



TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO
TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

LAURA SUOMALAINEN
PAIKAN ESTIMOINTI KULMAMITTAUSTEN AVULLA

Diplomityö

Tarkastajat: Simo Ali-Löytty, Henri Nur-
minen, Robert Piché
Tarkastajat ja aihe hyväksytty
luonnontieteiden tiedekuntaneuvoston
kokouksessa 5.10.2016
Palautettu: 23.05.2017

TIIVISTELMÄ

LAURA SUOMALAINEN: Paikan estimointi kulmamittausten avulla

Tampereen teknillinen yliopisto

Diplomityö, 58 sivua

Toukokuu 2017

Teknis-luonnontieteellinen koulutusohjelma

Pääaine: Matematiikka

Tarkastajat: yliopistonlehtori Simo Ali-Löytty, tohtorikoulutettava Henri Nurminen, professori Robert Piché

Avainsanat: Kalmanin suodatin, Robusti suodatus, Partikkelisuodatin, kulmamittaus, normaalijakauma, von Mises–Fisher-jakauma

Tässä diplomityössä käsitellään paikannusta saapumiskulmamittausten avulla. Työssä esitellään yleisimpiä suodattimia, robusteja suodattimia ulkolaisten tarkasteluun ja niiden algoritmit. Suodatuksen taustateorian lisäksi työssä esitellään erilaisia jakaumia mittausten ja kohinan mallintamista varten.

Työ keskittyy kulmamittauksiin ja parhaan mahdollisen suodattimien ja jakaumien yhdistelmän löytämiseen sisätilapaikannuksessa. Suodatusta voidaan parantaa sovelluksilla, jotka huomioivat tilan rajoitteet, mittauksen signaalin voimakkuuden tai tilariippuvan virheen. Suodattimia testataan simuloituilla ja todellisilla kulmamittauksilla. Tosidata on mitattu TTY:n CivitLab laboratoriossa OptiTrack sovelluksen avulla. Suodattimien paikannustuloksia verrataan keskenään. Suodattimien tilamalleina testataan vakionopeusmallia ja pelkkään paikkavektoriin perustuvaa mallia.

Yleinen tapa esittää suuntamittaus on leveys- ja korkeussuunnan kulmamittaukset, joiden kohina on normaalijakautunut. Esitys ei useinkaan vastaa todellisuutta maapallon navoilla, jossa korkeusmittaus on nolla astetta. Monesti realistisempi mittausmalli saadaan, kun kohinaa kuvataan von Mises–Fisher-jakaumalla. Tällöin kulmamittauksiin liittyvä suunta ilmaistaan Eulerin kulmia käyttävällä von Mises–Fisher-jakauman yksikkövektorilla, jonka suunta perustuu mittausten keskiarvoiseen suuntaan.

Kulmien kääntämisestä johtuen paras mahdollinen suodattimen ja jakauman yhdistelmä paikan estimointiin on suodatin, joka olettaa von Mises–Fisher-jakautuneen mittauskohinan sisältävän datan. Mittausdatan sisältäessä ulkolaismittauksia von Mises–Fisher-jakautuneen mittauskohinan olettavat robustit suodattimet antavat paremman paikkaestimaatin kuin ei-robustit suodattimet.

ABSTRACT

LAURA SUOMALAINEN: Estimating the location with angle measurements

Tampere University of Technology

Diplomityö, 58 pages

May 2017

Master's Degree Programme in Science and Engineering

Major: Mathematics

Examiner: University Lecturer Simo Ali-Löytty, Doctoral student Henri Nurminen, professor Robert Piché

Keywords: Kalman filter, Robust filtering, Particle filter, angle measurement normal distribution, von Mises–Fisher distribution

In this thesis positioning is explored with angle of arrival measurements. Common filters in positioning, robust filters for detecting outliers and their algorithms are introduced. In addition to filtering theory different distributions to model measurements and noise presented.

In this thesis, the focus is on angle of arrival measurements and finding the best combination of filter and distribution suitable for indoor positioning. Filtering can be improved with applications which take restrictions of the space, signal strength or space dependent error into account. Filters are tested and compared to each other with simulated and real angle measurements. Real data is measured with OptiTrack application in CivitLab laboratory in Tampere University of Technology. Positioning results filters produce are compared with each other. Filters are tested with different state models, the constant velocity model and model containing position vector.

Common way to present directional measurement is to use azimuth and elevation angle measurements with normally distributed noise. This does not always correspond to reality when used to describe measurements in Poles where the elevation measurement is zero degrees. More realistic model is achieved with using von Mises–Fisher distribution to describe the noise. The direction related to angle of arrival measurements can be expressed with the unit vector of von Mises–Fisher distribution using Euler angles. Direction of the vector is based on the mean direction.

Due to flipping the angles the best possible combination of filter and distribution to estimate the place is a filter which assumes measurement data containing von Mises–Fisher distributed measurement noise. Robust filters assuming von Mises–Fisher distributed measurement noise is the best choice when measurements contain outliers.

ALKUSANAT

Tämä diplomityö on tehty Tampereen teknillisen yliopiston Matematiikan laboratoriolle. Työn sisältö muodostui osana dokumentointia.

Haluan kiittää työn ohjaajia yliopistonlehtoria Simo Ali-Löyttyä ja professori Robert Pichéa mielenkiintoisesta diplomityön aiheesta sekä avusta ja neuvoista työn tekemisessä. Kiitän kollegaani ja toista työn ohjaajaa Henri Nurmista avustamisesta etenkin Matlab koodien kanssa ja hyvistä neuvoista työn sisällöstä. Haluan myös kiittää TTY:n CivitLab laboratorion henkilökuntaa mittausten mahdollistamisesta ja tilojen käyttämisestä.

Erityisen kiitoksen haluan antaa minua työn aikana kannustaneelle perheelleni ja kaikille ystäväilleni. Ilman Rick Hämäläisen tukea ja hänen järjestämiään mielenkiintoisia ja virkistäviä vapaa-ajan metsäseikkailuja en olisi selvinnyt diplomityö urakasta. Suurin kiitos kuuluu kuitenkin äidilleni, joka on jaksanut uskoa minuun ja kannustaa puurtamaan niin koulun kuin diplomityön parissa ja tähtäämään korkealle.

Tampere, 18.05.2017

Laura Suomalainen

SISÄLLYS

1. Johdanto	1
2. Teoria	3
2.1 Yleinen ongelman asettelu	3
2.2 Jakaumat mittausten ja kohinan mallintajina	6
2.3 Kappa-sigma riippuvuus	10
2.4 Suunnan ja rotaation mallinnus	13
2.5 Suodattimia	16
2.5.1 Kalmanin suodatin	16
2.5.2 Laajennettu Kalmanin suodatin	18
2.5.3 Partikkelisuodatin	19
2.5.4 Robusti laajennettu Kalmanin suodatin	22
2.6 Konsistenttius	25
3. Sovellukset	27
3.1 Sisätilapaikannus	27
3.2 Bluetooth	28
3.3 Kalibrointi ja synkronointi	29
4. Simulaatiot ja testaus	30
4.1 Tila- ja mittausmallit	31
4.1.1 Tilamalli	31
4.1.2 Mittausmalli	32
4.1.3 Mittausmallien soveltaminen laajennetussa Kalmanin suodattimessa	34
4.2 Tulokset	36
4.2.1 Suodattimen ja mittauskohinan jakauma	38
4.2.2 Tilamallin valinta	45
4.2.3 Ulkolaisten suodatus	46
4.2.4 Mittausten kvantisointi	50

5. Yhteenveto	52
Lähteet	54

LYHENTEET

AOA	saapumiskulmamittaus (Angle of Arrival)
GNSS	maailmanlaajuinen satelliittijärjestelmä (Global Navigation Satellite System)
GBPF	Graafipohjainen partikkelisuodatin (Graph-Based Particle Filter)
GPS	maailmanlaajuinen paikallistamisjärjestelmä (Global Positioning System)
EKF	Laajennettu Kalmanin suodatin
KF	Kalmanin suodatin
LiDAR	laservalopulssien mittaamiseen perustuva kaukokartoituslaite (Light Detection and Ranging)
MATLAB	matrix laboratory, tietokoneohjelmisto
NIS	neliöity normalisoitu innovaatio (Normalized Innovation Squared)
PDF	Todennäköisyystiheysfunktio (Probability density function)
PF	Partikkelisuodatin
REKF	Robusti laajennettu Kalmanin suodatin
RKF	Robusti Kalmanin suodatin
RMSE	neliöllisen keskiarvon virhe (root mean square error)
TOA	saapumisaikamittaus (Time of Arrival)
WLAN	Langaton lähiverkko (Wireless Local Area Network)
SLAM	Paikannusmenetelmä, joka muodostaa tutkittavan alueen kartan samanaikaisesti (Simultaneous Localization and Mapping)

MERKINNÄT

a, b, c	skalaari
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$	vektori, satunnaismuuttuja
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$	matriisi
$\mathbf{x}_{0:k}$	joukko vektoreita $\{\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_k\}$
$\lim_{n \rightarrow \infty}$	raja-arvo, kun n lähenee ääretöntä
\int	integraali $\int_{-\infty}^{\infty}$
\int_A	integraali joukon A yli
\prod	tulo
ϕ, ψ, θ	Eulerin kulmia
θ	asiayhteydestä riippuen signaalin saapumiskulma tai Eulerin kulma
α	Gamma-jakauman parametri
\mathbf{A}_{k-1}	tilansiirtomatriisi ajanhetkeltä t_{k-1} ajanhetkelle t_k
$\text{atan}_2(x, y)$	$\arctan(\frac{x}{y})$, kahden muuttujan arkustangenttifunktio
\mathbf{c}_i	tukiaseman i orientaation kosinivektori $\cos(\mathbf{o}_i)$
$C(\kappa)$	normalisointivakio von Mises–Fisher-jakaumassa
\mathbf{d}	käyttäjän paikan ja tukiaseman paikan erotuksen yksikkövektori
\mathbf{D}	etäisyysmatriisi
Δt	$t_k - t_{k-1}$, aika-askeleen pituus
\det	determinantti
$\delta(\cdot)$	Diracin deltafunktio
E	odotusarvo
ϵ_{ν_k}	NIS (Normalized Innovation Squared) vapausastein ν_k
$\boldsymbol{\eta}_k$	normalisoitu innovaatio
$f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})$	satunnaismuuttujan \mathbf{x} tiheysfunktio
$f(\mathbf{x} \mathbf{y})$	ehdollinen tiheysfunktio
$\mathbf{f}(\cdot)$	tilamallin epälineaarinen tilansiirtofunktio
$\mathbf{F}_{\mathbf{x}}$	Jacobin matriisi funktiosta f muuttujan \mathbf{x} suhteen
$\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}$	osittaisderivaatta funktiosta f_i muuttujan x_j suhteen
$[\mathbf{F}]_{ij}$	matriisin \mathbf{F} alkio riviltä i ja sarakkeesta j
$\frac{\partial f_i(\mathbf{x}, \mathbf{q})}{\partial x_j} \Big _{\mathbf{x}=\mathbf{m}, \mathbf{q}=\mathbf{0}}$	sijoitus osittaisderivaattaan
Gamma	Gamma-jakauma
Γ	gammafunktio
$\mathbf{h}(\cdot)$	mittaussmallin epälineaarinen funktio
$\bar{\mathbf{h}}(\cdot)$	von Mises–Fisher jakautuneen mittaussmallin epälineaarinen funktio

\mathbf{H}_k	mittausmallimatriisi Kalmanin suodattimessa ajanhetkellä t_k
\mathbf{H}_x	Jacobin matriisi funktiosta h muuttujan \mathbf{x} suhteen
\mathbf{I}	Identiteettimatriisi
I	Besselin funktio
$L(\kappa)$	κ parametrin funktio
λ	Gamma-jakauman parametri
k	aika-askel
\mathbf{K}	Kalmanin vahvistus
$\mathbf{k}(\mathbf{u})$	muuttujien \mathbf{p} ja \mathbf{u} yhteyttä kuvaava funktio
$\mathbf{k}'(\cdot)$	funktion \mathbf{k} derivaatta
κ	keskittämisp parametri von Mises–Fisher-jakaumassa
\mathbf{m}_k	suodattimen odotusarvo ajanhetkellä t_k , posteriori-estimaatti
\mathbf{m}_k^-	suodattimen odotusarvon priori-estimaatti ajanhetkellä t_k
$\boldsymbol{\mu}$	asiayhteydestä riippuen joko odotusarvo tai keskiarvoinen suunta
n	vektorin, avaruuden dimensio
\mathbb{N}	luonnollisten lukujen joukko
N	asiayhteydestä riippuen partikkeleiden tai tukiasemien lukumäärä
\mathcal{N}	Normaalijakauma
ν	vapausaste
\mathbf{o}_i	tukiaseman i orientaatio
Ω	perusjoukko
\mathbf{p}	paikkavektori
\mathbf{P}	kovarianssimatriisi
P	asiayhteydestä riippuen joko todennäköisyys tai signaalin teho
π	painoarvojakauma
\mathbf{q}_k	tilamallin virhe ajanhetkellä t_k
\mathbf{Q}_k	tilamallin kohinan kovarianssimatriisi ajanhetkellä t_k
\mathbf{Q}_c	Brownin liikkeen β diffuusiomatriisi
$\bar{\mathbf{r}}$	von Mises–Fisher- jakautunut mittausvirhe
\mathbf{r}_k	mittausvirhe ajanhetkellä t_k
\mathbf{R}	asiayhteydestä riippuen joko mittauskohinan kovarianssimatriisi tai rotaatiomatriisi
\mathbf{R}_k	mittauskohinan kovarianssimatriisi ajanhetkellä t_k
\mathbf{R}_ϕ^x	rotaatiomatriisi x-akselin suhteen Eulerin kulmassa ϕ
\mathbb{R}	reaalilukujen joukko
\mathbf{s}_i	tukiaseman i paikkavektori
S	yksikköpallon pinta
\mathbf{S}	innovaatiokovarianssi
Student	Studentin t -jakauma

σ	keskihajonta, varianssi
$\sigma_{azi}, \sigma_{ele}$	kulmamittausten keskihajonta
σ_{meas}	mittauskohinan luomisessa käytetty kulmien keskihajonta
σ_{suod}	suodattimessa käytetty keskihajonta
$\Sigma, V(\mathbf{x})$	kovarianssimatriisi
$()^T$	transpoosi
t_k	ajanhetki askeleella k
t_ν	monen muuttujan t -jakauma vapausastein ν
tr	jälki (trace)
\mathbf{u}	von Mises–Fisher-jakautunut yksikkövektori
\mathbf{u}_{rot}	rotatoitu yksikkövektori
\mathbf{v}	asiayhteydestä riippuen joko innovaatiovektori tai nopeusvektori
Var	varianssi
VMF	von Mises–Fisher-jakauma
$w_k^{(i)}$	partikkelin i paino ajanhetkellä t_k
x_i	vektorin \mathbf{x} i :s alkio
\mathbf{x}_k	tilavektori ajanhetkellä t_k
$x \in B$	x on joukon B alkio
χ^2	khi-neliön jakauma
\mathbf{y}_k	mittausvektori ajanhetkellä t_k , mittaukset ajanhetkellä t_k
$\mathbf{y}_{azi}, \mathbf{y}_{ele}$	leveys- ja korkeussuunnan kulmamittaukset
\mathbf{y}_{tosi}	todellinen paikkavektori
\mathbf{z}_i	tukiaseman i orientaation sinivektori $\sin(\mathbf{o}_i)$

1. JOHDANTO

Kehittyvän teknologian myötä yhä tarkempi ja tarkempi paikannus on mahdollista. Satelliittipaikannus on yleisin paikannusmenetelmä, mutta siirryttäessä sisätiloihin seinät ja rakennusten rakenteet häiritsevät ja jopa estävät signaalin välitystä. Maailmanlaajuisista satelliittijärjestelmistä GNSS (Global Navigation Satellite System) ehkä tunnetuin GPS (Global Positioning System) paikannus ei toimi sisätiloissa tarpeeksi tarkasti, joten on käytettävä muita paikannustapoja kuten magneettisten virtausten signaaleja, WLAN tukiasemien signaalien voimakkuuksia tai Bluetooth tukiasemien saapumiskulmamittauksia, jotka perustuvat lyhyen kantaman verkko-tekniikkaan. [6, s. 54] [39, s. 2-7]

Sisätilapaikannuksen tutkimus on lisääntynyt huomattavasti etenkin kasvavan kysynnän myötä ja kiinnostuksesta hyödyntää paikannusta markkinoimisessa. Paikannusta käyttäviä sovelluksia ovat muun muassa ihmisten tai robottien paikan kertovat paikantimet, potilaiden paikannus sairaalassa, sokeiden opastimet, lasten tai vanhusten paikantaminen ja mainosten kohdistaminen paikan perusteella. [23]

Tässä diplomityössä tarkastellaan robustien ja ei-robustien laajennetun Kalmanin suodattimen ja partikkelisuodattimien toimintaa ja sovelletaan niitä paikannuksessa. Sovelluksissa tarkastellaan mittauskohinan jakauman, tilamallin ja mittausten kvantisoinnin merkitystä paikannustulokseen. Tässä työssä kehitetään staattinen paikkarakaisumalli saapumiskulmamittauksille, jotka kertovat kohteen sijainnin reaaliaikaisesti. Algoritmi päättää kohteen sijainnin tukiasemien mittaamien saapumiskulmien perusteella.

Työssä oletetaan, että tukiasemien sijainnit ja orientaatiot ovat tunnetut. Aina näin ei ole, vaan sijainti ja orientaatio ratkaistaan erikseen kalibroimalla [24] tai yhtäaikaan SLAM (Simultaneous Localization and Mapping) tyyppisellä ratkaisulla [35]. Virhemalli pyritään muodostamaan virhemallin mittauksista ja vertaamaan saadun datan kohinan (virheen) jakaumaa kirjallisuudesta löytyviin jakaumiin.

Luvussa 2 esitellään suodattimien matemaattista taustaa ja käytettävien suodattimien ja siloittimien algoritmit. Luvussa esitellään mittausten ja niiden kohinoiden

mallintamiseen käytettäviä erilaisia jakaumia, joita vertaillaan keskenään. Etenkin von Mises–Fisher-jakauman hyödyntäminen saapumiskulmamittausten mallintajana mahdollistaa orientaation ilmaisemisen yksikkövektorimuodossa. Normaalijakauman ja von Mises–Fisher-jakauman välille johdetaan yhteys keskihajonnan σ ja κ -parametrin kautta. Lisäksi luvussa tarkastellaan suodattimien robustisuutta ja konsistenttiutta hyvän suodattimen ominaisuutena.

Luvussa 3 tarkastellaan sisätilapaikannuksen tekniikoita, sisätilapaikannuksessa käytettäviä sovelluksia ja paikannuksessa huomioon otettavia asioita. Sovellukset parantavat paikannuksen lopputulosta huomioimalla tilan määrittämät rajoitteet. Luvussa 4 asetetaan mittausongelma, esitellään mittaus- ja tilamallit ja esitetään tosidadatan keräämistä varten suoritettut mittaukset. Suodattimien toimintaa testataan simulaatioilla, jossa käytetään simuloitua kohinaista dataa sekä todellista kohinatonta mittausaineistoa. Suodattimia vertaillaan keskenään neliöllisen keskiarvon virheen ja konsistenttiuden kautta.

Algoritmit on toteutettu Matlab-ohjelmistolla ja testattu simulaatioilla. Simuloitu data on luotu perustuen todelliseen paikannusmittausdataan, joka on mitattu TTY:n CivitLab laboratoriossa OptiTrack sovelluksen avulla. Todelliseen kohinattomaan dataan lisätään kohinaa normaalijakaumasta ja von Mises–Fisher-jakaumasta.

2. TEORIA

Lineaarisisille ja epälineaarisisille mittauksille käytetään erilaisia malleja ja tehdään suodatuksia, jotta tutkittava ongelma yksinkertaistuu ja saadaan ratkaistavaan muotoon. Malleja muodostettaessa on otettava huomioon sen sisältämä virhe. Tässä luvussa käydään läpi tilaa estimoivien suodattimien ja siloittimien matemaattista taustaa ja esitellään algoritmit, jolla ne toimivat.

2.1 Yleinen ongelman asettelu

Staattisessa tilaratkaisussa useasta samanaikaisesti tehdystä mittauksesta lasketaan yksittäinen tilaestimaatti riippumatta aiemmista tai tulevista mittauksista ja estimaateista. Estimaatin lisäksi arvioidaan sen tarkkuutta ja mahdollista virhettä. Tilaa ja mittauksia kuvataan malleilla, jotka muodostetaan seuraavien määritelmien avulla.

Merkitään aikasarjoja vektorina $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots\}$ ja kohinaa sisältäviä mittauksia $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots\}$. Havaittujen mittausten $\mathbf{y}_{1:k} = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k\}$ perusteella arvioidaan piilossa olevia tiloja $\mathbf{x}_{0:k} = \{\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_k\}$. Stokastinen prosessi on kokoelma satunnaismuuttujia \mathbf{x}_k , $k \geq 0$, joka saa arvonsa tila-avaruudesta \mathbb{R}^n . Alaindeksi k viittaa ajanhetkeen t_k . Jatkuva aikaisessa prosessissa $k \in [0, \infty)$, ja diskreetti aikaisessa $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Stokastista prosessia kutsutaan Markovin prosessiksi, jos tieto menneistä mittauksista ei vaikuta tulevaan muuten kuin nykyhetken kautta. Määritellään Markovin prosessi tiheysfunktioiden avulla. [7, s. 23-24]

Määritelmä 2.1.1. ([5, s. 33],[31, s. 119-120]) *Satunnaismuuttuja $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ on jatkuva satunnaismuuttuja mikäli on olemassa ei negatiivinen tiheysfunktio $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \geq 0$, jonka integraali*

$$\int f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 1 \quad (2.1)$$

ja tapahtuman A todennäköisyys saadaan laskettua integraalilla

$$P\{\mathbf{x} \in A\} = \int_A f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \quad (2.2)$$

Merkitään tiheysfunktiota tästä eteenpäin muodolla $f(\mathbf{x})$.

