
 - 8: **until** Konvergenztest erfüllt
-

zu erzielen, benötigt man zusätzlich eine Globalisierungsstrategie wie in Abschnitt 2.2.3 beschrieben.

Im Folgenden erweitern wir den SQP-Ansatz um Ungleichungsbeschränkungen. Wir betrachten also ein allgemeines NLP der Form (NLP):

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{subject to} \quad & c_i(x) = 0, \quad i \in \mathcal{E} \\ & c_i(x) \geq 0, \quad i \in I. \end{aligned}$$

Wir approximieren das Ausgangsproblem erneut als quadratisches Problem

$$\begin{aligned} \min \quad & f_k + \nabla f_k^T p + \frac{1}{2} p^T \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}_k p \\ \text{subject to} \quad & \nabla c_i(x_k) p + c_i(x_k) = 0, \quad i \in \mathcal{E} \\ & \nabla c_i(x_k) p + c_i(x_k) \geq 0, \quad i \in I. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Um dieses quadratische Problem zu lösen, können wir zum Beispiel eine Active-Set-Methode oder ein Innere-Punkte-Verfahren für quadratische Probleme verwenden. Die Innere-Punkte-Methoden für allgemeine nichtlineare Probleme beschreiben wir im folgenden Abschnitt. Eine detaillierte Diskussion über Innere-Punkte-Methoden (konvexer) quadratischer Optimierungsprobleme findet man unter anderem in [NW06], [Wri97] und [Van08].

Ein andere Klasse häufig verwendeter Verfahren zu Lösung quadratischer Probleme sind die Active-Set-Methoden. Hier werden iterativ die in der Lösung aktiven Restriktionen bestimmt. Erreicht wird dies, indem eine Folge gleichungsbeschränkter Probleme gelöst wird, die gegen die in der Lösung aktiven Restriktionen konvergiert. Mehr zu Active-Set-Strategien findet man unter anderem in [NW06], [Fle87] und [BGLS06].

Der Vergleich von Active Set-Methoden und Innere-Punkte-Verfahren für quadratische Probleme zeigt, dass die Innere-Punkte-Verfahren bei sehr großen Problemen in der Regel schneller sind [NW06].

Die neue Iterierte x_{k+1} ergibt sich dann analog zum gleichungsbeschränkten Fall $(x_{k+1}, \lambda_{k+1}) = (x_k + p_k, \lambda_{k+1})$. p_k und λ_{k+1} sind die Lösungen von (2.24). Wir kön-

nen zur Lösung also erneut den Algorithmus 2.2 als lokales SQP-Verfahren verwenden, nur im Punkt 5 muss das Gleichungssystem (2.24) anstatt (2.19) gelöst werden.

Innere-Punkte-Methoden

In diesem Abschnitt betrachten wir eine andere Formulierung des allgemeinen Problems (NLP).

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{subject to} \quad & c_{\mathcal{E}}(x) = 0, \\ & c_I(x) - s = 0, \\ & s \geq 0. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Der Vektor $c_{\mathcal{E}}(x)$ besteht aus den Gleichungsrestriktionen $c_i(x)$, $i \in \mathcal{E}$. Analog besteht der Vektor $c_I(x)$ besteht aus den Ungleichungsrestriktionen $c_i(x)$, $i \in I$. Die Ungleichungsrestriktionen wurden mithilfe von nichtnegativen Schlupfvariablen s_i in Gleichungsrestriktionen transformiert. Diese Schlupfvariablen sind zu einem Vektor s zusammengefasst. Die durch den sogenannten Barriere-Parameter μ gestörten KKT-Bedingungen zu (2.25) lauten:

$$\nabla f(x) - A_{\mathcal{E}}^T(x)y - A_I^T(x)z = 0, \tag{2.26a}$$

$$Sz - \mu e = 0, \tag{2.26b}$$

$$c_{\mathcal{E}}(x) = 0, \tag{2.26c}$$

$$c_I(x) - s = 0, \tag{2.26d}$$

$$s \geq 0, \tag{2.26e}$$

$$z \geq 0. \tag{2.26f}$$

Mit den Matrizen $A_{\mathcal{E}}(x)$ und $A_I(x)$ bezeichnen wir die Jakobimatrizen der Funktionen $c_{\mathcal{E}}(x)$ und $c_I(x)$. y und z sind die zugehörigen Lagrangemultiplikatoren. S und Z sind Diagonalmatrizen, deren Einträge durch die Vektoren s und z bestimmt sind, e ist der Einsvektor.

Die Bedingungen (2.26) entsprechen dann den KKT-Bedingungen zu (2.25), wenn der Barriereparameter $\mu = 0$ ist. Der Term Sz wird nicht mit in die aus der Lagrangefunktion resultierenden Gleichung (2.26a) mit aufgenommen, da durch die Komplementaritätsbedingung (2.26b) sicherstellt ist, dass $Sz = 0$, falls $\mu = 0$.

Dieser Ansatz löst approximativ die gestörten KKT-Bedingungen (2.26) für eine Folge positiver Parameter $\{\mu_k\}$, die gegen Null konvergiert. Die Schlupfvariablen s und die Lagrangeparameter z werden strikt positiv gehalten. Im Grenzwert sind die KKT-Bedingungen erfüllt, das heißt das Verfahren konvergiert gegen einen stationären Punkt des Problems (NLP). Wir müssen allerdings voraussetzen, dass in der Umgebung der lokalen Lösung (x^*, s^*, y^*, z^*) die LICQ aus Definition 2.6 erfüllt sind und strikte Komplementarität (Definition 2.10) gilt, sowie die hinreichenden Bedingungen zweiter Ordnung aus Satz 2.12 erfüllt sind.

Dann ist die Lösung für hinreichend kleine $\mu > 0$ eindeutig und wir bezeichnen sie mit $(x(\mu), s(\mu), y(\mu), z(\mu))$. Die Trajektorie die durch diese Lösungen beschrieben wird nennt man den primal-dualen zentralen Pfad, der gegen die optimale Lösung (x^*, s^*, y^*, z^*) konvergiert, wenn $\mu \rightarrow 0$. Mithilfe einer Globalisierungsstrategie können wir zusätzlich Konvergenz gegen ein lokales Minimum garantieren [NW06].

Einen Schritt der Innere-Punkte-Methode an der Stelle (x_k, s_k, y_k, z_k) bestimmen wir mithilfe des Newton-Verfahrens angewendet auf das KKT-System (2.26):

$$\begin{bmatrix} \nabla_{xx}^2 \mathcal{L} & 0 & -A_E^T(x) & -A_I^T(x) \\ 0 & Z & 0 & S \\ A_E(x) & 0 & 0 & 0 \\ A_I(x) & I & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_s \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f(x) - A_E^T(x)y - A_I^T(x)z \\ Sz - \mu e \\ c_E(x) \\ c_I(x) - s \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

Algorithmus 2.3 Grundgerüst einer Innere-Punkte-Methode für allgemeine nicht-lineare Optimierungsprobleme

- 1: Wähle die Startnäherungen x_0 und $s_0 > 0$
 - 2: Bestimme die Multiplikatoren y_0 und z_0
 - 3: Wähle ein $\mu_0 > 0$
 - 4: Setze $k = 0$
 - 5: **repeat**
 - 6: Löse (2.27) und bestimme $p = (p_x, p_s, p_y, p_z)$
 - 7: Bestimme die maximalen Schrittweiten α_s^{\max} und α_z^{\max}
 - 8: Bestimme $(x_{k+1}, s_{k+1}, y_{k+1}, z_{k+1})$
 - 9: Aktualisiere μ_{k+1}
 - 10: Setze $k = k + 1$
 - 11: **until** Konvergenztest erfüllt
-

Daraus können wir dann die nächste Iterierte $(x_{k+1}, s_{k+1}, y_{k+1}, z_{k+1})$ berechnen. Es muss aber sichergestellt sein, dass die Variablen s und z während des Verfahrens positiv nichtnegativ bleiben. Deshalb beschränken wir die Schrittweite auf α_s^{\max} bzw. α_z^{\max} mithilfe folgender Bedingungen

$$\alpha_s^{\max} = \{\alpha \in (0, 1] : s + \alpha p_s \geq (1 - \tau)s\} \quad (2.28a)$$

$$\alpha_z^{\max} = \{\alpha \in (0, 1] : z + \alpha p_z \geq (1 - \tau)z\} \quad (2.28b)$$

wobei $\tau \in (0, 1)$. Diese Bedingung heißt "fraction to the boundary rule" und sorgt dafür, dass die Variablen s und z ihre untere Schranke Null nicht zu schnell erreichen und insbesondere dafür, dass beide Variablen positiv bleiben.

Außerdem muss eine Regel für das Update des Barrierenparameters μ festgelegt werden. Die einfachste denkbare Regel wäre es, μ in jeder Iteration um einen festen Faktor zu $\sigma \in (0, 1)$ reduzieren und das gestörte KKT-System bis zu einer vorgehenden Genauigkeit zu lösen [FM68]. Effektiver ist es, für σ mehrere verschiedene

Werte zuzulassen und dann abhängig vom Fortschritt der vorausgegangenen Iterationen zu wählen. Bei geschickter Wahl kann eine superlineare Konvergenzrate erreicht werden [NW06].

Um den Algorithmus robuster zu gestalten, kann eine adaptive Update-Strategie verwendet werden, die μ in jeder Iteration abhängig von der Komplementarität wählt. In Algorithmus 2.3 ist das Grundgerüst einer Innere-Punkte-Methode skizziert.

2.2.3 Globalisierungsstrategien

Die lokale Verbesserung der Iterierten mithilfe eines lokalen Modells aus Abschnitt 2.2.2 stellt ausschließlich lokale Konvergenz sicher, also nur Konvergenz innerhalb einer kleinen Umgebung um das lokale Optimum. Globalisierungsstrategien garantieren zum Einen Konvergenz von weit entfernt liegenden Startnäherungen x_0 und zum Anderen werden sie dazu verwendet, um auch Konvergenz gegen ein lokales Minimum sicher zu stellen und nicht nur gegen einen stationären Punkt.

Um globale Konvergenz zu erreichen, muss der Fortschritt im lokalen Verfahren sorgfältig beobachtet werden [LM10]. In der unbeschränkten Optimierung genügt es den Zielfunktionswert zu beobachten, während in der beschränkten Optimierung die Verletzung der Restriktionen mit in Betracht gezogen werden muss. Wir werden im Folgenden zwei der am weitesten verbreiteten Strategien beschreiben: Verfahren mit Penalty- oder Gütefunktionen und Filter-Methoden.

2.2.3.1 Penalty- und Gütefunktionen

Bei den Penalty- und Güteansätzen werden die Zielfunktion $f(x)$ und die Verletzung der Restriktionen $c(x)$ zu einer einzelnen Funktion Q , der sogenannten Straf- oder Gütefunktion, kombiniert und zwar in der Art und Weise, dass die lokalen Minima von (2.11) und der Straffunktion Q möglichst dieselben sind [LM10]. Insbesondere sollte die Lösung eine für das Ausgangsproblem zulässige Lösung sein. Das beschränkte Optimierungsproblem (2.11) wird also durch ein unbeschränktes Problem approximiert und es wird folgendes unbeschränktes Optimierungsprobleme gelöst

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} Q(x; \sigma). \quad (2.29)$$

$\sigma > 0$ ist der sogenannte Strafparameter, der die Gewichtung der Restriktionen im Penalty-Problem bestimmt. Je größer dieser Koeffizient ist, desto stärker wird eine Verletzung der Restriktionen bestraft.

Die Konvergenz des Verfahrens gegen ein lokales Minimum von beliebigen Startnäherung x_0 aus wird durch sukzessives Verringern der Straffunktion erzielt. Entsprechende Verfahren werden in nächsten Abschnitt 2.2.4 beschrieben.

Eine geeignete Straffunktion Q muss ein Verletzen der Restriktionen, also unzulässige Punkte, mit einem positiven Wert bestrafen und sobald ein Punkt zulässig

ist, sollte die Strafe Null sein. Bei Beschränkungen der Form $c_i(x) = 0, i \in \mathcal{E}$ kann eine Straffunktion folgendermaßen definiert werden:

$$Q(x; \sigma) = f(x) + \sigma \sum_{i \in \mathcal{E}} \psi(c_i(x)), \quad (2.30)$$

wobei ψ eine stetige Funktion ist, die folgende Eigenschaften erfüllt [BSS06]:

$$\psi(z) = 0, \text{ falls } z = 0 \quad \psi(z) > 0, \text{ falls } z \neq 0. \quad (2.31)$$

Eine oft verwendete Straffunktionen ist die ursprünglich von Courant vorgeschlagene quadratische Straffunktion [Cou43]

$$Q(x; \sigma) = f(x) + \sigma \sum_{i \in \mathcal{E}} c_i^2(x). \quad (2.32)$$

Offensichtlich erfüllt die quadratische Penalty-Funktion die Bedingungen (2.31). Aber die quadratische Straffunktion ist nicht exakt, das heißt das Minimum des unbeschränkten Optimierungsproblems (2.29) ist im Allgemeinen nicht das gleiche wie das Minimum des Ausgangsproblems (2.11), unabhängig von der Wahl des Strafparameters σ [NW06]. Der Strafparameters σ muss gegen unendlich konvergieren, damit das Penaltyproblem gegen die Lösung des Ausgangsproblems (2.11) konvergiert [LM10].

Eine Klasse der exakten Penalty-Funktionen kann folgendermaßen definiert werden:

$$Q(x; \sigma) = f(x) + \sigma \|c_{\mathcal{E}}(x)\|, \quad (2.33)$$

wobei $\|\cdot\|$ eine beliebige Vektornorm ist und mit $c_{\mathcal{E}}$ die in Vektoren angeordneten Gleichungsrestriktionen bezeichnet werden. Nocedal und Wright zeigen, dass dieser Typ Straffunktion unabhängig von der Wahl der Norm exakt ist [NW06]. Das heißt, dass ein endliches σ^* existiert, so dass die lokalen Minima des Ausgangsproblems (2.11) auch lokale Minima des Penalty-Problems (2.29) sind, falls $\sigma > \sigma^*$. Außerdem zeigen sie, dass exakte Straffunktionen dieses Typs grundsätzlich nicht glatt sind. In der Praxis werden meist die ℓ_1 , ℓ_2 und die ℓ_∞ -Norm verwendet:

$$Q_1(x; \sigma) = f(x) + \sum_{i \in \mathcal{E}} |c_i(x)| \quad (2.34a)$$

$$Q_2(x; \sigma) = f(x) + \sqrt{\sum_{i \in \mathcal{E}} c_i^2(x)} \quad (2.34b)$$

$$Q_\infty(x; \sigma) = f(x) + \max_{i \in \mathcal{E}} c_i(x). \quad (2.34c)$$

Zusätzlich kann mithilfe des Strafparameters σ und der zu $\|\cdot\|$ dualen Norm die Lagrangeparameter des Ausgangsproblems (2.11) abgeschätzt werden (vergleiche unter anderem [LM10], [Fle87]):

$$\sigma^* > \|\lambda^*\|_D. \quad (2.35)$$

Viele Penalty-Verfahren lösen eine Folge unbeschränkter Optimierungsprobleme (2.29)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x_k) + \sigma_k Q(x_k),$$

mit wachsendem Strafparameter σ_k . Ein großer Strafparameter sorgt dafür, dass die Lösung von (2.29) näher an der zulässigen Menge des ursprünglichen Problems (NLP) liegt. Problematisch an großen Strafparametern ist aber, der Einfluss der tatsächlichen Zielfunktion auf die Lösung im geringer wird. Außerdem sind Probleme mit großen Parametern in der Regel schlecht konditioniert. Moderne Verfahren steuern den Strafparameter abhängig vom Verlauf der Iterationen. Dieser wird dann adaptiv vom vorhergesagten und tatsächlichen Abstieg in der Penaltyfunktion gesetzt [LM10].

Eine Schwierigkeit bei den Penalty-Methoden ist es, dass in jeder Iteration eine unbeschränkte, aber nicht differenzierbare, nichtlineare Funktion minimiert werden muss. Zum Einen kann dies mit Methoden der nichtdifferenzierbaren Optimierung, wie z. B. den Bundle-Methoden [Fra02], [FK00], [HUL01] geschehen. Ein anderer Ansatz approximiert das Problem (2.29) mit einem beschränkten quadratischen Problem [NW06] und löst dieses.

2.2.3.2 Filter-Methoden

Filter-Methoden benutzen eine andere Strategie als die Penalty-Verfahren. Hier werden die beiden Hauptziele der nichtlinearen Optimierung, das Vermindern der Zielfunktion sowie das Erfüllen der Nebenbedingungen nicht zusammen betrachtet und letztendlich auch kombiniert reduziert, sondern getrennt voneinander [NW06]. Als ein Maß für die Unzulässigkeit definieren wir uns

$$h(x) := \|c(x)\|, \quad (2.36)$$

wobei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm ist. Filter-Methoden verfolgen also die folgenden beiden Ziele:

$$\min_x f(x) \quad \text{und} \quad \min_x h(x). \quad (2.37)$$

Um die Filtermethoden beschreiben zu können benötigen wir zunächst den Begriff der Dominanz [FL02]

Definition 2.14 (Dominanz)

Ein Paar $(f(x), h(x))$ dominiert ein anderes Paar $(f(y), h(y))$, genau dann wenn $f(x) \leq f(y)$ und $h(x) \leq h(y)$.

Bezüglich der beiden Ziele (2.37) bedeutet Dominanz, das der Punkt x nicht schlechter als der Punkt y ist. Ein Filter besteht aus eine Menge von Paaren die in dieser Hinsicht nicht schlechter sind, als alle anderen Paare die im Filter enthalten sind. Formal bedeutet dies [FL02]:

Definition 2.15 (Filter)

Sei \mathcal{F} eine Indexmenge. Ein Filter ist eine Liste von Paaren $(f(x_l), h(x_l))$, $l \in \mathcal{F}$, so dass kein Paar ein anderes dominiert.

Ein Punkt x heißt für den Filter akzeptabel, wenn er von keinem Punkt im Filter dominiert wird.

Wird nun im Laufe eines Algorithmuses zur Lösung von (2.11) eine Iterierte x_k akzeptiert, so wird der Filter \mathcal{F}_k aktualisiert. Das Paar (f_k, h_k) wird zu \mathcal{F}_k hinzugefügt und alle von (f_k, h_k) dominierten Paare aus dem Filter entfernt.

In Abbildung 2.1 ist das Filterkonzept in der (f, h) -Ebene graphisch dargestellt. Jedes im Filter enthaltene Paar erzeugt eine (unendlich große rechteckige) Region von ihm dominierter Punkte. Die Vereinigung dieser Regionen aller im Filter enthaltenen Paare stellt den für den Filter nicht akzeptablen Bereich dar. In der Abbildung ist dies der Bereich oberhalb der gestrichelten Linie, so dass das Paar (f_2, h_2) nicht vom Filter akzeptiert wird. Andererseits wird das Paar (f_1, h_1) vom Filter akzeptiert, da es von keinem Paar im Filter akzeptiert wird. Insgesamt sind alle Paare unterhalb der gestrichelten Linie für den Filter akzeptabel.

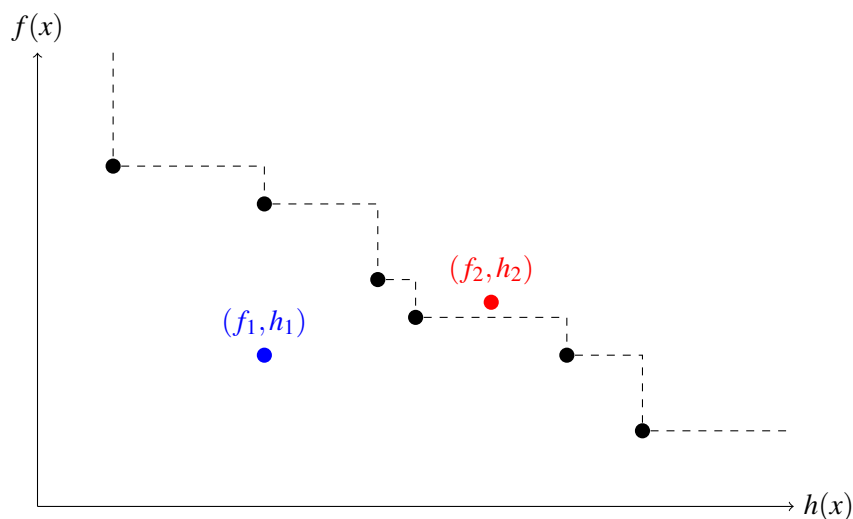


Abbildung 2.1: Veranschaulichung eines Filters: Das Paar (f_1, h_1) wird vom Filter akzeptiert, das Paar (f_2, h_2) nicht.

Damit eine Filtermethode von einer beliebigen Startnäherung x_0 aus gegen ein lokales Minimum konvergiert, muss diese Strategie noch etwas verfeinert werden.

Zum Einen muss sicher gestellt werden, dass eine vom Filter akzeptierte Iterierte x_k eine ausreichende Verbesserung bezüglich der Filterkriterien beinhaltet. Dies können wir erreichen, indem wir verlangen, dass eine Iterierte x_k nur dann für den Filter akzeptabel ist, falls

$$f(x_k) \leq f_l - \beta h_l \quad \text{und} \quad h(x_k) \leq h_l - \beta h_l, \quad (2.38)$$

für ein $\beta \in (0, 1)$ und $l \in \mathcal{F}_k$ [NW06].

Weiterhin kann es im Laufe des Algorithmuses passieren, dass mit einem Globalisierungsmechanismus aus Abschnitt 2.2.4 nur sehr kleine Schrittweiten erzeugt werden können, so dass die nächste Iterierte vom Filter akzeptiert wird. Das kann dazu führen, dass der Algorithmus stagniert und keine optimale Lösung findet. Viele Filter-Algorithmen vermeiden dies, indem sie bei zu kurzen Schrittweiten in eine sogenannte Restorations-Phase schalten, die ausschließlich die Verletzung der Restriktionen reduziert und folgendes Problem approximativ löst [NW06], [FL02], [WB06]:

$$\min_x h(x). \quad (2.39)$$

Wie schon bei den Penalty-Methoden sind diese Probleme in der Regel nicht differenzierbar und können entweder mit entsprechenden Algorithmen für nichtdifferenzierbare Probleme gelöst werden, oder (wie in der Regel üblich) mithilfe von glatten Approximationen.

2.2.4 Globalisierungsmechanismen

In diesem Abschnitt betrachten wir sogenannte Globalisierungsmechanismen, die den vom lokalen Modell berechneten Schritt ggf. so reduzieren, so dass eine beliebige Globalisierungsstrategie eingehalten wird und der Gesamtalgorithmus global konvergiert.

Die beiden hier vorgestellten Konzepte, die Line-Search und der Trust-Region-Ansatz können auf alle Strategien und lokalen Modelle aus den vorherigen Abschnitten verwendet werden. Beide Methoden stellen die Konvergenz der Globalisierungsstrategien sicher, indem sie den vom lokalen Modell bestimmten Schritt s so verkürzen, dass ein ausreichender Abstieg gewährleistet ist.

Line-Search-Methoden

Die Line-Search-Methoden bestimmen entlang der vom lokalen Modell, also der Inneren-Punkte-Methode oder dem SQP-Verfahren, gegebenen Suchrichtung s eine geeignete Schrittweite α , die bestimmten Abstiegsriterien genügt. Damit eine Line-Search in jedem Fall eine Schrittweite findet, so dass ein ausreichender Abstieg erzielt wird, muss die Schrittweite eine Abstiegsrichtung bezüglich der gewählten Globalisierungsstrategie sein.

Bei der Berechnung der Schrittweite α_k sehen wir uns zwei konkurrierenden Zielen gegenüber: Zum Einen wollen wir ein α_k berechnen, so dass ein möglichst großer Abstieg erzielt wird, andererseits wollen wir nicht zu viel Zeit auf die Bestimmung der Schrittweite verwenden, da diese Berechnung nur ein Teil des Gesamtalgorithmuses ist und die Berechnung in jedem Iterationsschritt durchgeführt werden muss.

Idealerweise wollen wir das globale Minimum einer Funktion $\phi(\cdot)$ finden, wobei ϕ z. B. eine Straf- oder Gütefunktion entlang der Suchrichtung s_k ist:

$$\phi(\alpha) = \phi(x_k + \alpha s_k) = Q(x_k + \alpha s_k; \sigma), \quad \alpha > 0. \quad (2.40)$$

Auch für Filter-Methoden kann eine Line-Search durchgeführt werden. Anstatt den Abstieg der Straffunktion zu überprüfen, wird die Akzeptanz bezüglich eines Filters getestet. Allerdings ist bei Filtern üblicherweise die Definition von Abstieg nicht so einfach wie bei Penalty-Ansätzen [LM10].

Im Allgemeinen ist selbst das Bestimmen eines lokalen Minimums sehr aufwendig, da ein ähnliches Problem wie im lokalen Modell gelöst werden muss. Daher werden in der Praxis meist inexakte Line-Search-Strategien verwendet, die mit relativ wenig Aufwand einen ausreichenden Abstieg von ϕ bestimmen. Sie testen eine Folge von geeigneten Kandidaten und brechen ab, sobald eine Schrittweite gewissen Bedingungen genügt [NW06]. Typische Line-Search-Methoden bestimmen die Schrittweite in zwei Phasen: Zunächst wird ein Intervall festgelegt, in dem eine adäquate Schrittweite liegt und anschließend wird innerhalb dieses Intervalls eine konkrete Schrittweite berechnet.

Zunächst geben wir einige Kriterien an, die einen ausreichenden Abstieg bei der Line-Search garantieren. Eine weit verbreitete Bedingung bei Line-Search-Verfahren ist die sogenannte Armijo-Bedingung:

$$\phi(x_k + \alpha s_k) \leq \phi(x_k) + c_1 \alpha (\nabla \phi(x_k))^T s_k, \quad (2.41)$$

wobei $c_1 \in (0, 1)$. Die Armijo-Bedingung besagt, dass eine Schrittweite dann akzeptable ist, wenn $\phi(\alpha)$ unterhalb einer Geraden liegt, deren Steigung ein Vielfaches der Richtungsableitung ist in $\alpha = 0$ ist. Es genügt aber nicht zu fordern, dass der Abstieg ausreichend ist, da ansonsten sehr kurze Schrittweiten akzeptiert werden könnten. Um dies zu verhindern gibt es zwei gängige Konzepte.

Eine Möglichkeit ist es zu fordern, dass die Steigung an der Stelle α größer ist als ein Vielfaches der Steigung an der Stelle $\alpha = 0$. Durch diese sogenannte Krümmungsbedingung werden sehr kurze Schrittweiten verhindert und zusätzlich auch Schrittweiten verhindert, an denen die Funktionen noch sehr stark fällt. Formal lässt sich diese Bedingung folgendermaßen formulieren:

$$\nabla \phi(x_k + \alpha s_k)^T s_k \geq c_2 (\nabla \phi(x_k))^T s_k, \quad (2.42)$$

wobei $c_2 \in (c_1, 1)$ und c_1 die Konstante aus der Armijo-Bedingung (2.41) ist.

Die Armijo- und die Krümmungsbedingung ergeben zusammen die sogenannten Wolfe-Bedingungen. Sie sind in Abbildung 2.2 veranschaulicht.

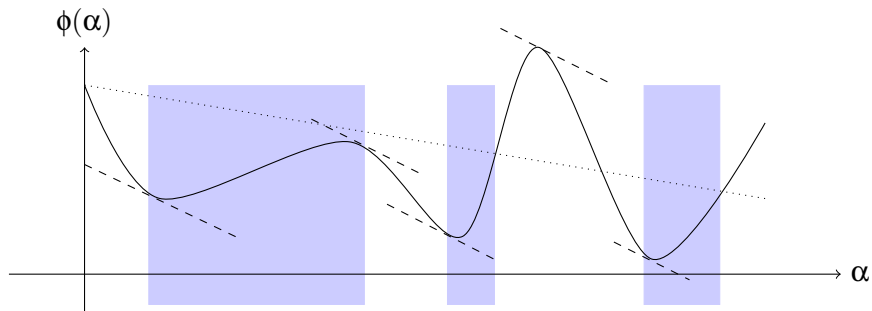


Abbildung 2.2: Veranschaulichung der Wolfe-Bedingungen, akzeptable Schrittweiten sind blau hinterlegt

Eine weitere häufig verwendete Bedingung um einen ausreichenden Abstieg zu garantieren und um zu kurze Schrittweiten zu vermeiden ist die sogenannte Goldstein-Bedingung:

$$\begin{aligned}
 & \phi(x_k) + (1 - c)\alpha(\nabla\phi(x_k))^T s_k \\
 & \leq \phi(x_k + \alpha s_k) \\
 & \leq \phi(x_k) + c\alpha(\nabla\phi(x_k))^T s_k,
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

mit $c \in (0, \frac{1}{2})$. Die zweite Ungleichung ist die Armijo-Bedingung und stellt einen ausreichenden Abstieg sicher. Die erste Ungleichung verhindert zu kurze Schrittweiten, indem die Funktionswerte von ϕ oberhalb einer Geraden liegen müssen. Insbesondere verläuft diese Gerade in der Umgebung von $\alpha = 0$ oberhalb ϕ . Die Goldsteinbedingungen sind in Abbildung 2.3 veranschaulicht.

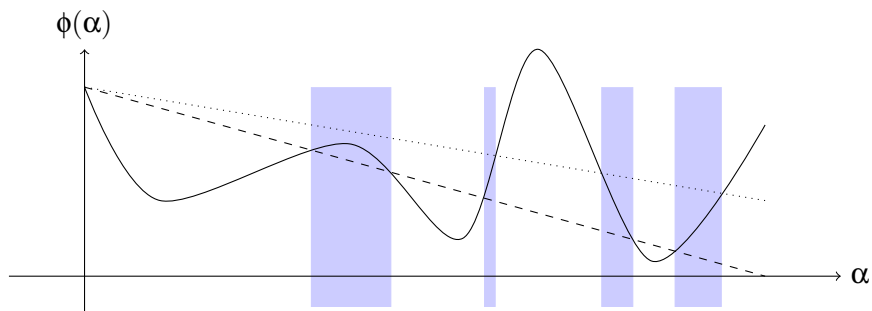


Abbildung 2.3: Veranschaulichung der Goldstein-Bedingungen, akzeptable Schrittweiten sind blau hinterlegt

Beide Bedingungen besagen, dass zwar auf der einen Seite die Abnahme von ϕ groß genug sein muss, damit das Verfahren möglichst rasch konvergiert, jedoch auf der anderen Seite nicht zu klein werden darf, um die Konvergenz gegen einen stationären Punkt nicht zu unterbinden, also um zu verhindern, dass der Algorithmus

stecken bleibt. Die Konvergenztheorie ist für beide Ansätze ähnlich, die Goldstein-Bedingungen haben aber den Nachteil gegenüber den Wolfe-Bedingungen, dass unter Umständen durch die erste Ungleichung in (2.43) alle Minima von ϕ ausgeschlossen werden können [NW06].

Ein weiterer in Praxis sehr verbreiteter Ansatz ist das sogenannte Backtracking, da hier nur die Armijo-Bedingung überprüft werden muss und somit der Rechenaufwand sehr gering ist. Im einfachsten Fall wird eine Ausgangsschrittlänge $\bar{\alpha}$ so lange um einen Faktor ρ verringert bis eine akzeptable Schrittlänge gefunden wurde (siehe auch Algorithmus 2.4).

Algorithmus 2.4 Backtracking Line-Search

- 1: Wähle $\bar{\alpha} > 0$, $\rho \in (0, 1)$, $c \in (0, 1)$
 - 2: setze $\alpha = \bar{\alpha}$
 - 3: **repeat**
 - 4: $\alpha = \rho\alpha$
 - 5: **until** $\phi(x_k + \alpha s_k) \leq \phi(x_k) + c\alpha(\nabla\phi(x_k))^T s_k$
 - 6: $\alpha_k = \alpha$ ist eine akzeptable Schrittweite
-

Der Algorithmus 2.4 beschreibt eine sehr einfache Form des Backtracking. In der Praxis wird der Reduktionsfaktor ρ häufig adaptiv gewählt. Eine detaillierte Beschreibung findet man z. B. in [NW06]. Bei diesem Ansatz ist aufgrund der monoton fallenden Schrittlängen sichergestellt, dass die Armijo-Bedingung nach endlich vielen Iterationen erfüllt ist.

Trust-Region-Methoden

Trust-Region-Methoden beschränken die Schrittlänge, die vom lokalen Modell berechnet wird, explizit. Sie fügen dem lokalen Modell eine Beschränkung hinzu, die die Schrittlänge so begrenzt, dass sie innerhalb eines Bereichs bleibt, in welchem dem lokalen Modell vertraut wird. Die Restriktion hat die Form $\|s_k\| \leq \Delta_k$, wobei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm ist. Viele Verfahren verwenden die ℓ_∞ -Norm, da sie als Schranken an Variablen beschrieben werden kann [LM10].

Der Trust-Region-Radius $\Delta_k > 0$ kann in jedem Iterationsschritt adaptiv angepasst werden, abhängig davon inwiefern das lokale Modell mit der tatsächlichen Optimierungsproblem (2.11) übereinstimmt.

Kapitel 3

Nichtlineare gemischt-ganzzahlige Optimierungsprobleme

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit allgemeinen gemischt-ganzzahligen Optimierungsproblemen und der Lösung von Problemen dieser Klasse. Ziel dieses Abschnitts ist es einen Überblick über die verschiedenen Lösungsverfahren zu geben und die Komplexität dieser Probleme zu erläutern. Insbesondere konzentrieren wir uns auf die in dieser Arbeit benötigten Aspekte der gemischt-ganzzahligen Optimierung. Eine detaillierte Einführung Darstellung, Überblick und Lösungsverfahren findet man unter Anderem in [Flo95], [Now05] und [DA09].

Gemischt-ganzzahlige nichtlineare Optimierungsprobleme (MINLP) besitzen sowohl kontinuierliche als auch diskrete Entscheidungsvariablen. Die Restriktionen und die Zielfunktion sind in der Regel nichtlineare Funktionen. Mithilfe eines MINLP-Ansatzes können auf natürliche Weise Optimierungsprobleme formuliert werden, bei denen es notwendig ist die Struktur eines Systems zu optimieren (diskrete Entscheidungen) und gleichzeitig die Parameter (kontinuierliche Entscheidungen).

MINLP-Formulierungen werden in einem breiten Feld von Anwendungen genutzt. Dazu zählen die Modellierung und Optimierung chemischer Prozesse und optimales Design und operative Planung von Gas- und Wassernetzwerken. Aber auch in der Automobil- und der Flugzeugindustrie, der Finanzwirtschaft und weiteren Wirtschaftsbereichen treten Optimierungsprobleme auf die als MINLPs formuliert werden [BP03]. In [GS02a] und [GS02b] findet man eine Vielzahl von MINLP-Anwendungen.

Wir orientieren uns im Folgenden an der Darstellung von D'Ambrosio [DA09].

Die allgemeine Form eines gemischt-ganzzahligen Optimierungsproblems lautet

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x, y) \\ \text{subject to} \quad & c(x, y) \leq 0, \\ & x \in X \cap \mathbb{Z}^{n_x} \\ & y \in Y \end{aligned} \tag{3.1}$$

Die Funktion $f(x, y) : \mathbb{R}^{n_x \times n_y} \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine nichtlineare Zielfunktion und $c(x, y) : \mathbb{R}^{n_x \times n_y} \rightarrow \mathbb{R}^m$ die nichtlinearen Restriktionen. Die Variablen x und y sind die Entscheidungsvariablen, wobei $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ reelle Variablen sind und $x \in \mathbb{Z}^{n_x}$ ganzzahlig. X und Y beschreiben Polyeder geeigneter Dimension inklusive einfacher Beschränkungen an die Variablen x und y . Wir nehmen in diesem Kapitel an, dass die Funktionen f und c zweimal stetig differenzierbar sind.

Wir bezeichnen das Problem das entsteht, wenn wir in (3.1) die Ganzzahligkeitsbedingung der Variablen x relaxieren als kontinuierliche Relaxation von (3.1):

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x, y) \\ \text{subject to} \quad & c(x, y) \leq 0, \\ & x \in X \\ & y \in Y. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Hierbei handelt es sich um ein nichtlineares Optimierungsproblem, wie es in Kapitel 2 beschrieben wurde. Insbesondere besitzen diese Probleme in der Regel neben dem globalen Minimum auch lokale Lösungen. Sind f und c konvex (oder linear), so sind lokale Lösungen auch globale Lösungen.

Um die grundlegenden Ideen zur Lösung allgemeiner, das heißt nicht-konvexer MINLPs besser zu verstehen, betrachten wir zunächst gemischt-ganzzahlige konvexe Probleme. Anschließend beschreiben wir Verfahren zur Lösung allgemeiner MINLPs.

3.1 Konvexe gemischt-ganzzahlige Optimierungsprobleme

Die verschiedenen Algorithmen zur Lösung konvexer gemischt ganzzahliger Optimierungsprobleme unterscheiden sich insbesondere darin, wie die zu lösenden Teilprobleme definiert und verwendet werden. Im Folgenden stellen wir die am häufigsten verwendeten Ansätze zur Lösung konvexer MINLPs in Kürze vor. Eine detaillierte Darstellung dieser Ansätze findet man zum Beispiel in der Arbeit von Grossmann [Gro02].

Wir betrachten in diesem Abschnitt ein konvexes nichtlineares gemischt-ganzzahliges Optimierungsproblem der Form

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x, y) \\ \text{subject to} \quad & c(x, y) \leq 0, \\ & x \in X \cap \mathbb{Z}^{n_x} \\ & y \in Y, \end{aligned} \tag{3.3}$$

wobei f und c konvexe Funktionen sind.

Branch-and-Bound

Diese Methode wurde ursprünglich entwickelt um gemischt-ganzzahlige lineare Probleme (MILP) zu lösen, wurde aber von Gupta and Ravindran erweitert, so dass allgemeine konvexe MINLP zu gelöst werden können [GR85].

Wir betrachten zunächst ein allgemeines lineares gemischt-ganzzahliges Optimierungsproblem der Form

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x + d^T y \\ \text{subject to} \quad & Ax + By \leq b, \\ & x \in X \cap \mathbb{Z}^{n_x} \\ & y \in Y. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Im ersten Schritt wird eine die kontinuierliche Relaxation des Problems (3.4) gelöst, also

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x + d^T y \\ \text{subject to} \quad & Ax + By \leq b, \\ & x \in X \\ & y \in Y. \end{aligned} \tag{3.5}$$

In der optimalen Lösung (x^*, y^*) dieses Problems ist x^* in der Regel nicht ganzzahlig und daher nicht optimal bezüglich des Ausgangsproblems (3.4). Sei x_j^* ein beliebiger nicht-ganzzahliger Eintrag in x^* . Das Problem wird nun in zwei Teilprobleme zerlegt. Dem ersten Problem wird die Restriktion $x_j \leq \lfloor x_j^* \rfloor$ hinzugefügt, dem zweiten Problem die Restriktion $x_j \geq \lfloor x_j^* \rfloor + 1$. Diese neuen Restriktionen stellen jeweils eine "Branching-Entscheidung" dar, da die Partition des Ausgangsproblems in Teilprobleme durch eine Baum-Struktur dargestellt werden kann, dem Branch-and-Bound-Baum. Jedes der Teilprobleme wird durch einen Knoten k im Baum repräsentiert und hat die Form

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x + d^T y \\ \text{subject to} \quad & Ax + By \leq b, \\ & x \in X \\ & y \in Y \\ & l^k \leq x \leq u^k, \end{aligned}$$

wobei l^k und u^k die Branching-Entscheidungen in diesem Knoten beschreiben. Dieser Prozess wird so lange fort geführt, bis eine der drei folgenden Fälle eintritt. Die Lösung der kontinuierlichen Relaxation ist bezüglich des Ausgangsproblems (3.4) zulässig, das heißt x^* ist ganzzahlig. Das Problem besitzt keine zulässigen Lösungen, ist also nicht lösbar. Oder die untere Schranke des Teilproblems größer als die bisher bestimmte beste zulässige Lösung. In diesen drei Fällen wird im aktuellen Knoten nicht weiter verzweigt, das heißt es wird kein Problem der darüber

liegenden Knoten mehr ausgewertet. Der Algorithmus bricht ab, wenn keine Knoten mehr auszuwerten sind. Diese bisher beste berechnete Lösung ist beweisbar die optimale Lösung.

Auf dieser Strategie bauen die Algorithmen zur Lösung konvexer nichtlinearer gemischt-ganzzahliger Probleme auf. Der grundlegende Unterschied zu linearen Fall ist, dass in jedem Knoten zunächst ein kontinuierlich relaxiertes lineares Teilproblem gelöst wird und anschließend eine kontinuierlich relaxiertes NLP. Wir beschreiben diesen Ansatz nicht im Detail und verweisen auf die Artikel [GR85], [Gro02] und [BBC⁺08].

Äußere Approximation

Das Verfahren der äußeren Approximation wurde von Duran and Grossman [DG86] vorgestellt. Es nutzt eine lineare äußere Approximation der Restriktionen, so dass keine Lösung des MINLPs abgeschnitten wird. Das iterative Verfahren löst in jeder Iteration k eine Linearisierung von (3.3), also ein lineares gemischt-ganzzahliges Teilproblem (MILP) der Form

$$\begin{aligned}
 \min \quad & z \\
 \text{subject to} \quad & f(x^k, y^k) + \nabla f(x^k, y^k)^T \begin{bmatrix} x - x^k \\ y - y^k \end{bmatrix} \leq z \\
 & c(x^k, y^k) + \nabla c(x^k, y^k)^T \begin{bmatrix} x - x^k \\ y - y^k \end{bmatrix} \leq 0 \\
 & x^k \in X \cap \mathbb{Z}^{n_x} \\
 & y^k \in Y.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Es wurde eine Hilfsvariable z eingeführt, so dass die ursprüngliche Zielfunktion als Restriktion behandelt werden kann. Die Zielfunktion ist nun linear. (x^k, y^k) sind bestimmte Werte von x und y . Die originalen Restriktionen werden durch Linearisierungen ersetzt, die auch "Outer Approximation Cuts" genannt werden.

Außerdem wird ein NLP-Teilproblem von (3.3) gelöst:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & f(x^k, y) \\
 \text{subject to} \quad & c(x^k, y) \leq 0, \\
 & y \in Y
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Der Vektor x^k in Problem (3.7) stammt aus der Lösung von (3.6) und ist fixiert. Das Teilproblem (3.7) liefert eine obere Schranke für das Ausgangsproblem (3.3) und das linearisierte Problem aufgrund der äußeren Approximation eine untere Schranke. Diese Schranken können in jeder Iteration verbessert werden. Insbesondere verändert sich in jeder Iteration das Problem (3.6) aufgrund der Linearisierungsstrategie, die die Lösung der vorherigen Iteration abschneiden. Der Algorithmus terminiert, wenn beide Schranken denselben Wert annehmen.

Verallgemeinerte Bender Dekomposition

Die Bender Dekomposition wurde zunächst für MILP entwickelt und später von Geoffrion auf konvexe MINLP erweitert [DA09]. Sie ähnelt sehr stark der äußeren Approximation unterscheidet sich aber in der Form des in jeder Iteration zu lösenden MILP-Teilproblems. Das gemischt ganzzahlige Teilproblem ist eine Relaxierung der "Outer Approximation Cuts". Die von der äußeren Approximation erzeugte untere Schranke ist schärfer, also größer gleich der hier generierten unteren Schranke (vgl. [DG86]). Daher werden in der Regel mehr Iterationen benötigt, um eine Lösung für das Ausgangsproblem (3.3) zu bestimmen, aber die von diesem Ansatz erzeugten MILPs sind in der Regel einfacher zu lösen, als die der äußeren Approximation. Es gibt als einen Tradeoff bezüglich der Anzahl Iterationen und dem Aufwand in jeder Iteration, so dass abhängig vom spezifischen Problem einer der beiden Ansätze geeigneter sein kann.

Extended Cutting Plane

Dieses Verfahren basiert auf einer iterativen Verfeinerung der MILP-Teilprobleme und wurde von Westerlund and Pettersson entwickelt [WP95]. In jeder Iteration k wird mithilfe der Lösung (x^k, y^k) des jeweiligen Teilproblems diejenige Restriktion des Ausgangsproblems bestimmt, die am stärksten verletzt ist und deren Linearisierung dem MILP hinzugefügt. Dadurch wird in jeder Iteration eine untere Schranke bestimmt, die in jeder Iteration verbessert wird. Im Allgemeinen werden aber eine große Anzahl Iterationen benötigt, bis eine optimale Lösung gefunden wird [DA09].

LP/NLP basiertes Branch-and-Bound

Die Idee bei diesem Ansatz ist es, das Ausgangsproblem mithilfe der Branch-and-Bound-Methode zu lösen, aber die entstehenden MILP nicht mehrmals, sondern nur einmal lösen zu müssen. Dies ist möglich, falls in jedem Knoten, in dem eine ganzzahlige zulässige Lösung gefunden wird, das NLP-Teilproblem (3.7) gelöst wird:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x^k, y) \\ \text{subject to} \quad & c(x^k, y) \leq 0, \\ & y \in Y. \end{aligned}$$

Anschließend werden "Outer Approximation Cuts" erzeugt und den noch zu lösenden MILPs des Branch-and-Bound-Baums hinzugefügt.

Eine wichtige Rolle zur Lösung konvexer MINLPs spielen Heuristiken, die gute Startnäherungen bestimmen und insbesondere die ganzzahligen Variablen bestimmen, so dass der Branch-and-Bound-Baum möglichst klein ist und möglichst wenig Schnitte benötigt werden, um die mithilfe der oben genannten Methoden die global optimale Lösung zu finden. Eine Übersicht über verschiedene Heuristiken findet man beispielsweise in [FG06], [BG08] und [BCLM09].

3.2 Allgemeine gemischt-ganzzahlige Optimierungsprobleme

In diesem Abschnitt setzen wir nicht mehr voraus, dass f und c konvexe Funktionen sind, sondern betrachten ein allgemeines gemischt-ganzzahliges Optimierungsproblem der Form (3.1)

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x,y) \\ \text{subject to} \quad & c(x,y) \leq 0, \\ & x \in X \cap \mathbb{Z}^{n_x} \\ & y \in Y. \end{aligned}$$

Die kontinuierliche Relaxation von (3.1) ist nichtlineares Optimierungsproblem, wie es in Kapitel 2 beschrieben wurde. Die Lösungsalgorithmen dieser Probleme finden im Allgemeinen lokale Minima, deren Zielfunktionswert zum Teil erheblich vom Zielfunktionswert des globalen Minimums abweichen kann. Würde man nun ein Verfahren zur Lösung konvexer MINLPs auf ein allgemeines gemischt-ganzzahliges Optimierungsproblem angewenden, so kann es sein, dass aufgrund der lokalen Minima zulässige Lösungen und darunter auch die optimale Lösung abgeschnitten werden. Das ist zum Beispiel der Fall, wenn in einem Knoten eine untere Schranke für das Gesamtproblem aufgrund eines lokalen Minimums des entsprechenden NLPs gesetzt wird. Dies ist insbesondere bei den *Branch-and-Bound* basierten Verfahren der Fall. Bei der *Äußeren Approximation*, der *Extended Cutting Plane* und der *Verallgemeinerte Bender Dekomposition* sind die Linearisierungen im Allgemeinen für nichtlineare Restriktionen nicht gültig. Das bedeutet, dass die Linearisierung zulässige Lösungen abschneiden [DA09].

Eine Möglichkeit allgemeine nichtkonvexe MINLPs zu lösen ist der Ansatz der *exakten Umformulierung*. Hier wird versucht ein allgemeines MINLP der Form (3.1) als ein konvexes Problem (3.3) zu formulieren. Das umformulierte Problem kann dann mit einem der Verfahren aus dem vorherigen Abschnitt gelöst werden. Da das Problem bei dieser Umformulierung nicht verändert werden soll, kann diese Methode nur auf eine sehr begrenzte Anzahl von MINLPs angewendet werden. Details zu diese Methode findet man zum Beispiel in [Lib04].

Ein weiterer Ansatz basiert auf der Idee der *konvexen Unterschätzer* der zulässigen Menge. Insbesondere liefert dieser Ansatz eine untere Schranke für das nichtkonvexe MINLP, die dann von zum Beispiel *Branch-and-Bound* basierten Verfahren genutzt werden kann.

Die Idee der konvexen Unterschätzer basiert auf einer Relaxation des Ausgangsproblems (3.1). Diese Relaxation hat die Form

$$\begin{aligned} \min \quad & z \\ \text{subject to} \quad & \bar{f}(x,y) \leq z \\ & \bar{c}(x,y) \leq 0, \\ & x \in X \cap \mathbb{Z}^{n_x} \\ & y \in Y. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Durch das Einführen der zusätzlichen Variable z erhält man eine lineare und damit auch konvexe Zielfunktion. Die Funktionen \bar{f} und \bar{c} sind konvex und es gilt $\bar{f}(x, y) \leq f(x, y)$ sowie $\bar{c}(x, y) \leq c(x, y)$ für alle $(x, y) \in X \cap \mathbb{Z}^{n_x} \times Y$. Untersuchungen dazu, wie die Funktionen \bar{f} und \bar{c} definiert werden können, findet man unter Anderem in [Lib04] und [Now05]. Diese Technik kann im Allgemeinen ausschließlich auf Funktionen angewendet werden, die durch Summen bzw. Produkte univariater Funktionen dargestellt werden können [DA09].

