



TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

MIKE KOIVISTO

GRAAFIPOHJAINEN PARTIKKELISUODATIN SISÄTILAPAI-
KANNUKSESSA

Diplomityö

Tarkastajat: Prof. Robert Piché ja
TkT Simo Ali-Löytty
Tarkastajat ja aihe hyväksytty
Luonnontieteiden tiedekuntaneuvoston
kokouksessa 13.08.2014

TIIVISTELMÄ

TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

Teknis-luonnontieteellinen koulutusohjelma

KOIVISTO, MIKE: Graafipohjainen partikkelisuodatin sisätilapaikannuksessa

Diplomityö, 64 sivua

Joulukuu 2015

Pääaine: Matematiikka

Tarkastajat: professori Robert Piché ja TkT Simo Ali-Löytty

Avainsanat: Sisätilapaikannus, Graafipohjainen karttarakenne, WLAN, BLE, Partikkelisuodatin

Tässä diplomityössä käsitellään sisätilapaikannusta ja siihen tarkoitettua suodatinta WLAN-tukiasemista sekä BLE-lähettimistä saatujen mittausten avulla. Työssä esitellään tarkemmin sisätilapaikannusmenetelmä, joka käyttää mittausten lisäksi tehokkaasti myös rakennuksen pohjapiirustukseen perustuvaa karttainformaatiota käyttäjän sijainnin määrittämisessä. Suodatuksen taustalla olevan teorian lisäksi työssä esitellään suodattimen toiminta ja saadut tulokset todellisia mittauksia sisältävien testireittien avulla.

Työssä esiteltävä graafipohjainen partikkelisuodatin on graafipohjaiselle karttarakenteelle luotu partikkelisuodatin, joka rajoittaa käyttäjän sijaintia ja liikkumista rakennuksen rakenteiden mukaisesti. Graafipohjainen karttarakenteessa käytäviä sekä pieniä huoneita mallinnetaan solmupisteiden välisten linkkien avulla ja suurempia avoimia alueita mallinnetaan avoimina tiloina, jossa käyttäjän liikkuminen on mahdollista kahdessa ulottuvuudessa. Tässä työssä esitellään myös graafipohjainen tilamalli, joka mallintaa käyttäjän liikkeen mahdollisimman todenmukaisesti käyttäjän päämäärätietoisuuden huomioiden.

Graafipohjaista partikkelisuodattimen suorituskykyä testataan työssä esitetyllä karttarakenteella Tampereen teknillisen yliopiston Tietotalosta kerättyjen testireittien avulla kahdella eri mittaustiheydellä. Suodattimen antamia paikannustuloksia verrataan eri tilamallia käyttävän graafipohjaisen partikkelisuodattimen sekä vakionopeus- ja vakiopaikkamallia käyttävien Kalmanin suodattimien tuloksiin. Saatujen tulosten ja niistä tehtyjen analyysien pohjalta, esitellyn suodattimen paikannustarkkuus havaitaan vertailumenetelmiä paremmaksi lähes jokaisessa testitilanteessa.

ABSTRACT

TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

Master's Degree Programme in Science and Engineering

KOIVISTO, MIKE: Graph-based particle filter in indoor positioning

Master of Science Thesis, 64 pages

December 2015

Major: Mathematics

Examiners: Prof. Robert Piché and D.Tech. Simo Ali-Löytty

Keywords: Indoor positioning, Graph-based map structure, WLAN, BLE, Particle filter

In this thesis, a filtering method that uses WLAN and BLE measurements to estimate user's position indoors is presented. In addition to WLAN and BLE measurements, the presented indoor positioning method uses an economical map structure that is generated from a floor plan of a building. Essential probability theory as well as filtering theory is introduced before the performance of the filter tested with real data and realistic test tracks.

The presented graph-based particle filter is a special particle filter that is created on the top of the graph-based map structure which constraints naturally the location and the movement of the user based on the structure of the building. Small or narrow areas such as corridors and small rooms are modeled with links and large open areas as well as outdoors are modeled with polygons, where moving is free in two dimensions. In this thesis, a graph-based state model that models the movement of the user considering its goal oriented behavior is also presented.

In the end of the thesis, the tests of the graph-based particle filter with the presented map structure are carried out in Tietotalo building in Tampere University of Technology with two different measurement scanning interval. Results of the presented filter are compared with results from the similar filter considering a different state model, the constant velocity Kalman filter and the constant position Kalman filter. Based on the results, the presented filter is outperforming the comparison methods in almost every testcase.

Alkusanat

Tämä diplomityö on kirjoitettu Tampereen teknillisen yliopiston matematiikan laitoksella, missä aloitin työsuhteeni yli kaksi vuotta sitten henkilökohtaisen paikannuksen tutkimusryhmässä. Diplomityö sai alkunsa työskennellessäni tutkimusapulaisena Nokian rahoittamassa sisätilapaikannusprojektissa ja työn sisältö muodostui tutkimuksen edetessä.

Haluan kiittää erityisesti diplomityöni ohjaajia ja tarkastajia professori Robert Pichéä ja TkT Simo Ali-Löyttyä erittäin mielenkiintoisesta diplomityön aiheesta sekä tuesta ja neuvoista, joita olen niin tutkimusprojekteissa kuin diplomityönkin tekemisessä saanut. Erityiskiitokset haluan osoittaa Simo Ali-Löyttylle diplomityöhön liittyvistä korjausehdotuksista ja kommentteista sekä DI Henri Nurmiselle tuesta ja arvokkaista neuvoista tutkimustyöni aikana. Haluan kiittää myös kaikkia muita paikannusryhmän jäseniä kannustavasta työilmapiiristä ja avusta, että olen aina tarvittaessa saanut.

Haluan kiittää myös kaikkia läheisiä opiskelukavereitani yhteisistä hetkistä sekä tuesta ja avusta opintojeni varrella. Lopuksi haluan osoittaa erityisen kiitokseni perheelleni ja tyttöystävälleni Marialle, jotka ovat kannustaneet ja tukeneet minua opintojeni aikana kaikissa tilanteissa.

Tampere, 8. marraskuuta 2015

Mike Koivisto
Insinöörinkatu 68 A 30
33720 TAMPERE

Sisältö

1	Johdanto	1
2	Taustateoria	5
3	Graafipohjainen karttarakenne	14
4	Graafipohjainen partikkelisuodatin	17
4.1	Suodatusongelma	17
4.2	Bayesiläinen suodatus	18
4.3	SMC-menetelmät	20
4.3.1	Monte Carlo -integrointi	20
4.3.2	Painotuspoiminta	21
4.3.3	Sekventiaalinen painotuspoiminta	23
4.3.4	Uudelleennäytteistys	24
4.4	Graafipohjainen partikkelisuodatin	24
4.4.1	Tilamalli	25
4.4.2	Yleinen graafipohjaisen partikkelisuodattimen algoritmi	25
4.4.3	Algoritmin suppeneminen	26
5	Graafipohjainen partikkelisuodatin paikannuksessa	35
5.1	Karttaobjektien pituuksiin perustuva graafipohjainen tilamalli	36
5.2	Mittausmalli	41
5.3	Piste-estimaatin valinta	42
5.4	Graafipohjaisen partikkelisuodattimen algoritmi	43
6	Testit ja tulokset	47
6.1	Testireitit ja vertailumenetelmät	47
6.2	Tulokset	50
6.3	Tulosten analysointi	55

7 Yhteenveto**58****Kirjallisuutta****60**

Merkinnät

\subset	osajoukko
\in	kuuluu joukkoon
\cap	leikkaus
\cup	yhdiste
\propto	suoraan verrannollisuus
\star	projektiivinen tulo
\mathbb{N}	luonnollisten lukujen joukko
\mathbb{R}	reaalilukujen joukko
\mathbb{R}_0	ei-negatiivisten reaalilukujen joukko
Ω	otosavaruus eli perusjoukko
\mathcal{N}	nollajoukko
\mathcal{R}_b	rajoitettujen ja reaalisten funktioiden joukko
\mathcal{F}	sigma-algebra
$\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$	sigma-algebran \mathcal{F} ali-sigma-algebra
$A \in \mathcal{F}$	joukko sigma-algebrassa
A^c	joukon A komplementti
\mathcal{B}_d	d -ulotteinen Borelin sigma-algebra
$\sigma(A)$	joukon A generoima sigma-algebra
$\mu(A)$	joukon A mitta
$\mu \ll \nu$	mitta μ on absoluuttisesti jatkuva mitan ν suhteen

$\mu \perp v$	mitat μ ja v ovat singulaariset
P	todennäköisyysmitta
(Ω, \mathcal{F})	mitallinen avaruus
(Ω, \mathcal{F}, P)	todennäköisyysavaruus
\mathbf{x}	satunnaismuuttuja tai -vektori
\mathbf{x}_t	stokastinen prosessin tila ajanhetkellä t
$\{\mathbf{x}_t\}$	stokastinen prosessi
\mathbf{x}_t^i	partikkeli eli näyte prosessin tilan jakaumasta
$w(\mathbf{x}_t^i)$	partikkelin \mathbf{x}_t^i paino ajanhetkellä t
$P(\mathbf{x} \in A)$	joukon A todennäköisyys
$P(\mathbf{x} \in A \mathcal{G})$	joukon A todennäköisyys ali-sigma-algebran \mathcal{G} suhteen
$\mathbb{E}[\mathbf{x}]$	satunnaismuuttujan \mathbf{x} odotusarvo
$\mathbb{E}[\mathbf{x} \mathcal{G}]$	satunnaismuuttujan \mathbf{x} ehdollinen odotusarvo ali-sigma-algebran suhteen
$\ \mathbf{x}\ _p$	satunnaismuuttujan \mathbf{x} L_p normi
$\ f\ _\infty$	funktion f supremum normi eli L_∞ normi
I_A	joukon A indikaattorifunktio
χ_A	joukon A karakteristinen funktio
$\int f(x)dx$	funktion f integraali
(f, μ)	funktion f integraali mitan μ suhteen
$\delta(\mathbf{x})$	Diracin deltafunktio
η_t^N	ennustusjakauman mitan η_t approksimaatiomitta
$\bar{\pi}_t^N$	suodatusjakauman mitan π_t approksimaatiomitta ennen uudelleennäytteistystä
π_t^N	suodatusjakauman mitan π_t approksimaatiomitta uudelleennäytteistykseen jälkeen

$A \in \mathbb{R}^{n \times m}$	$n \times m$ -kokoinen reaalinen matriisi
A^T	matriisin transpoosi
$P_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_t \mathbf{x}_{t-1})$	tilamallin määrittämä todennäköisyysjakauma
$P_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}_t \mathbf{x}_t)$	mittaussmallin määrittämä todennäköisyysjakauma
$P(\mathbf{x}_t; f(\mathbf{x}_{t-1}, \cdot))$	funktion $f(\mathbf{x}_{t-1}, \cdot)$ avulla muodostettu satunnaisuuttujan todennäköisyysjakauma
$\mathbf{x} \sim \mathcal{U}(a, b)$	välille $[a, b]$ tasajakautunut satunnaismuuttuja
$\mathbf{x} \sim \mathcal{N}(m, Q)$	normaalijakautunut satunnaismuuttuja parametrein m ja Q
$\text{cat}(c_1, \dots, c_n)$	kategorinen jakauma, missä c_i on luokan i todennäköisyys
\mathcal{T}	systemin topografia-parametri
$\mathbf{v}_t, \mathbf{w}_t$	tila- ja mittaussmallin kohinat ajanhetkellä t
σ_v, σ_α	vauhdin ja suunnan hajonnat
$\hat{\mathbf{x}}_t$	odotusarvo ajanhetkellä t
$\hat{\Sigma}_t$	kovarianssimatriisi ajanhetkellä t
$\arg \min_x f(x)$	piste tai pistejoukko, joka minimoi funktion $f(x)$ muuttujan x suhteen
$G = (S, O)$	solmupisteistä ja karttaobjekteista koostuva karttarakenne
$s_k \in S$	solmupisteiden joukon S solmu s_k
$\lambda_k \in O$	karttaobjektien joukon O karttaobjekti λ_k
$\text{DIR}(\lambda_k)$	linkkityyppisen karttaobjektin λ_k suunta
$\text{AREA}(\lambda_k)$	avoin alue -tyyppisen karttaobjektin λ_k pinta-ala
$\text{LENGTH}(\lambda_k)$	karttaobjektin λ_k pituus
CORRIDOR_WIDTH	keskimääräinen rakennuksen käytävän leveys
$g(\mathbf{x}, \mathcal{T})$	kuvaus, joka kuvaa karttarakenteella olevan tilan karteesiseen koordinaatistoon

l_{max}	karttaobjektien kokonaispituuden yläraja
v_{min}, v_{max}	vauhdin ala- ja yläraja
N	partikkelien eli näytteiden lukumäärä
ESS_{limit}	uudelleennäytteistyksen kynnyksarvo

Lyhenteet

AN	Avoimen alueen ja graafin yhdistävä solmu (Accessor Node)
AP	Langattoman tietoliikenneverkon tukiasema (Access Point)
BLE	Langaton ja energiatehokas Bluetooth-tiedonsiirto- menetelmä (Bluetooth Low Energy)
CPKF	Vakiopaikkamallia käyttävä Kalmanin suodatin (Constant Position Kalman Filter)
CVKF	Vakionopeusmallia käyttävä Kalmanin suodatin (Constant Velocity Kalman Filter)
ESS	Efektiiivinen näytteiden lukumäärä (Effective Sample Size)
GBPF	Graafipohjainen partikkelisuodatin (Graph-Based Particle Filter)
GNSS	Maailmanlaajuisesti saatavilla oleva satelliittipaikan- nusjärjestelmä (Global Navigation Satellite System)
GPS	Maailmanlaajuinen satelliittipaikannusjärjestelmä (Global Positioning System)
KF	Kalmanin suodatin (Kalman Filter)
MAP	Estimaatti, joka maksimoi posteriorijakauman (Maximum A Posteriori)
PF	Partikkelisuodatin (Particle Filter)

RM	Tukiasemakohtainen signaalinvoimakkuutta paikan funktiona kuvaava kartta (Radio Map)
RSS	Radiosignaalin voimakkuus (Radio Signal Strength)
SLAM	Paikannusmenetelmä, jonka avulla pyritään muodostamaan samanaikaisesti myös tutkittavan alueen kartta (Simultaneous Localization and Mapping)
SMC	Sekventiaalinen Monte Carlo -menetelmä (Sequential Monte Carlo)
TLL	Karttaobjektien kokonaispituuksiin perustuvat siirtymätodennäköisyydet (Total Link Length)
UE	Käyttäjän päätelaite (User Equipment)
UWB	Laajaa taajuuskaistaa käyttävä radioteknologia (Ultra Wide Band)
WLAN	Langaton lähiverkko (Wireless Local Area Network)

Luku 1

Johdanto

Teknologian nopean kehittymisen myötä erilaisista paikannusmenetelmistä on tullut osa jokapäiväistä arkea yhä tehokkaampien tietokoneiden sekä mobiililaitteiden myötä. Tämä on mahdollistanut tavanomaisen satelliittipaikannuksen kehittymisen ja paikannustarkkuuden parantamisen, mutta se on saanut aikaan myös sisätilapaikannuksen suosion nopean kasvamisen viime vuosien aikana. Koska satelliittipaikannuksessa (*Global Navigation Satellite System* GNSS), käytettyjen satelliittien lähettämien signaalien, kuten GPS-signaalien (*Global Positioning System*, GPS) laatu heikkenee merkittävästi sisätiloissa, on sisätilapaikannuksessa käytettävä muita saatavilla olevia menetelmiä. [26, 31]

Satelliittipaikannuksesta poiketen sisätiloissa suoritettavaan paikannukseen ei ole olemassa valmista, kaikkialla saatavissa olevaa ja juuri paikannukseen tarkoitettua teknologiaa. Sisätilapaikannukseen onkin käytetty jo olemassa olevaa teknologiaa, kuten langattoman lähiverkon (*Wireless Local Area Network*, WLAN) infrastruktuuria, tai sisätilapaikannukseen tarkoitettuja teknologioita. Sisätilapaikannukseen tarkoitettuilla järjestelmillä saavutetaan tavallisesti muita menetelmiä tarkempia tuloksia ja

näihin menetelmiin kuuluvat muun muassa UWB (*Ultra Wide Band*) -järjestelmät sekä erilaiset anturiverkot [27]. Paikannukseen suunnittelemattoman teknologian hyvinä puolina kuitenkin on, että kyseinen teknologia on suhteellisen edullista ja sitä on helposti saatavilla [37].

WLAN-signaaleihin perustuvaa paikannus on edellä mainituista menetelmistä yksi yleisimmistä ja tutkituimmista sisätilapaikannusmenetelmistä sen yleisyyden takia, mutta muitakin menetelmiä on tutkittu paljon mahdollisimman hyvän paikannustarkkuuden saavuttamiseksi. Eräs tällainen teknologia on vähän energiaa kuluttava ja edullinen matalaenerginen Bluetooth (*Bluetooth Low Energy*, BLE)-järjestelmä, joka usein koostuu melko pienistä radiosignaaleja lähettävistä lähettimistä [17]. Sekä WLAN-että BLE-signaaleihin perustuvan sisätilapaikannuksen etuna on se, että lähes kaikki nykyiset ja uudet mobiililaitteet tukevat kyseisiä signaaleja, jolloin paikannuspalveluja voidaan käyttää lähes jokaisen ihmisen mobiililaitteessa [32].

Sisätilapaikannuksessa käyttäjän sijainnin määrittämisessä käytetään tavallisesti apuna paikannusteknologiasta saatavia radiosignaaleja ja niiden voimakkuuksia. Jotkin paikannusmenetelmät käyttävät erilaisia käyttäjän mobiililaitteessa olevia inertiaalisensoreita lisäinformaation lähteenä, jolloin paikannustarkkuutta voidaan parantaa [10]. Näiden lisäksi paikannustarkkuutta voidaan parantaa rakennuksen pohjapiirustukseen perustuvalla karttainformaatiolla, joka rajoittaa ihmisten liikettä rakennuksessa luonnollisesti rakennuksen rakenteiden mukaisesti [10, 25, 41]. Karttainformaation käyttö ei kuitenkaan ole aina mahdollista sen hankalan saatavuuden vuoksi. Tällaisia tilanteita varten on luotu SLAM-menetelmä (*Simultaneous Localization and Mapping*, SLAM), joka pyrkii paikannuksen lisäksi muodostamaan ja tunnistamaan tutkittavasta alueesta siihen liittyvän karttainformaation saatavilla olevan informaation avulla [47].

WLAN- ja BLE-signaaleihin perustuvia paikannusmenetelmiä on useita ja osa menetelmistä olettaa, että radiosignaaleita lähettävien tukiasemien ja lähettimien sijainnit tunnetaan. Vaikka tukiasemien sijainteja ei tiedetä, voidaan ne määrittää alustavan mittausdatan perusteella. Vastaavalla tavalla voidaan määrittää myös tukiasemien ominaiset vaimenemismallin parametrit, mikäli paikannuksessa käytetään radiosignaalien vaimenemismalliin perustuvia menetelmiä [38]. Alustavan mittausdatan perusteella jokaiselle rakennuksen mittauspisteelle voidaan määrittää yksikäsitteinen radiosignaalien voimakkuuksista koostuva sormenjälki. Kun sormenjälkiä on kerätty rakennuksesta riittävästi, voidaan jokaiselle tukiasemalle muodostaa kuuluvuusaluekartta tai radiokartta (*Radio Map*, RM), joka kuvaa tukiaseman lähettämän signaalin

voimakkuutta paikan funktiona eri puolilla tutkittavaa aluetta. Kattava RM mallintaa myös hyvin tutkittavan alueen karttainformaatiota, sillä radiosignaalin etenemiseen vaikuttaa suuresti tila ja siellä olevat signaalin kulkua muuttavat objektit. [35, 39]

Tässä työssä käyttäjän sijainti pyritään estimoimaan käyttäen joko WLAN- tai BLE-mittauksia ja testirakennuksesta saatavilla olevaa karttainformaatiota. Käytetyt WLAN-mittaukset ovat peräisin testirakennuksen valmiista WLAN-infrastruktuurista ja jokaiselle WLAN-tukiasemalle on estimoitu niiden sijainti sekä tukiasemakohtaiset signaalin vaimenemismallin parametrit alustavan mittausdatan perusteella. Työssä käytetyt BLE-mittaukset on kerätty juuri paikannustarkoitukseen asennetuista BLE-lähettimistä, joille on WLAN-tukiasemien tavoin sormenjälkimenetelmällä määritelty signaalin vaimenemismallin mukaiset parametrit. Työn tarkoituksena on tutkia sisätilapaikannusmenetelmää, jossa yhdistetään WLAN- sekä BLE-mittaukset ja testirakennuksen karttarajoitteet yhdeksi kokonaisuudeksi, joka huomioi käyttäjän liikkumisen mahdollisimman tehokkaasti. Työssä käytettyä paikannusmenetelmää testataan Tampereen teknillisen yliopiston (TTY) Tietotalosta ja sen ulkopuolelta mitatuilla testireiteillä.

Työssä käytettävä karttarakenne on luotu käyttäen alkuperäisiä Nokia Destination MapsTM -karttoja, jotka on luotu TTY:n rakennusten pohjapiirustusten perusteella. Työssä esitetty karttarakenne mallintaa Destination Maps -karttojen käytäviä, pieniä huoneita sekä kerrosten välisiä siirtymäkohtia, kuten hissejä ja porraskäytäviä, solmupisteiden välisten linkkien avulla. Suuret avoimet tilat ja ulkoalueet tulkitaan karttarakenteessa avoimina alueina, joita mallinnetaan polygonien avulla. Karttarakenteen tarkoituksena on rajoittaa käyttäjän liike sekä sijainti linkeille ja avoimille alueille, jolloin rakennuksen karttatietoa käytetään tehokkaasti ja todellista käyttäjän liikkumista vastaavalla tavalla.

