

SOLUCIÓN NUMÉRICA PARA FRACTURA EN SÓLIDOS PIEZOELECTRICOS TRIDIMENSIONALES

M. Solís¹, J.A. Sanz², J. Domínguez¹

¹ Grupo de Estructuras, Escuela Superior de Ingenieros,
Universidad de Sevilla, Camino de los descubrimientos s/n,
41092 Sevilla, España.
msolis@us.es, jose@us.es
Tlf: 954 48 72 93 Fax: 954 48 72 95

² Grupo de Estructuras y Modelado de Materiales, Instituto de Investigación en Ingeniería de Aragón,
Universidad de Zaragoza
Campus Río Ebro. Ed. Agustín de Betancourt, c/ María de Luna s/n, 50018-Zaragoza, España.
jose@unizar.es
Tfno: 976 76 10 00 Ext. 5187. Fax: 978 76 25 78

RESUMEN

En este trabajo se presenta una formulación mixta del Método de los Elementos de Contorno (MEC) para el análisis de problemas 3D de Mecánica de la Fractura en materiales piezoeléctricos transversalmente isótropos. La formulación mixta hace uso de la Ecuación Integral de Contorno tanto en Desplazamientos (formulación clásica del método) como en Tracciones (formulación hipersingular). Partiendo de la solución fundamental de Dunn y Wienecke, se han obtenido sus derivadas para la obtención de los términos en tracciones y los núcleos de la formulación hipersingular del MEC. Los núcleos hipersingulares han sido regularizados analíticamente para dar lugar finalmente a integrales que son a lo sumo débilmente singulares.

Una vez que la formulación ha sido validada por comparación con soluciones analíticas y resultados obtenidos por otros autores, se presentan y se analizan una serie de problemas de interés, con geometrías diversas, para los cuales no existen resultados previos.

ABSTRACT

In this paper, a mixed Boundary Element formulation for the analysis of 3D crack problems in transversely isotropic piezoelectric solids is presented. When applying this mixed BE formulation, the Displacement Boundary Integral Equation (classical formulation of BEM) and the Traction Boundary Integral Equation (hypersingular formulation of BEM) are used. The displacement expressions of the fundamental solution obtained by Dunn and Wienecke, have been differentiated in order to obtain the traction terms and kernels for the hypersingular formulation. An analytical regularization process have been applied to strongly singular and hypersingular kernels, so they are transformed into weakly singular integrals.

Once the formulation have been validated by comparison with analytical and previous results, some interesting problems, for which no previous results are known by the authors, are analyzed.

PALABRAS CLAVE: Elementos de contorno, formulación hipersingular, materiales piezoeléctricos.

1. INTRODUCCIÓN

Los materiales piezoeléctricos exhiben un acoplamiento electromecánico que hace que se deformen bajo la aplicación de un campo eléctrico y viceversa, al deformarse por la aplicación de una carga mecánica aparece en su interior un campo eléctrico. Este tipo de materiales existen de forma natural (el cuarzo es un ejemplo de ello), pero son los construidos artificialmente los que ofrecen mayor aplicación práctica, ya que en ellos se consigue un mayor acoplamiento electromecánico.

Desde el inicio de la aparición de las cerámicas artificiales piezoeléctricas hace aproximadamente 60 años (el tipo PZT es el más conocido), han resultado de especial interés para la comunidad científica por su extendida aplicación en diversos tipos de sensores, actuadores y estructuras inteligentes. Estas aplicaciones han contribuido enormemente al desarrollo tecnológico en muy diversas ramas de la ingeniería.

Dada la relevancia de estos materiales, es lógico que resulte de especial interés su estudio desde el punto de vista de la Mecánica de la Fractura. Además, se trata de materiales de naturaleza muy frágil, y en los que el

propio proceso constructivo es una de las causas de existencia de grietas en su interior.

La Mecánica de la Fractura se hace especialmente compleja en este tipo de materiales por su comportamiento anisótropo (necesario para que exista el fenómeno piezoeléctrico) y el acoplamiento entre variables eléctricas y elásticas. Su desarrollo se inició hace aproximadamente 30 años [1, 2, 3], y a pesar del trabajo desarrollado por numerosos investigadores aún quedan importantes aspectos por clarificar, como son el tipo de condición de contorno eléctrica a aplicar en las superficies de la grieta o el establecimiento de criterios de fractura.