Durch diesen Ansatz wird die zulässige Menge erweitert. Daraus ergibt sich insbesondere, dass ein für (3.8) unzulässiger Punkt für das nicht-konvexe Ausgangsproblem ebenfalls unzulässig ist. Ist eine optimale Lösung des Problems (3.8) für das (3.4) zulässig, so ist sie globales Minimum für dieses Problem. Ist eine optimale Lösung von (3.8) für (3.4) unzulässig, so muss der konvexe Unterschätzer verbessert werden, d.h. näher an der tatsächlichen zulässigen Menge liegen. Dies kann durch ein zusätzliches Branching erreicht werden, wobei dieses nicht auf ganzzahlige Variablen beschränkt sein muss. Insbesondere bleibt die Konvexität erhalten, so das weiterhin Verfahren für konvexe Probleme verwendet werden können. In [DA09] und [Now05] sind diese Verfahren im Detail beschrieben.

Durch die iterative Verbesserung der konvexen Unterschätzer ist diese Verfahrensweise sehr zeit- und rechenintensiv. Insbesondere bedeutet dies, dass zur Zeit keine Implementierungen allgemeiner Lösungsverfahren existieren, die Probleme mit einer großen Anzahl Variablen und Restriktionen in adäquater Zeit lösen oder überhaupt eine Lösung finden. Insbesondere ist dies der Fall, wenn die Probleme nicht konvex vorliegen. Details zu verschiedenen Implementierungen findet man unter Anderem in [BP03] und [BV10].

Kapitel 4

Das Abwassersystem

In den folgenden Abschnitten beschreiben wir das zugrundeliegende Abwassersystem und die für das Optimierungsmodell benötigten hydraulischen Zusammenhänge. Das hier betrachtete Abwassersystem besteht aus drei Teilsystemen, dem Kanalnetz, dem Abwasserdruckleitungsnetz (ADL-Netz) und den Klärwerken. Das Kanalnetz besteht im wesentlichen aus Misch- und Trennwasserkanalsystemen, verschiedenen Typen von Rückhaltebecken zum Einstauen von Abwasser, die über Überläufe verschiedener Bauarten und Pumpen miteinander verbunden sind. In Kapitel 4.1 beschreiben wir die Bauwerke des Kanalnetzes im Detail.

In Abschnitt 4.2 werden die Komponenten des ADL-Netzes beschrieben. Das ADL-Netz ist ein Druckleitungsnetzwerk, das das Kanalnetz mit den Klärwerken verbindet. Mit dem Kanalnetz ist das ADL-Netz über sogenannte Pumpwerke verbunden. Der Übergang zu den Klärwerken erfolgt über ausgewiesene Stellen im ADL-Netz. Die Klärwerke entnehmen dem ADL-Netz Abwasser, reinigen es und geben dieses dann in die Umwelt ab. Die Modellierung der Klärwerke beschreiben wir in Abschnitt 4.3.

4.1 Das Kanalnetz

Das Kanalnetz ist der Teil eines Abwassersystems, in dem das Abwasser meist gravitationsgetrieben in offenen Gerinnen abfließt. Das Kanalnetz besteht aus mehreren Teilnetzen. Man unterscheidet bei den Abwasserkanälen zwischen Misch- und Trennwassersystemen. Jedes Teilnetz besteht aus einem oder mehreren verzweigten Kanalsystemen, die am tiefsten Punkt ein gemeinsames Pumpwerk besitzen, welches das Teilnetz mit dem ADL-Netz verbindet. Die Kanalsysteme sind untereinander durch Drosseln, Überläufe oder Heber miteinander verbunden. Zudem gehören zu den Teilnetzen in der Regel Rückhaltebecken, sogenannte Stauraumkanäle und Regenüberlaufbecken in denen Abwasser zwischengespeichert werden kann. Diese sind über Überlaufbauwerke, wie interne Überläufe oder Heberbauwerke oder Pumpen mit den Abwasserkanälen verbunden. Außerdem besitzt jeder

Kanal und jedes Überlaufbauwerk mindestens einen Notauslass, Regenüberlauf oder Klärüberlauf, der das Teilnetz mit einem öffentlichen Gewässer verbindet, um im Haveriefall, wenn die Speicherkapazitäten der Kanäle und Rückhaltebecken nicht ausreichen, Abwasser kontrolliert in die Umwelt abgeben zu können. Abbildung 4.1 zeigt beispielhaft ein solches Teilnetz.

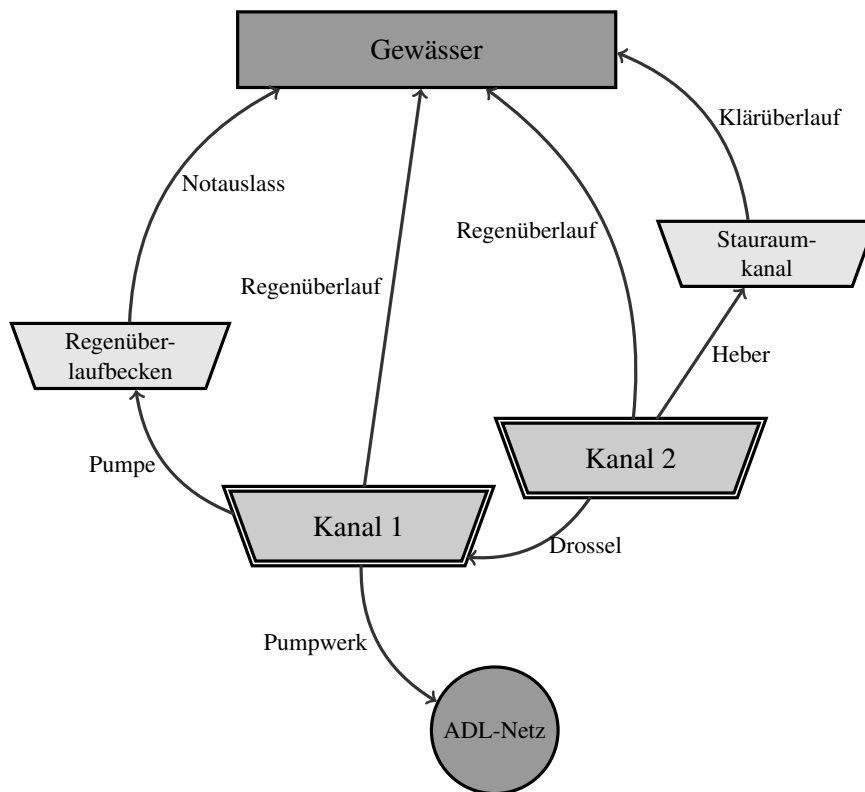


Abbildung 4.1: Beispiel für ein Teilnetz des Kanalnetzes

In den folgenden Abschnitten beschreiben wir detailliert die Eigenschaften der einzelnen Bauwerke der Kanalnetzes. Insbesondere werden die Speichereigenschaften und die Fließzustände in Abhängigkeit von Füllhöhe und Volumen in den Kanälen und deren zeitliche Änderungen untersucht. Zudem diskutieren wir die Eignung der einzelnen Gleichungen und Restriktionen für (gemischt-ganzzahlige) nichtlineare Optimierungsmodelle und passen die Modellierung gegebenenfalls in geeigneter Weise an.

4.1.1 Abwasserkanäle

Im Kanalnetz eines Abwassersystems gibt es zwei verschiedene Entwässerungssysteme. Zum Einen gibt es die sogenannten Trennsysteme und zum Anderen die sogenannten Mischsysteme.

Im Trennsystem werden Schmutz- und Regenwasser in zwei voneinander getrennten Kanalisationssystemen abgeleitet. Die Schmutzwasserkanäle leiten das häusliche, gewerbliche und industrielle Abwasser zu den Pumpwerken, die es dann in das ADL-Netz einspeisen und zu den Klärwerken fördern. Die Regenwasserkanäle nehmen die Niederschläge auf, die auf versiegelten Flächen anfallen, sowie Kühlwasser aus Betrieben oder das Wasser von Entwässerungsgräben. Dieses kaum verschmutzte Wasser wird dann entweder direkt oder über sogenannte Bodenfilter in das nächste öffentliche Gewässer eingeleitet [SEW08].

Im Mischsystem werden Schmutz- und Regenwasser gemeinsam in einem Kanal abgeleitet. Das Mischwasser wird dann wie das Schmutzwasser aus dem Trennsystem über die Pumpwerke und dem ADL-Netz einem Klärwerk zugeführt.

Die Schmutzwasserkanäle und die Mischkanäle verfügen jeweils über eine bestimmte Speicherkapazität, so dass sie im gewissen Maße Wasser zwischenspeichern können, falls dieses nicht in das ADL-Netz abgeführt werden kann oder soll. Wird die Speicherkapazität überschritten, so wird das Mischwasser bzw. Schmutzwasser über Entlastungsbauwerke, wie Notauslässe, Regen- und Klärüberläufe in ein naheliegendes Gewässer abgeführt [SEW08]. In den Mischsystemen befinden sich Entlastungskanäle (oder auch Stauraumkanäle) und Regenüberlaufbecken, die ebenfalls über Überläufe und Pumpen beschickt werden können und als Zwischenspeicher für das Mischwasser dienen. Diese werden, wie die Kanäle, bei Überschreiten der Speicherkapazität ebenfalls in die Umwelt entlastet.

Beiden Kanalsystemen wird exogen das Abwasser zugeführt. Der sogenannte Trockenzufluss Q^T besteht aus den Abwässern aus Haushalten, Gewerbe und Industrie, das in der Regel stark verschmutzt ist. Beim Regenzufluss Q^R handelt es sich um prognostizierte Regenzuflüsse die in dieser Arbeit als deterministisch angenommen werden. Die Daten liegen in der Regel zeitlich und örtlich aufgelöst in tabellarischer Form vor und müssen ggf. aufgearbeitet werden und dem Modell angepasst werden.

Eine wesentliche Eigenschaft aller Kanäle und Regenüberlaufbecken ist, dass die sogenannte Flussbilanz zu jedem beliebigen Zeitpunkt gilt. Insbesondere heißt das, dass kein Wasser "verschwinden" kann. Die Summe der Volumenströme aller Zuflüsse Z (inklusive Regen- und Trockenzuflüssen) abzüglich der Volumenströme der Abflüsse A in einem Zeitpunkt t ergibt die Volumenänderung:

$$\dot{V}(t) = \sum_{i \in Z} Q_i(t) - \sum_{i \in A} Q_i(t) \quad (4.1)$$

Das Volumen V in einem Kanal zum Zeitpunkt t ergibt sich aus dem Volumen eines früheren Zeitpunktes $s < t$ und dem Integral über die Zuflüsse minus der Abflüsse im Zeitraum $[s, t]$:

$$V(t) = V(s) + \int_s^t \left(\sum_{i \in Z} Q_i(\tau) - \sum_{i \in A} Q_i(\tau) \right) d\tau. \quad (4.2)$$

Die Speichereigenschaft jedes Misch- und Schmutzwasserkanals, sowie der Regenüberlaufbecken und Stauraumkanäle wird über eine spezifische Speicherkennlinie σ beschrieben, welche die Abhängigkeit des Wasserstands H vom Volumen V des Wasserinhalts angibt. Für die Speicherkennlinien des Kanalnetzes gibt es keinen funktionalen Zusammenhang, sondern sie liegen ausschließlich in Form von gemessenen Datenpaaren vor.

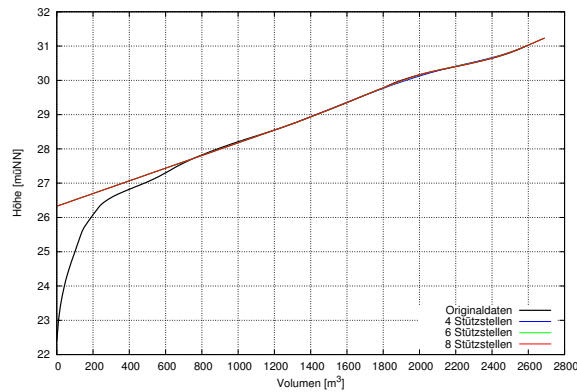
Für die Optimierung wird aber ein zweimal stetig differenzierbarer funktionaler Zusammenhang zwischen Druckhöhe H und Volumen V benötigt, so dass für jeden Zeitpunkt t gilt:

$$H(t) = \sigma(V(t)). \quad (4.3)$$

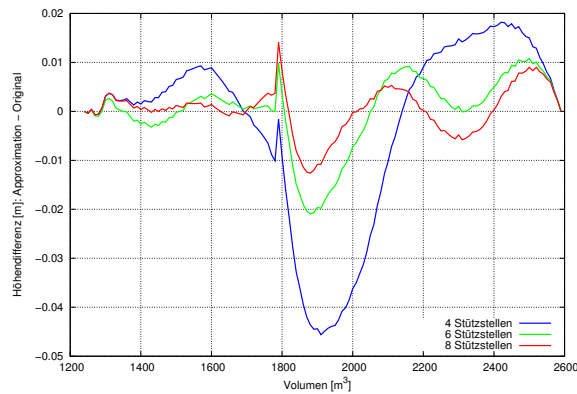
Diese glatte Darstellung (d. h. zweimal stetig differenzierbar) soll einerseits in einem gewissen Bereich sehr genau sein, nämlich überall dort, wo Kanäle mit anderen Kanälen oder Entlastungsbauwerken gekoppelt sind, andererseits muss oft über den tabellierten Bereich hinaus extrapoliert werden, um den Entlastung in die Gewässer erfassen zu können. Zur Approximation benutzen wir deshalb Splines der Ordnung vier mit vorgeschriebener Steigung am linken und rechten Rand, die ggf. nach links und/oder rechts linear extrapoliert werden. Eine ausführliche Beschreibung zur kubischen Spline-Approximation mit Randbedingungen und zur Wahl der Stützstellen findet man unter Anderem in [Boo01] und [Die95].

In Abbildung 4.2(a) ist der Verlauf und die Approximation einer Speicherkennlinie eines typisches Mischwasserkanals dargestellt, der Fehler auf dem Approximationsintervall abhängig von der Anzahl der Stützstellen in Abbildung 4.2(b). Wir können erkennen, dass wenige Stützstellen ausreichen, um die Speicherkennlinie hinreichend genau zu approximieren. Außerhalb des Approximationsintervalls wurde die Speicherkennlinie linear extrapoliert, da hier entweder keine Daten vorliegen, oder der exakte Zusammenhang zwischen Volumen und Druckhöhe bei der Optimierung nicht benötigt wird.

Die minimale Volumen in jedem Kanal beträgt offensichtlich null m^3 . Entsprechend kann mithilfe der Speicherkennlinie eine untere Schranke für die Druckhöhe H bestimmt werden, die zu keinem Zeitpunkt unterschritten werden kann. Eine explizite Beschränkung für das Volumen nach oben gibt es in der Regel nicht, da Abwasserkanäle nach oben offen sind. Die Entlastungsbauwerke sind aber so ausgelegt, dass ab einem bestimmten Volumen bzw. einer zugehörigen Druckhöhe das gesamte Abwasser in die Umwelt abgegeben wird. Einige wenige Kanäle und Regenüberlaufbecken besitzen explizite Maximalvolumina und damit auch maximale Druckhöhen, die diese nach oben abgeschlossen sind. Es gilt also für jeden einzelnen Kanal zu jedem betrachteten Zeitpunkt $V(t) \in [V^-, V^+]$, wobei $0 = V^- < V^- \leq \infty$. Die Schranken der Druckhöhen lassen sich mithilfe der jeweiligen Speicherkennlinie bestimmen, so dass gilt $H(t) \in [H^-, H^+] = [\sigma(0), \sigma(V^+)]$. Die Darstellung der Kanäle ist in sofern vereinfacht, dass wir in dieser Arbeit den Fluss innerhalb der Kanäle nicht betrachten. Wir fassen die Kanäle stattdessen als Behälter auf, in denen von außen einfließendes Wasser sofort eingestaut wird, also zum selben Zeitpunkt den Wasserspiegel anhebt. Das hat zur Folge, dass der



(a) Approximation einer Speicherkennlinie



(b) Fehler der Spline-Approximation

Abbildung 4.2: Approximation einer typischen Speicherkennlinie mithilfe kubischer Splines. Die Anzahl der Stützstellen beträgt 4, 6 und 8. Die Speicherkennlinie wurde zwischen $V = 1240\text{m}^3$ und $V = 2590\text{m}^3$ approximiert und außerhalb dieses Intervalls linear extrapoliert.

Fluss innerhalb eines Kanals null ist und damit die Anströmgeschwindigkeit an die Entlastungsbauwerke ebenfalls null. Damit nehmen wir in Kauf, dass das Optimierungsmodell weniger genau ist, aber einerseits suchen wir eine optimale Steuerung des Abwassersystems während starker Regenfälle und wir können davon ausgehen, dass zu nahezu allen Zeitpunkten die Kanäle hinreichend gefüllt sind und das Fließverhalten nur eine untergeordnete Rolle spielt. Andererseits reduziert dieser Ansatz den für die Berechnung benötigten Aufwand, denn die hier betrachteten Kanäle entsprechen einem offenen Gerinne und die Berechnung von Durchfluss und Wasserstand wird durch die sogenannten Saint-Venant-Gleichungen beschrieben. Diese bestehen aus gekoppelten partiellen Differentialgleichungen, der Kontinuitätsgleichung und der Energiegleichung. Für Details siehe zum Beispiel [Sto57] und [CHV80]. Insbesondere bei der Diskretisierung dieser Gleichungen werden

dem Optimierungsmodell eine Vielzahl neuer Variablen und nichtlinearer Restriktionen hinzufügt, die die Lösbarkeit des Modells weiter einschränken.

4.1.2 Reservoirs

Im Abwassernetzwerk werden das in den Klärwerken gereinigte Wasser und das aus den Kanälen entlastete ungeklärte Abwasser an angrenzende Gewässer abgegeben. Diese Gewässer fassen wir als Reservoirs des Abwassernetzwerks auf. Reservoirs sind Speicher mit unbeschränkter Kapazität. Sie werden von den Klärwerken, Notauslässen, Regen- und Klärüberläufen gespeist, können aber kein Abwasser zurück in das Abwassernetzwerk einspeisen.

Wir nehmen in dieser Arbeit an, dass der Wasserspiegel eines Reservoirs während des gesamten betrachteten Zeitraum konstant ist und damit unabhängig von der gespeicherten Wassermenge. Dieser Wasserspiegel \bar{H} sei niedriger als der sämtliche im Netzwerk auftretenden Wasserspiegel und Druckhöhen. Dies führt dazu, dass insbesondere bei den Regen- und Klärüberläufen kein Rückfluss ins Netzwerks möglich ist.

Das Volumen V des gespeicherten Abwassers in einem Reservoir ist nach unten durch null beschränkt und nach oben nicht begrenzt. In einem beliebigen Zeitpunkt t ergibt sich das Volumen $V(t)$ aus dem Volumen eines früheren Zeitpunktes $s < t$ und dem Integral über die Zuflüsse im Zeitraum $[s, t]$:

$$V(t) = V(s) + \int_s^t \sum_{i \in Z} Q_i(\tau) d\tau. \quad (4.4)$$

Insbesondere der gesamte Zufluss während des betrachteten Zeitraum $[0, T]$ mithilfe dieser Flussbilanzgleichung bestimmt werden:

$$V(T) = \int_0^T \sum_{i \in Z} Q_i(\tau) d\tau.$$

Wir unterscheiden im Abwassernetzwerk und dem zugehörigen Optimierungsmodellen zwei verschiedene Reservoirs. Ein Reservoir wird ausschließlich von den Klärwerken gespeist und misst die Menge des geklärten Abwassers. Das andere Reservoir nimmt die ungeklärten Abwässer aus dem Kanalnetz auf und misst diese. Die Menge des Abwassers in diesem Reservoir gilt es zu minimieren.

4.1.3 Öffnungen

In diesem Abschnitt betrachten wir Entlastungsbauwerke und Verbindungen zwischen Kanälen, bei denen sich der Fluss abhängig vom Wasserstand H in den angrenzenden Kanälen einstellt. Insbesondere ist der Fluss hier nicht direkt steuerbar.

Wir unterscheiden bei den Entlastungsbauwerken in Abwassersystemen zwei Typen von Überläufen: Zum Einen Überläufe bei denen ein Fluss nur in eine Richtung

möglich ist, da der Wasserspiegel auf einer Seite des Überlaufs in jedem Fall deutlich unterhalb der Unterkante der Öffnung liegt. Diese Überläufe werden als Regenüberläufe, Klärüberläufe und Notauslässe bezeichnet. Diese Überläufe können sowohl Öffnungen in den Kanälen sein, als auch Schwellen. Insbesondere unterscheiden sich diese Bauwerke in der Breite und damit in der maximalen Entlastung. Auf der anderen Seite gibt es Überläufe in denen der Wasserspiegel in beiden Kanäleninnerhalb und oberhalb der Öffnung liegen kann. Das führt dazu, dass ein Fluss in beiden Richtungen möglich ist, abhängig davon, welcher der beiden Wasserspiegel höher ist. Diese Überläufe werden je nach Bauweise als interne Überläufe oder Heber bezeichnet.

Den Fluss durch diese Bauwerke können wir als Fluss durch Seitenöffnungen in Gefäßen auffassen. Ein Gefäß sei hier ein teilweise oder vollständig von undurchlässigen festen Wandungen umschlossener Raum, in dem Flüssigkeiten (in unserem Fall speziell Abwasser) gespeichert ist. Gefäße können unterschiedlichste Form und Größe besitzen. Insbesondere sind Abwasserkanäle in diesem Sinne Gefäße [Bol07].

Wir betrachten in dieser Arbeit den stationären Fluss durch Seitenöffnungen, da die betrachteten Zeiträume so klein sind, dass die Veränderungen im Wasserspiegel vernachlässigbar sind. Wir unterscheiden zwischen Ausfluss und Abfluss. Im ersten Fall liegt der Wasserspiegel des Oberwassers H^O oberhalb der Seitenöffnung und im Fall des Abflusses liegt der Wasserspiegel H^O innerhalb der Seitenöffnung. Der Ab- bzw. Ausfluss kann nun abhängig vom Wasserspiegel des Unterwassers H^U frei, teilweise rückgestaut oder vollständig rückgestaut erfolgen. In den folgenden Abschnitten werden wir die Flussgleichungen der einzelnen Zustände eingehend untersuchen. Wir nehmen wie im vorherigen Abschnitt 4.1.1 erläutert an, dass die Anströmgeschwindigkeit v_0 sehr klein oder Null ist und wir sie zur Bestimmung des Flusses vernachlässigen können.

Weiterhin seien alle Öffnungen im Abwassernetz rechteckig. Diese Annahmen entsprechen den Gegebenheiten in den vorliegenden Kanalnetzen bzw. der zugrunde liegenden Modellierung der Kanäle.

Wir bezeichnen die Höhe Unterkante einer Öffnung mit L , die Höhe der Oberkante mit U und die Breite der Öffnung mit a . Die Öffnungshöhe b ergibt sich dannach aus $b = U - L$. Zusätzliche benötigen wir zur Bestimmung des Flusses häufig die Gravitationsbeschleunigung, die wir mit g bezeichnen.

Eine Sonderform der Öffnungen, die in Kanalnetzen vorkommt sind sogenannte Heber bzw. Heberwehre. Bei diesen ist über dem Überfallrücken eine Kappe und ein sogenannter Saugschlauch angebracht, so dass der Auslass des Hebers unterhalb der eigentlichen Öffnung liegt. Wir bezeichnen die Auslasshöhe mit T . Mit steigendem Wasserstand im Oberwasser wird die Luft aus der luftdichten Kappe mitgerissen, so dass eine Saugwirkung einsetzt und der zunächst freie Überfall in eine Rohrströmung übergeht [Bol07].

In den Abschnitten 4.1.3.1 bis 4.1.3.7 werden wir die Fließzustände und Flussglei-

chungen des Flusses durch Seitenöffnungen eingehend beschreiben.

Anschließend betrachten wir die einzelnen Entlastungsbauwerke, fassen die möglichen Fließzustände zu einem Flussprofil zusammen und analysieren die Übergänge zwischen den Fließzuständen. Insbesondere legen wir dem Schwerpunkt auf die Verwendbarkeit im einem nichtlinearen Optimierungsmodell und diskutieren gegebenenfalls Alternativen und Approximationen.

4.1.3.1 Freier Abfluss aus einer Seitenöffnung

Ein freier Abfluss aus einer Öffnung oder auch ein vollkommener Überfall liegt vor, wenn der Oberwasserspiegel innerhalb der Öffnung steht, also $L < H^O(t) \leq U$, und der Unterwasserspiegel den Abfluss nicht beeinflusst. Wir gehen davon aus, dass dies der Fall ist, falls der Unterwasserspiegel unterhalb der Öffnung liegt, das heißt $H^U(t) \leq L$ (vgl. Abbildung 4.3).

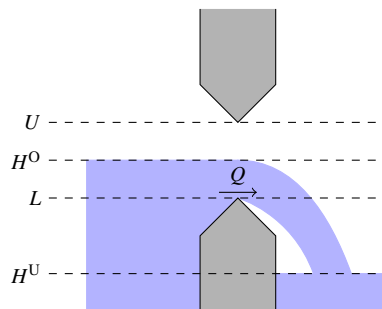


Abbildung 4.3: Veranschaulichung eines freien Abflusses bzw. vollkommenen Überfalls aus einer Seitenöffnung

Der freie Abfluss aus einer Öffnung vom Ober- zum Unterwasser im Zeitpunkt t entspricht dem vollkommenen Überfall über ein Wehr und der Fluss kann mithilfe der Überfallformel von Poleni bestimmt werden:

$$Q(t) = \frac{2}{3} \mu a \sqrt{2g} (H^O(t) - L)^{\frac{3}{2}}. \quad (4.5)$$

Die Überfallformel von Poleni ergibt sich aus der Energiegleichung von Bernoulli. In dem Überfallbeiwert $\mu \in (0, 1]$ wird abhängig von der Wehrform die Strahlabsenkung und weitere in diesem Ansatz vernachlässigte Größen wie Reibung und Ungenauigkeiten in der Druck- und Geschwindigkeitsverteilung berücksichtigt [Bol07].

Aus der Überfallformel von Poleni (4.5) lassen sich nun Ableitungen des Abflusses nach der Druckhöhe des Oberwassers bestimmen. Für die erste Ableitung erhalten wir:

$$\frac{\partial Q(t)}{\partial H^O(t)} = \mu a \sqrt{2g} (H^O(t) - L)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.6)$$

Die Ableitung nach der Druckhöhe des Unterwassers H^U ist offensichtlich Null:

$$\frac{\partial Q(t)}{\partial H^U(t)} = 0, \quad (4.7)$$

ebenso wie auch die zweite Ableitung nach $H^U(t)$:

$$\frac{\partial^2 Q(t)}{\partial H^U(t)^2} = 0. \quad (4.8)$$

Die zweite Ableitung nach der Druckhöhe des Oberwassers hingegen ist in der Regel positiv und lautet:

$$\frac{\partial^2 Q(t)}{\partial H^O(t)^2} = \frac{1}{2} \mu a \sqrt{2g} (H^O(t) - L)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.9)$$

4.1.3.2 Teilweiser rückgestauter Abfluss aus einer Seitenöffnung

Ein teilweiser rückgestauter Abfluss liegt vor, wenn der Abfluss über den Überfall durch das Unterwasser beeinflusst wird. Der Abfluss erfolgt dann nicht mehr schießend und die Abflussleistung ist merklich geringer als beim vollkommenen Überfall [Bol07].

In unseren Betrachtungen gehen wir davon aus, dass das Unterwasser Einfluss auf den Abfluss nimmt, sobald der Unterwasserspiegel oberhalb der Unterkante der Öffnung liegt. Das heißt, sowohl der Wasserspiegel des Oberwassers, als auch der Wasserspiegel des Unterwassers liegen innerhalb der Öffnung. Analog zum freien Abfluss, entspricht der teilweiser rückgestaute Abfluss dem unvollkommenen Überfall über ein Wehr.

Wir gehen im Folgenden davon aus, dass $H^O(t) \geq H^U(t)$, also der Wasserspiegel des Oberwasser oberhalb dem des Unterwassers liegt. Es gilt $L < H^U(t) \leq H^O(t) \leq U$ (vgl. Abbildung 4.4).

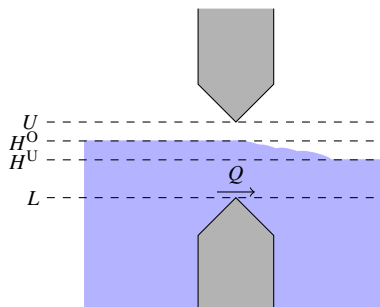


Abbildung 4.4: Veranschaulichung teilweise rückgestauten Abflusses bzw. eines unvollkommenen Überfalls aus einer Seitenöffnung

Die hydraulische Berechnung des unvollkommen Überfalls ist aufgrund des komplexen Abflussvorgangs nur sehr schwer möglich. In der Regel benutzt man die Formel des vollkommenen Überfalls und berücksichtigt den Einfluss des Unterwassers durch einen Abminderungskoeffizienten η . Dieser Koeffizient ist insbesondere abhängig vom Verhältnis der Drückhöhen $H^O(t)$ und $H^U(t)$ des Ober- und Unterwasser, aber auch der Form des Überfallrückens und der Höhe L der Unterkante der Öffnung [Bol07]. Wir erhalten damit folgende Flussgleichung:

$$Q(t) = \frac{2}{3} \mu \eta (H^O(t), H^U(t)) a \sqrt{2g} (H^O(t) - L)^{\frac{3}{2}}. \quad (4.10)$$

Der Abminderungskoeffizient kann nur experimentell für jede einzelne Öffnung bestimmt werden und es gibt keinen funktionalen Zusammenhang zwischen den Druckhöhen und Abminderungskoeffizienten [Bol07]. Daher ist Gleichung (4.10) für unsere Berechnungen nicht geeignet, da wir insbesondere eine zweimal stetig differenzierbare Flussgleichung für die Optimierung benötigen. Daher bevorzugen wir in dieser Arbeit den Ansatz von Du Buat, der eine Kombination aus vollkommenen Überfall und vollständig überstauter Öffnung vorschlägt. Dieser Ansatz gibt den tatsächlichen Abflussvorgang zwar nicht vollständig korrekt wieder, liefert aber eine hinreichend genaue Approximation. Diese Flussgleichung hat zusätzlich den Vorteil, dass der Übergang vom vollkommenen Überfall zum unvollkommen Überfall stetig fortgesetzt wird.

Wir teilen den Überfallstrahl bei diesem Ansatz in zwei Bereiche ein. Der obere Bereich zwischen $H^U(t)$ und $H^O(t)$ wird als vollkommener Überfall vom Ober- zum Unterwasser aufgefasst, also analog zu Abschnitt 4.1.3.1. Den unteren Bereich des Überfallstrahls zwischen Unterkante der Öffnung L und Unterwasserstand $H^U(t)$ fassen wir als vollständig rückgestauten Ausfluss auf (vgl. Abschnitt 4.1.3.5). Zusätzlich nehmen wir an, dass die Überfallbeiwerte μ in beiden Fällen den selben Wert besitzen. Daraus ergibt sich für den unvollkommenen Überfall die Flussgleichung:

$$Q(t) = \frac{2}{3} \mu a \sqrt{2g} (H^O(t) - H^U(t))^{\frac{3}{2}} + \mu a \sqrt{2g} (H^U(t) - L) (H^O(t) - H^U(t))^{\frac{1}{2}}. \quad (4.11)$$

Der Gradient zum einem Zeitpunkt t bezüglich der Druckhöhen zur Flussgleichung nach Du Buat lautet:

$$\begin{aligned} \nabla Q &= \begin{bmatrix} \frac{\partial Q}{\partial H^O} \\ \frac{\partial Q}{\partial H^U} \end{bmatrix} \\ &= \mu a \sqrt{2g} \begin{bmatrix} (H^O - H^U)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} (H^U - L) (H^O - H^U)^{-\frac{1}{2}} \\ -\frac{1}{2} (H^U - L) (H^O - H^U)^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Zur Vereinfachung der Notation wurde auf das Argument t verzichtet. Hier ist offensichtlich, dass falls $H^O(t) \rightarrow H^U(t)$ die Komponenten von $\nabla Q(t)$ gegen $\pm\infty$

streben und eine stetige Fortsetzung beim Wechsel der Flussrichtung, d.h. der Unterwasserspiegel $H^U(t)$ steigt über den Oberwasserspiegel $H^O(t)$, in den Ableitungen nicht möglich ist.

Die Hesse-Matrix zum einem Zeitpunkt t bezüglich der Druckhöhen zur Flussgleichung (4.11) lautet :

$$\begin{aligned} \nabla^2 Q &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 Q}{\partial H^O{}^2} & \frac{\partial^2 Q}{\partial H^O \partial H^U} \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial H^U \partial H^O} & \frac{\partial^2 Q}{\partial H^U{}^2} \end{bmatrix} \\ &= \mu a \sqrt{2g} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}h^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}h_U h^{-1.5} & \frac{1}{4}h_U h^{-1.5} \\ \frac{1}{4}h_U h^{-1.5} & -\frac{1}{2}h^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}h_U h^{-1.5} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

wobei erneut zugunsten der Übersichtlichkeit auf das Zeitargument t verzichtet wurde, sowie $h_U = H^U - L$ und $h = H^O - H^U$ gesetzt wurden.

4.1.3.3 Freier Ausfluss aus einer Seitenöffnung

Der freie Ausfluss aus einer Seitenöffnung liegt vor, wenn der Wasserspiegel des Oberwassers $H^O(t)$ oberhalb der Öffnung liegt und der Wasserspiegel des Unterwasser $H^U(t)$ unterhalb der Öffnung. Es gilt also $H^U(t) \leq L < U < H^O(t)$ (vgl. Abbildung 4.5).

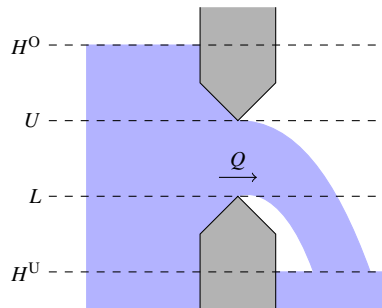


Abbildung 4.5: Veranschaulichung eines freien Ausflusses aus einer Seitenöffnung

Der Fluss durch die rechteckige Öffnung wird mithilfe der Energiegleichung von Bernoulli bestimmt. Daraus ergibt sich die sogenannte Flussgleichung von Torricelli:

$$Q(t) = \frac{2}{3} \mu a \sqrt{2g} \left[(H^O(t) - L)^{\frac{3}{2}} - (H^O(t) - U)^{\frac{3}{2}} \right]. \quad (4.14)$$

In dem Überfallbeiwert $\mu \in (0, 1]$ werden, wie beim vollkommenen Überfall, die Verluste aufgrund der Öffnungsform und weiteren in diesem Ansatz vernachlässigte Größen wie Reibung, Ungenauigkeiten in der Druck- und Geschwindigkeitsverteilung berücksichtigt [Bol07].

Ableitungen der Flussgleichung von Torricelli nach der Druckhöhe des Unterwassers $H^U(t)$ sind immer gleich Null. Die Ableitung nach der Druckhöhe des Oberwassers lautet

$$\frac{\partial Q(t)}{\partial H^O(t)} = \mu a \sqrt{2g} \left[(H^O(t) - L)^{\frac{1}{2}} - (H^O(t) - U)^{\frac{1}{2}} \right], \quad (4.15)$$

und die zweite Ableitung

$$\frac{\partial^2 Q(t)}{\partial H^O(t)^2} = \frac{1}{2} \mu a \sqrt{2g} \left[(H^O(t) - L)^{-\frac{1}{2}} - (H^O(t) - U)^{-\frac{1}{2}} \right]. \quad (4.16)$$

4.1.3.4 Teilweise rückgestauter Ausfluss aus einer Seitenöffnung

Der teilweise rückgestaute Ausfluss aus einer Seitenöffnung liegt vor, wenn der Wasserspiegel des Oberwassers $H^O(t)$ oberhalb der Öffnung liegt und der Wasserspiegel des Unterwasser $H^U(t)$ innerhalb der Öffnung. Es gilt also $L < H^U(t) \leq U < H^O(t)$ (vgl. Abbildung 4.6).

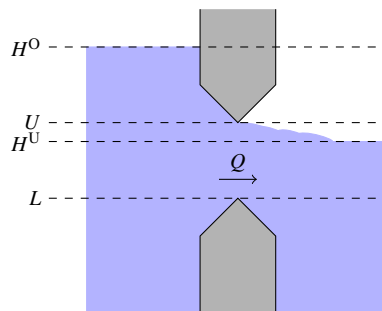


Abbildung 4.6: Veranschaulichung eines teilweise rückgestauten Ausflusses aus einer Seitenöffnung

Die exakte Bestimmung der Flussgleichung bereitet analog zum Fall des unvollkommen Überfalls Schwierigkeiten, da es sich um einen sehr komplexen Ausflussvorgang handelt, der sich bei realen Öffnungen nicht vollständig beschreiben lässt. Eine Möglichkeit ist es, den Gesamtfluss in zwei Teilflüsse aufzuspalten und diese dann zu addieren [Bol07]. Der Fluss im Bereich zwischen $H^U(t)$ und U wird als freier Ausfluss modelliert, und damit analog zum Abschnitt 4.1.3.3, und der Fluss im Bereich zwischen Unterkante der Öffnung L und Unterwasserstand $H^U(t)$ als vollständig rückgestauter Ausfluss (vgl. Abschnitt 4.1.3.5). Bei diesem Ansatz ist es nicht möglich die beiden Ausflussbeiwerte getrennt von einander zu ermitteln, so dass wir von einem Ausflussbeiwert μ ausgehen. Es ergibt sich die Ausflussgleichung:

$$Q(t) = \frac{2}{3}\mu a\sqrt{2g} \left[(H^O(t) - H^U(t))^{\frac{3}{2}} - (H^O(t) - U)^{\frac{3}{2}} \right] + \mu a\sqrt{2g} (H^U(t) - L) (H^O(t) - H^U(t))^{\frac{1}{2}}. \quad (4.17)$$

Man kann aus dieser Gleichung erkennen, dass der Übergang zum unvollkommen Überfall, sowie der Übergang zum freien Ausfluss und zum vollständig rückgestautem Ausfluss stetig fortgesetzt wird.

Die zu dieser Flussgleichung gehörenden Gradienten und Hessematrix erfüllen diese Eigenschaft nicht. Sie lauten:

$$\nabla Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q}{\partial H^O} \\ \frac{\partial Q}{\partial H^U} \end{bmatrix} = \mu a\sqrt{2g} \begin{bmatrix} (H^O - H^U)^{\frac{1}{2}} - (H^O - U)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} (H^U - L) (H^O - H^U)^{-\frac{1}{2}} \\ -\frac{1}{2} (H^U - L) (H^O - H^U)^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

und

$$\nabla^2 Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 Q}{\partial H^O{}^2} & \frac{\partial^2 Q}{\partial H^O \partial H^U} \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial H^U \partial H^O} & \frac{\partial^2 Q}{\partial H^U{}^2} \end{bmatrix} = \mu a\sqrt{2g} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}h^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}h_O^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}h_U h^{-1.5} & \frac{1}{4}h_U h^{-1.5} \\ \frac{1}{4}h_U h^{-1.5} & -\frac{1}{2}h^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}h_U h^{-1.5} \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

Erneut wurde zugunsten der Übersichtlichkeit auf das Zeitargument t verzichtet wurde, sowie $h_U = H^U - L$, $h_O = H^O - U$ und $h = H^O - H^U$ gesetzt.

4.1.3.5 Vollständig rückgestauter Ausfluss aus einer Seitenöffnung

Um einen vollständig rückgestauten Ausfluss aus einer Seitenöffnung handelt es sich, wenn sowohl der Wasserspiegel des Oberwassers $H^O(t)$, als auch der Wasserspiegel des Unterwassers $H^U(t)$ oberhalb der Öffnung liegen. Es gilt $L < U < H^U(t) \leq H^O(t)$ (vgl. Abbildung 4.7).

Wir nehmen an, dass Verwirbelungen und Energieverluste vernachlässigt werden können, bzw. wie schon bei den verschiedenen Ab- und Ausflüssen im für jede Öffnung individuellen Überfallbeiwert $\mu \in (0, 1]$ berücksichtigt sind. Mithilfe der Bernoulligleichung erhalten wir für die vollständig überströmte Öffnung die folgende Flussgleichung [Bos89]:

$$Q(t) = \mu a\sqrt{2g}(U - L) (H^O(t) - H^U(t))^{\frac{1}{2}}. \quad (4.20)$$

Der Gradient zu dieser Flussgleichung lautet

$$\nabla Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q}{\partial H^O} \\ \frac{\partial Q}{\partial H^U} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\mu a\sqrt{2g}(U - L) \begin{bmatrix} (H^O - H^U)^{-\frac{1}{2}} \\ -(H^O - H^U)^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

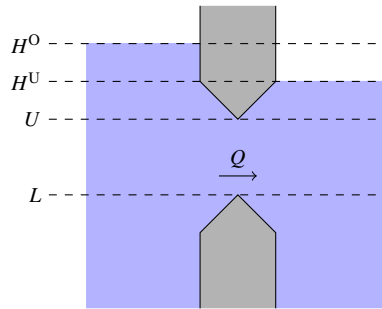


Abbildung 4.7: Veranschaulichung eines vollständig rückgestauten Ausflusses aus einer Seitenöffnung

Man kann leicht sehen, dass der Übergang im Grenzübergang $H^O(t) \rightarrow H^U(t)$ beide Komponenten des Gradienten gegen unendlich bzw. minus unendlich streben, so dass der Übergang zwischen diesen beiden Fließzuständen nicht stetig differenzierbar ist.

Für die Hesse-Matrix ergibt sich

$$\begin{aligned} \nabla^2 Q &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 Q}{\partial H^O{}^2} & \frac{\partial^2 Q}{\partial H^O \partial H^U} \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial H^U \partial H^O} & \frac{\partial^2 Q}{\partial H^U{}^2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \mu a \sqrt{2g} (U - L) \begin{bmatrix} (H^O - H^U)^{-\frac{3}{2}} & -(H^O - H^U)^{-\frac{3}{2}} \\ -(H^O - H^U)^{-\frac{3}{2}} & (H^O - H^U)^{-\frac{3}{2}} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

wobei aus Gründen der Übersichtlichkeit auf das Zeitargument verzichtet wurde.

4.1.3.6 Freier Heberausfluss

Der freie Ausfluss aus einem Heber liegt vor, wenn der Wasserspiegel des Unterwassers unterhalb des Auslassöffnung liegt, also falls $H^U(t) \leq T$. Der Wasserspiegel des Oberwassers steht oberhalb oder hinreichend weit innerhalb der Öffnung. Die exakte Wasserspiegelhöhe $H^O(t)$ bei der der sogenannte Heberausfluss entsteht ist schwer zu bestimmen und hängt im wesentlichen von der Öffnungshöhe b und der Form des Auslasses (wie z. B. von Sprungnasen) ab [Bol07] (vgl. auch Abbildung 4.8).

Wegen des Eintauchens des Hebereinlaufs in das Oberwasser entlüftet der sich die Heberleitung und es liegt eine Druckrohrströmung vor. Die Flussgleichung lautet

$$Q(t) = \mu a \sqrt{2g} (U - L) (H^O(t) - T)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.23)$$

Die Flussgleichung ist nicht von der Druckhöhe des Unterwassers abhängig, so dass Ableitungen nach $H^U(t)$ gleich Null sind. Die Ableitungen nach der Druck-

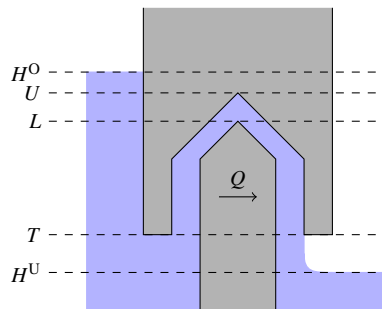


Abbildung 4.8: Veranschaulichung des freien Abflusses durch eine Heberöffnung

höhe des Oberwassers lauten

$$\frac{\partial Q(t)}{\partial H^O(t)} = \frac{1}{2} \mu a \sqrt{2g} (U - L) (H^O(t) - T)^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.24)$$

sowie

$$\frac{\partial^2 Q(t)}{\partial H^O(t)^2} = -\frac{1}{4} \mu a \sqrt{2g} (U - L) (H^O(t) - T)^{-\frac{3}{2}}. \quad (4.25)$$

4.1.3.7 Rückgestauter Heberausfluss

Der rückgestaute Ausfluss aus einem Heber liegt vor, wenn der Wasserspiegel des Unterwassers oberhalb des Auslassöffnung liegt, also falls $H^U(t) > T$. Der Wasserspiegel des Oberwassers liegt wie Fall des freien Heberausflusses oberhalb oder hinreichend weit innerhalb der Öffnung (siehe Abbildung 4.8).

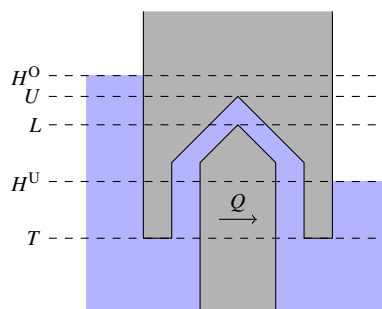


Abbildung 4.9: Veranschaulichung des teilweise rückgestauten Abflusses durch eine Heberöffnung

Das Ober- und das Unterwasser liegen innerhalb des Heberleitung und aufgrund des hinreichend hohen Wasserspiegels des Oberwassers entlüftet die Heberleitung und es liegt eine Druckrohrströmung vor. Der Fluss hängt in diesem Fall von den Druckhöhen des Ober- und Unterwassers ab und die Flussgleichung lautet wie Fall

des vollständig rückgestauten Ausflusses:

$$Q(t) = \mu a \sqrt{2g} (U - L) (H^O(t) - H^U(t))^{\frac{1}{2}}. \quad (4.26)$$

Der Gradient zu dieser Flussgleichung lautet

$$\nabla Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q}{\partial H^O} \\ \frac{\partial Q}{\partial H^U} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \mu a \sqrt{2g} (U - L) \begin{bmatrix} (H^O - H^U)^{-\frac{1}{2}} \\ -(H^O - H^U)^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}, \quad (4.27)$$

und die Hesse-Matrix

$$\begin{aligned} \nabla^2 Q &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 Q}{\partial H^{O^2}} & \frac{\partial^2 Q}{\partial H^O \partial H^U} \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial H^U \partial H^O} & \frac{\partial^2 Q}{\partial H^{U^2}} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \mu a \sqrt{2g} (U - L) \begin{bmatrix} (H^O - H^U)^{-\frac{3}{2}} & -(H^O - H^U)^{-\frac{3}{2}} \\ -(H^O - H^U)^{-\frac{3}{2}} & (H^O - H^U)^{-\frac{3}{2}} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Wie bei der vollständig überstauten Öffnung ist der Grenzübergang $H^O(t) \rightarrow H^U(t)$ der Flussgleichung zwar stetig, aber nicht stetig differenzierbar, da die Komponenten des Gradienten gegen unendlich bzw. minus unendlich streben.

4.1.3.8 Fluss über Regen- und Klärüberläufe

Unter Regen- und Klärüberläufen versteht man einen Überlauf, bei dem ein Fluss nur in eine Richtung möglich ist. In der Regel treten diese Überläufe bei Entlastungsbauwerken von den Kanälen in öffentliche Gewässer auf. Ein solcher Überlauf besteht aus einer Öffnung im Kanal oder einer Schwelle in einem Regenüberlaufbecken. Der maximale Wasserspiegel des Unterwassers liegt zu jedem möglichen Zeitpunkt t und jedem Zustand des Systems unterhalb der Öffnung (der Schwelle). Dies führt dazu, dass ausschließlich ein Fluss vom Oberwasser hin zum Unterwasser möglich ist.

Insgesamt können bei einem Regenüberlauf maximal drei verschiedene Fließzustände auftreten, die im Folgenden beschrieben und analysiert werden.