Tämän työn toinen luku käsittelee todennäköisyyksiin ja mittateoriaan liittyvää taustateoriaa, johon työssä myöhemmin esiteltävät asiat tukeutuvat. Luvussa kiinnitetään erityistä huomiota monimutkaisen todennäköisyysmitan luomiseen käsittelemällä yksityiskohtaisemmin kahden eri mitan muodostaman kokonaistodennäköisyyden muodostumista. Lisäksi luvun lopussa tuodaan esille ehdollisten todennäköisyysmittojen olemassaolon kannalta olennaisia tuloksia, joihin tukeudutaan työn seuraavissa luvuissa.

Työn kolmannessa luvussa esitellään työssä käytetty käyttäjän sijaintia ja liikettä rajoittava graafipohjainen karttarakenne. Testirakennukselle automaattisesti luotua

karttarakennetta on luvussa havainnollistettu kuvan avulla ja sen eri osia on selitetty sanallisesti. Vaikka luvussa ei esitetä karttarakenteen automaattista luomista, on karttarakenteen luomista käsitelty lyhyesti luvun lopussa.

Neljäs luku käsittelee suodatuksen ja erityisesti partikkelisuodatuksen yleistä teoriaa, johon työssä käytetty paikannusmenetelmä pohjimmiltaan perustuu. Luvussa esitellään alustava tilamalli työssä käytettävälle suodattimelle, joka konkreettisesti rajoittaa todennäköisyysmassan liikkumista karttarakenteen mukaisesti. Luvun loppupuolella esitellään lisäksi yleinen graafipohjaiselle karttarakenteelle luotu partikkelisuodatin ja sen algoritmi, jonka suppeneminen todistetaan luvun lopuksi.

Työn viidennessä luvussa määritellään työssä käytettävälle suodattimelle tilamalli, joka huomioi käyttäjän päämäärätietoisien liikkumisen ja mahdolliset terävät käännökset sekä pysähdykset. Tilamallissa käsitellään myös siirtymistä eri karttarakenteen karttaobjektilta toiselle siirtymätodennäköisyyksien muodossa. Työn seuraavassa luvussa eli luvussa kuusi verrataan työssä käytetyn suodattimen paikannustarkkuutta vertailuna käytettyihin suodatusmenetelmiin. Luvun lopussa pohditaan ja analysoidaan sanallisesti saatuja paikannustarkkuuksia esiteltyjen tulosten pohjalta.

Luku 2

Taustateoria

Tässä luvussa käsitellään työn soveltavan osan kannalta keskeistä matemaattista teoriaa, jonka tarkoituksena on määrittää topologisten joukkojen todennäköisyys. Matemaattisessa taustateoriassa lähdetään liikkeelle työn kannalta keskeisistä matemaattisista käsitteistä ja määritelmistä päätyen teorian lopussa topologisen joukon ehdolliseen todennäköisyyteen.

Jonkin tapahtuman todennäköisyys tulkitaan yleensä potentiaalisten tapahtumien joukosta reaalilukuvälille $[0, 1]$. Hyvin usein perusjoukon Ω osajoukkoja ei kuitenkaan voida käsitellä tapahtumina eli mitallisina joukkoina. Näissä tilanteissa jokaiseen perusjoukon osajoukkoon $A \subset \Omega$ ei välttämättä pystytä liittämään todennäköisyyttä johdonmukaisesti, vaan avuksi tarvitaan mitta- ja todennäköisyysteorian työkaluja.

Määritelmä 2.1. Kokoelma \mathcal{F} joukon Ω osajoukkoja on sigma-algebra, jos [49, s. 9]

- (i) $\Omega \in \mathcal{F}$,
- (ii) jos $A \in \mathcal{F}$, niin $A^c \in \mathcal{F}$,
- (iii) jos $A_n \in \mathcal{F}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin $\bigcap A_n \in \mathcal{F}$.

Määritelmä 2.2. Joukon A virittämä sigma-algebra $\sigma(A)$ on pienin sigma-algebra, joka sisältää joukon A

$$\sigma(A) = \bigcap \{ \mathcal{F} : \mathcal{F} \text{ on sigma-algebra ja } A \in \mathcal{F} \} \quad (2.1)$$

[49, s. 10].

Määritelmä 2.3. Euklidisen avaruuden \mathbb{R}^d Borelin sigma-algebra \mathcal{B}_d on sen avointen joukkojen virittämä. Joukkoja $B \in \mathcal{B}_d$ sanotaan Borel-joukoiksi [49, s. 11].

Aiemmin määriteltyjen sigma-albrojen lisäksi tarvitaan matemaattinen käsite, jolla voidaan liittää tietylle tutkittavalle joukolle jokin mitattava suuruus, kuten todennäköisyys. Kyseistä mittateorian peruskäsitettä kutsutaan mitaksi, johon myös todennäköisyyttä kuvaava todennäköisyysmitta perustuu.

Määritelmä 2.4. Mitta μ on joukkokuvaus sigma-algebrasta \mathcal{F} ei-negatiivisille reaaliluvuille \mathbb{R}_0 eli $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_0 \cup \{\infty\}$, jolle

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$,
- (ii) jos tapahtumat $A_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$, ovat erillisiä, niin

$$\mu\left(\bigcup A_n\right) = \sum \mu(A_n) \quad (2.2)$$

[49, s. 12].

Määritelmä 2.5. Todennäköisyysmitta on funktio $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$, jolle

- (i) $P(\Omega) = 1$ ja $P(\emptyset) = 0$,
- (ii) jos tapahtumat $A_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$, ovat erillisiä, niin

$$P\left(\bigcup A_n\right) = \sum P(A_n) \quad (2.3)$$

[49, s. 11].

Paria (Ω, \mathcal{F}) , missä \mathcal{F} on perusjoukon Ω sigma-algebra, sanotaan mitalliseksi avaruudeksi ja joukot $A \in \mathcal{F}$ ovat mitallisia joukkoja eli tapahtumia. Jos mitalliselle avaruu-

delle (Ω, \mathcal{F}) pätee, että koko perusjoukon mitta eli $\mu(\Omega) < \infty$, niin mittaa μ sanotaan äärelliseksi tai rajoitetuksi. Todennäköisyysmitan määritelmän 2.5 kohdasta (i) huomataan heti, että todennäköisyysmitta P on äärellinen.

Määritelmä 2.6. Kolmikkoa (Ω, \mathcal{F}, P) , jossa Ω on alkeistapauksista koostuva perusjoukko, \mathcal{F} on Ω :n osajoukoista eli tapahtumista koostuva sigma-algebra ja P todennäköisyysmitta, sanotaan todennäköisyysavaruudeksi [7, 45].

Tarkastellaan jatkossa todennäköisyysavaruutta (Ω, \mathcal{F}, P) sekä oletetaan, että topologinen joukko $A \in \mathcal{F}$ on Borel-joukko siten, että $A \in \mathcal{B}_d$. Todennäköisyysavaruuden alkeistapauksien kuvaamiseen tarvitaan vielä kuvaus, joka liittää jokaiseen mahdolliseen alkeistapaukseen yksikäsitteisen reaalilukuarvon. Tätä kuvausta sanotaan satunnaismuuttujaksi.

Määritelmä 2.7. Kuvaus $\mathbf{x} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ on satunnaismuuttuja, jos $\{w \in \Omega : \mathbf{x}(w) \in B\} \in \mathcal{F}$ kaikilla $B \in \mathcal{B}$.

Vastaavasti vektoriarvoinen kuvaus $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d]^T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, on satunnaisvektori, jos $\{w \in \Omega : \mathbf{x}(w) \in B\} \in \mathcal{F}$ kaikilla $B \in \mathcal{B}_d$ [49, s. 19].

Jatkossa ei erotella satunnaismuuttujaa satunnaisvektorista vaan puhutaan yleisesti satunnaismuuttujasta $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Määritellään seuraavaksi satunnaismuuttujan \mathbf{x} jakauma todennäköisyysmitan avulla.

Määritelmä 2.8. Satunnaismuuttujan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ jakauma on todennäköisyysmitta, jonka mitan P maalijoukko \mathbb{R}^d indusoi eli

$$P(A) = P(\mathbf{x} \in A), \quad A \in \mathcal{B}_d \quad (2.4)$$

[49, s. 21].

Satunnaismuuttujan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ sanotaan olevan jatkuva, jos sen jakauma voidaan esittää muodossa

$$P(\mathbf{x} \in A) = \int_A f_{\mathbf{x}}(x) dx \quad (2.5)$$

kaikilla $A \in \mathcal{B}_d$. Funktiota $f_{\mathbf{x}} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_0$ sanotaan tässä tapauksessa satunnaismuuttujan \mathbf{x} tiheysfunktiksi. Kaikki satunnaismuuttujat eivät kuitenkaan ole jatkuvia,

vaan ne voivat olla myös diskreettejä, singulaarisia tai niiden yhdistelmiä, jolloin satunnaismuuttujalla ei ole tiheysfunktioita. Jotta satunnaismuuttujalle \mathbf{x} kuitenkin voitaisiin määrittää yleinen tiheys jonkin mitan suhteen, tarvitaan mittojen ominaisuuksia sekä Radonin ja Nikodymin lausetta.

Määritelmä 2.9. Olkoot μ ja ν mittoja mitallisella avaruudella (Ω, \mathcal{F}) [49, s. 115].

- (a) Mitta ν on absoluuttisesti jatkuva mitan μ suhteen jos kaikille $A \in \mathcal{F}$ pätee, että $\nu(A) = 0$ aina, kun $\mu(A) = 0$. Tällöin merkitsemme $\nu \ll \mu$.
- (b) Mitta ν on ekvivalentti mitan μ suhteen jos $\nu \ll \mu$ ja $\mu \ll \nu$. Tällöin merkitsemme $\nu \sim \mu$.
- (c) Mitat ν ja μ ovat singulaarisia jos on olemassa sellainen joukko $A \in \mathcal{F}$, että $\nu(A^c) = 0$ ja $\mu(A') = 0$ kaikilla $A' \subset A$. Tällöin merkitsemme $\nu \perp \mu$.

Lause 2.10 (Radonin ja Nikodymin lause). *Olkoon ν ja μ mittoja mitallisella avaruudella (Ω, \mathcal{F}) . Tällöin $\nu \ll \mu$ jos ja vain jos*

$$\nu(A) = \int_A Z(\omega)\mu(d\omega) \tag{2.6}$$

jollekin mitalliselle kuvaukselle $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_0$.

Todistus. [15, s. 175] □

Radonin ja Nikodymin lauseen 2.10 kuvausta Z sanotaan mitan ν Radonin ja Nikodymin derivaataksi mitan μ suhteen. Jos tarkastellaan satunnaismuuttujaa \mathbf{x} mitalla μ varustetussa todennäköisyysavaruudessa (Ω, \mathcal{F}, P) , niin satunnaismuuttujan \mathbf{x} tiheys mitan μ suhteen voidaan tulkita lauseen 2.10 mukaan Radonin ja Nikodymin derivaatana

$$Z = \frac{dP}{d\mu}, \tag{2.7}$$

kun kuvauksella Z on yhtälön (2.5) mukainen ominaisuus

$$P(\mathbf{x} \in A) = \int_A Z(x)\mu(dx). \tag{2.8}$$

Valitaan tarkasteltavasta sigma-algebrasta jokin ositettavissa oleva topologinen joukko A . Joukon A ositus on joukko ei-tyhjiä joukon A osajoukkoja, joiden yhdiste

kattaa koko joukon A . Lisäksi osajoukot ovat pareittain erilliset eli kyseisten osajoukkojen leikkaus on tyhjä joukko.

Oletetaan, että joukko $A \in \mathcal{F}$ voidaan osittaa ei-tyhjiin osajoukkoihin $A \cap B_i$, missä joukot $B_i \in \mathcal{F}$ ovat pareittain erillisiä ja $i = 1, \dots, M$. Tällöin yhtälö (2.4) voidaan kirjoittaa leikkauksen sekä määritelmän 2.4 avulla muotoon

$$P(\mathbf{x} \in A) = P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^M A \cap B_i\right) = \sum_{i=1}^M P(A \cap B_i). \quad (2.9)$$

Osajoukkoihin jakautunutta todennäköisyyttä ei välttämättä voida ilmoittaa suoraan yhtälön (2.8) tavoin Radonin ja Nikodymin derivaattana. Voi nimittäin olla olemassa sellainen osajoukko $A \cap B_j$, jonka mitta $P(A \cap B_j)$ ei ole absoluuttisesti jatkuva halutun mitan suhteen. Tällöin satunnaismuuttujalla \mathbf{x} ei ole myöskään tiheyttä joukossa $A \cap B_j$ halutun mitan suhteen. Mitta P voidaan kuitenkin muodostaa toisten mittojen summana, jolloin ongelmalliset kohdat voidaan käsitellä erikseen. Määritellään, että mitta P on kahden samassa sigma-algebrassa olevan keskenään singulaarisen mitan P_A ja P_L lineaarikombinaatio

$$P = c_A P_A + c_L P_L, \quad (2.10)$$

missä c_A ja c_L ovat reaalilukuarvoisia normalisointivakioita, joille pätee $c_A, c_L \in [0, 1]$.

Oletetaan, että aikaisemmin määritellyt osajoukot $A \cap B_i$ voidaan jakaa kahteen osaan niin, että toinen osa koostuu niistä joukoista, joissa mitta P_A on vallitseva ja toinen osa joukoista, joissa mitta P_L on vallitseva. Määritellään, että indeksijoukon I_A alkiot kuvaavat mitan P_A kattamia joukkoja ja indeksijoukon I_L alkiot vastaavasti mitan P_L kattamia joukkoja. Koska osajoukot $A \cap B_i$ ovat oletuksen mukaan pareittain erillisiä ja edellä esitelty joukkojen jaottelu erillisille mitoille voidaan tehdä, yhtälö (2.9) voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M P(A \cap B_i) &= c_A \sum_{i=1}^M P_A(A \cap B_i) + c_L \sum_{i=1}^M P_L(A \cap B_i) \\ &= c_A \sum_{i \in I_A} P_A(A \cap B_i) + c_L \sum_{j \in I_L} P_L(A \cap B_j). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Jos satunnaismuuttuja \mathbf{x} oletetaan jatkuvaksi mitan P_A kattamissa joukoissa, satunnaismuuttujan jakauma voidaan kirjoittaa muodossa

$$\sum_{i=1}^M P(A \cap B_i) = c_A \sum_{i \in I_A} \int_{A \cap B_i} f_{\mathbf{x}_i}(x) dx + c_L \sum_{j \in I_L} P_L(A \cap B_j), \quad (2.12)$$

missä $f_{\mathbf{x}_i}$ on satunnaismuuttujan \mathbf{x} tiheys osajoukossa $A \cap B_i$. Oletetaan, että todennäköisyysmassa mitan P_L kattamissa joukoissa voidaan määrittää vain toisen mitallisen avaruuden avulla. Tällaisia tapauksia voivat olla esimerkiksi degeneroituneet todennäköisyysjakaumat, jolloin satunnaismuuttujalla on tiheys jossakin alempidimensioisessa avaruudessa. Tällöin mitan tarkempaan määrittämiseen tarvitaan mitallisen kuvauksen määritelmää sekä mitan muunnokseen liittyvää lausetta.

Määritelmä 2.11. Olkoot (Ω, \mathcal{F}) ja (Ω', \mathcal{F}') mitallisia avaruuksia. Olkoon lisäksi T kuvaus siten, että $T : \Omega \rightarrow \Omega'$ ja käänteiskuvaus $T^{-1}A' = \{\omega \in \Omega \mid T\omega \in A'\}$ joukolle $A' \subset \Omega'$. Kuvaus T on mitallinen kuvaus, jos $T^{-1}A' \in \mathcal{F}$ kaikille joukoille $A' \in \mathcal{F}'$. [7, s. 182]

Lause 2.12. *Olkoot (Ω, \mathcal{F}) ja (Ω', \mathcal{F}') mitallisia avaruuksia. Olkoon lisäksi T mitallinen kuvaus siten, että $T : \Omega \rightarrow \Omega'$ ja μ mitta sigma-algebrassa \mathcal{F} . Tällöin voidaan määritellä joukkokuvaus eli mitta μT^{-1} sigma-algebrassa \mathcal{F}'*

$$\mu T^{-1}(A') = \mu(T^{-1}A'), \quad A' \in \mathcal{F}'. \quad (2.13)$$

Todistus. [7, s. 186]

□

Merkitään jatkuvan osan osajoukkoja $A \cap B_i$ joukolla $S_{A,i}$ ja ei-jatkuvan osan osajoukkoja $A \cap B_j$ joukolla $S_{L,j}$ merkintöjen selkeyttämiseksi. Oletetaan lisäksi, että on olemassa lauseen 2.12 mukainen mitallinen kuvaus $T : S_{L,j} \rightarrow S'_{L,j}$, jonka avulla mitta

P_L voidaan muuttaa mielekkäämpään mitalliseen avaruuteen (Ω', \mathcal{F}') . Tällöin yhtälö (2.11) voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^M P(A \cap B_i) &= c_A \sum_{i \in I_A} \int_{A \cap B_i} f_{\mathbf{x}_i}(x) dx + c_L \sum_{j \in I_L} P_L(A \cap B_j) \\
 &= c_A \sum_{i \in I_A} \int_{S_{A,i}} f_{\mathbf{x}_i}(x) dx + c_L \sum_{j \in I_L} P_L(S_{L,j}) \\
 &= c_A \sum_{i \in I_A} \int_{S_{A,i}} f_{\mathbf{x}_i}(x) dx + c_L \sum_{j \in I_L} P_L(T^{-1}S'_{L,j}) \\
 &= c_A \sum_{i \in I_A} \int_{S_{A,i}} f_{\mathbf{x}_i}(x) dx + c_L \sum_{j \in I_L} P_L T^{-1}(S'_{L,j}),
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

missä $S'_{L,j}$ on joukko sigma-algebrassa \mathcal{F}' . Jos mitalla $P_L T^{-1}$ on tiheyttä kuvauksen määräämässä mitallisessa avaruudessa, voidaan yhtälö (2.14) kirjoittaa kokonaisuudessaan muotoon

$$P(\mathbf{x} \in A) = c_A \sum_{i \in I_A} \int_{S_{A,i}} f_{\mathbf{x}_i}(x) dx + c_L \sum_{j \in I_L} \int_{S'_{L,j}} f'_{\mathbf{x}_j}(x') dx', \tag{2.15}$$

missä kuvaus $f'_{\mathbf{x}_j}$ voidaan ajatella satunnaismuuttujan \mathbf{x} tiheytenä kuvauksen T määräämässä joukossa $S'_{L,j}$. Yhtälön (2.15) mukainen todennäköisyys ei kuitenkaan vielä riitä vaan satunnaismuuttujalle halutaan määrittää ehdollinen todennäköisyys jonkin sigma-algebran suhteen. Tätä varten tarvitaan Bayesin säännön ja odotusarvon määritelmiä.

Määritelmä 2.13 (Bayesin sääntö). Olkoon $B \in \mathcal{F}$ sellainen joukko, että $P(B) > 0$. Tapahtuman $A \in \mathcal{F}$ ehdollinen todennäköisyys ehdolla B on

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{2.16}$$

[49, s. 111].

Määritelmä 2.14. Satunnaismuuttujan \mathbf{x} odotusarvo $\mathbb{E}[\mathbf{x}]$ on

$$\mathbb{E}[\mathbf{x}] = \int_{\Omega} \mathbf{x}(w) P(dw) = \int_{\Omega} \mathbf{x} dP \tag{2.17}$$

[49, s. 26].

Ehdollinen todennäköisyys voidaan määrittellä myös todennäköisyysavaruuden sigma-algebran jonkin ali-sigma-algebran suhteen. Tällöin ehdollinen todennäköisyys voidaan kirjoittaa muodossa $P(A|\mathcal{G})$, missä \mathcal{G} on tarkasteltava ali-sigma-algebra. Ehdollisella todennäköisyydellä on suora yhteys ehdolliseen odotusarvoon indikaattorifunktion kautta.

Määritelmä 2.15. Olkoon $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ sigma-algebran \mathcal{F} ali-sigma-algebra. \mathcal{F} -mittaisen, integroitavan satunnaismuuttujan \mathbf{x} ehdollinen odotusarvo ali-sigma-algebran \mathcal{G} suhteen, määritellään integroitavana \mathcal{G} -mittaisena satunnaismuuttujana, jota merkitään $\mathbb{E}[\mathbf{x}|\mathcal{G}]$ ja jolla on seuraava ominaisuus

$$\int_B \mathbf{x} dP = \int_B \mathbb{E}[\mathbf{x}|\mathcal{G}] dP \quad (2.18)$$

kaikilla $B \in \mathcal{G}$. Tällöin ehdollinen odotusarvo $\mathbb{E}[\mathbf{x}|\mathcal{G}]$ on olemassa ja on melkein varmasti yksikäsitteinen. [12, s. 35]

Melkein varmallalla yksikäsitteisyydellä tarkoitetaan, että jos $\bar{\mathbf{x}}$ on toinen \mathcal{G} -mittainen satunnaismuuttuja siten, että $\int_B \bar{\mathbf{x}} dP = \int_B \mathbf{x} dP$ kaikilla $B \in \mathcal{G}$, niin $\mathbb{E}[\mathbf{x}|\mathcal{G}] = \bar{\mathbf{x}}$ melkein varmasti mitan P suhteen.

Määritelmä 2.16. Joukon A indikaattorifunktio I_A on

$$I_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \in A \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases} \quad (2.19)$$

[7, s. 536].