En este artículo se presenta una formulación mixta del Método de los Elementos de Contorno (MEC) que permite abordar problemas tridimensionales de grietas inmersas en medios piezoeléctricos transversalmente isótropos (la mayoría de materiales piezoeléctricos de interés exhiben un comportamiento transversalmente isótropo). Esta herramienta numérica ha demostrado su eficacia para analizar problemas de Mecánica de la Fractura, por su capacidad de reducir el problema al contorno, no presentar problemas de integración en el dominio donde existe un campo singular de tensiones, o su eficacia para la evaluación de Factores de Intensidad de Tensiones. En este artículo se presenta una formulación análoga a las desarrolladas previamente en [4] y [5] para materiales isótropos y transversalmente isótropos respectivamente.

Existen muy pocos resultados para problemas tridimensionales de grietas en medios piezoeléctricos, especialmente en medios finitos. En este artículo se presentan una serie de resultados para diversos problemas de interés para los que no existen resultados previos conocidos por los autores.

2. ECUACIONES QUE GOBIERNAN EL PROBLEMA PIEZOELÉCTRICO

En un material piezoeléctrico existe un acoplamiento entre las variables elásticas (desplazamientos, deformaciones y tensiones) y eléctricas (potencial, campo y desplazamiento eléctrico). Para una mejor comprensión del problema, puede resultar conveniente establecer una serie de equivalencias entre ambos tipos de variables (entre paréntesis se escriben las unidades correspondientes a cada variable en el Sistema Internacional): el tensor de tensiones σ (N/m^2) tiene su equivalencia en el vector desplazamiento eléctrico \mathbf{D} (C/m^2), el desplazamiento mecánico \mathbf{U} (m) se corresponde con el potencial eléctrico Φ (V) y las deformaciones ϵ con el campo eléctrico \mathbf{E} (V/m). Finalmente, la proyección del tensor de tensiones mecánicas da lugar al vector de tracciones mecánicas (N/m^2), mientras que la proyección del desplazamiento eléctrico da lugar a densidad de carga por unidad de superficie (C/m^2).

En base a estas relaciones, resulta útil escribir las ecuaciones de equilibrio, compatibilidad, ley de comportamiento y condiciones de contorno que gobiernan el problema siguiendo la notación condensada propuesta en [1] y utilizada posteriormente por un gran número de autores. En dicha notación, se trabaja con lo que se conoce como tensores y vectores *extendidos*, que agrupan las variables elásticas y eléctricas. De esta forma, se trabajará con una serie de subíndices escritos en mayúscula que podrán adoptar valores entre 1 y 4, y otros en minúscula que irán de 1 a 3.

Así pues, la ecuación de equilibrio estático para un material piezoeléctrico en notación extendida se escribe como:

$$\Sigma_{iJ,i} + b_J = 0 \quad (1)$$

donde Σ_{iJ} es la matriz tensión-desplazamiento eléctrico, definida como,

$$\Sigma_{iJ} = \begin{cases} \sigma_{iJ} & \text{para } J=1,2,3 \\ D_i & \text{para } J=4 \end{cases} \quad (2)$$

y b_J es el vector columna de fuerzas de volumen extendido (fuerza y carga eléctrica).

El vector extendido de desplazamientos-potencial eléctrico U_K se define de la siguiente manera

$$U_K = \begin{cases} u_k & \text{para } K=1,2,3 \\ \phi & \text{para } K=4 \end{cases} \quad (3)$$

A partir de este vector de desplazamientos se define la matriz de deformaciones extendida Z_{KL} (deformaciones y campo eléctrico), pudiéndose escribir las ecuaciones de compatibilidad de la siguiente manera:

$$Z_{KL} = \begin{cases} \frac{1}{2}(U_{K,l} + U_{l,K}) & \text{para } K=1,2,3 \\ \phi_{,l} & \text{para } K=4 \end{cases} \quad (4)$$

La ley de comportamiento de un material piezoeléctrico se puede escribir como

$$\Sigma_{iJ} = E_{iJKL} Z_{KL} \quad (5)$$

siendo E_{iJKL} la matriz de constantes electro-elástica,

$$E_{iJKL} = \begin{cases} C_{ijkl} & \text{para } J,K=1,2,3 \\ e_{lij} & \text{para } J=1,2,3 \text{ } K=4 \\ e_{ikl} & \text{para } J=4, \text{ } K=1,2,3 \\ -\epsilon_{il} & \text{para } J,K=4 \end{cases} \quad (6)$$