Im einfachsten Fall liegen die Wasserspiegel des Oberwassers $H^O(t)$ und des Unterwassers $H^U(t)$ unterhalb der Unterkante der Öffnung L , wie in Abbildung 4.10(a) dargestellt. In diesem Fall ist der Fluss über den Überlauf gleich Null, ebenso wie die Ableitungen nach den Druckhöhen. Im zweiten Fall liegt die Druckhöhe des Oberwassers innerhalb der Öffnung, d.h. es gilt $L < H^O(t) \leq U$, siehe auch Abbildung 4.10(b). Es liegt der in Abschnitt 4.1.3.1 beschriebene Fließzustand des freien Überfalls vor. Der dritte Fließzustand, der bei einem Regenüberlauf angenommen werden kann, ist der des freien Ausflusses, falls der Wasserspiegel des Oberwassers oberhalb der Öffnung liegt (vgl. Abbildung 4.10(c)). Es gelten die in Abschnitt 4.1.3.3 beschriebenen Flussgleichungen.

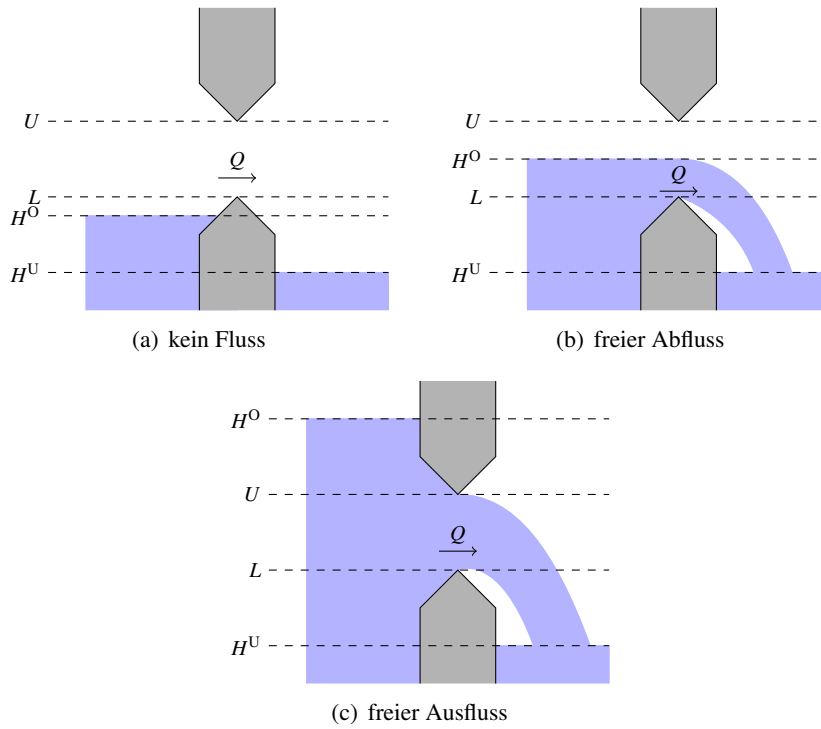


Abbildung 4.10: Fließzustände von Regen- und Klärüberläufen

Mithilfe der Gleichungen (4.5) und (4.14) kann der Fluss über einen Regenüberlauf nun folgendermaßen vollständig beschrieben werden:

$$Q = \frac{2}{3}\gamma \begin{cases} 0, & H^U, H^O \leq L < U \\ (H^O - L)^{\frac{3}{2}}, & H^U \leq L < H^O \leq U \\ \left[(H^O - L)^{\frac{3}{2}} - (H^O - U)^{\frac{3}{2}} \right], & H^U \leq L < U < H^O \end{cases} \quad (4.29)$$

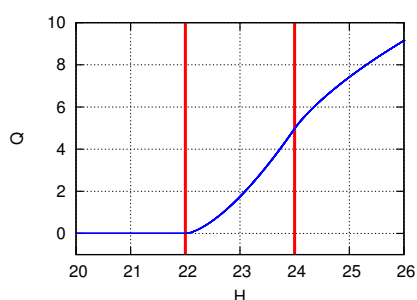
Wir verzichten hier und im Folgenden immer auf das Zeitargument t , um die Notation übersichtlicher zu halten. Zusätzlich fassen wir konstante Terme wie den Überfallbeiwert, die Öffnungsbreite und Gravitationsbeschleunigung zusammen zu $\gamma = \mu a \sqrt{2g}$. Da Gleichung (4.29) nicht von der Druckhöhe des Unterwassers abhängt, sind sowohl die erste als auch die zweite Ableitung nach $H^U(t)$ konstant Null. Die Ableitung nach der Druckhöhe des Oberwassers $H^O(t)$ setzt sich aus den Gleichungen (4.6) und (4.15) zusammen und lautet:

$$\frac{\partial Q}{\partial H^O} = \gamma \begin{cases} 0, & H^U, H^O \leq L < U \\ (H^O - L)^{\frac{1}{2}}, & H^U \leq L < H^O \leq U \\ \left[(H^O - L)^{\frac{1}{2}} - (H^O - U)^{\frac{1}{2}} \right], & H^U \leq L < U < H^O \end{cases} \quad (4.30)$$

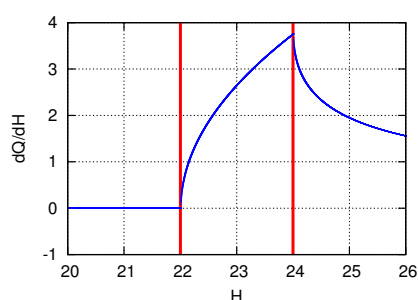
Analog erhalten wir die zweite Ableitung nach der Druckhöhe des Oberwassers

$H^0(t)$ aus den Gleichungen (4.9) und (4.16):

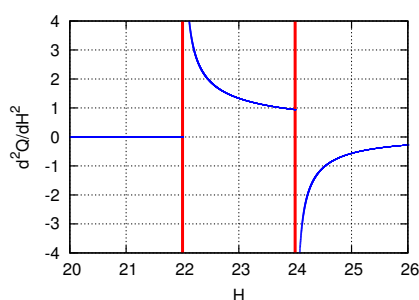
$$\frac{\partial^2 Q}{\partial H^{0^2}} = \frac{1}{2} \gamma \begin{cases} 0, & H^U, H^0 \leq L < U \\ (H^0 - L)^{-\frac{1}{2}}, & H^U \leq L < H^0 \leq U \\ \left[(H^0 - L)^{-\frac{1}{2}} - (H^0 - U)^{-\frac{1}{2}} \right], & H^U \leq L < U < H^0 \end{cases} \quad (4.31)$$



(a) Fluss $Q(t)$



(b) erste Ableitung $\frac{\partial Q(t)}{\partial H^0(t)}$



(c) zweite Ableitung $\frac{\partial^2 Q(t)}{\partial H^0(t)^2}$

Abbildung 4.11: Darstellung des Flusses über einen Regenüberlauf mit rechteckiger Öffnung zwischen 22 und 24 müNN, einer Breite von 1 m und einem Abflussbeiwert von 0.6.

Untersuchen wir die Übergänge zwischen den einzelnen Zuständen genauer, sehen wir, dass die Flussgleichung und die Ableitung nach der Druckhöhe des Oberwassers stetig ist. Durch Grenzwertbildung erhalten wir für die Flussgleichung folgen-

de Beziehung:

$$\begin{aligned}
\lim_{H^O \nearrow L} Q &= 0 \\
\lim_{H^O \searrow L} Q &= \lim_{H^O \searrow L} \frac{2}{3} \gamma (H^O - L)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \gamma (L - L)^{\frac{3}{2}} = 0 \\
\lim_{H^O \nearrow U} Q &= \lim_{H^O \nearrow U} \frac{2}{3} \gamma (H^O - L)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \gamma (U - L)^{\frac{3}{2}} \\
\lim_{H^O \searrow U} Q &= \lim_{H^O \searrow U} \frac{2}{3} \gamma \left[(H^O - L)^{\frac{3}{2}} - (H^O - U)^{\frac{3}{2}} \right] \\
&= \frac{2}{3} \gamma \left[(U - L)^{\frac{3}{2}} - (U - U)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{2}{3} \gamma (U - L)^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

Grenzwertbildung für die Ableitung liefert:

$$\begin{aligned}
\lim_{H^O \nearrow L} \frac{\partial Q}{\partial H^O} &= 0 \\
\lim_{H^O \searrow L} \frac{\partial Q}{\partial H^O} &= \lim_{H^O \searrow L} \gamma (H^O - L)^{\frac{1}{2}} = \gamma (L - L)^{\frac{1}{2}} = 0 \\
\lim_{H^O \nearrow U} \frac{\partial Q}{\partial H^O} &= \lim_{H^O \nearrow U} \gamma (H^O - L)^{\frac{1}{2}} = \gamma (U - L)^{\frac{1}{2}} \\
\lim_{H^O \searrow U} \frac{\partial Q}{\partial H^O} &= \lim_{H^O \searrow U} \gamma \left[(H^O - L)^{\frac{1}{2}} - (H^O - U)^{\frac{1}{2}} \right] \\
&= \gamma \left[(U - L)^{\frac{1}{2}} - (U - U)^{\frac{1}{2}} \right] = \gamma (U - L)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Der Verlauf der Kurven $Q(H^O(t))$ und $\frac{\partial Q(H^O(t))}{\partial H^O(t)}$ ist beispielhaft in den Abbildungen 4.11(a) und 4.11(b) dargestellt. Man erkennt aber schon in Abbildung 4.11(b) "Knicke" in den Übergängen der einzelnen Fließzustände, so dass die zweite Ableitung offensichtlich nicht mehr stetig ist, was durch die Grenzwertbildung betätigt wird:

$$\begin{aligned}
\lim_{H^O \nearrow L} \frac{\partial^2 Q}{\partial H^O{}^2} &= 0 \\
\lim_{H^O \searrow L} \frac{\partial^2 Q}{\partial H^O{}^2} &= \lim_{H^O \searrow L} \frac{1}{2} \gamma (H^O - L)^{-\frac{1}{2}} \rightarrow \infty \\
\lim_{H^O \nearrow U} \frac{\partial^2 Q}{\partial H^O{}^2} &= \lim_{H^O \nearrow U} \frac{1}{2} \gamma (H^O - L)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \gamma (U - L)^{-\frac{1}{2}} \\
\lim_{H^O \searrow U} \frac{\partial^2 Q}{\partial H^O{}^2} &= \lim_{H^O \searrow U} \frac{1}{2} \gamma \left[(H^O - L)^{-\frac{1}{2}} - (H^O - U)^{-\frac{1}{2}} \right] \rightarrow -\infty.
\end{aligned}$$

Zusammenfassend lässt sich sagen: Der Fluss $Q(t)$ über Regenüberläufe ist zu jedem Zeitpunkt t ausschließlich der Druckhöhe des Oberwassers $H^O(t)$ abhängig und kann durch die Flussgleichungen aus Abschnitt 4.1.3 beschrieben werden. Das

Flussprofil $Q(t)$ ist einmal stetig diffenzierbar bezüglich $H^O(t)$. Die Knicke in der ersten Ableitung treten an beiden Übergängen der Fließzustände auf.

Um das Flussprofil eines Regenüberlaufs in einem Optimierungsmodell zu verwenden, können wir es einerseits mithilfe sogenannter "special ordered sets" exakt modellieren, oder aber den Fluss durch eine geeignete zweimal stetig differenzierbare Funktion approximieren.

Zunächst beschreiben wir die exakte Modellierung. Eine detaillierte Beschreibung der hier verwendeten strukturierten Mengen oder "special ordered sets" findet man unter anderem in [Kal02]. Diese Modellierung führt auf eine gemischt-ganzzahlige Formulierung zur Bestimmung des Flusses. Die Darstellung der stückweise definierten Funktion wird mit zusätzlichen Binärvariablen δ^i und kontinuierlichen Variablen $\lambda^j \in [0, 1]$ realisiert. Der zulässige Bereich besteht aus drei Intervallen, denen jeweils eine Binärvariable δ^i zugeordnet wird. Den Intervallgrenzen wird jeweils eine Variable λ^j zugeordnet (siehe auch Abbildung 4.12).

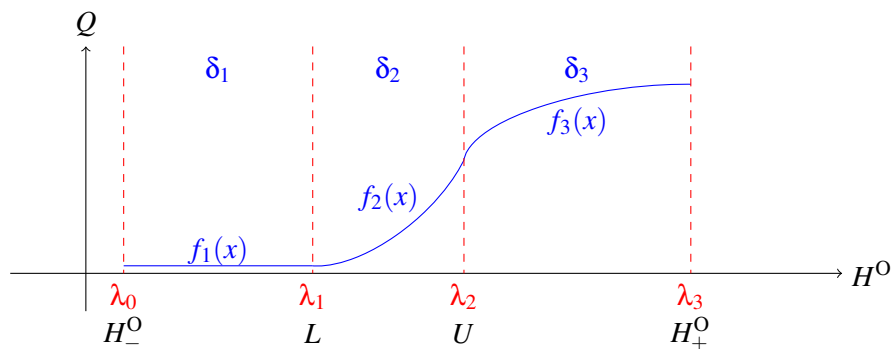


Abbildung 4.12: Beispiel für die Modellierung eines Regenüberlaufs mithilfe strukturierter Mengen

Die stückweise definierte Funktion des Flusses über den Regenüberlauf lässt sich nun folgendermaßen formulieren:

$$Q = \frac{2}{3}\gamma \left[\delta^1 \cdot 0 + \delta^2 (H^O - L)^{\frac{3}{2}} + \delta^3 \left((H^O - L)^{\frac{3}{2}} - (H^O - U)^{\frac{3}{2}} \right) \right]. \quad (4.32)$$

Durch die Gleichung

$$\sum_{i=1}^3 \delta^i = 1 \quad (4.33)$$

stellen wir sicher, dass genau eine der binären Variablen ungleich null ist, und damit der Fließzustand eindeutig ist. Die drei folgenden Gleichungen bestimmen mithilfe einer Konvexkombination aus höchstens zwei von null verschiedenen Variablen λ^j , $j \in \{0, 1, 2, 3\}$, das Intervall des aktuellen Zustands des Systems:

$$\sum_{j=0}^3 \lambda^j = 1, \quad (4.34)$$

$$\sum_{i=j}^{j+1} \delta^i \geq \lambda^j, \quad j \in \{0, 1, 2, 3\}, \quad (4.35)$$

wobei $\delta^i \equiv 0$, falls $i > 2$ und

$$H^O = \lambda^0 H_-^O + \lambda^1 L + \lambda^2 U + \lambda^3 H_+^O. \quad (4.36)$$

Durch die Gleichungen (4.32) bis (4.36) ist ein Regenüberlauf vollständig beschrieben. Für dieses Modell werden pro Überlauf zusätzlich zu Fluss- und Druckvariablen drei binäre Variablen und vier reelle Variablen eingeführt und neben der Flussgleichung sechs weitere Restriktionen benötigt. Diese multiplizieren sich noch mit der Anzahl der auszuwertenden Zeitpunkte bzw. Intervalle, die bei der Diskretisierung entstehen.

Eine weitere Möglichkeit der Modellierung ist die Approximation der Flussgleichung durch eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Wir haben uns, wie schon bei den Speicherkennlinien der Kanäle (Abschnitt 4.1.1), für eine kubische Splineapproximation entschieden. Der Fluss wird auf dem Intervall (L^-, U^+) durch einen Spline $s(H^O)$ der Ordnung 4 approximiert. L^- ist dabei die Druckhöhe, auf der sich die Unterkante L des Überlaufs befindet, d.h. bei der das Wasser abzufließen beginnt. U^+ ist die Druckhöhe, bei der die Oberkante U erreicht wird. Da unterhalb von L^- kein Wasser abfließen kann, wird die Flussfunktion auf dem Intervall $[0, L^-]$ durch die Nullfunktion zweimal stetig differenzierbar fortgesetzt. Oberhalb von U^+ fließt das Wasser gemäß eines vollkommenen Ausflusses ab. Wir setzen hier die Approximation durch die exakte Flussfunktion zweimal stetig differenzierbar fort. Damit erhalten wir für das Flussprofil eines Regenüberlaufs folgende Approximation:

$$Q(t) = \begin{cases} 0 & , H^O(t) \leq L^- \\ s(H^O(t)) & , H^O(t) \in (L^-, U^+) \\ \frac{2}{3}\gamma \left[(H^O(t) - L)^{\frac{3}{2}} - (H^O(t) - U)^{\frac{3}{2}} \right] & , H^O(t) \geq U^+ \end{cases} \quad (4.37)$$

für jeden beliebigen Zeitpunkt t des betrachteten Zeitraums. Diese Approximation ist für alle Druckhöhen $H^O(t) \in \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Insbesondere wird die Spline-Approximation $s(H^O(t))$ so gewählt, dass die Fortsetzungen zweimal stetig differenzierbar sind.

Für praktische Probleme ist zusätzlich relevant, dass Regen- und Klärüberläufe in der Regel aus mehreren verschieden großen und auf verschiedenen Höhen angebrachten Öffnungen bestehen. In realen Abwassernetzwerken besteht ein Überlauf aus bis zu 50 Öffnungen. Bei der Optimierung kann man die verschiedenen Öffnungen zwar jeweils als einzelne Überläufe auffassen, was aber zu einer Vervielfachung der benötigten Variablen und Restriktionen führt. Alternativ können alle Öffnungen zu einem Überlauf zusammengefasst werden. Der Fluss ergibt sich demnach aus der Summe des Flusses durch die N Öffnungen

$$Q(t) = \sum_{k=1}^N Q^k(H^O(t)). \quad (4.38)$$

Da pro Überlauf 2 Übergänge zwischen den Fließzuständen auftreten, können insgesamt bis zu $2N$ Übergänge existieren, also auch bis zu $2N$ Sprünge in der zweiten Ableitung nach der Druckhöhe des Oberwasser $H^O(t)$. Das führt zu insgesamt maximal $2N + 1$ verschiedenen Fließzuständen.

Wählen wir nun den gemischt ganzzahligen Ansatz für die Modellformulierung benötigen wir demnach $2N$ Binärvariablen δ^i und $2N + 1$ reelle Variablen λ^j , sowie die Flussvariable $Q(t)$ und die Druckhöhe $H^O(t)$. Die Anzahl der Restriktionen summiert sich zu insgesamt zu maximal $2N + 5$, die aber überwiegend linear sind. Zusätzlich wird sich im Optimierungsmodell diese Anzahl aufgrund der Zeitdiskretisierung noch vervielfachen.

Die Approximation des Flussprofils durch Splines dagegen benötigt keine weiteren Variablen, wenn sich die Anzahl der physischen Überläufe erhöht. Lediglich der Aufwand für die Bestimmung des Splines erhöht sich aufgrund der etwas komplexeren Struktur der Flussfunktion. Diese Berechnungen finden aber einmalig vor der eigentlichen Optimierung statt. Während der Optimierung erhöht die in der Regel größere Anzahl von benötigten Stützstellen den Aufwand, der aber aufgrund schneller Auswertungsalgorithmen [Boo01] kaum ins Gewicht fällt.

4.1.3.9 Fluss über interne Überläufe

Ein interner Überlauf verbindet zwei Kanäle innerhalb des Kanalnetzes miteinander oder einen Kanal mit einem Regenüberlaubecken oder einem Stauraumkanal. Ein interner Überlauf besteht wie ein Regenüberlauf aus einer Öffnung im Kanal. Der Unterschied zu den Regenüberläufen ist, dass der Wasserspiegel auf beiden Seiten der Öffnung innerhalb oder oberhalb der Öffnung liegen kann. Das führt dazu, dass bei einem internen Überlauf mehr Fließzustände als bei einem Regenüberlauf auftreten, vor allem aber dazu, dass ein Fluss in beide Richtungen möglich ist, abhängig davon welche der beiden Druckhöhen $H^O(t)$ und $H^U(t)$ größer ist, also in welchem Kanal der Wasserspiegel höher ist.

Das Flussprofil $Q(t)$ ist in diesem Fall abhängig von den beiden Druckhöhen $H^O(t)$ und $H^U(t)$. Um die Fließrichtung zu charakterisieren, definieren wir, dass ein Fluss $Q(t)$ zum Zeitpunkt t positiv ist, falls ein Fluss vom Oberwasser zum Unterwasser vorliegt, das heißt, falls $H^O(t) > H^U(t)$. Andersherum, ist der Fluss $Q(t)$ negativ, falls das Wasser vom Unterwasser zum Oberwasser fließt, also $H^U(t) > H^O(t)$.

Dies führt dazu, dass bei einem internen Überlauf bis zu sechs Fließzustände auftreten können, wobei in jedem Fließzustand zusätzlich die Fließrichtung berücksichtigt werden muss.

Der Fluss über einen internen Überlauf setzt sich aus den Fließzuständen freier und teilweise rückgestauter Abfluss sowie freier, teilweise rückgestauter und vollständig rückgestauter Ausfluss, sowie dem Zustand in dem kein Fluss stattfindet zusammen. In Abbildung 4.13 sind die Fließzustände eines internen Überlaufs für positive Fließrichtung schematisch dargestellt. Der Fluss über einen internen Überlauf lässt sich demnach durch die Gleichungen (4.5), (4.11), (4.14), (4.17)

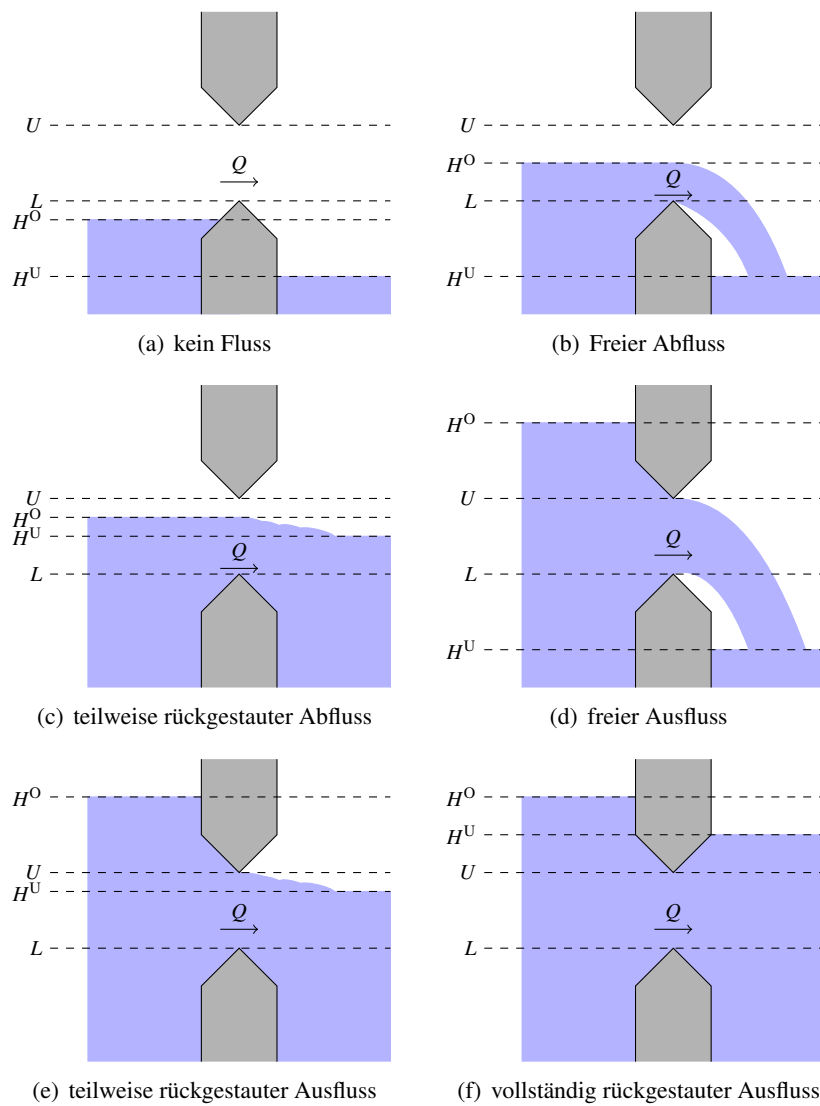


Abbildung 4.13: Fließzustände eines internen Überlaufs

und (4.20) vollständig beschreiben. Zusammenfasst ergibt sich für einen internen

Überlauf folgende Flussgleichung:

$$Q = \gamma \begin{cases} 0 & H^U, H^O \leq L \leq U \\ \frac{2}{3} (H^O - L)^{1.5} & H^U \leq L < H^O \leq U \\ -\frac{2}{3} h_L^{1.5} & H^O \leq L < H^U \leq U \\ \frac{2}{3} h^{1.5} + h_L h^{\frac{1}{2}} & L < H^U \leq H^O \leq U \\ -\frac{2}{3} \bar{h}^{1.5} - (H^O - L) \bar{h}^{\frac{1}{2}} & L < H^O < H^U \leq U \\ \frac{2}{3} [(H^O - L)^{1.5} - h_U^{1.5}] & H^U \leq L < U < H^O \\ -\frac{2}{3} [h_L^{1.5} - (H^U - U)^{1.5}] & H^O \leq L < U < H^U \\ \frac{2}{3} [h^{1.5} - h_U^{1.5}] + h_L h^{\frac{1}{2}} & L < H^U < U < H^O \\ -\frac{2}{3} [\bar{h}^{1.5} - (H^U - U)^{1.5}] - (H^O - L) \bar{h}^{\frac{1}{2}} & L < H^O < U < H^U \\ (U - L) h^{\frac{1}{2}} & L < U \leq H^U \leq H^O \\ -(U - L) \bar{h}^{\frac{1}{2}} & L < U \leq H^O < H^U \end{cases} \quad (4.39)$$

In der Gleichung wurden zu Gunsten der Übersichtlichkeit einige Terme zusammengefasst: der konstante Faktor zu $\gamma = \mu a \sqrt{2g}$, sowie einige Differenzen zu $h_U = H^O - U$, $h_L = H^U - L$, $h = H^O - H^U$ und $\bar{h} = H^U - H^O$.

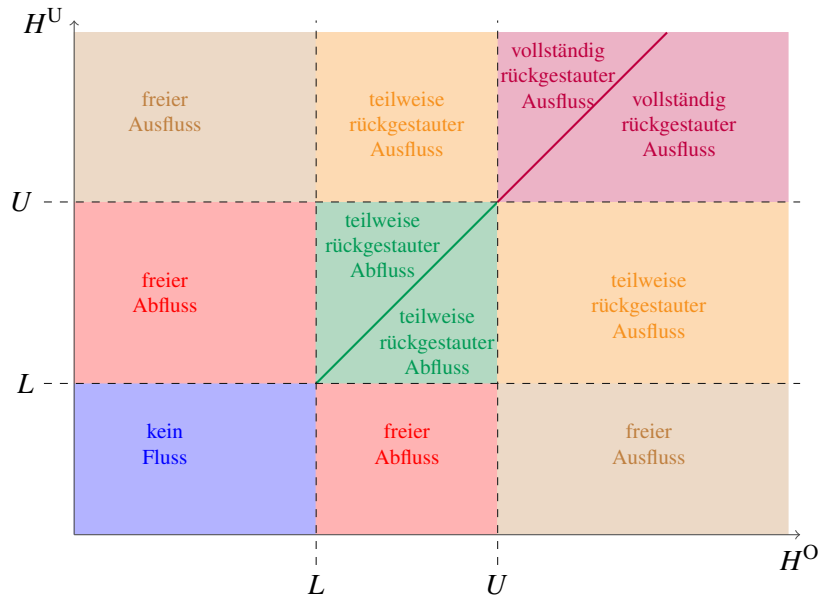


Abbildung 4.14: Schema des Flussprofils eines internen Überlaufs

In der Abbildung 4.14 ist das Flussprofil eines internen Überlaufs schematisch abgebildet. Diese Abbildung veranschaulicht, die Übergänge der Fließzustände ineinander. Untersucht man die Übergänge genauer, so erkennt man dass das Flussprofil eines internen Überlaufs eine stetige Funktion ist. Dies ist zusätzlich in Abbildung 4.15 dargestellt. Allerdings gilt es zu beachten, dass der Fluss der Fließzustände

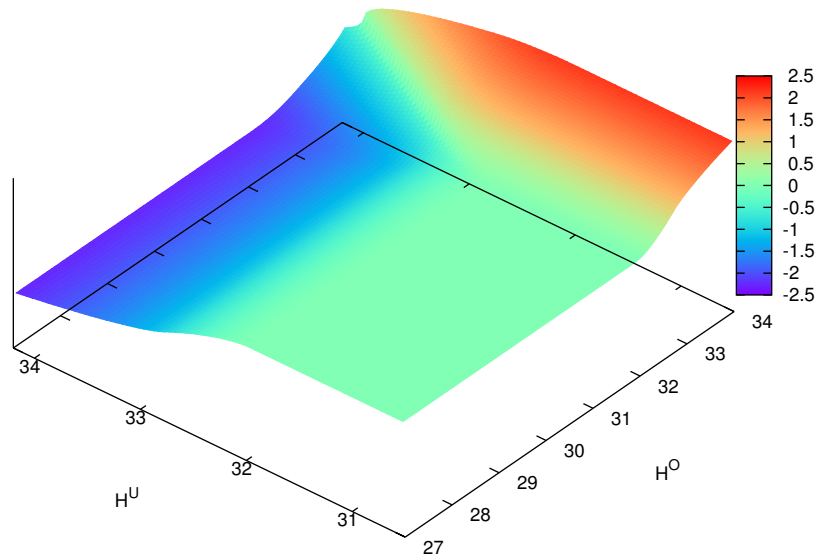


Abbildung 4.15: Flussprofil eines internen Überlaufs. Die Öffnung liegt zwischen 31.98 müNN und 32.78 müNN ist 80 cm breit. Insbesondere erkennt man die sehr große Steigung im Bereich $H^O \approx H^U$.

mit teilweise rückgestautem Wasser wie in den Abschnitten 4.1.3.2 und 4.1.3.4 beschrieben, nur approximativ angegeben ist.

Untersucht man nun die Ableitungen nach den Druckhöhen, so stellt man, fest, dass insbesondere im Falle des vollständig rückgestauten Ausflusses für $H^U(t) \rightarrow H^O(t)$ Komponenten des Gradienten gegen unendlich streben, so dass die Flussgleichung zwar stetig ist, aber nicht differenzierbar. Die Abbildung 4.15 stellt dieses Verhalten des Flussprofils anschaulich dar.

Eine Möglichkeit das Flussprofil exakt zu modellieren, ist die Darstellung mit so genannten strukturierten Mengen ("special ordered sets"), die auf ein gemischt-ganzzahliges Modell führt. In unserem Fall ist die Funktion $Q(t)$ von zwei Variablen abhängig (den Druckhöhen $H^O(t)$ und $H^U(t)$), daher werden zur Modellierung strukturierten Mengen vom Typ 3 benötigt [Kal02]. Unser Ziel ist es, die stückweise definierte Funktion $Q(t)$ als Summe der einzelnen Teilfunktionen darzustellen. Dies wird mit zusätzlichen Binärvariablen und kontinuierlichen Variablen realisiert.

Zunächst führen wir für jeden Überlauf eine Triangulierung (vergleiche auch Abbildung 4.16) des zulässigen Bereichs $[H_-^O, H_+^O] \times [H_-^U, H_+^U]$ für (H^O, H^U) so durch, dass innerhalb jedes Simplexes der Fluss durch eine glatte Funktion dargestellt werden kann.

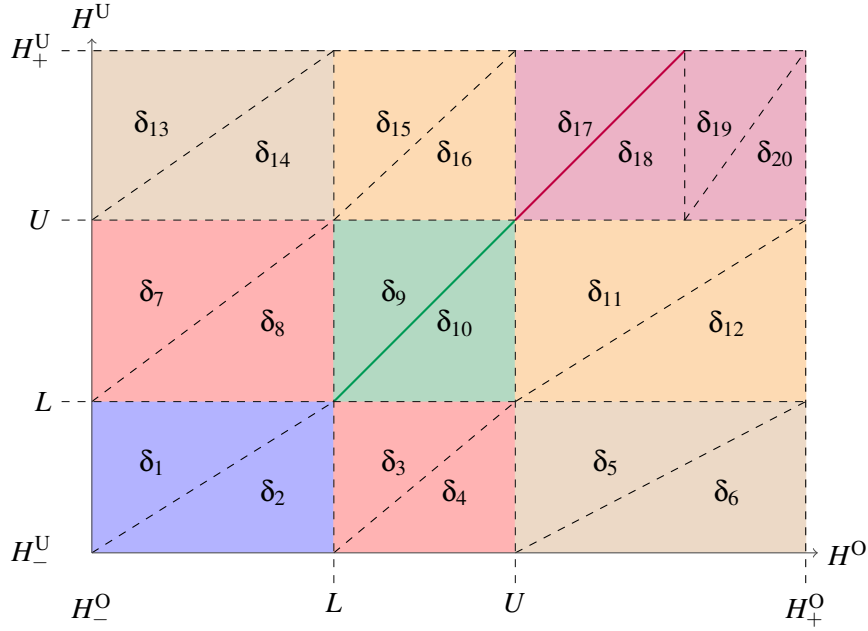


Abbildung 4.16: Beispiel für die Triangulierung eines internen Überlaufs

Die Eckpunkte dieser Triangulierung bilden ein Gitter

$$\left\{ \left(H_{v_i}^O, H_{v_j}^U \right) : (v_i, v_j) \in \mathcal{V}^O \times \mathcal{V}^U \right\} \quad (4.40)$$

mit

$$\mathcal{V}^O := \{H_-^O, L, U, H_+^O\} \quad \text{und} \quad \mathcal{V}^U := \{H_-^U, L, U, H_+^U\}. \quad (4.41)$$

Die durch die Triangulierung entstehenden Dreiecke bezeichnen wir mit Δ_s , $s \in \mathcal{S} = \{1, \dots, n\}$, wobei n die Anzahl der Simpleses angibt. Jedes Simplex wird durch 3 Gitterpunkte eindeutig charakterisiert. Zu jedem Dreieck Δ_s führen wir eine Binärvariable $\delta^s(t)$ ein. Außerdem ordnen wir jedem Simplex eine Gleichung für den Fluss $Q_s(t)$ zu. Dabei entspricht $Q_s(t)$ einer der Teilfunktionen der stückweise definierten Funktion $Q(t)$. Nun stellen wir $(H^O(t), H^U(t))$ als Konvexkombinationen der Gitterpunkte dar:

$$(H^O(t), H^U(t)) = \sum_{(v_i, v_j) \in \mathcal{V}^O \times \mathcal{V}^U} \lambda^{(v_i, v_j)}(t) \left(H_{v_i}^O, H_{v_j}^U \right), \quad (4.42)$$

$$\sum_{(v_i, v_j) \in \mathcal{V}^O \times \mathcal{V}^U} \lambda^{(v_i, v_j)}(t) = 1, \quad (4.43)$$

$$\lambda^{(v_i, v_j)}(t) \geq 0 \quad \forall (v_i, v_j) \in \mathcal{V}^O \times \mathcal{V}^U. \quad (4.44)$$

In der Konvexkombination sollen nur die Ecken genau des aktiven Simpleses Δ_s vorkommen, also der Simplex der $(H^O(t), H^U(t))$ enthält. Für alle anderen Ecken

(v_i, v_j) verlangen wir demnach

$$\lambda^{(v_i, v_j)}(t) = 0.$$

Um dies zu garantieren, führen wir folgende Restriktionen ein:

$$\sum_{s \in \mathcal{S}} \delta^s(t) = 1, \quad (4.45)$$

$$\lambda^{(v_i, v_j)}(t) \leq \sum_{s \in \{r \in \mathcal{S} : (v_i, v_j) \in \Delta_r\}} \delta^s(t) \quad \forall (v_i, v_j) \in \mathcal{V}^O \times \mathcal{V}^U, \quad (4.46)$$

$$\delta^s(t) \in \{0, 1\} \quad \forall s \in \mathcal{S}. \quad (4.47)$$

Mithilfe der Gleichungen (4.42) bis (4.47) ist jeder mögliche Punkt aus dem Bereich $[H_-^O, H_+^O] \times [H_-^U, H_+^U]$ eindeutig bestimmt. Der Fluss durch den Überlauf vom Ober- zum Unterwasser ergibt sich nun aus der Gleichung

$$Q(t) = \sum_{s \in \mathcal{S}} \delta^s(t) Q_s(t). \quad (4.48)$$

Aufgrund der Modellierung des Flusses $Q(t)$ durch die internen Überläufe mittels "special ordered sets" erhöht sich die Anzahl der Variablen im Modell erheblich. Für jeden internen Überlauf werden 18 Gitterpunkte und somit 18 Variablen λ^s pro Zeitschritt erzeugt. Weiter entstehen pro Überlauf 20 Simplices und folglich 20 Binärvariablen δ^s pro Zeitschritt. Zusätzlich benötigen wir zusätzlich zur Flussfunktion sechs lineare Beschränkungen für jedem Überlauf und jedem Zeitschritt. Eine alternative Modellierung des Flussprofils können wir mithilfe einer Approximation durch Splines realisieren. Da das Flussprofil der internen Überläufe im Gegensatz zu den Regenüberläufen aus Abschnitt 4.1.3.8 von den Druckhöhen des Ober- und des Unterwassers abhängt, muss auch die Approximation von diesen beiden Variablen abhängen. Wir approximieren das Flussprofil (4.39) hier mithilfe sogenannter bivariater Splines. Eine detaillierte Einführung und tiefer gehende Eigenschaften zu bivariaten Splines findet man unter Anderem in [BD83], [Boo01] und [Die95].

Konkret nutzen wir bivariate Tensorprodukt-Basis-Splines der Ordnung $k = (4, 4)$. Ziel ist es, eine zweifach stetig differenzierbare Approximation des Flussprofils zu erhalten, die den Fluss zwischen zwei internen Überlauf miteinander verbundenen Kanäle hinreichend genau beschreibt. Die Approximation wird auf dem zulässigen Bereichs $[H_-^O, H_+^O] \times [H_-^U, H_+^U]$ für (H^O, H^U) durchgeführt.

Im Folgenden gehen wir von einer Menge von Tupeln

$$\left\{ \left(H_{v_i}^O, H_{v_j}^U \right) : (v_i, v_j) \in \mathcal{G}^O \times \mathcal{G}^U \right\} \quad (4.49)$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^O &:= \{ H_-^O = H_0^O, H_1^O, \dots, H_n^O = H_+^O \} \\ \text{und} & \\ \mathcal{G}^U &:= \{ H_-^U = H_0^U, H_1^U, \dots, H_m^U = H_+^U \}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

Es gilt $n, m > 0$. Diese Tupel bilden ein Rechteckgitter, das den zulässigen Bereich vollständig überdeckt und als Träger der Basisfunktionen dient.

Das Flussprofil kann nun durch eine Tensorprodukt-Fläche wie folgt dargestellt werden:

$$Q(t) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \lambda_{ij} N_{i,H^O}(H^O(t)) N_{j,H^U}(H^U(t)). \quad (4.51)$$

Die B-Spline-Basisfunktionen sind mit N_{i,H^O} bzw. N_{j,H^U} bezeichnet. Die Koeffizienten λ_{ij} werden mithilfe eines Least-Squares-Ansatzes bestimmt. In Abbildung 4.17 ist der bei der Spline-Approximation auftretende Fehler eines typischen internen Überlaufs dargestellt. Insbesondere fällt auf, dass im Bereich $H^O \approx H^U$ der Fehler relativ groß ist. Dies kann durch die unendliche große Steigung im Bereich der vollständig überstauten Öffnung erklärt werden. Polynome, also auch Splines, können eine solche Steigung nicht abbilden, so dass deshalb dieser Fehler entsteht. Die weiteren sichtbaren Fehler zwischen etwa 32 müNN und 33 müNN liegen im Bereich der Öffnung, also dort, wo die Fließzustände sich ändern. Sie entstehen im wesentlichen aufgrund der Unstetigkeiten in den ersten und zweiten Ableitungen des Flussprofils.

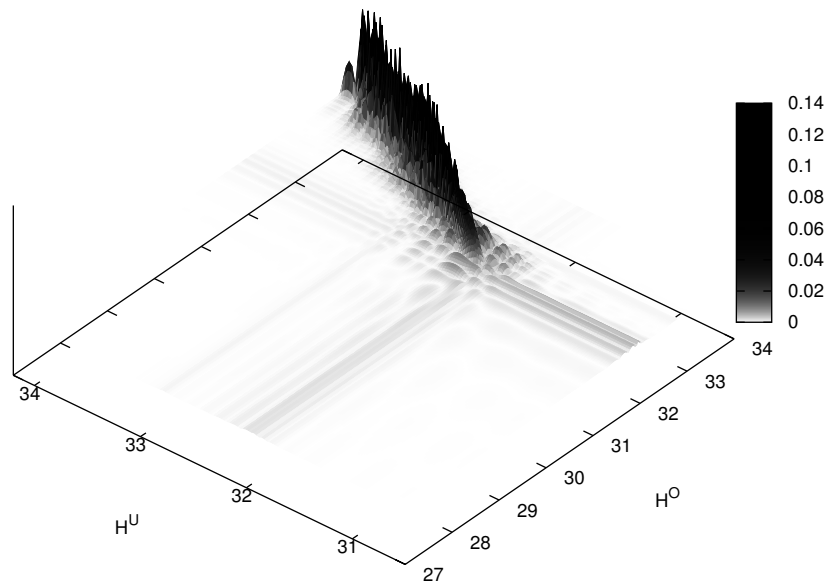


Abbildung 4.17: Absolutbetrag des Fehlers bei der Approximation des Flussprofils über einen internen Überlauf. Die Öffnung liegt zwischen 31.98 müNN und 32.78 müNN ist 80 cm breit. Typisch ist der relativ große Fehler im Bereich $H^O \approx H^U$ bei vollständig überstauter Öffnung, aufgrund der unendlich großen Steigung.

Wie schon bei den Regen- und Klärüberläufen bestehen auch interne Überläufe in der Regel aus mehreren Öffnungen. Der tatsächliche Fluss durch einen Überlauf ergibt sich aus der Summe des Flusses durch die N Öffnungen

$$\tilde{Q}(t) = \sum_{k=1}^N Q^k(H^O(t), H^U(t)). \quad (4.52)$$

Die Anzahl der Übergänge zwischen den Fließzuständen und die Anzahl der Fließzustände selbst kann sich dadurch, je nach Lage der Öffnungen, um den Faktor N vervielfachen.

Bei dem gemischt ganzzahligen Ansatz benötigen wir demnach die N -fache Anzahl Binärvariablen δ^i . Analog vervielfacht sich die Anzahl der reellen Variablen und die Anzahl der Restriktionen. Zusätzlich wird sich im Optimierungsmodell diese Anzahl aufgrund der Zeitdiskretisierung noch einmal erhöhen.

Die Approximation des Flussprofils durch Splines dagegen benötigt keine zusätzlichen Variablen, wenn sich die Anzahl der Öffnungen erhöht. Wir führen eine Approximation des Volumenstroms $\tilde{Q}(t)$ durch. Gegebenenfalls erhöht sich dann aufgrund der komplexeren Struktur des Flussprofils die Anzahl der Stützpunkte und damit die Anzahl der Spline-Basen. Die Bestimmung der Koeffizienten λ_{ij} wird jedoch einmalig vor dem Optimierungsprozess durchgeführt. Der Aufwand für die Auswertung der stückweise definierte Flussfunktion (4.51) erhöht sich linear in Abhängigkeit der von der Anzahl der Stützpunkte.

4.1.3.10 Fluss über Heber

Heber sind Überlaufbauwerke im Kanalnetz der Abwassersysteme. Sie verbinden zwei Kanäle miteinander oder einen Kanal mit einem Regenüberlaufbecken. Sie ähneln den internen Überläufen insofern, dass Heberbauwerke ebenfalls (rechteckige) Öffnungen in den Kanälen sind. Im Gegensatz zu den internen Überläufen ist bei Hebern über dem Überfallrücken eine Kappe und eine sogenannter Heberleitung angebracht, so dass der Auslass des Hebers unterhalb der eigentlichen Öffnung liegt. Der Fluss über einen Heber ist abhängig von den Druckhöhen des Ober- und Unterwassers durch die in Abschnitten 4.1.3.1 bis 4.1.3.7 beschriebenen Fließzustände bestimmt. Wir verwenden im Folgenden weiterhin die Notation aus den vorherigen Abschnitten.

Der Wasserspiegel kann bei einem Heber auf beiden Seiten der Öffnung unterhalb, innerhalb oder oberhalb der Öffnung liegen, so dass ein Fluss $Q(t)$ in beide Richtungen möglich ist, abhängig davon welche der beiden Druckhöhen $H^O(t)$ und $H^U(t)$ größer ist. Um die Flussrichtung zu charakterisieren, definieren wir, dass $Q(t)$ positiv ist, falls ein Fluss vom Oberwasser zum Unterwasser vorliegt, das heißt falls $H^O(t) > H^U(t)$. Andersherum, ist der Fluss $Q(t)$ negativ, falls das Wasser vom Unterwasser zum Oberwasser fließt, also $H^U(t) > H^O(t)$.

All das führt dazu, dass bei einem Heber bis zu fünf Fließzustände auftreten können, wobei der Fluss $Q(t)$ jeweils ein positives oder ein negatives Vorzeichen besitzen kann. Das Flussprofil eines Hebers setzt sich aus den Fließzuständen freier und teilweise rückgestauter Abfluss und freier und rückgestauter Heberausfluss, sowie dem Zustand in dem kein Fluss stattfindet zusammen. In Abbildung 4.18 sind verschiedenen Fließzustände für den positiven Fluss schematisch dargestellt.

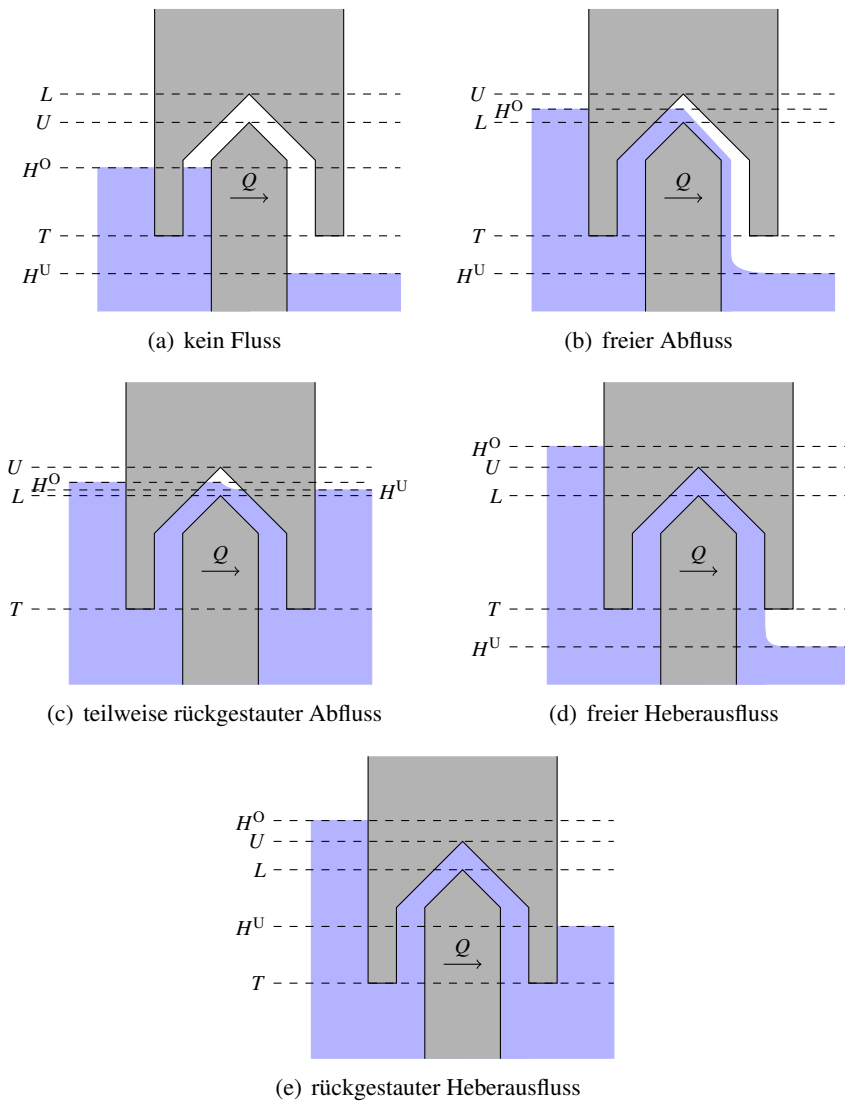


Abbildung 4.18: Fließzustände eines Hebers

Der Fluss lässt sich durch die Gleichungen (4.5), (4.11), (4.23) und (4.26) vollstän-

dig beschreiben. Zusammengefasst ergibt sich folgende Flussgleichung:

$$Q = \gamma \begin{cases} 0 & H^U, H^O \leq L \leq U \\ \frac{2}{3} (H^O - L)^{\frac{3}{2}} & H^U \leq L < H^O \leq U \\ -\frac{2}{3} (H^U - L)^{\frac{3}{2}} & H^O \leq L < H^U \leq U \\ \frac{2}{3} (H^O - H^U)^{\frac{3}{2}} + h_U (H^O - H^U)^{\frac{1}{2}} & L < H^U \leq H^O \leq U \\ -\frac{2}{3} (H^U - H^O)^{\frac{3}{2}} - h_O (H^U - H^O)^{\frac{1}{2}} & L < H^O < H^U \leq U \\ (U - L) (H^O - T)^{\frac{1}{2}} & H^U \leq T < U < H^O \\ -(U - L) (H^U - T)^{\frac{1}{2}} & H^O \leq T < U < H^U \\ (U - L) (H^O - H^U)^{\frac{1}{2}} & T < H^U \leq U \leq H^O \\ -(U - L) (H^U - H^O)^{\frac{1}{2}} & T < H^O \leq U \leq H^U \\ (U - L) (H^O - H^U)^{\frac{1}{2}} & U \leq H^U \leq H^O \\ -(U - L) (H^U - H^O)^{\frac{1}{2}} & U \leq H^O < H^U \end{cases} \quad (4.53)$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde erneut auf das Zeitargument verzichtet und einige Terme zusammengefasst: $\gamma = \mu a \sqrt{2g}$, $h_O = H^O - L$ und $h_U = H^U - L$.