Ehdollisen odotusarvon ja ehdollisen todennäköisyyden yhteys voidaan nyt kirjoittaa muotoon

$$P(\mathbf{x} \in A|\mathcal{G}) = \mathbb{E}[I_A(\mathbf{x})|\mathcal{G}], \quad (2.20)$$

mutta edelleen on otettava huomioon, että ehdollinen todennäköisyys $P(\mathbf{x} \in A|\mathcal{G})$ on määritelty vain melkein varmasti mitan P suhteen. Melkein varmasta yksikäsitteisyydestä johtuen saattaa olla olemassa niin sanottu nollajoukko \mathcal{N} , jonka takia yhtälö

$$P(\mathbf{x} \in \bigcup A_n|\mathcal{G}) = \sum P(\mathbf{x} \in A_n|\mathcal{G}) \quad (2.21)$$

ei päde [12, s. 36]. Tämä nollajoukon aiheuttama ongelma voidaan ratkaista säännöllisen ehdollisen todennäköisyyden avulla.

Määritelmä 2.17. Olkoon (E, \mathcal{E}) mitallinen avaruus, \mathcal{G} sigma-algebran \mathcal{F} ali-sigma-algebra ja $\mathbf{x} : \Omega \rightarrow E$ satunnaismuuttuja. Tällöin kuvaus $Q(\omega, A)$ on satunnaismuuttujan \mathbf{x} säännöllinen ehdollinen todennäköisyys ali-sigma-algebran \mathcal{G} suhteen, jos

- (i) jokaisella $A \in \mathcal{F}$, $Q(\cdot, A)$ on \mathcal{G} -mittainen ja $Q(\cdot, A) = P(\mathbf{x} \in A | \mathcal{G})$, melkein varmasti mitan P suhteen
- (ii) jokaisella $\omega \in \Omega$, $Q(\omega, \cdot)$ on todennäköisyysmitta mitallisella avaruudella (E, \mathcal{E}) . [12, s. 36]

Lause 2.18. *Olkoon $P(\cdot | \mathcal{G})$ määritelmän 2.17 mukainen säännöllinen ehdollinen todennäköisyys. Tällöin*

$$\mathbb{E}[\mathbf{x} | \mathcal{G}] = \int_{\Omega} \mathbf{x}(\omega) P(d\omega | \mathcal{G}). \quad (2.22)$$

Todistus. [49, s. 124] □

Määritelmän 2.17 mukaisella säännöllisellä ehdollisella todennäköisyydellä pyritään muuttamaan alkuperäistä ehdollista todennäköisyyttä nollajoukossa \mathcal{N} siten, että yhtälö (2.21) olisi tosi. Periaatteessa on mahdollista, että sigma-algebra on niin iso, ettei ehdollinen todennäköisyys $P(\cdot | \mathcal{G})$ ole mitta jonkin nollajoukon ulkopuolella. Voidaan kuitenkin osoittaa, että kaikki satunnaismuuttujien virittämät sigma-algebrat sekä \mathcal{B}_d ovat riittävän pieniä, jolloin säännöllinen ehdollinen todennäköisyys on aina olemassa.

Lause 2.19. *Olkoon \mathbf{x} satunnaismuuttuja ja \mathcal{G} sigma-algebran \mathcal{F} ali-sigma-algebra. Tällöin määritelmän 2.17 mukainen säännöllinen ehdollinen todennäköisyys $P(\cdot | \mathcal{G})$ on aina olemassa.*

Todistus. [49, s. 124-125] □

Myöhemmin luvuissa 4 ja 5 käsitellään ehdollisia todennäköisyyksiä sekä ehdollisia odotusarvoja Bayesiläisen suodatuksen yhteydessä. Jatkossa ehdollista todennäköisyyttä ali-sigma-algebran suhteen merkitään notaatiolla $P(\mathbf{x} | \mathbf{y})$, missä merkintä \mathbf{y} ajatellaan satunnaismuuttujan \mathbf{y} virittämänä sigma-algebrana $\sigma(\mathbf{y})$. Vastaavaa notaatiota käytetään jatkossa myös ehdollisen odotusarvolle.

Luku 3

Graafipohjainen karttarakenne

Rakennuksien pohjapiirustuksiin perustuva karttatieto on perinteisten radiosignaalien lisäksi yksi tärkeimmistä informaation lähteistä sisätilapaikannuksessa. Rakennusten rakenne rajoittaa realistisissa tilanteissa ihmisten liikettä, minkä takia karttatiedon tehokkaan käyttämisen on todettu parantavan paikannustarkkuutta huomattavasti [10, 25, 41]. Sisätilapaikannuksen tarpeellisuus korostuu erityisesti isoissa rakennuksissa, kuten kauppakeskuksissa, jolloin kaiken karttatiedon käyttäminen vaatii paljon laskennallista tehoa sekä muistia. Yksi keino, jolla karttatietoa voidaan käyttää tehokkaasti ja taloudellisesti on muuttaa se graafipohjaiseksi, jolloin karttarakenne säilyttää kaiken tarpeellisen informaation vieden samalla vähemmän laskennallista kapasiteettia.

Useissa graafipohjaisissa karttaratkaisuissa sekä käytävät ja avoimet alueet kuten huoneet että kerrosten vaihtamiseen tarkoitettut hissit ja portaikot on esitetty solmupisteiden välisten linkkien avulla [16, 28, 30, 36]. Kyseisissä tapauksissa voi kuitenkin olla mahdollista, että laajoilla avoimilla alueilla paikannustarkkuus kärsii etenkin, jos graafi ei ole riittävän tiheä tai se ei salli käyttäjän mahdollisia useita teräviä käännöksiä näillä

alueilla. Paikannustarkkuuden säilyttämiseksi, avoimien alueiden sisälle voidaan luoda riittävän tiheä gridi, mutta tällöin myös laskennallinen vaativuus lisääntyy paikannusvaiheessa merkittävästi. Avoimien alueiden kuvaaminen reunustettuina alueina [18], joissa käyttäjä voi liikkua vapaasti kahdessa ulottuvuudessa on luonnollinen ja tehokas tapa käyttää karttatietoa myös avoimilla alueilla, kuten ulkona.

Tässä työssä graafipohjainen karttarakenne $G = (S, O)$ koostuu solmupisteiden joukosta S ja karttaobjektien joukosta O . Jokaisella solmupisteellä $s_k \in S$ on olemassa kolmiulotteinen sijainti, joka koostuu x - ja y -koordinaatista sekä kerroksesta. Karttaobjektit $\lambda_k \in O$ ovat joko linkkejä tai avoimia alueita riippuen objektin indeksistä k . Työssä käytetty graafipohjainen karttarakenne on esitetty kuvassa 3.1. Solmupisteiden välisillä linkeillä kuvataan rakennuksen pienempiä huoneita, käytäviä, portaikoita ja hissejä. Linkeille voidaan määrittää helposti myös pituus linkin päätepisteiden välisenä euklidisena etäisyytenä.

Avoimien alueiden karttaobjektit on muodostettu sellaisista avoimista alueista, joiden sisälle voidaan asettaa säteeltään neljän metrin suuruinen ympyrä siten, että ympyrä ei leikkaa yhtään pohjapiirustuksen seinäpistettä. Kyseisen kriteerin täyttävä avoimen alueen karttaobjekti on monikulmio, jonka reunat sekä avoimen alueen ja graafin yhdistävät solmupisteet ovat tunnettuja. Tässä työssä myös ulkoalueet luokitellaan avoimiksi alueiksi.



Kuva 3.1: Automaattisesti luotu karttarakenne testirakennuksesta. Rakennuksen ulkoseinät on kuvattu harmaalla värillä ja linkit sekä solmupisteet on kuvattu mustalla värillä. Avoimet alueet, jotka on kuvattu sinisellä värillä, ja graafin yhdistävät solmupisteet on merkitty kuvaan muita solmupisteitä suuremmilla pisteillä. Rakennuksen ulkokuolinainen alue tulkitaan myös avoimeksi alueeksi.

Karttarakenteessa olennaisessa osassa ovat lisäksi ne solmupisteet, jotka yhdistävät avoimet alueet linkeistä koostuvaan graafiin. Näitä solmupisteitä voidaan kutsua apusolmuiksi (*Accessor Node*, AN) ja ne ovat keskeisessä osassa käyttäjän siirtyessä avoimen alueen karttaobjektin ja linkeistä koostuvan graafin välillä.

Graafipohjaiset karttarakenteet voidaan luoda joko automaattisesti tai manuaalisesti, jos rakennuksesta on olemassa riittävän tarkka ja digitaalisessa muodossa oleva pohjapiirustus [47]. Graafirakenteen luomisessa voidaan käyttää apuna erilaisia digitaalisen kuvankäsittelyn menetelmiä kuten topologisen luurangon luomista [29, 40] ja topologioiden ohentamista [43, s. 411-421]. Tässä työssä käytetään digitaalisessa muodossa olevia Nokia Destination MapsTM -karttoja ja niistä luotua graafipohjaista karttarakennetta. Karttarakenteen luomisessa on käytetty MATLAB-ohjelmistoa.

Luku 4

Graafipohjainen partikkelisuodatin

Tässä luvussa käsitellään työn kannalta keskeisen graafipohjaisen partikkelisuodattimen (GBPF, *Graph-Based Particle Filter*) taustalla olevaa suodatukseen liittyvää teoriaa päätyen lopulta varsinaisen GBPF-suodattimen algoritmin esittelyyn. Luvussa todistetaan myös yleisen GBPF-suodattimen suppeneminen.

4.1 Suodatusongelma

Kun käsitellään stokastisten prosessien teorian sovelluskohteita, päämääränä on useasti pyrkiä estimoimaan prosessin tila \mathbf{x} mahdollisimman hyvin tietyllä ajanhetkellä t , missä $t \in \mathbb{N}$. Prosessille luonteenomaista dynamiikkaa kuvataan tilamallilla tai tilansiirtomallilla, jonka tehtävänä on mahdollisimman hyvin mallintaa prosessin etenemistä ajan kuluessa. Prosessin tilan estimoinnissa käytetään hyväksi prosessista saatuja mittauksia, joiden riippuvuutta senhetkisestä tilasta mallinnetaan mittusmallilla.

Stokastisen prosessin estimointiongelman voidaan esittää prosessin alkutilan \mathbf{x}_0 , tilamallin ja mittausmallin avulla. Joissain tapauksissa prosessin kuvaamiseen saatetaan tarvita useampi tilamalli tai prosessin etenemistä rajoittava topologinen joukko, jolloin prosessin tilaa ja saatuja mittauksia kuvaavat mallit voidaan muotoilla parametrisoituina stokastisina yhtälöinä

$$\mathbf{x}_t = f_\beta(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{v}_{t-1}, \mathcal{T}) \quad (4.1)$$

ja

$$\mathbf{y}_t = h(\mathbf{x}_t) + \mathbf{w}_t, \quad (4.2)$$

missä \mathbf{v}_{t-1} ja \mathbf{w}_t ovat tila- ja mittausmallin tunnetut kohinat. Tilamallin viimeinen parametri \mathcal{T} kuvaa systeemiin liittyvää topografiaa ja symboli β mallikohtaista indeksiä. Yhtälöiden (4.1) ja (4.2) avulla voidaan muodostaa ehdollinen todennäköisyysjakauma tilansiirrolle sekä mittaustodennäköisyydelle. Kun tila- ja mittausmallin kohinat tunnetaan, voidaan tilansiirron ehdollinen todennäköisyysjakauma kirjoittaa muodossa $P_\beta(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1})$ sekä mittaustodennäköisyyden jakauma muodossa $P(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t)$. Tilansiirron ehdollista todennäköisyysjakaumaa ja erityisesti sen määrittämistä käsitellään tarkemmin aliluvussa 4.4.

Monissa suodatusongelmissa Gaussiset approksimaatiot toimivat hyvin, mutta niiden käyttö ei ole multimodaalisten jakaumien tai mahdollisten diskreettien tilavektorin komponenttien tapauksessa sellaisenaan mahdollista. Kyseisissä tilanteissa sekventiaaliseen painotuspoimintaan perustuvat partikkelisuodattimet ovat yksi vaihtoehto suodatusongelman ratkaisemiseksi [46].

4.2 Bayesiläinen suodatus

Bayesiläisen suodatuksen tavoitteena on ratkaista stokastisen prosessin ehdollinen todennäköisyysjakauma $P(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t})$ eli posteriorijakauma ajanhetkellä t , kun tiedossa on koko mittaushistoria prosessin alusta nykyiseen ajanhetkeen. Saadun posteriorijakauman avulla voidaan prosessin tila estimoida jakaumasta lasketun odotusarvon avulla. Prosessin tila voidaan estimoida rekursiivisesti ilman, että koko mittaushistoriaa pidetään muistissa, mutta tällöin prosessilla oletetaan olevan Markovin ominaisuus [12, s. 18].

Määritelmä 4.1 (Stokastinen prosessi). Stokastinen prosessi \mathbf{x} on indeksoitu satunnaismuuttujien kokoelma, jota voidaan merkitä $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_t, t \in \mathbb{N}\}$, missä $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^d$. [45, s. 58]

Määritelmä 4.2 (Tilan Markovin ominaisuus). Olkoon $\{\mathbf{x}_t\}$ määritelmän 4.1 mukainen stokastinen prosessi. Prosessilla sanotaan olevan Markovin ominaisuus, jos prosessin tila \mathbf{x}_t ehdolla \mathbf{x}_{t-1} on riippumaton kaikesta, mitä on tapahtunut ennen ajanhetkeä $t - 1$. Tällöin voidaan kirjoittaa

$$P(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{0:t-1}, \mathbf{y}_{1:t-1}) = P_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}). \quad (4.3)$$

Lause 4.3. *Stokastisen prosessin tila \mathbf{x}_{t-1} ehdolla \mathbf{x}_t on riippumaton tulevista tapahtumista $\mathbf{x}_{t+1:T}$*

$$P(\mathbf{x}_{t-1} | \mathbf{x}_{t:T}, \mathbf{y}_{t:T}) = P(\mathbf{x}_{t-1} | \mathbf{x}_t), \quad (4.4)$$

missä $T \geq t$. [44, s. 32]

Määritelmä 4.4 (Mittausten ehdollinen riippumattomuus). Nykyinen mittaus \mathbf{y}_t ehdolla \mathbf{x}_t on ehdollisesti riippumaton aikaisemmista mittauksista ja tiloista

$$P_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_{0:t}, \mathbf{y}_{1:t-1}) = P_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t). \quad (4.5)$$

Haluttu tilan posteriorijakauma voidaan ratkaistua rekursiivisesti kahdessa vaiheessa. Ensimmäistä vaihetta sanotaan ennustusaskeleeksi, jonka tarkoituksena on ratkaista priorijakauma tilalle \mathbf{x}_t ehdollistamalla se kaikkien aikaisempien mittausten $\mathbf{y}_{1:t-1}$ suhteen. Kun aikaisempi posteriorijakauma $P(\mathbf{x}_{t-1} | \mathbf{y}_{1:t-1})$ oletetaan tunnetuksi, priorijakauma tilalle \mathbf{x}_t saadaan muodostettua Chapman-Kolmogorov -yhtälön avulla [24]

$$P(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t-1}) = \int P_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}) P(\mathbf{x}_{t-1} | \mathbf{y}_{1:t-1}) d\mathbf{x}_{t-1}, \quad (4.6)$$

missä $P_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1})$ on tilansiirtoa kuvaava todennäköisyysjakauma, joka saadaan muodostettua tunnetusta systeemiä kuvaavasta tilamallista [44, s. 5].

Kun ajanhetkellä t saadaan uusi mittaus \mathbf{y}_t , voidaan suorittaa rekursiivisen estimoinnin toinen vaihe eli päivitysaskel. Päivitysaskeleella tila \mathbf{x}_t ehdollistetaan koko

mittaushistorialla $\mathbf{y}_{1:t}$, jolloin posteriorijakauma saadaan muodostettua Bayesin kaavaa käyttämällä

$$P(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t}) = \frac{P_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t)P(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t-1})}{P(\mathbf{y}_t)} = \frac{P_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t)P(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t-1})}{\int P_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t)P(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t-1})d\mathbf{x}_t}, \quad (4.7)$$

missä $\int P_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t)P(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t-1})d\mathbf{x}_t$ on normalisointivakio [44, s. 5].

Tutkittavana oleva stokastinen prosessi voi sisältää jatkuvien prosessien lisäksi diskreettejä ja stationaarisia Markovin prosesseja, joiden ominaisuudet eivät muutu ajan funktiona ja ne noudattavat aiemmin esiteltyä Markovin ominaisuutta. Diskreettien ja stationääristen prosessien tilansiirtotodennäköisyydet voidaan mallintaa erilisen tilansiirtomatriisin avulla.

Määritelmä 4.5. Stationaarisen Markovin prosessin tilansiirtotodennäköisyydet $P(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1})$ voidaan määritellä tilansiirtomatriisin $A \in \mathbb{R}^{M \times M}$ avulla, missä M on tilojen lukumäärä

$$A_{i,j} = P(\mathbf{x}_t = j|\mathbf{x}_{t-1} = i). \quad (4.8)$$

4.3 SMC-menetelmät

Sekventiaalisia Monte Carlo -menetelmiä (*Sequential Monte Carlo*, SMC) voidaan käyttää apuna Bayesiläisen suodatusongelman ratkaisemiseksi, sillä yleisesti estimointiongelmia ei voida ratkaista analyttisesti. SMC-menetelmiin kuuluvan partikkeli-suodattimen avulla sekventiaalisen estimointiongelman posteriorijakaumaa approksimoidaan aikasarjassa numeerisesti.

4.3.1 Monte Carlo -integrointi

SMC-menetelmien käyttö perustuu Monte Carlo -integraaliin, jossa päämääränä on approksimoida integraalia

$$I = \int f(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \quad (4.9)$$

missä $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{d_{\mathbf{x}}}$, kirjoittamalla se muotoon.

$$I = \int f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int g(\mathbf{x})\pi(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \mathbb{E}[g(\mathbf{x})], \quad (4.10)$$

missä $g = f/\pi : \mathbb{R}^{d_x} \rightarrow \mathbb{R}^{d_x}$ ja $\pi(\mathbf{x})$ on tiheysfunktio, jolle pätee $\int \pi(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 1$ ja $\pi(\mathbf{x}) \geq 0$. [44, s. 35-36] Yleisessä tapauksessa ja satunnaismuuttujien avulla ilmaistuna tarkoitus on approksimoida odotusarvoa $\mathbb{E}[g(\mathbf{x})]$ todennäköisyysavaruudessa (Ω, \mathcal{F}, P) . Tässä tapauksessa odotusarvo voidaan kirjoittaa integraalin avulla muotoon

$$\mathbb{E}[g(\mathbf{x})] = \int_{\Omega} g(\mathbf{x})dP. \quad (4.11)$$

Koska P on todennäköisyysmitta, niin $\int_{\Omega} dP = 1$ ja $P(\omega) \geq 0$ kaikilla $\omega \in \Omega$. Tällöin integraalia (4.11) pystytään approksimoimaan toisistaan riippumattomilla partikkeleilla \mathbf{x}^i ($i \in \mathbb{N}$), jotka on poimittu todennäköisyysmitan P muodostamasta jakaumasta, ja partikkelien pisteille lasketuilla arvoilla $g(\mathbf{x}^i)$ [13]

$$I = \mathbb{E}[g(\mathbf{x})] = \int_{\Omega} g(\mathbf{x})dP \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(\mathbf{x}^i), \quad (4.12)$$

missä N on partikkelien lukumäärä. Suurten lukujen lain nojalla yhtälössä (4.12) esitetyn integraalin approksimaatio suppenee melkein varmasti kohti arvoa I partikkelilukumäärän N ollessa riittävän suuri [8].

4.3.2 Painotuspoiminta

Ideaalisessa tilanteessa näytteet generoitaisiin suoraan yhtälön (4.10) mukaisesta todennäköisyysjakaumasta $\pi(\mathbf{x})$. Usein näin ei kuitenkaan ole, vaan partikkelien generoimiseen tarvitaan haluttua jakaumaa muistuttava ehdokasjakauma $q(\mathbf{x})$. Kun partikkeleita generoidaan ehdokasjakauman avulla, puhutaan painotuspoiminnasta.