Introduciendo las ecuaciones de compatibilidad (4) en la ley de comportamiento piezoeléctrica (5), se puede comprobar que la ley de comportamiento puede escribirse como

$$\Sigma_{iJ} = E_{iJKl}U_{K,l} \quad (7)$$

Para acabar de definir el problema piezoeléctrico quedaría imponer las condiciones de contorno del problema. Estas condiciones de contorno pueden ser en desplazamientos (desplazamiento o potencial eléctrico en el contorno conocidos) o en tracciones. Para este segundo tipo queda definir el vector de tracciones extendido \mathbf{T} como la proyección del tensor de tensiones extendido sobre la normal exterior al contorno:

$$T_J = \Sigma_{iJ}n_i \quad (8)$$

siendo n_i la normal exterior al contorno.

En sólidos piezoeléctricos con presencia de grietas, la imposición de condiciones de contorno eléctricas en las superficies de la grieta no resulta trivial. Existen tres tipos de condiciones de contorno propuestas por distintos autores: condición permeable, impermeable o exacta. La diferencia entre unas y otras radica en cómo se considere la interacción eléctrica entre las superficies de la grieta y el espacio existente entre ellas. Una revisión sobre este tema se puede encontrar en [6, 7, 8].

En este trabajo se considerará la condición de contorno impermeable, que es aceptada por la mayoría de autores y parece ofrecer resultados suficientemente realistas [7].

3. FORMULACIÓN MIXTA DE ELEMENTOS DE CONTORNO

La formulación mixta del MEC se basa en el empleo de la Ecuación Integral de Contorno (EIC) en desplazamientos (formulación clásica del método) y la EIC en tracciones (formulación hipersingular). La formulación mixta permite solventar el inconveniente de la degeneración geométrica y del sistema de ecuaciones al existir una grieta, y evita recurrir a la técnica de subregiones. En problemas de grietas en medios infinitos, se consigue además que la discretización se reduzca a una de las superficies de la grieta, pudiendo trabajar directamente con el Desplazamiento de Apertura de Grieta como variable nodal. La formulación desarrollada para materiales piezoeléctricos es completamente análoga a la desarrollada previamente para materiales isotrópicos [4] y transversalmente isotrópicos [5].

Haciendo uso de la notación extendida, la EIC en desplazamientos se puede escribir como

$$c_{KM}(\mathbf{y})U_K(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} T_{KM}^*(\mathbf{x}-\mathbf{y})U_M(\mathbf{x})d\Gamma - \int_{\Gamma} U_{KM}^*(\mathbf{x}-\mathbf{y})T_M(\mathbf{x})d\Gamma = 0 \quad (9)$$

donde \mathbf{x} es el punto de observación o de integración en el contorno, \mathbf{y} es el punto de colocación, U_K y T_M son las componentes del vector de desplazamientos y tracciones extendidos en el contorno, U_{KM}^* y T_{KM}^* son los términos de la solución fundamental en desplazamientos y tracciones, y C_{KM} es un término que depende de la geometría del contorno en el punto de colocación, siendo $C_{KM} = 1/2\delta_{KM}$ para un punto suave del contorno y $C_{KM} = 1$ para un punto interno.

A partir de la EIC en desplazamientos se puede obtener, por derivación y combinación según la ley de comportamiento, la EIC en tracciones. Esta ecuación se emplea en puntos de colocación pertenecientes a la grieta, para los que la ecuación se escribe como

$$T_J(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} s_{iMJ}^*(\mathbf{x}-\mathbf{y})N_i(\mathbf{y})U_M(\mathbf{x})d\Gamma - \int_{\Gamma} d_{iMJ}^*(\mathbf{x}-\mathbf{y})N_i(\mathbf{y})T_M(\mathbf{x})d\Gamma = 0 \quad (10)$$

donde $N_i(\mathbf{y})$ es la normal unitaria externa en el punto de colocación, y los términos s_{iMJ}^* y d_{iMJ}^* se construyen según se describe a continuación.