Wir nehmen bei dem Fluss über einen Heber an, dass der Hebereffekt erst dann einsetzt, wenn der Wasserspiegel des Oberwassers die Öffnung vollständig überstaut, also wenn gilt $H^O(t) > U$. Tatsächlich setzt der Hebereffekt schon bei etwas geringerer Druckhöhe $H^O(t)$ ein, aber die genaue Druckhöhe lässt sich in der Regel ausschließlich empirisch bestimmen und hängt unter Anderem von der Form des Hebers und der Heberleitung ab. Durch diese Annahme unterschätzen wir den tatsächliche Fluss betragsmäßig, d.h. es fließt weniger Wasser über den Heber als es tatsächlich der Fall ist. Analog gilt dies für den Fall $H^O < H^U$, also negativen Fluss.

Das vollständige Flussprofils eines Hebers ist in Abbildung 4.19 schematisch dargestellt. Insbesondere stellt diese Abbildung heraus, welche Fließzustände ineinander übergehen. Wir untersuchen zunächst den Übergang vom freien Abfluss zum freien Heberabfluss im Fall des positiven Flusses, also $H^O > H^U$. Es gilt: $H^U \leq T$. Für den Grenzübergang $H^O \nearrow U$, also $H^O \leq U$, gilt nach Gleichung (4.53):

$$Q = \frac{2}{3} \gamma (H^O - L)^{\frac{3}{2}} \rightarrow \frac{2}{3} \gamma (U - L)^{\frac{3}{2}}.$$

Andererseits gilt für den Grenzübergang $H^O \searrow U$, also $H^O \geq U$:

$$Q = \gamma (U - L) (H^O - T)^{\frac{1}{2}} \rightarrow (U - L) (U - T)^{\frac{1}{2}}$$

Offensichtlich ist das Flussprofil an diesem Übergang unstetig. Ebenso ist der Übergang vom teilweise rückgestauten Abfluss zum rückgestauten Heberabfluss nicht stetig. In diesem Fall steht das Unterwasser innerhalb der Öffnung, $L \leq H^U \leq$

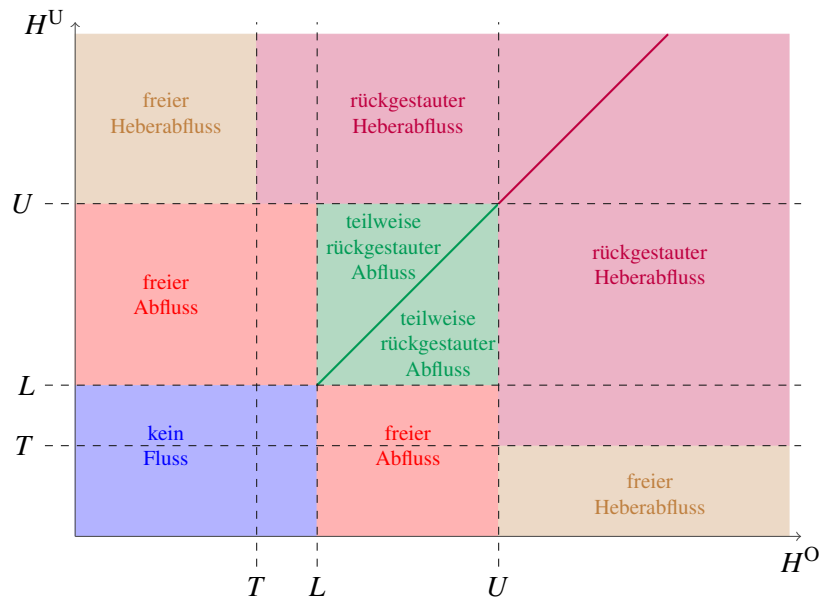


Abbildung 4.19: Schematische Darstellung eines Flussprofils eines Hebers

U . Es gilt nun für Grenzübergang $H^O \nearrow U$

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{2}{3}\gamma(H^O - H^U)^{\frac{3}{2}} + (H^U - L)(H^O - H^U)^{\frac{1}{2}} \\
 &\rightarrow \frac{2}{3}\gamma(U - H^U)^{\frac{3}{2}} + (H^U - L)(U - H^U)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

und andererseits für $H^O \searrow U$

$$Q = \gamma(U - L)(H^O - H^U)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \gamma(U - L)(U - H^U)^{\frac{1}{2}}.$$

Physikalisch lassen sich die Unstetigkeiten durch das sprunghafte evakuieren des Hebers erklären, was dazu führt, dass auch die Abflussleistung plötzlich ansteigt. Zusätzlich gibt es wie im Fall des internen Überlaufs Zustandsübergänge bei denen Komponenten des Gradienten vom Fluss $Q(t)$ gegen unendlich streben. Insbesondere tritt dies im Fall des rückgestauten Heberabflusses und des rückgestauten Abflusses auf, wenn $H^U(t) \rightarrow H^O(t)$ strebt.

Die Flussgleichung 4.53 ist also eine unstetige Funktion, die von den Druckhöhen $H^O(t)$ und $H^U(t)$ abhängt. Zusätzlich treten bei der Flussfunktion Polstellen in den Ableitungen auf. In Abbildung 4.20 ist das Flussprofil eines typischen Heberüberlaufs abgebildet. Dieser Heber besteht aus zwei rechteckigen Öffnungen, die zwischen 32.15 müNN und 32.40 müNN bzw. zwischen 32.45 müNN und 32.70 müNN, die Öffnungen sind 4.5 m und 9 m breit und die Heberauslässe befinden sich auf 31.50 müNN und 31.55 müNN.

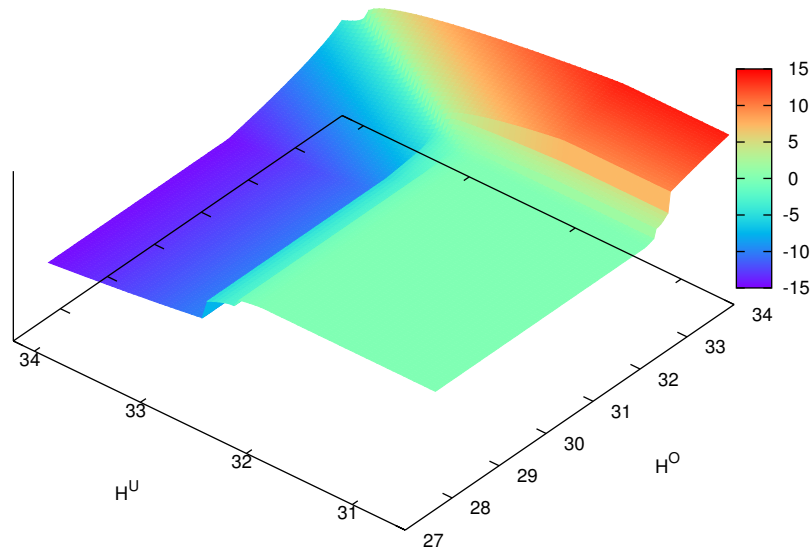


Abbildung 4.20: Flussprofil eines Hebers mit zwei Öffnungen zwischen 32.15 müNN und 32.40 müNN bzw. zwischen 32.45 müNN und 32.70 müNN. Insbesondere erkennt man die Unstetigkeiten bei den Übergängen vom freien Abfluss zum freien Heberabfluss und vom teilweise rückgestauten Abfluss zum rückgestauten Heberabfluss

Das ein Heberbauwerke aus mehreren einzelnen Hebern besteht ist typisch für reale Abwassernetzwerke und führt je nach Anordnung der Öffnungen und Auslässe zu einer Vervielfachung der Fließzustände. Heberläufe können analog zu den internen Überläufen mittels special ordered sets exakt modelliert werden. Dies führt aufgrund der notwendigen Binärvariablen und Triangulisierungen auf eine gemischt-ganzzahlige Formulierung des Flussprofils.

Ebenfalls analog zu den internen Überläufen kann das Flussprofil mittels bivariaten Splines approximiert werden und somit durch ein nichtlineares kontinuierliche Formulierung beschrieben werden:

$$Q(t) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \lambda_{ij} N_{i,H^O}(H^O(t)) N_{j,H^U}(H^U(t)). \quad (4.54)$$

N_{i,H^O} bzw. N_{j,H^U} bezeichnen die B-Spline-Basisfunktionen und die Koeffizienten λ_{ij} werden mithilfe eines Least-Squares-Ansatzes bestimmt. In Abbildung 4.21 ist der bei der Spline-Approximation auftretende Fehler eines typischen internen Überlaufs dargestellt. Wie schon bei den internen Überläufen ist der Fehler im Bereich $H^O \approx H^U$ relativ groß, da die unendliche große Steigung im Bereich der

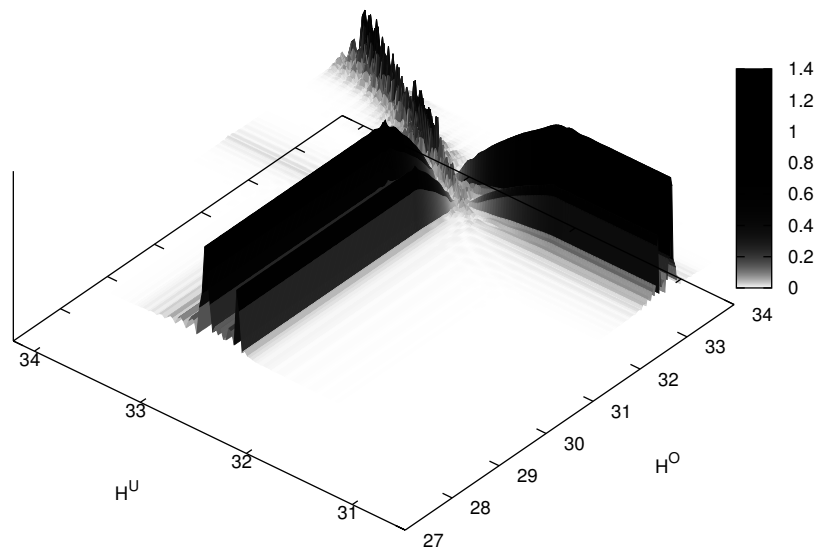


Abbildung 4.21: Absolutbetrag des Fehlers bei der Approximation des Flussprofils über einen Heberüberlauf mit zwei Öffnungen zwischen 32.15 müNN und 32.40 müNN bzw. zwischen 32.45 müNN und 32.70 müNN.

vollständig überstauten Öffnung durch Polynome, also auch Splines, nicht abgebildet werden kann. Zusätzlich ist der Fehler im Bereich der Übergänge vom freien Abfluss zum freien Heberabfluss und vom teilweise rückgestauten Abfluss zum rückgestauten Heberabfluss deutlich zu sehen. Dieser Fehler entsteht aufgrund der Unstetigkeiten im exakten Flussprofil. Diese Fehler können auch durch eine andere Wahl der Gitterpunkte nicht wesentlich verringert werden, da aufgrund der Unstetigkeiten immer Fehler in dieser Größenordnung entstehen.

4.1.4 Drosseln und Drosselstrecken

Eine weitere Sonderform der wasserstandsabhängigen Bauwerke im Kanalnetz sind sogenannte Drosseln (Drosselstrecken, Drosselorgane). Im Normalfall durchströmt Mischwasser eine Drossel vom höher- zum tiefergelegenen Kanal, in der Menge begrenzt auf die Drosselleistung, das heißt der maximale Fluss zwischen den beiden Kanälen ist nach oben beschränkt. Bei Einstau der tiefer gelegenen Kanäle bis hin zu der Ordinate, auf der die Drossel angeordnet ist, können die Kanäle jedoch einen kombinierten Speicher bilden. Eine rückwärtige Durchströmung der Drossel ist dann möglich.

Wir unterscheiden zwei verschiedene Drosselformen: feste Drosseln und variable Drosseln.

Eine feste Drosseln besitzt eine konstante obere Schranke Q^{\max} für den Volumenstrom $Q(t)$ durch die Drossel. Insbesondere ist der Maximalfluss unabhängig von den Druckhöhen in den angrenzenden Kanälen [Hag95]. Durch die festen Drosseln ist außer dem Fluss vom höher zum tiefer gelegenden Kanal auch ein Fluss vom tiefer zum höher gelegenden Kanal möglich, wenn die Höhen der Kanäle dies zulassen. Der maximale Fluss beträgt dann $-Q^{\max}$. Der Maximalfluss hängt dabei von Form und Bauweise der Drossel ab.

Bei variablen Drosseln wird der Maximalfluss indirekt gesteuert. Der zum Zeitpunkt t maximal mögliche Fluss Q^{\max} durch eine variable Drossel wird durch den aktuellen Fluss $Q^{\text{ps}}(t)$ des Pumpwerks im tiefer gelegenen Kanal bestimmt. Ein weiterer Unterschied zu den festen Drosseln ist, dass variable Drosseln keinen Fluss vom tiefergelegenden zum höhergelegenden Kanal zulassen.

In einer Drossel sind fünf verschiedene Fließzustände möglich. Diese sind in Abbildung 4.22 schematisch dargestellt.

Der freie ungedrosselte Abfluss tritt auf, wenn die Druckhöhe des Oberwassers zum Zeitpunkt t innerhalb der Drosselöffnung liegt, $L \leq H^O(t) \leq U$ und die Druckhöhe des Unterwassers unterhalb der Öffnung, $H^U(t) \leq L$ (vgl. auch Abbildung 4.22(a)). Es handelt sich hier um einen freien Überfall aus einer Seitenöffnung, wie in Abschnitt 4.1.3.1 und der Fluss vom Ober- zum Unterwasser kann durch die Flussformel nach Poleni (4.5 beschrieben werden:

$$Q(t) = \frac{2}{3} \mu a \sqrt{2g} (H^O(t) - L)^{\frac{3}{2}}.$$

Die Öffnung einer Drossel ist dabei so konstruiert, dass der Maximalfluss Q^{\max} nicht überschritten werden kann.

Im zweiten Fall ist die Drosselöffnung vom Oberwasser vollständig überstaut, das heißt $H^O(t) > U$. Die Druckhöhe des Unterwassers unterhalb der Öffnung, $H^U(t) \leq L$ (siehe Abbildung 4.22(b)). Hier müssen zwei Fließzustände unterschieden werden. Der Fluss kann mithilfe der Flussformel nach Torricelli aus Abschnitt 4.1.3.3

$$Q(t) = \frac{2}{3} \mu a \sqrt{2g} \left[(H^O(t) - L)^{\frac{3}{2}} - (H^O(t) - U)^{\frac{3}{2}} \right].$$

beschrieben werden, solange die Drosselwirkung nicht einsetzt, das heißt solange $Q(t) \leq Q^{\max}$. Ist die Druckhöhe des Oberwassers so groß, dass dieser Maximalfluss überschritten wird, wird der Fluss gedrosselt und es gilt $Q(t) = Q^{\max}$.

Das Fließverhalten im Falle der teilweise oder vollständig überstauten Drossel (siehe Abbildung 4.22(c) bis 4.22(e)) kann analog beschrieben werden: Solange der Fluss $Q(t)$ kleiner als der von der Drossel vorgegebene Maximalfluss ist, wird dieser mithilfe der entsprechenden Flussformel für den Abfluss aus einer Seitenöffnung bestimmt und ansonsten durch den Maximalfluss Q^{\max} begrenzt.

Da die Übergänge vom freien zum gedrosselten Fluss die möglichen Fließzustände nahezu verdoppeln, liegt insbesondere bei den festen Drosseln ein sehr komplexes Flussprofil vor. Die Übergänge zum gedrosseltem Abfluss sind grundsätzlich

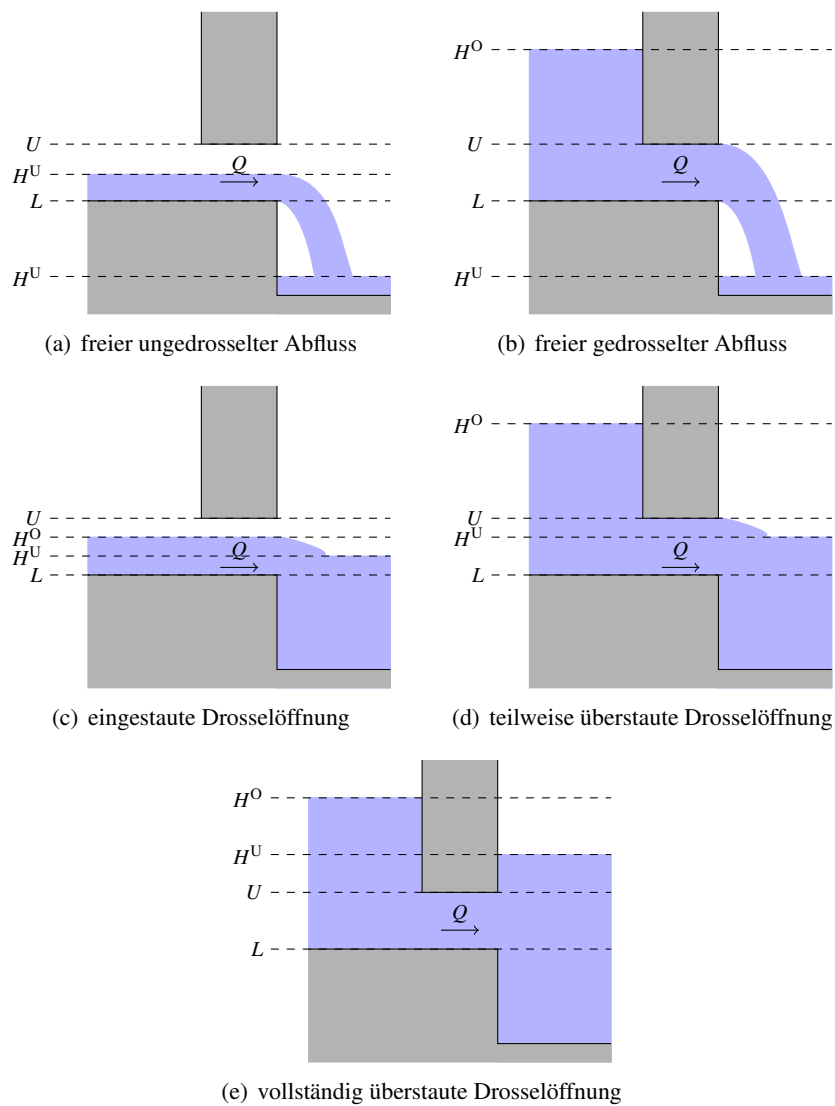


Abbildung 4.22: Fließzustände einer Drossel

nicht differenzierbar. Hinzu kommt, dass Drosseln grundsätzlich am tiefsten Punkten eines Kanals angebracht sind. Hier führt ein Überschätzen des Flusses unter Umständen auf einen unzulässigen Systemzustand, das heißt es tritt ein negatives Volumen im oberen Kanal auf. Insbesondere würde ein solches Überschätzen bei einer Spline-Approximation auftreten, wie sie bei internen Überläufen und Hebern durchgeführt wurde. Auch eine Modellierung mithilfe strukturierter Mengen ist hier zwar grundsätzlich möglich, führt aber aufgrund der sehr zahlreichen Fließzustände auf einer Vielzahl binärer Variablen und zusätzlicher reeller Variablen und Restriktionen. Hinzu kommt, dass auch hier bei einer Zeitdiskretisierung, wie sie in den Optimierungsmodellen durchgeführt wird, ebenfalls unzulässige Systemzu-

stände auftreten können. Aus diesen Gründen haben wir uns an dieser Stelle für eine gänzlich andere Modellierung entschieden.

Zunächst modellieren wir das Flussprofil einer festen Drossel. Wir beschränken in jedem Zeitpunkt t Fluss den $Q(t) \in [Q^{\max}, -Q^{\max}]$ und stellen damit sicher, dass der Maximalfluss in keinem Zustand überschritten werden kann. Die folgende Beschränkung stellt sicher, dass in keinem der beiden Kanäle ein negatives Volumen auftritt:

$$V^O(t^0) \geq \int_{t^0}^t Q(\tau) \, d\tau \quad (4.55)$$

Gleichung 4.55 stellt sicher, dass das Volumen zum Zeitpunkt t^0 nicht kleiner ist als die Summe der Abflüsse zwischen zwei betrachteten Zeitpunkten t^0 und t . Insbesondere wenn das Problem in der Zeit diskretisiert wird, wie es bei der Formulierung des NLP's bzw. MINLP's der Fall ist, stellt diese Restriktion sicher, dass ausschließlich zulässige Lösungen erzeugt werden. Analog formulieren wir eine äquivalente Beschränkung für das Unterwasser

$$V^U(t^0) \geq - \int_{t^0}^t Q(\tau) \, d\tau \quad (4.56)$$

Bisher ist die Flussrichtung durch eine Drossel durch die Gleichungen (4.55) und (4.56) nicht festgelegt. Um sicherzustellen, dass der Fluss vom Kanal mit der größeren Druckhöhe zum Knoten mit der geringeren Druckhöhe gerichtet ist, formulieren wir folgende Konsistenzbedingung:

$$Q(t) (H^O(t) - H^U(t)) \geq 0, \quad (4.57)$$

so dass der Fluss $Q(t)$ genau dann positiv ist, wenn der Wasserspiegel der Oberwassers über dem des Unterwassers liegt $H^O(t) > H^U(t)$, und umgekehrt.

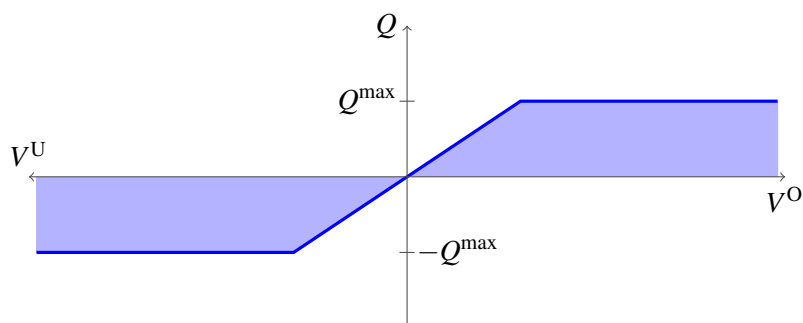


Abbildung 4.23: zulässiger Bereich einer festen Drossel und tatsächlicher Fluss (durchgezogene Linie)

In Abbildung 4.23 ist der von den Gleichungen (4.55) bis (4.57) und den einfachen Schranken beschriebene Fluss skizziert. Insbesondere ist der Fluss durch die Gleichungen nicht eindeutig bestimmt, sondern sie beschreiben den Bereich in der die

Drossel betrieben bzw. gesteuert werden könnte, ohne dass das System inkonsistent wird. Tatsächlich ist der Durchfluss einer Drossel nicht steuerbar, sondern wird durch die Volumina und Druckhöhen der angrenzenden eindeutig bestimmt. Dieser Flusswert befindet sich auf dem äußeren Rand des zulässigen Bereichs, also dort wo der Fluss betragsmäßig am größten ist. Dieser Flusswert stellt nur eine Approximation des tatsächlichen Flusses dar, ist aber für die Optimierung hinreichend genau, da insbesondere bei stark gefüllten Kanälen die Drossel fast ausschließlich ein gedrosselter Fluss stattfindet und dieser ist exakt modelliert. Das nun der betragsmäßig größte Fluss angenommen wird, stellen wir sicher, indem wir der Zielfunktion des Optimierungsproblems einen zusätzlichen Term hinzufügen, der den Fluss durch die Drossel betragsmäßig maximiert.

Die variable Drossel modellieren wir analog zur festen Drossel. In einer variablen Drossel ist nur ein positiver Fluss möglich, das heißt vom höher zum tiefer gelegenen Kanal. Zusätzlich hängt der Maximalfluss zum Zeitpunkt t hier vom aktuellen Fluss $Q^{\text{ps}}(t)$ des angrenzenden Pumpwerks ab. Genauer gesagt, beträgt der maximale Volumenstrom im Zeitpunkt t ein skalares Vielfaches $\alpha \in (0, 1]$ des Flusses $Q^{\text{ps}}(t)$. Damit gilt

$$Q(t) \in [0, \alpha Q^{\text{ps}}(t)]. \quad (4.58)$$

Mit Gleichung (4.55) stellen wir erneut sicher, dass das Volumen im höher gelegenen Kanal nicht negativ werden kann. Aufgrund des ausschließlich positiven Flusses benötigen wir eine solche Bedingung an das Volumen des tiefer gelegenen Kanals nicht. Dennoch benötigen wir die Konsistenzbedingung an die Flussrichtung (4.57), um sicher zu stellen, dass der Volumenstrom nur dann positiv ist, wenn die Wasserstände dies zulassen. In Abbildung 4.24 ist der beschriebene zulässige Fluss dargestellt.

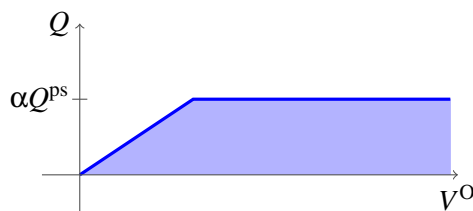


Abbildung 4.24: zulässiger Bereich einer variablen Drossel und tatsächlicher Fluss (durchgezogene Linie)

Wie bei den festen Drosseln ist der Fluss durch die oben genannten Bedingungen nicht eindeutig bestimmt. Der gewünschte Flusswert befindet sich auf dem äußeren Rand des zulässigen Bereichs, also dort wo der Fluss betragsmäßig am größten ist. Um sicher zu stellen, dass dieser angenommen wird, fügen wir der Zielfunktion des Optimierungsproblems einen zusätzlichen Term hinzu, der den Fluss durch die Drossel betragsmäßig maximiert.

4.1.5 Pumpen

Pumpen sind die steuerbaren Elemente des Kanalnetzes. Der Fluss $Q(t)$ durch eine Pumpe kann zu jedem Zeitpunkt eingestellt bzw. verändert werden. Wir unterscheiden zwei verschiedene Typen von Pumpen. Der erste Typ Pumpen sind die sogenannten Entlastungspumpen, die zwei Kanäle oder ein Kanal und ein Regenüberlaufbecken innerhalb des Kanalnetzes miteinander verbinden. Sie dienen in erster Linie dazu, bei zu starkem Zufluss in einem Kanal, diesen zu entlasten und so zu verhindern, dass ungeklärtes Abwasser über die Überläufe in die Umwelt gelangt.

Der zweite Typ Pumpen sind die sogenannten Pumpwerke, die das Abwasser in das Abwasserdruckleitungsnetz einspeisen. Die Pumpwerke bestehen aus mehreren einzelnen Pumpen und sind äußerst leistungsfähig. In den folgenden beiden Abschnitten beschreiben wir zunächst die Funktion und Modellierung der Entlastungspumpen und anschließend die der Pumpwerke.

4.1.5.1 Entlastungspumpen

Die Entlastungspumpen dienen der Entlastung der Kanäle im Falle starker Zuflüssen und speisen das Abwasser zur Zwischenspeicherung in Regenüberlaufbecken und Stauraumkanäle ein. Der Fluss $Q(t)$ durch eine Entlastungspumpe ist stets nichtnegativ. Dementsprechend kann das zwischengespeicherte Abwasser nicht zurück in den Abwasserkanal gepumpt werden, sondern verbleibt in den Überlaufbecken und Stauraumkanälen. Erst zu einem späteren, in unserem Modell nicht mehr betrachteten Zeitpunkt wird das Abwasser wieder in den Kanal eingespeist und den Klärwerken zugeführt.

In der Praxis werden Entlastungspumpen mit fester Fördermenge betrieben. Eine zeitliche Auflösung des Anfahrens und Abfahrens der Pumpen wäre im Optimierungsmodell nur mit sehr feiner Zeitdiskretisierung möglich, die bei Abwassernetzwerken der hier betrachteten Größenordnung nicht mehr praktikabel ist. Es entsteht die Schwierigkeit, eingeschaltete Pumpen mit strikt positivem Volumenstrom $Q(t) = Q^{\max}$ und ausgeschaltete Pumpen mit $Q(t) = 0$ zu unterscheiden. Dies erfordert ein gemischt-ganzzahliges Modell. Es gilt also zu jedem Zeitpunkt

$$Q(t) = \{0, Q^{\max}\}. \quad (4.59)$$

Weitere Einschränkungen an den Volumenstrom gibt es nicht.

Ein nichtlineares Modell ohne ganzzahlige Variablen der Entlastungspumpen erhalten wir, wenn die Pumpen dagegen als stufenlos regelbare Steuerelemente abbilden und die diskrete Entscheidung relaxieren

$$Q(t) = [0, Q^{\max}]. \quad (4.60)$$

Wir verzichten bei unserer Modellierung auf weitere technische Beschränkungen, so dass die Modellierung gegenüber [BGS09b] vereinfacht werden konnte. Diese

Formulierung führt dazu, dass die zulässige Menge erweitert wird und auch Lösungen aus dem Inneren des Intervalls möglich sind. Auf der anderen Seite lässt sich so zusätzliches Optimierungspotential im Kanalnetz ausloten.

4.1.5.2 Pumpwerke

Pumpwerke gehören jeweils zu einem Kanalnetz bzw. Einzugsgebiet. Sie fördern das ihrem Saugraum zufließende Abwasser über Druckleitungen zu den Kläranlagen. Den Abwasserpumpwerken sind Volumenströme $Q(t)$ zugeordnet. Dieser Fluss $Q(t)$ durch die Pumpwerke ist zu jedem Zeitpunkt nichtnegativ. Ein Abwasserpumpwerk besteht aus mehreren einzelnen leistungsfähigen Pumpen. Im Modell gehen wir davon aus, dass die Fördermenge nach oben nicht beschränkt ist und zu jedem Zeitpunkt jede beliebige Menge Abwasser gefördert werden kann.

$$Q(t) \in [0, \infty). \quad (4.61)$$

Für die Zwecke unserer Untersuchung unterliegen die Pumpwerke keinen direkten technischen Beschränkungen, wie Anfahrtszeiten der Pumpen und ähnliches. Dadurch ergeben sich Vereinfachungen gegenüber der Modellierung in [BGS09b]. Tatsächlich ist der Volumenstrom beim Betrieb der Abwasserpumpwerke indirekt durch Beschränkungen durch die Druckgrenzen des ADL-Netzes sowie aus den Kapazitätsgrenzen der Klärwerke nach oben beschränkt.

4.2 Das ADL-Netz

Das Abwasserdruckleitungsnetz (ADL-Netz) verbindet die einzelnen Kanalnetze über die in Abschnitt 4.1.5.2 beschriebenen Pumpwerke mit den Kläranlagen. Das Abwasserdruckleitungsnetz weist von allen Teilsystemen eines Abwassersystems die größten Gemeinsamkeiten mit einem Trinkwassernetz auf wie es in [BGS09b], [BGS09a] und [BGS06] beschrieben und modelliert ist.

Das ADL-Netz ist ein eng vermaschtes Druckleitungsnetz, bestehend aus Verzweigungen, Rohrleitungen und Ventilen, über die das Abwasser von den Pumpwerken zu den einzelnen Klärwerken geleitet wird. Von den Pumpwerken wird das Abwasser unter Druck in das ADL-Netz eingespeist und von dort aus über Rohrleitungen zu den Klärwerken transportiert. Die Ventile sorgen zum Einen dafür, dass das Abwasser von jedem Pumpwerk zu jedem beliebigen Klärwerk transportiert werden kann, und zu Anderem werden Ventile im Falle von Havarien und Instandsetzungen dazu benutzt, Teile vom ADL-Netz abzutrennen. Um in diesen Fällen einen adäquaten Betrieb des ADL-Netzes zu gewährleisten, ist das Netz sehr eng vermascht und zum Teil mit parallel verlaufenden Rohren ausgestattet. Im Gegensatz zum Kanalnetz handelt bei dem hier betrachteten Volumenströmen um Druckrohrströmungen.

In den folgenden Abschnitten untersuchen wir die Eigenschaften der Elemente des ADL-Netzes eingehend und stellen die für die Optimierung benötigten Gleichungen abhängig von Fluss und Druckhöhe auf.

4.2.1 Verzweigungen

Verzweigungen sind Verbindungen zwischen Rohren und Ventilen im ADL-Netz. In einer Verzweigung treffen mindestens zwei dieser Elemente aufeinander und das Abwasser wird auf diese Elemente verteilt. Zusätzlich kann zu jedem Zeitpunkt t Abwasser exogen in eine Verzweigungen eingespeist werden. Es gibt also einen nicht negativen Zufluss $Q^{\text{in}}(t)$ in eine Verzweigung.

Die Modellierung ähnelt der der Kanäle aus Abschnitt 4.1.1, unterscheidet sich aber einem wesentlichen Punkt. Verzweigungen besitzen im Gegensatz zu den Kanälen keine Speicherkapazitäten, so dass sämtliches in einem Zeitpunkt t zufließendes Wasser auch direkt wieder abfließen muss. Das heißt, die Summe der Volumenströme der Zuflüsse \mathcal{Z} inklusive dem externen Zufluss $Q^{\text{in}}(t)$ ist gleich der Volumenströme der Abflüsse \mathcal{A} in einem Zeitpunkt t :

$$\sum_{i \in \mathcal{Z}} Q_i(t) + Q^{\text{in}}(t) = \sum_{i \in \mathcal{A}} Q_i(t). \quad (4.62)$$

In jeder Verzweigung darf zu keinem Zeitpunkt eine bestimmte Druckhöhe über- bzw. unterschritten werden

$$H(t) \in [H^-, H^+]. \quad (4.63)$$

Die Schranken sorgen dafür, dass die Druckhöhen in der Verzweigung selbst, aber indirekt auch in den angrenzenden Rohren und Ventilen innerhalb dervorgeschriebenen technischen Bereiche bleiben [BGS09b].

4.2.2 Rohrleitungen

Die Rohrleitungen des ADL-Netzes transportieren das Abwasser von einer Verzweigung i mit einer Druckhöhe $H_i(t)$ zu einer Verzweigung j mit einer Druckhöhe $H_j(t)$. Das Abwasser fließt immer von der höheren zur niedrigeren Druckhöhe. In jedem Rohr verursacht Reibung einen flussabhängigen hydraulischen Druckverlust [DCL98], [KHCL08]. Dieser Druckverlust in einem kreisförmigen Rohr mit Länge L , inneren Durchmesser D und Rauigkeit k ist physikalisch gegeben durch die Formel von Darcy-Weisbach (vgl. [DCL98], [KHCL08]),

$$H_i(t) - H_j(t) = \lambda(v(t)) \frac{L}{D} \frac{v(t) |v(t)|}{2g}. \quad (4.64)$$

Die durchschnittlichen Fließgeschwindigkeit $v(t)$ zum Zeitpunkt t ergibt sich aus der Flussrate dividiert durch den Querschnitt des Rohres

$$v(t) = \frac{Q(t)}{A} = \frac{4}{\pi D^2} Q(t).$$

Damit ergibt sich für den Reibungsverlust im Rohr abhängig von der Flussrate

$$\Delta H_{ij}(t) := H_i(t) - H_j(t) = r(Q(t))Q(t)|Q(t)|, \quad (4.65)$$

wobei der Koeffizient für die hydraulischen Verluste, die sogenannte Rohrreibungszahl folgende Terme zusammenfasst

$$r(Q(t)) = \frac{8L}{\pi^2 g D^5} \lambda(Q(t)). \quad (4.66)$$

Der Druck nimmt in Flussrichtung ab, und der Reibungsverlust hängt im Wesentlichen von der Flussrate ab.

Die Rohrreibungszahl λ wird durch die Charakteristik des Flusses bestimmt, die durch die Reynoldszahl Re beschrieben wird [BGS09a]

$$Re(t) = \frac{D}{\nu} |v(t)| = \frac{4}{\pi \nu D} |Q(t)|,$$

wobei ν die kinematische Viskosität des Abwassers bezeichnet. Wir unterscheiden die beiden Fälle des laminaren und des turbulenten Flusses.

Beim laminaren Fluss gilt die Reynoldszahl $Re(t) < 2320$ und der Reibungsverlust hängt ausschließlich von der Reynoldszahl ab. Nach dem Gesetz von Hagen-Poiseuille gilt:

$$\lambda^{HP}(t) = \frac{64}{Re(t)}. \quad (4.67)$$

Der hydraulische Druckverlust ist in diesem Fall eine von der Flussrate $Q(t)$ linear abhängige Funktion

$$\Delta H(Q(t)) = H_i(t) - H_j(t) = \frac{128\nu L}{\pi g D^4} Q(t). \quad (4.68)$$

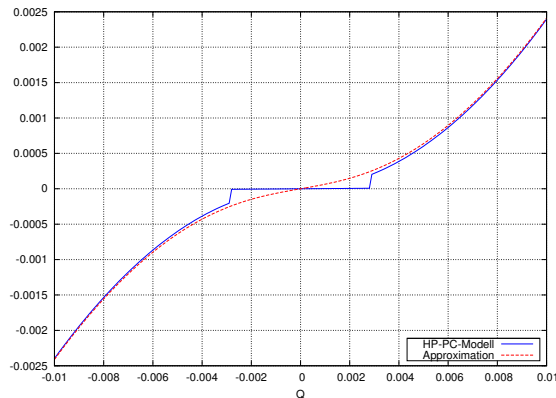
Im Fall des turbulenten Fluss gilt das Gesetz von Prandtl–Colebrook. Die Reynoldszahl ist hier größer als 2320 und die Rohrreibungszahl hängt nicht nur von der Reynoldszahl ab, sondern auch von der Rauigkeit k des Rohres. Es gilt

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda^{PC}(t)}} = -2 \log \left(\frac{2.51}{Re(t) \sqrt{\lambda^{PC}(t)}} + \frac{k}{3.71D} \right). \quad (4.69)$$

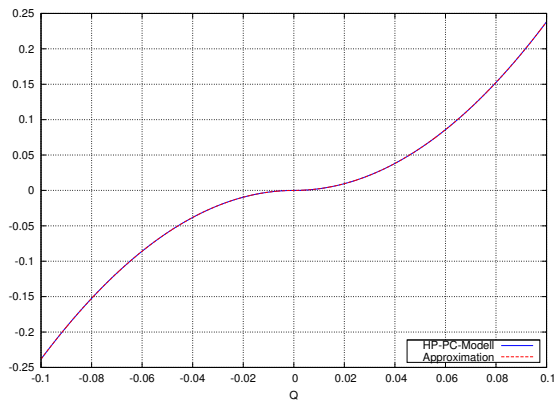
Zusammengefasst ergibt sich für den Fluss nach Hagen–Poiseuille (laminarer Fluss) bzw. Prandtl–Colebrook (turbulenter Fluss) das sogenannte HP-PC-Modell des Reibungsverlustes

$$\Delta H(Q(t)) = \begin{cases} \frac{128\nu L}{\pi g D^4} Q(t), & Re < 2320 \\ \frac{8L}{\pi^2 g D^5} \lambda^{PC}(t) Q(t) |Q(t)|, & Re \geq 2320 \end{cases}. \quad (4.70)$$

Dieses Modell bildet die Reibungsverluste bei einer Druckrohrströmung zwar sehr genau ab, ist aber nicht geeignet für ableitungsbasierte Optimierungsverfahren. Insbesondere beim Übergang vom laminaren zum turbulenten Fluss (Reynolds-Zahl



(a) Fehler der Approximation bei laminaren Fluss



(b) Asymptotisches Verhalten der Approximation der Reibungsverluste

Abbildung 4.25: Reibungsverluste bei Druckrohrströmungen: Vergleich des HP-PC-Modells und der Approximation von Steinbach [BGS09b] am Beispiel eines 1 km langen Rohres mit 1,2 m Durchmesser und Rauigkeit 0,4 m. Die Flussraten sind in m^3/s und Reibungsverluste in m/km angegeben.

$\text{Re} = 2320$) tritt in (4.70) ein Sprung auf (vgl. Abbildung 4.25(a)). Desweiteren kann die Rohrreibungszahl nur implizit gegeben werden und ist deshalb aufwendig zu bestimmen.

Aus diesen Gründen verwenden wir zur Bestimmung der Reibungsverluste eine von Steinbach entwickelte globale Approximation [BGS09b]. Es handelt sich um eine explizite zweimal stetig differenzierbare Approximation des Druckverlustes $\Delta H(t)$:

$$\Delta H(Q(t)) \approx \phi(Q(t)) = r \left(\sqrt{Q^2(t) + a^2} + b + \frac{c}{\sqrt{Q^2(t) + d^2}} \right) Q(t) \quad (4.71)$$

mit

$$r = \frac{8L}{\pi g D^5} (2 \log \beta)^{-2} \quad \beta = \frac{k}{3.71D}$$

$$b = \frac{2.51 \pi \nu D}{\beta \ln 10} \quad c = (\ln \beta + 1) \frac{b^2}{4} - \frac{a^2}{2}.$$

Die Wahl der Parameter b und c stellt hierbei sicher, dass die Approximation für die in unserem Problem typischerweise großen Flussraten, also im Falle eines hochturbulenten Flusses $Q(t)$ asymptotisch korrekt ist bis zur zweiten Ableitung (siehe auch Abbildung 4.25(b)). Zusätzlich kann mittels $a > 0$ und $d > 0$ eine beliebige positive Steigung $\phi'(0)$ erreicht werden. Sie ist so gewählt, dass $\phi'(0)$ größer ist als die korrekte Steigung im laminaren Fall des HP-PC-Modells (4.70). Dadurch überschätzt die Approximation den tatsächlichen Druckverlust für kleine Flussraten $Q(t)$ und führt somit auf konservative Lösungen [BGS09b]. Die Approximation stellt ebenfalls sicher, dass auch der Druckverlust beim Wechsel der Fließrichtung hinreichend genau ist und der Übergang glatt ist.

4.2.3 Ventile

Ventile oder auch Schieber kontrollieren den Fluss innerhalb des ADL-Netzes. Sie dienen zur Regulierung des Volumenstroms $Q(t)$ und des Druckabfalls $\Delta H(t)$. Das heißt, mithilfe der Ventile kann der Fluss innerhalb des ADL-Netzes gesteuert und gezielt den einzelnen Klärwerken zugeführt werden.

Andererseits werden Ventile im Fall von Havarien und Instandsetzungen dazu benutzt Teile des ADL-Netzes abzutrennen, um einen Eintrag in dies Umwelt zu verhindern und Wartungsarbeiten zu ermöglichen. Diesen Aspekt betrachten wir in dieser Arbeit nicht, da vollständig abgetrennte Teile des Netzes für die kurzfristige operative Planung kein Optimierungspotential bieten und daher nicht betrachtet werden müssen.

Ventile kontrollieren den Volumenstrom zwischen zwei Verzweigungen i und j indem sie den Druckverlust $\Delta H(t)$ zwischen diesen beiden Verbindungen regulieren [BGS09b]. Im geöffneten Zustand besitzen Ventile einen so kleinen Strömungswiderstand, dass er in unserem Modell vernachlässigt werden kann und wir davon ausgehen, dass es in diesem Fall keinen Druckverlust in einem Ventil gibt, also $\Delta H(t) = 0$. Im Falle eines vollständig geschlossenen Ventils wird der Strömungswiderstand so erhöht, dass kein Fluss mehr möglich ist, das heißt $Q(t) = 0$.

Der Druck zwischen den beiden Verzweigungen zum Zeitpunkt t wird in einem Ventil um den Betrag $\Delta H(t)$ gemindert. Es gilt folgende Beziehung

$$H_i(t) - H_j(t) = \Delta H(t) \quad (4.72)$$

Da in einem Ventil im Allgemeinen ein Fluss in beide Richtungen möglich ist und zwar immer vom höheren zum niedrigeren Druck, kann der Druckverlust $\Delta H(t)$

sowohl positiv als auch negativ sein. Um den Zusammenhang zwischen Flussrichtung und Vorzeichen der Druckminderung korrekt darzustellen benötigen wir, wie schon bei den Drosseln des Kanalnetzes (Abschnitt 4.1.4), eine Konsistenzbedingung, die sicherstellt, dass die Druckminderung genau dann nichtnegativ ist, wenn ein Fluss von i nach j eingestellt ist, also der Fluss positiv ist und umgekehrt.

$$\Delta H(t)Q(t) \geq 0 \quad (4.73)$$

Ohne diese Konsistenzbedingung wäre es möglich, dass in den Ventilen der Druck erhöht wird [BGS09b], [BGS09a].

4.3 Die Klärwerke

Die Klärwerke sind die Schnittstellen zwischen dem ADL-Netz und der Umwelt. Sie nehmen das Abwasser aus dem ADL-Netz auf, reinigen und bereiten es auf und geben es anschließend in angrenzende öffentliche Gewässer ab. Die Behandlung des Abwassers erfolgt in der Regel in drei Stufen. In jeder dieser Stufen werden vorwiegend mechanische, biologische oder chemische Verfahren eingesetzt, um das Abwasser zu reinigen.

Die mechanischen Verfahren wie Abscheidung, Filtration, Siebung bilden zumeist die erste Reinigungsstufe. Hier wird ein Teil der festen (ungelösten) Schwimm- und Schwebstoffe entfernt. Anschließend werden in der zweiten Stufe biologische Verfahren eingesetzt. Sie verwenden mikrobiologische Abbauvorgänge, wie die anaerobe Abwasserreinigung, biochemische Oxidation und die Schlammfäulung. Die chemischen Verfahren bilden meist die dritte Stufe der Abwasserreinigung. Sie bedienen sich chemischer Reaktionen wie Oxidation und Fällung ohne Beteiligung von Mikroorganismen. Die Prozesse in den Kläranlagen, insbesondere die biologische und chemischen Reaktionsprozesse sind hochkomplex und eine mathematische Beschreibung sehr aufwendig. Ein detailliertes Modell dieser Prozesse führt auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen, die durch algebraische Nebenbedingungen gekoppelt sind.

In dieser Arbeit wählen wir ein stark vereinfachtes Modell der Klärwerke, welches die einzelnen Stufen und Verfahren nur zusammengefasst und implizit wiedergibt, da der Fokus nicht auf einer detaillierten Steuerung der Klärwerke liegt. Auf der anderen Seite würden wir bei einer sehr akkuraten Modellierung der Klärwerke eine sehr genaue Kenntnis der Prozesse und der zugehörigen Daten benötigt, die uns nicht vorlagen. Hinzu kommt, dass nach unserem Kenntnisstand keine Modelle existieren, die die Prozesse in einem Klärwerk hinreichend vollständig und genau und für die Optimierung geeignet modellieren.

In dem hier vorgestellten Modell wurde insbesondere darauf geachtet, dass die wesentlichen Eigenschaften der Klärwerke berücksichtigt sind und es wurde daher auf Grundlage intensiver Gespräche mit erfahrenen Ingenieuren aufgestellt.

Wir nehmen an, dass jedes Klärwerk einen im Dauerbetrieb einen bestimmten Abwasservolumenstrom Q^{nom} verarbeiten kann. Das heißt, zu jedem Zeitpunkt ist ein Volumenstrom $Q(t)$ in der Höhe Q^{nom} möglich. Desweiteren ist ausschließlich ein Fluss vom ADL-Netz zum öffentlichen Gewässer möglich; der Fluss ist also stets nichtnegativ.

Jedem Klärwerk ist es während des betrachteten Zeitraums $[0, T]$ zusätzlich möglich kurzzeitig einen größeren Volumenstrom $Q^{\text{max}} \geq Q^{\text{nom}}$ zu verarbeiten. Die Zeitdauer in der die Menge Q^{max} verarbeitet werden kann bezeichnen wir mit T^{max} .

Desweiteren wurde im Modell berücksichtigt, dass der Volumenstrom sich nicht beliebig stark ändern darf. Insbesondere kann das Abwasser bei einem zu starken Anstieg des Zuflusses nicht mehr zuverlässig behandelt werden und würde zu einem Eintrag ungeklärtem Abwassers in die Umwelt führen. Den maximal möglichen Anstieg des Volumenstroms bezeichnen wir mit $\Delta Q^{\text{max}} > 0$.