Määritelmä 2.1.2. ([31, s. 120]) Määritellään satunnaismuuttujan \mathbf{x} ehdollinen tiheysfunktio ehdolla \mathbf{y} kaavalla

$$f(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \frac{f(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{f(\mathbf{y})}, \quad (2.3)$$

missä $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ on yhteisjakauman tiheysfunktio. Määritelmän 2.1.1 kaavoihin sijoittamalla tällä voidaan laskea ehdollisia todennäköisyyksiä

$$P\{\mathbf{x} \in A | \mathbf{y} = \mathbf{y}_0\} = \int_A f(\mathbf{x}|\mathbf{y}_0) d\mathbf{x}. \quad (2.4)$$

Määritelmä 2.1.3. ([7, s. 23-24]) Stokastista prosessia $\{\mathbf{x}_k, k \in \mathbb{N}\}$ kutsutaan Markovin prosessiksi, jos ehdollinen tiheysfunktio

$$f(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}) = f(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) \quad (2.5)$$

kaikilla $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Määritelmä 2.1.4. Stokastinen prosessi $\{\mathbf{x}_k, k \in \mathbb{N}\}$ on valkoinen prosessi, jos se on Markovin prosessi ja sille pätee

$$f(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) = f(\mathbf{x}_k) \quad (2.6)$$

kaikilla $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Näiden määritelmien avulla voidaan tutkittava ongelma muotoilla matemaattisesti. Tila ja mittaukset mallinnetaan stokastisina prosesseina $\{\mathbf{x}_k, k \in \mathbb{N}\}$ ja $\{\mathbf{y}_{k+1}, k \in \mathbb{N}\}$ alkuehdolla \mathbf{x}_0 . Stokastisena differenssiyhtälönä ilmaistuna tila esitetään muodossa

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{q}_k), \quad (2.7)$$

missä \mathbf{f}_k on jatkuvasti derivoituva funktio ja \mathbf{q}_k tilamallin kohina. Vastaavasti mittausyhtälö

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{r}_k), \quad (2.8)$$

missä \mathbf{h}_k on jatkuvasti derivoituva funktio ja \mathbf{r}_k mittausmallin kohina. [2]

Optimaalisen suodatuksen voidaan ajatella olevan statistinen inversio ongelma, jossa tuntematon muuttuja on vektori aikasarjoja $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots\}$, jotka havaitaan kohinaa sisältävien mittausten $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots\}$ aikana. Statistisen inversion tarkoitus on arvioida piilossa olevat tilat $\mathbf{x}_{0:k} = \{\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_k\}$ havaittujen mittausten $\mathbf{y}_{1:k} =$

$\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k\}$ perusteella. [39, s. 8-9] Ilmiön ja mittausten välistä suhdetta kuvataan todennäköisyysjakaumalla. Suodatus hyödyntää vain aikaisemmin tai juuri kyseisellä ajanhetkellä mitattuja mittauksia laskeakseen tilan estimaatin kyseisellä ajanhetkellä. Näitä kahta vaihetta kutsutaan ennustus ja päivitys vaiheiksi. Edeltävää mittausta päivitetään yksi mittaus kerrallaan. Suodattimen jakauma

$$f(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}), \quad (2.9)$$

missä tila \mathbf{x}_k ehdollistetaan koko mittaushistorialla $\mathbf{y}_{1:k}$ ajanhetkeen t_k asti eli jakauma riippuu ajanhetkeen k asti saaduista mittauksista. Ennustettu tiheysfunktio on muotoa

$$f(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}). \quad (2.10)$$

Suodatuksen alkujakauma eli priorin ei riipu mallin mittauksista tai muista tiloista, koska tilaan vaikuttavia mittauksia ei ole vielä tehty, joten

$$f(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0 | \mathbf{y}_{1:0}). \quad (2.11)$$

Rekursiivisessa laskennassa ratkaistava ongelma jaetaan useampaan alkuperäisen ongelman kanssa samanmuotoiseen, mutta yksinkertaisempaan osaan rekursiosäännön avulla. Rekursiivinen laskenta onnistuu, kun jokaisella aika-askeleella suoritetaan vakiomäärä laskutoimituksia. Lisäksi tarvitaan perustapaus, joka osataan laskea ilman rekursiota. Suodatuksessa tämä tapaus on nyt alkujakauma eli priorin. [39, s. 51-54] Stokastisen prosessin rekursiivisuus toteutuu Määritelmän 2.1.3 Markovin ominaisuuden kautta.

Ehdollisten tiheysfunktioiden löytämiseksi hyödynnetään Bayesin kaavaa, jonka johdosta löytyy lähteestä [13, s. 25]. Kaava ilmaisee kaikkien tilojen posteriori-jakauman mittausten avulla. Bayesin kaavan avulla tilan päivitysaskel (2.10) saadaan muotoon [10, s. 6]

$$f(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) = \frac{f(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) f(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1})}{\int f(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) f(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) d\mathbf{x}_k}, \quad (2.12)$$

missä $f(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)$ on mittausten todennäköisyysmalli. Kaavan (2.9) tiheysfunktio toteuttaa rekursion, jossa tilan \mathbf{x}_k ennustusaskel on Chapman-Kolmogorovin kaavan mukaan [10, s. 6]

$$f(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) = \int f(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) f(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}_{1:k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}. \quad (2.13)$$

2.2 Jakaumat mittausten ja kohinan mallintajina

Mittauksia ja niiden kohinoita mallinnetaan erilaisten jakaumien avulla, joista muutama esitellään seuraavaksi. Mittauskohinaan sovitetaan sitä parhaiten kuvaava jakauma. Kun tarkastellaan riittävän suurta määrää satunnaismuuttujia ja niiden summia, niiden jakauma lähestyy normaalijakaumaa keskeisen raja-arvolauseen mukaisesti. [11, s. 62]

Määritelmä 2.2.1. ([31, s. 70, 231]) Satunnaismuuttujan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ odotusarvo on $E(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$ ja kovarianssimatriisi $V(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Oletetaan, että $\exists \boldsymbol{\mu}$, $\exists \boldsymbol{\Sigma}$ ja $\boldsymbol{\Sigma}$ on positiivisesti definiitti. Satunnaismuuttuja on normaalijakautunut, jos sen tiheysfunktio on

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det(\boldsymbol{\Sigma})}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}. \quad (2.14)$$

Merkitään tällöin

$$\mathbf{x} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}). \quad (2.15)$$

Määritelmä 2.2.2. ([30, s. 86]) Satunnaismuuttuja $x \in \mathbb{R}$ on Gamma-jakautunut parametrein α ja λ , jos sen tiheysfunktio on

$$f(x) = \frac{(\lambda x)^{\alpha-1} \lambda e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}, \quad x > 0, \quad (2.16)$$

missä gammafunktio Γ lasketaan kaavalla

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad \alpha > 0. \quad (2.17)$$

Merkitään

$$x \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda). \quad (2.18)$$

Gamma-jakauman odotusarvo on

$$E(x) = \frac{\alpha}{\lambda} \quad (2.19)$$

ja varianssi

$$\text{Var}(x) = \frac{\alpha}{\lambda^2}. \quad (2.20)$$

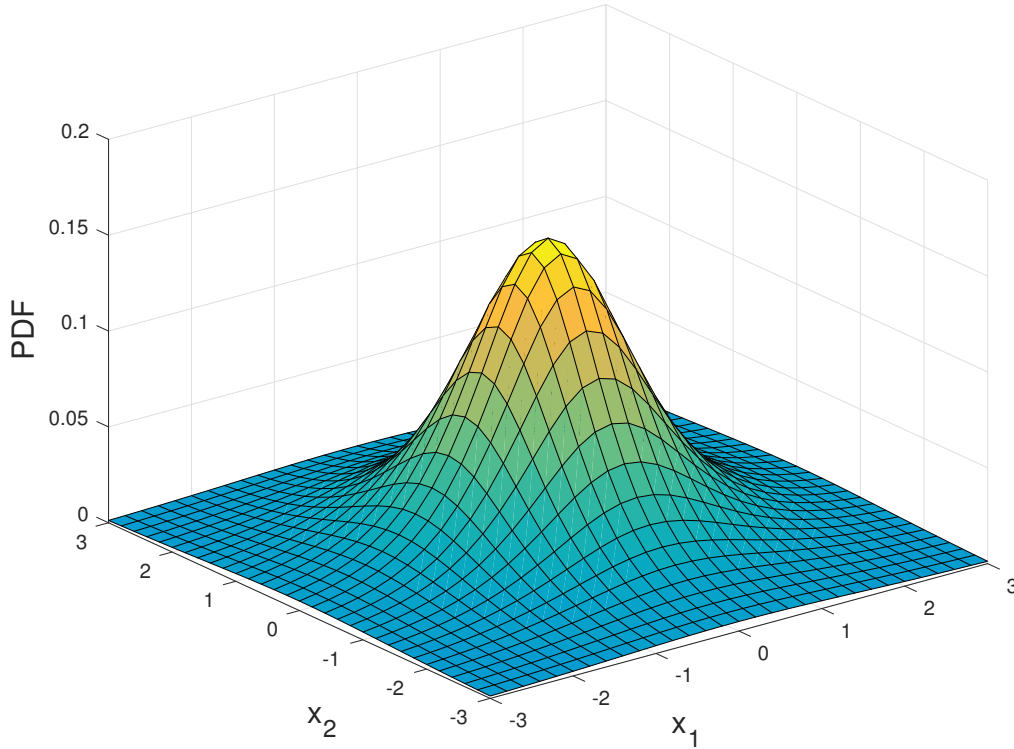
Määritelmä 2.2.3. ([27, s. 1-9]) Satunnaismuuttuja $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ on monen muuttujan t -jakautunut vapausastein ν , jos sen tiheysfunktio on

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma((\nu+n)/2)}{(\pi\nu)^{n/2} \Gamma(\nu/2) \det(\boldsymbol{\Sigma})^{1/2}} \frac{1}{(1 + \frac{1}{\nu}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}))^{(\nu+n)/2}}, \quad (2.21)$$

missä n on muuttujan \mathbf{x} dimensio ja Γ on gammafunktio. Merkitään

$$\mathbf{x} \sim t_\nu(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \nu). \quad (2.22)$$

Kuvassa 2.1 on kahden muuttujan \mathbf{x}_1 ja \mathbf{x}_2 t -jakauma.



Kuva 2.1 Kahden muuttujan \mathbf{x}_1 ja \mathbf{x}_2 t -jakauman tiheysfunktion kuvaaja vapausasteella $\nu = 3$.

Jos dimensio $n = 1$, $\boldsymbol{\mu} = 0$ ja $\boldsymbol{\Sigma} = 1$, jakaumaa kutsutaan Studentin t -jakaumaksi.

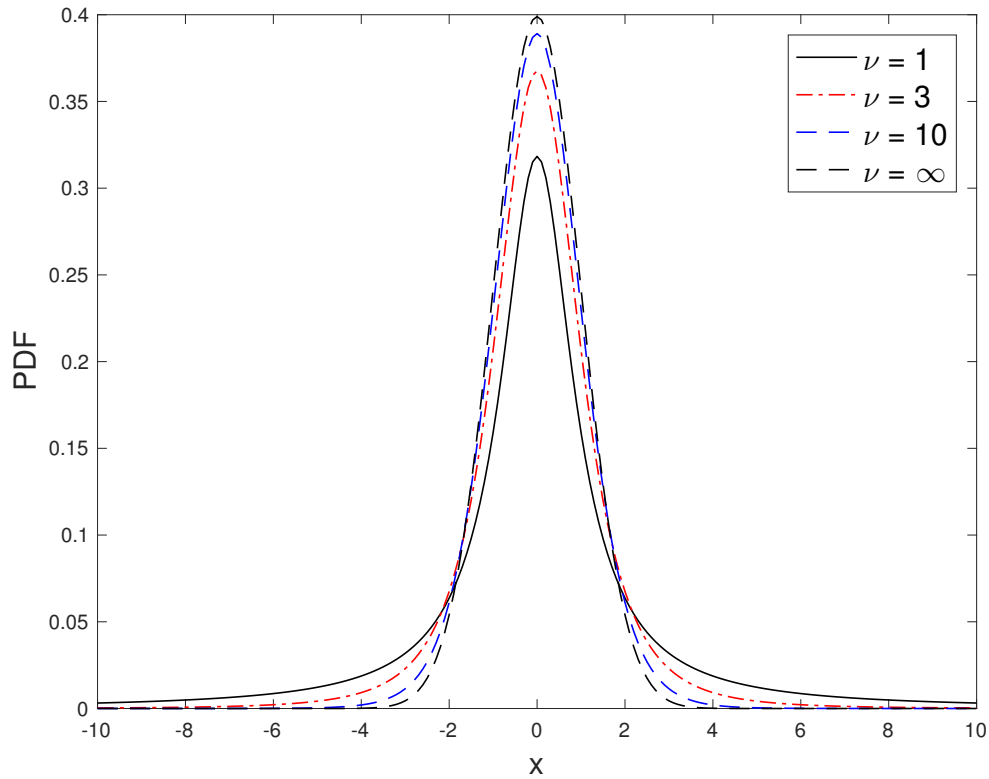
Määritelmä 2.2.4. ([27, s. 1-9]/[9, s. 49]) Satunnaismuuttuja $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ on Studentin t -jakautunut vapausastein ν , jos sen tiheysfunktio on

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma((\nu + 1)/2)}{\sqrt{\pi\nu}\Gamma(\nu/2)} \frac{1}{(1 + (\mathbf{x}^2/\nu))^{(\nu+1)/2}}, \quad (2.23)$$

missä Γ on gammafunktio. Merkitään

$$\mathbf{x} \sim \text{Student}(\nu). \quad (2.24)$$

Kuvassa 2.2 on esitetty studentin t -jakauman tiheysfunktion kuvaajia eri vapausasteilla ν .



Kuva 2.2 Studentin t -jakauman tiheysfunktion kuvaajia eri vapausasteilla ν ja normaalijakauman tiheysfunktion kuvaaja mustalla katkoviivalla piirrettynä.

Vapausaste $\nu > 0$ säätelee Studentin t -jakauman paksuhäntäisyyttä. Mitä pienempi vapausaste on, sitä leveämpi jakauman häntä on. Kun vapausaste lähenee ääretöntä, jakauma lähestyy Määritelmän 2.2.1 mukaista normaalijakaumaa.

von Mises–Fisher-jakauma soveltuu käytettäväksi, kun puhutaan muuttujista \mathbb{R}^n avaruudessa eli vektoreista, joilla on suunta. Muuttujia tarkastellaan yksikköpallolla \mathbb{R}^n avaruudessa. [15, s. 362]

Määritelmä 2.2.5. ([15, s. 381]) Yksikkövektori $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ on von Mises–Fisher-jakautunut, jos sen tiheysfunktio on muotoa

$$f(\mathbf{x}) = C(\kappa)e^{\kappa\boldsymbol{\mu}^T\mathbf{x}}, \quad (2.25)$$

missä $C(\kappa)$ on normalisointivakio

$$C(\kappa) = \frac{\kappa^{n/2-1}}{(2\pi)^{n/2} I_{n/2-1}(\kappa)}, \quad (2.26)$$

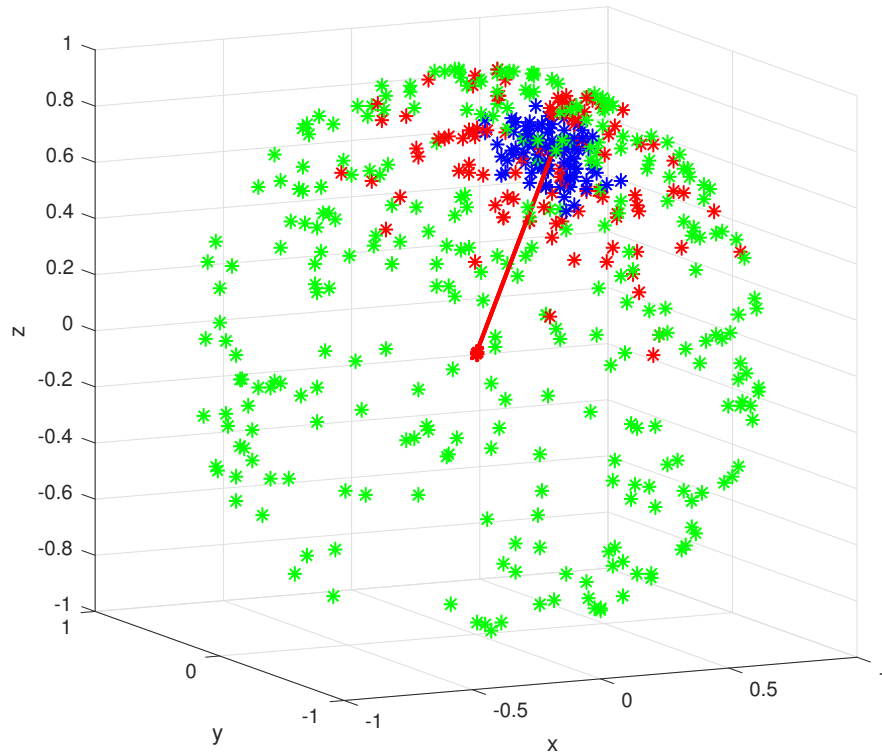
$\kappa \geq 0$ keskittämisp parametri, I ensimmäisen lajin muunneltu Besselin funktio, $\boldsymbol{\mu}$ yksikkövektorina ilmaistu keskiarvoinen suunta. Merkitään

$$\mathbf{x} \sim \text{VMF}(\boldsymbol{\mu}, \kappa). \quad (2.27)$$

Jos kaavassa (2.26) $n = 3$, niin normalisointivakio saa muodon

$$C(\kappa) = \frac{\kappa}{4\pi \sinh(\kappa)}. \quad (2.28)$$

Keskittämisp parametri κ ilmaisee kuinka vahvasti tiheysfunktion (2.25) mukaan piirretyt yksikkövektorit ovat keskittyneet keskiarvoiseen suuntaan $\boldsymbol{\mu}$. [4] Mitä suurempi κ on, sitä vahvemmin mittaukset ovat keskittyneet keskiarvoiseen suuntaan ja sitä tarkempi mittausta on. Kuvassa 2.3 on esitetty kolmesta eri von Mises–Fisher-jakaumasta luotuja pisteitä yksikköpallolla. Keskiarvoinen suunta $\boldsymbol{\mu}$ on jakaumissa sama, mutta κ -parametri saa kolme eri arvoa, 1, 10 ja 100. Kuvasta nähdään, että vihreät pisteet ovat jakautuneet laajemmalle alueelle yksikköpallon pinnalle, kun taas punaiset ja siniset pisteet ovat keskittyneet punaisella piirretyn vektorin osoittamaan suuntaan. Arvoilla $\kappa > 0$ jakauma on yksihuippuinen ja arvolla $\kappa = 0$ tasajakauma yksikköpallolla. [15, s. 363]



Kuva 2.3 Pisteitä kolmesta eri von Mises–Fisher-jakaumasta, joissa on eri κ -parametrin arvot (vihreä: $\kappa = 1$, punainen: $\kappa = 10$, sininen: $\kappa = 100$). Pisteitä on generoitu 10000 kappaletta. Punaisella piirretty vektori kuvaa keskiarvoista suuntaa μ .

Kappaleessa 2.4 tarkastellaan yksikkövektoriesitystä ja mittauksen suuntaa tarkemmin.

2.3 Kappa-sigma riippuvuus

Normaalijakautuneen kohinan keskihajonnan ja von Mises–Fisher-jakauman κ parametrin välille pyritään löytämään yhteys. Jotta jakaumia voidaan vertailla keskenään, on normaalijakautunut muuttuja esitettävä von Mises–Fisher-jakautuneen muuttujan avulla ja normaalijakaumalle on muodostettava von Mises–Fisher-jakauman kaltainen tiheysfunktio. Tässä kappaleessa osoitetaan, että von Mises–Fisher-jakauma on normaalijakauman rajoittuma yksikköpallolle.

Johdetaan seuraavaksi normaalijakauman keskihajonnan σ ja parametrin κ välistä

riippuvuutta kuvaava yhtälö. Olkoon n -dimensioinen vektori \mathbf{x} normaalijakautunut

$$\mathbf{x} \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\mu}, \frac{1}{\kappa} \mathbf{I}\right), \quad (2.29)$$

jolloin $\Sigma = \frac{1}{\kappa} \mathbf{I}_{n \times n}$. Oletetaan, että $\|\boldsymbol{\mu}\| = 1$. Tällöin normaalijakauman tiheysfunktion Määritelmästä 2.2.1 saadaan

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \left(\frac{1}{\kappa}\right)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\kappa(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})} \\ &= L(\kappa) e^{-\frac{1}{2}\kappa(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

missä $L(\kappa)$ on κ parametrissa riippuva funktio. Jos rajoitutaan yksikköpallon pinnalle $\|\mathbf{x}\| = 1$, niin

$$f(\mathbf{x}) = L(\kappa) e^{-\frac{1}{2}\kappa(1-2\boldsymbol{\mu}^T\mathbf{x}+1)} = L(\kappa) e^{\kappa(-1+\boldsymbol{\mu}^T\mathbf{x})}. \quad (2.31)$$

Normalisoimalla tämä tiheysfunktio yksikköpallolle havaitaan, että saadaan Määritelmän 2.2.5 tiheysfunktio parametrein $\boldsymbol{\mu}$ ja κ

$$f(\mathbf{x}) = C(\kappa) e^{(\kappa\boldsymbol{\mu}^T\mathbf{x})} \propto e^{(\kappa\boldsymbol{\mu}^T\mathbf{x})}. \quad (2.32)$$

Täten normaalijakauman tiheysfunktio saadaan kehitettyä von Mises–Fisher-jakauman tiheysfunktion muotoon ja normaalijakauman rajoittuma yksikköpallolle on von Mises–Fisher-jakauma.

Vektorin $\boldsymbol{\mu}$ sisältämät kulmat kuvaavat nyt von Mises–Fisher-jakauman keskiarvoisen suuntavektorin ja normaalijakauman akselien kulmien erotusta. Asettamalla korkeussuuntaan osoittavan akselin ja suuntavektorin $\boldsymbol{\mu}$ välinen kulma mahdollisimman pieneksi yksikkövektorin ja suuntavektorin pistetulo sievenee

$$\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{x} = \cos(\alpha), \quad (2.33)$$

missä α edustaa mittausvektorin ja keskiarvoista suuntavektorin välistä kulmaa. [15, s. 362-364] Taylorin sarja kosinille on

$$\cos(\alpha) \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24}. \quad (2.34)$$

Koska kulmat ovat pieniä, voidaan approksimoida

$$\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{x} \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2} \quad (2.35)$$

Sijoitetaan approksimaatio kaavaan (2.32) ja sisällytetään vakio tiheysfunktion vakiotermin $C(\kappa)$, jolloin

$$f(\mathbf{x}) \propto e^{(\kappa\boldsymbol{\mu}^T\mathbf{x})} \approx e^{(\kappa-\kappa\frac{\sigma^2}{2})} \propto e^{\left(-\frac{\sigma^2}{2\frac{1}{\kappa}}\right)}. \quad (2.36)$$

Vertaamalla saatua tiheysfunktioita normaalijakauman tiheysfunktioon huomataan, että tiheysfunktio on normaalijakauman tiheysfunktio ja kapa ja keskihajonnan riippuvuudeksi saadaan

$$\kappa = \frac{1}{\sigma^2}. \quad (2.37)$$

Tarkastellaan verrannon pätevyyttä korkeus- ja leveyssuuntaa kuvaaville kulmille. Korkeussuunnan kulman θ odotusarvo lasketaan kaavalla

$$\mu_\theta = E(\theta(\mathbf{x})) = \int_S \theta(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (2.38)$$

missä S on yksikköpallon pinta, funktio f on von Mises–Fisher-jakauman tiheysfunktio (2.25) ja kulma $\theta(\mathbf{x})$ [41, s. 204-205, 298-299]

$$\theta(\mathbf{x}) = \text{atan}_2(\|x_{1:2}\|, -x_3). \quad (2.39)$$

Merkintä atan_2 kuvaa tässä kahden muuttujan arkustangenttifunktiota, joka tarkoittaa muuttujien osamäärän arkustangenttia eli

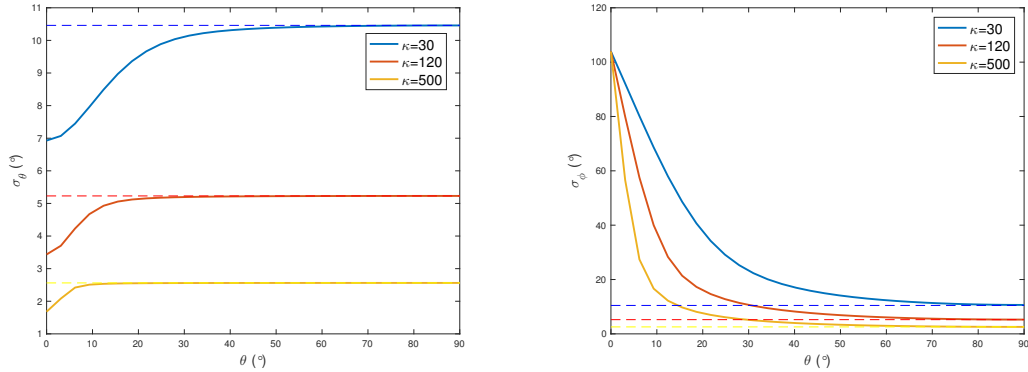
$$\text{atan}_2(y, x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & x < 0 \text{ ja } y \geq 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & x < 0 \text{ ja } y < 0, \\ +\frac{\pi}{2} & x = 0 \text{ ja } y > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0 \text{ ja } y < 0, \\ \text{ei määritelty} & x = 0 \text{ ja } y = 0. \end{cases} \quad (2.40)$$

Funktion arvot on määritelty välille $[-\pi, \pi]$. [18, s. 64]

Leveyssuunnan kulmalle ϕ lasketaan odotusarvot vastaavasti. Standardipoikkeama eli keskihajonta σ kuvaa keskimääräistä poikkeamaa kaavan (2.38) odotusarvosta. Keskihajonta on varianssin neliöjuuri [41, s. 151]

$$\sigma_\theta^2 = \text{Var}(\theta(\mathbf{x})) = \int_S (\theta(\mathbf{x}) - \mu_\theta)^2 f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (2.41)$$

Kuvassa 2.4 on esitetty keskihajonta kulman funktiona numeerisesti laskettuna kolmella eri tiheysfunktioille annetuilla κ arvoilla kulmille θ ja ϕ . Katkoviivalla esitetyt kuvaajat kuvaavat keskihajontoja, joissa σ on laskettu kaavan (2.37) mukaan.