Ehdokasjakauman $q(\mathbf{x})$ samankaltaisuutta haluttuun todennäköisyysjakaumaan $\pi(\mathbf{x})$ voidaan kuvata ehdokasjakaumalta vaaditun ehdon avulla

$$\pi(\mathbf{x}) > 0 \Rightarrow q(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{d_x}, \quad (4.13)$$

eli jakauman $q(\mathbf{x})$ tuki sisältää jakauman $\pi(\mathbf{x})$ tuen. Jos yhtälön (4.13) ehto täyttyy voidaan (4.10) kirjoittaa uudelleen ehdokasjakauman avulla

$$I = \int g(\mathbf{x})\pi(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int g(\mathbf{x})\frac{\pi(\mathbf{x})}{q(\mathbf{x})}q(\mathbf{x})d\mathbf{x}. \quad (4.14)$$

Monte Carlo estimaatti integraalin arvolle I saadaan generoimalla N toisistaan riippumatonta partikkelia \mathbf{x}^i , missä $i = 1, \dots, N$ ehdokasjakaumasta $q(\mathbf{x})$ [44, s. 36-37]. Tällöin Monte Carlo estimaatti voidaan kirjoittaa

$$I \approx I_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(\mathbf{x}^i) \tilde{w}(\mathbf{x}^i), \quad (4.15)$$

missä

$$\tilde{w}(\mathbf{x}^i) = \frac{\pi(\mathbf{x}^i)}{q(\mathbf{x}^i)} \quad (4.16)$$

ovat generoitujen partikkelien painot. Kun partikkelien painot normalisoidaan, saadaan lopullinen muoto integraalin Monte Carlo estimaatille

$$I \approx I_N = \sum_{i=1}^N g(\mathbf{x}^i) w(\mathbf{x}^i), \quad (4.17)$$

missä

$$w(\mathbf{x}^i) = \frac{\tilde{w}(\mathbf{x}^i)}{\sum_{j=1}^N \tilde{w}(\mathbf{x}^j)} \quad (4.18)$$

ovat partikkelien normalisoidut painot [44, s. 37]. Painotuspoiminnan idea voidaan siirtää aiemmin käsiteltyyn Bayesiläiseen suodatukseen, jonka tavoitteena on ratkaista tilan posteriorijakauma $P(\mathbf{x}|\mathbf{y}_{1:t})$. Kyseistä jakaumaa ei kuitenkaan tunneta, joten partikkelien painoja ei pystytä suoraan määrittämään käyttäen yhtälöä (4.16). Posteriorijakauma voidaan kuitenkin ilmaista Bayesin kaavan avulla yhtälön (4.7) tavoin

$$P(\mathbf{x}|\mathbf{y}_{1:t}) = \frac{P_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}_t|\mathbf{x})P(\mathbf{x}|\mathbf{y}_{1:t-1})}{\int P_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}_t|\mathbf{x})P(\mathbf{x}|\mathbf{y}_{1:t-1})d\mathbf{x}}. \quad (4.19)$$

Kun partikkelit \mathbf{x}^i generoidaan ehdokasjakaumasta $q(\mathbf{x}|\mathbf{y}_{1:t-1})$, posteriorijakauman approksimaatiolle saadaan tällöin yhtälön (4.17) avulla

$$I = \int g(\mathbf{x})P(\mathbf{x}|\mathbf{y}_{1:t})d\mathbf{x} \approx \sum_{i=1}^N g(\mathbf{x}^i)w(\mathbf{x}^i), \quad (4.20)$$

missä normalisoidut partikkelien painot $w(\mathbf{x}^i)$ saadaan laskemalla alkuperäiset painot $\tilde{w}(\mathbf{x}^i)$

$$\tilde{w}(\mathbf{x}^i) = \frac{P_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}^i)P(\mathbf{x}^i|\mathbf{y}_{1:t-1})}{q(\mathbf{x}^i|\mathbf{y}_{1:t-1})} \quad (4.21)$$

ja normalisoimalla alkuperäiset painot $\tilde{w}(\mathbf{x}^i)$ yhtälön (4.18) tavoin. Jos yhtälön (4.20) funktioksi g valitaan Diracin deltafunktio $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^i)$ saadaan prosessin tilan posteriorijakauman approksimaatioksi [44, 46, s. 81-84],

$$P(\mathbf{x}|\mathbf{y}_{1:t}) = \sum_{i=1}^N w(\mathbf{x}^i)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^i). \quad (4.22)$$

4.3.3 Sekventiaalinen painotuspoiminta

Bayesiläisen suodatuksen tavoitteena on ratkaista tilan posteriorijakauma $P(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t})$ rekursiivisesti. Sekventiaalisella painotuspoiminnalla kyseistä posteriorijakaumaa voidaan arvioida Monte Carlo approksimaation avulla rekursiivisesti. Tällöin myös partikkelien painot voidaan määrittää rekursiivisesti edellisen ajanhetken painoja päivittämällä.

Oletetaan, että aikaisempi ja partikkeleilla näytteistetty posteriorijakauma $P(\mathbf{x}_{t-1}|\mathbf{y}_{1:t-1})$ on tunnettu ja haluamme approksimoida posteriorijakaumaa $P(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t})$, kun saadaan uusi mittaus \mathbf{y}_t . Jos ehdokasjakaumaksi $q(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t})$ valitaan

$$q(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t}) = q(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{y}_t)q(\mathbf{x}_{t-1}|\mathbf{y}_{1:t-1}), \quad (4.23)$$

voidaan uudet partikkelit generoida uuden tilan laajentamasta aikaisemmasta ehdokasjakaumasta. Bayesin kaavan mukaan posteriorijakauma voidaan kirjoittaa muodossa

$$P(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t}) \propto P_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t)P_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1})P(\mathbf{x}_{t-1}|\mathbf{y}_{1:t-1}). \quad (4.24)$$

Partikkelien painot voidaan laskea yhtälön (4.16) mukaisesti käyttämällä apuna yhtälöitä (4.23) ja (4.24), jolloin partikkelien painoiksi saadaan sekventiaalisessa tapauksessa

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x}_t^i) &\propto \frac{P_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t^i)P_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_t^i|\mathbf{x}_{t-1}^i)P(\mathbf{x}_{t-1}^i|\mathbf{y}_{1:t-1})}{q(\mathbf{x}_t^i|\mathbf{x}_{t-1}^i, \mathbf{y}_t)q(\mathbf{x}_{t-1}^i|\mathbf{y}_{1:t-1})} \\ &= w(\mathbf{x}_{t-1}^i) \frac{P_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t^i)P_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_t^i|\mathbf{x}_{t-1}^i)}{q(\mathbf{x}_t^i|\mathbf{x}_{t-1}^i, \mathbf{y}_t)}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Käyttäen yhtälössä (4.25) esitettyä muotoa partikkelien painoille, voidaan posteriorijakauman approksimaatio kirjoittaa yhtälön (4.22) tavoin muodossa [46, s. 81-84]

$$P(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t}) = \sum_{i=1}^N w(\mathbf{x}_t^i)\delta(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_t^i). \quad (4.26)$$

4.3.4 Uudelleennäytteistys

Uudelleennäytteistuksen tarkoitus on estää partikkelien määrän liian suuri väheneminen ja välttää partikkelien painojen kasautuminen vain yhdelle partikkelille. Tämä degeneraatio-ongelma, jossa suurella osalla partikkeleista ei ole merkitystä posteriorijakauman approksimaatiossa, voidaan välttää uudelleennäytteistuksen avulla [4]. Uudelleennäytteistys on tapa tuoda systeemiin palautteen kaltaista tietoa saaduista mittauksista, missä vahvimmat ja hyvin menestyvät partikkelit monistetaan [19].

Partikkelien uudelleennäytteistuksen määrittämistä varten voidaan käyttää efektiivistä näytteiden lukumäärää (*Effective Sample Size*, ESS)

$$\text{ESS} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (w(\mathbf{x}_t^i))^2}, \quad (4.27)$$

missä $1 \leq \text{ESS} \leq N$ kuvaa sitä, miten partikkelien painot ovat jakautuneet partikkeleille. Kuten yhtälöstä (4.27) nähdään, mitä pienempi ESS on, sitä useammalla partikkelilla paino on lähellä nollaa [44, s. 41].

Uudelleennäytteistysmenetelmiä on kirjallisuudessa monia, mutta systemaattinen uudelleennäytteistys on yleisimmin käytetty uudelleennäytteistysmenetelmä sen implementoinnin helppouden takia [11]. Tässä työssä uudelleennäytteistys tehdään käyttäen efektiivistä näytteiden lukumäärää, ja uudelleennäytteistuksen jälkeen partikkelien painot asetetaan yhtäsuuriksi [46, s. 123].

4.4 Graafipohjainen partikkelisuodatin

Tässä aliluvussa esitetään menetelmä GBPF-suodattimelle, joka perustuu pohjimiltaan tavalliseen partikkelisuodattimeen (*Particle Filter*, PF). Partikkelisuodatin on SMC-menetelmään perustuva estimointimenetelmä, jonka ideana on, että tilan estimaatti lasketaan posteriorijakaumaa kuvaavien näytteiden eli partikkelien ja niihin liitettyjen painojen avulla. GBPF-suodattimen erikoisuutena on, että siinä prosessin tila on rajoittunut rakennuksen pohjapiirustuksen määrittelemälle topologiselle joukolle.

4.4.1 Tilamalli

Tässä osassa alilukua käsitellään tarkemmin graafille suunnitellun partikkelisuodattimen tilamallia. Oletetaan, että yleinen tilansiirron ehdollinen todennäköisyys voidaan kirjoittaa muodossa

$$P_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}) = \sum_{i \in O} \sum_{j \in O} \frac{\chi_i(\mathbf{x}_{t-1}) A_{i,j} \chi_j(\mathbf{x}_t) P_{\beta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1})}{\int \sum_{j \in O} A_{i,j} \chi_j(\mathbf{x}_t) P_{\beta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}) d\mathbf{x}_t}, \quad (4.28)$$

missä joukko O on kaikkien karttaobjektien joukko, χ_i on karttaobjektin λ_i karakteristinen funktio

$$\chi_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{jos } \mathbf{x} \in \lambda_i \\ 0, & \text{jos } \mathbf{x} \notin \lambda_i \end{cases} \quad (4.29)$$

ja konkreettista liikeprosessia kuvaa todennäköisyysmitta P_{β} , missä alaindeksi $\beta \in \{1, 2, \dots, m\}$ erottaa mahdolliset useat liikeprosessit toisistaan. Tilansiirtomatriisi

$$A_{i,j} = P(\mathbf{x}_t \in \lambda_j \mid \mathbf{x}_{t-1} \in \lambda_i) \quad (4.30)$$

kuvaa diskreettejä siirtymätodennäköisyyksiä eri karttaobjektien välillä. Kyseiset siirtymätodennäköisyysdet määrittävät, mille karttaobjektille prosessin tila todennäköisimmin siirtyy seuraavalla aika-askelella. Yleisessä muodossa esitetyn tilamalli (4.28) ei kuitenkaan ota huomioon karttarajoitteita mittauksina vaan normalisointivakio laskeaan ilman prioria, jolloin karttarajoitteet ja niiden vaikutus alkutilan jakaumaan jätetään huomiotta. Tilamalli, jonka normalisointivakio riippuu priorista, voidaan kirjoittaa nimittäjän normalisointitermin sijaan suoraan verrannollisuuden avulla

$$P_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}) \propto \sum_{i \in O} \sum_{j \in O} \chi_i(\mathbf{x}_{t-1}) A_{i,j} \chi_j(\mathbf{x}_t) P_{\beta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}). \quad (4.31)$$

Verrannollisuuserroin voidaan määrittää käyttämällä priorijakaumana, yhtälön (4.6) tavoin, aikaisempaa posteriorijakaumaa.

4.4.2 Yleinen graafipohjaisen partikkelisuodattimen algoritmi

Tässä aliluvussa esitellään yleinen GBPF-suodattimen algoritmi, joka perustuu partikkelisuodattimille tyypilliseen sekventiaaliseen painotuspainotintaan sekä uudelleen-

näytteistykseen. Ehdokasjakaumana käytetään yksinkertaisuuden vuoksi Bootstrap-partikkelisuodattimien tavoin tilamallin mukaista jakaumaa [44]. Yleisen GBPF-suodattimen runko on esitetty Algoritmissa 1, mutta sisätiloissa suoritettavaan paikannukseen tarkoitettun GBPF-suodattimen algoritmi on esitetty myöhemmin luvussa 5.4.

Algoritmi 1 Yleinen GBPF-suodatin

Alkutilan jakauma $\mathbf{x}_0 \sim P(\mathbf{x}_0)$

Graafipohjainen tilamalli $\mathbf{x}_t \sim P_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1})$

Mittausmalli $\mathbf{y}_t \sim P_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t)$

Mittaukset $\mathbf{y}_{1:T} = y_1, y_2, \dots, y_T$

Partikkelien lukumäärä N

Ehdokasjakaumana tilamallin mukainen jakauma $P_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1})$

Efektiivisen näytteiden lukumäärän kynnyisarvo $\text{ESS}_{\text{limit}}$.

1. Asetetaan $t \leftarrow 0$.
2. Generoidaan riippumattomat partikkelit \mathbf{x}_0^i ehdokasjakaumasta $P(\mathbf{x}_0)$ ja projisoidaan partikkelit tarvittaessa lähimmälle karttarakenteen karttaobjektille.
3. Asetetaan partikkelien painot $w(\mathbf{x}_0^i) \leftarrow \frac{1}{N}$ kaikille $i = 1, \dots, N$.
4. Asetetaan $t \leftarrow t + 1$.
5. Generoidaan partikkelit \mathbf{x}_t^i tilamallin jakaumasta $P_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1})$.
6. Lasketaan painot yhtälön (4.25) mukaisesti, kun ehdokasjakaumana käytetään tilamallin jakaumaa

$$\tilde{w}(\mathbf{x}_t^i) = w(\mathbf{x}_{t-1}^i)P_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t^i).$$

7. Normalisoidaan painot

$$w(\mathbf{x}_t^i) = \frac{\tilde{w}(\mathbf{x}_t^i)}{\sum_{i=1}^N \tilde{w}(\mathbf{x}_t^i)}.$$

8. Lasketaan posteriorijakauman odotusarvo $\hat{\mathbf{x}}_t \approx \sum_{i=1}^N w(\mathbf{x}_t^i)\mathbf{x}_t^i$ ja kovarianssimatriisi $\hat{\Sigma}_t \approx \sum_{i=1}^N w(\mathbf{x}_t^i)(\mathbf{x}_t^i - \hat{\mathbf{x}}_t)(\mathbf{x}_t^i - \hat{\mathbf{x}}_t)^T$ [37].
 9. Jos yhtälön (4.27) mukainen efektiivinen näytekokoko $\text{ESS} < \text{ESS}_{\text{limit}}$, niin suoritetaan uudelleennäytteistys.
 10. Jos $t < T$ palataan kohtaan 4. Muussa tapauksessa lopetetaan suodatus.
-

4.4.3 Algoritmin suppeneminen

SMC-menetelmään perustuvan partikkelisuodatinalgoritmin tarkoituksena on approksimoida tavoiteltavaa posteriorijakaumaa tietyllä satunnaismitalla, jonka hyvyys

riippuu siitä, kuinka hyvin se approksimoi haluttua jakaumaa. Posteriorijakauman lisäksi partikkelien avulla approksimoidaan myös ennustusvaiheen jakaumaa, joten partikkeleilla näytteistettyjen approksimaatioiden on supettava kohti alkuperäisiä jakaumia. Tässä luvussa esitetty todistus algoritmin suppenemiselle on muokattu työssä [34] esitetystä todistuksesta niin, että se soveltuu tässä työssä käytettyihin satunnaismuuttujiin.

Suppenemisen tarkastelemista varten otetaan käyttöön tarkemmat notaatiot tila- ja mittaussmallille, kun mittaukset kullekin ajanhetkelle oletetaan realisoituneiksi

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &\sim \tau_0(d\mathbf{x}_0) \\ \mathbf{x}_t &\sim \tau_t(d\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}) \\ \mathbf{y}_t &\sim g_t(d\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t) \end{aligned} \quad (4.32)$$

sekä merkitään ennustusmittaa, suodatusmittaa ennen ja jälkeen uudelleen näytteistykseen vastaavasti

$$\begin{aligned} \eta_t(d\mathbf{x}_t) &= P_\eta(d\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t-1}) \\ \bar{\pi}_t(d\mathbf{x}_t) &= P_{\bar{\pi}}(d\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t}) \\ \pi_t(d\mathbf{x}_t) &= P_\pi(d\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t}). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Merkitään lisäksi integraalia notaatiolla

$$(f, \mu) = \int f(\mathbf{x})\mu(d\mathbf{x}), \quad (4.34)$$

missä $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ on integroitava ja rajoitettu funktio [34]. Vastaavalla notaatiolla joukon A mitta voidaan ilmaista karakteristisen funktion χ avulla muodossa

$$\mu(A) = (\chi_A, \mu) = \int \chi_A(\mathbf{x})\mu(d\mathbf{x}). \quad (4.35)$$

Ennustusvaiheen todennäköisyysmitalle η_t voidaan kirjoittaa rekursiivinen esitys yhtälön (4.6) tavoin käyttäen uutta notaatiota

$$\begin{aligned} \eta_t = \tau_t\pi_{t-1} &\Leftrightarrow (f, \tau_t\pi_{t-1}) = \int \int f(\mathbf{x}_t)\tau_t(d\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1})\pi_{t-1}(d\mathbf{x}_{t-1}) \\ &= \int \bar{f}(\mathbf{x}_{t-1})\pi_{t-1}(d\mathbf{x}_{t-1}) \\ &= (\bar{f}, \pi_{t-1}). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Vastaavalla tavalla myös ennen uudelleennäyteistystä päivitysaskelen suodatusmitalle $\bar{\pi}_t$ voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_t = g_t \star \eta_t &\Leftrightarrow (f, \bar{\pi}_t) = \frac{\int \int f(\mathbf{x}_t) g_t(\mathbf{x}_t) d\mathbf{y}_t \eta_t(d\mathbf{x}_t)}{\int \int g_t(\mathbf{x}_t) d\mathbf{y}_t \eta_t(d\mathbf{x}_t)} \\ &= \frac{(f g_t, \eta_t)}{(g_t, \eta_t)}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

missä symboli \star on ei-negatiivisen funktion g_t ja todennäköisyysmitan η_t välinen projektiivinen tulo [6, s. 261].

Olkoon $(\eta_t^N)_{N=1}^\infty$, $(\bar{\pi}_t^N)_{N=1}^\infty$ ja $(\pi_t^N)_{N=1}^\infty$ satunnaismittojen $\eta_t^N, \bar{\pi}_t^N, \pi_t^N : \Omega \rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^d)$ jonoja, jotka tulkitaan ennustejakauman sekä ennen ja jälkeen uudelleennäyteistykseen suodatusjakauman mittojen approksimaatioina vastaavasti. Yläindeksi N esittää partikkelisuodattimen tapauksessa suodatuksessa käytettyä partikkelien lukumäärää. Olkoon lisäksi Käyttäen yhtälön (4.34) mukaista notaatiota, voidaan todennäköisyysmittojen approksimaatioille kirjoittaa

$$\begin{aligned} (f, \eta_t) &\approx (f, \eta_t^N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\mathbf{x}_t^i) \\ (f, \pi_t) &\approx (f, \pi_t^N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\mathbf{x}_t^i). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Seuraava lause antaa tarvittavat ja riittävät ehdot mittojen $\eta_t^N, \bar{\pi}_t^N$ ja π_t^N suppenemiselle mittoja $\eta, \bar{\pi}$ ja π kohti siinä tapauksessa, että mittaushistoria ajanhetkeen T saakka on kiinnitetty eli $\mathbf{y}_{1:T} = y_{1:T}$. Ennen suppenemisen takaavaa lausetta ja sen todistusta tarvitaan kuitenkin vielä L_p -normin määritelmää.

Määritelmä 4.6. Olkoon \mathcal{R}_b mitallisten ja rajoitettujen reaalisten funktioiden joukko mitallisessa avaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Tällöin funktion $f \in \mathcal{R}_b$ L_p -normi $\|f\|_p$ on

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad (4.39)$$

missä $1 \leq p < \infty$ [23, s. 93].

Vastaavalla tavalla voidaan määritellä niin sanottu supremum normi L_∞ yllä esitetyn määritelmän 4.6 mukaisille funktioille f

$$\|f\|_\infty = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |f(\mathbf{x})| < \infty. \quad (4.40)$$

Satunnaismuuttujan \mathbf{x} L_p -normi $\|\mathbf{x}\|_p$ voidaan määritellä odotusarvon avulla

$$\|\mathbf{x}\|_p = \mathbb{E}[|\mathbf{x}|^p]^{\frac{1}{p}}, \quad (4.41)$$

missä $p > 0$ [34].

Lause 4.7 (Graafipohjaisen partikkelisuodattimen suppeneminen). *Olkoon mittaus-historia $\mathbf{y}_{1:T} = y_{1:T}$ kiinnitetty ajanhetkeen $T < \infty$ saakka. Oletetaan lisäksi, että mittausmallin jakauma on positiivinen ja rajoitettu jokaisella ajanhetkellä $t = 1, \dots, T$. Tällöin jokaisella reaalilla ja rajoitetulla funktiolla $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, kaikilla $p > 1$*

$$\|(f, \pi_t^N) - (f, \pi_t)\|_p \leq \frac{c_t}{\sqrt{N}}, \quad (4.42)$$

missä $c_t \in \mathbb{R}$ on partikkelien lukumäärästä N riippumaton vakio. Tällöin myös

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |(f, \pi_t^N) - (f, \pi_t)| = 0 \quad (4.43)$$

melkein varmasti [34].

Todistus. Todistuksen tarkoituksena on todistaa matemaattisen induktion avulla yhtälön (4.42) paikkansapitävyys jokaisella ajanhetkellä $0 \leq t < T$, jolloin myös yhtälö (4.43) on tosi melkein varmasti, kun $0 \leq t < T$. Vaikka ajanhetkien lukumäärä on rajoitettu, on induktion käyttäminen perusteltua satunnaismuuttujien rekursiivisuuden vuoksi.