Zunächst modellieren wir die beschriebenen Beschränkungen mithilfe einer Binärvariable, stellen also ein gemischt-ganzzahliges Modell auf. Die Volumenstrom darf zu keinem Zeitpunkt den Maximalfluss Q^{max} überschreiten. Es gilt also

$$Q(t) \in [0, Q^{\text{max}}]. \quad (4.74)$$

Zusätzlich führen wir eine Flussvariable $Q^+(t) \in [0, Q^{\text{max}} - Q^{\text{nom}}]$ ein, die den Überschussanteil des Volumenstroms beschreibt, also den Anteil, der größer als Q^{nom} ist. Offensicht darf die Differenz dieser beiden Volumenströme zu keinem Zeitpunkt größer als der Nominalfluss Q^{nom} sein:

$$Q(t) - Q^+(t) \leq Q^{\text{nom}}. \quad (4.75)$$

Die zeitliche Beschränkung für das Überschreiten des Nominalvolumenstroms beschreiben wir mithilfe einer Binärvariable $y(t) \in \{0, 1\}$, für die gilt:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & Q^+(t) > 0 \\ 1, & Q^+(t) = 0 \end{cases}. \quad (4.76)$$

Dies erreichen wir durch die nichtlineare Gleichung

$$y(t)Q^+(t) = 0. \quad (4.77)$$

Insbesondere stellt diese Gleichungsrestriktion sicher, dass $y(t) = 0$, falls $Q^+(t) > 0$. Mithilfe der Gleichung

$$\int_0^T (1 - y(\tau)) d\tau \leq T^{\text{max}} \quad (4.78)$$

begrenzen wir die Zeit in der der Nominalfluss überschritten werden kann. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass Gleichung (4.77) keine eindeutige Zuordnung der Binärvariablen im Sinne von (4.76) beschreibt. Dies wird implizit aber

durch die Restriktion (4.78) erreicht, wenn die maximale Zeit T^{\max} ausgeschöpft werden muss bzw. soll.

Die beiden folgenden Restriktionen garantieren abschließend, dass weder der Volumenstrom $Q(t)$, noch der Volumenstrom des Überschusses $Q^+(t)$ den maximal erlaubten Anstieg überschreitet:

$$\frac{dQ(t)}{dt} \leq \Delta Q^{\max}, \quad (4.79)$$

$$\frac{dQ^+(t)}{dt} \leq \Delta Q^{\max}. \quad (4.80)$$

Im Folgenden beschreiben wir einen Ansatz das Modell der Klärwerke zu beschreiben ohne die Verwendung von Binärvariablen. Diese kontinuierliche Modell verwendet ebenfalls das Variablensplitting $Q \in [0, Q^{\max}]$ und $Q^+(t) \in [0, Q^{\max} - Q^{\text{nom}}]$ des Volumenstroms mit

$$Q(t) - Q^+(t) \leq Q^{\text{nom}}. \quad (4.81)$$

Auch den maximal erlaubten Abstieg wird wie im MINLP-Ansatz gemäß der Gleichungen (4.79) und (4.80) beschrieben.

Die zeitliche Begrenzung des Überschussvolumenstroms beschreiben wir in diesem Ansatz hingegen mithilfe eines maximalen Volumens V^{\max} , welches in der Zeit T^{\max} maximal verarbeitet werden kann:

$$V^{\max} = (Q^{\max} - Q^{\text{nom}}) \left(T^{\max} - \frac{Q^{\max} - Q^{\text{nom}}}{2\Delta Q^{\max}} \right). \quad (4.82)$$

V^{\max} setzt sich zusammen aus dem Volumen das sich aus einem Fluss Q^{\max} während des gesamten Zeitraums T^{\max} ergibt, abzüglich dem Volumen, dass aufgrund des einzuhaltenen ΔQ^{\max} nicht realisiert werden kann. Dieses maximale Überschussvolumen ersetzt Maximalzufluss Q^{\max} und Maximalzeit T^{\max} :

$$\int_0^T Q^+ \leq V^{\max}. \quad (4.83)$$

Die kontinuierliche Formulierung des Modells der Klärwerke kann also mit vier Restriktionen, zwei Flussvariablen und einfache Schranken an diese Variablen realisiert werden. Insbesondere handelt es sich bei den Restriktionen um lineare Bedingungen bezügliches der Flussvariablen.

Die MINLP-Formulierung hingegen benötigt eine zusätzliche binäre Variable $y(t)$, die sich bei späteren Diskretisierung entsprechend vervielfacht. Desweiteren wird zur Formulierung der zeitlichen Begrenzung des maximalen Flusses die nichtlineare Gleichung (4.77) benötigt.

Kapitel 5

Optimierungsmodelle

In diesem Kapitel formulieren wir zwei verschiedene Optimierungsmodelle des Abwassernetzwerks. Zum Einen stellen wir ein nichtlineares gemischt-ganzzahliges Modell auf und zum Anderen eine nichtlineares kontinuierliches Modell. Die Modelle basieren auf den in Kapitel 4 ausgearbeiteten Eigenschaften des Abwassernetzwerks. Ziel beider Modelle ist es den Abfluss von ungeklärtem Abwasser in der Umwelt zu minimieren.

Im Abschnitt 5.1 beschreiben wir zunächst Grundsätzliches zum Aufbau der Optimierungsmodelle, sowie die Merkmale, die beiden Modellen gemeinsam sind.

In den Abschnitten 5.2 und 5.3 stellen wir jeweils ein vollständiges Modell zur optimalen Steuerung des Abwassernetzwerks in MINLP- bzw. NLP-Formulierung vor.

Anschließend formulieren wir in Abschnitt 5.5 die Zielfunktion des Optimierungsproblems und diskutieren die Unterschiede der NLP- und MINLP-Formulierung.

5.1 Grundsätzliches

5.1.1 Zeitdiskretisierung

Wir nehmen an, dass der betrachtete Planungshorizont zum einem Zeitpunkt 0 beginnt und an einem festen Zeitpunkt T endet. Diesen zugrundeliegenden Planungshorizont $[0, T]$ zerlegen wir in äquidistante Zeitpunkte $t \in \{0, 1, \dots, T\}$. Die entstehenden Teilintervalle $[t-1, t]$ bezeichnen wir als Periode $t \in \{1, \dots, T\}$ und die zugehörige Periodenlänge mit Δ_t . Das heißt, die Periode t beginnt zum Zeitpunkt $t-1$ und endet im Zeitpunkt t . Zum Zeitpunkt $t=0$ sind die Anfangsbedingungen des Systems gegeben.

5.1.2 Das Abwassernetzwerk als Graph

Wir betrachten das Abwassernetzwerk als einen gerichteten Graphen $G = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ mit der Knotenmenge \mathbb{V} und der Kantenmenge \mathbb{E} . Die Knotenmengen besteht aus verschiedenen Knotentypen, den Reservoirs \mathbb{V}_{rv} , den Mischwasserkanälen \mathbb{V}_{cws} , den Trennwasserkanälen \mathbb{V}_{sws} und Verzweigungen \mathbb{V}_{jc} :

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}_{rv} \cup \mathbb{V}_{cws} \cup \mathbb{V}_{sws} \cup \mathbb{V}_{jc}. \quad (5.1)$$

Die Vielfalt der Netzwerkelemente, die der Kantenmenge des Graphen zugeordnet werden, ist größer als die Knotenmenge. Die Kantenmenge \mathbb{E} besteht aus Rohren \mathbb{E}_{pi} , Ventilen \mathbb{E}_{va} , den Klärwerken \mathbb{E}_{sw} , Regenüberläufen bzw. Klärüberläufen \mathbb{E}_{so} , Notauslässen \mathbb{E}_{eo} , internen Überläufen \mathbb{E}_{io} , Hebern \mathbb{E}_{si} , variablen Drosseln \mathbb{E}_{vt} und festen Drosseln \mathbb{E}_{ft} sowie Pumpen \mathbb{E}_{pu} und Pumpstationen \mathbb{E}_{ps} :

$$\mathbb{E} = \mathbb{E}_{pi} \cup \mathbb{E}_{va} \cup \mathbb{E}_{sw} \cup \mathbb{E}_{so} \cup \mathbb{E}_{eo} \cup \mathbb{E}_{si} \cup \mathbb{E}_{vt} \cup \mathbb{E}_{ft} \cup \mathbb{E}_{io} \cup \mathbb{E}_{pu} \cup \mathbb{E}_{ps}. \quad (5.2)$$

Zusätzlich unterscheiden wir in der Kantenmenge aktive und passive Kanten-elemente: $\mathbb{E} = \mathbb{A} \cup \mathbb{P}$. Aktive Elemente sind steuerbar. Dazu zählen Ventile, Pumpen, Pumpstationen und die Klärwerke: $\mathbb{A} = \mathbb{E}_{va} \cup \mathbb{E}_{pu} \cup \mathbb{E}_{ps} \cup \mathbb{E}_{sw}$. Alle anderen Kantentypen sind passive Kanten und sind nicht steuerbar. Die Netzwerkelemente eines hier betrachteten Abwassernetzwerks sind in Tabelle 5.1 aufgeführt.

Bezeichnung	Netzwerk Element	Typ
\mathbb{V}_{sws}	Trennwasserkanäle	
\mathbb{V}_{cws}	Mischwasserkanäle	
\mathbb{V}_{rv}	Reservoirs	
\mathbb{V}_{jc}	Verzweigungen	
\mathbb{E}_{pi}	Rohre	passiv
\mathbb{E}_{va}	Ventile	aktiv
\mathbb{E}_{sw}	Klärwerke	aktiv
\mathbb{E}_{so}	Regenüberläufe	passiv
\mathbb{E}_{eo}	Notauslässe	passiv
\mathbb{E}_{si}	Heber	passiv
\mathbb{E}_{vt}	variable Drosseln	passiv
\mathbb{E}_{ft}	feste Drosseln	passiv
\mathbb{E}_{io}	interne Überläufe	passiv
\mathbb{E}_{pu}	Pumpen	aktiv
\mathbb{E}_{ps}	Pumpstationen	aktiv

Tabelle 5.1: Liste der Netzwerkelemente im Abwassernetzwerk

Wir bezeichnen die Knoten des Netzwerks im Allgemeinen mit $i, j, k \in \mathbb{V}$. Eine Kante im Graphen wird $e \in \mathbb{E}$ oder $ij \in \mathbb{E}$ bezeichnet, wobei $i \in \mathbb{V}$ der Anfangsknoten und $j \in \mathbb{V}$ der Endknoten dieser Kante ist.

5.1.3 Dynamische Variablen

Die dynamischen Variablen im Abwassernetzwerk sind Druck und Volumen in den Knoten, sowie Flussvariablen in den Kanten. In unserem Modell nehmen wir an, dass sich beim Abwasser um eine inkompressible Flüssigkeit handelt. Daher kann der Druck p äquivalent durch eine Höhendifferenz beschrieben werden:

$$\Delta h = \frac{p}{g\rho},$$

wobei g die Gravitationsbeschleunigung und ρ die konstante Dichte von Wasser ist [BGS09b]. Wir messen in unseren Modellen den Druck, wie im Wassermanagement üblich im Meter über Normalnull [mNN], also Meter über dem mittleren Meeresspiegel. Die Druckhöhe H_{it} eines Knotens i zum Zeitpunkt t setzt sich dann zusammen aus der geodätischen Höhe plus dem Höhenunterschied des zugehörigen hydraulischen Drucks zu diesem Zeitpunkt. In offenen Gerinnen gehen wir davon aus, dass der hydraulische Druck der Höhe des Wasserspiegels entspricht. Die Druckhöhen jedes Knotens im Netzwerk sind durch einen festen Wert H_i^- nach unten beschränkt. Dieser hängt vom Typ des Knotens ab: Offene Gerinne, also insbesondere die Kanäle sind durch die geodätische Höhe der Sohlhöhe nach unten beschränkt, die Knoten des ADL-Netzes durch eine technische Schranke. Ebenso besitzen diese Knoten eine technische obere Schranke H_i^+ , während die offenen Gerinne nach oben unbeschränkt sind.

Volumina sind nichtnegative Variablen in den Knoten in denen Wasserzwischen gespeichert werden kann. Zu diesen Knoten zählen die Misch- und Trennwasserkanaäle sowie die Reservoirs. Das Volumen wird in m^3 gemessen und ist in der Regel nach oben unbeschränkt. In Einzelfällen, z. B. im Fall geschlossener Regenüberlaufbecken, existiert aber auch eine endliche obere Schranke V^+ . In Knoten ohne Speicherkapazität ist $V_{it} \equiv 0$ zu allen Zeitpunkten t . Daher werden diese in den Modellen nicht berücksichtigt.

Variable	Beschreibung	Einheit	untere Schranke	obere Schranke
H_{it}	Druckhöhe	müNN	$H_i^- \in \mathbb{R}$	$H_i^+ \in \mathbb{R} \cup \infty$
V_{it}	Volumen	m^3	$V_i^- \in \mathbb{R}_+$	$V_i^+ \in \mathbb{R}_+ \cup \infty$
Q_{ijt}	Volumenstrom	m^3/s	$Q_i^- \in \mathbb{R} \cup -\infty$	$Q_i^+ \in \mathbb{R} \cup \infty$
ΔH_{ijt}	Druckänderung	m	$\Delta H_i^- \in \mathbb{R} \cup -\infty$	$\Delta H_i^+ \in \mathbb{R} \cup \infty$

Tabelle 5.2: Liste der dynamischen Variablen im Abwassernetzwerk

Die Flussrate Q_{ijt} über eine Kante $ij \in \mathbb{E}$ im Zeitraum t beschreibt einen Volumenstrom und wird in m^3/s angegeben. Der Volumenstrom über eine Kante $ij \in \mathbb{E}$ ist positiv, falls er von i nach j gerichtet ist. Im anderen Fall ist der Fluss negativ, bzw. gegebenenfalls null. Grundsätzlich ist ein Fluss in beide Richtungen zulässig. Ausnahmen sind Kanten vom Typ Pumpen \mathbb{E}_{pu} , Pumpstationen \mathbb{E}_{ps} , Klärwerke \mathbb{E}_{sw} ,

Regenüberläufe \mathbb{E}_{so} und Notauslässe \mathbb{E}_{eo} . Hier ist ausschließlich ein nichtnegativer Fluss zugelassen. Diese Kanten sind entsprechend gerichtet. Der Volumenstrom Q_{ij} ist in der Regel sowohl nach unten als auch nach oben durch technische oder bauliche Begrenzungen beschränkt. Diese sind entweder explizit durch die Schranken Q_{ij}^- und Q_{ij}^+ gegeben, oder ergeben sich implizit durch Beschränkungen in den angrenzenden Knoten i und j , so dass die Flussrate in der Kante ij formal unbeschränkt ist.

In den Ventilen $ij \in \mathbb{E}_{va}$ des ADL-Netzes gibt es in jedem Intervall t eine zusätzliche dynamische Variable ΔH_{ijt} , welche die Druckänderung regelt. Sie mindert den Druck entlang dieser Kante um den Betrag ΔH_{ijt} , wobei das Vorzeichen mit dem des zugehörigen Flusses korrespondiert. Die Druckänderung ist nur indirekt durch die Druckhöhen der angrenzenden Knoten begrenzt. In Tabelle 5.2 sind die dynamischen Variablen noch einmal übersichtlich dargestellt.

Darüber hinaus kann es in einzelnen Knoten- und Kantentypen weitere dynamische Variablen geben, die aufgrund der verwendeten Modellierungstechnik, wie z. B. Variablensplitting oder strukturierter Mengen, entstehen. Diese werden in den entsprechenden Abschnitten explizit beschrieben.

5.2 Nichtlineares gemischt-ganzzahliges Modell

In diesem Abschnitt stellen wir eine nichtlineare gemischt-ganzzahlige Formulierung des Abwassernetzwerks vor. Wir legen diesem Modell die in Abschnitt 5.1.1 eingeführte Zeitdiskretisierung zugrunde, ebenso fassen wir das Netzwerk als gerichtetem Graphen $G = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ auf, wobei die Knoten- und Kantenmengen wie in Abschnitt 5.1.2 definiert seien. Wir stellen im zunächst ein Modell der verschiedenen Knotentypen auf und formulieren anschließenden Abschnitt das Modell der einzelnen Kantentypen. Bei der Modellierung beziehen wir uns auf die Ausarbeitungen in Kapitel 4.

5.2.1 Die Knotenmenge \mathbb{V}

In diesem Abschnitt beschreiben wir die Modellierung der Knoten des Netzwerks. Wir unterteilen die Knotenmenge gemäß (5.1) in Reservoirs \mathbb{V}_{rv} , den Mischwasserkanälen \mathbb{V}_{cws} , den Trennwasserkanälen \mathbb{V}_{sws} und Verzweigungen \mathbb{V}_{jc} :

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}_{rv} \cup \mathbb{V}_{cws} \cup \mathbb{V}_{sws} \cup \mathbb{V}_{jc}.$$

Insbesondere unterscheiden wir im Modell die Misch- und Trennwasserkanäle des Kanalnetzes. Teilnetze die Trennwasserkanälen enthalten, sind immer identisch aufgebaut. Sie bestehen aus dem Kanal $i \in \mathbb{V}_{sws}$, einem Notauslass und einem Pumpwerk. Der Notauslass ist ein Überlauf, der ab einem bestimmten Volumen V_i^+ anspringt und ist stets so konstruiert, dass er die gesamte Abwassermenge oberhalb dieses Volumens in die Umwelt abführt. Der Zufluss in die Trennwasserkanäle

besteht nur aus dem Trockenfluss der Haushalte und der Industrie, da das Regenwasser in getrennten Kanälen direkt in angrenzende Gewässer abgeführt wird und nicht mit in das Modell eingeht.

Weitaus komplexer aufgebaut sind Teilnetze bestehend aus Mischwasserkanälen, bei denen Schmutz- und Regenwasser gemeinsam in einem Kanal abgeleitet werden. Sie bestehen in der Regel aus mehreren Kanalabschnitten, die über verschiedene Bauwerke miteinander verbunden sind. Der Fluss über diese Bauwerke hängt häufig direkt von den Druckhöhen in den angrenzenden Kanälen ab.

Allen Knoten des Abwassernetzwerks ist gemeinsam, dass Gleichungen vom Kirchhofftyp erfüllt sein müssen. Zu jedem Zeitpunkt t muss Flusserhaltung gelten, wobei sich die einzelnen Bedingungen abhängig vom Knotentyp unterscheiden.

Mischwasserkanäle \mathbb{V}_{cws}

Jedem Mischwasserkanal $i \in \mathbb{V}_{\text{cws}}$ ist zu jedem Zeitpunkt t ein Volumen V_{it} und eine Druckhöhe H_{it} zugeordnet. Das Volumen V_{it} ist nach unten grundsätzlich durch Null beschränkt, die Druckhöhe H_{it} durch die minimale geodätische Sohlhöhe des Mischwasserkanals. Eine obere Schranke existiert in der Regel nicht, einige Kanäle jedoch sind nach oben beschränkt, so dass wir das Volumen nach oben durch $V_i^+ \in \mathbb{R} \cup \infty$ beschränken und die Druckhöhe durch $H_i^+ \in \mathbb{R} \cup \infty$. Zusammengefasst gilt

$$V_{it} \in [0, V_i^+] \quad \forall i \in \mathbb{V}_{\text{cws}}, t \in \{0, 1, \dots, T\} \quad (5.3)$$

$$H_{it} \in [H_i^-, H_i^+] \quad \forall i \in \mathbb{V}_{\text{cws}}, t \in \{0, 1, \dots, T\}. \quad (5.4)$$

Der Zusammenhang zwischen dem Volumen und der Druckhöhe in jedem Mischwasserkanal $i \in \mathbb{V}_{\text{cws}}$ zu jedem Zeitpunkt t wird durch eine sogenannte Speicherkennlinie σ_i beschrieben (siehe auch Abschnitt 4.1.1). Es gilt

$$c_{it}^\sigma := H_{it} - \sigma_i(V_{it}) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{V}_{\text{cws}}, t \in \{0, 1, \dots, T\}. \quad (5.5)$$

$\sigma_i(\cdot)$ ist, eine für jeden Mischwasserkanal individuelle, zweimal stetig differenzierbare nichtlineare Funktion. Im Fall künstlich angelegter Rückhaltebecken ist die Speicherkennlinie eine lineare Funktion.

Desweiteren gilt in jedem Mischwasserkanal $i \in \mathbb{V}_{\text{cws}}$ die in der Zeit diskretisierte Flussbilanzgleichung (4.2) in jedem Zeitpunkt $t \in \{1, \dots, T\}$. Das Volumen zum Zeitpunkt t ist gleich dem Volumen zum Zeitpunkt $t - 1$ minus den Abflüssen in Periode t plus den Zuflüssen in Periode t :

$$c_{it}^{\text{FB}} := V_{i,t} - V_{i,t-1} + \sum_{ij \in \mathbb{E}} Q_{ijt} \Delta_t - \sum_{ki \in \mathbb{E}} Q_{kit} \Delta_t - Q_{it}^T \Delta_t - Q_{it}^R \Delta_t = 0. \quad (5.6)$$

Mit Q_{it}^T und Q_{it}^R bezeichnen wir den Trocken- bzw. Regenfluss in den Kanal $i \in \mathbb{V}_{\text{cws}}$ im Intervall t .

Variable	Schranken	Bedeutung	Gesamtanzahl
$V_{it} \in \mathbb{R}$	$[0, V_i^+]$	Volumen	$ \mathbb{V}_{\text{cws}} \cdot (T + 1)$
$H_{it} \in \mathbb{R}$	$[H_i^-, H_i^+]$	Druckhöhe	$ \mathbb{V}_{\text{cws}} \cdot (T + 1)$
Restriktion	Typ	Bedeutung	Gesamtanzahl
(5.5)	=	Speicherkenlinie	$ \mathbb{V}_{\text{cws}} \cdot (T + 1)$
(5.6)	=	Flussbilanzgleichung	$ \mathbb{V}_{\text{cws}} \cdot T$

Tabelle 5.3: Variablen und Restriktionen zur Beschreibung eines Mischwasserkanals $i \in \mathbb{V}_{\text{cws}}$ zum Zeitpunkt $t \in \{0, \dots, T\}$ in der MINLP-Formulierung

Um einen Mischwasserkanal $i \in \mathbb{V}_{\text{cws}}$ vollständig zu beschreiben, benötigen wir an jedem Zeitpunkt $t \in \{0, \dots, T\}$ eine kontinuierliche Variable H_{it} für die Druckhöhe, sowie eine kontinuierliche Variable V_{it} für das Volumen. Technische und physikalisch beschränkt ist der Kanal durch untere und ggf. obere Schranken an Variablen, sowie der linearen Flussbilanzgleichung (5.6) und der hochgradig nichtlinearen Gleichung für die Speicherkenlinie (5.5). Wie in Tabelle 5.3 dargestellt benötigen wir insgesamt also $2|\mathbb{V}_{\text{cws}}| \cdot (T + 1)$ kontinuierliche Variablen und $|\mathbb{V}_{\text{cws}}| \cdot (2T + 1)$ Gleichungsrestriktionen. Es handelt sich also um eine nichtlineare kontinuierliche Formulierung.

Trennwasserkanäle \mathbb{V}_{sws}

Dadurch das Trennsysteme ausschließlich durch einen Notauslass und einem Pumpwerk mit dem restlichen Abwassernetzwerk gekoppelt sind, kann bei der Formulierung des Optimierungsmodell auf die Variable für die Druckhöhe verzichtet werden. Die Entlastung über einen Notauslass und das Einspeisen des Abwasser über das Pumpwerk erfolgen unabhängig von der Druckhöhe. Insbesondere entfällt dann die Kopplung zwischen Druckhöhe und Volumen mithilfe der Speicherkenlinie.

Das Volumen in jedem Trennwasserkanal $i \in \mathbb{V}_{\text{sws}}$ ist nach unten durch Null beschränkt. Die Notauslässe eines Trennwasserkanal sind so konstruiert, dass sie das gesamte Abwasser oberhalb eines bestimmten Volumens V_i^+ in die Umwelt entlasten. An eben diesem Volumen fügen wir eine obere Schranke ein die zu keinem Zeitpunkt überschritten werden darf:

$$V_{it} \in [0, V_i^+], \quad \forall i \in \mathbb{V}_{\text{sws}}, t \in \{0, 1, \dots, T\}. \quad (5.7)$$

Diese obere Schranke führt dazu, dass sich das Modell der Trennwasserkanäle und das der Notauslässe vereinfacht. Insbesondere führt die obere Schranke dazu, dass die Modellierung der Notauslässe ohne Restriktionen auskommt (vgl. Abschnitt Notauslässe in diesem Kapitel).

Variable	Schranken	Bedeutung	Gesamtanzahl
$V_{it} \in \mathbb{R}$	$[0, V_i^+]$	Volumen	$ \mathbb{V}_{\text{sws}} \cdot (T + 1)$
Restriktion	Typ	Bedeutung	Gesamtanzahl
(5.8)	=	Flussbilanzgleichung	$ \mathbb{V}_{\text{sws}} \cdot T$

Tabelle 5.4: Variablen und Restriktionen zur Beschreibung eines Trennwasserkanals $i \in \mathbb{V}_{\text{sws}}$ zum Zeitpunkt $t \in \{0, \dots, T\}$ in der MINLP-Formulierung

In Trennwasserkanälen gilt jedoch die Flussbilanzgleichung analog zu der der Mischsysteme:

$$c_{it}^{\text{FB}} := V_{it} - V_{i,t-1} + \sum_{ij \in \mathbb{E}} Q_{ijt} \Delta_t - Q_{it}^T \Delta_t = 0 \quad \forall i \in \mathbb{V}_{\text{sws}}, t \in \{1, \dots, T\}. \quad (5.8)$$

Aufgrund der Konstruktion der Trennsysteme ist der Trockenzufluss der einzige Zufluss in das System. Der Abfluss setzt sich zusammen aus dem Fluss über das Pumpwerk und dem Notauslass.

In Tabelle 5.4 ist das Modell eines Trennwasserkanals zusammengefasst. Es werden $|\mathbb{V}_{\text{sws}}| \cdot (T + 1)$ kontinuierliche Variablen zur Erfassung der Volumina benötigt und $|\mathbb{V}_{\text{sws}}| \cdot T$ lineare Restriktionen um die Erhaltung der Flussbilanz zu garantieren.

Reservoirs \mathbb{V}_{rv}

Reservoirs sind Knoten im Abwassersystem, die eine unbeschränkte Speicherkapazität besitzen und deren Druckhöhe ist unabhängig vom Volumen ist. Ein Reservoir in einem Abwassernetzwerk besitzt ausschließlich Zuflüsse und keine Abflüsse. Zudem sind alle Zuflüsse zu einem Reservoir unabhängig von der Druckhöhe im Reservoir. Daher benötigen wir keine Zusammenhang zwischen Volumen und Druckhöhe zu modellieren und können auf die Variable der Druckhöhe im Modell verzichten. Aus graphentheoretischer Sicht sind Reservoirs Senken mit beliebig großer Kapazität. Für die Schranken des Volumens in einem Reservoir gilt

$$V_{it} \in [0, \infty) \quad \forall i \in \mathbb{V}_{\text{rv}}, t \in \{0, 1, \dots, T\}. \quad (5.9)$$

Außerdem gibt es keinen externen Zufluss zu einem Reservoir, so dass sich die Flussbilanzgleichung aus den vorherigen Abschnitten vereinfacht zu

$$c_{it}^{\text{FB}} := V_{it} - V_{i,t-1} - \sum_{ki \in \mathbb{E}} Q_{kit} \Delta_t = 0 \quad \forall i \in \mathbb{V}_{\text{rv}}, t \in \{1, \dots, T\}. \quad (5.10)$$

Die Modellformulierung eines Reservoirs ist in Tabelle 5.5 zusammengefasst. Wir benötigen $|\mathbb{V}_{\text{sws}}| \cdot (T + 1)$ kontinuierliche Variablen zur Erfassung der Volumina in den einzelnen Zeitpunkten und $|\mathbb{V}_{\text{sws}}| \cdot T$ lineare Restriktionen für die Flussbilanzgleichungen.

Variable	Schranken	Bedeutung	Gesamtanzahl
V_{it}	$[0, \infty]$	Volumen	$ \mathbb{V}_{rv} \cdot (T + 1)$
Restriktion	Typ	Bedeutung	Gesamtanzahl
(5.10)	=	Flussbilanzgleichung	$ \mathbb{V}_{rv} \cdot T$

Tabelle 5.5: Variablen und Restriktionen zur Beschreibung eines Reservoirs $i \in \mathbb{V}_{rv}$ zum Zeitpunkt $t \in \{0, \dots, T\}$ in der MINLP-Formulierung

Variable	Schranken	Bedeutung	Gesamtanzahl
H_{it}	$[H_i^-, H_i^+]$	Druckhöhe	$ \mathbb{V}_{jc} \cdot (T + 1)$
Restriktion	Typ	Bedeutung	Gesamtanzahl
(5.12)	=	Flussbilanzgleichung	$ \mathbb{V}_{jc} \cdot T$

Tabelle 5.6: Variablen und Restriktionen zur Beschreibung einer Verzweigung $i \in \mathbb{V}_{jc}$ zum Zeitpunkt $t \in \{0, \dots, T\}$ in der MINLP-Formulierung

Verzweigungen \mathbb{V}_{jc}

Verzweigungen sind Knoten im ADL-Netz. Im Gegensatz zu den Kanälen und Reservoirs besitzen Verzweigungen keine Speicher, so dass die Variable für das Volumen in einer Verzweigung entfällt. Zu jedem Zeitpunkt $t \in \{0, \dots, T\}$ führen wir eine Variable H_{it} für die Druckhöhe ein, die eine obere und untere Schranke nicht überschreiten darf (siehe 4.2.1):

$$H_{it} \in [H_i^-, H_i^+] \quad \forall i \in \mathbb{V}_{jc}, t \in \{0, 1, \dots, T\}. \quad (5.11)$$

Desweiteren gilt in jeder Verzweigung eine Flussbilanzgleichung, die sich aus Gleichung (4.62) aufgrund der Zeitdiskretisierung ergibt:

$$c_{it}^{\text{FB}} := \sum_{ij \in \mathbb{E}} Q_{ijt} \Delta_t - \sum_{ki \in \mathbb{E}} Q_{kit} \Delta_t - Q_{it}^{\text{in}} \Delta_t = 0 \quad \forall i \in \mathbb{V}_{jc}, t \in \{1, \dots, T\}. \quad (5.12)$$

Der externe Zufluss Q_{it}^{in} berücksichtigt eine eventuelle direkte Einspeisung von Abwasser in das ADL-Netz im Zeitraum t .

Das in der Zeit diskretisierte Modell der Verzweigungen benötigt ausschließlich $|\mathbb{V}_{jc}| \cdot (T + 1)$ kontinuierliche Variablen für die Druckhöhe und $|\mathbb{V}_{jc}| \cdot T$ lineare Flussbilanzgleichungen (vgl. Tabelle 5.6).

5.2.2 Die Kantenmenge \mathbb{E}

In diesem Abschnitt formulieren wir ein MINLP-Modell für jeden Kantentyp des Abwassernetzwerks. Die Kantenmenge \mathbb{E} besteht aus Notauslässen \mathbb{E}_{eo} , Regen-

bzw. Klärüberläufen \mathbb{E}_{so} , internen Überläufen \mathbb{E}_{io} , Hebern \mathbb{E}_{si} , variablen Drosseln \mathbb{E}_{vt} und festen Drosseln \mathbb{E}_{ft} , sowie Pumpen \mathbb{E}_{pu} und Pumpstationen \mathbb{E}_{ps} im Kanalnetz. Die Kantentypen des ADL-Netzes sind die Rohre \mathbb{E}_{pi} und die Ventile \mathbb{E}_{va} . Hinzu kommen noch die Klärwerke \mathbb{E}_{sw} , die ebenfalls als Kanten modelliert sind. Gemäß Gleichung (5.2) gilt also

$$\mathbb{E} = \mathbb{E}_{eo} \cup \mathbb{E}_{so} \cup \mathbb{E}_{io} \cup \mathbb{E}_{si} \cup \mathbb{E}_{vt} \cup \mathbb{E}_{ft} \cup \mathbb{E}_{ps} \cup \mathbb{E}_{pu} \cup \mathbb{E}_{pi} \cup \mathbb{E}_{va} \cup \mathbb{E}_{sw}.$$

Notauslässe \mathbb{E}_{eo}

Notauslässe verbinden Trennwasserkanäle mit einem Gewässer, also mit einem Reservoir. Eine Kante $ij = e \in \mathbb{E}_{eo}$ ist grundsätzlich vom Trennwasserkanal zum Reservoir gerichtet, d.h. $i \in \mathbb{V}_{sws}$ und $j \in \mathbb{V}_{rv}$. Da die Druckhöhe H_{jt} im Reservoir j zu jedem Zeitpunkt t unterhalb der Öffnung des Notauslasses liegt (vgl. Abschnitt 5.2.1) ist nur ein Fluss von i nach j möglich. Dieser Fluss Q_{ijt} ist in jedem Zeitintervall t nichtnegativ und es gilt

$$Q_{ijt} \in [0, \infty), \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{eo}, t \in \{1, \dots, T\}. \quad (5.13)$$

Da Kanten vom Typ Notauslass von einem Trennwasserkanal $i \in \mathbb{V}_{sws}$ ausgehen, führen sie in Periode t das gesamte Abwasser oberhalb des eines bestimmten Volumens V_i^+ ab, so dass zum Zeitpunkt $t+1$ das Volumen $V_{i,t+1}$ die obere Schranke V_i^+ nicht überschreitet. Dafür, dass der Fluss hinreichend groß ist, sorgt die obere Schranke V_i^+ im Knoten i (vgl. auch Abschnitt 5.2.1). Andererseits wird der Fluss ungeklärten Abwassers in die Reservoirs in der Zielfunktion minimiert, so dass der Fluss über einen Notauslass kleinst möglich ist. Aus diesen Gründen sind für die Notauslässe keine weiteren Beschränkungen notwendig.

Variable	Schranken	Bedeutung	Gesamtanzahl
Q_{ijt}	$[0, \infty)$	Fluss	$ \mathbb{E}_{eo} \cdot T$
Restriktion	Typ	Bedeutung	Gesamtanzahl
-	-	-	-

Tabelle 5.7: Variablen und Restriktionen zur Beschreibung eines Notauslasses $ij \in \mathbb{E}_{eo}$ im Zeitraum $t \in \{1, \dots, T\}$ in der MINLP-Formulierung

Regen- und Klärüberläufe \mathbb{E}_{so}

Regen bzw. Klärüberläufe sind gerichtete Kanten im Netzwerkgraphen. Der Anfangsknoten i einer Kante $ij \in \mathbb{E}_{so}$ vom Typ Regenüberlauf ist immer ein Mischwasserkanal, der Endknoten j ein Reservoir. Insbesondere heißt das, der Wasserspiegel des Reservoirs liegt stets unterhalb der Öffnungen jedes Regenüberlaufs.

Daher ist die Flussrichtung in einem Regenüberlauf grundsätzlich nicht negativ, nach oben aber nicht explizit beschränkt

$$Q_{ijt} \in [0, \infty), \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{\text{so}}, t \in \{1, \dots, T\}. \quad (5.14)$$

Die Flussgleichung eines Regenüberlaufs ij wird mithilfe von strukturierten Mengen beschrieben, wie sie in Abschnitt 4.1.3.8 dargestellt wurde. Zunächst führen wir für jedes Zeitintervall t und jeden Fließzustand eine Binärvariable δ_{ijt}^k ($k \in \{1, 2, 3\}$) ein, sowie eine kontinuierliche Variable $\lambda_{ijt}^l \in [0, 1]$ ($l \in \{0, 1, 2, 3\}$) an den Zustandsübergängen und am Rand ein. Nach Gleichung (4.32) lautet die in der Zeit diskretisierte Flussgleichung im Zeitraum t

$$c_{ijt}^Q := Q_{ijt} - \frac{2}{3}\gamma_{ij} \left[\delta_{ijt}^1 \cdot 0 + \delta_{ijt}^2 (H_{i,t-1} - L_{ij})^{\frac{3}{2}} + \delta_{ijt}^3 \left((H_{i,t-1} - L_{ij})^{\frac{3}{2}} - (H_{i,t-1} - U_{ij})^{\frac{3}{2}} \right) \right] = 0, \quad (5.15)$$

wobei $\gamma_{ij} = \mu_{ij} a_{ij} \sqrt{2g}$ ein vom Überlauf abhängiger konstanter Term ist. Neben den Kenndaten für den Überlauf hängt der Fluss im Zeitraum t ausschließlich von der Druckhöhe $H_{i,t-1}$ im Knoten i zum Zeitpunkt $t-1$ ab.

Zusätzlich benötigen wir Bedingungen an die Variablen δ_{ijt}^k ($k \in \{1, 2, 3\}$) und λ_{ijt}^l ($l \in \{0, 1, 2, 3\}$), sowie zur Bestimmung des Fließzustandes. Diese ergeben sich aus den Gleichungen (4.33) bis (4.36)

$$c_{ijt}^{Z,1} := \sum_{k=1}^3 \delta_{ijt}^k - 1 = 0 \quad (5.16)$$

$$c_{ijt}^{Z,2} := \sum_{l=0}^3 \lambda_{ijt}^l - 1 = 0 \quad (5.17)$$

$$c_{ijt}^{Z,3} := \sum_{k=l}^{l+1} \delta_{ijt}^k - \lambda_{ijt}^l \geq 0 \quad \forall l \in \{0, 1, 2, 3\}, \quad (5.18)$$

$$c_{ijt}^{Z,4} := H_{i,t-1} - \lambda_{ijt}^0 H_i^- + \lambda_{ijt}^1 L_{ij} + \lambda_{ijt}^2 U_{ij} + \lambda_{ijt}^3 H_i^+ = 0 \quad (5.19)$$

für jeden Regenüberlauf $ij \in \mathbb{E}_{\text{so}}$ und Zeitraum $t \in \{1, \dots, T\}$.

Dieses Modell zur Bestimmung des Volumenstroms über einen Regenüberlauf verwendet pro Überlauf und Zeitintervall eine Flussvariable, sowie drei binäre und vier kontinuierliche Hilfsvariablen zur Modellierung, so dass für das Gesamtmodell $5T |\mathbb{E}_{\text{so}}|$ kontinuierliche und $3T |\mathbb{E}_{\text{so}}|$ binäre Variablen benötigt werden. Desweiteren werden neben der $|\mathbb{E}_{\text{so}} \cdot T|$ nichtlinearen Flussgleichungen, weitere $6T |\mathbb{E}_{\text{so}}|$ lineare Bedingungen zur Bestimmung der Fließzustände benötigt. Typischerweise ist die Anzahl der Regen- und Klärüberläufe in einem Abwassernetzwerk sehr groß, da diese im Havariefall für eine vollständige Entlastung des ungeklärten Abwassers in die Umwelt sorgen müssen. Insbesondere folgt daraus, dass die Anzahl der binären Variablen und Restriktionen entsprechend groß ist.

Variable	Schranken	Bedeutung	Gesamtanzahl
Q_{ijt}	$[0, \infty)$	Fluss	$ \mathbb{E}_{\text{so}} \cdot T$
δ_{ijt}^k	$\{0, 1\}$	Zustandsvariablen	$3 \cdot \mathbb{E}_{\text{so}} \cdot T$
λ_{ijt}^l	$[0, 1]$	Zustandsvariablen	$4 \cdot \mathbb{E}_{\text{so}} \cdot T$
Restriktion	Typ	Bedeutung	Gesamtanzahl
(5.15)	=	Flussgleichung	$ \mathbb{E}_{\text{so}} \cdot T$
(5.16)	=	Zustandsbedingung	$ \mathbb{E}_{\text{so}} \cdot T$
(5.17)	\geq	Zustandsbedingung	$4 \cdot \mathbb{E}_{\text{so}} \cdot T$
(5.18)	=	Zustandsbedingung	$ \mathbb{E}_{\text{so}} \cdot T$

Tabelle 5.8: Variablen und Restriktionen zur Beschreibung eines Regenüberlaufs $ij \in \mathbb{E}_{\text{so}}$ im Zeitraum $t \in \{1, \dots, T\}$ in der MINLP-Formulierung

Interne Überläufe \mathbb{E}_{io} und Heber \mathbb{E}_{si}

Interne Überläufe und Heber sind passive Kanten im Netzwerkgraphen. Eine Kante vom Typ interner Überlauf oder Heber $ij \in \mathbb{E}_{\text{io}} \cup \mathbb{E}_{\text{si}}$ verbindet die zwei Mischwasserkanäle i und j miteinander. Sowohl interne Überläufe als auch Heber bestehen in der Regel aus mehreren Öffnungen, die auf beiden Seiten vollständig überstaut werden können (vgl. Abschnitte 4.1.3.9 und 4.1.3.10). Daher kann sowohl ein positiver als auch ein negativer Fluss auftreten. Der Fluss Q_{ijt} im Zeitraum t ist auch nicht explizit beschränkt, sondern ausschließlich implizit durch die Druckhöhen $H_{i,t-1}$ und $H_{j,t-1}$ der angrenzenden Mischwasserkanäle zum Zeitpunkt $t - 1$, so dass für die Flussvariable gilt:

$$Q_{ijt} \in (-\infty, \infty), \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{\text{io}} \cup \mathbb{E}_{\text{si}}, t \in \{1, \dots, T\}. \quad (5.20)$$

Der Fluss Q_{ijt} ist eine stückweise definierte von den Druckhöhen $H_{i,t-1}$ und $H_{j,t-1}$ abhängige Funktion.

Wir formulieren ein exaktes gemischt ganzzahliges Modell, indem wir den Fluss als Summe der einzelnen Teilfunktionen darstellen. Dazu triangulieren wir den zulässigen Bereich jedes Überlaufs bzw. Hebers $ij \in \mathbb{E}_{\text{io}} \cup \mathbb{E}_{\text{si}}$ gemäß der Abschnitte 4.1.3.9 und 4.1.3.10. Die Eckpunkte dieser Triangulierung bilden ein Gitter

$$\left\{ \left(H_i^{v_k}, H_j^{v_l} \right) : (v_k, v_l) \in \mathcal{V}_i \times \mathcal{V}_j \right\}$$

Wir führen in jedem Eckpunkt zu jedem Zeitintervall $t \in \{1, \dots, T\}$ eine Variable $\lambda_{ijt}^{(v_k, v_l)} \in [0, 1]$ ein, sowie zu jedem der entstehenden Simplexes Δ_s , $s \in \mathcal{S} = \{1, \dots, n\}$ eine Binärvariable δ_{ijt}^s . Den Zustand des Systems zum Zeitpunkt $t - 1$

stellen wir dar durch die Gleichungen

$$c_{ijt}^{Z,1} := H_{i,t-1} - \sum_{(v_k, v_l) \in \mathcal{V}_i \times \mathcal{V}_j} \lambda_{ijt}^{(v_k, v_l)} H_i^{v_k} = 0, \quad (5.21)$$

$$c_{ijt}^{Z,2} := H_{j,t-1} - \sum_{(v_k, v_l) \in \mathcal{V}_i \times \mathcal{V}_j} \lambda_{ijt}^{(v_k, v_l)} H_j^{v_l} = 0, \quad (5.22)$$

$$c_{ijt}^{Z,3} := \sum_{(v_k, v_l) \in \mathcal{V}_i \times \mathcal{V}_j} \lambda_{ijt}^{(v_k, v_l)} - 1 = 0, \quad (5.23)$$

und stellen mithilfe folgender Gleichungen

$$c_{ijt}^{Z,4} := \sum_{s \in \mathcal{S}} \delta_{ijt}^s - 1 = 0, \quad (5.24)$$

$$c_{ijt}^{Z,5} := \sum_{s \in \{r \in \mathcal{S} : (v_k, v_l) \in \Delta_r\}} \delta_{ijt}^s - \lambda_{ijt}^{(v_k, v_l)} \geq 0 \quad \forall (v_k, v_l) \in \mathcal{V}_i \times \mathcal{V}_j, \quad (5.25)$$

sicher, dass ausschließlich die Ecken des aktiven Simplexes in der Konvexkombination enthalten sind. Der Volumenstrom berechnet sich nun folgendermaßen:

$$Q_{ijt} = \sum_{s \in \mathcal{S}} \delta_{ijt}^s Q_{ijt}^s(H_{i,t-1}, (H_{j,t-1})) \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{i_0} \cup \mathbb{E}_{s_i}, t \in \{1, \dots, T\}, \quad (5.26)$$

wobei Q_{ijt}^s der exakte Fluss zum Zeitraum t im Simplex $s \in \mathcal{S}$ ist, der sich entsprechend des jeweiligen Fließzustandes berechnet.

Variable	Schranken	Bedeutung	Gesamtanzahl
Q_{ijt}	$(-\infty, \infty)$	Volumenstrom	$ \mathbb{E}_{i_0} \cup \mathbb{E}_{s_i} \cdot T$
δ_{ijt}^s	$\{0, 1\}$	Zustandsvariablen	$ \mathcal{S} \cdot \mathbb{E}_{i_0} \cup \mathbb{E}_{s_i} \cdot T$
$\lambda_{ijt}^{(v_k, v_l)}$	$[0, 1]$	Zustandsvariablen	$ \mathcal{V}_i \times \mathcal{V}_j \cdot \mathbb{E}_{i_0} \cup \mathbb{E}_{s_i} \cdot T$
Restriktion	Typ	Bedeutung	Gesamtanzahl
(5.26)	=	Flussgleichung	$ \mathbb{E}_{i_0} \cup \mathbb{E}_{s_i} \cdot T$
(5.21)	=	Zustandsbedingung	$ \mathbb{E}_{i_0} \cup \mathbb{E}_{s_i} \cdot T$
(5.22)	=	Zustandsbedingung	$ \mathbb{E}_{i_0} \cup \mathbb{E}_{s_i} \cdot T$
(5.23)	=	Zustandsbedingung	$ \mathbb{E}_{i_0} \cup \mathbb{E}_{s_i} \cdot T$
(5.24)	=	Zustandsbedingung	$ \mathbb{E}_{i_0} \cup \mathbb{E}_{s_i} \cdot T$
(5.25)	\geq	Zustandsbedingung	$ \mathcal{S} \cdot \mathbb{E}_{i_0} \cup \mathbb{E}_{s_i} \cdot T$

Tabelle 5.9: Variablen und Restriktionen zur Beschreibung eines internen Überlaufs und Hebers $ij \in \mathbb{E}_{i_0} \cup \mathbb{E}_{s_i}$ im Zeitraum $t \in \{1, \dots, T\}$ in der MINLP-Formulierung

In Tabelle 5.9 sind Anzahl und Typ der zur Modellierung des Gesamtmodell benötigten Variablen und Restriktionen zusammengefasst. Insbesondere die Anzahl der

benötigten Binärvariablen ist immens, da die Triangulierung des zulässigen Bereichs eines Überlaufs aus 20 Simplexes besteht, wenn dieser aus einer einzigen Öffnung besteht. Bei mehreren Öffnung steigt diese noch einmal. Hinzu kommt das die Anzahl der Variablen linear von der Zeitdiskretisierung abhängt, so dass bei einem betrachteten Zeitraum von 9 Stunden und fünfminütigen Zeitintervallen eine vierstellige Anzahl Binärvariablen benötigt wird.

Bei den Flussgleichungen Q_{ijt}^s der einzelnen Fließzustände handelt es sich im Regelfall um nichtlineare nichtkonvexe Funktionen. Alle anderen Funktionen sind linear.

Drosseln \mathbb{E}_{th}

Drosseln bzw. Drosselstrecken sind passive Kanten im Netzwerkgraph. Eine Drossel $ij \in \mathbb{E}_{th}$ verbindet zwei Mischwasserkanäle i und j miteinander und beschränkt den maximalen Fluss vom Knoten i zum Knoten j und umgekehrt. Es existieren zwei verschiedene Typen Drosseln: Die festen Drosseln \mathbb{E}_{ft} und die variablen Drosseln \mathbb{E}_{vt} , das heißt $\mathbb{E}_{th} = \mathbb{E}_{ft} \cup \mathbb{E}_{vt}$. Die Formulierung der Drosselmodelle folgt den in Abschnitt 4.1.4 beschriebenen Ansätzen.

Feste Drosseln \mathbb{E}_{ft}

Eine feste Drossel $ij \in \mathbb{E}_{ft}$ besitzt eine konstante obere Schranke Q_{ij}^+ für den Volumenstrom Q_{ijt} in allen Zeiträume $t \in \{1, \dots, T\}$.