(a) Korkeussuunnan kulman θ keskihajonta eri κ arvoilla. (b) Leveysuunnan kulman ϕ keskihajonta eri κ arvoilla.

Kuva 2.4 Korkeutta ja leveyttä kuvaavien kulmien keskihajonnat von Mises–Fisher-jakauman tiheysfunktioilla laskettuna eri κ arvoilla. Katkoviivalla esitetyt kuvaajat on laskettu käyttämällä yhtälöä $\kappa = \frac{1}{\sigma^2}$. Kulmien ja keskihajontojen yksikkö on aste.

Kuvasta nähdään, että mitä suurempi κ , sitä pienempi on keskihajonta korkeus- ja leveysuunnan kulmilla. Korkeussuunnan kulmille verranto (2.37) pätee paremmin kuin leveysuunnan kulmille, mikä havaitaan vertaamalla katkoviivalla esitettyjä kuvaajia samanvärisiin yhtenäisen viivan kuvaajiin. Kuvassa 2.4(a) verrannon avulla muodostetut kuvaajat osuvat paremmin tiheysfunktion avulla muodostettuihin kuvaajiin kuin kuvassa 2.4(b). Alle 10 asteen leveysuunnan kulmille keskihajonta on suuri riippumatta parametrin κ arvosta. Isoilla kulman θ arvoilla verranto (2.37) pätee hyvin, mutta pienillä kulmilla niin kutsuttu Pohjoisnapa ongelma aiheuttaa vääristymää. Kun korkeussuunnan kulma on lähellä nollaa astetta, leveysuunnan kulma ϕ voi saada minkä tahansa arvon, jonka takia sen keskihajonta nousee kulman θ lähestyessä arvoa nolla astetta. Korkeussuunnan kulma on aina positiivinen, joten sen keskihajonta pienenee nollan lähellä.

2.4 Suunnan ja rotaation mallinnus

Muuttujat von Mises–Fisher-jakaumassa, jossa κ parametri ilmaisee mittauksen tarkkuuden, ovat yksikkövektoreita \mathbb{R}^n avaruudessa. [15, s. 362] Jos muuttujat ovat kulmamittauksia, jotka koostuvat korkeus- ja leveysuunnan kulmamittauksista, eteen voi tulla Pohjoisnapa ongelma. Korkeussuunnassa minimi kulma voi olla nolla

astetta, jolloin leveysuuntainen mittaus voi olla asteluvultaan mitä tahansa nollan ja 360 asteen väliltä. Mittausten muuttaminen yksikkövektoreiksi ja tarkasteleminen von Mises–Fisher-jakauman kautta poistaa pohjoisnapa ongelman, sillä vektoreilla on suunta.

von Mises–Fisher-jakauman soveltaminen suodattimisissa, jotka olettavat mittaukset normaalijakautuneiksi vaatii enemmän lisätyötä verrattuna normaalijakauman käyttöön. Tätä tarkastellaan tarkemmin simulaatioiden yhteydessä kappaleessa 4.1.3.

Mittausvektori sisältää kulmamittaukset

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_{azi} \\ y_{ele} \end{bmatrix}, \quad (2.42)$$

jossa y_{azi} ja y_{ele} ovat leveys- ja korkeussuuntaiset kulmamittaukset joko radiaaneina tai asteina. Mittaukset on muutettava yksikkövektoreiksi, jotta tarkastelu von Mises–Fisher-jakaumalla onnistuu. Pallokoordinaattien määritelmään perustuen [17, s. 325-326] asteina annetut kulmamittaukset kolmiulotteisena yksikkövektorina ilmaistuna on

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \cos(y_{azi}) \cdot \sin(y_{ele}) \\ \sin(y_{azi}) \cdot \sin(y_{ele}) \\ -\cos(y_{ele}) \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

Yksikkövektori täytyy pyöräyttää laboratorion koordinaatistoon sopivaksi, jotta mittalaitteiston ja laboratorion koordinaatistot ovat samat. Muunnos tehdään rotaatiomatriisilla kiertämällä x -, y - ja z -akseleiden suhteen.

Rotaatio tapahtuu kahden koordinaatiston välillä. Rotaatiokulmaa kahden koordinaatiston koordinaattiakselin suhteen kutsutaan Eulerin kulmaksi. Kolmen koordinaattiakselin suhteen tehtävä rotaatio kuvataan Eulerin kulmien, eli kolmen kulman yhdistelmänä. [28, s. 83] Esitellään seuraavaksi Eulerin teoreema.

Teoreema 2.4.1 (Eulerin teoreema). *([28, s. 83]) Kaksi toisistaan riippumatonta ortonormaalista koordinaatistoa voidaan yhdistää sarjalla koordinaattiakselien suhteen tehtyjä rotaatioita, joita voi olla enintään kolme. Rotaatioiden sarja muodostaa rotaation, missä peräkkäiset rotaatiot ovat eri akselien suhteen.*

Koordinaattiakselin suhteen tehtyä rotaatiota kutsutaan alkeisrotaatioksi. Esimerkiksi alkeisrotaatiomatriisia x -akselin suhteen Eulerin kulmassa ϕ merkitään \mathbf{R}_ϕ^x . [46, s. 162] Mikä tahansa rotaatio voidaan määritellä kolmena kulmana, jotka kuvaavat rotaatioita sovittujen akselien suhteen siten, että peräkkäiset koordinaattiakselit ovat eri. Rajoite saman akselin suhteen kiertämisestä sallii silti useamman

erilaisen akselien rotaatiojärjestyksen. Niiden kaikkien lopputuloksen on oltava sama. Esimerkiksi akselijärjestys xyz tarkoittaa rotaatiota ensin x -akselin suhteen, jonka jälkeen tehdään rotaatio uuden z -akselin suhteen ja tämän jälkeen uusimman y -akselin suhteen. [28, s. 84]

Rotaatio voidaan määrittää kiertämällä koordinaatistoa tai pistettä koordinaatistossa. Kiertosuunta määritellään oikean käden säännöllä eli myötäpäivään akselin positiiviseen suuntaan katsottaessa. Akselien ja pisteiden rotaatiot ovat päinvastaiset keskenään. Määritelmän tulkinta näkyy rotaatiomatriisissa kierron merkissä [28, s. 77]. Lopullinen rotaatiomatriisi muodostuu akselien rotaatiomatriisien eli alkeisrotaatioiden matriisien tulosta

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_\phi^x \mathbf{R}_\psi^z \mathbf{R}_\theta^y, \quad (2.44)$$

missä ϕ , ψ ja θ ovat Eulerin kulmia akselien x , z ja y suhteen. Alkeisrotaatiomatriisit koordinaatiston rotaatioille ovat muotoa [28, s. 86]

$$\mathbf{R}_\phi^x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

$$\mathbf{R}_\theta^y = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

ja

$$\mathbf{R}_\psi^z = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Muuttamalla matriisien sinifunktioiden merkkiä saadaan rotaatio vastakkaiseen suuntaan [43, s. 357].

Eulerin kulmissa ongelmia aiheuttavat epäjatkuvuuskohdat. Kulma nolla astetta ja 360 astetta voidaan tulkita samaksi kulmaksi, jolloin kulman arvo tekee hyppäyksen. Tarkastellaan tapausta, jossa Eulerin kulma $\theta = 0$. Tällöin $\cos(0) = 1$ ja $\sin(0) = 0$ ja rotaatio (2.46) sievenee muotoon

$$\mathbf{R}_\theta^y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.48)$$

Matriisi on identiteettimatriisi, joten sillä ei ole vaikutusta lopullisen rotaatiomatriisiin (2.44) tulossa.

Kun kulma $\psi = \pm\frac{\pi}{2}$, z -akselin suhteen kierrettävä x -akseli kääntyy alkuperäisen y -akselin suuntaiseksi tai vastakkaiseen suuntaan. Näin ollen yksi vapausaste häviää. Vapausasteen häviämisestä käytetään termiä *Gimbal lock* (kardaanikehyksen lukko). Kolmesta samankeskeisestä akselistä muodostuvassa systeemissä rotaation kautta on päädytty tilanteeseen, jossa kaksi akselia on yhdensuuntaisia keskenään ja muodostavat vain yhden akselin. Kyseinen ongelma voi esiintyä kompassien, gyroskooppien ja nivelten mekanismeissa [43, s. 357], ja se voidaan välttää pitämällä kaksi akselia keskenään ortonormaaleina neljännen akselin avulla, valitsemalla sopiva rotaatiojärjestys tai ottamalla käyttöön kvaterniot [1, 40].

Kvaterniot ovat eräs ratkaisu epäjatkuvuusongelmaan. Kvaternioesityksessä vaaditaan neljä parametria, johon sisältyvät yksikkövektorin muotoinen mittaus ja Eulerin kulma [46, s. 162]. Rotaatio yksikkövektorin määräämän akselin suhteen Eulerin kulmassa voidaan ilmaista yksinkertaisesti kvaterniolla, sillä rotaatioakseleita ei tarvitse ennalta määrätä kvaterniorotaatiota varten [1].

2.5 Suodattimia

Systeemin tilaa mitataan ajan kuluessa ja tarkoitus on arvioida tilan estimaattia mittausten perusteella ottaen huomioon mahdolliset virheet. Suodattimien avulla mittauksista poistetaan virheen aiheuttamaa kohinaa ja lasketaan tilan arvio odotusarvona.

2.5.1 Kalmanin suodatin

Kalmanin suodatin julkaistiin vuonna 1960 ja se johdettiin pienimmän neliösumman menetelmästä. Suodatin laskee tilalle parhaan mahdollisen estimaatin. [45] Julkaisussa kuvattiin rekursiivinen ratkaisu optimaaliselle diskreetti aika lineaariselle suodatusongelmalle. [39, s. 7]

Suodatuksen ideana on hyödyntää tietoa tiheysfunktion (2.9) normaalijakautuneisuudesta ja ratkaista edeltävän jakauman odotusarvo ja kovarianssi rekursiivisesti. Diskreettiä prosessia mallinnetaan tila- ja mittausmallin differenssiyhtälöillä ajanhetkillä t_k . Yleisestä tilamallista (2.7) Kalmanin suodattimen tilamalliksi saadaan

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{q}_{k-1}, \quad (2.49)$$

missä \mathbf{x}_k on tilavektori ajanhetkellä t_k , \mathbf{A}_{k-1} tilansiirtomatriisi satunnaismuuttujalta \mathbf{x}_{k-1} satunnaismuuttujalle \mathbf{x}_k ja \mathbf{q}_{k-1} on Gaussinen eli normaalijakautunut tilamallin virhe

$$\mathbf{q}_{k-1} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_{k-1}). \quad (2.50)$$

Tässä \mathbf{Q}_{k-1} on tilamallin kohinan kovarianssimatriisi ajanhetkellä t_k .

Kalmanin suodattimen yleinen mittausmalli on erikoistapaus kaavan (2.8) mallista

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{r}_k, \quad (2.51)$$

missä \mathbf{y}_k mittaukset sisältävä mittausvektori, \mathbf{H}_k on mittausmallimatriisi, joka kuvaa tilan ja mittauksien välistä yhteyttä, ja \mathbf{r}_k on normaalijakautunut mittausvirhe

$$\mathbf{r}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_k). \quad (2.52)$$

Mittauskohinan avulla tarkkaillaan paikan täsmällisyyttä.

Kalmanin suodattimen malli vaatii, että mittaukset liittyvät lineaarisesti tiloihin. Lineaarisuudesta ja kohinoiden gaussisuudesta seuraa suodatuksen tiheydet

$$f(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) \simeq \mathcal{N}(\mathbf{x}_k | \mathbf{m}_k, \mathbf{P}_k), \quad (2.53)$$

$$f(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) \simeq \mathcal{N}(\mathbf{x}_k | \mathbf{m}_k^-, \mathbf{P}_k^-), \quad (2.54)$$

$$f(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) \simeq \mathcal{N}(\mathbf{y}_k | \mathbf{H}_k \mathbf{m}_k^-, \mathbf{S}_k). \quad (2.55)$$

Suodattimen alkuehtona on

$$\mathbf{x}_0 \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}_0, \mathbf{P}_0), \quad (2.56)$$

missä \mathbf{m}_0 on alkutilan jakauman odotusarvo ja \mathbf{P}_0 kovarianssimatriisi.

Kalmanin suodatuksen prioriestimaatit ovat tilalle \mathbf{m}_k^- ja kovarianssimatriisille \mathbf{P}_k^- . Mittauksen estimaateista \mathbf{m}_k ja \mathbf{P}_k ovat posterioriestimaatteja, \mathbf{v}_k innovaatiovektori, \mathbf{S}_k innovaatiokovarianssi ja \mathbf{K}_k Kalmanin vahvistus. Innovaatio kuvaa ennustetun ja oikean mittauksen välistä erotusta. Kalmanin suodattimen johto löytyy lähteen [2] liitteestä A ja Algoritmi 1 kuvaa suodattimen toiminnan.

Algoritmi 1 Kalmanin suodatin

-
- 1: **procedure** KF
 - 2: Alustetaan arvot $\mathbf{m}_0^- = \mathbf{m}_0$, $\mathbf{P}_0^- = \mathbf{P}_0$ ja $k = 1$.
 - 3: Priori-tilan päivitys;
 - 4: $\mathbf{m}_k^- = \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{m}_{k-1}$
 - 5: $\mathbf{P}_k^- = \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1}$
 - 6: Posteriori-tilan päivitys:
 - 7: $\mathbf{v}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k\mathbf{m}_k^-$
 - 8: $\mathbf{S}_k = \mathbf{H}_k\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k$
 - 9: $\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^-\mathbf{H}_k^T\mathbf{S}_k^{-1}$
 - 10: $\mathbf{m}_k = \mathbf{m}_k^- + \mathbf{K}_k\mathbf{v}_k$
 - 11: $\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k\mathbf{S}_k\mathbf{K}_k^T$
 - 12: Asetetaan $k = k + 1$ ja palataan kohtaan 3.
 - 13: **end procedure**
-

2.5.2 Laajennettu Kalmanin suodatin

Laajennettu Kalmanin suodatin on nimensä mukaisesti laajennus Kalmanin suodatimesta, sillä se sopii myös epälineaaristen suodatusongelmien ratkaisemiseen. Tilan ja mittauksen funktiot ovat epälineaarisia ja virheiden jakaumat ovat usein normaali-jakautuneita. Lähtökohtana on jakauman approksimoiminen Gaussin jakaumana linearisoinnin kautta. Näitä epälinearisointeja approksimoidaan Taylorin sarjojen avulla. Verrattuna muihin epälineaarisiin suodattimiin, laajennettu Kalmanin suodatin on suhteellisen yksinkertainen sen suorituskykyyn nähden. [39, s. 69-72]

Jos tilan ja mittauksen virhe oletetaan additiiviseksi, laajennetun Kalmanin suodattimen tila- ja mittaussmalli ovat muotoa

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{q}_{k-1}, \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{r}_k,\end{aligned}\tag{2.57}$$

missä \mathbf{x}_k on tilavektori ajanhetkellä t_k , \mathbf{y}_k mittaukset sisältävä mittausvektori, \mathbf{f} tilan ja \mathbf{h} mittauksen epälineaarinen funktio, \mathbf{q}_{k-1} Gaussinen eli normaalijakautunut tilamallin virhe ja \mathbf{r}_k on Gaussinen mittaussvirhe. Jos virheet ovat ei-additiivisia, on laajennetun Kalmanin suodattimen tila- ja mittaussmalli muotoa

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{q}_{k-1}), \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{r}_k).\end{aligned}\tag{2.58}$$

Algoritmissa 1 esitettyyn Kalmanin suodattimeen täytyy tehdä muutoksia, jotta estimaateissa otetaan huomioon kaavoissa (2.57) ja (2.58) esitettyjen epälineaaristen funktioiden \mathbf{f} ja \mathbf{h} vaikutukset. Estimaattien muodostamiseen tarvitaan funktioiden Jacobin matriiseja $\mathbf{F}_x(\mathbf{m})$, $\mathbf{F}_q(\mathbf{m})$, $\mathbf{H}_x(\mathbf{m})$ ja $\mathbf{H}_r(\mathbf{m})$, joiden alkiot ovat

$$\begin{aligned} [\mathbf{F}_x(\mathbf{m})]_{ij} &= \left. \frac{\partial f_i(\mathbf{x}, \mathbf{q})}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{m}, \mathbf{q}=\mathbf{0}} \\ [\mathbf{F}_q(\mathbf{m})]_{ij} &= \left. \frac{\partial f_i(\mathbf{x}, \mathbf{q})}{\partial q_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{m}, \mathbf{q}=\mathbf{0}} \\ [\mathbf{H}_x(\mathbf{m})]_{ij} &= \left. \frac{\partial h_i(\mathbf{x}, \mathbf{r})}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{m}, \mathbf{r}=\mathbf{0}} \\ [\mathbf{H}_r(\mathbf{m})]_{ij} &= \left. \frac{\partial h_i(\mathbf{x}, \mathbf{r})}{\partial r_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{m}, \mathbf{r}=\mathbf{0}} \end{aligned} \quad (2.59)$$

Funktioiden \mathbf{f} ja \mathbf{h} on oltava derivoituvia. [39, s. 72] Laajennetun Kalmanin suodattimen toiminta ei-additiiviselle kohinalle on esitetty Algoritmissa 2.

Algoritmi 2 Laajennettu Kalmanin suodatin

- 1: **procedure** EKF
 - 2: Alustetaan arvot $\mathbf{m}_0^- = \mathbf{m}_0$, $\mathbf{P}_0^- = \mathbf{P}_0$ ja $k = 1$.
 - 3: Priori-tilan päivitys;
 - 4: $\mathbf{m}_k^- = \mathbf{f}(\mathbf{m}_{k-1}, \mathbf{0})$
 - 5: $\mathbf{P}_k^- = \mathbf{F}_x(\mathbf{m}_{k-1})\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{F}_x^T(\mathbf{m}_{k-1}) + \mathbf{F}_q(\mathbf{m}_{k-1})\mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{F}_q^T(\mathbf{m}_{k-1})$
 - 6: Posteriori-tilan päivitys:
 - 7: $\mathbf{v}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\mathbf{m}_k^-, \mathbf{0})$
 - 8: $\mathbf{S}_k = \mathbf{H}_x(\mathbf{m}_k^-)\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}_x^T(\mathbf{m}_k^-) + \mathbf{H}_r(\mathbf{m}_k^-)\mathbf{R}_k\mathbf{H}_r^T(\mathbf{m}_k^-)$
 - 9: $\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^-\mathbf{H}_x^T(\mathbf{m}_k^-)\mathbf{S}_k^{-1}$
 - 10: $\mathbf{m}_k = \mathbf{m}_k^- + \mathbf{K}_k\mathbf{v}_k$
 - 11: $\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k\mathbf{S}_k\mathbf{K}_k^T$
 - 12: Asetetaan $k = k + 1$ ja palataan kohtaan 3.
 - 13: **end procedure**
-

2.5.3 Partikkelisuodatin

Edeltävässä Kalmanin suodattimessa tehtiin Gaussisia approksimaatioita, jotka eivät sovellu tapauksiin, joissa suodatettava jakauma sisältää monta huippua eli on multimodaalinen tai jotkin tilavektoreista ovat diskreettejä. Näissä tapauksissa partikkelisuodatin on eräs toimiva ratkaisu. [39, s. 116] Partikkelisuodatus perustuu

Monte Carlo simulaatioon, jossa posteriorijakaumaa arvioidaan partikkeleilla, joihin liittyy tilan vektori ja paino. Täydellisessä Monte Carlo approksimaatiossa on N kappaletta riippumatonta satunnaista muuttujaa

$$\mathbf{x}^{(i)} \sim f(\mathbf{x}|\mathbf{y}_{1:T}), i = 1, \dots, N. \quad (2.60)$$

Odotusarvoa

$$E[g(\mathbf{x})|\mathbf{y}_{1:T}] = \int g(\mathbf{x})f(\mathbf{x}|\mathbf{y}_{1:T}) d\mathbf{x}, \quad (2.61)$$

missä g on integroituva ja äärellisenä olemassaoleva funktio ja $f(\mathbf{x}|\mathbf{y}_{1:T})$ on posterioritodennäköisyystiheys, voidaan nyt arvioida

$$E[g(\mathbf{x})|\mathbf{y}_{1:T}] \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(\mathbf{x}^{(i)}). \quad (2.62)$$

Näytteitä eli muuttujia ei yleensä voi generoida suoraan posteriori-jakaumasta sen monimutkaisen funktionaalisen muodon takia. Kun tunnetaan mittausmalli $f(\mathbf{y}_{1:T}|\mathbf{x})$ ja priorin $f(\mathbf{x})$, voidaan painotuspoiminnalla muodostaa posteriorijakauman approksimaatio. Painotuspoiminnan todistus on esitetty lähteessä [39, s. 117-119].