En la formulación desarrollada se ha partido de las expresiones de la solución fundamental en desplazamientos (U_{KM}^*) obtenidas en [9] para materiales piezoeléctricos transversalmente isotrópicos. Las primeras y segundas derivadas de estos términos han sido obtenidas [10] para obtener las expresiones de T_{KM}^* , s_{iMJ}^* y d_{iMJ}^* según las siguientes relaciones:

$$T_{KM}^* = \frac{\partial}{\partial x_c} U_{BK}^* E_{aMBc} n_a \quad (11)$$

$$d_{iMJ}^* = \frac{\partial}{\partial y_l} U_{KM}^* E_{iJKl} \quad (12)$$

$$s_{iMJ}^* = \frac{\partial}{\partial y_l} T_{KM}^* E_{iJKl} = \frac{\partial}{\partial y_l} \frac{\partial}{\partial x_c} U_{BK}^* E_{iJKl} E_{aMBc} n_a \quad (13)$$

En la implementación de la EIC en tracciones se realiza un proceso analítico de regularización de los núcleos fuertemente singulares e hipersingulares, aplicando fundamentalmente el teorema de Stokes, de forma que finalmente solo resulta necesario evaluar integrales que son a lo sumo débilmente singulares [4,5,8,10]. Para cumplir con los requerimientos de continuidad en el punto de colocación, se utiliza el Método de Colocación Múltiple. De esta forma, se llega finalmente a la siguiente ecuación a implementar en un código de elementos de contorno:

$$\begin{aligned}
 & T_j(\mathbf{y}) + \\
 & \int_{\Gamma_0} \left\{ s_{iMj}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) N_i(\mathbf{y}) [U_M(\mathbf{x}) - U_M(\mathbf{y}) - U_{M,h}(\mathbf{y})(x_h - y_h)] - \right. \\
 & \left. - d_{iMj}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) N_i(\mathbf{y}) [T_M(\mathbf{x}) - T_M(\mathbf{y})] \right\} d\Gamma + \\
 & [U_M(\mathbf{y}) I_{Mj}(\mathbf{y}) + U_{M,h}(\mathbf{y}) J_{Mhj}(\mathbf{x}, \mathbf{y})] + \\
 & \int_{\Gamma - \Gamma_0} \left\{ s_{iMj}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) N_i(\mathbf{y}) U_M(\mathbf{x}) - d_{iMj}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) N_i(\mathbf{y}) T_M(\mathbf{x}) \right\} d\Gamma = 0
 \end{aligned} \tag{14}$$

Los términos I_{Mj} y J_{Mhj} provienen del proceso de regularización, mientras que Γ_0 se corresponde con el elemento al que pertenece el punto de colocación y sobre el que se realiza el proceso de regularización. Los detalles sobre la obtención de la EIC en tracciones, el proceso de regularización, expresiones de los términos etc., se pueden encontrar en [8,10].

4. OBTENCIÓN DE FACTORES DE INTENSIDAD DE TENSION EXTENDIDOS

En materiales piezoeléctricos, el campo de tensiones extendido muestra también una singularidad del tipo $1/\sqrt{r}$ en las proximidades del frente de grieta. Esto hace que se definan cuatro Factores de Intensidad Extendidos (FITES). A los factores K_I , K_{II} y K_{III} , que se definen de la misma forma que en materiales no piezoeléctricos, se añade un factor K_{IV} asociado a la singularidad en el desplazamiento eléctrico.

Para la evaluación de los FITES, se ha desarrollado una metodología [8,10] basada en una extensión a 3D de un procedimiento previo aplicado en 2D [11]. De esta forma, los FITES se obtienen por medio de elementos a un cuarto [12] situados a lo largo del frente de grieta, a partir de la siguiente expresión:

$$\begin{Bmatrix} K_{II} \\ K_{III} \\ K_I \\ K_{IV} \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{\pi}{2L}} \text{Re}(\mathbf{Y})^{-1} \begin{Bmatrix} \Delta u_n \\ \Delta u_t \\ \Delta u_z \\ \Delta \phi \end{Bmatrix} \tag{15}$$

donde L es la longitud del elemento a un cuarto es sentido normal al frente de grieta, \mathbf{Y} es una matriz que depende de las constantes electroelásticas del material [11,13], y el vector $\Delta \mathbf{u}$ son los desplazamientos extendidos de los nodos a un cuarto (n, t y z son las coordenadas locales en el frente de grieta asociadas a los modos I, II y III de apertura de grieta).

5. EJEMPLOS NUMÉRICOS

La formulación mixta de elementos de contorno desarrollada ha sido validada mediante la comparación con soluciones analíticas previas y resultados en 2D [8,10]. En este artículo se presentan una serie de

resultados para distintas configuraciones en las que un prisma contiene en su interior una grieta recta pasante. En una primera configuración, se tiene una grieta recta de borde (figura 1) cuya discretización se muestra en la figura 2.