Durch eine festen Drossel ist sowohl ein Fluss von i nach j , als auch ein Fluss von j nach i möglich, wenn die Druckhöhen der Knoten dies zulassen. Wir erhalten für den Fluss die Schranken

$$Q_{ijt} \in [-Q_{ij}^+, Q_{ij}^+], \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{ft}, t \in \{1, \dots, T\}. \quad (5.27)$$

Weiterhin darf das Volumen, das während eines Intervalls t über die Kante ij transportiert wird nicht größer sein als das zum Zeitpunkt $t-1$ vorhandene Volumen im Knoten i bzw. im Knoten j :

$$c_{ijt}^{z1} := V_{i,t-1} - Q_{ijt}\Delta_t \geq 0 \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{ft}, t \in \{1, \dots, T\} \quad (5.28)$$

und

$$c_{ijt}^{z2} := V_{j,t-1} + Q_{ijt}\Delta_t \geq 0. \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{ft}, t \in \{1, \dots, T\}. \quad (5.29)$$

Um sicherzustellen, dass der Fluss vom Knoten mit der größeren Druckhöhe zum Knoten mit der geringeren Druckhöhe gerichtet ist, benötigen wir folgende Konsistenzbedingung:

$$c_{ijt}^c := Q_{ijt} (H_{i,t-1} - H_{j,t-1}) \geq 0 \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{ft}, t \in \{1, \dots, T\}. \quad (5.30)$$

Durch die Beschränkungen (5.28) bis (5.30) ist der Fluss durch eine feste Drossel nicht eindeutig bestimmt und ist damit steuerbar. Durch diesen zusätzlichen Freiheitsgrad werden unzulässige Zustände in den angrenzenden Kanälen vermieden (vgl. Abschnitt 4.1.4).

Tatsächlich ist der Fluss durch eine Drossel nicht steuerbar, sondern wird durch die Volumina und Druckhöhen in den Knoten eindeutig bestimmt. Um dieser Tatsache gerecht zu werden, führen wir einen zusätzlichen quadratischen Term (mit $M > 0$) zur Zielfunktion hinzu:

$$-M(Q_{ijt})^2 \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{ft}, t \in \{1, \dots, T\}. \quad (5.31)$$

Mit diesem Term erreichen wir, dass der Volumenstrom Q_{ijt} während der Optimierung gegen den gewünschten Wert strebt, vermeiden dennoch die Unzulässigkeiten, die aufgrund der Diskretisierung entstehen.

Variable	Schranken	Bedeutung	Gesamtanzahl
Q_{ijt}	$[-Q_{ij}^+, Q_{ij}^+]$	Volumenstrom	$ \mathbb{E}_{ft} \cdot T$
Restriktion	Typ	Bedeutung	Anzahl
(5.28)	\geq	Zulässigkeitsbedingung	$ \mathbb{E}_{ft} \cdot T$
(5.29)	\geq	Zulässigkeitsbedingung	$ \mathbb{E}_{ft} \cdot T$
(5.30)	\geq	Konsistenzbedingung	$ \mathbb{E}_{ft} \cdot T$
Zielfunktion	Term	Bedeutung	Gesamtanzahl
(5.31)	$-M(Q_{ijt})^2$	Strafterm	$ \mathbb{E}_{ft} \cdot T$

Tabelle 5.10: Variablen und Restriktionen zur Beschreibung einer festen Drossel $ij \in \mathbb{E}_{ft}$ im Zeitraum $t \in \{1, \dots, T\}$ in der MINLP-Formulierung

In der Zusammenfassung der Bedingungen in Tabelle 5.10 ist leicht zu erkennen, dass im Gesamtmodell des Abwassernetzwerks für die Modellierung der festen Drosseln $|\mathbb{E}_{ft}| \cdot T$ reelle Flussvariablen benötigt werden, die durch lineare Ungleichungsbedingungen und einfache Schranken restringiert werden. Lediglich der Zielfunktionsterm ist quadratisch.

Variable Drosseln \mathbb{E}_{vt}

Der maximale Volumenstrom durch eine variable Drossel $ij \in \mathbb{E}_{vt}$ im Zeitraum $t \in \{1, \dots, T\}$ wird durch den Fluss Q_{jkt} des zugehörigen Pumpwerks $jk \in \mathbb{E}_{ps}$ des Teilnetzes bestimmt. Konkret beträgt der maximale Volumenstrom im Zeitraum t ein skalares Vielfaches $\alpha_{ij} \in (0, 1]$ des Flusses Q_{jkt} (vgl. Abschnitt 4.1.4). Variable Drosseln lassen ausschließlich einen Fluss vom Knoten i zum Knoten j zu, so dass der Fluss nichtnegativ ist:

$$Q_{ijt} \in [0, \infty) \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{vt}, t \in \{1, \dots, T\}. \quad (5.32)$$

Die Beschränkung des Volumenstroms nach oben garantieren wir durch folgende Bedingung

$$c_{ijt}^Q := \alpha_{ij}Q_{jkt} - Q_{ijt} \geq 0 \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{vt}, t \in \{1, \dots, T\}. \quad (5.33)$$

Weiterhin darf, wie bei den festen Drosseln, ein bestimmtes Transportvolumen auf der Kante ij in einem Zeitintervall t nicht überschritten werden, da ansonsten Unzulässigkeiten im System auftreten können. Diese Bedingung an die Zulässigkeit formulieren wir analog zur festen Drossel

$$c_{ijt}^z := V_{i,t-1} - Q_{ijt}\Delta_t \geq 0 \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{vt}, t \in \{1, \dots, T\}. \quad (5.34)$$

Im Gegensatz zu den festen Drosseln ist hier keine zweite Bedingung notwendig, da bei variablen Drosseln kein negativer Volumenstrom auftreten kann. Eine Konsistenzbedingung hingegen benötigen wir auch hier, um zu garantieren, dass der Fluss gleich Null ist, falls die Druckhöhe im Knoten j größer ist als im Knoten i . Dies wird durch die Bedingungen

$$c_{ijt}^c := Q_{ijt}(H_{i,t-1} - H_{j,t-1}) \geq 0 \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{vt}, t \in \{1, \dots, T\} \quad (5.35)$$

und $Q_{ijt} \geq 0$ realisiert.

Analog zum Modell der festen Drosseln wird durch die Beschränkungen (5.32) bis (5.35) der Fluss nicht eindeutig bestimmt. Wir fügen in der Zielfunktion einen zusätzlichen Term hinzu, der Abweichungen vom tatsächlichen Volumenstrom bestraft. Dieser Volumenstrom befindet sich auf dem äußeren Rand des zulässigen Bereichs, also dort wo Q_{ijt} betragsmäßig am größten ist. Der Strafterm hat analog zu den festen Drosseln daher folgende Gestalt:

$$-M(Q_{ijt})^2 \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{vt}, t \in \{1, \dots, T\}. \quad (5.36)$$

Variable	Schranken	Bedeutung	Gesamtanzahl
Q_{ijt}	$[0, \infty)$	Volumenstrom	$ \mathbb{E}_{vt} \cdot T$
Restriktion	Typ	Bedeutung	Anzahl
(5.33)	\geq	Flussbeschränkung	$ \mathbb{E}_{vt} \cdot T$
(5.34)	\geq	Zulässigkeitsbedingung	$ \mathbb{E}_{vt} \cdot T$
(5.35)	\geq	Konsistenzbedingung	$ \mathbb{E}_{vt} \cdot T$
Zielfunktion	Term	Bedeutung	Gesamtanzahl
(5.36)	$-M(Q_{ijt})^2$	Strafterm	$ \mathbb{E}_{vt} \cdot T$

Tabelle 5.11: Variablen und Restriktionen zur Beschreibung einer variablen Drossel $ij \in \mathbb{E}_{vt}$ im Zeitraum $t \in \{1, \dots, T\}$ in der MINLP-Formulierung

Zur Formulierung des Modells der variablen Drosseln genügen insgesamt ebenfalls $|\mathbb{E}_{vt}| \cdot T$ reelle Flussvariablen und $3|\mathbb{E}_{vt}| \cdot T$ lineare Ungleichungsbedingungen, sowie ein quadratischer Zielfunktionsterm (siehe Tabelle 5.11).

Zusammenfassend stellen wir fest, dass die Modelle beider Drosselformen ohne ganzzahlige Variablen auskommen und hinreichend glatt sind, so dass sie sowohl in der MINLP- wie auch in der NLP-Formulierung verwendet werden können.

Pumpwerke \mathbb{E}_{ps}

Die Pumpstationen (Abwasserpumpwerke) bilden die Kantenmenge \mathbb{E}_{ps} . Ein Pumpwerk $ij \in \mathbb{E}_{ps}$ verbindet einen Misch- oder Trennwasserkanal mit einer Verzweigung des ADL-Netzes (vgl. Abschnitt 4.1.5.2). Der Fluss durch ein Pumpwerks ist grundsätzlich vom Kanalnetz zum ADL-Netz gerichtet, Q_{ijt} ist also in jedem Zeitintervall $t \in \{1, \dots, T\}$ nichtnegativ. In dem betrachteten Modell ist der Fluss nach oben nicht explizit beschränkt, wird aber implizit durch Druckschranken im ADL-Netz nach oben begrenzt.

$$Q_{ijt} \in [0, \infty), \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{ps}, t \in \{1, \dots, T\}. \quad (5.37)$$

Die Pumpstationen unterliegen keinen weiteren Beschränkungen, so dass der Fluss innerhalb des nichtnegativen Bereichs frei regelbar ist. Bei den Pumpwerken handelt es sich damit um eine aktive Kante.

Im Gesamtmodell des Abwassernetzwerks werden für die Modellierung der Pumpwerke also $|\mathbb{E}_{ps}| \cdot T$ kontinuierliche Flussvariablen mit jeweils einer einfachen unteren Schranke benötigt.

Variable	Schranken	Bedeutung	Gesamtanzahl
Q_{ijt}	$[0, \infty)$	Volumenstrom	$ \mathbb{E}_{ps} \cdot T$
Restriktion	Typ	Bedeutung	Gesamtanzahl
-	-	-	-

Tabelle 5.12: Variablen und Restriktionen zur Beschreibung eines Pumpwerks $ij \in \mathbb{E}_{ps}$ im Zeitraum $t \in \{1, \dots, T\}$ in der MINLP-Formulierung

Pumpen \mathbb{E}_{pu}

Eine Pumpe (Entlastungspumpe) $ij \in \mathbb{E}_{pu}$ ist eine aktive Kante im Netzwerkgraphen. Sie verbindet zwei Mischwasserkanäle i und j . Der Volumenstrom Q_{ijt} kann in jedem Zeitraum $t \in \{1, \dots, T\}$ einen von zwei Zuständen annehmen: Entweder ist die Pumpe ausgeschaltet und es gilt $Q_{ijt} = 0$ oder sie ist eingeschaltet und es gilt $Q_{ijt} = Q_{ij}^+$, wobei $Q_{ij}^+ = Q_{ij}^{\max}$ eine feste von der konkreten Pumpe abhängige maximale Fördermenge ist (vgl. Abschnitt 4.1.5.1).

Wir modellieren eine Pumpe $ij \in \mathbb{E}_{pu}$ mithilfe einer Binärvariable

$$y_{ijt} \in \{0, 1\}, \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{pu}, t \in \{1, \dots, T\}. \quad (5.38)$$

Bei eingeschalteter Pumpe nimmt diese den Wert eins an, ansonsten den Wert null. Der Fluss Q_{ijt} durch eine Pumpe ergibt sich dann durch die Bedingung

$$c_{ijt}^Q := Q_{ijt} - y_{ijt}Q_{ij}^+ = 0 \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{pu}, t \in \{1, \dots, T\}. \quad (5.39)$$

Den Volumenstrom Q_{ijt} selbst modellieren wir als eine reelle nach oben und nach unten beschränkte Variable.

$$Q_{ijt} \in [0, Q_{ij}^+], \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{\text{pu}}, t \in \{1, \dots, T\}. \quad (5.40)$$

Weiteren Beschränkungen unterliegen die Entlastungspumpen nicht.

Variable	Schranken	Bedeutung	Gesamtanzahl
Q_{ijt}	$[0, Q_{ij}^+]$	Volumenstrom	$ \mathbb{E}_{\text{pu}} \cdot T$
y_{ijt}	$\{0, 1\}$	Zustandsvariable	$ \mathbb{E}_{\text{pu}} \cdot T$
Restriktion	Typ	Bedeutung	Gesamtanzahl
(5.39)	=	Flussgleichung	$ \mathbb{E}_{\text{pu}} \cdot T$

Tabelle 5.13: Variablen und Restriktionen zur Beschreibung einer Pumpe $i \in \mathbb{E}_{\text{pu}}$ im Zeitraum $t \in \{1, \dots, T\}$ in der NLP-Formulierung

Wir benötigen im Gesamtmodell des Abwassernetzwerks zur Modellierung der Pumpen jeweils $|\mathbb{E}_{\text{ps}}| \cdot T$ kontinuierliche Flussvariablen und binäre Zustandsvariablen, die durch jeweils eine Gleichungsrestriktion miteinander gekoppelt sind (siehe Tabelle 5.13).

Rohrleitungen \mathbb{E}_{pi}

Bei einer Rohrleitung handelt es sich um eine passive Kante des Netzwerkgraphen. Eine Rohrleitung $ij \in \mathbb{E}_{\text{pi}}$ transportiert Abwasser von der Verzweigung i zu einer Verzweigung j , wobei Größe des Volumenstroms und die Flussrichtung abhängig von den Druckhöhen $H_{i,t-1}$ und $H_{j,t-1}$ zum Zeitpunkt $t-1$ sind. Grundsätzlich ist der Fluss in Rohren unbeschränkt:

$$Q_{ijt} \in (-\infty, \infty), \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{\text{pi}}, t \in \{1, \dots, T\}. \quad (5.41)$$

Tatsächlich kann aber aufgrund der Druckbeschränkungen in den angrenzenden Knoten kein beliebig großer Volumenstrom auftreten.

In Rohrleitungen kommt es aufgrund der hydraulischen Reibung zu einem Druckverlust, der den Volumenstrom mit den Druckhöhen in den angrenzenden Knoten koppelt:

$$c_{ijt}^{\Delta H} := H_{i,t-1} - H_{j,t-1} - \phi_{ij}(Q_{ijt}) = 0 \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{\text{pi}}, t \in \{1, \dots, T\}. \quad (5.42)$$

Wir bestimmen den Druckverlust ϕ_{ij} mithilfe der in Kapitel 4.2.2 diskutierten Approximation von Steinbach [BGS09b]:

$$\phi_{ij}(Q_{ijt}) = r_{ij} \left(\sqrt{Q_{ijt}^2 + d_{ij}^2} + b_{ij} + \frac{c_{ij}}{\sqrt{Q_{ijt}^2 + d_{ij}^2}} \right) Q_{ijt} \quad (5.43)$$

mit

$$r_{ij} = \frac{8L_{ij}}{\pi g D_{ij}^5} (2 \log \beta_{ij})^{-2} \quad \beta_{ij} = \frac{k_{ij}}{3.71 D_{ij}}$$

$$b_{ij} = \frac{2.51 \pi \nu D_{ij}}{\beta_{ij} \ln 10} \quad c_{ij} = (\ln \beta_{ij} + 1) \frac{b_{ij}^2}{4} - \frac{a_{ij}^2}{2},$$

sowie zwei weiteren frei wählbaren Parametern $a_{ij}, d_{ij} > 0$. Der Druckverlust im Rohr ij hängt neben dem Volumenstrom Q_{ijt} ausschließlich von den Rohrdaten, wie Länge L_{ij} , inneren Durchmesser D_{ij} und Rauigkeit k_{ij} ist ab, sowie konstanten physikalischen Parametern wie der Gravitation g und der kinematische Viskosität von Wasser ν .

Variable	Schranken	Bedeutung	Gesamtanzahl
Q_{ijt}	$(-\infty, \infty)$	Volumenstrom	$ \mathbb{E}_{\text{pi}} \cdot T$
Restriktion	Typ	Bedeutung	Gesamtanzahl
(5.43)	=	Druckverlust	$ \mathbb{E}_{\text{pi}} \cdot T$

Tabelle 5.14: Variablen und Restriktionen zur Beschreibung eines Rohrleitung $i \in \mathbb{E}_{\text{pi}}$ im Zeitraum $t \in \{1, \dots, T\}$ in der MINLP-Formulierung

Mithilfe der Approximation des Druckverlustes können wir die Eigenschaften einer Rohrleitung mit einer reellen unbeschränkten Variable für den Volumenstrom und einer nichtlinearen nicht konvexen Druckverlustgleichung in jedem Zeitintervall $t \in \{1, \dots, T\}$ modellieren. Im Gesamtmodell benötigen wir daher $|\mathbb{E}_{\text{pi}}| \cdot T$ Variablen und Gleichungsrestriktionen.

Ventile \mathbb{E}_{va}

Ventile sind aktive Kanten im Netzwerkgraphen. Ein Ventil $ij \in \mathbb{E}_{\text{va}}$ verbindet zwei Verzweigungen i und j des ADL-Netzes. Der Fluss Q_{ijt} im Zeitintervall t wird durch ein Ventil $ij \in \mathbb{E}_{\text{va}}$ kontrolliert, indem der Druckverlust ΔH_{ijt} zwischen den beiden Knoten i und j aktiv gesteuert werden kann. Diese Druckänderung kann abhängig von der Flussrichtung sowohl positiv als auch negativ sein. Sowohl ΔH_{ijt} , als auch Q_{ijt} in einem Ventil werden nicht explizit beschränkt, so dass gilt:

$$Q_{ijt} \in (-\infty, \infty) \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{\text{va}}, t \in \{1, \dots, T\}, \quad (5.44)$$

$$\Delta H_{ijt} \in (-\infty, \infty) \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{\text{va}}, t \in \{1, \dots, T\}. \quad (5.45)$$

Der Druck wird t in einem Ventil um den Betrag ΔH_{ijt} gemindert, so dass gilt:

$$c_{ijt}^{\Delta H} := H_{i,t-1} - H_{j,t-1} - \Delta H_{ijt} = 0 \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{\text{va}}, t \in \{1, \dots, T\}. \quad (5.46)$$

Durch die Gleichung 5.46 ist bisher nicht sichergestellt, dass der Druck zwischen beiden Knoten i und j tatsächlich gemindert wird. Daher benötigen wir, wie in Abschnitt 4.2.3 diskutiert, eine Konsistenzbedingung

$$c_{ijt}^e := \Delta H_{ijt} Q_{ijt} \geq 0 \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{va}, t \in \{1, \dots, T\}, \quad (5.47)$$

die dies sicherstellt. Ohne diese Konsistenzbedingung wäre es möglich, dass in den Ventilen der Druck erhöht wird.

Variable	Schranken	Bedeutung	Gesamtanzahl
Q_{ijt}	$(-\infty, \infty)$	Volumenstrom	$ \mathbb{E}_{va} \cdot T$
ΔH_{ijt}	$(-\infty, \infty)$	Druckverlust	$ \mathbb{E}_{va} \cdot T$
Restriktion	Typ	Bedeutung	Gesamtanzahl
(5.46)	=	Drucksteuerung	$ \mathbb{E}_{va} \cdot T$
(5.47)	\geq	Konsistenzbedingung	$ \mathbb{E}_{va} \cdot T$

Tabelle 5.15: Variablen und Restriktionen zur Beschreibung eines Ventils $ij \in \mathbb{E}_{va}$ im Zeitraum $t \in \{1, \dots, T\}$ in der MINLP-Formulierung

Zur Formulierung des Modells der Ventile benötigen wir je Ventil und Zeitintervall zwei unbeschränkte reelle Variablen und zwei Restriktionen. Im Gesamtmodell führt das auf $2|\mathbb{E}_{va}| \cdot T$ Variablen und Restriktionen (siehe Tabelle 5.15). Insbesondere kommt diese Formulierung ohne ganzzahlige Variablen aus, das diese Formulierung auch im kontinuierlichen Modell verwendet werden kann.

Klärwerke \mathbb{E}_{sw}

Die Klärwerke werden als aktive Kanten modelliert. Ein Klärwerk $ij \in \mathbb{E}_{sw}$ verbindet den Knoten i aus dem ADL-Netz mit einem Reservoir j . Die Flussrichtung führt grundsätzlich vom ADL-Netz zum Gewässer.

Die Modellierung eines Klärwerks erfolgt mithilfe von zwei Flussvariablen in jedem Zeitintervall $t \in \{1, \dots, T\}$. Einerseits gibt es eine Variable Q_{ijt} , die den gesamten Fluss über die Kante beschreibt. Diese darf den maximalen im Klärwerk zulässigen Volumenstrom in einem Klärwerk nicht überschreiten und ist nach unten durch null beschränkt:

$$Q_{ijt} \in [0, Q_{ij}^{\max}] \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{sw}, t \in \{1, \dots, T\}. \quad (5.48)$$

Die zweite Flussvariable Q_{ijt}^+ beschreibt den Überschussanteil des Volumenstroms Q_{ijt} , also den Flussanteil, der über den im Dauerbetrieb möglichen Volumenstrom Q_{ij}^{nom} . Sie ist ebenfalls nichtnegativ und nach oben durch die Differenz aus maximalen und nominalen Volumenstrom beschränkt:

$$Q_{ijt}^+ \in [0, Q_{ij}^{\max} - Q_{ij}^{\text{nom}}] \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{sw}, t \in \{1, \dots, T\}. \quad (5.49)$$

Die Differenz der beiden Volumenströme Q_{ijt} und Q_{ijt}^+ darf in keinem Zeitintervall t den zulässigen Nominalfluss Q_{ij}^{nom} des Klärwerks ij überschreiten:

$$c_{ijt}^Q := Q_{ij}^{\text{nom}} - Q_{ijt} + Q_{ijt}^+ \geq 0 \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{\text{sw}}, t \in \{1, \dots, T\}. \quad (5.50)$$

Zur Modellierung der zeitlichen Beschränkung für das Überschreiten des Nominalvolumenstroms verwenden wir eine Binärvariable $y_{ijt} \in \{0, 1\}$. Diese wird auf Null gesetzt, wenn der Überschussvolumenstrom im Zeitraum t positiv ist und umgekehrt:

$$c_{ijt}^{y,1} := y_{ijt} Q_{ijt}^+ = 0 \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{\text{sw}}, t \in \{1, \dots, T\}. \quad (5.51)$$

Um sicherzustellen, dass der Überschussvolumenstrom in maximal T^{max} Zeiteinheiten überschritten werden kann, begrenzen wir die Summe der binären Variablen:

$$c_{ijt}^{y,2} := \sum_{t=1}^T T^{\text{max}} - (1 - y_{ijt}) \Delta_t \geq 0 \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{\text{sw}}. \quad (5.52)$$

Die beiden folgenden Restriktionen garantieren, dass die Veränderung der Volumenströme Q und Q^+ in zwei aufeinander folgenden Zeitintervallen innerhalb der vorgeschriebenen Grenzen bleiben. Es gilt demnach:

$$c_{ijt}^{\Delta Q,1} := Q_{ij,t-1} - Q_{ijt} + \Delta Q_{ij}^{\text{max}} \Delta_t \geq 0 \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{\text{sw}}, t \in \{2, \dots, T\} \quad (5.53)$$

$$c_{ijt}^{\Delta Q,1} := Q_{ij,t-1}^+ - Q_{ijt}^+ + \Delta Q_{ij}^{\text{max}} \Delta_t \geq 0 \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{\text{sw}}, t \in \{2, \dots, T\}. \quad (5.54)$$

Variable	Schranken	Bedeutung	Gesamtanzahl
Q_{ijt}	$[0, Q_{ij}^{\text{max}}]$	Volumenstrom	$ \mathbb{E}_{\text{sw}} \cdot T$
Q_{ijt}^+	$[0, Q_{ij}^{\text{max}} - Q_{ij}^{\text{nom}}]$	Überschussvolumenstrom	$ \mathbb{E}_{\text{sw}} \cdot T$
y_{ijt}	$\{0, 1\}$	Hilfsvariable	$ \mathbb{E}_{\text{sw}} \cdot T$
Restriktion	Typ	Bedeutung	Gesamtanzahl
(5.50)	\geq	Flusszusammensetzung	$ \mathbb{E}_{\text{sw}} \cdot T$
(5.51)	$=$	Konsistenzbedingung	$ \mathbb{E}_{\text{sw}} \cdot T$
(5.52)	\geq	Zeitbeschränkung	$ \mathbb{E}_{\text{sw}} $
(5.53)	\geq	Flussänderung	$ \mathbb{E}_{\text{sw}} \cdot (T - 1)$
(5.54)	\geq	Flussänderung	$ \mathbb{E}_{\text{sw}} \cdot (T - 1)$

Tabelle 5.16: Variablen und Restriktionen zur Beschreibung eines Klärwerks $ij \in \mathbb{E}_{\text{sw}}$ im Zeitraum $t \in \{1, \dots, T\}$ in der MINLP-Formulierung

Tabelle 5.16 fasst die zur Modellierung der Klärwerke benötigten Variablen und Beschränkungen zusammen. Insbesondere werden $|\mathbb{E}_{\text{sw}}| \cdot T$ binäre Variablen und ebenso viele nichtlineare Gleichungsrestriktionen sowie eine lineare Restriktion zur Modellierung der Zeitbegrenzung der maximalen Volumenstroms benötigt. Hinzu kommen weitere $2|\mathbb{E}_{\text{sw}}| \cdot T$ kontinuierliche Variablen und $|\mathbb{E}_{\text{sw}}| \cdot (3T - 2)$ lineare Restriktionen.

5.3 Nichtlineares kontinuierliches Modell

In diesem Abschnitt formulieren wir das Modell zur optimalen Steuerung des Abwassernetzwerks als nichtlineares kontinuierliches Optimierungsproblem. Wie bei der MINLP-Formulierung legen dem Modell die in Abschnitt 5.1.1 eingeführte Zeitdiskretisierung zugrunde und beschreiben die Topologie des Netzwerks als gerichtetem Graphen $G = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ (vgl. Abschnitt 5.1.2). Wir stellen zunächst ein Modell der verschiedenen Knotentypen auf und formulieren im anschließenden Abschnitt das Modell der verschiedenen Kantentypen basierend auf Kapitel 4.

5.3.1 Die Knotenmenge \mathbb{V}

Die Knotenmenge unterteilen wir gemäß (5.1) in Reservoirs \mathbb{V}_{rv} , Mischwasserkanäle \mathbb{V}_{cws} , den Trennwasserkanäle \mathbb{V}_{sws} und Verzweigungen \mathbb{V}_{jc} :

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}_{rv} \cup \mathbb{V}_{cws} \cup \mathbb{V}_{sws} \cup \mathbb{V}_{jc}.$$

Das nichtlinear kontinuierliche Modell der Knoten des Netzwerks entspricht der MINLP-Formulierung aus Abschnitt 5.2.1, da dort ausschließlich kontinuierliche Variablen und mindestens zweimal stetig differenzierbare Funktionen zur Modellierung verwendet wurden. Wir verweisen daher auf die Modellierung dort.

5.3.2 Die Kantenmenge \mathbb{E}

In diesem Abschnitt formulieren wir ein NLP-Modell für jeden Kantentyp des Abwassernetzwerks. Die Kantenmenge \mathbb{E} besteht aus Notauslässen \mathbb{E}_{eo} , Regen- bzw. Klärüberläufen \mathbb{E}_{so} , internen Überläufen \mathbb{E}_{io} , Hebern \mathbb{E}_{si} , variablen Drosseln \mathbb{E}_{vt} und festen Drosseln \mathbb{E}_{ft} , sowie Pumpen \mathbb{E}_{pu} und Pumpstationen \mathbb{E}_{ps} im Kanalnetz. Die Kantentypen des ADL-Netzes sind die Rohre \mathbb{E}_{pi} und die Ventile \mathbb{E}_{va} . Hinzu kommen noch die Klärwerke \mathbb{E}_{sw} , die ebenfalls als Kanten modelliert sind. Gemäß Gleichung (5.2) gilt also

$$\mathbb{E} = \mathbb{E}_{eo} \cup \mathbb{E}_{so} \cup \mathbb{E}_{io} \cup \mathbb{E}_{si} \cup \mathbb{E}_{vt} \cup \mathbb{E}_{ft} \cup \mathbb{E}_{ps} \cup \mathbb{E}_{pu} \cup \mathbb{E}_{pi} \cup \mathbb{E}_{va} \cup \mathbb{E}_{sw}.$$

Einige der Kantentypen können auch im gemischt-ganzzahligen Modell ausschließlich mithilfe kontinuierlicher Variablen und hinreichend glatter Beschränkungen formuliert werden, so dass diese Formulierung hier übernommen werden kann. In diesen Fällen verzichten wir auf eine erneute detaillierte Beschreibung und verweisen auf den Abschnitt der gemischt-ganzzahligen Modellierung.

Notauslässe \mathbb{E}_{eo}

Notauslässe verbinden Trennwasserkanäle mit einem Reservoir. Bei dem Modell der Notauslässe in der MINLP-Formulierung in Abschnitt 5.2.2 handelt es sich

bereits um eine kontinuierliche Formulierung handelt, so dass wir diese vollständig in die NLP-Formulierung übernehmen können. Das ist insbesondere auch deshalb möglich, weil auch das Modell der Trennwasserkanäle und der Reservoirs identisch ist.

Der Fluss Q_{ijt} ist in jedem Zeitintervall t nichtnegativ und nach oben nicht beschränkt

$$Q_{ijt} \in [0, \infty), \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{\text{eo}}, t \in \{1, \dots, T\}. \quad (5.55)$$

Kanten vom Typ Notauslass unterliegen aus den in Abschnitt 5.2.2 beschriebenen Gründen keinen weiteren Beschränkungen.

Variable	Schranken	Bedeutung	Gesamtanzahl
Q_{ijt}	$[0, \infty)$	Fluss	$ \mathbb{E}_{\text{eo}} \cdot T$
Restriktion	Typ	Bedeutung	Gesamtanzahl
-	-	-	-

Tabelle 5.17: Variablen und Restriktionen zur Beschreibung eines Notauslasses $ij \in \mathbb{E}_{\text{eo}}$ im Zeitraum $t \in \{1, \dots, T\}$ in der NLP-Formulierung

Regen- und Klärüberläufe \mathbb{E}_{so}

Kanten $ij \in \mathbb{E}_{\text{so}}$ vom Typ Regen- bzw. Klärüberlauf verbinden einen Mischwasserkanal i mit einem Reservoir j . Die Flussrichtung in einem Regenüberlauf ist grundsätzlich nichtnegativ und nach oben unbeschränkt:

$$Q_{ijt} \in [0, \infty), \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{\text{so}}, t \in \{1, \dots, T\}. \quad (5.56)$$

In Abschnitt 4.1.3.8 wurde eine Approximation des Flusses Q_{ijt} mithilfe von Splines diskutiert, mit deren Hilfe wir ein zweimal stetig differenzierbares Modell der Flussgleichung erhalten. Aus Gleichung (4.37) erhalten wir die in der Zeit diskretisierte Flussgleichung:

$$c_{ijt}^Q := Q_{ijt} - s_{ij}(H_{i,t-1}) = 0. \quad (5.57)$$

für alle $ij \in \mathbb{E}_{\text{so}}$ und $t \in \{1, \dots, T\}$. Die Flussgleichungen c_{ijt}^Q sind nichtkonvexe nichtlineare Funktionen. In Tabelle 5.18 sind die Eigenschaften des kontinuierlichen Modells der Regenüberläufe zusammengefasst. Insbesondere fällt im Vergleich zur MINLP-Formulierung auf, dass keine Hilfsvariablen und -bedingungen benötigt werden. Die Koeffizienten der Spline-Approximation werden einmalig vor dem Optimierungsprozess bestimmt und haben somit keinen Einfluss auf den Lösungsprozess.

Variable	Schranken	Bedeutung	Gesamtanzahl
Q_{ijt}	$[0, \infty)$	Volumenstrom	$ \mathbb{E}_{\text{so}} \cdot T$
Restriktion	Typ	Bedeutung	Gesamtanzahl
(5.57)	=	Flussgleichung	$ \mathbb{E}_{\text{so}} \cdot T$

Tabelle 5.18: Variablen und Restriktionen zur Beschreibung eines Regenüberlaufs $ij \in \mathbb{E}_{\text{so}}$ im Zeitraum $t \in \{1, \dots, T\}$ in der NLP-Formulierung

Interne Überläufe \mathbb{E}_{io} und Heber \mathbb{E}_{si}

Interne Überläufe und Heber sind passive Kanten des Netzwerkgraphen. Ein interner Überlauf bzw. ein Heber $ij \in \mathbb{E}_{\text{io}} \cup \mathbb{E}_{\text{si}}$ verbindet die zwei Mischwasserkanäle i und j miteinander. In der Regel besteht ein interner Überlauf aus mehreren physischen Überläufen, die auf beiden Seiten vollständig überstaut werden können (vgl. Abschnitte 4.1.3.9 und 4.1.3.10). Daher kann sowohl ein positiver als auch ein negativer Fluss auftreten und es existieren keine expliziten Schranken an den Volumenstrom Q_{ijt} .

$$Q_{ijt} \in (-\infty, \infty), \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{\text{io}} \cup \mathbb{E}_{\text{si}}, t \in \{1, \dots, T\}. \quad (5.58)$$

Wir verwenden zur Approximation der stückweise definierten nichtglatten von den Druckhöhen $H_{i,t-1}$ und $H_{j,t-1}$ abhängigen Flussfunktion, die in den Abschnitten 4.1.3.9 und 4.1.3.10 beschriebenen bivariaten Tensorprodukt-Basis-Splines s_{ij} . Die Approximation $s_{ij}(H_{i,t-1}, H_{j,t-1})$ ist eine stückweise definierte, zweimalstetig differenzierbare Funktionen, die ausschließlich von den Druckhöhen $H_{i,t-1}$ und $H_{j,t-1}$ zum Zeitpunkt $t-1$ abhängt, sowie von einmalig vor dem Optimierungsprozess bestimmten Koeffizienten λ_{ij} .

Damit erhalten wir für das Flussprofil folgende zweimal stetig differenzierbare Approximation:

$$c_{ijt}^Q := Q_{ijt} - s_{ij}(H_{i,t-1}, H_{j,t-1}) = 0 \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{\text{io}} \cup \mathbb{E}_{\text{si}}, t \in \{1, \dots, T\}. \quad (5.59)$$

Bei den Flussgleichungen c_{ijt}^Q handelt es sich um nichtkonvexe nichtlineare Funktionen. In Tabelle 5.19 sind die Eigenschaften der Variablen und Restriktionen des kontinuierlichen Modells der internen Überläufe und Heber zusammengefasst. Insbesondere fällt im Vergleich zur MINLP-Formulierung auf, dass keine Hilfsvariablen und -bedingungen benötigt werden und damit die Anzahl der Restriktionen um ein Vielfaches geringer ist.

Drosseln \mathbb{E}_{th}

Bei den Drosseln handelt es sich um passive Kanten im Netzwerkgraphen. Wir unterscheiden feste Drosseln \mathbb{E}_{ft} und die variable Drosseln \mathbb{E}_{vt} , so dass gilt $\mathbb{E}_{\text{th}} =$

Variable	Schranken	Bedeutung	Gesamtanzahl
Q_{ijt}	$(-\infty, \infty)$	Volumenstrom	$ \mathbb{E}_{\text{so}} \cup \mathbb{E}_{\text{si}} \cdot T$
Restriktion	Typ	Bedeutung	Gesamtanzahl
(5.59)	=	Flussgleichung	$ \mathbb{E}_{\text{io}} \cup \mathbb{E}_{\text{si}} \cdot T$

Tabelle 5.19: Variablen und Restriktionen zur Beschreibung eines internen Überlaufs bzw. Hebers $ij \in \mathbb{E}_{\text{io}} \cup \mathbb{E}_{\text{si}}$ im Zeitraum $t \in \{1, \dots, T\}$ in der NLP-Formulierung

$\mathbb{E}_{\text{ft}} \cup \mathbb{E}_{\text{vt}}$. Eine Drossel $ij \in \mathbb{E}_{\text{ft}} \cup \mathbb{E}_{\text{vt}}$ verbindet zwei Mischwasserkanäle i und j miteinander und beschränkt den maximalen Fluss vom Knoten i zum Knoten j und umgekehrt.

Die Formulierung der festen und variablen Drosseln im gemischt-ganzzahligen Modell im Abschnitt 5.2 ist bereits eine nichtlinear kontinuierliche Formulierung, so dass wir diese im NLP-Modell übernehmen können.

Feste Drosseln \mathbb{E}_{ft}

Eine feste Drossel $ij \in \mathbb{E}_{\text{ft}}$ lässt einen Fluss in beide Richtungen zu und beschränkt den Volumenstrom durch Q_{ij}^+ . Daher gilt

$$Q_{ijt} \in [-Q_{ij}^+, Q_{ij}^+], \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{\text{ft}}, t \in \{1, \dots, T\}. \quad (5.60)$$

Zusätzlich ist das maximale Transportvolumen während eines Intervalls t beschränkt, um Unzulässigkeiten des Systems zu vermeiden:

$$c_{ijt}^z1 := V_{i,t-1} - Q_{ijt} \Delta_t \geq 0 \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{\text{ft}}, t \in \{1, \dots, T\} \quad (5.61)$$

und

$$c_{ijt}^z2 := V_{j,t-1} + Q_{ijt} \Delta_t \geq 0. \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{\text{ft}}, t \in \{1, \dots, T\}. \quad (5.62)$$

Die Konsistenzbedingung

$$c_{ijt}^c := Q_{ijt} (H_{i,t-1} - H_{j,t-1}) \geq 0 \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{\text{ft}}, t \in \{1, \dots, T\}. \quad (5.63)$$

garantiert, dass Flussrichtung und Druckdifferenz in den Kanälen übereinstimmen. Ein zusätzlicher Term in der Zielfunktion lässt Volumenstrom Q_{ijt} während der Optimierung gegen den Rand der durch die Bedingungen (5.61), (5.62) und (5.63) beschriebenen Bereiche streben, an dem sich der gewünschte Flusswert befindet:

$$-M(Q_{ijt})^2 \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{\text{ft}}, t \in \{1, \dots, T\}. \quad (5.64)$$

In Tabelle 5.20 sind die Bedingungen zusammengefasst. Eine ausführliche Beschreibung des Modells findet sich in den Abschnitten 5.2.2 und 4.1.4.

Variable	Schranken	Bedeutung	Gesamtanzahl
Q_{ijt}	$[-Q_{ij}^+, Q_{ij}^+]$	Volumenstrom	$ \mathbb{E}_{ft} \cdot T$
Restriktion	Typ	Bedeutung	Anzahl
(5.61)	\geq	Zulässigkeitsbedingung	$ \mathbb{E}_{ft} \cdot T$
(5.62)	\geq	Zulässigkeitsbedingung	$ \mathbb{E}_{ft} \cdot T$
(5.63)	\geq	Konsistenzbedingung	$ \mathbb{E}_{ft} \cdot T$
Zielfunktion	Term	Bedeutung	Gesamtanzahl
(5.64)	$-M(Q_{ijt})^2$	Strafterm	$ \mathbb{E}_{ft} \cdot T$

Tabelle 5.20: Variablen und Restriktionen zur Beschreibung einer festen Drossel $ij \in \mathbb{E}_{ft}$ im Zeitraum $t \in \{1, \dots, T\}$ in der NLP-Formulierung

Im Gesamtmodell des Abwassernetzwerks werden für die Modellierung der festen Drosseln $|\mathbb{E}_{ft}| \cdot T$ reelle Flussvariablen benötigt und ebenso viele lineare Ungleichungsbedingungen und einfache Schranken. Zusätzlich wird der Zielfunktion ein quadratischer Term hinzugefügt.

Variable Drosseln \mathbb{E}_{vt}

Die Modellierung der variablen Drosseln ist ebenfalls identisch mit im gemischt-ganzzahligen Modell und ähnelt dem der festen Drosseln. Der Volumenstrom Q_{ijt} wird hier durch den Fluss Q_{jkt} des zugehörigen Pumpwerks $jk \in \mathbb{E}_{ps}$ im Zeitraum $t \in \{1, \dots, T\}$ bestimmt. Zusätzlich lassen variable Drosseln ausschließlich einen nichtnegativen Fluss zu:

$$Q_{ijt} \in [0, \infty) \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{vt}, t \in \{1, \dots, T\}. \quad (5.65)$$

Das Modell der variablen Drosseln entspricht dem der Abschnitte 5.2.2 und 4.1.4):

$$c_{ijt}^Q := \alpha_{ij} Q_{jkt} - Q_{ijt} \geq 0 \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{vt}, t \in \{1, \dots, T\} \quad (5.66)$$

$$c_{ijt}^Z := V_{i,t-1} - Q_{ijt} \Delta_t \geq 0 \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{vt}, t \in \{1, \dots, T\} \quad (5.67)$$

$$c_{ijt}^c := Q_{ijt} (H_{i,t-1} - H_{j,t-1}) \geq 0 \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{vt}, t \in \{1, \dots, T\}, \quad (5.68)$$

mit einem zusätzlichen Term in der Zielfunktion

$$-M(Q_{ijt})^2 \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{vt}, t \in \{1, \dots, T\}. \quad (5.69)$$

Zur Formulierung des Modells der variablen Drosseln genügen insgesamt ebenfalls $|\mathbb{E}_{vt}| \cdot T$ reelle Flussvariablen und $3|\mathbb{E}_{vt}| \cdot T$ lineare Ungleichungsbedingungen, sowie ein quadratischer Zielfunktionsterm (siehe Tabelle 5.21).

Variable	Schranken	Bedeutung	Gesamtanzahl
Q_{ijt}	$[0, \infty)$	Volumenstrom	$ \mathbb{E}_{vt} \cdot T$
Restriktion	Typ	Bedeutung	Anzahl
(5.66)	\geq	Flussbeschränkung	$ \mathbb{E}_{vt} \cdot T$
(5.67)	\geq	Zulässigkeitsbedingung	$ \mathbb{E}_{vt} \cdot T$
(5.68)	\geq	Konsistenzbedingung	$ \mathbb{E}_{vt} \cdot T$
Zielfunktion	Term	Bedeutung	Gesamtanzahl
(5.69)	$-M(Q_{ijt})^2$	Strafterm	$ \mathbb{E}_{vt} \cdot T$

Tabelle 5.21: Variablen und Restriktionen zur Beschreibung einer variablen Drossel $ij \in \mathbb{E}_{vt}$ im Zeitraum $t \in \{1, \dots, T\}$ in der NLP-Formulierung

Pumpwerke \mathbb{E}_{ps}

Das nichtlinear kontinuierliche Modell der Pumpwerke entspricht dem der MINLP-Formulierung, da für diese ausschließlich nichtnegative reelle Flussvariablen benötigt wurden.

Der Fluss durch ein Pumpwerks ist grundsätzlich nichtnegativ und nach oben nicht beschränkt.

$$Q_{ijt} \in [0, \infty), \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{ps}, t \in \{1, \dots, T\}. \quad (5.70)$$

Pumpwerke unterliegen keinen weiteren Beschränkungen. Für weitere Details verweisen wir auf die MINLP-Formulierung in Abschnitt 5.3.2 und Abschnitt 4.1.5.2.

Im Gesamtmodell des Abwassernetzwerks werden für die Modellierung der Pumpwerke also $|\mathbb{E}_{ps}| \cdot T$ kontinuierliche Flussvariablen mit jeweils einer einfachen unteren Schranke benötigt.

Variable	Schranken	Bedeutung	Gesamtanzahl
Q_{ijt}	$[0, \infty)$	Volumenstrom	$ \mathbb{E}_{ps} \cdot T$
Restriktion	Typ	Bedeutung	Gesamtanzahl
-	-	-	-

Tabelle 5.22: Variablen und Restriktionen zur Beschreibung eines Pumpwerks $ij \in \mathbb{E}_{so}$ im Zeitraum $t \in \{1, \dots, T\}$ in der NLP-Formulierung

Pumpen \mathbb{E}_{pu}

Eine Pumpe (Entlastungspumpe) $ij \in \mathbb{E}_{pu}$ ist eine aktive Kante im Netzwerkgraphen. Sie verbindet zwei Mischwasserkanäle i und j . Die NLP-Formulierung ist

eine Relaxation des MINLP-Formulierung aus Abschnitt 5.2.2. Der Fluss Q_{ijt} ist für alle Zeiträume $t \in \{1, \dots, T\}$ frei steuerbar. Eingeschränkt wird dieser durch eine Nichtnegativitätsbedingung, das heißt es ist nur ein Fluss von i nach j möglich. Zusätzlich ist der Fluss nach oben durch die Maximalleistung $Q_{ij}^+ = Q_{ij}^{\max}$ der Pumpe beschränkt

$$Q_{ijt} \in [0, Q_{ij}^+], \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{\text{pu}}, t \in \{1, \dots, T\}. \quad (5.71)$$

Die Entlastungspumpen unterliegen keinen weiteren Beschränkungen.

Variable	Schranken	Bedeutung	Gesamtanzahl
Q_{ijt}	$[0, Q_{ij}^+]$	Volumenstrom	$ \mathbb{E}_{\text{pu}} \cdot T$
Restriktion	Typ	Bedeutung	Gesamtanzahl
-	-	-	-

Tabelle 5.23: Variablen und Restriktionen zur Beschreibung einer Pumpe $ij \in \mathbb{E}_{\text{so}}$ im Zeitraum $t \in \{1, \dots, T\}$ in der NLP-Formulierung

Rohrleitungen \mathbb{E}_{pi}

Ein Rohr $ij \in \mathbb{E}_{\text{pi}}$ transportiert Abwasser im ADL-Netz von der Verzweigung i zu einer Verzweigung j . Bei der Formulierung des Modells im Abschnitt 5.2 handelt es sich bereits um eine kontinuierliche hinreichend glatte Formulierung, so dass wir diese auch hier verwenden können. Zu Details verweisen wir auf die Abschnitte 4.2.2 und 5.2.

Der Fluss in einem Rohr ist unbeschränkt, so dass gilt:

$$Q_{ijt} \in (-\infty, \infty), \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{\text{pi}}, t \in \{1, \dots, T\}. \quad (5.72)$$

Den Druckverlust beschreiben wir mithilfe der Gleichung:

$$c_{ijt}^{\Delta H} := H_{i,t-1} - H_{j,t-1} - \phi_{ij}(Q_{ijt}) = 0 \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{\text{pi}}, t \in \{1, \dots, T\}, \quad (5.73)$$

wobei

$$\phi_{ij}(Q_{ijt}) = r_{ij} \left(\sqrt{Q_{ijt}^2 + a_{ij}^2} + b_{ij} + \frac{c_{ij}}{\sqrt{Q_{ijt}^2 + d_{ij}^2}} \right) Q_{ijt} \quad (5.74)$$

und

$$\begin{aligned} r_{ij} &= \frac{8L_{ij}}{\pi g D_{ij}^5} (2 \log \beta_{ij})^{-2} & \beta_{ij} &= \frac{k_{ij}}{3.71 D_{ij}} \\ b_{ij} &= \frac{2.51 \pi \nu D_{ij}}{\beta_{ij} \ln 10} & c_{ij} &= (\ln \beta_{ij} + 1) \frac{b_{ij}^2}{4} - \frac{a_{ij}^2}{2}, \end{aligned}$$

Variable	Schranken	Bedeutung	Gesamtanzahl
Q_{ijt}	$(-\infty, \infty)$	Volumenstrom	$ \mathbb{E}_{\text{pi}} \cdot T$
Restriktion	Typ	Bedeutung	Gesamtanzahl
(5.74)	=	Druckverlust	$ \mathbb{E}_{\text{pi}} \cdot T$

Tabelle 5.24: Variablen und Restriktionen zur Beschreibung eines Rohrleitung $ij \in \mathbb{E}_{\text{pi}}$ im Zeitraum $t \in \{1, \dots, T\}$ in der NLP-Formulierung

sowie $a_{ij}, d_{ij} > 0$.

Das Modell einer Rohrleitungen benötigt pro Rohr und Zeitintervall eine reelle unbeschränkten Variable für den Volumenstrom, sowie eine nichtlineare nichtkonvexe Gleichung zur Beschreibung des Druckverlustes. Im Gesamtmodell benötigen wir daher $|\mathbb{E}_{\text{pi}}| \cdot T$ Variablen und Gleichungsrestriktionen (vgl. Tabelle 5.24).

Ventile \mathbb{E}_{va}

Ein Kante vom Typ Ventil $ij \in \mathbb{E}_{\text{va}}$ verbindet zwei Knoten i und j im ADL-Netz. Die Modellierung der Ventile in der gemischt-ganzzahligen Formulierung benötige ausschließlich reelle Variablen und hinreichend glatte Restriktionen, so dass wir diese auch in der kontinuierlichen Formulierung übernehmen können. Aus diesem Grund verzichten wir hier auf weitere Erläuterungen der einzelnen Gleichungen und verweisen auf Abschnitt 5.2.2.

Zur Beschreibung eines Ventils $ij \in \mathbb{E}_{\text{va}}$ benötigen wir für jedes Zeitintervall $t \in \{1, \dots, T\}$ eine Flussvariable Q_{ijt} eine Variable für den steuerbaren Druckverlust ΔH_{ijt} :

$$Q_{ijt} \in (-\infty, \infty) \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{\text{va}}, t \in \{1, \dots, T\}, \quad (5.75)$$

$$\Delta H_{ijt} \in (-\infty, \infty) \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{\text{va}}, t \in \{1, \dots, T\}. \quad (5.76)$$

Die Druckminderung beschreiben wir durch die Gleichung :

$$c_{ijt}^{\Delta H} := H_{i,t-1} - H_{j,t-1} - \Delta H_{ijt} = 0 \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{\text{va}}, t \in \{1, \dots, T\}, \quad (5.77)$$

wobei wir folgende zusätzliche Bedingung benötigen, um ein konsistentes Modell zu erhalten

$$c_{ijt}^{\Delta H} := \Delta H_{ijt} Q_{ijt} \geq 0 \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{\text{va}}, t \in \{1, \dots, T\}, \quad (5.78)$$

Im Gesamtmodell werden zur Modellierung eines Ventils je $2|\mathbb{E}_{\text{va}}| \cdot T$ Variablen und Restriktionen benötigt (siehe Tabelle 5.25).