Approksimoidaan jakaumaa painoarvojakaumalla $\pi(\mathbf{x}|\mathbf{y}_{1:T})$, josta näytteet voidaan generoida

$$\mathbf{x}^{(i)} \sim \pi(\mathbf{x}|\mathbf{y}_{1:T}), i = 1, \dots, N. \quad (2.63)$$

Jakaumaa $\pi(\mathbf{x}|\mathbf{y}_{1:T})$ kutsutaan ehdokasjakaumaksi, jonka avulla kaava (2.61) voidaan kirjoittaa uudelleen muotoon

$$E[g(\mathbf{x})|\mathbf{y}_{1:T}] = \int g(\mathbf{x}) \frac{f(\mathbf{x}|\mathbf{y}_{1:T})}{\pi(\mathbf{x}|\mathbf{y}_{1:T})} \pi(\mathbf{x}|\mathbf{y}_{1:T}) d\mathbf{x}, \quad (2.64)$$

Näytteiden generoimisen jälkeen lasketaan ei-normalisoidut painot

$$w^{*(i)} = \frac{f(\mathbf{y}_{1:T}|\mathbf{x}^{(i)})f(\mathbf{x}^{(i)})}{\pi(\mathbf{x}^{(i)}|\mathbf{y}_{1:T})} \quad (2.65)$$

ja normalisoidut painot

$$w^{(i)} = \frac{w^{*(i)}}{\sum_{j=1}^N w^{*(j)}} \quad (2.66)$$

Posteriori odotusarvon approksimaatio voidaan ilmaista normalisoidun painon avulla

$$E[g(\mathbf{x})|\mathbf{y}_{1:T}] \approx \sum_{i=1}^N w^{(i)} g(\mathbf{x}^{(i)}) \quad (2.67)$$

ja posteriori todennäköisyyksiheyden approksimaatio voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(\mathbf{x}|\mathbf{y}_{1:T}) \approx \sum_{i=1}^N w^{(i)} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(i)}), \quad (2.68)$$

missä δ on Diracin deltafunktio. [39, s. 118-120]

Tilan tarkastelua varten tietyillä ajanhetkillä k otetaan käyttöön sekventiaalinen painotuspoiminta, jossa hyödynnetään Monte Carlo approksimaatiota. Tällöin tilan posteriorijakauma $f(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k})$ voidaan ratkaista rekursiivisesti. Tutkitaan nyt joukkoa painotettuja partikkeleita $\{(w_k^{(i)}, \mathbf{x}_k^{(i)}) : i = 1, \dots, N\}$. Funktiolle g voidaan laskea odotusarvo ajanhetkillä k painon $w_k^{(i)}$ avulla

$$\mathbb{E}[g(\mathbf{x}_k)|\mathbf{y}_{1:k}] \approx \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} g(\mathbf{x}_k^{(i)}). \quad (2.69)$$

Jos yhtälön 2.69 funktioksi g valitaan Diracin deltafunktio $\delta(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^{(i)})$, saadaan

$$f(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k}) \approx \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} \delta(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^{(i)}). \quad (2.70)$$

Sekventiaalisen painotuspoiminnan algoritmin muodostus on esitetty lähteessä [39, s. 120-122].

Jotta vältetään tilanteelta, jossa usean partikkelin merkitys on pieni eli painot ovat nolliä tai lähes nolliä, suoritetaan uudelleennäytteistys. Uudelleennäytteistyksessä luodaan N kappaletta uusia partikkeleita painojen määrittelemästä diskreetistä jakaumasta ja korvataan vanhat partikkelit uusilla. Näin suurimman painon partikkelit monistetaan ja pienen painon partikkelit poistetaan, jolloin hyvälaatuiset mittaukset otetaan huomioon. [32] [39, s. 123-124]

Uudelleennäytteistys ei kuitenkaan toimi tilanteessa, jossa tilamallin mittauskohina on hyvin pieni. Tällöin jakaumasta generoidut partikkelit ovat arvoltaan yhtä suuria ja uudelleennäytteistys vaihe vain kopioi suuren painon partikkeleita. Lopputuloksena on joukko identtisiä partikkeleita. Kyseistä ongelmaa voidaan vähentää käyttämällä uudelleennäytteistys-siirto (resample-move) algoritmia säännöllistämistä tai MCMC (Markov chain Monte Carlo) askelia. [10, s. 117-125] [39, s. 126]

N kappaleen partikkelin partikkelisuodattimen (bootstrap filter) algoritmi voidaan ilmaista seuraavasti:

Algoritmi 3 Partikkelisuodatin

- 1: **procedure** PF
 - 2: Asetetaan $k = 0$.
 - 3: Generoidaan N kappaletta muuttujia $\mathbf{x}_0^{(i)}$ priorijakaumasta $\mathbf{x}_0^{(i)} \sim f(\mathbf{x}_0)$, ja asetetaan paino $w_0^{(i)} = \frac{1}{N}$ kaikille $i = 1 \dots, N$.
 - 4: Asetetaan $k = k + 1$.
 - 5: Generoidaan partikkelit $\mathbf{x}_k^{(i)}$ tilamallin jakaumasta $f(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)})$.
 - 6: Jos mittaus on olemassa, lasketaan painot $w_k^{(i)}$ yhtälön (2.65) mukaisesti käyttäen ehdokasjakaumana tilamallin jakaumaa ja normalisoidaan painot siten, että $\sum_{i=1}^N w_k^{(i)} = 1$.
 - 7: Suoritetaan uudelleennäytteistys.
 - 8: Lasketaan posteriorijakauman odotusarvo $\mathbf{m}_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w(\mathbf{x}_k^{(i)}) \mathbf{x}_k^{(i)}$ ja kovarianssimatriisi.
 - 9: Jos $k < T$ palataan kohtaan 4. Jos $k = T$, suodatus lopetetaan.
 - 10: **end procedure**
-

Algoritmin 3 antama odotusarvo \mathbf{m}_k on tilan estimaatti.

Partikkelisuodattimeen voidaan tuoda mukaan sisätilan pohjapiirustus, jolloin tila voidaan rajoittaa pohjapiirustuksen mukaan. Ratkaisu on toimiva etenkin sisätiloissa tapahtuvassa paikannuksessa, jossa karttainformaatiota voidaan hyödyntää. Graafipohjaisessa partikkelisuodattimessa (GBPF, Graph-Based Particle Filter) sisätilaa mallinnetaan karttarakenteella, jossa huoneita, hissejä ja portaikkoja kuvaataan solmupisteillä, jotka on yhdistetty toisiinsa linkkien avulla. Solmupisteiden tiheys vaikuttaa paikannuksen tarkkuuteen sekä laskenta aikaan. [26, s. 14-15]

2.5.4 Robusti laajennettu Kalmanin suodatin

Robustisuus tarkoittaa mittauksiin aiheutuvien häiriöiden tarkastelua ja huomioon ottamista laskennassa. Robustissa suodatuksessa ulkolaisen, eli mittauksista poikkeavan yksittäisen mittauksen, vaikutus estimaattiin on pieni. [37, s. 11-12] Suodatuksessa mittausmallin mittausvirheelle käytetään jotain muuta jakaumaa kuin Gaussista normaalijakaumaa. Normaalijakauma ei ole toimiva tilanteessa, jossa mittauksiin sisältyy mittauspisteitä, joiden mittausvirhe poikkeaa huomattavasti muiden mittauksien mittausvirheistä. [29] Näitä mittauspisteitä kutsutaan ulkolaisiksi ja ne johtuvat usein mittauksessa tapahtuneesta virheestä tai väärän signaalin tulkitsemisesta mittaukseksi, esimerkiksi signaalin heijastuminen. Robusti suodatin ottaa ulkolaiset huomioon joko poistamalla, korjaamalla tai painottamalla niitä. [37, s. 12]

Tarkastellaan artikkelissa [38] esitettyä robustia Kalmanin suodatinta (RKF). Suodatin tutkii normalisoidun innovaation neliön posterioriodotusarvoa. Ulkolaisia sisältäviä mittauksia mallinnetaan paksuhäntäisillä jakaumilla kuten t -jakaumilla. Robustissa suodatuksessa mittausmallin mittausvirheen jakauma on paksuhäntäisempi kuin normaalijakauma. Tällöin yksittäisen muista huomattavasti poikkeavan mittauspisteen eli ulkolaisen vaikutus estimaattiin on pieni.

Artikkelissa mittausvirhe on monen muuttujan t -jakautunut

$$\mathbf{r} \sim t_\nu(\mathbf{h}(\mathbf{x}_k), \mathbf{R}_k, \nu). \quad (2.71)$$

vapausastein ν . Kun vapausaste lähenee ääretöntä, jakauma lähestyy normaalijakaumaa

$$\mathcal{N}(\mathbf{h}(\mathbf{x}_k), \mathbf{R}_k). \quad (2.72)$$

Käytetyn epälineaarisen tilamallin jakauma tilansiirrolle on

$$f(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}), \mathbf{Q}_k) \quad (2.73)$$

ja mittaustodennäköisyydelle

$$f(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) = t_\nu(\mathbf{h}(\mathbf{x}_k), \mathbf{R}_k, \nu). \quad (2.74)$$

Monen muuttujan t -jakauma voidaan esittää Gaussin mikstuurina normaalijakautuneiden komponenttien yhdistelmänä gammajakautuneen muuttujan λ_k avulla

$$f(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) = \int f(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, \lambda_k) f(\lambda_k) d\lambda_k, \quad (2.75)$$

missä

$$f(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, \lambda_k) = \mathcal{N}(\mathbf{h}(\mathbf{x}_k), \frac{1}{\lambda_k} \mathbf{R}_k) \quad (2.76)$$

$$f(\lambda_k) = \text{Gamma}\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}\right) \quad (2.77)$$

Funktiot \mathbf{f} ja \mathbf{h} ovat epälineaarisia. [38] [33, s. 14-18]

Monen muuttujan t -jakautumaa käytetään, kun mittaukset ovat riippuvia toisistaan. Tällöin ulkolaisen havaitseminen yhdellä mittauksella tulkitsee kaikki samanaikaisesti tehdyt mittaukset ulkolaisiksi. Jos halutaan, että mittaukset ovat riippumattomia toisistaan, käytetään Studentin t -jakaumaa. Tällöin esimerkiksi korkeusmittauksessa havaittu ulkolainen ei aiheuta leveysmittauksen tulkitsemista ulkolaiseksi.

Artikkelissa [38] esitetty robusti Kalmanin suodatin (RKF) voidaan muuttaa laa-

jennetuksi robustiksi Kalmanin suodattimeksi (REKF) luvun 2.5.2 teorian pohjalta. Mittauksia on N kappaletta, joista jokaiselle suoritetaan suodatus. Posterioritilaa iteroidaan l kertaa yhden ajanhetken aikana, ja samalla tunnistetaan ulkolaiset mittauksista. Odotusarvoa

$$E(\lambda_k) = \frac{n + \nu}{((\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\mathbf{m}_k, \mathbf{0}))^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\mathbf{m}_k, \mathbf{0})) + \text{tr}(\mathbf{H}_x^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}_x \mathbf{P}_k)) + \nu} \quad (2.78)$$

käytetään ulkolaisten tunnistamisessa asettamalla odotusarvolle jokin raja, jonka arvon ylittäessä mittaus tulkitaan ulkolaiseksi. Koska λ_k on gammajakautunut, voidaan odotusarvoa verrata gammajakaumaan ja valita todennäköisyys, jolla arvon on kuuluttava jakaumaan. Jos odotusarvo ei kuulu jakaumaan, mittaus on ulkolainen. Mittaus sopii huonosti prioriin, jos erotus

$$\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\mathbf{m}_k, \mathbf{0}) \quad (2.79)$$

on suuri. Tähän perehdytään tarkemmin konsistenttiuden yhteydessä luvussa 2.6. Kun kaavan (2.78) odotusarvo $E(\lambda_k)$ saa pienen arvon, mittauksen kovarianssista riippuva termi

$$\frac{1}{E(\lambda_k)} \mathbf{H}_r(\mathbf{m}_k) \mathbf{R}_k \mathbf{H}_r^T(\mathbf{m}_k) \quad (2.80)$$

saa suuren arvon. Potentiaalinen ulkolainen saa pienen painon, kun taas todenmukaiset mittaukset saavat suuremman painon. Näin ulkolaiset suljetaan pois tarkastelusta, eivätkä ne vääristä lopputulosta.

Odotusarvo on skalaari, sillä korkeus- ja leveysuuntaiset mittaukset eivät riipu toisistaan eikä tällöin mittauksissa esiintyviä ulkolaisia havaita yhtäaikaan leveys- ja korkeussuunnassa. Ensimmäisellä iteraatiokierroksella $E(\lambda_k) = 1$, jolloin suodatin vastaa luvun 2.5.2 laajennettua Kalmanin suodatinta. [33, s. 18] Robustin laajennettun Kalmanin suodattimen algoritmin 4 esityksessä muuttuja n on mittausvektorin \mathbf{y}_k dimensio, ja ν vapausaste. [38]

Algoritmi 4 REKF

```

1: procedure SUODATIN
2: Alustetaan arvot  $\mathbf{m}_0^- = \mathbf{m}_0$  ja  $\mathbf{P}_0^- = \mathbf{P}_0$ .
3:   for  $k = 1 : T$  do ▷ Priori-tilan päivitys
4:      $\mathbf{m}_k^- = \mathbf{f}(\mathbf{m}_{k-1}, \mathbf{0})$ 
5:      $\mathbf{P}_k^- = \mathbf{F}_x(\mathbf{m}_{k-1})\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{F}_x^T(\mathbf{m}_{k-1}) + \mathbf{F}_q(\mathbf{m}_{k-1})\mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{F}_q^T(\mathbf{m}_{k-1})$ 
6:      $E(\lambda_k) = 1$ 
7:     for  $i = 1 : l$  do ▷ Posteriori-tilan päivitys
8:        $\mathbf{v}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\mathbf{m}_k^-, \mathbf{0})$ 
9:        $\mathbf{S}_k = \mathbf{H}_x(\mathbf{m}_k^-)\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}_x^T(\mathbf{m}_k^-) + \frac{1}{E(\lambda)}\mathbf{H}_r(\mathbf{m}_k^-)\mathbf{R}_k\mathbf{H}_r^T(\mathbf{m}_k^-)$ 
10:       $\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^-\mathbf{H}_x^T(\mathbf{m}_k^-)\mathbf{S}_k^{-1}$ 
11:       $\mathbf{m}_k = \mathbf{m}_k^- + \mathbf{K}_k\mathbf{v}_k$ 
12:       $\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k\mathbf{S}_k\mathbf{K}_k^T$ 
13:       $E(\lambda_k) = \frac{n+\nu}{((\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\mathbf{m}_k, \mathbf{0}))^T\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\mathbf{m}_k, \mathbf{0})) + \text{tr}(\mathbf{H}_x^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}_x\mathbf{P}_k)) + \nu}$ 
14:    end for
15:  end for
16: end procedure

```

Jos halutaan tutkia useampaa mittausta kerralla, mittausmalli on tällöin t -jakaumien tulo

$$f(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k) = \prod_{i=1}^n t_{\nu}(\mathbf{y}_k|\mathbf{h}_{k,i}(\mathbf{x}), \mathbf{r}_{i,k}, \nu_i). \quad (2.81)$$

Odotusarvo $E(\lambda_k)$ on tässä tapauksessa n -dimensioinen vektori. [38]

2.6 Konsistenttius

Suodatin on konsistentti, jos ennustetut virheet ovat vähintään yhtä suuria kuin todelliset virheet. Estimaattori on konsistentti, jos suodattimen antama ennuste estimaattorin kovarianssimatriisille on suurempi tai yhtä suuri kuin todellinen kovarianssimatriisi. Estimaatin on oltava harhaton ja sen kovarianssimatriisin suodattimen laskema. Konsistenttius on hyvän estimaattorin ominaisuus. Eräs tapa saada suodattimesta konsistentti on arvioida virheet yläkanttiin. Epäkonsistenttius voi aiheuttaa suodattimen hajoamisen.

Suodattimen konsistenttius voidaan tarkistaa NIS (normalized innovation squared) testillä. [5, s. 239] Normalisoitu innovaatio määritellään

$$\boldsymbol{\eta}_k = \mathbf{S}_k^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\nu}_k, \quad (2.82)$$

missä

$$\boldsymbol{\nu}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\mathbf{m}_k) \quad (2.83)$$

ja

$$\mathbf{S} = \mathbf{H}(\mathbf{m}_k) \mathbf{P}_k \mathbf{H}^T(\mathbf{m}_k) + \mathbf{R}. \quad (2.84)$$

Neliöity normalisoitu innovaatio (NIS) on muotoa

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\nu_k} = \boldsymbol{\nu}_k^T \mathbf{S}_k^{-1} \boldsymbol{\nu}_k = \boldsymbol{\eta}_k^T \boldsymbol{\eta}_k, \quad (2.85)$$

jossa suodattimen innovaation neliö on normalisoitu innovaation kovarianssilla. NIS on χ^2 -jakautunut vapausastein ν ja mittausten \mathbf{y} dimensio on n . [20] Suodatin on konsistentti, jos sen antama kovarianssimatriisi \mathbf{P}_k estimaattorille on aina suurempi tai yhtä suuri kuin todellinen kovarianssimatriisi estimaattorille eli epäyhtälö

$$\mathbb{E}[(\mathbf{x}_k - \mathbf{m}_k)(\mathbf{x}_k - \mathbf{m}_k)^T] \leq \mathbf{P}_k, \quad (2.86)$$

missä \mathbf{m}_k on tilan estimaatti, pätee kaikilla arvoilla k . [3]

Konsistenttiuden testaus voidaan suorittaa ajonaikaisesti yhdelle ajolle kerrallaan tai yhteisesti kaikkien ajojen jälkeen. Ajonaikaisessa testauksessa valitaan jokin aikaikkuna K , jossa konsistenttiutta halutaan tarkastella. Neliöidystä normalisoidusta innovaatiosta on tällöin otettava aikakeskiarvo

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_\nu = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \boldsymbol{\nu}_k^T \mathbf{S}_k^{-1} \boldsymbol{\nu}_k = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \boldsymbol{\eta}_k^T \boldsymbol{\eta}_k. \quad (2.87)$$

Aikakeskiarvoinen neliöity normalisoitu innovaatio on χ^2 -jakautunut vapausastein Kn , missä n on mittausvektorin \mathbf{y} dimensio. [5, s. 240]

Monte Carlo simulaatiossa algoritmi suoritetaan N kertaa. Keskiarvoinen NIS

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_\nu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\epsilon}_\nu^i. \quad (2.88)$$

on tällöin yksittäisten ajojen neliöityjen normalisoidujen innovaatioiden $\boldsymbol{\epsilon}_\nu^i$ summa jaettuna ajojen lukumäärällä. Tässä $N\boldsymbol{\epsilon}_\nu$ on χ^2 -jakautunut vapausastein Nn . [5, s. 238-239]

3. SOVELLUKSET

Suodattimien eräs sovelluskäyttökohde on paikannus. Sovelluskohteita ovat esimerkiksi esineiden ja henkilöiden paikannus ja yritysten kohdistettu mainostaminen, jossa mainos lähetetään, kun käyttäjä on lähellä liikettä. Sisätilapaikannuksessa paikannus rajoittuu rakennuksen sisälle, jolloin GPS:n sijaan on hyödynnettävä muita ratkaisuja tarkan paikan arvioimiseksi. Kasvava kysyntä ja paikannuksen hyödyntäminen markkinoinnissa ovat lisänneet sisätilapaikannuksen suosiota.

3.1 Sisätilapaikannus

Satelliitteja hyödynnetään yleisimmin paikannuksessa, joka tapahtuu ulkotiloissa. Sisätiloissa seinät ja muut rakenteet heikentävät ja jopa estävät satelliiteilta saatavan signaalin välityksen, joten satelliittipaikannus ei ole tarpeeksi tarkka paikannustapa sisätiloissa. Sisätilapaikannuksessa paikan arvioimisessa hyödynnetään tietoa signaalin heikentymisestä, magneettikentistä [6, s. 54-55], saapumisajasta ja saapumiskulmista. [14]

Sisätilapaikannuksessa paikkaa voidaan arvioida saapumiskulmamittausten avulla. Tällöin mittausdata koostuu tukiasemalle saapuvista korkeus- ja leveysmittauksista. Saapumiskulmamittaus (angle of arrival, AOA) vaatii vähintään kaksi tukiasemaa, jotta voidaan määrittää mittauksen saapumispaikka. Tukiasemat sisältävät suunta-antennit, jotka arvioivat signaalin tulosuunnan horisontaalisesti ja vertikaalisesti. Mittaus perustuu tulosuuntien kolmiomittaukseen. Paikannettavan sijaintitiedot saadaan, kun lasketaan tukiasemilta mittausten perusteella piirrettyjen suorien leikkauspiste. [22]

Magneettikentät pystyvät läpäisemään seiniä ja rakenteita heikentymättä, joten magneettisten virtauksien signaalien hyödyntäminen sisätilapaikannuksessa on perusteltua. Tällöin keinotekoisesti luodut magneettikentät on kyettävä erottamaan luonnon magneettikentistä. Paikannusjärjestelmä koostuu keinotekoisesti luodusta magneettikentästä ja magnetometrillä. Magneettikenttä muodostetaan rakennuksen sisälle asetetuista tukiasemista, jotka voivat olla virtakäämejä, magnetisoitua materiaalia tai liikkuvia varauksenkuljettajia. Paikannus suoritetaan havainnoimalla

magneettikenttää magnetometrillä, joka on kiinni paikannettavassa kohteessa. Mittaamalla magneettikenttää ainakin kolmelta tukiasemana toimivalta virtakäämiltä, voidaan määrittää paikannettavan etäisyys kyseisistä käämeistä. [6, s. 56-57]

Mitä useamman tukiaseman tietoa paikannuksessa käytetään, sitä tarkempi arvioitu paikka on. Saapumisaikamittaukseen (time of arrival, TOA) verrattuna saapumiskulmamittauksissa aikaerot laitteiden välillä eivät aiheuta huomattavaa virhettä mittaustuloksiin. Virhettä aiheuttavia tekijöitä ovat monitieheijastus, signaalien epäsuora ja esteetön eteneminen ja antennien ja tukiasemien asettaminen vinoon. Säännöllisellä huollolla voidaan ehkäistä antennien joutumista vinoon. [47] Signaalien heijastuminen esimerkiksi seinistä aiheuttaa virhettä, ja signaalin kulkumatkalle osuva este voi estää signaalin havaitsemisen kokonaan. Virhe syntyy, kun suoraa reittiä kulkeva vahvin signaali heikentyy esteiden takia ja vahvimpana vastaanotetaan signaali, joka on muuttanut suuntaa heijastuksen vuoksi. [8, 22] [2, s. 39]

Staattisessa paikkaratkaisussa paikan arvio eli estimaatti lasketaan useasta samanlaisesti tehdystä mittauksesta, jotka eivät riipu aiemmista tai tulevista mittauksista tai estimateista.