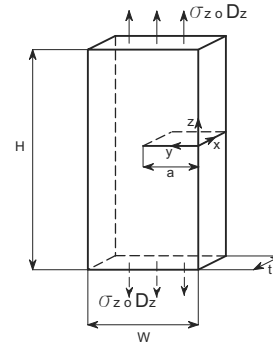


Figura 1. Esquema del problema de grieta recta de borde.

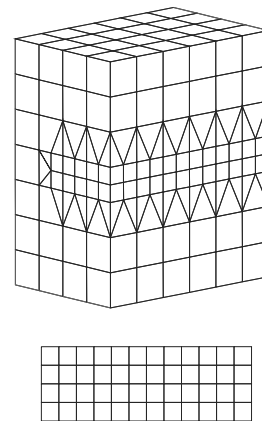


Figura 2. Discretización del prisma y de la superficie de la grieta en su interior.

A partir de esta discretización, imponiendo condiciones de simetría en los planos perpendiculares al eje y de la figura 1, se modela un caso en el que la grieta es central (figura 3) y otro caso en el que existen dos grietas rectas de borde (figura 4). En todos los casos, la geometría cumple las siguientes relaciones: $H/W=1.75$, $W/a=2$, $t/W=1.5$.

En todos los casos, se consideran dos tipos de casos de carga: tracción mecánica impuesta (σ_z) y desplazamiento eléctrico o densidad superficial de carga eléctrica impuesta (D_z). Los FITES representados en las gráficas de resultados aparecen acompañados de un superíndice (“mec” o “elec.”) que hacen referencia al tipo de carga considerado en cada caso (mecánica o eléctrica). Los FITES se adimensionalizan con el tipo de excitación considerada, por lo que los factores “cruzados” (K_I^{elec} y K_{IV}^{mec}) no quedan realmente adimensionalizados. Así, los valores representados de $K_I^{elec}/(D_z(\pi a)^{1/2})$ tienen unidad de $[GN/C]$, mientras que los de $K_{IV}^{mec}/(\sigma_z(\pi a)^{1/2})$ tienen unidad de $[C/GN]$.

El material considerado es del tipo PZT4, cuyas constantes electroelásticas se recogen en la tabla 1.

Tabla 1. Propiedades del material PZT4

Const. elásticas (10^9 N/m^2)	C_{11}	139
	C_{12}	77.8
	C_{13}	74.3
	C_{33}	113
	C_{44}	25.6
Const. piezoeléctr. (C/m^2)	e_{31}	-6.98
	e_{33}	13.84
	e_{15}	13.44
Const. dieléctr. ($10^{-9} \text{ C}/(\text{Vm})$)	ϵ_{11}	6.0
	ϵ_{33}	5.47

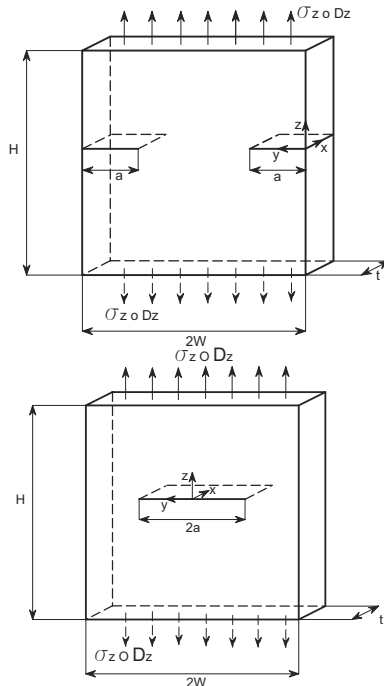


Figura 2. Geometría de doble grieta recta de borde y grieta recta central.

En las figuras 3, 4 y 5 se muestra la evolución de los FITEs a lo largo del frente de grieta para las tres configuraciones consideradas (s/W es una coordenada adimensional a lo largo del frente de grieta).