Perusaskel:

Olkoon $t = 0$, jolloin toisistaan riippumattomat partikkelit on generoitu alkutilan jakauman $\pi_0 = \tau_0$ mukaisesti. Näin ollen tarvitsee tutkia, onko yhtälö

$$\|(f, \pi_0^N) - (f, \pi_0)\|_p \leq \frac{c_0}{\sqrt{N}} \quad (4.44)$$

tosi. Tarkastelemalla normin muodostaman satunnaismuuttujan odotusarvoa ja käyttämällä hyväksi yhtälön (4.38) mukaista notaatiota alkutilan approksimaatiolle, saadaan

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|(f, \pi_0^N) - (f, \pi_0)|^p]^{\frac{1}{p}} &= \mathbb{E}\left[\left|\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\mathbf{x}_0^i) - (f, \pi_0)\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{1}{N} \mathbb{E}\left[\left|\sum_{i=1}^N f(\mathbf{x}_0^i) - \mathbb{E}[f(\mathbf{x})]\right|^p\right]^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Partikkelien riippumattomuuden vuoksi osa yhtälön (4.45) odotusarvoista menee nolaksi, jolloin voidaan osoittaa, että on olemassa $c_0 \in \mathbb{R}$ kaikilla $p > 1$ siten, että [22]

$$\|(f, \pi_0^N) - (f, \pi_0)\|_p \leq \frac{c_0}{\sqrt{N}}. \quad (4.46)$$

Induktioaskel:

Oletetaan induktio-oletuksena, että $\|(f, \pi_t^N) - (f, \pi_t)\|_p \leq \frac{c_t}{\sqrt{N}}$ on tosi jollakin ajanhetkellä $0 \leq t < T$ kaikille reaalille ja rajoitetuille funktioille f . Tarkoituksena on todistaa induktio-oletusta hyödyntäen sekä ennustusjakauman että suodatusjakauman todennäköisyysmittojen suppeneminen ajanhetkellä $t + 1$, eli

$$\begin{aligned} \|(f, \eta_{t+1}^N) - (f, \eta_{t+1})\|_p &\leq \frac{c_{\eta, t+1}}{\sqrt{N}} \\ \|(f, \bar{\pi}_{t+1}^N) - (f, \pi_{t+1})\|_p &\leq \frac{c_{\bar{\pi}, t+1}}{\sqrt{N}} \\ \|(f, \pi_{t+1}^N) - (f, \pi_{t+1})\|_p &\leq \frac{c_{\pi, t+1}}{\sqrt{N}}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Tarkastellaan ensin ennustusjakauman todennäköisyysmitan approksimaation η_{t+1}^N suppenemista kohti todellista ennustusjakauman mittaa η_{t+1} . Lisäämällä ja vähentämällä termi $(f, \tau_{t+1}\pi_t^N)$ sekä käyttämällä kolmioepäyhtälöä, käsiteltävä normi voidaan kirjoittaa yhtälön (4.36) avulla muotoon

$$\begin{aligned} &\|(f, \eta_{t+1}^N) - (f, \eta_{t+1})\|_p \\ &= \|(f, \eta_{t+1}^N) - (f, \tau_{t+1}\pi_t^N) + (f, \tau_{t+1}\pi_t^N) - (f, \tau_{t+1}\pi_t)\|_p \\ &\leq \|(f, \eta_{t+1}^N) - (f, \tau_{t+1}\pi_t^N)\|_p + \|(f, \tau_{t+1}\pi_t^N) - (f, \tau_{t+1}\pi_t)\|_p. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Yhtälön (4.36) tavoin, integraali $(f, \tau_{t+1}\pi_t)$ voidaan kirjoittaa uuden funktion \bar{f} avulla muotoon

$$\begin{aligned} (f, \tau_{t+1}\pi_t) &= \int \int f(\mathbf{x}_{t+1})\tau_{t+1}(d\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{x}_t)\pi_t(d\mathbf{x}_t) \\ &= \int \bar{f}(\mathbf{x}_t)\pi_t(d\mathbf{x}_t) \\ &= (\bar{f}, \pi_t), \end{aligned} \quad (4.49)$$

missä funktion \bar{f} tulee olla reaalinen ja rajoitettu. Funktio f on oletuksen mukaan reaalinen ja rajoitettu, jolloin

$$\|\bar{f}\|_\infty = \|(f, \tau_{t+1})\|_\infty \leq \|f\|_\infty < \infty \quad (4.50)$$

eli funktio \bar{f} on myös reaalinen ja rajoitettu [34]. Käyttämällä hyväksi yhtälön (4.49) mukaista notaatiota, alkuperäinen yhtälö (4.48) voidaan kirjoittaa muotoon

$$\|(f, \eta_{t+1}^N) - (f, \eta_{t+1})\|_p \leq \|(f, \eta_{t+1}^N) - (f, \tau_{t+1}\pi_t^N)\|_p + \|(\bar{f}, \pi_t^N) - (\bar{f}, \pi_t)\|_p. \quad (4.51)$$

Kolmioepäyhtälön (4.51) oikeanpuoleisin termi suppenee induktio-oletuksen perusteella. Koska funktio \bar{f} on rajoitettu ja reaalinen, on olemassa jokin partikkelien lukumäärästä N riippumaton vakio c'_{t+1} siten, että

$$\|(\bar{f}, \pi_t^N) - (\bar{f}, \pi_t)\|_p \leq \frac{c'_{t+1}}{\sqrt{N}}. \quad (4.52)$$

Ennustejakauman suppenemisen varmistamiseksi tulee seuraavaksi tarkastellaan kolmioepäyhtälön (4.51) oikealla puolella olevaa termiä

$$\|(f, \eta_{t+1}^N) - (f, \tau_{t+1}\pi_t^N)\|_p. \quad (4.53)$$

Merkitään partikkelien todellisia tiloja prosessin alkutilasta nykyiseen ajanhetkeen t ja partikkelien kaikkia aikaisempia tiloja ehdokasjakaumasta generoimisen jälkeen $\mathbf{x}_{0:t}^i$ ja $\bar{\mathbf{x}}_{1:t}^i$ vastaavasti. Valitaan lisäksi normiksi parillinen p ja määritellään sigma-algebra \mathcal{F}_t siten, että se sisältää kaikki aikaisemmat todelliset sekä ehdokasjakaumasta generoidut tilat eli $\mathcal{F}_t = \sigma(\{\mathbf{x}_{0:t}^i, \bar{\mathbf{x}}_{1:t+1}^i \mid 1 \leq i \leq N\})$. Määritellään lisäksi satunnaismuuttuja S_{t+1}^i , joka kuvaa yhtälön (4.53) normin sisällä olevaa osaa yhden partikkelin kohdalla

$$S_{t+1}^i = f(\bar{\mathbf{x}}_{t+1}^i) - (f, \tau_{t+1}(\mathbf{x}_t^i)). \quad (4.54)$$

Satunnaismuuttujat S_{t+1}^i ovat nollakeskeisiä ja keskenään riippumattomia sigma-algebran \mathcal{F}_t suhteen, jolloin

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left((f, \eta_{t+1}^N) - (f, \tau_{t+1}\pi_t^N) \mid \mathcal{F}_t \right)^p \right] &= \mathbb{E} \left[\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_{t+1}^i \mid \mathcal{F}_t \right)^p \right] \\ &= \frac{1}{N^p} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i_1=1}^N S_{t+1}^{i_1} \mid \mathcal{F}_t \right) \cdots \left(\sum_{i_p=1}^N S_{t+1}^{i_p} \mid \mathcal{F}_t \right) \right] \\ &= \frac{1}{N^p} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i_1=1}^N S_{t+1}^{i_1} \cdots \sum_{i_p=1}^N S_{t+1}^{i_p} \mid \mathcal{F}_t \right) \right] \\ &= \frac{1}{N^p} \sum_{i_1=1}^N \cdots \sum_{i_p=1}^N \mathbb{E} \left[(S_{t+1}^{i_1} \cdots S_{t+1}^{i_p} \mid \mathcal{F}_t) \right]. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Satunnaismuuttujien S_{t+1}^i nollakeskeisyyden ja keskinäisen riippumattomuuden takia termit, joissa satunnaismuuttujan aste on pariton, katoavat summauksesta [33]. Esimerkiksi

$$\mathbb{E} \left[(S_{t+1}^i)^3 S_{t+1}^j | \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E} \left[(S_{t+1}^i)^3 | \mathcal{F}_t \right] \mathbb{E} \left[S_{t+1}^j | \mathcal{F}_t \right] = 0, \quad (4.56)$$

kun $i \neq j$. Tällöin yhtälössä (4.55) on $c^p N^{\frac{p}{2}}$ nolasta eroavaa termiä, joista jokaiselle pätee [33]

$$\mathbb{E} \left[\left(S_{t+1}^{i_1} \cdots S_{t+1}^{i_p} | \mathcal{F}_t \right) \right] \leq 2^p \|f\|_\infty^p. \quad (4.57)$$

Yhdistämällä yhtälöt (4.53), (4.55) ja (4.57) sekä soveltamalla aikaisempaa yhtälöä (4.41) odotusarvoihin, saadaan

$$\begin{aligned} \|(f, \eta_{t+1}^N) - (f, \tau_{t+1} \pi_t^N)\|_p &= \left(\frac{1}{N^p} \sum_{i_1=1}^N \cdots \sum_{i_p=1}^N \mathbb{E} \left[\left(S_{t+1}^{i_1} \cdots S_{t+1}^{i_p} | \mathcal{F}_t \right) \right] \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\frac{1}{N^p} c^p N^{\frac{p}{2}} 2^p \|f\|_\infty^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{2c \|f\|_\infty}{\sqrt{N}}, \end{aligned} \quad (4.58)$$

mikä voidaan yhdistää tarkasteltavaa ennustejakauman approksimaatiota eli yhtälöä (4.51) koskevaksi suppenemiseksi aikaisemman yhtälön (4.52) avulla [20, 21, s. 63]

$$\begin{aligned} \|(f, \eta_{t+1}^N) - (f, \eta_{t+1})\|_p &\leq \frac{c'_{t+1}}{\sqrt{N}} + \frac{2c \|f\|_\infty}{\sqrt{N}} \\ &= \frac{c_{\eta, t+1}}{\sqrt{N}}, \end{aligned} \quad (4.59)$$

missä $c_{\eta, t+1} = c'_{t+1} + 2c \|f\|_\infty$ kaikilla reaalilla ja rajoitetuilla funktioilla f .

Seuraavaksi pitää tarkastella yhtälön (4.47) toista osaa eli suppeneeko ennen uudelleennäytteistystä muodostetun suodatusjakauman approksimaatio $\bar{\pi}_{t+1}^N$ kohti todellista suodatusjakauman todennäköisyysmittaa π_{t+1} . Aloitetaan tarkastelu muokkaamalla normin sisällä olevaa osaa käyttäen yhtälön (4.37) tulosta sekä lisäämällä ja vähentämällä termi $\frac{(fg_{t+1}, \eta_{t+1}^N)}{(g_{t+1}, \eta_{t+1})}$.

$$\begin{aligned} (f, \bar{\pi}_{t+1}^N) - (f, \pi_{t+1}) &= \frac{(fg_{t+1}, \eta_{t+1}^N)}{(g_{t+1}, \eta_{t+1}^N)} - \frac{(fg_{t+1}, \eta_{t+1})}{(g_{t+1}, \eta_{t+1})} \pm \frac{(fg_{t+1}, \eta_{t+1}^N)}{(g_{t+1}, \eta_{t+1})} \\ &= \frac{(fg_{t+1}, \eta_{t+1}^N) - (fg_{t+1}, \eta_{t+1})}{(g_{t+1}, \eta_{t+1})} \\ &\quad + \frac{(fg_{t+1}, \eta_{t+1}^N)}{(g_{t+1}, \eta_{t+1}^N)} \cdot \frac{(g_{t+1}, \eta_{t+1}) - (g_{t+1}, \eta_{t+1}^N)}{(g_{t+1}, \eta_{t+1})}. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Nyt jälkimmäisen termin kertojaa $\frac{(fg_{t+1}, \eta_{t+1}^N)}{(g_{t+1}, \eta_{t+1}^N)}$ voidaan approksimoida ylöspäin, sillä [34]

$$(fg_{t+1}, \eta_{t+1}^N) \leq \|f\|_\infty (g_{t+1}, \eta_{t+1}^N). \quad (4.61)$$

Käyttämällä edellisen yhtälön (4.61) havaintoa ja Minkowskin epäyhtälöä [15, s. 155], alkuperäinen yhtälö (4.60) voidaan kirjoittaa normien avulla muotoon

$$\begin{aligned} \|(f, \bar{\pi}_{t+1}^N) - (f, \pi_{t+1})\|_p &\leq \frac{\|(fg_{t+1}, \eta_{t+1}^N) - (fg_{t+1}, \eta_{t+1})\|_p}{(g_{t+1}, \eta_{t+1})} \\ &+ \frac{\|f\|_\infty \|(g_{t+1}, \eta_{t+1}) - (g_{t+1}, \eta_{t+1}^N)\|_p}{(g_{t+1}, \eta_{t+1})}. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Edellisen yhtälön (4.62) ensimmäisen termin osoittaja on rajoitettu aikaisemmin tarkastellun ennustejakauman approksimaation tilanteen ollessa rajoitettu. Lisäksi soveltamalla yhtälöä (4.57) edellisen yhtälöön saadaan [9]

$$\begin{aligned} \|(f, \bar{\pi}_{t+1}^N) - (f, \pi_{t+1})\|_p &\leq \frac{c_{\eta, t+1}}{(g_{t+1}, \eta_{t+1})\sqrt{N}} + \frac{2c\|f\|_\infty\|g_{t+1}\|_\infty}{(g_{t+1}, \eta_{t+1})\sqrt{N}} \\ &= \frac{c_{\bar{\pi}, t+1}}{\sqrt{N}} \end{aligned} \quad (4.63)$$

eli myös ennen uudelleennäytteistystä muodostettu suodatusmitan approksimaatio $\bar{\pi}_{t+1}^N$ suppenee kohti todellista suodatusjakauman todennäköisyysmittaa π_{t+1} .

Lopuksi pitää vielä tarkastella, että suppeneeko uudelleennäytteistyksen jälkeinen suodatusmitan approksimaatio π_{t+1}^N kohti todellista todennäköisyysmittaa π_{t+1} . Aloitetaan tarkastelu ennustejakauman tavoin lisäämällä ja vähentämällä termi $(f, \bar{\pi}_{t+1}^N)$ sekä käyttämällä kolmioepäyhtälöä tutkittavaan normiin

$$\|(f, \pi_{t+1}^N) - (f, \pi_{t+1})\|_p \leq \|(f, \pi_{t+1}^N) - (f, \bar{\pi}_{t+1}^N)\|_p + \|(f, \bar{\pi}_{t+1}^N) - (f, \pi_{t+1})\|_p. \quad (4.64)$$

Yhtälöstä (4.64) huomataan, että kolmioepäyhtälön oikealla puolella oleva jälkimmäinen termi on sama, kuin aikaisemmassa tilanteessa, jossa tarkasteltiin suodatusmitan approksimaation suppenemista ennen uudelleennäytteistystä kohti todellista suodatusmittaa. Näin ollen voidaan todeta, että kyseinen termi on rajoitettu. Toisen termin tarkastelu voidaan suorittaa vastaavasti kuin ennustejakauman suppenemisen yhteydessä. Määritellään siis sigma-algebra $\bar{\mathcal{F}}_{t+1} = \sigma(\{\mathbf{x}_{0:t}^i, \bar{\mathbf{x}}_{1:t+1}^i \mid 1 \leq i \leq N\})$ ja satunnaismuuttujat $\bar{S}_{t+1}^i = f(\mathbf{x}_{t+1}^i) - (f, \bar{\pi}_{t+1}^N)$, jotka ovat vastaavasti nollakeskeisiä

ja keskenään riippumattomia sigma-algebran $\bar{\mathcal{F}}_{t+1}$ suhteen. Samalla periaatteella kuin ennustejakauman tarkastelussa

$$\|(f, \pi_{t+1}^N) - (f, \bar{\pi}_{t+1}^N)\|_p \leq \frac{c\|f\|_\infty}{\sqrt{N}}, \quad (4.65)$$

jolloin uudelleennäytteistyksen jälkeiselle suodatusjakauman tilanteelle saadaan

$$\begin{aligned} \|(f, \pi_{t+1}^N) - (f, \pi_{t+1})\|_p &\leq \frac{c\|f\|_\infty}{\sqrt{N}} + \frac{c_{\pi, t+1}}{\sqrt{N}} \\ &= \frac{c_{\bar{\pi}, t+1}}{\sqrt{N}} \end{aligned} \quad (4.66)$$

eli myös uudelleennäytteistyksen jälkeen suodatusmitan approksimaatio suppenee kohti todellista suodatusmittaa. Tällöin induktion perusteella yhtälössä (4.47) esitetyt hypoteesit on todistettu oikeiksi. \square

Luku 5

Graafipohjainen partikkelisuodatin paikannuksessa

Tässä luvussa käsitellään GBPF-suodattimen käyttöä sisätiloissa tapahtuvaan käyttäjän paikantamiseen. GBPF-suodattimen tarkoituksena on rajoittaa tarkasteltava tila eli käyttäjän sijainti ja liike karttarakenteen ja käytössä olevan tilamallin mukaisesti. Ennen tarkemman tilamallin, mittausmallin sekä keskeisten partikkelisuodattimen yksityiskohtien käsittelyä, otetaan käyttöön kaksiosainen tilavektori

$$\mathbf{x}_t = \begin{cases} [x_t, y_t, \alpha_t, v_t, m_t, I_t]^T, & \text{jos } \mathbf{x}_t \text{ kuuluu avoimelle alueelle} \\ [p_t, \alpha_t, v_t, m_t, I_t]^T, & \text{jos } \mathbf{x}_t \text{ kuuluu linkille,} \end{cases} \quad (5.1)$$

missä $x_t \in \mathbb{R}$ ja $y_t \in \mathbb{R}$ ovat käyttäjän sijainnin x - ja y -koordinaatit, kun käyttäjä on avoimella alueella, ja $p_t \in [0, 1]$ tulkitaan käyttäjän suhteellisena sijaintina linkillä. Parametri $\alpha_t \in [0, 2\pi)$ on käyttäjän suunta, $v_t \in \mathbb{R}_+$ tulkitaan käyttäjän vauhtina suuntaan α_t ja $I_t \in \mathbb{Z}$ kertoo tilan karttaobjektin indeksin ajanhetkellä t . Tilavektorin tyyppimuuttujaa m_t käsitellään tarkemmin tilamallia käsittelevässä alilu-

vussa 5.1. Linkille sijoittunut tila, joka esitetään tilavektorissa suhteellisen sijaintina linkillä, voidaan muuttaa kuvauksen $g(\mathbf{x}_t, \mathcal{T})$ avulla karteesisen koordinaatiston sijainniksi, jolloin mittausmallin sekä piste-estimaatin laskeminen on mahdollista.

Koska käyttäjän liike on GBPF-suodattimessa rajoitettu karttarakenteelle, on käyttäjän suuntaa kuvaava muuttuja α_t linkillä aina sama kuin linkin suunta. Tällöin on oltava kuvaus $\text{DIR}(\lambda_{I_t})$, jonka avulla saadaan selville linkin λ_{I_t} suunta linkin alkupisteestä kohti linkin loppupistettä. Seuraavissa aliluvuissa käsitellään tarkemmin GBPF-suodattimen tila- ja mittausmallia sekä esitellään testeissä käytetyn suodattimen lopullinen algoritmi.

5.1 Karttaobjektien pituuksiin perustuva graafipohjainen tilamalli

Liikkuminen sisätiloissa on tavallisesti päämäärätietoista eli käyttäjä pyrkii kohti tiettyä ja ennalta asetettua päämäärää, minkä vuoksi paikan satunnaiskulkuun perustuva malli [1] soveltuu liikkumisen mallintamiseen erittäin heikosti. Lisäksi rakennuksen rakenne rajoittaa käyttäjän liikkumista siten, että reitti valittua päämäärää kohti saattaa sisältää pysähdyksiä tai teräviä käännöksiä esimerkiksi käytävältä toiselle siirryttäessä. Tällöin myöskään nopeuden satunnaiskulkuun perustuva malli [2] ei kuvaa riittävän hyvin käyttäjän liikkumista sisätiloissa.

Tässä työssä käytetty graafipohjaisen tilamalli koostuu sekä siirtymätodennäköisyyksistä karttaobjektien välillä että käyttäjän liikettä kuvaavasta liikemallista karttarakenteen päällä. Siirtymätodennäköisyydet karttaobjektien välillä kuvaavat todennäköisyyksiä siirtyä aikaisemman karttaobjektin λ_k solmupisteestä s_k kaikille mahdollisille solmupisteissä kiinni oleville karttaobjekteille $\lambda_{k_1} \dots \lambda_{k_n}$. Tämä siirtymätodennäköisyys aikaisemmalta karttaobjektilta λ_k seuraavalle mahdolliselle karttaobjektille λ_{k_i} voidaan kirjoittaa yhtälön (4.30) mukaisella tilansiirtomatriisilla, jolloin $A_{k,k_i} = P(\lambda_{k_i} | \lambda_k)$. Viereisten karttaobjektien väliset siirtymätodennäköisyydet voidaan olettaa tasajakautuneiksi [30], riippuviksi karttaobjektien välisistä kulmista [16] tai ne voidaan määrittää manuaalisesti [18]. Tässä työssä käytetään työssä esitetylle karttarakenteelle laajennettua, karttaobjektien kokonaispituuteen perustuvia siirtymätodennäköisyyksiä (*Total Link Length*, TLL), missä suurimman todennäköisyyden saa karttaobjekti, jonka kautta käyttäjällä on mahdollisuus edetä laajimmalle aligraafille [36].

Alkuperäinen TLL-menetelmä, joka on esitetty artikkelissa [36], perustuu oletukseen, jonka mukaan käyttäjä pyrkii päämäärätietoisesti siirtymään kohti ennalta asettamaansa päämäärää kulkemalla suorinta mahdollista reittiä. Lisäksi jokainen karttarakenteen linkin piste oletetaan yhtä todennäköiseksi päämääräksi. Laskennan helpottamiseksi oletetaan, että käyttäjän päämäärä on jonkin tietyn karttarakennetta pitkin mitatun etäisyyden l_{max} päässä ja historiatiedot edellisistä linkeistä unohdetaan viimeisintä linkkiä lukuun ottamatta.