3.2 Bluetooth

Eräs sisätilapaikannuksessa käytetty tiedonsiirtotekniikka on Bluetooth. Bluetooth on lyhyen kantaman langatonta verkkotekniikkaa. Bluetooth sai alkunsa vuonna 1994, kun ruotsalainen telekommunikaatiojärjestelmien valmistaja Ericsson alkoi tutkia langatonta keinoa yhdistää matkapuhelin ja niiden elektroniset lisätarvikkeet. Kehityksen tuloksena päädyttiin ratkaisuun, jossa laitteisiin sisäänrakennettiin pienet radiot, jotka toimivat radiotaajuuksilla lyhyellä, enintään 10 metrin kantamalla. Virallisesti Bluetooth julketettiin toukokuussa 1998. Laitteet, joiden välillä on Bluetooth-yhteys, muodostavat piconetin, joka voi koostua enintään kahdeksasta erillisestä laitteesta. [34]

Bluetoothin toiminta perustuu elektromagneettisiin energiapulsseihin eli radioaaltoihin. Aallot ovat taajuusalueelta 2.4-2.48 GHz, jolle käytetään lyhennettä ISM (Industrial, Scientific and Medical). Signaalin häiriön estämiseksi hyödynnetään taajuushyppelyä, jossa lähetystaajuutta muutetaan signaalin lähetyksen aikana. Taajuusalue jaetaan kanaviin, joilla osiin pilkottu signaali lähetetään. Signaalin muodostavat aallot syntyvät, kun lähetin värähtelee tietyllä taajuudella. Vastaanotin säädetään taajuudelle, jotka sen halutaan vastaanottavan. Bluetooth ei tarvitse näköyhteyttä toimiakseen kuten esimerkiksi infrapunalähetys. [34]

Viimeisimpiä parannuksia Bluetooth teknologiaan on Bluetooth Low Energy (LE), joka lisättiin osaksi Bluetooth 4.0 spesifikaatiota. Bluetooth Low Energy on tarkoitettu käytettäväksi laitteissa, joiden halutaan toimivan mahdollisimman vähäisellä energiankulutuksella. Vähäenergisyiden ansiosta laitteet toimivat useita kuukausia ja jopa vuosia ilman paristojen vaihtoa tai lataamista. Laitteiden tietoliikenne tapahtuu yleensä lyhyissä jaksoissa, joiden ei tarvitse olla kovin tiheitä. Dataa siirretään haluttu määrä, jonka jälkeen Bluetooth yhteys katkaistaan. Teknologia vähentää pariston huippuvirtaa ja keskimääräistä virtaa, joka takaa pariston hitaamman kulumisen. [16, s. 6-8, s. 131-132]

3.3 Kalibrointi ja synkronointi

Kalibroinnissa kahden eri laitteen mittaustuloksia verrataan keskenään. Tässä työssä oletetaan, että tukiasemien sijainnit ja orientaatiot ovat tunnetut. Aina näin ei ole, vaan sijainti ja orientaatio voidaan ratkaista erikseen kalibroimalla. Kalibrointi tapahtuu joko

- ratkaisemalla yhden tukiaseman paikasta ja yhdestä tukiasemien välisestä etäisyysmittauksesta kahden tukiaseman paikat
- ratkaisemalla yhden tukiaseman paikka kahden tunnetun tukiaseman paikan avulla.

Kalibrointi perustuu epälineaarisen pienimmän neliösumman optimoimiseen eli tukiasemat pyritään asettamaan paikkoihin ja suuntaamaan siten, että laitteistojen mittaukset vastaavat parhaiten toisiaan. [42] Epälineaarisen pienimmän neliösumman estimaattori on kaavamuodossa

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \arg \min_{\mathbf{x}} \left(\sum_{i=1}^K \|\mathbf{y}_i - \mathbf{h}(\mathbf{x}_i)\|^2 \right), \quad (3.1)$$

missä \mathbf{x} on kalibrointipisteen paikkavektori, \mathbf{h} on mittaussmallin epälineaarinen funktio, \mathbf{y} tukiaseman paikkavektori ja K kalibrointipisteiden lukumäärä. [5, s. 97] Kalibrointipiste on tunnettu paikka, jossa toinen mittalaite pysyy paikoillaan.

4. SIMULAATIOT JA TESTAUS

Tässä luvussa käsitellään suodatuksen soveltamista sisätilapaikannuksessa ja esitellään käytettävät tilamallit. Algoritmeja testattiin ensin simulaatiolla, jossa luotiin oma data käsin ohjelmoimalla. Tämän jälkeen mitattiin tosidataa ja testattiin algoritmien toimintaa datalla, jossa tukiasemien kulmamittausten mittausrvirhe simuloitiin Matlabin satunnaislukugeneraattoreilla. Tosidataa varten suoritettiin mittauksia TTY:n CivitLab laboratoriossa, jossa paikannus tapahtuu kameroita ja ilmaisimia hyödyntävän OptiTrack sovelluksen avulla. Toinen laitteisto koostuu tukiasemista ja paikannettavasta seurantalaitteesta. OptiTrack paikannusta varten seurantalaitteeseen kiinnitetään OptiTrack ilmaisimien, joka toimii paikantimena ja kertoo paikat koordinaattien muodossa. Tarkoituksena on löytää suodatin tukiasema-seurantalaitteelle hyödyntämällä OptiTrack laitteiston antamaa tosidataa ja siihen simuloitua mittausrvirhettä. Dataa suodatetaan eri suodattimilla ja vertaillaan eri suodattimien antamia tuloksia keskenään.

Kalibrointia varten CivitLab laboratoriossa suoritettiin kalibrointimittauksia. Kalibrointi voidaan suorittaa eri tavoilla. Laitteisto kalibroidiin siten, että seurantalaitte ja ilmaisimien otettiin käteen ja niiden kanssa käytiin jokainen tukiasema läpi. Seurantalaitetta ja ilmaisinta pidettiin paikoillaan kunkin tukiaseman lähellä noin 5 sekuntia, jonka jälkeen käveltiin seuraavan tukiaseman luo. Kalibroinnissa voidaan valita myös tietyt kalibrointipisteet, joiden kohdalla seurantalaitetta pidetään paikallaan. Tukiasemien paikat mitattiin myös metrimittalla.

Koska OptiTrack systeemin ja tukiasema-seurantalaitte laitteiston kellot ovat eri ajassa, on laitteisto synkronoitava. Tämä tapahtuu pysymällä mittauksen alussa ja lopussa ensin paikoillaan, minkä jälkeen tehdään jokin selkeästi datasta erotettavissa oleva liike, esimerkiksi seurantalaitteen ja ilmaisimen heilautus ylös ja alas. OptiTrack systeemissä tämä näkyy paikan muutoksena ja tukiasema-seurantalaitte systeemissä kiihtyvyyden muutoksena ja kulmamittausten kulmien suuruuden muutoksessa. Tavoiteltava tarkkuus on noin yhden sekunnin luokkaa.

4.1 Tila- ja mittausmallit

Paikannettavaa kohdetta kuvataan systeeminä, jota kuvaa tila. Tilamalli valitaan kuvaamaan mahdollisimman hyvin todellista tilannetta, jota kuvaavat esimerkiksi paikannettavan paikka, nopeus tai kiihtyvyys. Seuraavaksi esitellään työssä käytetyt tila- ja mittausmallit. Yleiset mittausmallit esitellään normaalijakautunutta ja von Mises–Fisher jakautunutta mittauskohinaa sisältävälle mittausdatalle ja perehdytään tarkemmin mittausmallien soveltamiseen laajennetulle Kalmanin suodattimelle.

4.1.1 Tilamalli

Tilaa kuvaava malli, tilamalli, on riippuvainen tarkasteltavasta systeemistä. Paikannuksessa tilamalliin sisältyy ainakin käyttäjän paikan ilmaiseva paikkavektori [2, s. 42-44]. Tässä työssä tarkastellaan kahta erilaista tilamallia, pelkästä paikasta sekä paikkavektorista että nopeudesta koostuvaa tilamallia.

Ensimmäisessä mallissa tilana \mathbf{x} käytetään käyttäjän paikkavektoria \mathbf{p} , joka koostuu kolmesta komponentista

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

jossa x ja y ovat tason koordinaatteja ja z korkeus.

Tilamalli on nyt muotoa

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{q}_{k-1}, \quad (4.2)$$

missä $\mathbf{A}_{k-1} = \mathbf{I}_{3 \times 3}$ on tilansiirtomatriisi ja $\mathbf{q}_{k-1} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_k)$ tilan valkoinen ja normaalijakautunut virhe [25, s. 468]. Tilamallin virheen kovarianssimatriisi on

$$\mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} \Delta t \sigma_{xy}^2 \mathbf{I}_{2 \times 2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Delta t \sigma_z^2 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

missä varianssi $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_{xy}$ kertoo tason keskihajonnan ja σ_z korkeuden keskihajonnan metreinä ja $\Delta t = t_k - t_{k-1}$ tarkoittaa aika-askelen k pituutta. [2, s. 43-44] [19, s. 88-90]

Vakionopeusmalliksi kutsutaan tilamallia, jossa tilavektori \mathbf{x} koostuu käyttäjän paikasta \mathbf{p} ja nopeudesta \mathbf{v} . Tilamallin yhtälössä (4.2) tilansiirtomatriisi on tällöin

ajasta riippuva [2, s. 42-43][36, s. 44-45]

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{k-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \Delta t \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Vakionopeuden tilamallin virheen kovarianssimatriisi

$$\mathbf{Q}_k = V(\mathbf{q}_k) = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^3}{3} \mathbf{Q}_c & \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{Q}_c \\ \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{Q}_c & \Delta t \mathbf{Q}_c \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

lasketaan lähteessä [2, s. 21, 44] esitetyllä kaavalla. Vakionopeusmallissa nopeuden Brownin liikkeeseen β perustuva diffuusiomatriisi on

$$\mathbf{Q}_c = \begin{bmatrix} \sigma_{xy}^2 \mathbf{I}_{2 \times 2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_z^2 \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

missä σ_{xy} ja σ_z kuvaavat nyt kiihtyvyyden virheitä. [19, s. 88-90]

4.1.2 Mittausmalli

Tässä kappaleessa esitellään työssä käytetyt yleiset mittaussmallit laajennetulle Kalmanin suodattimelle ja partikkelisuodattimelle, kun mittaussmallissa huomioidaan mittausrvirheen jakauma. Työssä kokeillaan kahta eri mittaussmallia, normaalijakaumaan ja von Mises–Fisher-jakaumaan perustuvaa mallia. Työssä tukiasemien paikat ja orientaatiot oletetaan tunnetuiksi.

Kaavan (2.51) mittaussmallissa muuttuja \mathbf{y}_k sisältää mittaustietoa, joka voi koostua paikan koordinaateista, signaalin saapumiskulmista, tutkittavan kohteen nopeudesta ja/tai kiihtyvyydestä. Tässä työssä mittausvektori \mathbf{y} sisältää korkeus- ja leveys-suuntaiset mittaukset

$$\mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{azi,k} \\ \mathbf{y}_{ele,k} \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

jossa $\mathbf{y}_{azi,k}$ ja $\mathbf{y}_{ele,k}$ ovat kulmamittaukset radiaaneina jokaiselta tarkasteltavalta tukiasemalta.

Kulmamittaukset simuloidaan käyttämällä tietoa käyttäjän todellisesta paikasta ja tukiasemien tunnetuista paikoista ja orientaatioista. Näistä tiedoista muodostetaan yksikkövektori

$$\mathbf{d}_{k,i}(\mathbf{x}_k) = \frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{s}_i}{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{s}_i\|}, \quad (4.8)$$

missä \mathbf{s}_i kuvaa tukiaseman i paikkaa ja \mathbf{x}_k käyttäjän paikkaa ajanhetkellä t_k . Merkitsemällä tukiaseman radiaaneina ilmaistun orientaation

$$\mathbf{o}_i = \begin{bmatrix} o_x \\ o_y \\ o_z \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

kosinia ja siniä

$$\mathbf{c}_i = \cos(\mathbf{o}_i) = \begin{bmatrix} \cos(o_x) \\ \cos(o_y) \\ \cos(o_z) \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$\mathbf{z}_i = \sin(\mathbf{o}_i) = \begin{bmatrix} \sin(o_x) \\ \sin(o_y) \\ \sin(o_z) \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

saadaan tukiaseman i rotaatiomatriisiksi

$$\mathbf{R}_{k,i} = \begin{bmatrix} c_{i,1}c_{i,2} & c_{i,1}z_{i,2}z_{i,3} - c_{i,3}z_{i,1} & z_{i,1}z_{i,3} + c_{i,1}c_{i,3}z_{i,2} \\ c_{i,2}z_{i,1} & c_{i,1}c_{i,3} + z_{i,1}z_{i,2}z_{i,3} & c_{i,3}z_{i,1}z_{i,2} - c_{i,1}z_{i,3} \\ -z_{i,2} & c_{i,2}z_{i,3} & c_{i,2}c_{i,3} \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Rotaatiomatriisilla kertomalla saadaan

$$\mathbf{u}_{\text{rot}} = \mathbf{R}_{k,i} \mathbf{d}_{k,i}(\mathbf{x}_k). \quad (4.13)$$

Tuloksena saatu yksikkövektori mallintaa tässä työssä todellista kohinatonta mitausdataa.

Todellisia kulmia ja kulmien keskihajontaa hyödyntävä normaalijakautunut mittausmalli on kaavan (2.57) muotoa

$$\mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1(\mathbf{x}_k) \\ \vdots \\ \mathbf{h}_N(\mathbf{x}_k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{r}_i \\ \vdots \\ \mathbf{r}_N \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

missä N on tukiasemien lukumäärä,

$$\mathbf{h}_i(\mathbf{x}_k) = \begin{bmatrix} \text{atan}_2(u_{\text{rot},2}, u_{\text{rot},1}) \\ \text{atan}_2(\|u_{\text{rot},1:2}\|, -u_{\text{rot},3}) \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

on mittausfunktio, joka muuttaa kohinatonta tukiasemalta i saadun datan kulma-

mittaukset radiaaneiksi, ja

$$\mathbf{r}_i \sim \mathcal{N}\left(0, \begin{bmatrix} \sigma_{azi}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{ele}^2 \end{bmatrix}\right) \quad (4.16)$$

on normaalijakautunut virhe. Varianssit σ_{azi} ja σ_{ele} ilmaisevat kulmien keskihajonnan.

Mittausmalli, jossa kohina on von Mises–Fisher-jakautunut, on kaavan (2.58) muotoa

$$\mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{h}}_1(\mathbf{x}_k, \bar{\mathbf{r}}_1) \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{h}}_N(\mathbf{x}_k, \bar{\mathbf{r}}_1) \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

missä N on tukiasemien lukumäärä ja

$$\bar{\mathbf{h}}_i(\mathbf{x}_k) = \begin{bmatrix} \text{atan}_2(u_2, u_1) \\ \text{atan}_2(\|u_{1:2}\|, -u_3) \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

mittausfunktio, joka koostuu von Mises–Fisher-jakautuneen kohinan sisältämistä vektoreista

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{rot}} + \bar{\mathbf{r}}_i, \quad \mathbf{u} \sim \text{VMF}(\mathbf{u}_{\text{rot}}, \kappa). \quad (4.19)$$

Todellisessa mittausjärjestelmässä kukin mittaus määritellään yksikäsitteisesti korkeus- ja leveys suunnan kulmamittauksen muodostamana parina. Simulaatiossa on varmistuttava, että tietyn pisteen ilmaiseamiseen on käytössä vain yksi tietty kulmayhdistelmä. Rajoitetaan korkeussuunnan mittaus positiiviseksi ja huomioidaan tämä leveys suunnan mittauksessa kääntämällä mittausta 180 astetta, jos korkeussuunnan mittaus on negatiivinen.

4.1.3 Mittausmallien soveltaminen laajennetussa Kalmanin suodattimessa

Tarkastellaan von Mises–Fisher jakauman sovittamista laajennetulle Kalmanin suodattimelle tarkemmin. Normaalijakautuneen mittausmallin syöttäminen suodattimille ei aiheuta suuria muutoksia kappaleissa 2.5.2 ja 2.5.3 esitettyihin laajennetun Kalmanin suodattimen ja partikkelisuodattimen algoritmeihin 2 ja 3, mutta von Mises–Fisher-jakauman käytön kanssa on oltava tarkempi. Normaalijakautunut mittausmalli antaa kulmamittaukset suodattimelle suoraan mittausvektorina (4.7), joka sisältää leveys- ja korkeussuunnan kulmat. von Mises–Fisher-jakauman

käyttämisen suodattimessa vaatii saatujen kulmamittausten muuttamista yksikkövektoriksi

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \cos(\mathbf{y}_{azi,k}) \cdot \sin(\mathbf{y}_{ele,k}) \\ \sin(\mathbf{y}_{azi,k}) \cdot \sin(\mathbf{y}_{ele,k}) \\ -\cos(\mathbf{y}_{ele,k}) \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

kulmien määritelmään perustuen. Laajennettu Kalmanin suodatin tekee lineaarisen approksimaation laskemalla pisteet tasolle, jolloin etäisyyksiä ei lasketa von Mises–Fisher-jakauman pallopinnalla. Partikkelisuodattimella linearisointi approksimaatiota ei tapahdu, sillä laskeminen tapahtuu yksi piste kerrallaan.

Laajennetulle Kalmanin suodattimelle mittausmallin mittausvirhe oletetaan normaalijakautuneeksi ja valkoiseksi. [25, s. 466] Normaalijakautuneen mittausmallin mittausfunktioon (4.18) sijoitetaan rotaatiomatriisilla kierretty vektori

$$\mathbf{d}_{rot} = \mathbf{R}(\mathbf{m}_k^- - \mathbf{s}), \quad (4.21)$$

jolloin

$$\mathbf{h}(\mathbf{m}_k^-) = \begin{bmatrix} \text{atan}_2(\mathbf{d}_{rot,2}, \mathbf{d}_{rot,1}) \\ \text{atan}_2(\|\mathbf{d}_{rot,1:2}\|, -\mathbf{d}_{rot,3}) \end{bmatrix}, \quad (4.22)$$

missä \mathbf{m}_k^- on tilan priori-estimaatti. Mittausfunktioista lasketaan Jacobin matriisit

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_m(\mathbf{m}_k^-) &= \left[\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{m}_k^-} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{m}_k^-, \mathbf{r}=\mathbf{0}} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{-\mathbf{d}_{rot,2}}{\|\mathbf{d}_{rot,1:2}\|^2} & \frac{\mathbf{d}_{rot,1}}{\|\mathbf{d}_{rot,1:2}\|^2} & \mathbf{0} \\ \frac{\mathbf{d}_{rot,3}\mathbf{d}_{rot,1}}{\|\mathbf{d}_{rot,1:2}\|\|\mathbf{m}_k^- - \mathbf{s}\|^2} & \frac{\mathbf{d}_{rot,3}\mathbf{d}_{rot,2}}{\|\mathbf{d}_{rot,1:2}\|\|\mathbf{m}_k^- - \mathbf{s}\|^2} & \frac{\|\mathbf{d}_{rot,1:2}\|}{\|\mathbf{m}_k^- - \mathbf{s}\|^2} \end{bmatrix} \\ \mathbf{H}_r(\mathbf{m}_k^-) &= \left[\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{r}_k} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{m}_k^-, \mathbf{r}=\mathbf{0}} = \mathbf{I} \end{aligned} \quad (4.23)$$

kun kohina oletetaan additiiviseksi. Matriisi \mathbf{H}_m kerrotaan rotaatiomatriisilla oikealta.

Mittauskohinan kovarianssimatriisi \mathbf{R}_k on diagonaalimatriisi

$$\mathbf{R}_k = \begin{bmatrix} \sigma_{azi}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{ele}^2 \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

von Mises–Fisher-jakauman tapauksessa EKF:ssa mittausfunktio on

$$\mathbf{h}(\mathbf{m}_k^-) = \mathbf{u}_{rot} = \mathbf{R}\mathbf{d}_k(\mathbf{m}_k^-) \quad (4.25)$$

eli rotaatiomatriisilla kierretty yksikkövektori, missä

$$\mathbf{d}_k(\mathbf{m}_k^-) = \frac{\mathbf{m}_k^- - \mathbf{s}}{\|\mathbf{m}_k^- - \mathbf{s}\|} \quad (4.26)$$

sisältää kaikkien tukiasemien tarkastelun tietyllä ajanhetkellä. Jacobin matriisi

$$\mathbf{H}_m(\mathbf{m}_k^-) = \frac{\mathbf{R}(\mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{d}_k(\mathbf{m}_k^-)\mathbf{d}_k^T(\mathbf{m}_k^-))}{\|\mathbf{m}_k^- - \mathbf{s}\|} \quad (4.27)$$

ja matriisi \mathbf{H}_r identiteettimatriisi.

von Mises–Fisher-jakautunut kohina on ei-additiivista, mutta suodatin olettaa sen additiiviseksi. Mittauskohinan kovarianssimatriisi \mathbf{R}_k on

$$\mathbf{R}_k = \frac{1}{\kappa} \mathbf{I}_{3 \times 3}, \quad (4.28)$$

missä hyödynnetään κ ja σ parametrien välistä verrantoa (2.37).

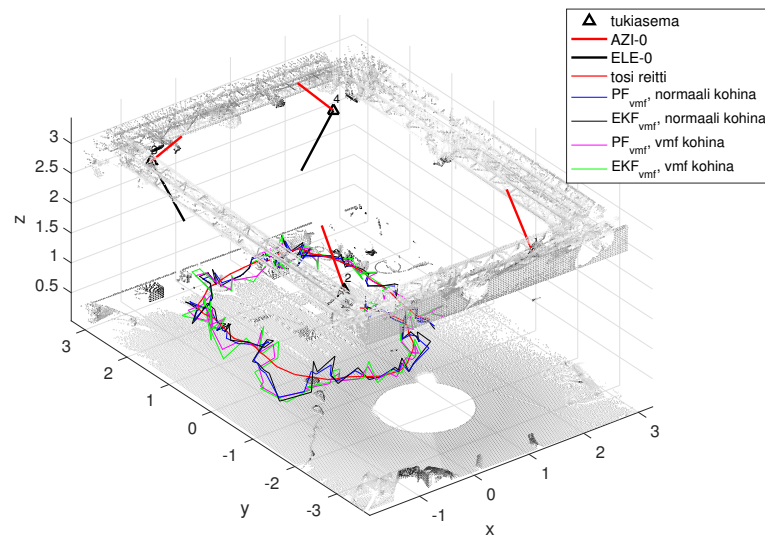
Simulaatioissa valitaan suodattimen oletama jakauma riippumatta mittauskohinan jakaumasta.

4.2 Tulokset

Suodattimille syötettävä data koostuu CivitLab laboratoriossa OptiTrack sovelluksen avulla mitatusta referenssipaikasta, jonka perusteella lasketaan tulokulmamittaukset simuloidulla mittausvirheellä. OptiTrack data sisältää käyttäjän todellisen paikan ja tukiasemien paikat sekä orientaatiot tunnetaan. Näiden tietojen avulla muodostetaan paikkaa kuvaavat todelliset leveys- ja korkeussuunnan kulmamittaukset, joihin simuloidaan virhe. Korkeussuunnan mittaus rajoitetaan positiiviseksi ja huomioidaan tämä leveysuunnan mittauksessa kääntämällä mittausta 180 astetta, jos korkeussuunnan mittaus on negatiivinen. Vertailun vuoksi mittausvirhe simuloidaan normaalijakaumasta ja von Mises–Fisher jakaumasta.