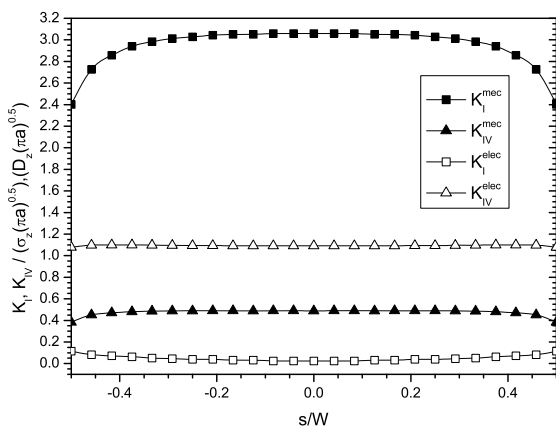


Figura 3. Evolución de los FITEs a lo largo del frente de grieta para grieta recta de borde.

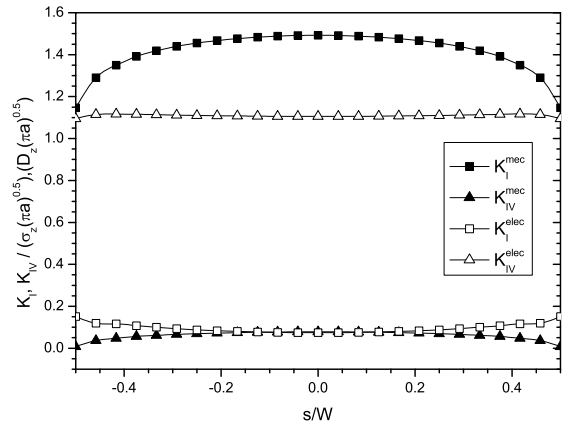


Figura 4. Evolución de los FITEs a lo largo del frente de grieta para doble grieta recta de borde.

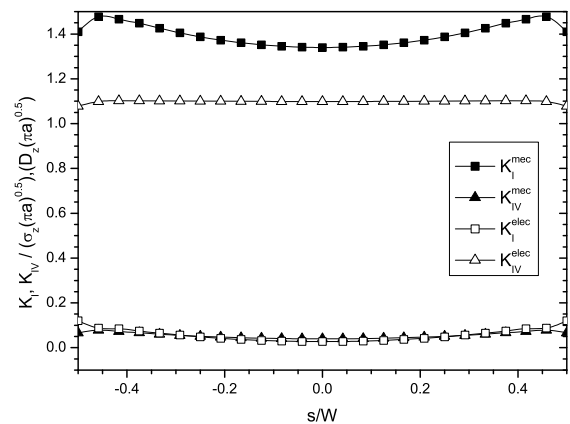


Figura 5. Evolución de los FITEs a lo largo del frente de grieta para grieta recta central.

Desde el punto medio del frente de grieta ($s/W=0$), el valor de los FITEs varía simétricamente a lo largo del espesor, presentándose similitudes y diferencias interesantes en las distintas situaciones y factores analizados.

En los tres casos considerados se aprecia una evolución del factor K_I^{mec} similar a la del caso no piezoeléctrico, isotrópico o transversalmente isotrópico [5,8]. En las cercanías del borde libre se observa una caída brusca de su valor, debida a que en esa zona la singularidad del campo de tensiones ha de ser menor que $1/\sqrt{r}$ y su valor (según su definición) tiende teóricamente a cero, al igual que ocurre en materiales no piezoeléctricos [14,15]. No obstante, la discretización empleada no es lo suficientemente refinada en esa zona como para sacar conclusiones relevantes sobre este aspecto.

En los casos de grieta de borde simple o doble, el factor K_I^{mec} muestra una tendencia decreciente desde el centro hacia los extremos, mientras que en el caso de grieta central la tendencia es inversa, exceptuando la zona próxima al borde libre, en la que su valor decrece por el motivo antes señalado. Estos resultados, similares a los obtenidos en materiales no piezoeléctricos, llevarían a pensar en una forma de propagación de la grieta distinta en el caso de grieta central, aunque en materiales

piezoeléctricos es necesario tener en cuenta la influencia del resto de FITEs y no existe aún un criterio de propagación establecido con carácter general.

Los factores “cruzados” (K_I^{elec} y K_{IV}^{mec}) muestran valores muy bajos y su evaluación resulta inestable desde un punto de vista numérico [8]. Su influencia en la tendencia a la propagación de la grieta ha de ser por tanto pequeña, aunque es necesario cuantificar su relevancia mediante el análisis de otros parámetros relacionados con la propagación de la grieta como son la tasa de liberación de energía total, local o de deformación.