Variable	Schranken	Bedeutung	Gesamtanzahl
Q_{ijt}	$(-\infty, \infty)$	Volumenstrom	$ \mathbb{E}_{va} \cdot T$
ΔH_{ijt}	$(-\infty, \infty)$	Druckverlust	$ \mathbb{E}_{va} \cdot T$
Restriktion	Typ	Bedeutung	Gesamtanzahl
(5.77)	=	Drucksteuerung	$ \mathbb{E}_{va} \cdot T$
(5.78)	\geq	Konsistenzbedingung	$ \mathbb{E}_{va} \cdot T$

Tabelle 5.25: Variablen und Restriktionen zur Beschreibung eines Ventils $ij \in \mathbb{E}_{va}$ im Zeitraum $t \in \{1, \dots, T\}$ in der NLP-Formulierung

Klärwerke \mathbb{E}_{sw}

Das Modell der Klärwerke in der NLP-Formulierung benötigt wie die MINLP-Formulierung aus Abschnitt 5.2.2 zwei Variablen zur Beschreibung des Volumenstroms auf einer Kante $\in \mathbb{E}_{sw}$ vom Typ Klärwerk in jedem Zeitintervall $t \in \{1, \dots, T\}$. Die nichtnegative Variable Q_{ijt} , beschreibt den gesamten Volumenstrom über die Kante und ist nach oben durch Q_{ij}^{\max} beschränkt:

$$Q_{ijt} \in [0, Q_{ij}^{\max}] \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{sw}, t \in \{1, \dots, T\}. \quad (5.79)$$

Q_{ijt}^+ beschreibt den Überschussanteil des Volumenstroms Q_{ijt} (vgl. Abschnitt 4.3). Sie ist nichtnegativ und nach oben durch den maximalen Überschussanteil beschränkt:

$$Q_{ijt}^+ \in [0, Q_{ij}^{\max} - Q_{ij}^{\text{nom}}] \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{sw}, t \in \{1, \dots, T\}. \quad (5.80)$$

Die Veränderung der Volumenströme Q und Q^+ in zwei aufeinander folgenden Zeitintervallen ist durch den Wert $\Delta Q_{ij}^{\max} \Delta_t$ beschränkt, so dass gilt

$$c_{ijt}^{\Delta Q,1} := Q_{ij,t-1} - Q_{ijt} + \Delta Q_{ij}^{\max} \Delta_t \geq 0 \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{sw}, t \in \{2, \dots, T\} \quad (5.81)$$

$$c_{ijt}^{\Delta Q,2} := Q_{ij,t-1}^+ - Q_{ijt}^+ + \Delta Q_{ij}^{\max} \Delta_t \geq 0 \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{sw}, t \in \{2, \dots, T\}. \quad (5.82)$$

Die Differenz der beiden Volumenströme Q_{ijt} und Q_{ijt}^+ darf in keinem Zeitintervall t den zulässigen Nominalfluss Q_{ij}^{nom} des Klärwerks ij überschreiten:

$$c_{ijt}^Q := Q_{ij}^{\text{nom}} - Q_{ijt} + Q_{ijt}^+ \geq 0 \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{sw}, t \in \{1, \dots, T\}. \quad (5.83)$$

Die zeitliche Beschränkung des Überschussvolumenstroms modellieren wir in diesem Modell mithilfe eines maximalen Überschussvolumens V_{ij}^{\max} (siehe Gleichung (4.82)). Dass dieses Maximalvolumen vom Überschussanteil des Volumenstromes nicht überschreitet, stellt folgende Restriktion sicher:

$$c_{ijt}^V := V_{ij}^{\max} - \sum_{t=1}^T Q_{ijt}^+ \Delta_t \geq 0 \quad \forall ij \in \mathbb{E}_{sw}. \quad (5.84)$$

Variable	Schranken	Bedeutung	Gesamtanzahl
Q_{ijt}	$[0, Q_{ij}^{\max}]$	Volumenstrom	$ \mathbb{E}_{\text{sw}} \cdot T$
Q_{ijt}^+	$[0, Q_{ij}^{\max} - Q_{ij}^{\text{nom}}]$	Überschussvolumenstrom	$ \mathbb{E}_{\text{sw}} \cdot T$
Restriktion	Typ	Bedeutung	Gesamtanzahl
(5.83)	\geq	Flusszusammensetzung	$ \mathbb{E}_{\text{sw}} \cdot T$
(5.84)	\geq	Überschussvolumen	$ \mathbb{E}_{\text{sw}} $
(5.81)	\geq	Flussänderung	$ \mathbb{E}_{\text{sw}} \cdot (T - 1)$
(5.82)	\geq	Flussänderung	$ \mathbb{E}_{\text{sw}} \cdot (T - 1)$

Tabelle 5.26: Variablen und Restriktionen zur Beschreibung eines Klärwerks $ij \in \mathbb{E}_{\text{sw}}$ im Zeitraum $t \in \{1, \dots, T\}$ in der NLP-Formulierung

Die kontinuierliche Formulierung des Modells der Klärwerke benötigt im Gesamtmodell $|\mathbb{E}_{\text{sw}}| \cdot (3T - 1)$ linearen Restriktionen und $2T |\mathbb{E}_{\text{sw}}|$ Flussvariablen und mit einfachen Schranken. Im Vergleich zum MINLP-Modell kommt dieses Formulierung also zusätzlich zu den binären Variablen auch ohne nichtlineare Restriktionen aus.

5.4 Anfangsbedingungen

Wir gehen davon aus, dass das Kanalsystem zu Beginn des betrachteten Zeitraum vollständig entleert ist, so dass für die Volumina der Kanäle und Reservoirs gilt

$$V_{i,0} = 0 \quad i \in \mathbb{V}_{\text{cws}} \cup \mathbb{V}_{\text{sws}} \cup \mathbb{V}_{\text{rv}}. \quad (5.85)$$

Da Volumen und Druckhöhen in den Mischsystemen über die Speicherkennlinien σ miteinander gekoppelt sind gilt

$$H_{i,0} = \sigma_i(0) = H_i^- \quad i \in \mathbb{V}_{\text{cws}}, \quad (5.86)$$

wobei H_i^- der kleinsten Sohlhöhe des Kanal entspricht. Trennsysteme und Reservoirs wurden ohne Druckhöhen modelliert. Es ist ohne Einschränkungen ebenso möglich zu Beginn von einem teilgefülltem Kanalsystem auszugehen:

$$\begin{aligned} V_{i,0} &= \bar{V}_i \quad i \in \mathbb{V}_{\text{cws}} \cup \mathbb{V}_{\text{sws}}. \\ H_{i,0} &= \sigma_i(\bar{V}_i) \quad i \in \mathbb{V}_{\text{cws}}. \end{aligned}$$

Die Druckhöhen in den Verzweigungen unterliegen keinen Anfangsbedingungen. Wir fordern lediglich, dass das System zum Zeitpunkt $t = 0$ konsistent ist.

Die Anfangswerte der Volumenströme und ggf. der Hilfsvariablen der passiven Kanten ergeben sich aus den Anfangbedingungen der Knoten. Die Volumenströme im Intervall $t = 0$ sind ebenfalls nicht explizit festgelegt, es gilt dennoch

$$Q_{ij,0} = 0 \quad ij \in \mathbb{E}_{\text{pu}} \cup \mathbb{E}_{\text{ps}}, \quad (5.87)$$

wenn die Anfangsvolumen in den Kanälen auf Null gesetzt werden. Für die Ventile im ADL-Netz sind ebenfalls keine Anfangsbedingungen vorgesehen.

5.5 Zielfunktion

Ziel der Optimierung ist es, die Menge ungeklärten Abwassers, das in die Umwelt bzw. öffentliche Gewässer abgegeben wird zu minimieren. Dies ist das Abwasser, das über den gesamten Optimierungszeitraum durch die Notauslässe, Regen- und Klärüberläufe fließt:

$$\sum_{ij \in \mathbb{E}_{\text{eo}} \cup \mathbb{E}_{\text{so}}} \sum_{t=1}^T Q_{ijt}. \quad (5.88)$$

Die Summe der Flüsse über diese Kanten entspricht dem Volumen im Reservoir j zum Zeitpunkt T , da in diesem Reservoir ausschließlich die ungeklärten Abwässer aufgefangen werden. Es gilt also

$$\sum_{ij \in \mathbb{E}_{\text{eo}} \cup \mathbb{E}_{\text{so}}} \sum_{t=1}^T Q_{ijt} = V_{j,T}. \quad (5.89)$$

Agrund der Formulierung des Drosselmodells, besteht die Zielfunktion zusätzlich noch aus den Straftermen

$$\sum_{ij \in \mathbb{E}_{\text{th}}} \sum_{t=1}^T -M(Q_{ijt})^2 \quad (5.90)$$

die dafür sorgen, dass in den Drosseln in jedem Zeitintervall t der größtmögliche Volumenstrom vorherrscht (siehe Abschnitte 5.2.2 und 5.3.2).

Zusammen ergibt sich die Zielfunktion:

$$\min V_{j,T} - \sum_{ij \in \mathbb{E}_{\text{th}}} \sum_{t=1}^T M(Q_{ijt})^2. \quad (5.91)$$

5.6 Vergleich der Modelle

Sowohl das nichtlineare gemischt-ganzzahlige Modell aus Kapitel 5.2, als auch das nichtlineare kontinuierliche Modell aus Abschnitt 5.3 bilden eine vollständige Formulierung eines Optimierungsproblems zur optimalen Steuerung eines Abwassersystems, mit dem Ziel den Eintrag ungeklärten Abwassers in die Umwelt zu minimieren. Beide Modelle zeichnen aus, dass die Realität umso genauer abgebildet wird, je feiner die Zeitdiskretisierung durchgeführt wird.

Eine Vielzahl der Komponenten wird in beiden Modellen identisch formuliert. Hierbei handelt es sich um die gesamte Knotenmenge, bestehend aus Misch- und Trennwasserkanälen, sowie Reservoirs im Kanalsystem und den Verzweigungen

des ADL-Netzes. Von der Kantenmenge werden lediglich Pumpwerke, Notauslässe, Drosseln, sowie Rohrleitungen und Ventile identisch modelliert. Insbesondere bei den Rohrleitungen wurde auf die exakte Modellierung der Rohrreibungszahl durch die Gesetze von Prandtl-Colebrook für den turbulenten Fluss und Hagen-Poiseuille im laminaren Fall verzichtet. Da zum Einen die Bestimmung der Koeffizienten nur implizit möglich und daher mit hohem Aufwand verbunden ist, und zum Anderen mit der Formel von Steinbach [BGS09b] eine fast exakte Approximation vorliegt.

Das Modell der Regen- und Klärüberläufe hingegen wurde auf zwei verschiedene Weisen formuliert. Die gemischt-ganzzahlige Formulierung benötigt drei binäre Variablen pro Zeitintervall und Öffnung. Da ein Überlauf pro Kanal abhängig von Komplexität der Kanalstruktur aus bis zu 50 Öffnungen bestehen kann und wir in der Regel ein Zeitintervall von fünf Minuten Länge wählen um die Realität hinreichend genau abbilden zu können, werden für die Modellierung der Regenüberläufe eines Gesamtnetzwerks mehrere tausend binäre Variablen benötigt. Hinzu kommt, dass verschiedene zusätzliche Restriktionen zur Bestimmung des Fließzustandes in einem Zeitintervall benötigt werden und die Flussgleichungen dieser Fließzustände in der Regel nichtkonvexe und nichtlineare Gleichungen sind (siehe Abschnitte 4.1.3.8 und 5.2.2). Das kontinuierliche Modell hingegen benötigt pro Überlauf und Zeitintervall lediglich eine Variable für den Volumenstrom und eine Flussgleichung, so dass das Modell weniger komplex ist. Diese Flussgleichung ist zwar weiterhin hoch nichtlinear, aber zweifach stetig differenzierbar auf dem zulässigen Bereich. (vgl. Abschnitte 4.1.3.8 und 5.3.2).

Ähnlich verhält es sich mit den Modellen der internen Überläufe und der Heber. Die kontinuierliche Formulierung benötigt analog zu den Regenüberläufen eine Variable für den Volumenstrom und eine Flussgleichung pro Zeitintervall. Die gemischt-ganzzahlige Formulierung benötigt bis zu 20 binäre Variablen und mehrere zusätzliche Restriktionen. Die Flussgleichungen sind wie im kontinuierlichen Modell ebenfalls hochnichtlinear mit zum Teil großen Gradienten (vgl. Abschnitt 4.1.3.9). Die Anzahl der internen Überläufe und Heber in einem realen Abwassersystem ist zwar wesentlich geringer als die der Regenüberläufe, dennoch kommt es bei hinreichend feiner Zeitdiskretisierung vor, dass eine vierstellige Anzahl binärer Variablen benötigt wird.

Sowohl die kontinuierliche Approximation der Regenüberläufe, als auch die der Heber und internen Überläufe, kann aufgrund der gewählten Approximation durch Spline nahezu beliebig genau durchgeführt werden. Die kontinuierliche Formulierung ist damit ähnlich exakt wie die gemischt-ganzzahlige Formulierung.

Weniger genau ist das kontinuierliche Modell der Pumpen (vgl. Abschnitt 5.3.2), da hier durch die Relaxation die Pumpe als beliebig steuerbares Element angenommen wird. Tatsächlich kann in jedem Zeitintervall nur zwischen zwei Zuständen gewählt werden, dies ist im gemischt-ganzzahligen Modell auch so formuliert worden.

Aufgrund der Vielzahl der binären Variablen die in der gemischt-ganzzahligen For-

mulierung für die Modellierung realer und realistischer Abwassernetzwerke benötigt wird und der Komplexität der kombinatorischen Entscheidungen, sowie der Größe des Gesamtmodells, ist es mit den heutigen MINLP-Verfahren und verfügbaren Algorithmen unmöglich das Problem in dieser Formulierung zu lösen.

Mit Verfahren zur Lösung nichtlinearer Probleme ist es möglich Probleme mit einer großen Anzahl Variablen und Restriktionen zu lösen. Da die Approximation der Fließvorgänge in der kontinuierlichen Formulierung nahezu beliebig exakt durchgeführt werden kann, sind die Ergebnisse der Optimierung hinreichend genau. Lediglich die Steuerung der Pumpen, entspricht in der Regel nicht der Realität. Dennoch können die Ergebnisse genutzt werden, um zusätzliche Potential der Abwassersysteme auszuloten, oder durch Nachbearbeitung geeignete Ergebnisse liefern.

Kapitel 6

Numerische Ergebnisse

In diesem Kapitel testen wir die Modellierung aus den vorherigen Abschnitten an verschiedenen Instanzen von Abwassernetzwerken. Die Instanzen unterscheiden sich insbesondere in der Komplexität der Abwassernetzwerke. In den Abschnitten 6.1 und 6.2 betrachten wir zunächst einzelne Kanalnetze die direkt mit einem Klärwerk gekoppelt sind. Anschließend untersuchen wir in Abschnitt 6.3 ein komplexeres Netzwerk, bestehend aus drei einfachen Kanalnetzen, die über ein ADL-Netz mit einem Klärwerk gekoppelt sind. Im Abschnitt 6.4 betrachten wir ein reales Druckleitungsnetz einer Großstadt und im Abschnitt 6.5 eine Vielzahl Kanalnetze, deren Abwasser auf drei Klärwerke verteilt wird, wobei hier das Druckleitungsnetz zu einem Knoten vereinfacht wurde. Im letzten Beispiel verifizieren wir unser Modell an einem realen Netzwerk, welches aus einer Vielzahl verschiedener Kanalnetze und einem komplexen ADL-Netz besteht.

Das Modell wurde vollständig in der Programmiersprache C++ implementiert. Zur Implementierung des zugrundeliegenden Netzwerkgraphen wurde die *Boost Graph Library* [SLL01], [Boo] verwendet. Gelöst wurden die entstehenden Probleme mit der Innere-Punkte-Methode `Ipopt` [WB06]. Das Interface zu `Ipopt` zur Bereitstellung der Problemdata, sowie zur Auswertung von Funktionswerten und Ableitungen, ist ebenfalls in C++ implementiert worden. Weitere Löser wurden nicht verwendet. Insbesondere wurde auf das Lösen der gemischt-ganzzahligen nichtlinearen Formulierungen verzichtet. Verwendet man Netzwerke und Zeithorizonte in realistischen Größenordnungen, so übersteigt die Größenordnung der entstehenden Probleme die der heute lösbaren Probleme um ein Vielfaches.

Auf die Verwendung von algebraische Modellierungssprachen wie GAMS [GAM] und AMPL [AMP] haben wir verzichtet, da diese nicht die nötige Flexibilität bieten. Insbesondere die Formulierung stückweise definierter, aber zweimal stetig differenzierbarer Funktionen wie z. B. (bivariater) Splines ist in den Modellierungssprachen sehr aufwendig und führt zum Teil auf Probleme beim Bestimmen der Ableitungen.

Der betrachtete Zeithorizont beträgt in den folgenden Beispielen jeweils neun Stun-

den. Dieser in 108 Intervalle mit je 5 Minuten Länge unterteilt. Bei der Wahl der Zeitdiskretisierung ist grundsätzlich auf Folgendes zu achten: Wählt man kurze Teilintervalle, so vergrößert sich deren Anzahl entsprechend um den gesamten Zeithorizont zu überdecken. Dies wirkt sich direkt auf die Größe der Optimierungsprobleme aus, da Variablen und Restriktion in der Regel pro Teilintervall oder pro Zeitpunkt aufgestellt werden. Wählt man auf der anderen Seite die Teilintervalle sehr lang, weichen die errechneten Lösungen zum Teil stark von der Realität ab. Hinzu kommt, dass die Modelle unter Umständen keine zulässigen Lösungen besitzen, wenn die Teilintervalle zu lang gewählt werden. Zum Beispiel ist der Fluss über einen Regenüberlauf im Intervall t durch die angrenzenden Druckhöhen im Zeitpunkt $t - 1$ eindeutig bestimmt, hängt aber von der Länge Δ_t des Teilintervalls ab (siehe Gleichung (5.57)). Wählt man Δ_t nun zu lang, kann es passieren, dass aufgrund der Flussbilanzgleichung (5.6) im angrenzenden Kanal das Volumen zum Zeitpunkt t negativ ist, und damit ein unzulässiger Punkt angenommen werden muss.

6.1 Abwassernetzwerk I

Wir betrachten zunächst ein einfaches Abwassersystem. Das Kanalnetz besteht aus einem Mischwasserkanal und zwei Entlastungsbauwerken, einem Stauraumkanal und einem Regenüberlaufbecken. Diese sind über einen Heberüberlauf bzw. einem internen Überlauf mit dem Mischwasserkanal verbunden und durch je einem Notauslass mit einem Reservoir, das heißt mit einem öffentlichen Gewässer. Der Mischwasserkanal wird über einen Regenüberlauf entlastet und durch einen Regen- sowie einen Trockenzuflussprofil gespeist. Der Regenüberlauf besteht aus 22 Öffnungen, der interne Überlauf und der Heber aus jeweils zwei Öffnungen. Ein Pumpwerk verbindet den Mischwasserkanal mit dem ADL-Netz, welches aus einer Verzweigung besteht. Diese ist über ein Klärwerk mit der Umwelt gekoppelt. In Abbildung 6.1 ist das Netzwerk schematisch dargestellt.

Wir betrachten einen Zeitraum von 9 Stunden, der in 108 Intervalle von je 5 Minuten unterteilt wurde. Daraus ergibt sich ein Optimierungsproblem mit insgesamt 2161 Variablen, von denen 2053 nach unten beschränkt sind und davon besitzen 1405 Variablen eine obere Schranke. Hinzu kommen 1191 Gleichungsrestriktionen, sowie 216 Ungleichungsrestriktionen. Hervorzuheben sind die je 108 Flussgleichungen des Heber und internen Überlaufs, sowie die Flussgleichungen des Regenüberlaufs.

Dieses Problem wurde von der Inneren-Punkte-Methode `lpopt` [WB06] nach 257 Iterationen in 3.136 s optimal gelöst. Zur Erzeugung der Startwerte wurde eine Heuristik verwendet, die zu festgelegten Entscheidungsvariablen in der Zeit fortschreitend eine möglichst zulässige Lösung erzeugt, wobei die Flusserhaltung in den Knoten nicht berücksichtigt wird.

In Abbildung 6.2 ist der Verlauf des Zielfunktionswerts und der primalen Unzuläs-

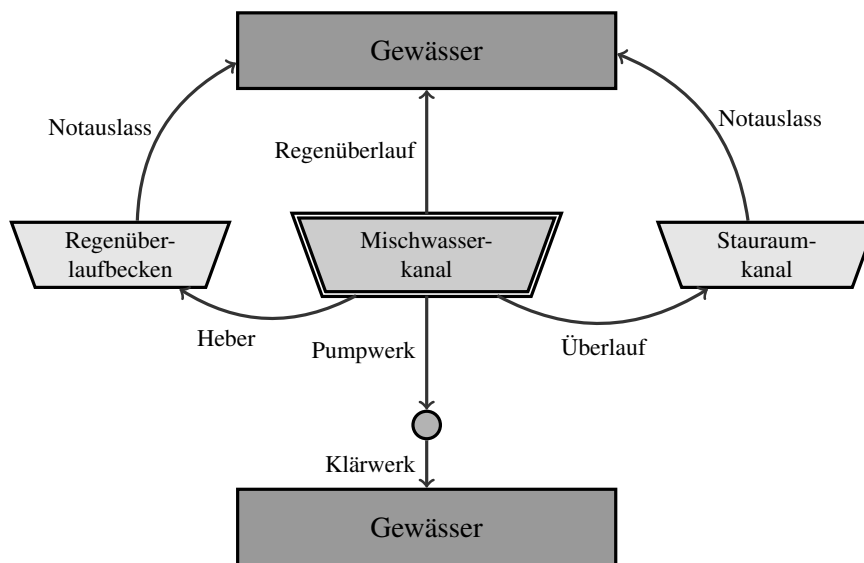


Abbildung 6.1: Topologie des Abwassernetzwerks I

sigkeit, also die maximale Verletzung einer Restriktion dargestellt. Wir erkennen, dass wir aufgrund der gewählten Startnäherung zunächst stark unzulässig sind. Die primale Unzulässigkeit sinkt kontinuierlich, strebt aber erst in den letzten Iterationen gegen Null. Der Zielfunktionswert hingegen fällt zunächst und steigt in den folgenden Iterationen an. Diese schlechteren Zielfunktionswerte werden vom Filter akzeptiert, da sie mit einer starken Verbesserung der primalen Zulässigkeit einhergehen. Ab etwa Iteration 25 fallen die Zielfunktionswerte monoton. Hier fällt auf, dass die Zielfunktionswerte treppenartig abfallen. Über viele Iterationen ist kein Fortschritt zu erkennen. Dieser wird dann signifikant in einigen wenigen Iterationen realisiert.

Abbildung 6.3 zeigt die Volumina der beiden Reservoirs zu jedem Zeitpunkt in der optimalen Lösung. Wir sehen, dass das Volumen des Reservoirs, welches die geklärten Abwässer aufnimmt stetig ansteigt, also das Klärwerk über den gesamten betrachteten Zeitraum aktiv ist. Ab etwa Zeitpunkt 25 wird kein ungeklärtes Abwasser mehr in die Umwelt abgegeben, das Volumen bleibt konstant. In den Zeitintervallen vorher steigt der Zufluss in den Mischwasserkanal stärker an, als der maximale mögliche Anstieg des Volumenstroms im Klärwerk. Daher steigt zunächst das der Wasserspiegel im Mischwasserkanal, anschließend wird dieser über den Heber und den internen Überlauf in das Regenüberlaufbecken und den Stauraumkanal entlastet. Ab etwa Zeitpunkt 10 wird auch in die Umwelt entlastet, so dass Volumen des entsprechenden Reservoirs stark ansteigt.

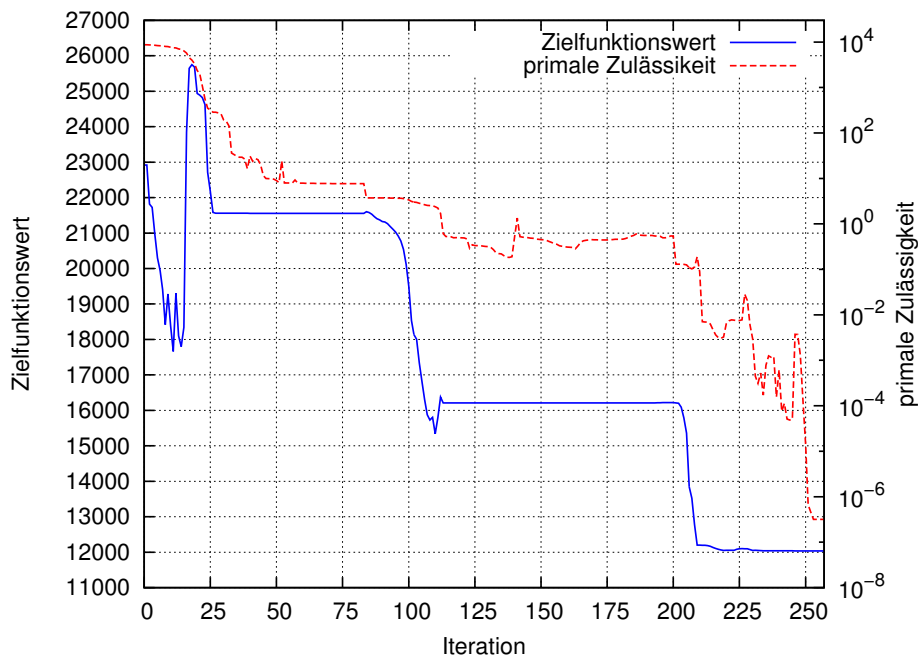


Abbildung 6.2: Konvergenzverhalten des Zielfunktionswertes und primale Zulässigkeit (Abwassernetzwerk I)

6.2 Abwassernetzwerk II

In diesem Abschnitt betrachten wir ein Abwassernetzwerk mit einer komplexen Kanalstruktur. Das ADL-Netz besteht wie im vorherigen Beispiel aus nur einer Verzweigung über die das Abwasser zu einem Klärwerk gelangt und von dort aus in ein öffentliches Gewässer abgegeben wird. Das Kanalsystem besteht aus vier Mischwasserkanälen. Die Kanäle A und B sind über jeweils ein Pumpwerk mit dem ADL-Netzwerk verbunden. Beide Kanäle können über Notauslässe in die Umwelt entlastet werden. Der Kanal A kann zusätzlich über Pumpen in drei Regenüberlaufbecken entlastet werden. Diese sind wiederum über Notauslässe mit einem öffentlichen Gewässer verbunden. Die Kanäle C und D sind über feste Drosseln, bzw. interne Überläufe mit den Kanälen A und B gekoppelt. Sie besitzen keine Möglichkeit in die Umwelt entlastet zu werden, so dass in jedem Fall das Abwasser über die Drosseln und internen Überläufe abgeführt werden muss. Dieses Netzwerk ist in Abbildung 6.4 dargestellt.

Der betrachtete Zeitraum beträgt 9 Stunden, der in 108 Intervalle von je 5 Minuten unterteilt wurde. Wir erhalten daher ein Optimierungsproblem mit insgesamt 4213 Variablen, von denen etwa 75% nach oben und nach unten beschränkt sind. Weitere eintausend Variablen sind nach unten beschränkt.

Das Problem ist weiterhin beschränkt durch 2059 Gleichungsrestriktionen, sowie

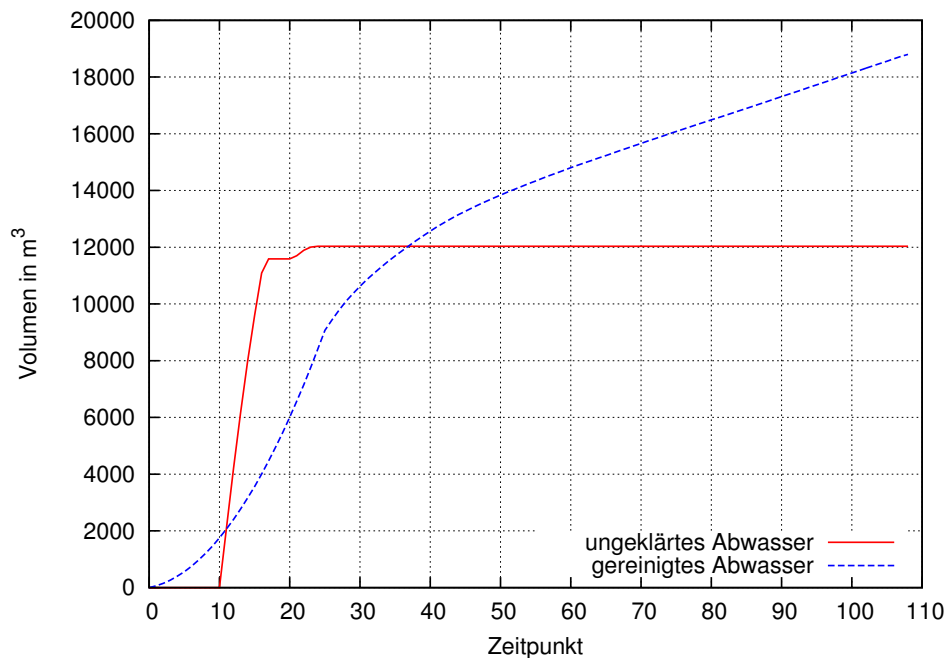


Abbildung 6.3: Menge des gereinigten und ungeklärten Abwassers, dass in die öffentlichen Gewässer abgegeben wird (Abwassernetzwerk I)

864 Ungleichungsrestriktionen. Insbesondere die Restriktionen der vier Speicherkennlinien und die der internen Überläufe sind nichtlinear und nichtkonvex.

Dieses Problem wurde nach 236 Iterationen in 6,137 s optimal gelöst. Zur Erzeugung der Startwerte wurde dieselbe Heuristik wie zur Lösung des Abwassernetzwerks I verwendet (vgl. Abschnitt 6.1): In der Zeit fortschreitend wurde eine möglichst zulässige Lösung erzeugt, wobei die Flusserhaltung in den Knoten nicht berücksichtigt wird und Entscheidungsvariablen, wie der Pumpenfluss willkürlich festgesetzt wurden.

In Abbildung 6.5 ist der Verlauf des Zielfunktionswerts und der primalen Unzulässigkeit, also die maximale Verletzung einer Restriktion dargestellt. Aufgrund der gewählten Startnäherung ist das Problem zunächst stark unzulässig, während der Zielfunktionswert Null ist. Im Verlauf der ersten 50 Iterationen erkennen wir das während die Unzulässigkeiten bis zur tolerierten Ungenauigkeit sinkt, der Zielfunktionswert steigt. Im weiteren Verlauf schwankt die primale Unzulässigkeit im Bereich der vorgegebenen Toleranz. Der Zielfunktionswert sinkt sehr langsam monoton gegen den optimalen Wert. Nach 236 Iterationen ist das Problem optimal gelöst.

Beim Vergleich mit den Verlauf aus Abbildung 6.2 des Netzwerks I, stellen wir fest, dass auch dort der Zielfunktionswert in den meisten Iterationen nur sehr langsam sinkt, dass Problem also nur langsam konvergiert.

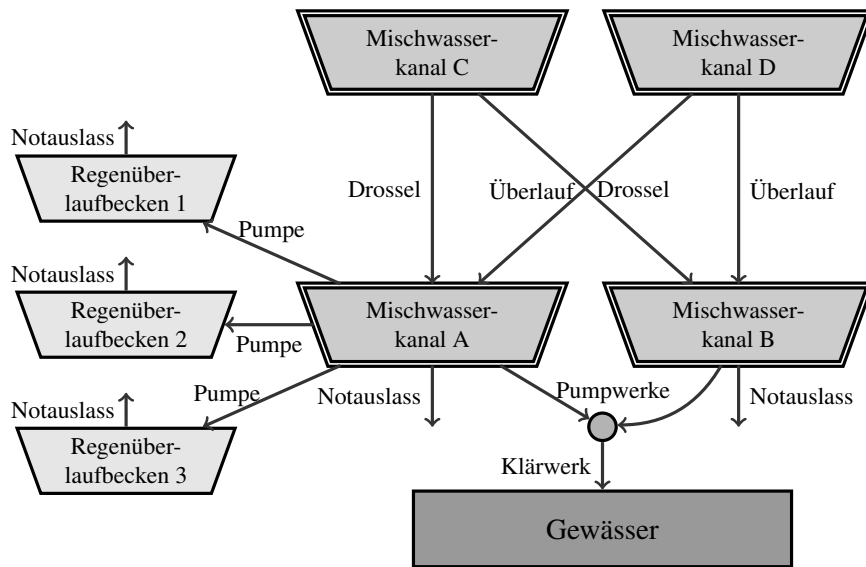


Abbildung 6.4: Topologie des Abwassernetzwerks II

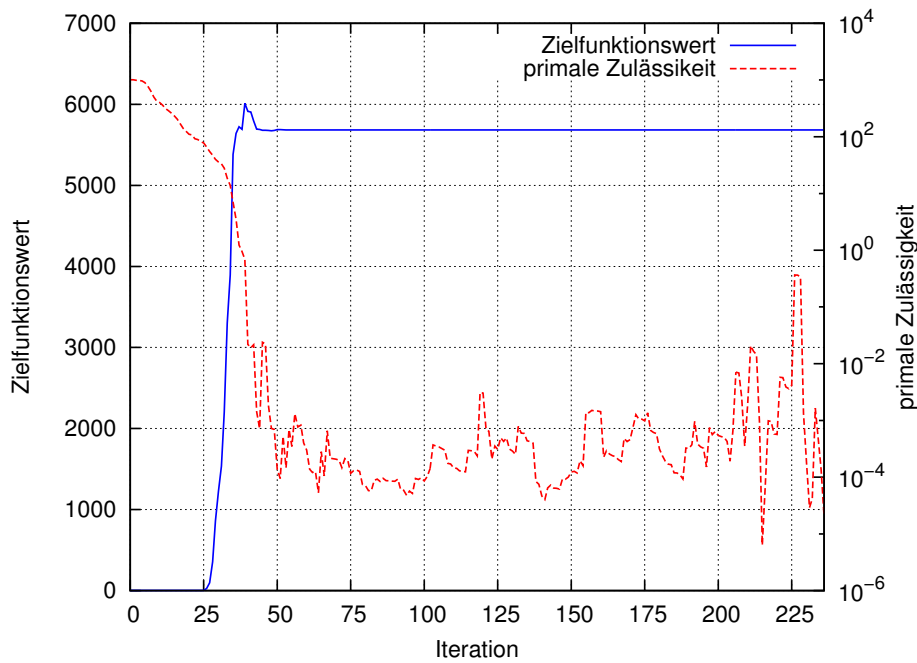


Abbildung 6.5: Konvergenzverhalten des Zielfunktionswertes und primale Zulässigkeit (Abwassernetzwerk II)

In Abbildung 6.6 sind sie Volumenströme der Zuflüsse in die Kanäle und der Fluss durch das Klärwerk dargestellt. Wir erkennen, dass der Zufluss in das Netzwerk

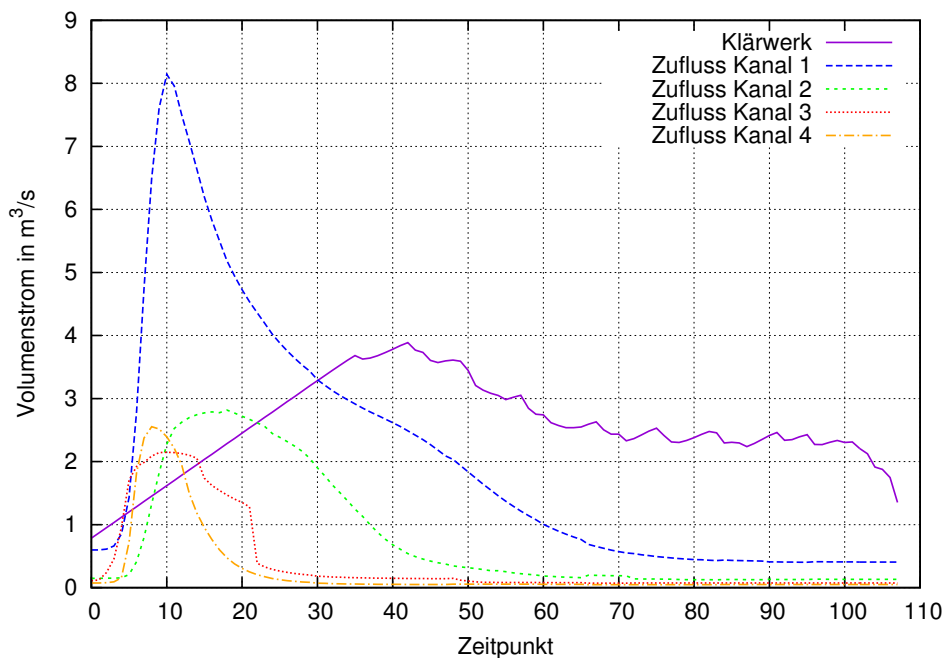


Abbildung 6.6: Profil der Zuflüsse in die Mischwasserkanäle und Volumenstrom durch das Klärwerk im Abwassernetzwerk II

in der ersten 40 Zeitabschnitten am stärksten ist. Hier steigt auch der Fluss durch das Klärwerk an. Dieser Anstieg ist aber aufgrund der Beschränkung des Anstiegs kleiner als der Zufluss zum System. Dass diese Restriktion aktiv ist erkennen wir am linearen Anstieg des Volumenstroms. In diesen Zeitabschnitten füllen sich die Kanäle und Entlastungsbauwerke und entlasten zum Teil in die Umwelt. In den späteren Zeitabschnitten, kann das Klärwerk den gesamten Zufluss aufnehmen und es gelangt kein ungeklärtes Abwasser mehr in die Umwelt.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass hier die Auslegung des Klärwerks verhindert, dass sämtliches anfallendes Abwasser gereinigt an die Umwelt abgegeben wird.

6.3 Abwassernetzwerk III

In diesem Abschnitt betrachten wir ein Abwassernetzwerk, dass aus drei Kanalnetzen besteht die über ein ADL-Netzwerk mit einem Klärwerk verbunden sind.

Bei den Kanalnetzen handelt sich um ein Trennsystem und zwei Mischwassersysteme. Das Trennsystem besteht aus dem Kanal selbst und einem Notauslass. Es ist über ein Pumpwerk mit dem ADL-Netz gekoppelt. Die Mischwassersysteme bestehen jeweils aus einem Kanal. Sie sind jeweils über zwei Pumpwerke mit dem ADL-Netz verbunden. Die Entlastung in die Umwelt erfolgt bei einem Kanal über

einen Notauslass, bei dem anderen über einen Regenüberlauf.

Das ADL-Netz besteht aus 85 Verzweigungen, 44 Rohren und 51 Ventilen. Die Rohre sind bis zu 1500 m lang und besitzen einen Durchmesser zwischen 400 mm und 1500 mm. Die Druckgrenzen in den Verzweigungen betragen 20 m bzw. 125 m.

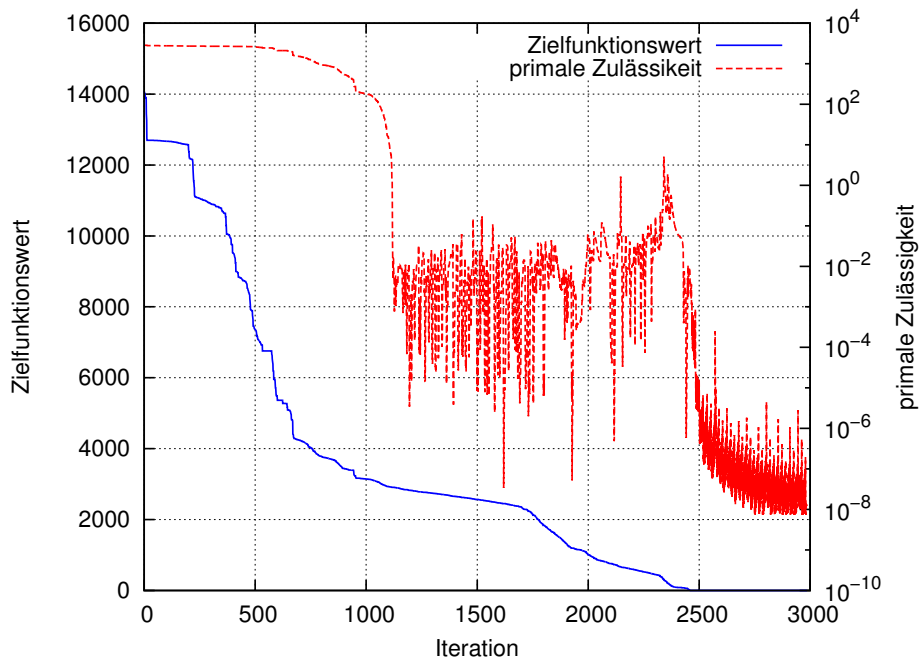


Abbildung 6.7: Konvergenzverhalten des Zielfunktionswertes und primale Zulässigkeit (Abwassernetzwerk III)

Der betrachtete Zeitraum beträgt erneut 9 Stunden, der in 108 Intervalle von je 5 Minuten unterteilt wurde. Wir erhalten daher ein Optimierungsproblem mit insgesamt 27085 Variablen, von denen etwa 10000 nach oben und nach unten beschränkt sind. Weitere eintausend Variablen sind ausschließlich nach unten beschränkt. Zusätzlich ist das Problem durch 20306 Gleichungsrestriktionen, sowie 5724 Ungleichungsrestriktionen beschränkt.

Die Nichtlinearitäten treten insbesondere in den Druckverlustgleichungen (5.73) der Rohre, sowie in den Speicherkennlinien (5.5) und den Flussgleichungen (5.57) der Regenüberläufe auf.

Zur Bestimmung einer Startnäherung wurde zunächst ein maximaler Fluss durch das ADL-Netzwerk bestimmt, der in den Einspeiseknoten der Pumpwerke durch den maximalen Regen- und Trockenzufluss der Kanäle begrenzt wurde. Anschließend wurde mithilfe einer Heuristik und dem Zufluss die Startnäherung der einzelnen Kanäle bestimmt. Die Bestimmung des maximalen Flusses erfordert das Lösen eines nichtlinearen Optimierungsproblems in der Größenordnung des Originalproblems (es entfallen lediglich die Variablen und Restriktionen der Kanalnetze). Die-

se Startnäherung konnte mit Ipopt und einer simplen Heuristik zur Bestimmung einer Startnäherung nach 2734 Iterationen und etwa 7.5 min bestimmt werden.

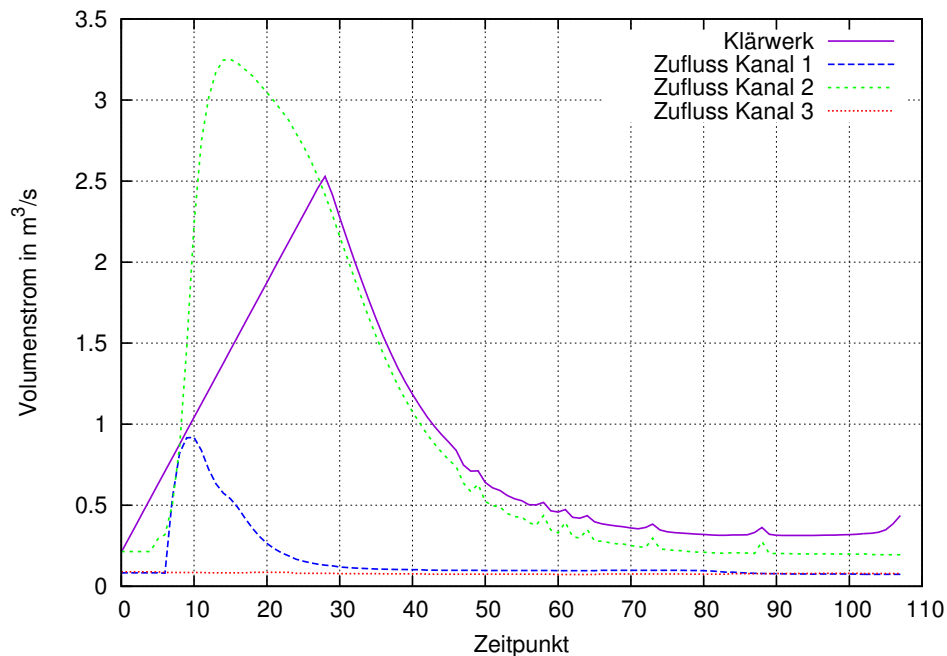


Abbildung 6.8: Profil der Zuflüsse in die Mischwasserkanäle und Volumenstrom durch das Klärwerk im Abwassernetzwerk III

Das eigentlich Problem wurde anschließend nach etwa 7.25 min und 2986 Iterationen optimal gelöst. In Abbildung 6.7 ist der Verlauf des Zielfunktionswerts, sowie der primalen Unzulässigkeit, also die maximale Verletzung einer Restriktion, nach jeder Iteration dargestellt. Aufgrund der gewählten Startnäherung ist das Problem zunächst stark unzulässig und der Zielfunktionswert recht groß. Wir erkennen, dass zunächst etwa 1100 Iterationen benötigt werden, damit die Unzulässigkeiten bis zur tolerierten Ungenauigkeit sinkt. Der Zielfunktionswert sinkt ebenfalls stark. Im weiteren Verlauf schwankt die primale Unzulässigkeit oberhalb der vorgegebenen Toleranz von 10^{-4} . Erst gegen Ende des Optimierungsprozesses werden alle Restriktionen hinreichend genau erfüllt. Der Zielfunktionswert sinkt langsam, aber monoton gegen den optimalen Wert.

In Abbildung 6.8 sind sie Volumenströme der Zuflüsse in die Kanäle und der Fluss über die Klärwerkskante dargestellt. Wir erkennen, dass der Zufluss in das Netzwerks in der ersten 40 Zeitabschnitten besonders stark ist. Hier steigt auch der Fluss über die Klärwerkskante an. Dieser Anstieg ist aber aufgrund der Beschränkung des Anstiegs kleiner als der Zufluss zum System. Dass diese Restriktion aktiv ist erkennen wir am linearen Anstieg des Volumenstroms. In diesen Zeitabschnitten füllen sich die Kanäle. In den späteren Zeitabschnitten, kann das Klärwerk den gesamten Zufluss aufnehmen. Im Vergleich zum Beispiel aus Abschnitt 6.2 wird

kein ungeklärtes Abwasser in die Umwelt entlastet, da die Speicherkapazität der Kanäle ausreicht.

6.4 Abwassernetzwerk IV

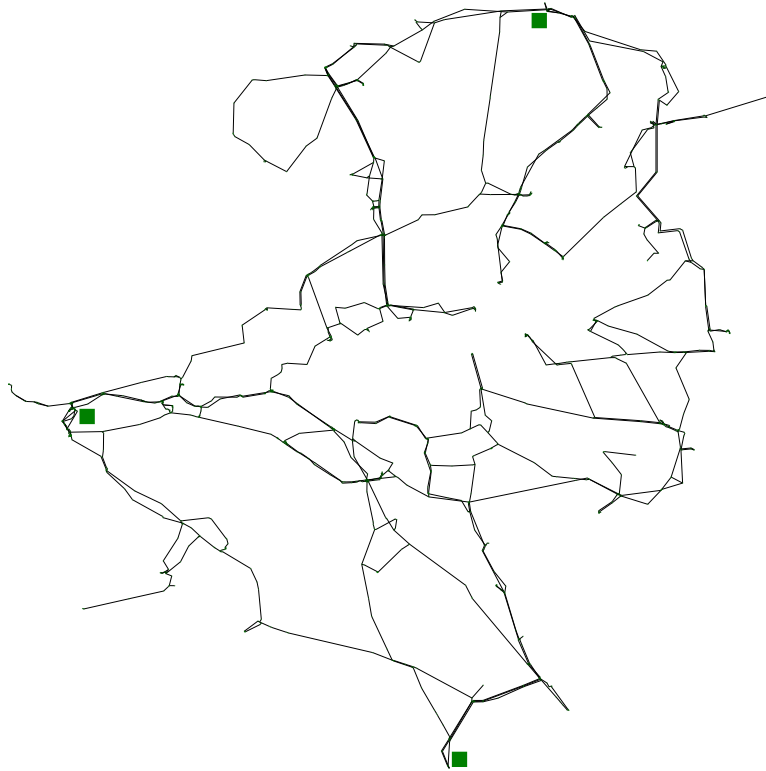


Abbildung 6.9: Topologie des Abwassernetzwerks IV

Dieses Netzwerk besteht ausschließlich aus einem Druckleitungsnetz und Klärwerken. Das Abwasser wird direkt über 84 Pumpwerke an ausgezeichneten Knoten in das ADL-Netz eingespeist. Auf der Kanalseite sind die Pumpwerke direkt mit einem Reservoir verbunden. Das Reservoir wird durch die Regen- und Trockenzuflüsse der zu den Pumpwerken gehörenden Kanalnetze gespeist.