Tilamallin virhematriisin (4.6) keskihajonnat estimoidaan OptiTrack sovelluksen avulla saaduista todellisista paikoista suurimman uskottavuuden estimointi menetelmällä (maximum likelihood), jolloin $\sigma_{xy} = \sigma_z = 0.5$ m. [5, s. 89] Simulaatiossa käytettävä data koostuu normaalijakautuneen ja von Mises–Fisher-jakautuneen kohinan sisältävästä datasta. Kulmien keskihajonnat normaalijakautuneessa kohinassa ovat väliltä $0.5^\circ - 15^\circ$ ja von Mises–Fisher-jakautuneessa parametrin κ arvot vastaavat kaavalla (2.37) muutettuna.

CivitLab laboratoriohuoneen mitat olivat noin $4 \times 6 \times 3$ m. Jos nämä huoneen äärimitat otetaan huomioon alkutilaa valitessa, vältetään suodattimen hajoamiselta. Suodattimen hajoamiseen johtavaa epäkonsistenttiutta voidaan pyrkiä ehkäisemään rajoittamalla tilaa. Sisätilapaikannuksessa esimerkiksi seinien paikat toimivat tilan rajoitteina. Kuvassa 4.1 havainnollistetaan OptiTrack laboratorion tilaa, jossa tosipaikan mittaukset suoritettiin. Kuvassa harmaa pistepilvi kuvaa lattiaa ja katos-
sa olevia palkkeja, joihin tukiasemat on kiinnitetty. Pistepilvi on mitattu LiDAR (Light Detection and Ranging) laitteella, joka perustuu laservalopulssien mittaamiseen. [44, s. 2-6] Tukiasemien paikkojen lisäksi kuvaan on merkitty tukiaseman orientaatio piirtämällä näkyviin korkeussuunnan (ELE-0) ja leveysuunnan (AZI-0) mittausten nolla asteen suunnan. Lisäksi kuvassa näkyy todellinen kuljettu reitti ja esimerkkinä muutaman suodattimen antamat paikkaestimaatit. Kuvan suodattimis-
sa mittausten keskihajonta ja suodattimissa käytetty keskihajonta ovat 5 astetta ja tilamallina käytetään paikan sisältävää mallia.



Kuva 4.1 Esimerkkikuva todellisesta reitistä, laboratorioon asetettujen tukiasemien paikasta ja orientaatiosta ja suodattimien paikkaestimaateista tilassa. Käytetään simuloituja mittauksia neljälle tukiasemalle.

Seuraavissa kappaleissa etsitään parhaan paikannustuloksen antama suodattimen, jakauman ja tilamallin yhdistelmä. Verrataan keskenään normaalijakautuneen ja von Mises–Fisher-jakautuneen mittauskohinan olettavaa laajennettua Kalmanin suodatinta (EKF) ja partikkelisuodatinta (PF) ja selvitetään jakauman valinnan vaikutus paikannustulokseen. Vertailun jälkeen pahaimman paikannustuloksen antavia suodattimia tarkastellaan tarkemmin tutkimalla robusteja versioita suodattimista

(REKF ja RPF) paikkaa kuvaavalla tilalla (4.1) (tilamalli 1) ja vakionopeusmallilla (tilamalli 2), jossa tilaa kuvaa kaava (4.4). Vertailussa tarkastellaan suodattimien konsistenttiutta ja neliöllisen keskiarvon virhettä (root mean square error, RMSE) laskemalla todellisen paikan ja suodattimien paikkaestimaattien erotukset

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|\mathbf{y}_{\text{tosi},k} - \mathbf{m}_k\|^2}, \quad (4.29)$$

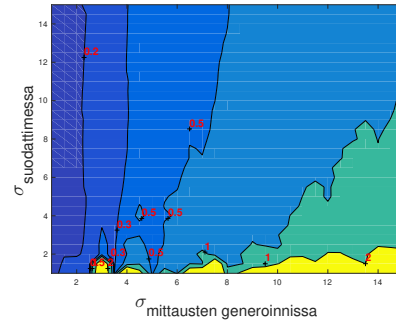
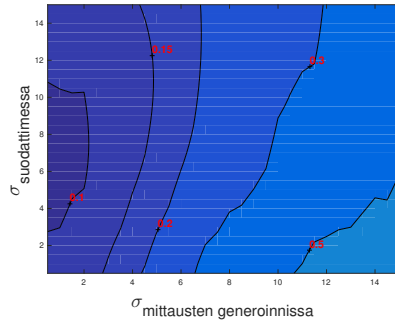
missä $\mathbf{y}_{\text{tosi},k}$ on todellista paikkaa kuvaava vektori, \mathbf{m}_k on suodattimen antama paikkaestimaatti ajanhetkellä k ja n mittausten lukumäärä.

4.2.1 Suodattimen ja mittauskohinan jakauma

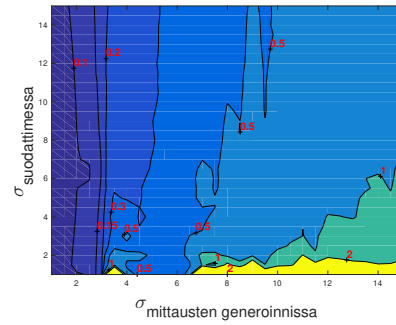
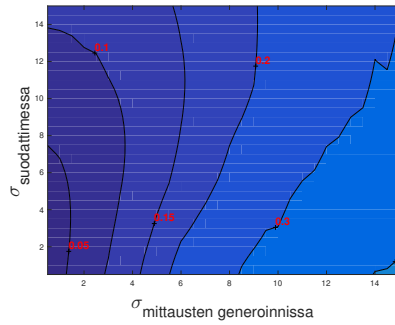
Testattaviksi suodattimiksi on valittu laajennettu Kalmanin suodatin ja partikkeli-suodatin, jotka olettavat normaalijakautuneen mittauskohinan tai von Mises–Fisher-jakautuneen kohinan. Muodostaessa normaalijakautunutta kohinaa korkeus- ja leveys suunnan mittauksien keskihajonnan arvot ovat yhtä suuret. Suodattimia testataan eri σ ja κ parametrien arvoilla ja vastaavilla parametreillä muodostetulla mittausdatalla, jotta löydetään ne σ ja κ arvot, jotka antavat parhaimmat paikkaestimaatit. Parametri κ on muutettu kaavan (2.37) avulla keskihajonnaksi muuttamalla asteina annettu σ ensin radiaaneiksi, jotta parametrien σ ja κ vertailu onnistuu. Tilamallina käytetään mallia 1 ja paikan alkutilaksi suodattimille on annettu

$$\mathbf{m}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

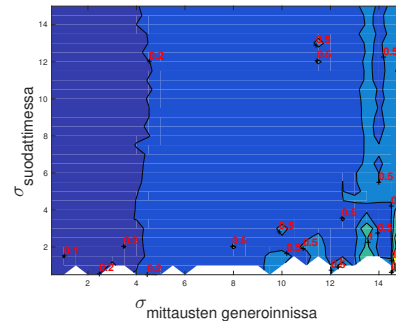
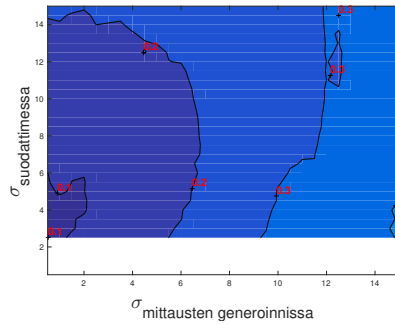
Kuvassa 4.2 on esitetty tason RMSE (m) arvot, kun mittauskohina on VMF-jakautunut tai normaalijakautunut, ja suodattimet EKF_{vmf} ja PF_{vmf} olettavat VMF-jakauman parametrein $\kappa = \frac{1}{\sigma^2}$ ja suodattimet EKF_{norm} ja PF_{norm} olettavat normaalijakauman parametrein σ (°).



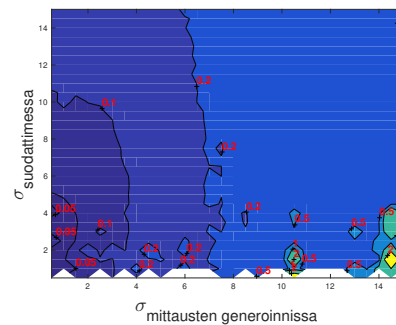
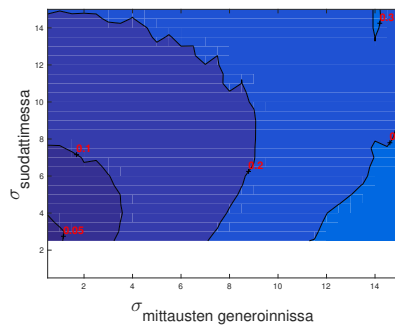
(a) RMSE (m) arvo, kun kohina on VMF-jakautunut ja suodatin EKF_{vmf} (b) RMSE (m) arvo, kun kohina on VMF-jakautunut ja suodatin EKF_{norm}



(c) RMSE (m) arvo, kun kohina on normaalijakautunut ja suodatin EKF_{vmf} (d) RMSE (m) arvo, kun kohina ja suodatin EKF_{norm} ovat normaalijakautuneet



(e) RMSE (m) arvo, kun kohina on VMF-jakautunut ja suodatin PF_{vmf} (f) RMSE (m) arvo, kun kohina on VMF-jakautunut ja suodatin PF_{norm}



(g) RMSE (m) arvo, kun kohina on normaalijakautunut ja suodatin PF_{vmf} (h) RMSE (m) arvo, kun kohina ja suodatin PF_{norm} ovat normaalijakautuneet

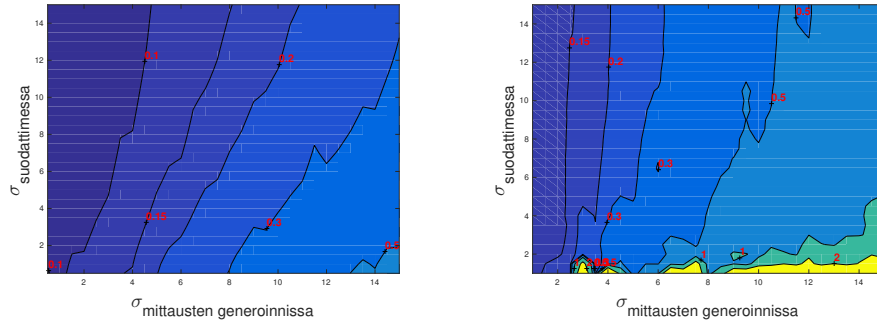
Kuva 4.2 Tason RMSE (m) arvot, kun mittauskohina on VMF-jakautunut tai normaalijakautunut, ja suodattimet EKF_{vmf} ja PF_{vmf} olettavat VMF-jakauman parametrein $\kappa = \frac{1}{\sigma^2}$ ja suodattimet EKF_{norm} ja PF_{norm} olettavat normaalijakauman parametrein σ ($^{\circ}$).

Kuvan 4.2 perusteella von Mises–Fisher-jakauman olettavilla suodattimilla tason RMSE arvo on valituilla σ_{suod} ja σ_{meas} arvoilla pienimmillään 0.04 m (tummansininen alue) ja suurimmillaan 0.7 m (vaalean sininen alue). Vastaavasti normaalijakauman olettavilla suodattimilla RMSE arvo on pienimmillään 0.16 m ja suurimmat arvot yli kahden metrin (keltainen alue). Etenkin suurilla σ_{meas} arvoilla normaalijakautuneen kohinan olettavilla laajennetuilla Kalmanin suodattimilla virhe on suuri.

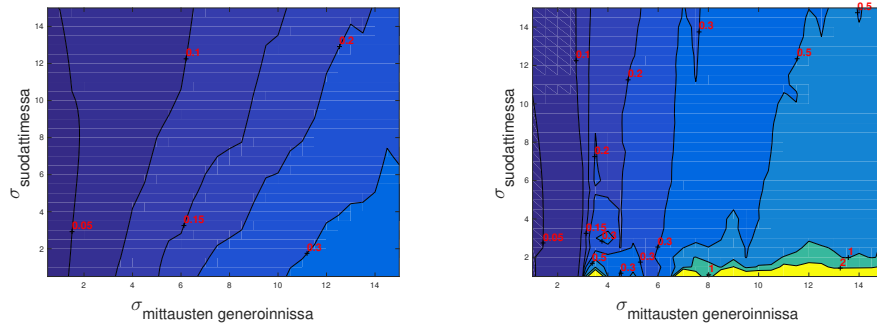
Kuvissa 4.2(b) ja 4.2(d) normaalijakauman olettavat laajennetut Kalmanin suodattimet antavat suuren RMSE arvon, jopa 100 m, kun suodattimessa käytetään pientä σ_{suod} arvoa. Kuvan selkeyttämiseksi nämä suuret arvot on leikattu kuvasta pois. Voidaan tulkita, että kyseisillä σ_{suod} arvoilla suodatin ei toimi. Partikkelisuodattimet eivät toimi pienillä σ_{suod} arvoilla, mikä näkyy valkoisena alueena kuvissa 4.2(e) ja 4.2(f) alle 2.5 asteen keskihajontaa vastaavilla κ arvoilla ja 4.2(g) ja 4.2(h) alle asteen keskihajonnalla. von Mises–Fisher-jakauman olettavat suodattimet antavat pienemmän RMSE arvon kuin normaalijakauman olettavat suodattimet sekä normaalijakautuneella että von Mises–Fisher-jakautuneella kohinalla.

Vasemmanpuoleisissa von Mises–Fisher-jakauman olettavien suodattimien kuvissa tason RMSE arvo kasvaa vähemmän kuin oikeanpuoleisissa normaalijakauman olettavien suodattimien kuvissa, kun mittauksen kohina eli keskihajonta σ_{meas} kasvaa. von Mises–Fisher-jakauman olettavien laajennetun Kalmanin suodattimen ja partikkelisuodattimen tarkkuudessa ei ole suurta eroa. Mittauskohinan jakaumasta riippumatta von Mises–Fisher-jakauman olettavilla suodattimilla tason RMSE arvo on pienempi kuin normaalijakauman olettavilla suodattimilla.

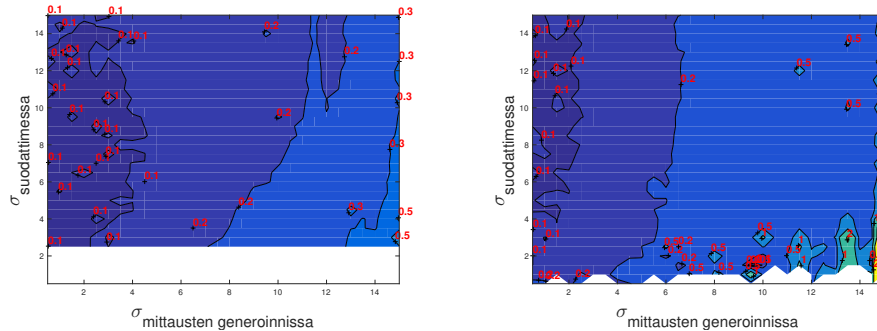
Kuvassa 4.3 on esitetty edeltävien suodattimien paikan korkeuden RMSE (m) arvot.



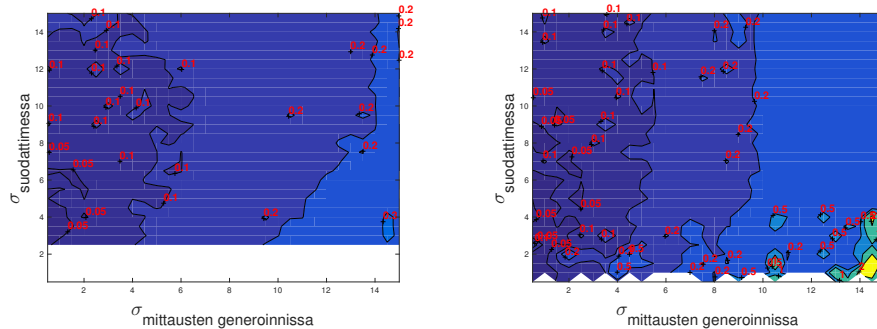
(a) RMSE (m) arvo, kun kohina on VMF-jakautunut ja suodatin EKF_{vmf} (b) RMSE (m) arvo, kun kohina on VMF-jakautunut ja suodatin EKF_{norm}



(c) RMSE (m) arvo, kun kohina on normaalijakautunut ja suodatin EKF_{vmf} (d) RMSE (m) arvo, kun kohina ja suodatin EKF_{norm} ovat normaalijakautuneet



(e) RMSE (m) arvo, kun kohina on VMF-jakautunut ja suodatin PF_{vmf} (f) RMSE (m) arvo, kun kohina on VMF-jakautunut ja suodatin PF_{norm}



(g) RMSE (m) arvo, kun kohina on normaalijakautunut ja suodatin PF_{vmf} (h) RMSE (m) arvo, kun kohina ja suodatin PF_{norm} ovat normaalijakautuneet

Kuva 4.3 Korkeuden RMSE (m) arvot, kun mittauskohina on VMF-jakautunut tai normaalijakautunut, ja suodattimet EKF_{vmf} ja PF_{vmf} olettavat VMF-jakauman parametrein $\kappa = \frac{1}{\sigma^2}$ ja suodattimet EKF_{norm} ja PF_{norm} olettavat normaalijakauman parametrein σ (°).

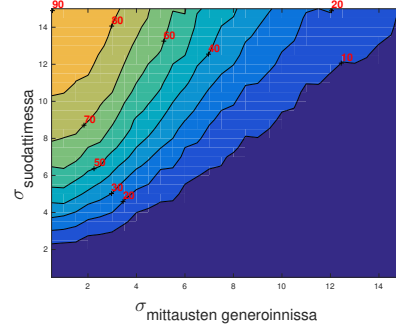
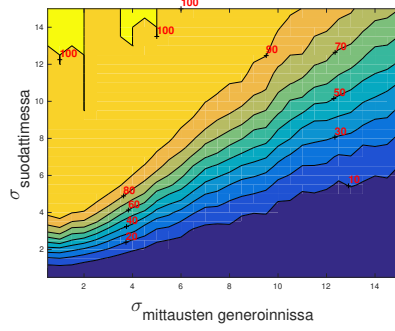
Kuvan 4.3 korkeuden RMSE arvojen käytös on samanlaista kuin kuvan 4.2 tason RMSE arvojen. Normaalijakautuneella ja von Mises–Fisher-jakautuneella kohinalla von Mises–Fisher-jakauman olettavat suodattimet antavat pienemmän RMSE arvon kuin normaalijakauman olettavat suodattimet eli von Mises–Fisher-jakautuneen kohinan olettavat suodattimet antavat tarkemman paikkaestimaatin kuin normaalijakautuneen kohinan olettavat.

Eri suodattimilla saavutetut pienimmät tason ja korkeuden RMSE arvot kuvista 4.2 ja 4.3 on koottu taulukkoon 4.1. Taulukossa esitetään keskihajontojen σ_{suod} ja σ_{meas} kombinaatiot, joilla arvot saatiin.

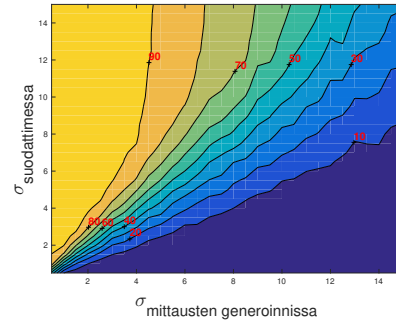
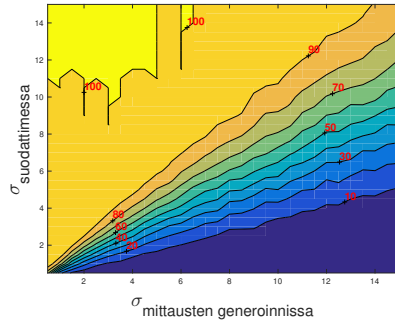
Taulukko 4.1 Tilamallin 1 suodattimien mittauskohinan jakauma, RMSE arvot suodattimien keskihajontavälillä σ_{suod} ja mittausten keskihajontavälillä σ_{meas} sekä alaindeksissä suodattimien olettava jakauma.

Suodatin	Mittauskohina	RMSE _{xy} (m)	RMSE _z (m)	$\sigma_{\text{suod}}(^{\circ})$	$\sigma_{\text{meas}}(^{\circ})$
EKF _{norm}	vmf	0.16	0.12	7.5-11.5	1.5
	norm	0.05	0.04	4-7.5	0.5-1
PF _{norm}	vmf	0.13	0.09	1-10	0.5-1
	norm	0.03	0.03	0.5-1	0.5-1
EKF _{vmf}	vmf	0.09	0.07	4-9	0.5-1
	norm	0.02	0.03	0.5-2.5	0.5
PF _{vmf}	vmf	0.09	0.03	3-4.5	0.5-1
	norm	0.04	0.03	2.5-3	0.5-1

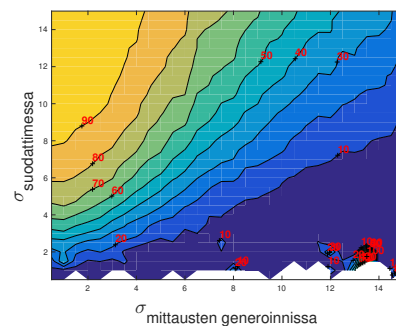
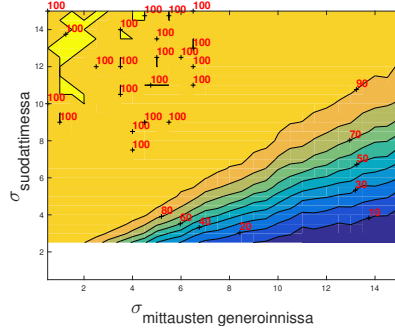
Edellä esiteltyjen simulaatioiden suodattimien konsistenttius (%) on esitetty kuvassa 4.4. Konsistenttiuden laskemiseksi kaavassa (2.87) käytetään aikaikkunaa $K = 10$. Aikaikkunassa laskettujen neliöityjen normalisoitujen innovaatioiden (2.85) summan arvoa verrattiin χ^2 -jakaumaan vapausastein Kn . Tätä kutsutaan innovaation valkoisuustestiksi. Jos summat ovat huomattavasti tätä suurempia, suodatin on epäkonsistentti ja hajoaa. Jos innovaatio on jatkuvasti hyvin suuri tai kasvava, suodattimien estimaatti on luultavasti pielessä. Tässä valkoisuustestin tulos ilmoitetaan prosenttiosuutena neliöityjen normalisoitujen innovaatioiden summista, jotka alitavat χ^2 -jakauman 95 prosentin kvantiilin. Mittauskohina on VMF-jakautunut tai normaalijakautunut, ja suodattimet EKF_{vmf} ja PF_{vmf} olettavat VMF-jakauman parametrein $\kappa = \frac{1}{\sigma^2}$ ja suodattimet EKF_{norm} ja PF_{norm} olettavat normaalijakauman parametrein σ .