Finalmente, hay que destacar un resultado muy llamativo, y es el hecho de que el factor K_{IV}^{elec} tiene el mismo valor en cada una de las configuraciones geométricas analizadas, mientras que el resto de factores presentan variaciones significativas de un caso a otro. Especialmente significativo es el caso de la grieta de borde simple, en el que la pieza es más flexible que en los otros dos casos analizados y por tanto el factor K_I^{mec} alcanza un valor mucho mayor, mientras que el factor K_{IV}^{elec} presenta el mismo valor que en las otras situaciones. Según estos resultados, parecería que el factor K_{IV}^{elec} depende de la forma y tamaño de la grieta pero no del contorno externo de la pieza que contiene a la grieta. Esto debe estar relacionado además con el hecho observado de que bajo la aplicación de carga eléctrica la pieza apenas sufre flexión, es decir, los desplazamientos según z , así como el potencial eléctrico, varían solo significativamente con respecto a z , salvo lógicamente la zona próxima a la grieta.

6. CONCLUSIONES

Se ha presentado una formulación mixta del MEC para problemas de fractura en materiales piezoeléctricos transversalmente isótropos que ha sido validada por comparación con resultados analíticos y numéricos previos. Se han presentado una serie de resultados numéricos que han servido para analizar algunos aspectos relacionados con la Mecánica de la Fractura en este tipo de materiales.

Para profundizar en estos aspectos, se hace necesario el estudio con un mayor número de configuraciones geométricas, estados de carga y distintos materiales.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido posible gracias a la financiación por parte del Ministerio de Educación y Ciencia (DPI-08147-C02-02).

REFERENCIAS

[1] Barnett, D. y Lothe, J., Dislocations and Line Charges in Anisotropic Piezoelectric Insulators, *Physica Status Solidi (b)*, 67, 105-111, 1975.

[2] Parton, V.Z., Fracture Mechanics of Piezoelectric Materials, *Acta Astronaut.*, 3, 671-683, 1976.

[3] Deeg, W.F., The analysis of dislocation, crack and inclusion problems in piezoelectric solids, *Thesis, Stanford University*, 1980.

[4] Domínguez, J., Ariza, M.P., y Gallego, R., Flux and Traction Boundary Elements without Hypersingular or Strongly Singular Integrals, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 48, 111-135, 2000.

[5] Ariza, M.P. y Domínguez, J., Boundary element formulation for 3-D transversely isotropic cracked bodies, *Int. J. Numer. Meth.*, 60, 719-753, 2004

[6] Ou, Z.C. y Chen, Y.H., Discussion of the crack face electric boundary condition in piezoelectric fracture mechanics, *Int J Fracture*, 123, L151-L155, 2003

[7] Wang, B.L. y Mai, Y.W., Impermeable crack and permeable crack assumptions, which one is more realistic?, *J. Appl. Mech.*, 71, 575-578, 2004.

[8] Solís, M., Modelo numérico tridimensional de sólidos transversalmente isótropos y piezoeléctricos figurados, *Tesis, Universidad de Sevilla*, 2007.

[9] Dunn, M.L. y Wienecke, H.A., Green's Functions for Transversely Isotropic Piezoelectric Solids, *Int. J. Solids and Structures*, 33, 4571-7581, 1996.

[10] Sanz, J.A., Solís, M. y Domínguez, J., Hypersingular BEM for piezoelectric solids: formulation and applications for Fracture Mechanics, *Comp. Mod. Eng. Sci.*, Aceptado para publicación.

[11] García-Sánchez, F., Estudio numérico de problemas de fractura en materiales anisótropos elásticos y piezoeléctricos, *Tesis, Universidad de Sevilla*, 2005.

[12] Ariza, M.P., Sáez, A., y Domínguez, J., A Singular Element for Three-dimensional Fracture Mechanics Analysis, *Engng. Anal. Bound. Elem.*, 20, 275-285, 1997.

[13] Suo, Z., Kuo, C.-M., Barnett, D. y Willis, J., Fracture mechanics for piezoelectric ceramics, *Journal Mech. Phys. Solids*, 40, 739-765, 1992.

[14] Folias, E.S., On the Three-Dimensional Theory of Cracked Plates, *J. Appl. Mech.*, 42, 663-674, 1975.

[15] Bazant, Z.P., y Estenssoro, L.F., Surface Singularity and Crack Propagation, *Int. J. Solids Structures*, 15, 405-426.