Die Knotenmenge des Netzes besteht aus einem Reservoir und 1442 Verzweigungen. Die Kantenmenge besteht aus drei Klärwerken, sowie 910 Rohrleitungen und 775 Ventilen. Die Rohre sind bis zu 3.2 km lang und besitzen einen Durchmesser von 1.4 m. Die Druckgrenzen in den Verzweigungen betragen 20 m bzw. 125 m.

Ziel bei der Lösung dieses Problems ist es die maximale Menge Abwasser in das Netz einzuspeisen, bzw. äquivalent dazu, die maximal möglich Menge Abwasser in den Klärwerken zu reinigen oder den Füllstand der Reservoirs zu minimieren. Wir verwenden hier die kombinierte Zielfunktion (wobei das Reservoir k , das Reservoir

ist, welches das von den Klärwerken gereinigte Abwasser aufnimmt)

$$\min \left(V_{k,T} - \sum_{i \in \mathbb{V}_{rv}, i \neq k} V_{i,T} \right).$$

Offensichtlich ist der Zielfunktionswert in einer zulässigen Lösung aufgrund der Flussbilanzgleichungen (5.12) in den Verzweigungen gleich null.

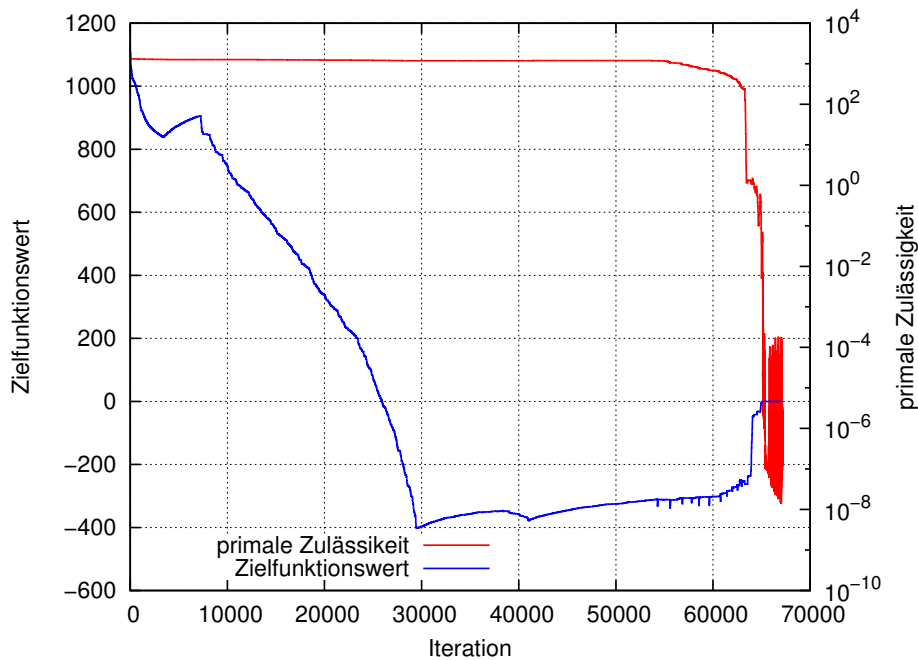


Abbildung 6.10: Konvergenzverhalten des Zielfunktionswertes und primale Zulässigkeit (Abwassernetzwerk IV).

Wir betrachten einen Zeitraum von 9 Stunden, der in 108 Intervalle von je 5 Minuten unterteilt wurde. Das zugehörige Optimierungsproblem besteht dann aus 439706 reellen Variablen von denen etwa 158000 durch einfache Schranken nach oben und nach unten beschränkt sind. Weitere 16000 Variablen sind ausschließlich durch untere Schranken begrenzt. Die Restriktionen des Problems bestehen aus 344971 Gleichungs- und 84348 Ungleichungsrestriktionen. Bei rund einem Drittel der Gleichungsrestriktionen handelt es sich um die nichtlinearen und nichtkonvexen Druckverlustsgleichungen (5.73) in den Rohren. Die Ungleichungsrestriktionen sind fast ausschließlich nichtlineare Konsistenzbedingungen der Ventile aus Gleichung (5.78).

Das Problem wurde in drei Stufen gelöst. Zunächst wurde eine Startnäherung erzeugt, bei der das Problem für einen Zeitschritt von 5 Minuten gelöst wurde. Diese Lösung wurde anschließend benutzt, um eine Startnäherung zu erzeugen, bei der der Zufluss auf die Menge des Trockenzuflusses festgesetzt wurde. Diese Startnäherung

ist für das tatsächlich zu lösende Problem zulässig.

Die ersten beiden Stufen wurden von Ipopt in jeweils ca. 1000 Iterationen und etwa 30 s bzw. einer Stunde optimal gelöst. Um anschließend das Ausgangsproblem optimal zu lösen, wurden dann 67000 Iterationen und etwa 50 Stunden benötigt. In Abbildung 6.10 ist der Verlauf des Zielfunktionswerts, sowie der primalen Unzulässigkeit nach jeder Iteration dargestellt.

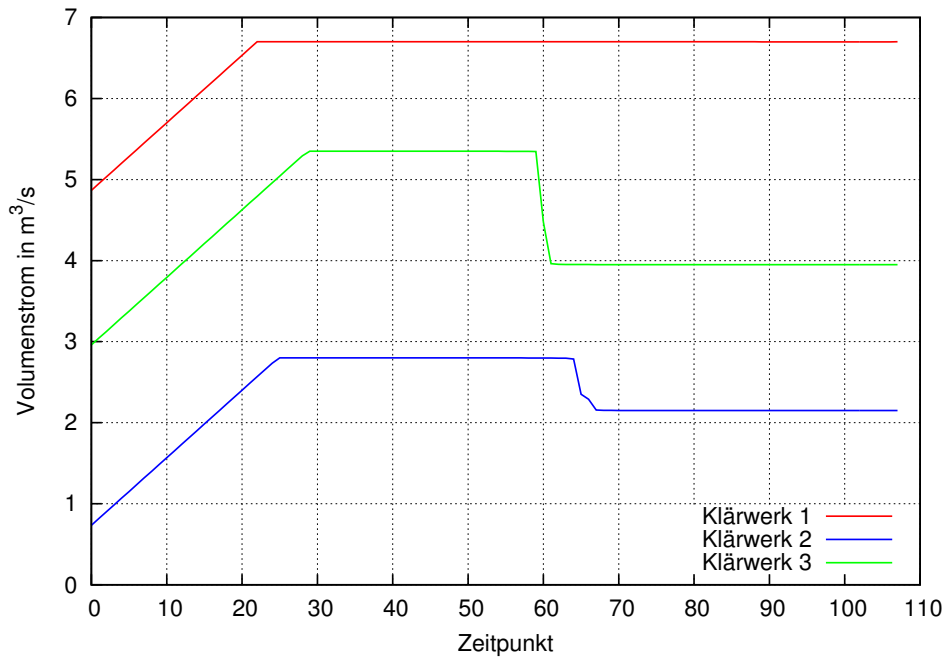


Abbildung 6.11: Volumenstrom durch die Klärwerke im Abwassernetzwerk IV

Ipopt startet zunächst mit einem recht unzulässigen Wert, der dadurch zustande kommt, dass Ipopt die Variablen zunächst in das Innere der zulässigen Menge verschiebt (vgl. [WB06]). Während die maximale Verletzung einer Restriktion 60000 Iterationen nahezu unverändert bleibt, sinkt der Zielfunktionswert etwa 30000 Iterationen stetig. In den nächsten 30000 Iterationen steigt der Zielfunktionswert erneut leicht an. In den verbleibenden Iterationen sinkt relativ schnell die primale Unzulässigkeit unterhalb die vorgegebene Toleranz von 10^{-4} und Zielfunktion steigt gegen den optimalen Wert.

Tatsächlich handelt es sich um eine nahezu global optimale Lösung wie Abbildung 6.11 zeigt. An den Volumenströmen aller drei Klärwerke erkennen wir, dass diese zunächst der maximal möglich ansteigen, also begrenzt durch die Restriktionen (5.81) und (5.82), bis der maximal möglich Fluss erreicht wird. Anschließend verbleibt der Volumenstrom solange auf diesem Niveau bis das maximale Überschussvolumen (5.84) erreicht wurde und fällt dann auf den nominalen Volumenstrom. Im Klärwerk 1 entspricht der maximale Volumenstrom dem nominalen, so

dass hier der Volumenstrom nicht absinkt. In den beiden anderen Klärwerken fällt der Volumenstrom abrupt ab, so dass die Klärwerke nahezu vollständig ausgelastet sind.

6.5 Abwassernetzwerk V

Das Druckleitungsnetz dieses Abwassernetzwerks besteht aus nur einer Verzweigung, die mit drei Klärwerken verbunden ist. Desweiteren sind 34 Kanalnetze über 84 Pumpwerke mit dieser Verzweigung verbunden, die aus insgesamt 73 Misch- und Trennwasserkanälen bestehen. Weitere Bauwerke zwischen den Kanälen sind 15 Entlastungspumpen, 12 Regenüberläufe, 56 Notauslässe, 9 interne Überläufe und Heber, sowie 6 feste und variable Drosseln.

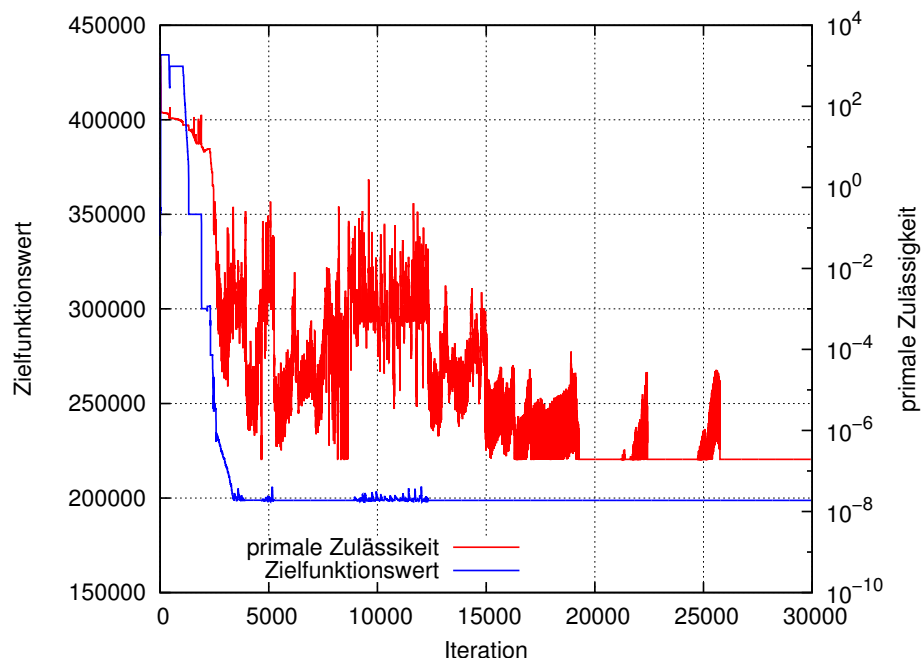


Abbildung 6.12: Konvergenzverhalten des Zielfunktionswertes und primale Zulässigkeit (Abwassernetzwerk V)

Wie schon in den vorherigen Problemen betrachten wir einen Zeithorizont von 9 h, der in 108 Intervalle von je 300 s unterteilt ist. Das führt auf ein nichtlineares Optimierungsproblem mit 38125 Variablen. Etwa die Hälfte der Variablen sind nach oben und nach unten beschränkt ein weiteres Drittel ist nach unten beschränkt. Das Problem besitzt 15381 Gleichungs- und 2592 Ungleichungsbeschränkungen. Das Problem wurde in zwei Stufen gelöst. Zunächst wurde für jedes Kanalnetz analog zu den Abwassernetzwerken I und II gelöst (vgl. Abschnitte 6.1 und 6.2), wobei jeweils der Fluss durch die Pumpwerke begrenzt wurde. Diese Lösungen wurde

anschließend als Startnäherung für das Ausgangsproblem genutzt. Diese Startnäherung ist für das tatsächlich zu lösende Problem, insbesondere in den Flussbilanzen der Verzweigung und der Reservoirs, nicht zulässig.

Die Startnäherungen der einzelnen Kanalnetze wurden in der Regel in wenigen hundert Iterationen und wenigen Sekunden erzeugt. Das Ausgangsproblem wurde optimal gelöst. Es wurden etwa 30000 Iterationen und etwa 16 Stunden benötigt. In Abbildung 6.12 ist der Verlauf des Zielfunktionswerts, sowie der primalen Unzulässigkeit nach jeder Iteration dargestellt.

Wir erkennen, dass in den ersten 4000 Iterationen der Zielfunktionswert treppenförmig auf etwa den optimalen Wert fällt und anschließend während des gesamten Optimierungsprozesses nahezu unverändert bleibt. Auch die primale Unzulässigkeit sinkt rasch unterhalb die vorgegebene Toleranz von 10^{-4} . Und schwankt anschließend um diesen Wert. Etwa ab Iteration 15000 verbleibt die primale Unzulässigkeit unterhalb der Toleranz. Optimal gelöst ist das Problem dennoch erst nach 30000 Iterationen da insbesondere die duale Unzulässigkeit nicht unter die vorgegebene Toleranz von 10^{-1} fällt.

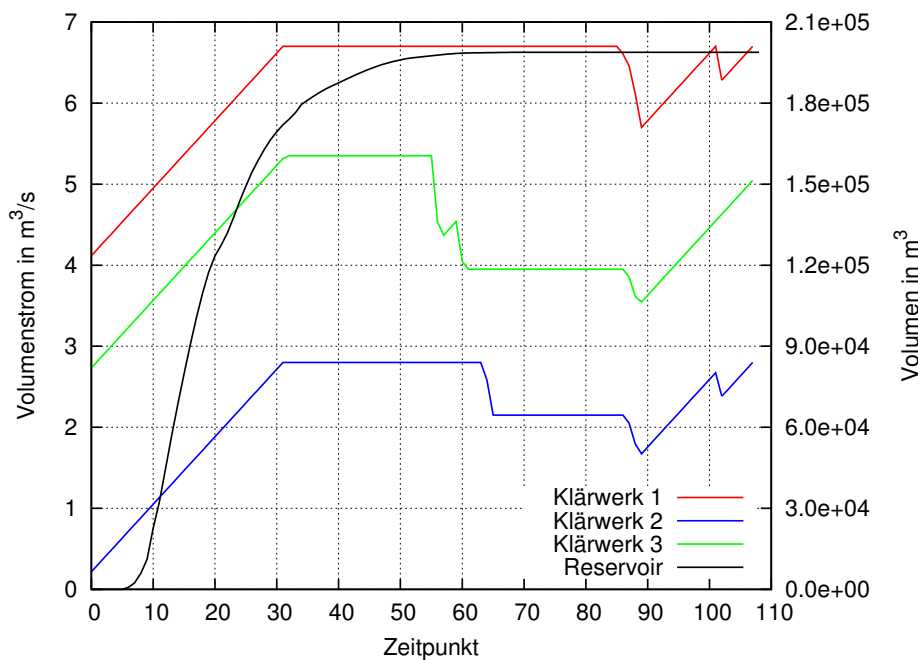


Abbildung 6.13: Volumenstrom durch die Klärwerke im Abwassernetzwerk V, sowie Gesamtvolumen des in die Umwelt entlasteten ungeklärten Abwassers

In Abbildung 6.13 sind die Flüsse durch die Klärwerke dem Gesamtvolumen des in die Umwelt entlasteten ungeklärten Abwasser gegenübergestellt. Auffällig ist, dass in etwa den ersten 60 Zeitintervallen, in denen das Volumen des Reservoirs ansteigt die Klärwerke den maximal möglichen Volumenstrom verarbeiten. In den weiteren

Zeitintervallen steigt das Volumen nicht mehr an. In diesem Zeitraum verarbeiten die Klärwerke zum Teil auch einen geringeren als den maximalen Volumenstrom. In dieser Zeit sinkt ebenfalls der Regen- und Trockenzufluss in die Kanalnetze.

6.6 Abwassernetzwerk VI

Dieses Abwassernetzwerk setzt sich aus den beiden Netzwerken der vorherigen Abschnitte zusammen. Das ADL-Netz und die Klärwerke des Abwassernetzwerks IV aus Abschnitt 6.4. Während dort der Regen- und Trockenzufluss direkt in das ADL-Netz eingespeist wurde, wird hier das ADL-Netz über die Kanalnetze des Abwassernetzwerks V aus Abschnitt 6.5 gespeist. Dieses Netzwerk ist in Abbildung 6.14 skizziert. Die Klärwerke und Kanalnetze sind durch Rechtecke angedeutet, auf die Darstellung der Einzelheiten in den Kanalnetzen wurde verzichtet.

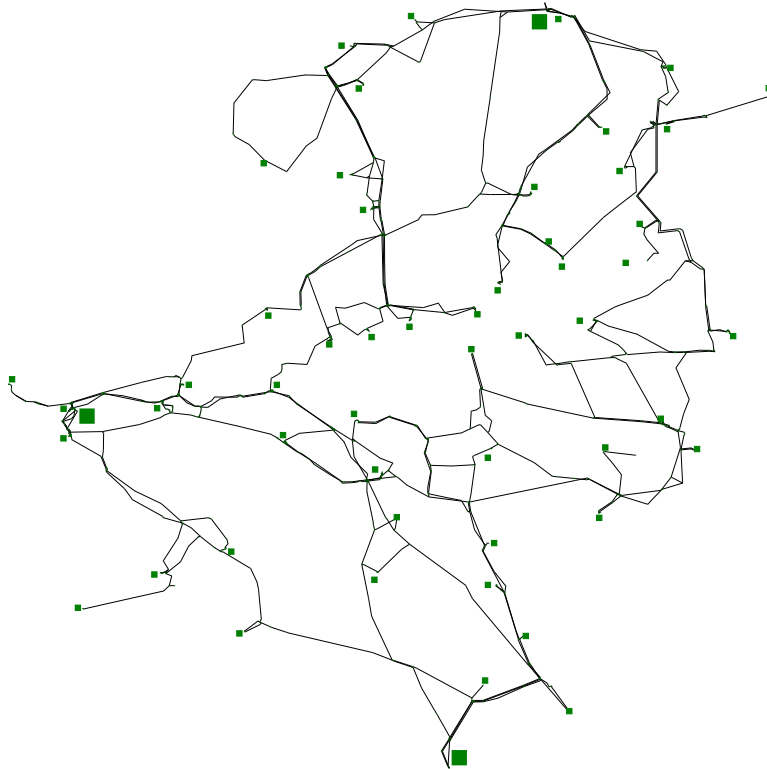


Abbildung 6.14: Topologie des Abwassernetzwerks VI

Insgesamt besteht dieses Netzwerk aus insgesamt 45 Mischwasserkanälen, 28 Trennwasserkanälen, 15 Pumpen, 12 Regen- und Klärüberläufen, 56 Notauslässen, 9 internen Überläufen und Hebern, 6 festen und variablen Drosseln und 84 Pumpwerken im Kanalnetz, sowie 1442 Verzweigungen, 910 Rohrleitungen und 775 Ventilen im ADL-Netz. Hinzu kommen 2 Reservoirs und 3 Klärwerke.

Daraus ergibt sich ein nichtlineares Optimierungsproblem mit etwa 460874 Variablen, von denen knapp 200000 beschränkt sind. Das Problem besitzt 352989 Gleichungsrestriktionen und 86292 Ungleichungsrestriktionen von denen eine der eine Vielzahl nichtlinear und nichtkonvex sind (unter Anderem Speicherkennlinien, Überläufe und Druckverlust in den Rohrleitungen).

Als Startnäherungen für die Elemente des ADL-Netzes und der Pumpwerke wurde die optimale Lösung des Problems aus Abschnitt 6.4 verwendet. Die Startnäherungen für die einzelnen Kanalnetze wurden aus den verbleibenden Anteil des Regen- und Trockenzuflusses, bestimmt, so dass sich insgesamt eine zulässige Startnäherung ergibt.

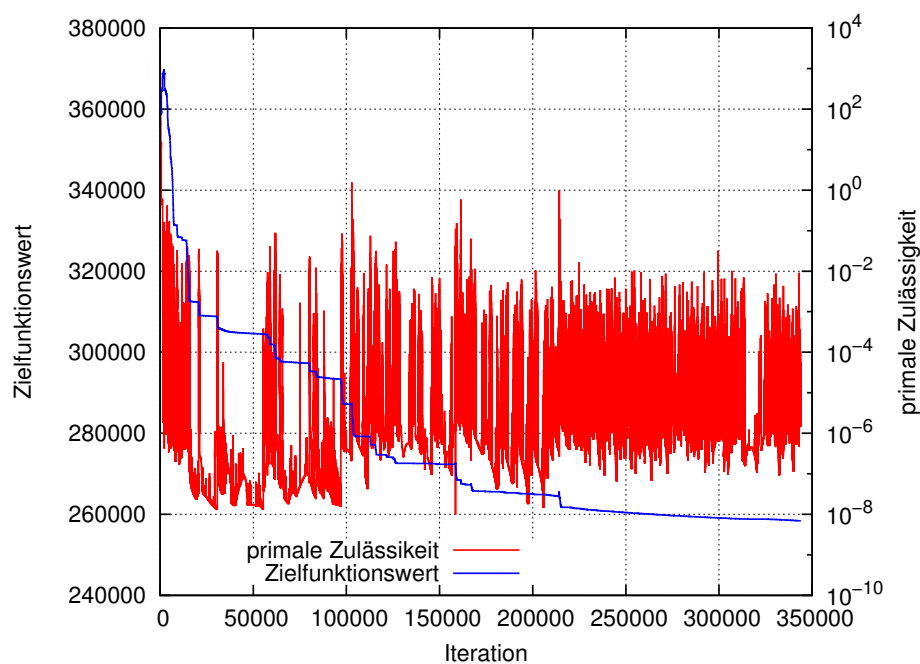


Abbildung 6.15: Konvergenzverhalten des Zielfunktionswertes und primale Zulässigkeit (Abwassernetzwerk VI). Wahl des Barriere-Parameters: monoton

Das Lösen dieses Problems mithilfe von Ipopt blieb leider erfolglos, obwohl die einzelnen Teilprobleme erfolgreich gelöst werden konnten (vgl. Abschnitte 6.4 und 6.5). Insbesondere liegt die Anzahl der Variablen und Restriktionen des Problems, welches nur aus dem ADL-Netz besteht in der selben Größenordnung wie hier. Allerdings wurde durch eine andere Zielfunktion bestrachtet.

In den Abbildungen 6.15 und 6.16 sind für zwei verschiedene Optimierungsläufe die Zielfunktionswerte und der primalen Unzulässigkeiten zu jeder Iteration dargestellt. Die beiden Läufe unterscheiden sich ausschließlich in der Wahl des Barriereparameters μ . In dem zu Abbildung 6.15 gehörenden Prozess wurde zur Bestimmung von μ die monotone Strategie von Fiacco-McCormick gewählt (siehe

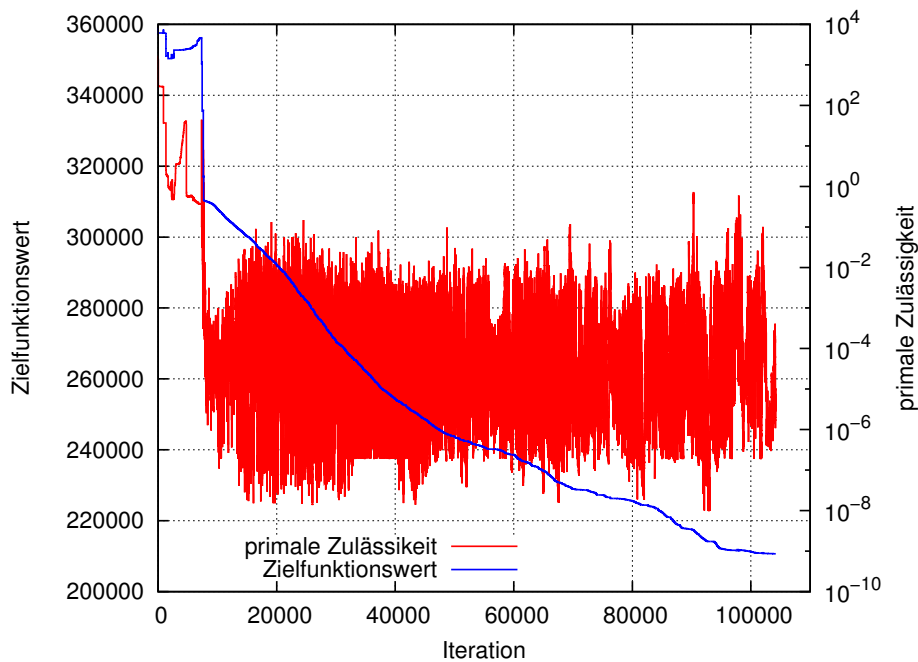


Abbildung 6.16: Konvergenzverhalten des Zielfunktionswertes und primale Zulässigkeit (Abwassernetzwerk VI). Wahl des Barriere-Parameters: adaptiv

[WB06], [NWW09]). Hier sinkt die primale Unzulässigkeit nach wenigen hundert Iterationen in den tolerierten Bereich von 10^{-4} . Ebenso sinkt der Zielfunktionswert zunächst recht stark. Im weiteren Verlauf fällt er treppenartig, aber monoton. Im weiteren Verlauf nehmen die Bereiche starken Abfalls ab, während die flachen Bereiche sich ausdehnen. Nach etwa 250000 Iterationen ist die Abnahme des Zielfunktionswertes nur noch sehr gering. Die einzelnen Iterierten bleiben aber über den gesamten Verlauf hinweg im tolerierten Bereich. Nach ca. 350000 Iterationen und etwa 12 Wochen Rechenzeit wurde der Prozess ohne Lösung abgebrochen.

In dem zu Abbildung 6.15 gehörenden Prozess wurde eine adaptive Strategie zur Bestimmung des Barriere-Parameters μ gewählt, bei der eine Güte-Funktion minimiert wird (siehe [WB06], [NWW09]). Die primale Unzulässigkeit unterscheidet sich nur zu Beginn des Prozesses von der monoton μ -Strategie. Während der ersten 10000 Iterationen sind die Iterierten stark unzulässig. Dann fallen sie abrupt in den tolerierten Bereich und verbleiben dort während des gesamten Prozesses. Der Verlauf des Zielfunktionswertes hingegen unterscheidet sich signifikant. Die Abnahme erfolgt hier stetig und nicht treppenartig, und nach etwa 90000 Iterationen flacht die Kurve deutlich ab. Der Prozess wurde nach etwa 6 Wochen Rechenzeit abgebrochen, ohne dass das Problem gelöst wurde.

Auch eine andere Wahl der Starnäherungen oder Veränderungen verschiedener Parameter führt hier zu keinen nennenswerten Verbesserungen. Typisch am Iterati-

onsverlauf ist auch hier, dass die Iterierten recht rasch primal zulässig sind, die duale Unzulässigkeit dagegen während des gesamten Verlaufs im Bereich 10^3 bis 10^4 liegt.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass das hier verwendete nichtlineare kontinuierliche Modell eines realen großen Abwassernetzwerks, trotz einer adäquaten Startnäherung und der Verwendung einer modernen Implementierung einer Inneren-Punkte-Methode nicht gelöst werden konnte.

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden zwei Optimierungsmodelle zu integrierter Steuerung komplexer urbaner Abwassersysteme entwickelt. Diese Steuerung hat zum Ziel den Eintrag ungeklärten Abwassers, insbesondere während starker Regenfälle, in die Umwelt zu minimieren. Die zugrundeliegenden Elemente und Eigenschaften eines solchen Abwassersystems wurden zunächst insbesondere bezüglich der zeitlichen und zustandsabhängigen Dynamik der Volumenströme untersucht und verschiedene Modellierungsansätze im Hinblick auf deren Verwendbarkeit in Optimierungsmodellen untersucht.

Im Folgenden wurden zwei verschiedene Klassen von Optimierungsproblemen zur optimalen Steuerung formuliert. Zum Einen wurde eine Formulierung als gemischt-ganzzahliges Optimierungsmodell entwickelt. Hier lag das Hauptaugenmerk auf einer möglichst exakten Modellierung des Abwassersystems und der Dynamik der Volumenströme. Zum Anderen wurde ein nichtlineares kontinuierliches Problem formuliert. Der Schwerpunkt lag in diesem Fall auf der Lösbarkeit realer Probleminstanzen unter der Verwendung von Standardsoftware. Dennoch ist in diesem Modell die Realität hinreichend exakt abbildbar, so dass die Lösungen dieser Formulierung zur Entscheidungshilfe verwendet werden können.

Im vorausgehenden Kapitel wurden die Modelle an realistischen und realen Abwassernetzwerken verifiziert und die Ergebnisse diskutiert.

Die MINLP-Formulierung zur Steuerung eines Abwassersystems ist in der Verwendung in Entscheidungshilfesystemen nicht geeignet. Insbesondere liegt dies an der großen Anzahl zusätzlicher Variablen und Beschränkungen, die bei der MINLP-Formulierung zusätzlich benötigt werden. Daher entstehen selbst bei kleinen realen Instanzen sehr große gemischt-ganzzahlige Modelle. In Kombination mit den hochgradig nichtlinearen und nichtkonvexen Nebenbedingungen, die insbesondere die Volumenströme modellieren liegen hier Optimierungsprobleme vor, die von den aktuell verfügbaren Algorithmen zur Lösung von MINLPs nicht bewältigt werden können. Daher ist zurzeit von der Verwendung von MINLP-Formulierungen zur Modellierung realer Abwassersysteme abzusehen.

Weitaus bessere Ergebnisse wurden mithilfe der nichtlinearen kontinuierlichen Formulierung erzielt. Hier konnten reale Instanzen mit über 400000 Variablen und etwa ebenso vielen Gleichungs- und Ungleichungsrestriktionen optimal gelöst werden. Allerdings muss einschränkend hinzugefügt werden, dass es sich bei diesen Instanzen um Abwassersysteme handelt, die ausschließlich aus einem Druckleitungsnetz, sowie Klärwerken bestehen.

Aber auch für Abwassersysteme bestehend aus verschiedenen Kanalnetzen und einem Abwasserdruckleitungsnetz und mehreren Klärwerken konnten zumindest zulässige Lösungen berechnet werden. Das zugehörige nichtlineare Optimierungsproblem besteht etwa 460000 Variablen und ca. 350000 Gleichungsrestriktionen und 85000 Ungleichungsrestriktionen, von denen eine Vielzahl nichtlinear und nichtkonvex sind (unter anderem Speicherkennlinien, Überläufe und der Druckverlust in den Rohrleitungen).

Das nichtlinear-kontinuierliche Modell scheint durchaus geeignet zu sein, um in der operativen Steuerung von großen Abwassersystemen unterstützend eingesetzt zu werden. Insbesondere konnte gezeigt werden, dass mithilfe dieses Modells Probleme gelöst werden können, die aus Abwassersystemen resultieren, wie sie für Großstädte typisch sind. Voraussetzungen sind, neben hinreichend genauen Netz- und Wasserdaten, allerdings, die Existenz qualitativ hochwertiger Startnäherungen bzw. Erfahrungswerten, damit das Verfahren konvergiert. Insbesondere weist die hohe Anzahl Iterationen darauf hin, dass die Modellierung in der Regel auf schlecht konditionierte Gleichungssysteme führt. Dieses sollte Gegenstand weiterer Untersuchungen sein, um diesen Ansatz erfolgreich in der Praxis einsetzen zu können.

Algorithmen

2.1	Grundgerüst von Verfahren zur Lösung von NLP's	14
2.2	Grundgerüst eines SQP-Verfahrens für gleichungsbeschränkte nichtlineare Optimierungsprobleme	18
2.3	Grundgerüst einer Innere-Punkte-Methode für allgemeine nichtlineare Optimierungsprobleme	20
2.4	Backtracking Line-Search	28

Tabellenverzeichnis

5.1	Netzwerkelemente im Abwassernetzwerk	84
5.2	Dynamischen Variablen im Abwassernetzwerk	85
5.3	MINLP-Formulierung eines Mischwasserkanals	88
5.4	MINLP-Formulierung eines Trennwasserkanals	89
5.5	MINLP-Formulierung eines Reservoirs	90
5.6	MINLP-Formulierung einer Verzweigung	90
5.7	MINLP-Formulierung eines Notauslasses	91
5.8	MINLP-Formulierung eines Regenüberlaufs	93
5.9	MINLP-Formulierung eines internen Überlaufs bzw. Hebers	94
5.10	MINLP-Formulierung einer festen Drossel	96
5.11	MINLP-Formulierung einer variablen Drossel	97
5.12	MINLP-Formulierung eines Pumpwerks	98
5.13	MINLP-Formulierung einer Entlastungspumpe	99
5.14	MINLP-Formulierung einer Rohrleitung	100
5.15	MINLP-Formulierung eines Ventils	101
5.16	MINLP-Formulierung eines Klärwerks	102
5.17	NLP-Formulierung eines Notauslasses	104
5.18	NLP-Formulierung eines Regenüberlaufs	105
5.19	NLP-Formulierung eines internen Überlaufs bzw. Hebers	106
5.20	NLP-Formulierung einer festen Drossel	107
5.21	NLP-Formulierung einer variablen Drossel	108
5.22	NLP-Formulierung eines Pumpwerks	108
5.23	NLP-Formulierung einer Entlastungspumpe	109
5.24	NLP-Formulierung einer Rohrleitung	110
5.25	NLP-Formulierung eines Ventils	111
5.26	NLP-Formulierung eines Klärwerks	112

Abbildungsverzeichnis

2.1	Veranschaulichung eines Filters	24
2.2	Wolfe-Bedingungen	27
2.3	Goldstein-Bedingungen	27
4.1	Beispiel für ein Teilnetz des Kanalnetzes	37
4.2	Approximation einer Speicherkennlinie	40
4.3	vollkommener Überfall	43
4.4	unvollkommener Überfall	44
4.5	freier Ausfluss	46
4.6	teilweise rückgestauter Ausfluss	47
4.7	vollständig rückgestauter Ausfluss	49
4.8	freier Heberabfluss	50
4.9	teilweise rückgestauter Heberabfluss	50
4.10	Fließzustände von Regen- und Klärüberläufen	52
4.11	Flussprofil eines Regenüberlaufs	53
4.12	SOS-Modell eines Regenüberlaufs	55
4.13	Fließzustände eines internen Überlaufs	58
4.14	Flussprofil eines internen Überlaufs - Schema	59
4.15	Flussprofil eines internen Überlaufs	60
4.16	Triangulierung eines internen Überlaufs	61
4.17	Flussprofil eines internen Überlaufs - Approximationsfehler	63
4.18	Fließzustände eines Hebers	65
4.19	Flussprofil eines Hebers - Schema	67
4.20	Flussprofil eines Hebers	68
4.21	Flussprofil eines Hebers - Approximationsfehler	69
4.22	Fließzustände einer Drossel	71
4.23	zulässiger Bereich einer festen Drossel	72
4.24	zulässiger Bereich einer variablen Drossel	73

4.25	Reibungsverluste bei Druckrohrströmungen	78
6.1	Netzwerk I: Topologie	118
6.2	Netzwerk I: Konvergenzverhalten	119
6.3	Netzwerk I: Entlastung in öffentliche Gewässer	120
6.4	Netzwerk II: Topologie	121
6.5	Netzwerk II: Konvergenzverhalten	121
6.6	Netzwerk II: Zuflüsse und Klärwerk	122
6.7	Netzwerk III: Konvergenzverhalten	123
6.8	Netzwerk III: Zuflüsse und Klärwerk	124
6.9	Netzwerk IV: Topologie	125
6.10	Netzwerk IV: Konvergenzverhalten	126
6.11	Netzwerk IV: Fluss durch die Klärwerke	127
6.12	Netzwerk V: Konvergenzverhalten	128
6.13	Netzwerk IV: Fluss durch die Klärwerke	129
6.14	Netzwerk VI: Topologie	130
6.15	Netzwerk VI: Konvergenzverhalten	131
6.16	Netzwerk VI: Konvergenzverhalten	132

Literaturverzeichnis

- [AMP] AMPL MODELING LANGUAGE FOR MATHEMATICAL PROGRAMMING: <http://www.ampl.com/>
- [BBC⁺08] BONAMI, Pierre ; BIEGLER, Lorenz T. ; CONN, Andrew R. ; CORNUÉJOLS, Gérard ; GROSSMANN, Ignacio E. ; LAIRD, Carl D. ; LEE, Jon ; LODI, Andrea ; MARGOT, François ; SAWAYA, Nicolas ; WÄCHTER, Andreas: An algorithmic framework for convex mixed integer nonlinear programs. In: *Discrete Optimization* 5 (2008), Nr. 2, S. 186 – 204
- [BCLM09] BONAMI, Pierre ; CORNUÉJOLS, Gérard ; LODI, Andrea ; MARGOT, François: A Feasibility Pump for mixed integer nonlinear programs. In: *Mathematical Programming* 119 (2009), Nr. 2, S. 331–352
- [BD83] BOOR, C. de ; DEVORE, R.: Approximation by smooth multivariate splines. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 276 (1983), Nr. 2, S. 775–788
- [BG08] BONAMI, P. ; GONCALVES, J. P. M.: Primal Heuristics for Mixed Integer Nonlinear Programs / IBM. 2008 (RC24639). – Forschungsbericht. – Research Report
- [BGLS06] BONNANS, J. F. ; GILBERT, J. C. ; LEMARECHAL, Claude ; SAGASTIZABAL, Claudia A.: *Numerical Optimization: Theoretical and Practical Aspects*. 2nd. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2006
- [BGS06] BURGSCHWEIGER, J. ; GNÄDIG, B. ; STEINBACH, M.C.: Optimierte Tagesplanung im Berliner Trinkwassernetz. In: *OR News* 26 (2006), Mar, S. 6 – 9
- [BGS09a] BURGSCHWEIGER, J. ; GNÄDIG, B. ; STEINBACH, M. C.: Nonlinear Programming Techniques for Operative Planning in Large Drinking Water Networks. In: *The Open Appl. Math. J.* 3 (2009), S. 14 – 28
- [BGS09b] BURGSCHWEIGER, J. ; GNÄDIG, B. ; STEINBACH, M.C.: Optimization Models for Operative Planning in Drinking Water Networks. In: *Optimization and Engineering* 10 (2009), S. 43 – 73

- [Bol07] BOLLRICH, Gerhard: *Technische Hydromechanik, Band 1 Grundlagen*. 6. Auflage. Huss Medien, Berlin, 2007. – 456 S.
- [Boo] BOOST C++ LIBRARIES: <http://www.boost.org/>
- [Boo01] BOOR, Carl D.: *Applied Mathematical Sciences*. Bd. 27: *A Practical Guide to Splines*. Springer, 2001. – 372 S.
- [Bos89] BOS, M. G.: *ILRI Publication*. Bd. 20: *Discharge measurement structures*. 3. Wageningen, Netherlands : International Institute for Land Reclamation and Improvement, 1989
- [BP03] BUSSIECK, Michael R. ; PRUESSNER, Armin: Mixed-Integer Nonlinear Programming. In: *SIAG/OPT Views-and-News* 14 (2003), S. 19 – 22
- [BSS06] BAZARAA, Mokhtar S. ; SHERALI, Hanif D. ; SHETTY, C. M.: *Non-linear programming*. Third. Hoboken, NJ : Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], 2006. – xvi+853 S. <http://dx.doi.org/10.1002/0471787779>. <http://dx.doi.org/10.1002/0471787779>. – ISBN 978-0-471-48600-8; 0-471-48600-0. – Theory and algorithms
- [BV10] BUSSIECK, Michael R. ; VIGERSKE, Stefan: MINLP Solver Software. In: *Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science*. John Wiley and Sons, Inc., 2010
- [CHV80] CUNGE, J.A. ; HOLLY, F.M. ; VERWEY, A.: *Practical aspects of computational river hydraulics*. Boston : Pitman Advanced Pub. Program, 1980 (Monographs and surveys in water resources engineering). – 420 S.
- [Cou43] COURANT, R: Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. In: *Bulletin of the American Mathematical Society* 49 (1943), S. 1–23
- [DA09] D AMBROSIO, Claudia: *Application-oriented Mixed Integer Non-Linear Programming*, University of Bologna, Diss., 2009
- [DCL98] DAMRATH, H. ; CORD-LANDWEHR, K: *Wasserversorgung*. Teubner, 1998
- [DG86] DURAN, Marco A. ; GROSSMANN, Ignacio E.: An outer-approximation algorithm for a class of mixed-integer nonlinear programs. In: *Mathematical Programming* 36 (1986), Nr. 3, S. 307–339
- [Die95] DIERCKX, Paul: *Curve and Surface Fitting with Splines (Numerical Mathematics and Scientific Computation)*. Oxford University Press, 1995

- [FG06] FRANGIONI, A. ; GENTILE, C.: Perspective cuts for a class of convex 0–1 mixed integer programs. In: *Mathematical Programming* 106 (2006), Nr. 2, S. 225–236
- [FG09] FLOUDAS, C. A. ; GOUNARIS, C. E.: A review of recent advances in global optimization. In: *Journal of Global Optimization* 45 (2009), Nr. 1, S. 3–38
- [FGW02] FORSGREN, Anders ; GILL, Philip E. ; WRIGHT, Margaret H.: Interior Methods for Nonlinear Optimization. In: *SIAM Review* 44 (2002), Nr. 4, S. 525–597
- [FK00] FELTENMARK, Stefan ; KIWIEL, Krzysztof C.: Dual Applications of Proximal Bundle Methods, Including Lagrangian Relaxation of Non-convex Problems. In: *SIAM Journal on Optimization* 10 (2000), Nr. 3, 697–721. <http://dx.doi.org/10.1137/S1052623498332336>. – DOI 10.1137/S1052623498332336
- [FL02] FLETCHER, Roger ; LEYFFER, Sven: Nonlinear programming without a penalty function. In: *Mathematical Programming, Springer Berlin / Heidelberg* 91 (2002), S. 239–269
- [Fle87] FLETCHER, R.: *Practical methods of optimization*. Wiley, 1987 (A Wiley-Interscience publication)
- [Fle05] FLEGEL, Michael L.: *Constraint qualifications and stationarity concepts for mathematical programs with equilibrium constraints*, Universität Würzburg, Diss., 2005
- [Flo95] FLOUDAS, C.A.: *Nonlinear and mixed-integer optimization: fundamentals and applications*. Oxford University Press, 1995
- [FM68] FIACCO, A.V. ; MCCORMICK, G.P.: *Nonlinear programming: sequential unconstrained minimization techniques*. Wiley, 1968. – Reprinted by SIAM Publications, 1990
- [Fra02] FRANGIONI, Antonio: Generalized Bundle Methods. In: *SIAM Journal on Optimization* 13 (2002), Nr. 1, 117–156. <http://dx.doi.org/10.1137/S1052623498342186>. – DOI 10.1137/S1052623498342186
- [GAM] GAMS - GENERAL ALGEBRAIC MODELING SYSTEM: <http://www.gams.com/>
- [GK02] GEIGER, Carl ; KANZOW, Christian: *Theorie und Numerik restringierter Optimierungsaufgaben*. Springer, 2002

- [GR85] GUPTA, Omprakash K. ; RAVINDRAN, A.: Branch and Bound Experiments in Convex Nonlinear Integer Programming. In: *Management Science* 31 (1985), Nr. 12, S. 1533 – 1546
- [Gro02] GROSSMANN, Ignacio E.: Review of nonlinear mixed-integer and disjunctive programming techniques. In: *Optimization and Engineering* 3 (2002), Nr. 3, S. 227–252
- [GS02a] GROSSMANN, Ignacio E. (Hrsg.) ; SAHINIDIS, Nikolaos V. (Hrsg.): *Special issue on mixed-integer programming and its applications to engineering*. Kluwer Academic Publishers, 2002. – Optim. Eng. **3** (4)
- [GS02b] GROSSMANN, Ignacio E. (Hrsg.) ; SAHINIDIS, Nikolaos V. (Hrsg.): *Special issue on mixed-integer programming and its applications to engineering*. Kluwer Academic Publishers, 2002. – Optim. Eng. **4** (1)
- [Hag95] HAGER, Willi H.: *Abwasserhydraulik : Theorie und Praxis*. Berlin : Springer Verlag, 1995
- [HUL01] HIRIART-URRUTY, J.B. ; LEMARÉCHAL, C.: *Fundamentals of convex analysis*. Springer, 2001
- [Kal02] KALLRATH, J: *Gemischt-ganzzahlige Optimierung: Modellierung in der Praxis*. Vieweg, 2002
- [KHCL08] KARGER, Rosemarie ; HOFFMANN, Frank ; CORD-LANDWEHR, Klaus: *Wasserversorgung*. 13. Auflage. Wiesbaden : Vieweg +Teubner Verlag / GWV Fachverlage GmbH, 2008
- [Lib04] LIBERTI, Leo S.: *Reformulation and Convex Relaxation Techniques for Global Optimization*, Imperial College London, UK, Diss., 2004
- [LM10] LEYFFER, Sven ; MAHAJAN, Ashutosh: Software For Nonlinearly Constrained Optimization. In: *Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science*, John Wiley & Sons, Inc. (2010)
- [MF67] MANGASARIAN, O. L. ; FROMOVITZ, S.: The Fritz John necessary optimality conditions in the presence of equality and inequality constraints. In: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 17 (1967), S. 37–47
- [Now05] NOWAK, Ivo: *Relaxation and Decomposition Methods for Mixed Integer Nonlinear Programming*. Birkhäuser, 2005 (International series of numerical mathematics)
- [NW06] NOCEDAL, Jorge ; WRIGHT, Stephen J.: *Numerical Optimization*. 2nd. Springer, 2006 (Springer Series in Operations Research and Financial Engineering)

- [NWW09] NOCEDAL, Jorge ; WÄCHTER, Andreas ; WALTZ, Richard A.: Adaptive barrier update strategies for nonlinear interior methods. In: *SIAM J. Optim.* 19 (2009), S. 1674–1693
- [Pet73] PETERSON, D. W.: A review of constraint qualifications in finite-dimensional spaces. In: *SIAM Review* 15 (1973), S. 639–654
- [SEW08] STEINBACH, M. C. ; EGGERT, K. ; WEEGE, M.: *Projektbericht SewerNetOpt: Optimalsteuerung von Abwassernetzen*. 2008. – ZIB/IfAM (Confidential study for KompetenzZentrum Wasser Berlin.)
- [SLL01] SIEK, Jeremy G. ; LEE, Lie-Quan ; LUMSDAINE, Andrew: *The Boost Graph Library: User Guide and Reference Manual*. Addison-Wesley, 2001
- [Sto57] STOKER, J. J.: *Water waves: The mathematical theory with applications*. Interscience Publishers, Inc., New York, 1957 (Pure and Applied Mathematics, Vol. IV). – xxviii+567 S.
- [Van08] VANDERBEI, R.J.: *Linear programming: foundations and extensions*. Springer, 2008 (International series in operations research & management science)
- [WB06] WÄCHTER, Andreas ; BIEGLER, Lorenz T.: On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming. In: *Mathematical Programming* 106 (2006), Nr. 1(A), S. 25–57
- [WP95] WESTERLUND, Tapio ; PETTERSSON, Frank: An extended cutting plane method for solving convex MINLP problems. In: *Computers & Chemical Engineering* 19 (1995), S. 131 – 136
- [Wri97] WRIGHT, S.J.: *Primal-dual interior-point methods*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997

Lebenslauf

Klaas Eggert

geboren am 11. September 1975 in Soltau

- seit 03/2012 Softwareentwickler im Bereich Fahrplankonstruktion und -management bei der HaCon Ingenieurgesellschaft mbH
- 12/2006 – 02/2012 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Angewandte Mathematik der Leibniz Universität Hannover
- 10/2006 – 11/2006 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut Computational Mathematics der Technischen Universität Braunschweig
- 10/1999 – 09/2006 Studium der Finanz- und Wirtschaftsmathematik am der Technischen Universität Braunschweig
Abschluss: Diplom Finanz- und Wirtschaftsmathematiker
- 10/1997 – 09/1999 Studium der Elektrotechnik an der Technischen Universität Braunschweig
- 09/1996 – 06/1997 Grundwehrdienst
- 08/1988 – 05/1996 Gymnasium Soltau, Abschluss: Abitur