Oletetaan, että käyttäjä on tulossa linkiltä λ_k ja on linkin päätepisteenä olevassa solmupisteessä s_i , joka on yhteydessä linkeihin $\lambda_{k_1} \dots \lambda_{k_n}$. Tällöin edellä mainitut oletukset huomioon ottaen, siirtymätodennäköisyydet graafin linkkien välillä voidaan kirjoittaa

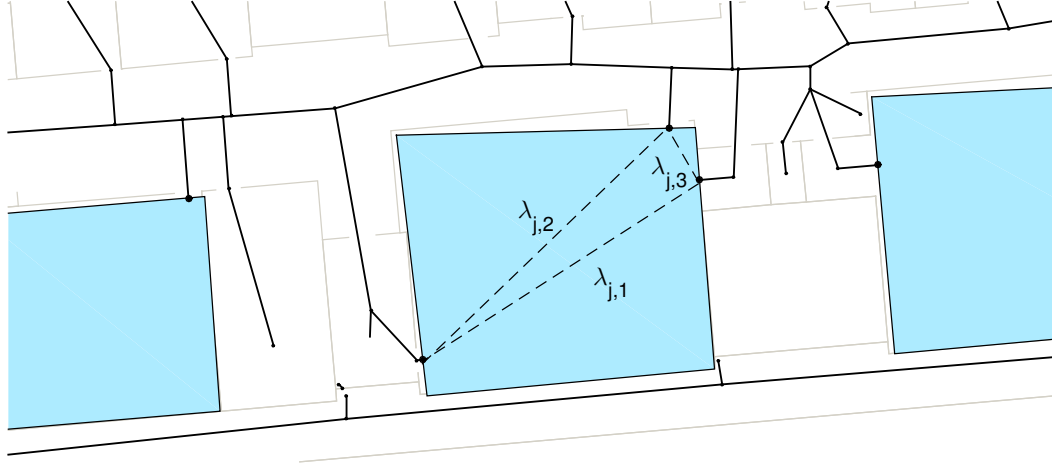
$$P(\lambda_{k_i} | \lambda_k) = \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}_k} \text{LENGTH}(\lambda_j)}{\sum_{j \in \mathcal{J}_k} \text{LENGTH}(\lambda_j)}, \quad (5.2)$$

missä $\text{LENGTH}(\lambda_j)$ on linkin λ_j euklidinen pituus ja joukot \mathcal{J}_k sekä \mathcal{J}_k on määritelty

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_k &= \{j \mid \text{graafia pitkin lyhin reitti solmusta } s_i \text{ linkille } \lambda_j, \text{ mikä kulkee linkin} \\ &\quad \lambda_{k_i} \text{ kautta, mutta ei kulje linkin } \lambda_k \text{ kautta ja on lyhyempi kuin } l_{max}\} \\ \mathcal{J}_k &= \{j \mid \text{graafia pitkin lyhin reitti solmusta } s_i \text{ linkille } \lambda_j, \text{ mikä ei kulje linkin} \\ &\quad \lambda_k \text{ kautta ja on lyhyempi kuin } l_{max}\} \end{aligned} \quad (5.3)$$

vastaavasti [36]. Yhtälössä (5.2) esitetyt todennäköisyydet voidaan laskea tehokkaasti offline-tilassa käyttäen artikkelissa [36] esitettyä algoritmia.

Alkuperäinen TLL-menetelmään perustuva malli ei kuitenkaan ota huomioon avoimia alueita, vaan karttarakenteen oletetaan muodostuvan vain solmuja yhdistävistä linkeistä [36]. Jotta linkkien pituuteen perustuvaa menetelmää voidaan soveltaa tässä työssä esitettyyn karttarakenteeseen, on avoimien alueiden karttaobjekteillekin määriteltävä pituutta kuvaava mitta. Tämä mitta voidaan määritellä intuitiivisesti jakamalla avoimen alueen pinta-ala keskimääräisellä käytävän leveydellä, jolloin linkkien pituudet ja avoimien alueiden pituutta kuvaavat mitat ovat vertailukelpoisia. Kyseinen määrittely ei kuitenkaan ole paras mahdollinen, sillä avoin alue saa turhan suuren pituuden TLL-menetelmässä, vaikka käyttäjä voi vain kulkea läpi avoimen alueen esimerkiksi kahden lähekkäisen avoimen alueen ja graafin yhdistävän solmun kautta. Tällöin mahdollinen avoimen alueen karttaobjektin kautta kulkeminen tulisi ottaa huomioon TLL-menetelmän todennäköisyyksien laskennassa.



Kuva 5.1: Tilapäisten linkkien luominen avoimen alueen sisälle.

Aikaisemmin esitetty ongelma voidaan ratkaista luomalla avoimen alueen karttaobjektin λ_j sisälle pituudeltaan lyhimmät mahdolliset tilapäiset linkit $\lambda_{j,1} \dots \lambda_{j,n}$ avoimen alueen ja graafin yhdistävien solmujen välille, kuten kuvassa 5.1. Tilapäisten linkkien pituuksien määrittämisessä on huomioitava, että lyhimmän reitin on kuljettava avoimen alueen sisällä. Tämä voidaan kuitenkin ratkaista tehokkaasti soveltamalla Dijkstran algoritmia avoimen alueen karttaobjektin kulmapisteisiin sekä graafin ja avoimen alueen yhdistäviin solmukohtiin [48, Luku 4.8]. Tällöin karttaobjektien kokonaispituuksien ja siirtymätodennäköisyyksien laskemisen yhteydessä voidaan olettaa, että tilapäiset linkit avoimen alueen sisällä ovat yhtä lailla mahdollisia käyttäjän sijainteja kuin avoimen alueen karttaobjekti. Kyseisen oletuksen avulla voidaan määrittellä avoimen alueen karttaobjektin λ_j pituudeksi se erotus, joka muodostuu vähentämällä niiden tilapäisten linkkien pituudet, jotka ovat osa jotain realisoitunutta eli lyhintä graafia pitkin kuljettua reittiä, avoimen alueen ja keskimääräisen käytävän leveyden osamäärästä

$$\text{LENGTH}(\lambda_j) = \frac{\text{AREA}(\lambda_j)}{\text{CORRIDOR_WIDTH}} - \sum_{m \in \mathcal{K}_k} \text{LENGTH}(\lambda_{j,m}), \quad (5.4)$$

missä $\text{AREA}(\lambda_j)$ on avoimen alueen λ_j pinta-ala, CORRIDOR_WIDTH kyseisen rakennuksen keskimääräinen käytävän leveys ja joukko \mathcal{K}_k

$$\mathcal{K}_k = \{m \mid \text{graafia pitkin lyhin reitti solmusta } s_i \text{ karttaobjektille tai karttaobjektin } \lambda_j \text{ kautta, mikä kulkee tilapäisen linkin } \lambda_{j,m} \text{ kautta}\}. \quad (5.5)$$

Yhtälössä (5.5) määritellyn avoimen alueen karttaobjektin pituuden avulla voidaan määrittää TLL-menetelmään perustuvat siirtymätodennäköisyydet myös tässä työssä käytetylle karttarakenteelle, jolloin

$$P(\lambda_{k_i}|\lambda_k) = \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}_{k,i}} \text{LENGTH}(\lambda_j) + \sum_{j \in \mathcal{K}_{k,i}} \text{LENGTH}(\lambda_{m,j})}{\sum_{j \in \mathcal{J}_k} \text{LENGTH}(\lambda_j) + \sum_{j \in \mathcal{K}_k} \text{LENGTH}(\lambda_{m,j})}, \quad (5.6)$$

missä

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{k,i} &= \{j \mid \text{lyhin reitti solmusta } s_i \text{ karttaobjektille } \lambda_j, \text{ mikä kulkee karttaobjektin } \lambda_{k_i} \text{ kautta, mutta ei kulje karttaobjektin } \lambda_k \text{ kautta ja on lyhyempi kuin } l_{max}\} \\ \mathcal{J}_k &= \{j \mid \text{lyhin reitti solmusta } s_i \text{ karttaobjektille } \lambda_j, \text{ mikä ei kulje karttaobjektin } \lambda_k \text{ kautta ja on lyhyempi kuin } l_{max}\} \\ \mathcal{K}_{k,i} &= \{j \mid \text{lyhin reitti solmusta } s_i \text{ tilapäiselle linkille } \lambda_{m,j}, \text{ mikä kulkee karttaobjektin } \lambda_{k_i} \text{ kautta, mutta ei kulje karttaobjektin } \lambda_k \text{ kautta ja on lyhyempi kuin } l_{max}\} \\ \mathcal{K}_k &= \{j \mid \text{lyhin reitti solmusta } s_i \text{ tilapäiselle linkille } \lambda_{m,j}, \text{ mikä ei kulje karttaobjektin } \lambda_k \text{ kautta ja on lyhyempi kuin } l_{max}\}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Yhtälössä (5.6) esitetyt siirtymätodennäköisyydet voidaan laskea tehokkaasti offlinevaiheessa artikkelissa [36] esitetyn algoritmin avulla, sillä lisäoletuksella, että tilapäisten linkkien oletetaan olevan mahdollisia käyttäjän päämääriä ja avoimien alueiden karttaobjektien pituus on määritelty yhtälön (5.5) tavoin. Saadut todennäköisyydet painottavat eniten niitä karttaobjekteja, joiden kautta kulkemalla käyttäjällä on pääsy pituudeltaan suurimmalle aligraafille. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että TLL-menetelmään perustuva malli painottaa eniten pituudeltaan pitkiä pääkäytäviä ja suuria huoneita kuin käytävän varrella olevia pieniä huoneita. Malli antaa myös epätodennäköisimmille karttaobjekteille nolasta poikkeavan todennäköisyyden rajoittavan etäisyyden l_{max} takia, mutta lisäksi siirtymätodennäköisyyksille voidaan antaa jokin minimi-todennäköisyys. Huomioitavaa on lisäksi, että TLL-menetelmään perustuva malli ei salli U-käännöksiä, vaan ne on käsiteltävä siirtymätodennäköisyydet huomioivassa tilamallissa.

Graafipohjaisen tilamallin, joka hyödyntää aikaisemmin esitettyjä siirtymätodennäköisyyksiä, etuna on, että se ottaa huomioon mahdolliset pysähdykset sekä terävät käännökset samoin kuin käyttäjän tavoitteellisen liikkumisen sisätiloissa. Tässä työssä

käytetty tilamalli koostuu neljästä osasta, jotka ovat liikkuminen linkeillä, liikkuminen avoimilla alueilla sekä siirtymät avoimelta alueelta linkeille ja päinvastoin. Tilamalli on jaettu tyyppimuuttujan m_t avulla liiketilaan ($m_t = \text{”liikkeellä”}$) ja paikallaan pysymiseen ($m_t = \text{”seis”}$) [18,30,36]. Kun tyyppimuuttuja m_t indikoi, että käyttäjä on liikkeellä, noudattaa käyttäjän liikkuminen karttarakenteella vakionopeusmallia yhdistettynä karttaobjektien välisiin siirtymätodennäköisyyksiin. Todennäköisyydet eri liiketyyppien välillä siirtymiselle voidaan määrittää ajan suhteen vakioksi tai todennäköisyydet voidaan määrittellä opittavaksi datan avulla [30].

Varsinainen liikemalli voidaan kirjoittaa tyyppimuuttujasta riippuvalla probabilistisellä notaatiolla

$$P(s_t, v_t, \alpha_t | v_{t-1}, \alpha_{t-1}, m_t) = \begin{cases} \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} s_t \\ v_t \\ \alpha_t \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} (\Delta t)_t v_{t-1} \\ v_{t-1} \\ \alpha_{t-1} \end{bmatrix}, Q_t \right), & m_t = \text{”liikkeellä”} \\ \delta(s_t, v_t, \alpha_t), & m_t = \text{”seis”} \end{cases} \quad (5.8)$$

missä s_t on etäisyys, jonka käyttäjä liikkuu ajan $(\Delta t)_t$ aikana karttarakenteella ja δ on moniulotteinen Diracin deltafunktio. Lisäksi liikemallin kohinamatriisi Q_t on määritelty seuraavasti

$$Q_t = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\sigma_v^2(\Delta t)_t^3 & \frac{1}{2}\sigma_v^2(\Delta t)_t^2 & 0 \\ \frac{1}{2}\sigma_v^2(\Delta t)_t^2 & \sigma_v^2(\Delta t)_t & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\alpha^2 \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

missä σ_v^2 ja σ_α^2 ovat vauhdin sekä suunnan varianssit vastaavasti. Matriisin Q_t vasemman yläkulman 2×2 -matriisi on approksimaatio prosessikohinalle ja se on muodostettu jatkuva-aikaisen paikka- ja nopeusmallin diskretoinnin yhteydessä.

Karttaobjektien siirtymätodennäköisyyksien ja yhtälön (5.8) avulla saadaan muodostettua yhtälön (4.31) ja algoritmin 1 mukainen tilamalli, joka huomio sekä karttaraioitteet että käyttäjän luonnollisen liikkumisen sisätiloissa. Tällöin

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}) &\propto \sum_{i \in \mathcal{O}} \sum_{j \in \mathcal{O}} \chi_i(\mathbf{x}_{t-1}) A_{i,j} \chi_j(\mathbf{x}_t) P_\beta(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}) \\ &= \sum_{i \in \mathcal{O}} \sum_{j \in \mathcal{O}} \chi_i(\mathbf{x}_{t-1}) P(\lambda_j | \lambda_i) \chi_j(\mathbf{x}_t) P_\beta(\mathbf{x}_t; f_\beta(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{v}_{t-1}, \mathcal{J})), \end{aligned} \quad (5.10)$$

missä $P_\beta(\mathbf{x}_t; f_\beta(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{v}_{t-1}, \mathcal{T}))$ on yhtälössä (4.1) esitetyn stokastisen tilamallin mukaisen tilan \mathbf{x}_t todennäköisyysjakauma. Kyseinen jakauma muodostetaan liittämällä yhtälössä (5.8) esitetty liikemalli osaksi parametrisoitua funktiota f_β , jolloin esimerkiksi uuden tilan sijainti voidaan laskea karttarakennetta pitkin määritetyn etäisyyden s_t avulla. Yhtälön (5.10) mukaista tilamallia on havainnollistettu tarkemmin algoritmissa 2.

5.2 Mittausmalli

Tässä aliluvussa on käsitelty lyhyesti GBPF-suodattimen mittausmallia ja työssä käytettyjä WLAN- sekä BLE-mittauksia. Kyseisten mittausten avulla suoritettava paikannus perustuu ennen varsinaista paikannusvaihetta kerättyyn opetusdataan eli fingerprint-mittauksiin. WLAN- sekä BLE-järjestelmien tukiasemat (*Access Point*, AP) lähettävät jollakin lähtöteholla radiosignaaleja, jotka käyttäjän päätelaite (*User Equipment*, UE) havaitsee vastaavasti tietyllä voimakkuudella. Tätä radiosignaalin voimakkuuden (*Radio Signal Strength*, RSS) heikentymistä voidaan kuvata radiosignaaleille tyypillisellä logaritmisella vaimenemismallilla (*Path-loss Model*, PL-malli)

$$\mathbf{y}_t = A - 10n \log_{10}(\|\mathbf{x}_t - \mathbf{p}_{ap}\|) + \mathbf{w}_t, \quad (5.11)$$

missä \mathbf{y}_t on havaittu RSS arvo pisteessä \mathbf{x}_t , \mathbf{p}_{ap} on havaitun AP:n sijainti, \mathbf{w}_t on mittausmallin kohina ja A sekä n ovat PL-mallin parametrit, jotka kuvaavat AP:n signaalin RSS arvoa 1m etäisyydellä tukiasemasta ja signaalin ympäristölle ominaista vaimenemista vastaavasti. PL-mallin parametrit A ja n sekä AP:n sijainti voidaan estimoida opetusdatan perusteella Gauss-Newtonin menetelmän avulla [39]. Approksimoimalla WLAN- ja BLE-mittauksia normaalijakaumalla, mittausmalli voidaan kirjoittaa probabilistisessa muodossa [36]

$$P(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t) \propto N(g(\mathbf{x}_t, \mathcal{T})|\mu_t(\mathbf{y}_t), \Sigma_t(\mathbf{y}_t)). \quad (5.12)$$

Yhtälö (5.12) ei kuitenkaan vastaa täysin tarkkaa mittausten määrittelevää uskottavuutta linkeillä, sillä täsmällinen uskottavuus tietylle linkin pisteelle olisi kaksiulotteisen uskottavuusjakauman integraali linkkipisteelle määritellyn tilan yli [30]. Tämä kompleksinen menetelmä kuitenkin vaatii suurempaa laskennallista kapasiteettia sekä pohjajapiirustuksen laajempaa käyttämistä, jota työssä käytetyllä karttarakenteella on juuri pyritty vähentämään.

Yksi sisätilapaikannuksen haasteista on tarkka kerroksen tunnistaminen WLAN- tai BLE-mittauksien avulla. Tässä työssä kerroksen tunnistaminen suoritetaan laskemalla mittausten pohjalta jokaiselle rakennuksen kerrokselle todennäköisyys, että käyttäjän vastaanottamat mittaukset vastaavat sijaintia kyseisessä kerroksessa. Tämän jälkeen oletetuksi kerrokseksi valitaan rakennuksen todennäköisin kerros. Kerroksen tunnistus voidaan suorittaa myös muilla menetelmillä, kuten laskentatehoa säästävällä [3] tai luokitteluun [5] perustuvalla menetelmillä.

5.3 Piste-estimaatin valinta

Tässä aliluvussa käsitellään tarkemmin esitetylle karttarakenteelle sopivan partikkelisuodattimen piste-estimaatin valintaa. Luonnollinen valinta partikkelisuodattimen piste-estimaatiksi olisi partikkelipilven painotettu keskiarvo, mutta tällöin estimaatti ei todennäköisesti sijaitse karttarakenteen rajoittamassa tila-avaruudessa. GBPF-suodattimen tapauksessa on kuitenkin luonnollista rajoittaa partikkelisuodattimen piste-estimaatti karttarakenteen määräämään avaruuteen.

Käyttäjän sijaintia kartalla kuvaava piste-estimaatti, joka sijaitsee tässä työssä esitetyllä karttarakenteella, voidaan valita monella tavalla. Estimaatiksi voidaan valita partikkelipilven painoltaan suurin partikkeli, jolloin estimaatti luonnollisesti sijaitsee karttarakenteen määräämässä avaruudessa [18]. Tämä ei kuitenkaan ole käyttäjän kannalta suotuisin vaihtoehto, sillä piste-estimaatti saattaa hyppiä partikkelien välillä niiden painojen muuttuessa. Toinen vaihtoehto on valita estimaatiksi *maximum a posteriori* -estimaatin (MAP), mikä vastaa posteriorijakauman maksimoivaa tilaa kyseisellä ajanhetkellä [14]. MAP-estimaatti saattaa kuitenkin hyppiä aikaisemman estimaatin tapaan, sillä posteriorijakauma voi monissa tapauksissa olla monihuippuinen.

Tässä työssä käytetty piste-estimaatti on karttarajoitteiden mukaisesti rajoitettu partikkelipilven painotettu keskiarvo [42]. Rajoitettu keskiarvo -estimaatti voidaan esittää muodossa

$$\hat{\mathbf{x}}_t = \arg \min_{\xi \in C} \sum_{i=1}^N w(\mathbf{x}_t^i) \|\mathbf{x}_t^i - \xi\|^2 \quad (5.13)$$

missä joukko C on kaikkien karttaobjektien muodostama tila-avaruus. Yhtälön (5.13) mukainen estimaatti on jatkuva ja voidaan osoittaa, että rajoitetun keskiarvon esti-

maatti vastaa karttaobjektien muodostaman tila-avaruuden pistettä, joka minimoi etäisyyden partikkelipilven rajoittamattomaan painotettuun keskiarvoon [36].

5.4 Graafipohjaisen partikkelisuodattimen algoritmi

Tässä työssä käytetyssä GBPF-suodattimessa yhdistetään aiemmin esitelty neljästä osasta koostuva graafipohjainen tilamalli, graafipohjaiselle rakenteelle sopiva mittaussmalli ja karttarakenteelle rajoitettu piste-estimaatti. Kyseisen suodattimen kompleksisuuden takia, työssä käytetty GBPF-suodattimen algoritmi on kokonaisuudessaan esitetty algoritmissa 2.

GBPF-suodattimen käyttämän karttarakenteen kompleksisuuden takia suodattimen lopullisissa algoritmissa on otettava huomioon partikkelien liikkuminen sekä linkeillä että avoimilla alueilla ja näiden eri karttaobjektityyppien välillä. Partikkelien liikkumista avoimilla alueilla on rajoitettu avoimen alueen reunoilla, jolloin partikkelien törmäminen alueen reunoihin on mahdollista. Mikäli partikkeli törmää avoimen alueen reunaan riittävän lähellä AN-solmua, se siirretään kyseiseen solmuun ja partikkelin paino pidetään entisellään. Törmäyspisteen ollessa kaukana AN-solmusta, partikkelin painoa pienennetään ja se siirretään AN-solmuun tai partikkelin paino asetetaan nolaksi ja sen sijainti pidetään törmäyspisteessä. Kyseiset toimenpiteet on esitetty tarkemmin algoritmissa 3.

Toisin kuin perinteinen karttarajoitteet huomioiva partikkelisuodatin [37], GBPF-suodatin ei ota huomioon karttarakenteessa mahdollisesti olevia virheitä. Joissain tapauksissa partikkelisuodatin voi jäädä jumiin mahdollisten karttarakenteessa olevien virheiden takia. Lisäksi partikkelisuodatin havaitsee huonosti todennäköisyyden kasvamisen alueilla, joissa ei ole partikkeleita ellei suodattimelle asetettu ehdokasjakauma ole riittävän hyvä. Kyseisissä tilanteissa GBPF-suodatin voi vaati uudelleenalustusta, joka tässä työssä on suoritettu lähteen [37] tavoin.

Algoritmi 2 GBPF-suodatin

Määritellään nopeuden raja-arvot v_{min} ja v_{max}

Määritellään efektiivisen näytteiden lukumäärän ESS_{limit}

1. Generoidaan partikkelit $\mathbf{x}_0^i \sim P(\mathbf{x}_0)$ karttarakenteelle ja asetetaan $w(\mathbf{x}_0^i) \leftarrow \frac{1}{N}$ jokaiselle $i \in \{1, \dots, N\}$. Asetetaan $t \leftarrow 1$.
2. Generoidaan siirtymätodennäköisyydet sekä liiketilat m_t edellisten liiketilojen m_{t-1} perusteella.
Partikkeleille $i \in \{i | m_{t-1}^i = \text{"seis"} \text{ ja } m_t^i = \text{"liikkeellä"}\}$ generoidaan $v_{t-1}^i \sim P(v_0)$ ja

$$\alpha_{t-1}^i \sim \begin{cases} \mathcal{U}(0, 2\pi), & \text{jos } \lambda_{I_{t-1}^i} \text{ on avoin alue} \\ \text{cat}(0.5, 0.5), & \text{jos } \lambda_{I_{t-1}^i} \text{ on linkki} \end{cases},$$

missä cat on kategorinen jakauma linkin suuntaisille suunnille. Jokaiselle $i \in \{i | m_t^i = \text{"liikkeellä"}\}$ generoidaan

$$\begin{bmatrix} s_t^i \\ v_t^i \\ \alpha_t^i \end{bmatrix} \sim \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} (\Delta t)_t v_{t-1}^i \\ v_{t-1}^i \\ \alpha_{t-1}^i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \sigma_v^2 (\Delta t)_t^3 & \frac{1}{2} \sigma_v^2 (\Delta t)_t^2 & 0 \\ \frac{1}{2} \sigma_v^2 (\Delta t)_t^2 & \sigma_v^2 (\Delta t)_t & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\alpha^2 \end{bmatrix} \right),$$

missä $\sigma_\alpha^2 = 0$, jos $\lambda_{I_{t-1}^i}$ on linkki. Asetetaan $v_t^i \leftarrow \min(\max(v_t^i, v_{min}), v_{max})$.
Jokaiselle $i \in \{i | m_t^i = \text{"seis"}\}$ asetetaan $s_t^i \leftarrow 0$ ja $v_t^i \leftarrow 0$.