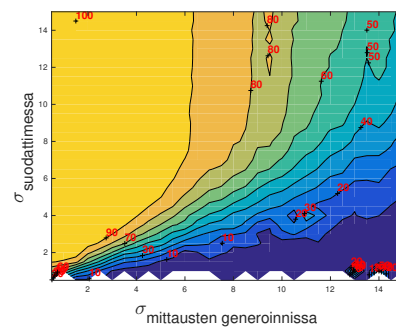
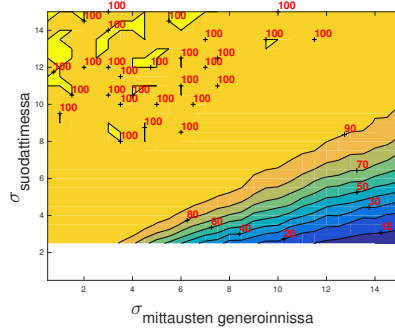
(a) Suodattimen EKF_{vmf} konsistenttius (%) , kun kohina on VMF-jakautunut (b) Suodattimen EKF_{norm} konsistenttius (%) , kun kohina on VMF-jakautunut



(c) Suodattimen EKF_{vmf} konsistenttius (%) , kun kohina on normaalijakautunut (d) Suodattimen EKF_{norm} konsistenttius (%) , kun kohina on normaalijakautunut



(e) Suodattimen PF_{vmf} konsistenttius (%) , kun kohina on VMF-jakautunut (f) Suodattimen PF_{norm} konsistenttius (%) , kun kohina on VMF-jakautunut



(g) Suodattimen PF_{vmf} konsistenttius (%) , kun kohina on normaalijakautunut (h) Suodattimen PF_{norm} konsistenttius (%) , kun kohina on normaalijakautunut

Kuva 4.4 Suodattimien konsistenttius (%), kun mittauskohina on VMF-jakautunut tai normaalijakautunut, ja suodattimet EKF_{vmf} ja PF_{vmf} olettavat VMF-jakauman parametrein $\kappa = \frac{1}{\sigma^2}$ ja suodattimet EKF_{norm} ja PF_{norm} olettavat normaalijakauman parametrein σ ($^{\circ}$).

Kuvasta 4.4 nähdään, että von Mises–Fisher-jakauman olettavat suodattimet ovat lähes 100 prosenttisesti konsistentteja (keltaiset alueet) useammalla eri σ_{suod} ja σ_{meas} kombinaatiolla kuin normaalijakauman olettavat suodattimet. Normaalijakauman olettavat suodattimet vaativat suuremman σ_{suod} arvon kuin von Mises–Fisher-jakauman olettavat suodattimet kun kohinan parametrin σ_{meas} arvo kasvaa. von Mises–Fisher-jakautuneen mittauskohinan olettavat suodattimet ovat yli 90 prosenttisesti konsistentteja sellaisilla parametrien σ_{suod} ja σ_{meas} kombinaatioilla, joissa keskihajonnat ovat yhtäsuuret tai suodatuksessa käytetty keskihajonta σ_{suod} on suurempi kuin mittauskohinan muodostamisessa käytetty σ_{meas} . Suhdetta voidaan kuvata lineaarisella epäyhtälöllä

$$\sigma_{\text{suod}} \geq \sigma_{\text{meas}}, \quad (4.31)$$

missä $\sigma_{\text{suod}} = \frac{1}{\sqrt{\kappa}}$. Vastaavasti normaalijakauman olettavilla suodattimilla keskihajontojen suhdetta voidaan arvioida yhtälöllä

$$\sigma_{\text{suod}} \geq \sigma_{\text{meas}}^{\frac{2}{3}}. \quad (4.32)$$

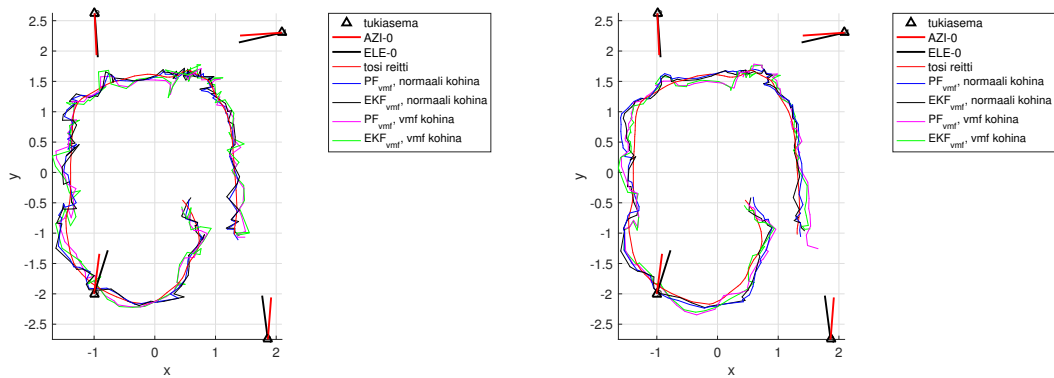
Kun verrataan laajennettuja Kalmanin suodattimia kuvissa 4.4(a)–4.4(d) partikkelisuodattimiin kuvissa 4.4(e)–4.4(h) havaitaan, että partikkelisuodattimien kuvissa keltainen alue valtaa kuvista enemmän alaa kuin laajennetun Kalmanin suodattimen kuvissa. Tästä voidaan päätellä, että etenkin von Mises–Fisher-jakauman olettavat partikkelisuodattimet ovat konsistenttisempiä useammalla eri σ_{suod} ja σ_{meas} kombinaatiolla kuin laajennettu Kalmanin suodatin. Kuvassa 4.4(a) laajennettu Kalmanin suodatin on konsistentti σ_{suod} arvoilla, jotka ovat suurempaa tai yhtä suurta kuin 4° .

Tarkastellaan taulukkoon 4.1 koottujen keskihajontojen kombinaatioiden avulla kuvaa 4.4. Lähes kaikilla taulukoiduilla parametrien σ_{suod} ja σ_{meas} arvoilla, joilla saavutetaan pienimmät RMSE arvot, vastaavat suodattimet ovat yli 90 prosenttisesti konsistentteja.

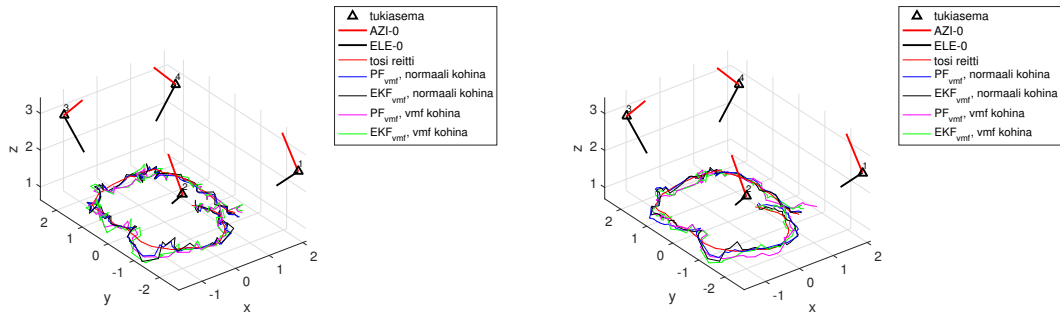
Eräs syy von Mises–Fisher-jakautuneen mittauskohinan olettavien suodattimien antamaan parempaan paikkaestimaattiin on kulmien kääntö. Leveyssuunnan mitausta käännetään 180 astetta, jos korkeussuunnan mittaus on negatiivinen. Kappaleessa 2.4 puhuttiin Pohjoisnapa ongelmasta, jolta vältytään käyttämällä von Mises–Fisher-jakaumaa. Normaalijakauman tilanteessa 180 asteen kääntö saattaa olla väärään suuntaan. Kulmien käännön vuoksi von Mises–Fisher-jakauman suodattimet toimivat paremmin kuin normaalijakauman suodattimet myös muuten normaalijakautuneella mittausvirheellä.

4.2.2 Tilamallin valinta

Tarkastellaan seuraavaksi tarkemmin von Mises–Fisher-jakautuneen mittauskohinan olettavia suodattimia parametrien arvoilla $\sigma_{\text{meas}} = 5^\circ$ ja κ muutettuna $\sigma_{\text{suod}} = 8^\circ$ pelkän paikan sisältävällä tilamallilla (tilamalli 1, (4.1)) ja vakionopeuden tilamallilla (tilamalli 2, (4.4)). Kuvassa 4.5 on esitetty von Mises–Fisher-jakautuneen mittauskohinan olettavien suodattimien antamat paikkaestimaatit, kun tilamallina käytetään tilamallia 1 ja 2 ja mittauskohina on normaalijakautunut tai von Mises–Fisher-jakautunut.



(a) von Mises–Fisher-jakauman olettavat suodattimet tilamallilla 1, kun $\sigma_{xy} = \sigma_z = 0.5 \text{ m}$ (b) von Mises–Fisher-jakauman olettavat suodattimet tilamallilla 2, kun $\sigma_{xy} = \sigma_z = 0.5 \text{ m}$



(c) von Mises–Fisher-jakauman olettavat suodattimet tilamallilla 1 sivusta kuvattuna, kun $\sigma_{xy} = \sigma_z = 0.5 \text{ m}$ (d) von Mises–Fisher-jakauman olettavat suodattimet tilamallilla 2 sivusta kuvattuna, kun $\sigma_{xy} = \sigma_z = 0.5 \text{ m}$

Kuva 4.5 Todellinen reitti, tukiasemien paikat ja orientaatiot ja suodattimien paikkaestimaatit tilassa kuvattuna sivulta ja ylhäältä katsottuna. Käytetään tilamallia 1 keskijonotoja 0.5 m ja tilamallille 2 $0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ja simuloituja mittauksia neljälle tukiasemalle. Suodattimessa käytetään parametria $\kappa = \frac{1}{\sigma_{\text{suod}}^2}$, missä $\sigma_{\text{suod}} = \frac{8\pi}{180}$ radiaaneina ja mittauskohinalle $\sigma_{\text{meas}} = 5^\circ$.

Tilamallissa 1 keskihajonnoille käytetään arvoja $\sigma_{xy} = \sigma_z = 0.5$ metriä. Tilamallissa 2 keskihajonnoiksi valitaan $\sigma_{xy} = \sigma_z = 0.5 \frac{m}{s^2}$, jotka kuvaavat liikkeen kiihtyvyyden virhettä.

Silmämääräisesti kuvien 4.5(a) ja 4.5(b) suodattimien estimoidut reitit eivät poikkea toisistaan huomattavasti. Kuvan 4.5 suodattimien neliöllisen keskiarvon virheet ja konsistenttiudet on koottu taulukkoon 4.2. Tilamallilla 1 suodattimien konsistenttiuden arvot ovat noin 10 prosenttia suuremmat kuin tilamallilla 2. Vastaavasti neliöllisen keskiarvon virheet suodattimille tilamallilla 1 ovat pienemmät kuin tilamallilla 2, lukuunottamatta suodatinta EKF_{vmf} von Mises–Fisher-jakautuneella kohinalla.

Taulukko 4.2 Tilamallin 1 ja 2 suodattimien mittauskohinan jakauma, RMSE arvot ja konsistenttiuden prosentti sekä alaindeksissä suodattimen oletama jakauma.

Suodatin	Tilamalli	Mittauskohina	RMSE _{xy} (m)	RMSE _z (m)	Kons (%)
EKF _{vmf}	1	vmf	0.16	0.13	94
	1	norm	0.13	0.09	98
PF _{vmf}	1	vmf	0.16	0.12	100
	1	norm	0.15	0.09	100
EKF _{vmf}	2	vmf	0.15	0.11	85
	2	norm	0.13	0.09	92
PF _{vmf}	2	vmf	0.19	0.15	89
	2	norm	0.17	0.13	91

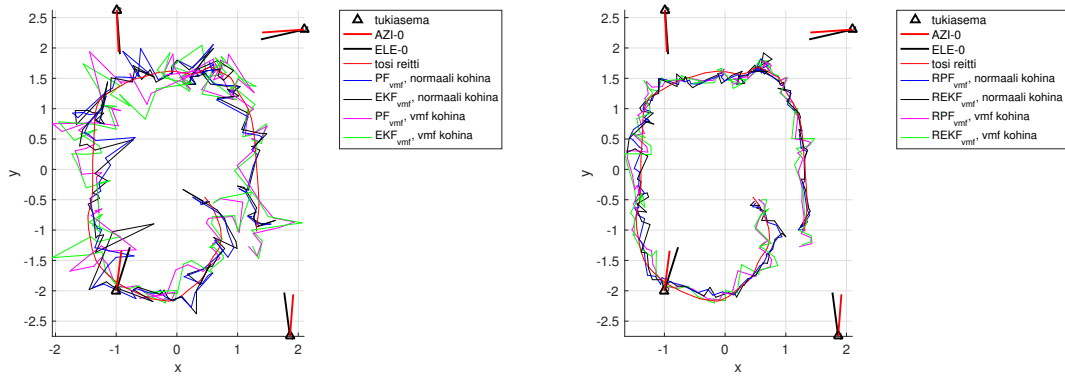
Erot ovat vain muutaman senttimetrin luokkaa, joten tilamallien valinnalla ei ole suurta vaikutusta paikannustarkkuuteen tässä simulaatiossa, jossa paikannettava kohde liikkuu normaalia kävelyvauhtia. Lisäksi mittaukset on tehty suhteellisen pienessä tilassa, joten käytetyllä tilamallin valinnalla ei perustellusti ole suurta vaikutusta.

4.2.3 Ulkolaisten suodatus

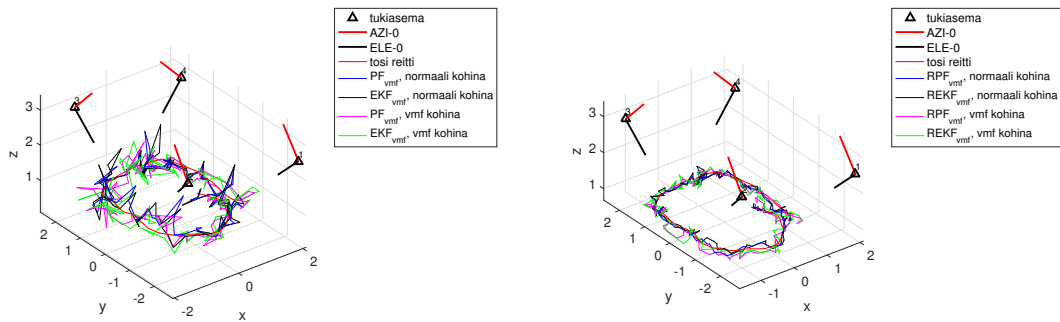
Robustien suodattimien tarkastelua varten mittausdataan simuloidaan ulkolaismittauksia 10 prosentin todennäköisyydellä mittauskohinan jakauman mukaan joko kahden komponentin normaalijakaumasta (contaminated normal distribution) tai von Mises–Fisher-jakaumasta. Syötetään ulkolaisia sisältävä mittausdata ei-robusteille von Mises–Fisher-jakautuneen kohinan olettavalle laajennetulle Kalmanin suodattimille ja partikkelisuodattimelle ja verrataan suodattimien toimintaa robusteihin

versioihin suodattimista. Käytetään pelkän paikan sisältämää tilamallia 1 ja samoja arvoja parametreille $\sigma_{\text{meas}} = 5^\circ$ ja $\sigma_{\text{suod}} = 8^\circ$ kuin edellä.

Kuvassa 4.6 on esitetty von Mises–Fisher-jakautuneen mittauskohinan olettavien robustien ja ei-robustien suodattimien antamat paikkaestimaatit, kun tilamallina käytetään tilamallia 1 ja mittauskohina on normaalijakautunut tai von Mises–Fisher-jakautunut.



(a) von Mises–Fisher-jakauman olettavat ei-robustit suodattimet tilamallilla 1, kun mittaukset sisältävät ulkolaisia (b) von Mises–Fisher-jakauman ja 10 prosenttia ulkolaisia olettavat robustit suodattimet tilamallilla 1, kun mittaukset sisältävät ulkolaisia



(c) von Mises–Fisher-jakauman olettavat ei-robustit suodattimet tilamallilla 1 sivusta kuvattuna, kun mittaukset sisältävät ulkolaisia (d) von Mises–Fisher-jakauman ja 10 prosenttia ulkolaisia olettavat robustit suodattimet tilamallilla 1 sivusta kuvattuna, kun mittaukset sisältävät ulkolaisia

Kuva 4.6 Todellinen reitti, tukiasemien paikat ja orientaatiot ja robustien ja ei-robustien suodattimien paikkaestimaatit tilassa kuvattuna sivulta ja ylhäältä katsottuna. Käytetään tilamallia 1 arvoilla $\sigma_{xy} = \sigma_z = 0.5 \text{ m}$ ja simuloituja mittauksia neljälle tukiasemalle. Suodattimissa käytetään parametria $\kappa = \frac{1}{\sigma_{\text{suod}}^2}$, missä $\sigma_{\text{suod}} = \frac{8\pi}{180}$ radiaaneina ja mittauskohinalle $\sigma_{\text{meas}} = 5^\circ$. Mittauksista 10 prosenttia on ulkolaisia.

Robustit suodattimet olettavat tietyn prosenttiosuuden kaikista mittauksista ulkolaisiksi. Kuvan 4.6 robusteissa suodattimissa on käytetty 10 prosentin oletusta. Robustissa laajennetussa Kalmanin suodattimessa vapausasteitten ν määrä on kolme.

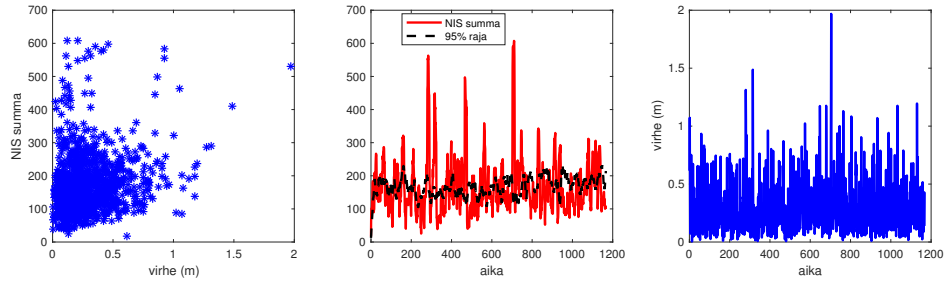
Kuvasta 4.6 nähdään, että ulkolaiset aiheuttavat suodatusreitteihin selkeitä piikkejä kun verrataan reittejä kuvaan 4.5. Robustit suodattimet antavat selvästi parempia paikkaestimaatteja kuin ei-robustit suodattimet, mikä nähdään reittien siloittumisena kun verrataan oikean- ja vasemmapuoleisia kuvia. Tarkempi data kuvan 4.6 suodattimien konsistenttiuksista ja RMSE arvoista on esitetty taulukossa 4.3.

Taulukko 4.3 Tilamallin 1 suodattimien mittauskohinan jakauma, RMSE arvot ja konsistenttiuden prosentti sekä alaindeksissä suodattimen oletama jakauma. Mittauksista 10 prosenttia on ulkolaisia.

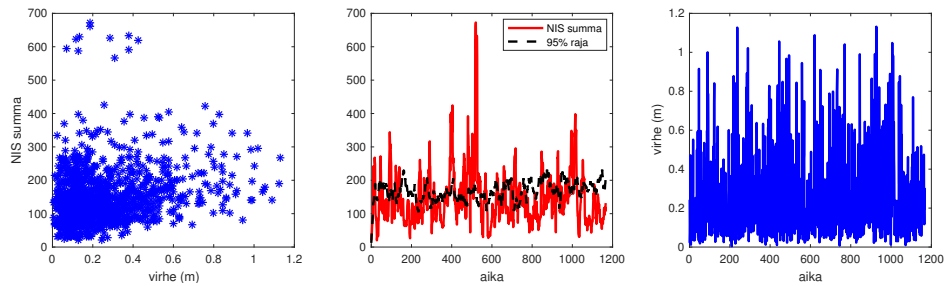
Suodatin	Mittauskohina	RMSE _{xy} (m)	RMSE _z (m)	Konsistenttius (%)
EKF _{vmf}	vmf	0.36	0.29	52
	norm	0.33	0.26	59
PF _{vmf}	vmf	0.33	0.25	74
	norm	0.30	0.23	78
REKF _{vmf}	vmf	0.18	0.13	89
	norm	0.14	0.11	96
RPF _{vmf}	vmf	0.18	0.11	100
	norm	0.16	0.11	100

Taulukon 4.3 arvoista nähdään, robustien suodattimien RMSE arvot ovat selvästi pienempiä kuin ei-robustien suodattimien. Ulkolaisten tulkitseminen mittauksiksi aiheuttaa virhettä paikkaestimaattiin, mikä näkyy ei-robustien suodattimien kaksinkertaisina RMSE arvoina verrattuna robustien suodattimien vastaaviin arvoihin. Robustien suodattimien RMSE arvot ovat samaa suuruusluokkaa taulukossa 4.2 esitettyjen arvojen kanssa.

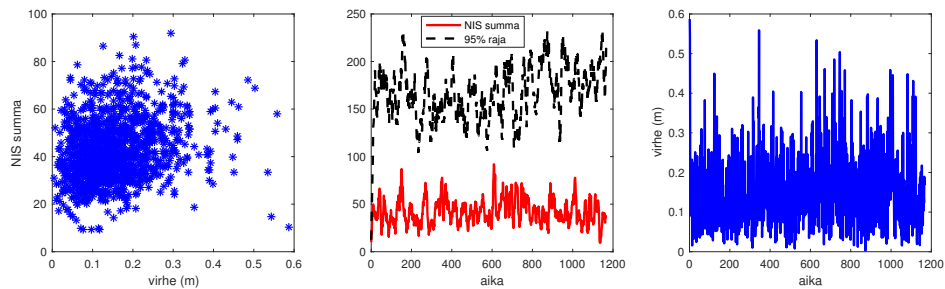
Robustien suodattimien konsistenttius prosentti on selvästi suurempi kuin ei-robustien suodattimien. Etenkin robustin laajennetun Kalmanin suodattimen konsistenttius on kaksinkertainen verrattuna ei-robustiin laajennettuun Kalmanin suodattimeen. Ulkolaiset vaikuttavat enemmän laajennetun Kalmanin suodattimen toimintaan kuin partikkelisuodattimen. Robusteista ja ei-robusteista laajennetuista Kalmanin suodattimien konsistenttiuksista on esitetty simulaation ajonaikainen konsistenttiuden testaus kuvassa 4.7, jossa valkoisuustestin tulos ilmoitetaan prosenttiosuutena neliöityjen normalisoitujen innovaatioiden summista, jotka alittavat 95 prosentin kvantiilin.



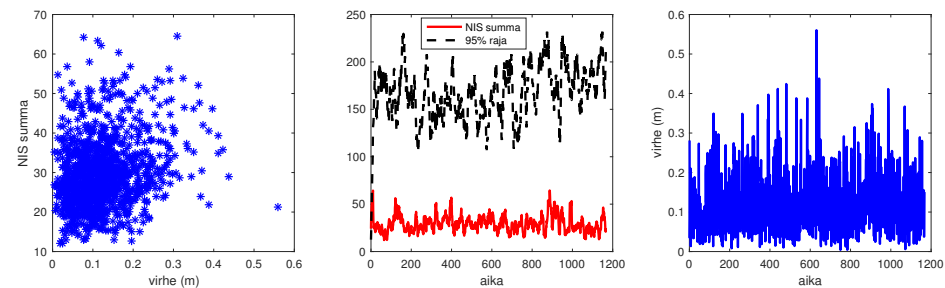
(a) Ei-robustin EKF_{vmf} NIS summa, 95 prosentin kvantiili ja virhe, kun kohina on VMF-jakautunut ja mittaukset sisältävät ulkolaisia



(b) Ei-robustin EKF_{vmf} NIS summa, 95 prosentin kvantiili ja virhe, kun kohina on normaalijakautunut ja mittaukset sisältävät ulkolaisia



(c) Robustin $REKF_{vmf}$ NIS summa, 95 prosentin kvantiili ja virhe, kun kohina on VMF-jakautunut ja mittaukset sisältävät ulkolaisia



(d) Robustin $REKF_{vmf}$ NIS summa, 95 prosentin kvantiili ja virhe, kun kohina on normaalijakautunut ja mittaukset sisältävät ulkolaisia

Kuva 4.7 Neliöidyn normalisoidun innovaation (NIS) summa, 95 prosentin kvantiili ja suodattimen RMSE konsistenttiuden mittarina robusteille ja ei-robusteille suodattimille.