 GBPF-suodatin

- 3 **for** $i \in \{1, \dots, N\}$ **do**
 - Asetetaan $\tilde{s} \leftarrow s_t^i$.
 - if** $\lambda_{I_{t-1}^i}$ on linkki **then**
 - Siirretään i . partikkeli suuntaan α_t^i etäisyyden $s' \leq s_t^i$ verran tai enintään linkin $\lambda_{I_{t-1}^i}$ loppuun.
 - else**
 - Siirretään i . partikkeli suuntaan α_t^i etäisyyden $s' \leq s_t^i$ verran tai enintään avoimen alueen $\lambda_{I_{t-1}^i}$ reunalle. Suoritetaan algoritmi OS_to_link.
 - end if**
 - Asetetaan $\tilde{s} \leftarrow \tilde{s} - s'$ ja $I_t^i \leftarrow I_{t-1}^i$.
 - while** $\tilde{s} > 0$ **do**
 - Generoidaan uusi karttaobjektin indeksi I_t^i kategorisesta jakaumasta $\text{cat}(P(\lambda_{t_1} | \lambda_{I_t^i}), \dots, P(\lambda_{t_n} | \lambda_{I_t^i}))$
 - if** $\lambda_{I_t^i}$ on linkki **then**
 - Päivitetään i . partikkelin suunta α_t^i ja siirretään partikkeli suuntaan α_t^i etäisyyden $s' \leq \tilde{s}$ verran tai enintään linkin $\lambda_{I_t^i}$ loppuun.
 - else**
 - Generoidaan suunta $\alpha_t^i \sim \mathcal{N}(\alpha_t^i, \sigma_\alpha^2)$ ja siirretään i . partikkeli etäisyyden $s' \leq \tilde{s}$ verran tai enintään avoimen alueen $\lambda_{I_t^i}$ reunalle.
 - Suoritetaan algoritmi OS_to_link.
 - end if**
 - Asetetaan $\tilde{s} \leftarrow \tilde{s} - s'$
 - end while**
 - Määritetään partikkelin \mathbf{x}_t^i sijainti $g(\mathbf{x}_t^i, \mathcal{J})$ karteesisessä koordinaatistossa.
- end for**

- 4 Jos ajanhetkellä t saadaan mittaus, määritetään Gauss–Newtonin menetelmällä odotusarvo μ_t ja kovarianssimatriisi Σ_t [39]. Asetetaan

$$\tilde{w}(\mathbf{x}_t^i) = \mathcal{N}(g(\mathbf{x}_t^i, \mathcal{J}) | \mu_t(\mathbf{y}_t), \Sigma_t(\mathbf{y}_t)) \cdot w(\mathbf{x}_{t-1}^i).$$

- 5 Normalisoidaan painot $w(\mathbf{x}_t^i) = \tilde{w}(\mathbf{x}_t^i) / \sum_{j=1}^N \tilde{w}(\mathbf{x}_t^j)$.
 - 6 Suoritetaan uudelleenalustuksen tarpeen tarkastelu [36].
 - 7 Lasketaan estimaatti $\hat{\mathbf{x}}_t$ käyttäen yhtälöä (5.13) ja kovarianssimatriisi $\hat{\Sigma}_t$ algoritmin 1 tavoin.
 - 8 Jos yhtälön (4.27) mukainen $\text{ESS} < \text{ESS}_{\text{limit}}$, suoritetaan uudelleenäyhteistys ja painot asetetaan yhtäsuuriksi. Asetetaan $t \leftarrow t + 1$ ja siirrytään vaiheeseen 2.
-

Algoritmi 3 OS_to_link

if Partikkeli on avoimen alueen reunalla **then**
 $\text{dist}_{AN} :=$ etäisyys lähimpään AN-solmuun
 if $0 \leq \text{dist}_{AN} \leq 0.5 \cdot \text{width}_{\text{door}}$ **then**
 Siirretään partikkeli kyseiseen AN-solmuun.
 else if $0.5 \cdot \text{width}_{\text{door}} < \text{dist}_{AN} \leq 5 \text{ m}$ **then**
 Siirretään partikkeli kyseiseen AN ja päivitetään paino:
 $w(\mathbf{x}_{t-1}^i) = 2^{-4(\text{dist}_{AN} - 0.5 \cdot \text{width}_{\text{door}})^2} \cdot w(\mathbf{x}_{t-1}^i)$.
 else
 Asetetaan $s' \leftarrow \tilde{s}$ ja $w(\mathbf{x}_{t-1}^i) \leftarrow 0$.
 end if
end if

Luku 6

Testit ja tulokset

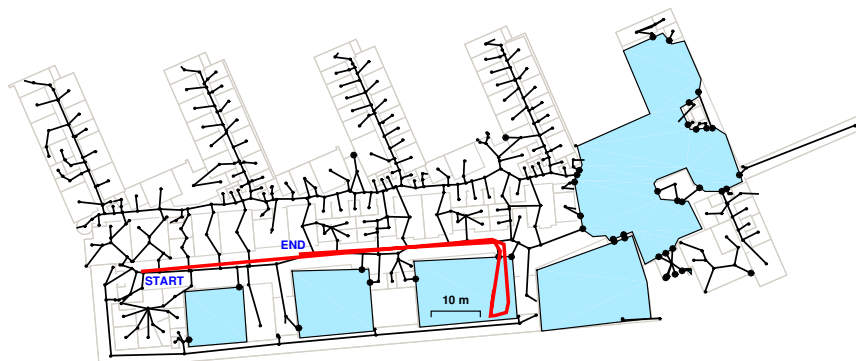
Tässä luvussa esitellään tuloksia graafipohjaisen partikkelisuodattimen toiminnasta ja tarkkuudesta käyttäjän paikantamisessa käyttäen sekä WLAN- että BLE-mittauksia. Työssä esiteltyä suodatinta verrataan muihin suodatusmenetelmiin sisätiloissa ja osittain ulkoalueilla kulkevien testireittien avulla. Luvun loppupuolella testien pohjalta saatuja tuloksia verrataan muihin suodatusmenetelmiin ja syntyneitä eroja selitetään sanallisesti.

6.1 Testireitit ja vertailumenetelmät

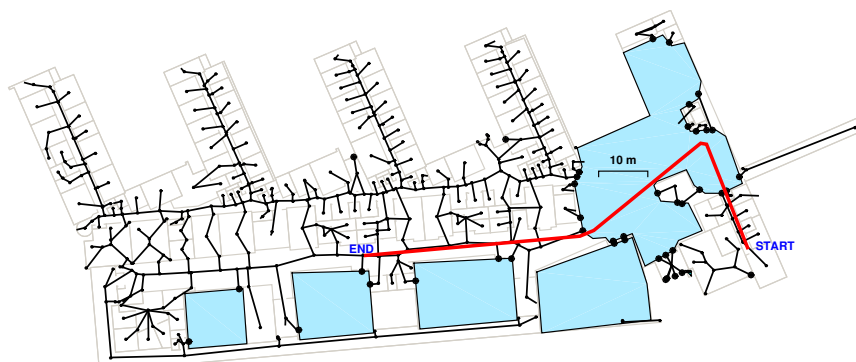
Työssä esitetyn graafipohjaisen partikkelisuodattimen toimintaa testattiin Tampereen teknillisen yliopiston kampuksen Tietotalossa. Rakennuksesta aiemmin kerätty opetusdata sekä testireittien mittaukset kerättiin kaikki samalla Nokian tarjoamalla Samsung S5 -puhelimella, johon oli asennettu mittauksien keräämiseen tarkoitettu ohjelmisto. Graafipohjaisen partikkelisuodattimen toimivuuden tarkastelua varten kerät-

tiin yhteensä neljä testireittiä, joista kolme testireittiä sisälsivät WLAN-mittauksia rakennuksen WLAN-infrastruktuurista ja yksi testireitti sisälsi rakennukseen asennetuista BLE-lähettimeistä kerättyjä mittauksia. Jokainen testireitti sisältää yhden tai useamman siirtymän avoimen alueen ja graafin välillä.

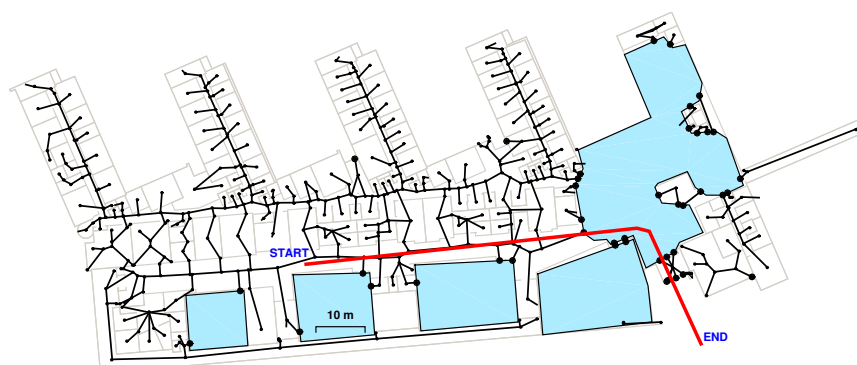
Ensimmäinen testireitti (kuva 6.1) kulkee aluksi rakennuksen pääkäytävää pitkin, minkä jälkeen reitti kääntyy pääkäytävän varrella sijaitsevaan luentosaliin eli avoimeen alueeseen. Testireitti sisältää lyhyen pysähdyksen avoimella alueella, jonka jälkeen reitti palaa takaisin rakennuksen pääkäytävälle ja kulkee jonkin matkaa kohti reitin alkupistettä. Toinen testireitti (kuva 6.2) alkaa pieneltä sivukäytävältä ja kulkee suuren ja epäsäännöllisen muotoisen avoimen alueen läpi, jossa reitti tekee jyrkän käännöksen, päätyen lopulta rakennuksen pääkäytävälle. Kolmas testireitti (kuva 6.3) sisältää siirtymän sisätiloista ulkotiloihin, joka tulkitaan myös avoimen alueen karttaobjektiksi. Neljäs testireitti (kuva 6.4) kulkee suhteellisen suoraan koko reitin ajan, mutta reitti sisältää usean siirtymän avoimen alueen ja graafin välillä. Kyseinen testireitti on myös ainoa testireitti, jossa käytetään WLAN-mittausten sijaan BLE-mittauksia.



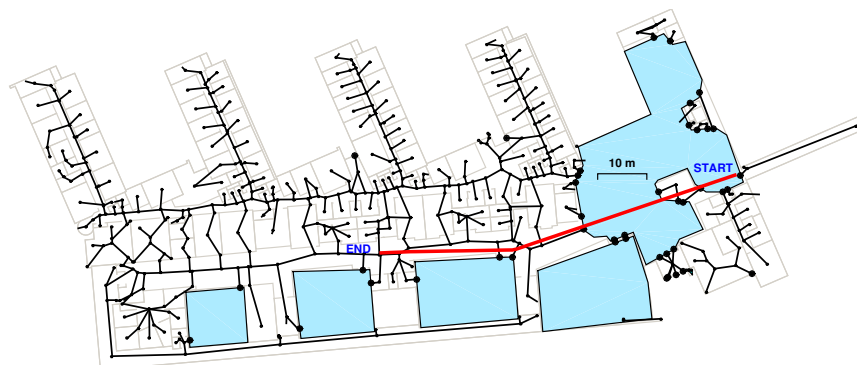
Kuva 6.1: WLAN-mittauksiin perustuva ensimmäinen testireitti



Kuva 6.2: WLAN-mittauksiin perustuva toinen testireitti



Kuva 6.3: WLAN-mittauksiin perustuva kolmas testireitti



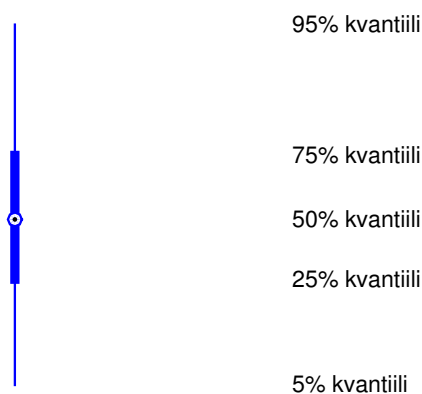
Kuva 6.4: BLE-mittauksiin perustuva neljäs testireitti

Todellisen suorituskyvyn hahmottamiseksi työssä esiteltyä suodatinta vertaillaan kahteen tilamalliltaan erilaiseen Kalmanin suodattimeen (*Kalman Filter*, KF). Vakio-paikkamalliin perustuva KF (*Constant Position Kalman Filter*, CPKF) olettaa käyttäjän sijainnin noudattavan satunnaiskulkua ja vakionopeusmalliin perustuva KF (*Constant Velocity Kalman Filter*, CVKF) olettaa vastaavasti käyttäjän nopeuden noudattavan satunnaiskulkua. Karttaobjektien välisten tilansiirtotodennäköisyyksien vaikutusta graafipohjaisen partikkelisuodattimen paikannustarkkuuteen vertaillaan kahden eri tilansiirtomallin avulla. Ensimmäinen tilamalli olettaa seuraavat mahdolliset karttaobjektit yhtä todennäköisiksi eli todennäköisyydet viereisten karttaobjektien välillä ovat tasajakautuneita. Toisessa mallissa siirtymätodennäköisyydet karttaobjektien välillä noudattavat aikaisemmin esiteltyä TLL-mallia.

6.2 Tulokset

Tässä työssä esiteltyä graafipohjaista partikkelisuodatinta on testattu kahdella eri tilansiirtomallilla aikaisemmin esitetyillä testireiteillä ja saatuja tuloksia on verrattu CVKF- ja CPKF-suodattimien antamiin tuloksiin. Jokaista menetelmää testattiin kullakin testireitillä ajamalla suodatin yhteensä 100 kertaa tulosten varmistamiseksi. Menetelmien vertailu suoritetaan kahdella eri mittaustaajuudella siten, että ensimmäisessä vertailuvaiheessa mittauksia saadaan viiden sekunnin välein ja toisessa kymmenen sekunnin välein. Suodattimien priori-informaatio sisälsi vain tiedon aloitus sijainnista ja nopeuden alkutila määritettiin satunnaisesti. Tulosten vertailussa käytetään paikannusvirheiden yleisimpiä tunnuslukuja eli RMS- ja keskivirhettä, virheiden mediaania sekä 95% virhekvantiilia.

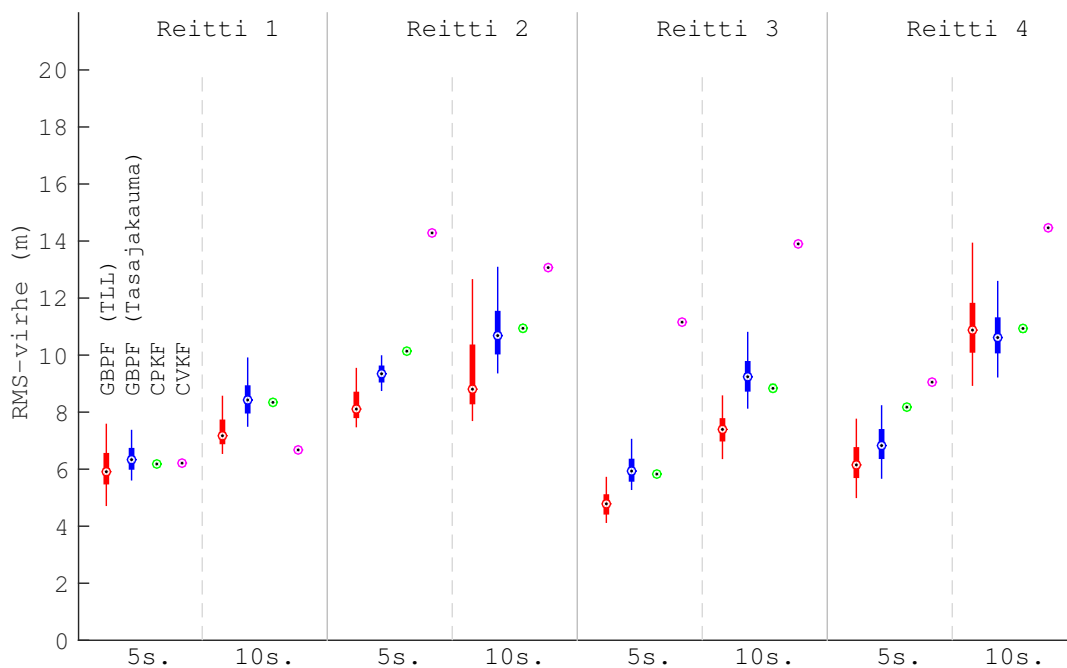
Eri paikannusmenetelmien tulokset kullekin testireitille sekä molemmille mittaustaajuuksille on esitetty kuvissa 6.6 - 6.9. Kuvissa käytettyjen kuvaajien kapeat viivat, leveämmät laatikot sekä niiden sisällä olevat symbolit kuvaavat 5%, 25%, 50%, 75% sekä 95% kvantiileja. Kvantiilien merkintöjä on havainnollistettu tarkemmin kuvassa 6.5.



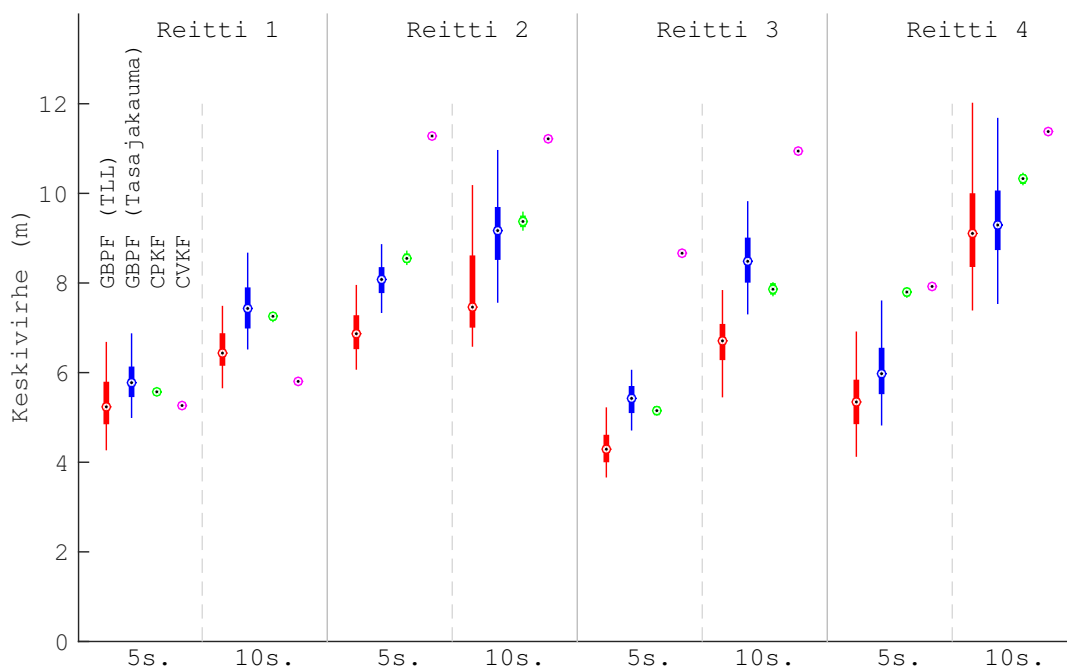
Kuva 6.5: Tulosten käsittelyssä käytettyjen kuvaajien kvantiilit

Eri suodatusmenetelmien paikannustarkkuuksia ensimmäisellä testireitillä ja kymmenen sekunnin mittausvälillä on lisäksi havainnollistettu kuvien 6.10 ja 6.11 avulla, missä eri suodattimien paikkaestimaatit on esitetty todellisten testireittien kanssa samoissa kuvissa. GBPF-suodattimet on esitetty kuvassa 6.10 ja molemmat Kalmanin suodattimet on esitetty kuvassa 6.11 tulosten selkeyden parantamiseksi.