Kuvassa 4.7 vasemmanpuoleisimmissa kuvaajissa on esitetty normalisoitujen neliöityjen innovaatioiden summa suodattimen virheen funktiona kymmeneltä aika-askeleelta. Keskimmaisissa kuvaajissa neliöityjen normalisoitujen innovaatioiden summat on piirretty ajan funktiona samaan kuvaajaan mustalla katkoviivalla piirretyn 95 prosentin rajan kanssa. Oikeanpuolimmaisissa kuvissa on suodattimen virhe ajan funktiona.

Vertaamalla keskimmäisiä kuvia robusteille ja ei-robusteille suodattimille nähdään, että robusteilla suodattimilla neliöidyn normalisoidun summista suurempi osa on 95 prosentin rajan alapuolella verrattuna ei-robusteihin suodattimiin. Robustien suodattimien konsistenttius prosentteina on suurempi kuin ei-robustien ja ne toimivat vakaammin. Taulukossa 4.3 esitetty konsistenttius kertoo prosenttiosuuden kaikista suodattimen neliöityjen normalisoitujen summien 95 prosentin rajan alittavista arvoista.

Vasemman- ja oikeanpuoleisista kuvista havaitaan, että suuri konsistenttius prosentti on yhteydessä pieniin normalisoitujen neliöityjen innovaatioiden summiin. Ei-robusteissa suodattimissa summat ovat suuruusluokkaa 10^3 tai suurempia, kun taas konsistenttisimmassa robusteissa suodattimissa summat ovat alle sadan. Ei-robusteissa suodattimissa myös virhe on huomattavasti suurempaa, jolloin paikkaestimaatti on virheellisempi kuin robustien suodattimien.

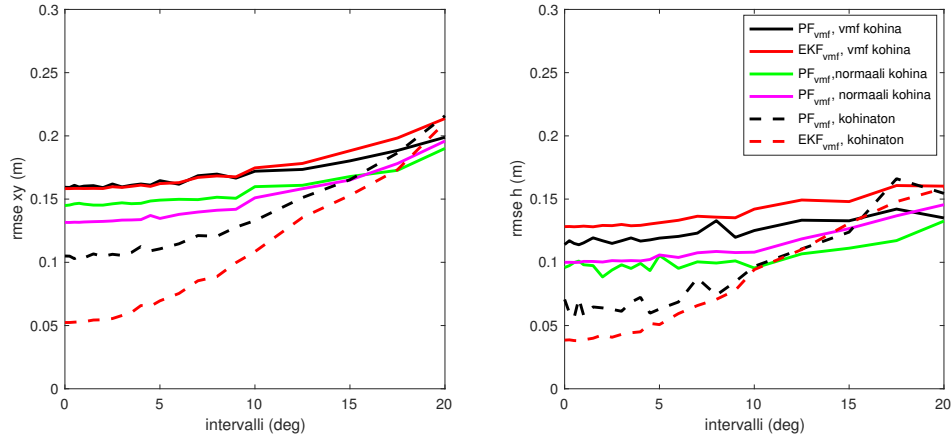
Mittausdatan sisältäessä ulkolaisia von Mises–Fisher-jakautuneen mittauskohinan olettavat robustit suodattimet toimivat paremmin kuin ei-robustit suodattimet, ja yhtä hyvin sekä normaalijakautuneen että von Mises–Fisher-jakautuneen mittauskohinan sisältämällä mittausdatalla.

4.2.4 Mittausten kvantisointi

Kvantisoinnilla tutkitaan mittausten pyöristämisen vaikutusta paikannuksen tarkkuuteen. Mittausten pyöristäminen mahdollistaa suuremman datamäärän keräämisen ja tarkempien kulmamittausten vastaanottamisen. [12, 21] Luodaan vektori, joka sisältää pisteet asetetun kulmavälin (intervalli) etäisyydellä toisistaan. Muunnetaan kulmamittaukset halutun asteen tarkkuudelle Matlab-ohjelmiston funktiolla *interp1*. Funktio interpoloi kulmien arvot pyöristämällä kulmamittauksen sitä lähimpänä olevaan arvoon luodussa vektorissa. Pyöristetyt kulmamittaukset annetaan suodattimelle.

Esitetään simuloitujen mittausten neliöllisen keskiarvon virhe tasossa ja korkeudessa kulmavälin funktiona kuvassa 4.8. Suodattimina käytetään von Mises–Fisher-

jakautuneen mittauskohinan olettavia partikkelisuodatinta ja laajennettua Kalmanin suodatinta keskihajonnalla $\sigma_{\text{suod}} = 8^\circ$. Kvantisointia testataan todellisella kohinattomalla datalla ja kohinaisella datalla. Kohinat ovat joko normaalijakautuneet tai von Mises–Fisher-jakautuneita keskihajonnalla $\sigma_{\text{meas}} = 5^\circ$.



Kuva 4.8 Kvantisoinnin vaikutus tason ja korkeuden neliöllisen keskiarvon virheeseen kohinaisella datalla ($\sigma_{\text{meas}} = 5^\circ$) ja kohinattomalla tosidadalla. Suodattimina käytetään von Mises–Fisher-jakauman olettavaa partikkelisuodatinta ja laajennettua Kalmanin suodatinta, kun tilamallina on tilamalli 1 ja $\sigma_{\text{suod}} = 8^\circ$ muutettuna parametriksi κ . Monte Carlo $N=10$.

Intervalli 0° tarkoittaa tarkkoja, pyöristämättömiä mittauksia. Kun pyöristyksen kulmaväli suurenee, tason ja korkeuden virhe kasvaa vähitellen. Kohinaisessa mitausdatassa normaalijakautunut ja von Mises–Fisher-jakautunut kohina on muodostettu käyttämällä 5 asteen keskihajontaa. Kuvasta 4.8 nähdään, että RMSE arvo ei juurikaan muutu kvantisointivälin ollessa pienempi kuin 5 astetta käytetystä suodattimesta ja mittauskohinan jakaumasta riippumatta. Kohinaisten mittausten pyöristäminen kulmavälille, joka on pienempi kuin σ_{meas} ei virheellistä paikannustulosta, joten kvantisointia voi käyttää. Jos kvantisoinnin väli on suurempi kuin keskihajonta, mittaukset pyöristyvät liikaa ja RMSE arvo kasvaa, mikä puolestaan lisää virhettä paikan estimoinnissa.

Tarkasteltaessa kohinatonta tosidataa pyöristyksellä on suurempi vaikutus kuin kohinaisella datalla. Kuvassa 4.8 katkoviivalla esitettyjen kuvaajien kulmakertoimet ovat suuremmat kuin kohinaisten datojen kuvaajat. Mittausten pyöristäminen kasvattaa heti virhettä ja virheellistää tällöin paikannustulosta. Todellisuudessa data sisältää aina kohinaa, joten mittausten kvantisointia voidaan soveltaa.

5. YHTEENVETO

Tässä työssä tutkittiin laajennettua Kalmanin suodatinta ja partikkelisuodatinta, joita sovellettiin paikannuksessa. Saapumiskulmamittauksille kehitettiin reaaliaikainen paikkaratkaisumalli. Työssä esiteltiin suodatuksen matemaattista taustaa ja johdettiin yhteys normaalijakauman ja von Mises–Fisher-jakauman välille. Riippuvuuden paikkaansapitävyyttä testataan simulaatioilla, joissa on testattu paikan ja vakionopeuden tilamallia normaalijakauman sekä von Mises–Fisher-jakauman malliin perustuvia suodattimia. Todellisen mittausdatan ja siihen simuloidun kohinan avulla toteutetun laajennetun Kalmanin suodattimen ja partikkelisuodattimen paikannustarkkuutta verrattiin keskenään tarkastelemalla neliöllisen kerkiarvon virhettä ja suodattimien konsistenttiutta.

Vertailun perusteella voidaan todeta, että von Mises–Fisher-jakautuneen mittauskohinan olettavat suodattimet toimivat paremmin kuin normaalijakauman olettavat suodattimet mittauskohinan todellisesta jakaumasta riippumatta. Tämä johtuu leveys suunnan mittausten kulmien kääntämisestä 180 asteella, kun korkeussuunnan mittaus on negatiivinen. Normaalijakautuneen mittauskohinan sisältämän datan kohdalla kääntö voi tapahtua väärään suuntaan. Tässä työssä tarkasteltu simuloitu reitti sisälsi vain muutaman tilanteen, jossa kuljetaan juuri tukiaseman alapuolelta (ELE=0). von Mises–Fisher-jakaumaa käyttämällä vältetään kyseinen Pohjoisnapa ongelma. Näissä suodattimissa mittausten keskihajonnan σ_{meas} suuruisten tai sitä suurempien keskihajontojen σ_{suod} käyttö antaa parhaat paikannustulokset.

Koska huone, jossa mittaukset suoritettiin, oli suhteellisen pieni ja paikannettava kohde liikkui kävelyvauhtia, ei vakionopeuden tilamallilla saada suurta eroa paikannustarkkuuteen verrattuna pelkän paikan sisältämään tilamalliin. Tilamallin valinnalla ei ollut tämän työn simulaatioissa merkittävää vaikutusta. Mittausten sisältyessä ulkolaisia robustit suodattimet parantavat paikannustulosta huomattavasti.

Suuremman datamäärän käsittelyn mahdollistava kulmien kvantisointi voidaan suorittaa kohinaisille mittauksille, kun kvantisointiväli on pienempi kuin mittauskohinan keskihajonta. Keskihajontaa σ_{meas} suurempi kvantisoinnin väli pyöristää mittauksia liikaa, mikä näkyy neliöllisen keskiarvon virheen kasvuna. Kohinattoman

mittausdatan pyöristäminen pienelläkin kvantisointivälillä kasvattaa neliöllisen keskiarvon virhettä.

Mahdollinen jatkokutkimuksen aihe on von Mises–Fisher jakauman tutkiminen ja soveltaminen erilaisissa suodattimissa ja niiden mittausmalleissa. Erityisesti mittausmallin muodostaminen laajennetussa Kalmanin suodattimessa kaipaa vielä erityishuomiota. Simulaatioissa tila- ja mittausmalliin voitaisiin liittää kiihtyvyyksien tai saapuvien signaalien voimakkuuksien tarkastelu. Kiihtyvyys kertoisi, koska käyttäjä on liikkeessä ja koska paikoillaan, jolloin tilanteen mukaan sovelletaan vakionopeustilamallia tai pelkkää käyttäjän paikkaa ilmaisevaa tilamallia. Tällöin mittaus-tilanteessa paikannettavan kohteen nopeuden vaihtelut voidaan mahdollisesti ottaa huomioon. Kohteen etäisyyden tarkastelussa saapuvien signaalien voimakkuuksista voisi olla hyötyä.

LÄHTEET

- [1] A. Alaimo, V. Artale, C. Milazzo, A. Ricciardello & L. Trefletti, *Mathematical modeling and control of a hexacopter*, International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS), IEEE, 2013. (viitattu 28.2.2017). Saatavissa: <http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?arnumber=6564793>
- [2] S. Ali-Löytty, *Kalmanin suodatin ja sen laajennukset paikannuksessa*, Tampereen Teknillinen yliopisto, 2004. (viitattu 9.6.2016). Saatavissa: <http://URN.fi/URN:NBN:fi:tty-201012141388>
- [3] S. Ali-Löytty, N. Sirola & R. Piché, *Consistency of Three Kalman Filter Extensions in Hybrid Navigation*, European Journal of Navigation, 2006. (viitattu 12.7.2016). Saatavissa: <http://urn.fi/URN:NBN:fi:tty-201406191312>
- [4] A. Banerjee, I. S. Dhillon, J. Ghosh & S. Sra, *Clustering on the Unit Hypersphere using von Mises-Fisher Distributions*, Machine Learning Research, 2005. (viitattu 14.2.2017). Saatavissa: <http://www.jmlr.org/papers/volume6/banerjee05a/banerjee05a.pdf>
- [5] Y. Bar-Shalom, X.-R. Li & T. Kirubarajan, *Estimation with Applications To Tracking and Navigation*, A Wiley-Interscience Publication, 2001.
- [6] J. Blankenbach & A. Norrdine, *Magnetic Indoor Local Positioning System*, Indoor Wayfinding and Navigation, CRC Press, 2015. (viitattu 24.1.2017). Saatavissa: <http://dx.doi.org/10.1201/b18220-5>
- [7] V. S. Borkar, V. Ejov, J. A. Filar & G. T. Nguyen, *Hamiltonian Cycle Problem and Markov Chains*, Springer Science+Business Media, 2012. (viitattu 28.6.2016). Saatavissa: <http://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4614-3232-6>
- [8] J. J. Caffery & G. L. Stüber, *Overview of Radiolocation in CDMA Cellular Systems*, IEEE Communications Magazine, 1998. (viitattu 16.6.2016). Saatavissa: <http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?arnumber=667411>
- [9] H. Cramer, *Random Variables and Probability Distributions*, 3. painos, Cambridge University Press, 2004. (viitattu 5.12.2016). Saatavissa: <https://books.google.fi/books?hl=fi&lr=&id=QW3kkBzd00QC&oi=fnd&pg=PP9&dq>

- [10] A. Doucet, N. de Freitas & N. Gordon, *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, Springer, 2013. (viitattu 18.1.2017). Saatavissa: <https://books.google.fi/books?id=BWPaBwAAQBAJ&pg=PA135&lpg>
- [11] M. H. Faber, *Statistics and Probability Theory*, Springer, 2012. (viitattu 1.3.2017). Saatavissa: <http://download.springer.com/static/pdf/251/bok%253A978-94-007-4056-3.pdf?originUrl=http%3A%2F%2Flink.springer.com%2Fbook%2F10.1007%2F978-94-007-4056-3>
- [12] M. Fu & C. E. de Souza, *State estimation for linear discrete-time systems using quantized measurements*, Automatica, 2009. (viitattu 28.3.2017). Saatavissa: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109809004439>
- [13] A. Gelb, *Applied Optimal Estimation*, The M.I.T. Press, 1947.
- [14] S. Goswami, *Indoor Location Technologies*, Springer New York, 2013. (viitattu 24.1.2017). Saatavissa: <http://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4614-1377-6>
- [15] E. Grafarend & J. Awange, *Applications of Linear and Nonlinear Models*, Springer, 2012. (viitattu 13.1.2017). Saatavissa: <http://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-22241-2>
- [16] N. Gupta, *Inside Bluetooth Low Energy*, Artech House, 2013. (viitattu 27.1.2017). Saatavissa: <http://site.ebrary.com/lib/ttyk/reader.action?docID=10857832>
- [17] F. Gustrau, *RF and Microwave Engineering*, John Wiley and Sons, Incorporated 2012. (viitattu 10.4.2017). Saatavissa: <http://ebookcentral.proquest.com/lib/tut/detail.action?docID=915754>
- [18] B. D. Hahn, *Essential MATLAB for Scientists and Engineers*, Butterworth-Heinemann, 2002. (viitattu 5.4.2017). Saatavissa: <https://books.google.fi/books?id=B2aIHX4JcWYC&pg=PA64&dq=Matlab+atan2>
- [19] A. J. Haug, *Bayesian Estimation and Tracking*, Wiley, 2012. (viitattu 5.4.2017). Saatavissa: <http://ebookcentral.proquest.com/lib/tut/detail.action?docID=837618>
- [20] S. E. Houts, S. G. Dektor & S. M. Rock, *A Robust Framework for Failure Detection and Recovery for Terrain-Relative Navigation*, Unmanned Untethered Submersible Technology, 2013. (viitattu 13.7.2016). Saatavissa:

https://web.stanford.edu/group/arl/sites/default/files/public/publications/Robust_TRN_Framework.pdf

- [21] J. Hu, Z. Wang, B. Shen & H. Gao, *Quantised recursive filtering for a class of nonlinear systems with multiplicative noises and missing measurements*, International Journal of Control, 2013. (viitattu 12.4.2017). Saatavissa: <http://dx.doi.org/10.1080/00207179.2012.756149>
- [22] I. Jami, M. Ali & R. F. Ormondroyd, *Comparison of methods of locating and tracking cellular mobiles*, Novel Methods of Location and Tracking of Cellular Mobiles and Their System Applications IEE, 1999. (viitattu 16.6.2016). Saatavissa: <http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?arnumber=789874>
- [23] G. Jekabsons, V. Kairish & V. Zuravlyov, *An Analysis of Wi-Fi Based Indoor Positioning Accuracy*, Scientific Journal of Riga Technical University, 2011. (viitattu 15.6.2016). Saatavissa: <http://www.degruyter.com/downloadpdf/j/acss.2011.44.issue--1/v10143-011-0031-4/v10143-011-0031-4.xml>
- [24] A. Kangras & S. Fischer, *Calibration of positioning systems*, Google Patents, 2005. (viitattu 22.2.2017). Saatavissa: <https://www.google.com/patents/US6957072>
- [25] E. D. Kaplan & C. J. Hegarty, *Understanding GPS: principles and applications*, Artech House, 2006. (viitattu 16.3.2017). Saatavissa: http://d1.amobbs.com/bbs_upload782111/files_33/ourdev_584835021W59.pdf
- [26] M. Koivisto, *Graafipohjainen partikkelisuodatin sisätalapaikannuksessa*, Tampereen Teknillinen yliopisto, 2014. (viitattu 28.6.2016). Saatavissa: <http://URN.fi/URN:NBN:fi:tty-201511231748>
- [27] S. Kotz & S. Nadarajah, *Multivariate t Distributions and Their Applications*, Cambridge University Press, 2004. (viitattu 19.8.2016). Saatavissa: <https://books.google.fi/books?id=dmxtU-TxTi4C&pg=PA165&lpg=PA165&dq=S.+Kotz+and+S.+Nadarajah>
- [28] J. B. Kuipers, *Quaternions and rotation sequences: a primer with applications to orbits, aerospace, and virtual reality*, Princeton University Press, 2002.
- [29] K. L. Lange, R. J. A. Little & J. M. G. Taylor, *Robust Statistical Modeling Using the t Distribution*, Journal of the American Statistical Association, 1989. (viitattu 23.8.2016). Saatavissa: https://www.jstor.org/stable/pdf/2290063.pdf?_=1471955269884

- [30] M. Lefebvre, *Applied Probability and Statistics*, Springer New York, 2006. (viitattu 18.8.2016). Saatavissa: <http://link.springer.com/book/10.1007/0-387-28505-9>
- [31] M. Lefebvre, *Basic Probability Theory with Applications*, Springer New York, 2009. (viitattu 16.8.2016). Saatavissa: <http://link.springer.com/book/10.1007/978-0-387-74995-2>
- [32] P. Li, T. Zhang & A. E. C. Pece, *Visual contour tracking based on particle filters*, Image and Vision Computing, 2003. (viitattu 28.6.2017). Saatavissa: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0262885602001336>
- [33] S. Martikainen, *GPS-satelliitin kellopoikkeaman robusti estimointi*, Tampereen Teknillinen yliopisto, 2012. (viitattu 4.8.2016). Saatavissa: <http://URN.fi/URN:NBN:fi:tty-201208301253>
- [34] M. Miller, *Discovering Bluetooth*, CYBEX, 2001.
- [35] A. I. Mourikis & S. I. Roumeliotis, *Analysis of Positioning Uncertainty in Simultaneous Localization and Mapping (SLAM)*, International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS), IEEE, 2004. (viitattu 22.2.2017). Saatavissa: <http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?arnumber=1389322>
- [36] B. Parkinson & J. Spilker, *Global Positioning System: Theory and Applications Volume I*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1995. (viitattu 16.3.2017). Saatavissa: <http://ebookcentral.proquest.com/lib/tut/reader.action?docID=3111663>
- [37] T. Perälä, *Robust Extended Kalman Filtering in Hybrid Positioning Applications*, Tampereen Teknillinen yliopisto, 2008. (viitattu 12.1.2017). Saatavissa: http://math.tut.fi/posgroup/perala_mscth.pdf
- [38] R. Piché, S. Särkkä & J. Hartikainen, *Recursive Outlier-Robust Filtering and Smoothing For Nonlinear Systems Using The Multivariate Student-t Distribution*, International Workshop on Machine Learning for Signal Processing, IEEE, 2012. (viitattu 4.8.2016). Saatavissa: <http://urn.fi/URN:NBN:fi:tty-201311051415>
- [39] S. Särkkä, *Bayesian Filtering and Smoothing*, Cambridge University Press, 2013.
- [40] M. Šenk & L. Chéze, *Rotation sequence as an important factor in shoulder kinematics*, Clinical Biomechanics, 2006. (viitattu 18.4.2017). Saatavissa: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0268003305002214>

- [41] D. Stirzaker, Cambridge, *Probability and Random Variables*, University Press, 1999. (viitattu 4.11.2017). Saatavissa: <http://ebookcentral.proquest.com/lib/tut/detail.action?docID=202358>,
- [42] T. Vaupel, J. Seitz, F. Kiefer, S. Haimerl & J. Thielecke, *Wi-Fi positioning: System considerations and device calibration*, Indoor Positioning and Indoor Navigation, 2010. (viitattu 27.3.2017) Saatavissa: <http://ieeexplore.ieee.org/document/5646207/#>
- [43] A. Watt & M. Watt, *Advanced Animation and Rendering Techniques*, Addison-Wesley Professional, 1992. (viitattu 27.2.2017). Saatavissa: http://www.cs.cmu.edu/afs/cs/academic/class/15462-s14/www/lec_slides/3DRotationNotes.pdf
- [44] Dr. Claus Weitkamp, *Lidar: Range-Resolved Optical Remote Sensing of the Atmosphere*, Springer New York, 2005. (viitattu 9.5.2017). Saatavissa: <http://link.springer.com/book/10.1007%2Fb106786>
- [45] G. Welch & G. Bishop, *An Introduction to the Kalman Filter*, Department of Computer Science University of North Carolina at Chapel Hill, 2006. (viitattu 12.7.2016). Saatavissa: https://www.cs.unc.edu/~welch/media/pdf/kalman_intro.pdf
- [46] K. Wisniewski, *Finite Rotation Shells*, Springer Netherlands, 2010. (viitattu 27.1.2017). Saatavissa: <http://link.springer.com/book/10.1007/978-90-481-8761-4/page/1>
- [47] L. Xiong, *A Selective Model to Suppress NLOS Signals in Angle-of-Arrival (AOA) Location Estimation*, Personal, Indoor and Mobile Radio Communications, The Ninth IEEE International Symposium, 1998. (viitattu 20.6.2016). Saatavissa: http://www.vtvt.ece.vt.edu/research/references/uwb/ranging_mobile_location/selective_model_aoa_estimation.pdf