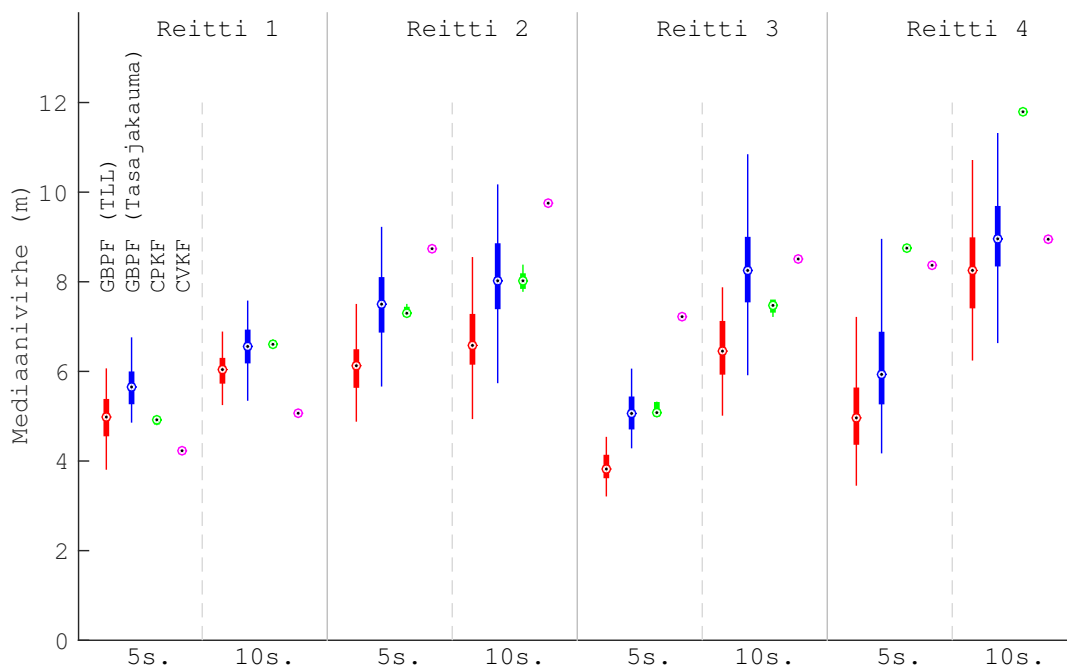
Myöhemmin esitetyissä kuvissa 6.12 ja 6.13 on vastaavasti havainnollistettu eri suodattimien paikannustarkkuuksia kolmannella testireitillä. Kyseisissä kuvissa on esitetty



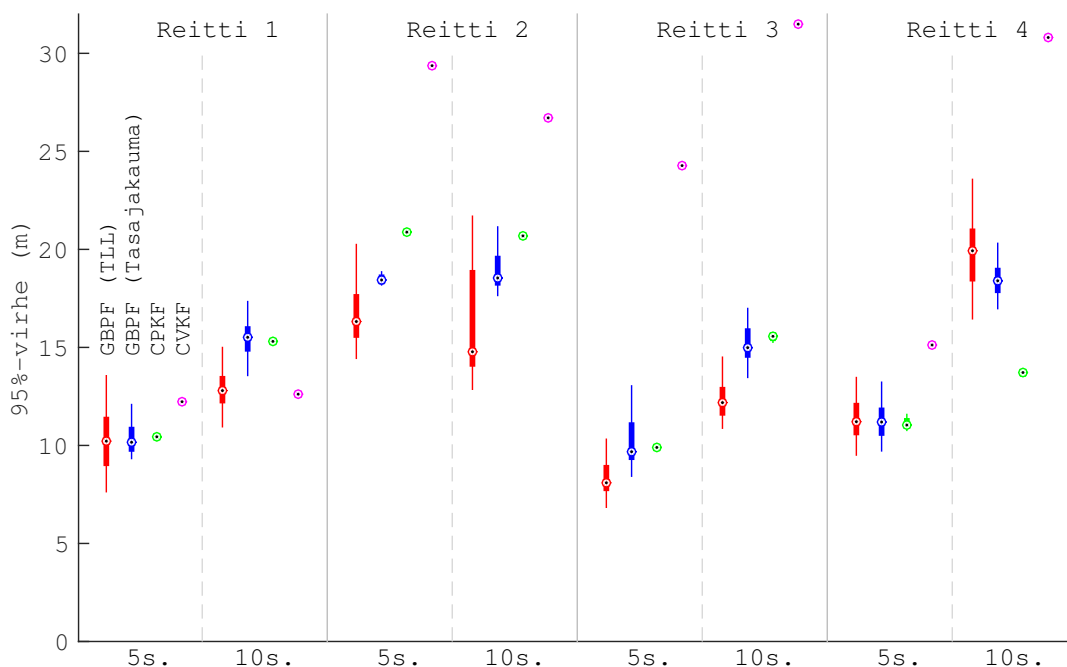
Kuva 6.6: RMS-errot vertailtavista menetelmistä



Kuva 6.7: Keskiarvot vertailtavista menetelmistä



Kuva 6.8: Virheiden mediaanit vertailtavista menetelmistä

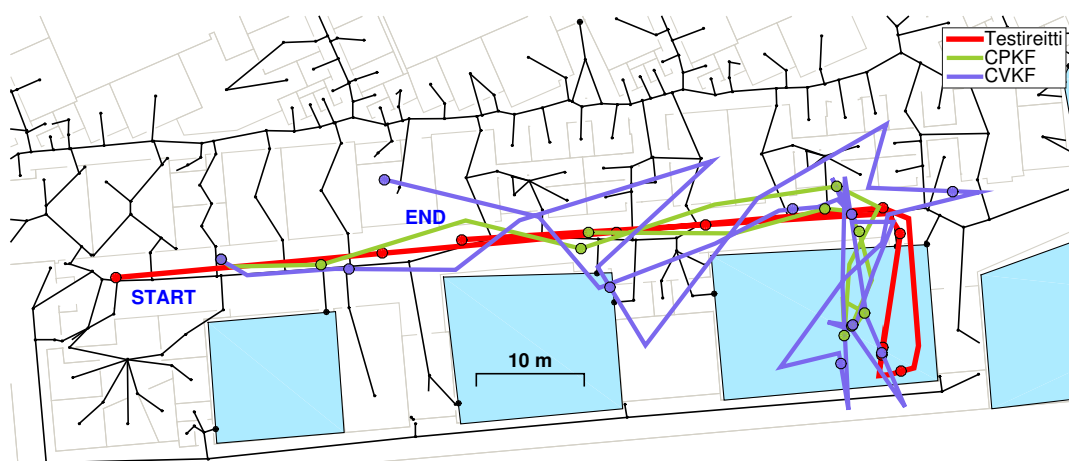


Kuva 6.9: 95%-virhekvaantilit vertailtavista menetelmistä

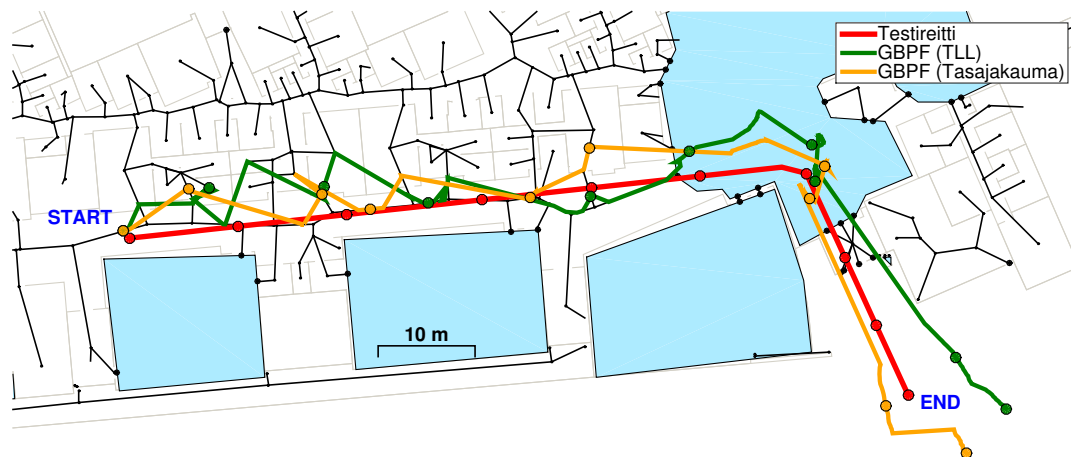
paikkaestimaatit, kun mittausten väli jokaisella suodattimella on ollut viisi sekuntia. Edelleen GBPF-suodattimet on esitetty erillisessä kuvassa 6.12 ja molemmat Kalmanin suodattimet on esitetty kuvassa 6.13 tulosten selkeyden parantamiseksi.



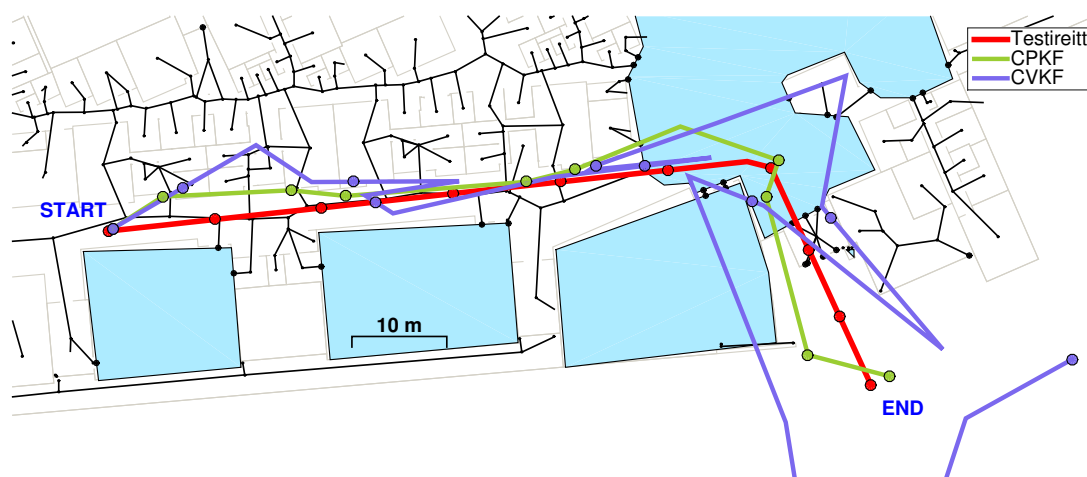
Kuva 6.10: GBPF-suodattimien paikkaestimaatit ensimmäisellä testireitillä, kun mittausten väli on kymmenen sekuntia. Testireitin ja suodattimien paikannustuloksia on havainnollistettu ympyröillä tasaisin väliajoin.



Kuva 6.11: Kalmanin suodattimien paikkaestimaatit ensimmäisellä testireitillä, kun mittausten väli on kymmenen sekuntia. Testireitin ja suodattimien paikannustuloksia on havainnollistettu ympyröillä tasaisin väliajoin.



Kuva 6.12: GBPF-suodattimien paikkaestimaatit kolmannella testireitillä, kun mittausten väli on viisi sekuntia. Testireitin ja suodattimien paikannustuloksia on havainnollistettu ympyröillä tasaisin väliajoin.



Kuva 6.13: Kalmanin suodattimien paikkaestimaatit kolmannella testireitillä, kun mittausten väli on viisi sekuntia. Testireitin ja suodattimien paikannustuloksia on havainnollistettu ympyröillä tasaisin väliajoin.

6.3 Tulosten analysointi

Tarkastelemalla ensimmäistä testireittiä kuvista 6.6 - 6.9 huomataan, että työssä esitelty GBPF-suodatin, joka käyttää tilamallissaan TLL-menetelmään perustuvia siirtymätodennäköisyyksiä karttaobjektien välillä antaa tarkempia paikannustuloksia molemmilla tutkituilla mittaustiheyksillä verrattuna tasajakaumaan perustuvaan GBPF-suodattimeen. TLL-menetelmään perustuva GBPF-suodatin ohjaa käytävään sijoittuvalla osuudella partikkeleita enemmän eteenpäin verrattuna GBPF-suodattimeen, joka käyttää tasajakautuneita siirtymätodennäköisyyksiä. Erityisen selkeä ero voidaan havainta mittaussvälin pidentyessä, jolloin päivitetään harvemmin ja tilamallin rooli korostuu.

Vertailemalla TLL-menetelmään perustuvaa GBPF-suodatinta Kalmanin suodattimiin, jotka eivät käytä karttatietoa hyväkseen huomataan, että GBPF-suodatin ei juurikaan paranna paikannustarkkuutta, kun tarkastellaan paikannustarkkuutta keski- ja mediaanivirheen näkökulmasta. Tämä johtuu siitä, että TLL-menetelmä ei anna kovinkaan suurta painoa pääkäytävän varrella olevalle luentosalille, jolloin GBPF-suodatin ajautuu hieman ohi luentosaliin johtavasta ovesta. Erityisesti vakionopeusmalliin perustuva CVKF-suodatin näyttää antavan keski- ja mediaanivirhettä kuvaavien tunnuslukujen mukaan työssä esiteltyä suodatinta tarkemmat tulokset mittaustiheyden ollessa 10 s. Tämä johtuu osittain siitä, että CVKF-suodatin toipuu GBPF-suodatinta nopeammin pääkäytävän varrella sijaitsevaan huoneeseen siirryttäessä, kuten kuvista 6.10 ja 6.11 nähdään. CVKF- ja GBPF-suodattimet antavat kuitenkin lähes samanlaisia tarkkuuksia RMS-virheen ja 95% virhekvantiilin tapauksessa, mikä kertoo siitä, että CVKF-suodattimen antamat tulokset sisältävät hetkittäin suuriakin virheitä. Ensimmäisen testireitin sisältämä tasaisella nopeudella kuljettu pitkä suora osuus rakennuksen käytävällä aiheuttaa sen, että vakionopeusmalliin perustuvat suodattimet toimivat vakiopaikkamallin suodattimia paremmin.

Toisen testireitin tapauksessa työssä esitetty GBPF-suodatin antaa huomattavasti muita menetelmiä parempia tuloksia molemmilla mittaustiheyksillä. Kuten kuvasta 6.7 voidaan huomata, karttaobjektien välisillä siirtymätodennäköisyyksillä on suuri merkitys paikannustarkkuuteen, sillä TLL-menetelmään perustuva GBPF-suodatin antaa keskivirheen tapauksessa yli metrin tarkempia tuloksia toisella testireitillä verrattuna tasajakautuneisiin siirtymätodennäköisyyksiin. Kuvista 6.6, 6.7 ja 6.9 huomataan hyvin, kuinka TLL-menetelmää käyttävän GBPF-suodattimen paikannus-

tarkkuus ei juurikaan heikkene mittaustiheyden pienentyessä toisin kuin muilla suodatusmenetelmillä.

Kyseisen testireitin aikana vastaanotettiin muutamia epätarkkoja mittauksia, jotka selittävät osan erityisesti vakionopeusmalliin perustuvan CVKF-suodattimen suurista virheistä. Lisäksi testireitillä saadaan mittaus juuri ennen avoimella alueella sijaitsevaa jyrkkää käännoästä (kuva 6.2), jolloin CVKF-suodatin ajautuu melko etäälle todellisesta käyttäjän sijainnista. Koska GBPF-suodattimen jokainen riippumaton partikkeli noudattaa avoimilla alueilla satunnaiskulkua nopeuden suhteen, ei kyseisen suodattimen estimaatti harhaudu yhtä kauas referenssisijainnista.

Kolmannen testireitin tulokset ovat samankaltaisia edellisen testireitin tulosten kanssa. Kuten tuloksia käsittelevistä kuvista 6.6 - 6.9 huomataan, TLL-menetelmään perustuva GBPF-suodatin on selvästi muita vertailumenetelmiä parempi. Erityisen suuri ero voidaan nähdä TLL-menetelmään ja tasajakautumaan perustuvan GBPF-suodattimen välillä, kun menetelmiä verrataan eri mittaustiheyksillä. Tasajakaumaan perustuva menetelmä on selvästi heikompi kuin TLL-menetelmään perustuva suodatin ja jopa hieman heikompi kuin vakiopaikkamalliin perustuva CPKF-suodatin. Tämä johtuu siitä, että partikkelit siirtyvät jokaisen graafin risteyskohdassa tasaisesti jokaiselle linkille, jolloin pääkäytävä ei saa riittävän suurta määrää partikkeleita. Tilamallilla ja karttaobjektien välisillä siirtymätodennäköisyyksillä on siis selvä merkitys suodattimen toiminnalle.

Tarkastelemalla kuvia 6.12 ja 6.13 huomataan, että vakiopaikkamalliin perustuva CPKF-suodatin toimii hieman vakionopeusmalliin perustuvaa CVKF-suodatinta paremmin erityisesti avoimen alueen jyrkän käännoksen kohdalla. Vaikka GBPF-suodattimetkin käyttävät avoimilla alueilla vakionopeusmallia, suunnan ja nopeuden varianssin ansiosta partikkelit leviävät riittävästi, jolloin suodatin reagoi nopeasti uuteen mittaukseen, johdattamatta samalla estimaattia liian kauas referenssisijainnista. Siitä huolimatta, että WLAN-mittausten laatu rakennuksen ulkopuolella saattaa olla huono, suodattimien ja erityisesti TLL-menetelmään perustuvan GBPF-suodattimen paikannustarkkuus on vertailukelpoinen muiden testireittien kanssa.

Neljännellä testireitillä, joka on ainoa BLE-mittauksia sisältävä testireitti, GBPF-suodattimet antavat kuvien 6.6 - 6.9 mukaan vertailumenetelminä olleita Kalmanin suodattimia tarkempia tuloksia jokaisen paikannustarkkuutta kuvaavan tunnusluvun kohdalla, kun mittausväli on viisi sekuntia. Samalla mittaustiheydellä vakionopeusmallia käyttävä CVKF-suodatin toimii vakiopaikkamallia käyttävää CPKF-suodatinta

huonommin, koska viiden sekunnin aikana vakionopeusmallin mukainen estimaatti ehtii ajautua liian kauas todellisesta referenssisijainnista erityisesti epätarkkojen mittausten tapauksessa. Kymmenen sekunnin mittausvälin tuloksista huomataan, että GBPF-suodattimet antavat lähes yhtä tarkkoja tuloksia. Tämä voidaan selittää testireitin melko lyhyellä graafille sijoittuvalla osuudella, jolloin TLL-menetelmään perustuva suodattimen hyvät puolet eivät tule kovinkaan hyvin esille.

Vakionopeusmalliin perustuva CVKF-suodatin harhautuu helposti etäälle referenssisijainnista heikomman mittauksen kohdalla myös neljännellä testireitillä. Koska BLE-mittaukset ovat laadultaan hieman WLAN-mittauksia heikompia, CVKF-suodatin harhautuu todellisesta sijainnista tavallista useammin. Testireitin loppupuolella molemmat GBPF-suodattimien estimaatit ajautuvat testireitin vieressä sijaitsevaan luentosaliin. TLL-menetelmään perustuva GBPF-suodatin kuitenkin antaa kyseisellä tarkasteluhetkellä tarkempia paikannustuloksia, sillä TLL-menetelmä ei ole ohjaa huoneeseen niin paljon partikkeleita kuin tasajakaumaan perustuva GBPF-suodatin.

Viimeisen testireitin alkua tutkimalla voidaan havaita, että suodattimen alustamiseen käytettävä priori-informaatio on tärkeässä roolissa. Erityisesti GBPF-suodattimet, jotka alustetaan avoimella alueella ovat herkkiä partikkelien saamille alkunopeuksille. Neljännen testireitin eli ainoan BLE-testireitin alussa, GBPF-suodattimien estimaatit eivät juurikaan liiku suodatuksen alussa, sillä partikkelien nopeuden prioritiedon puuttuessa partikkelien nopeudet ovat satunnaisia. Kyseisen prioritiedon käyttäminen suodatuksessa parantaisi merkittävästi GBPF-suodattimien tarkkuutta vastaavanlaisissa tilanteissa.

Luku 7

Yhteenvedo

Tässä työssä esiteltiin sisätilapaikannukseen tarkoitettu graafipohjainen partikkelisuodatin, joka käyttää WLAN- sekä BLE-mittausten lisäksi muistin ja suorituskyvyn kannalta taloudellista rakennuksen pohjapiirustuksesta luotua graafipohjaista karttatietoa. Graafipohjaisen partikkelisuodattimen esittelyn yhteydessä työssä luotiin erityinen graafipohjainen tilamalli, joka huomioi käyttäjän päämäärätietoisien liikkumisen sekä mahdolliset pysähdykset ja terävät käännökset painottaen samalla enemmän rakennuksen pääkäytäviä ja vähemmän pituudeltaan lyhyempiä huoneita ja käytävän osia. Työssä on lisäksi esitetty MATLAB-ohjelmistolla toteutettu graafipohjaisen partikkelisuodattimen algoritmi, joka käyttää suodatuksessa työssä esiteltyä tilamallia.

Graafipohjaisen partikkelisuodattimen käyttämän karttarakenteen tarkoituksena on rajoittaa käyttäjän sijaintia sekä liikkumista mahdollisimman tehokkaasti, mutta luonnollisesti. Kyseinen graafipohjainen karttarakenne koostuu linkkien ja avoimen alueen karttaobjektien yhdistelmästä. Käytävät ja pienet huoneet on mallinnettu solmupisteiden välisten linkkien avulla, joissa käyttäjän liike on rajoitettu yhteen vapausasteeseen.

seen, kun taas suuret avoimet tilat on mallinnettu avoimina alueina, joissa käyttäjän liike on rajoitettu alueen reunoilla kahteen vapausasteeseen. Graafipohjainen karttarakenne luotiin TTY:n Tietotaloon, jota käytettiin testirakennuksena myös todellisiin WLAN- ja BLE-mittauksiin perustuvissa testitilanteissa.

Testireittien avulla toteutetun graafipohjaisen partikkelisuodattimen paikannustarkkuutta verrattiin sekä vakionopeus- että vakiopaikkamalliin perustuvaan Kalmanin suodattimeen ja eri tilamallilla toimivaan graafipohjaiseen partikkelisuodattimeen kahdella eri WLAN- ja BLE-mittaustiheydellä. Tulosten pohjalta työssä esitetty TLL-menetelmään perustuva graafipohjainen partikkelisuodatin antoi vertailumenetelmiä parempia tuloksia lähes jokaisella testireitillä ja molemmilla mittaustiheyksillä. Vaikka molemmat GBPF-suodattimet käyttivät karttainformaatiota WLAN- ja BLE-mittausten lisäksi, ei siirtymätodennäköisyyksissä tasajakaumaa käyttävä GBPF-suodatin antanut juurikaan parempia tuloksia kuin Kalmanin suodattimet, jotka eivät käytä karttainformaatiota mittausten lisäksi.

Tässä työssä esitellyn graafipohjaisen partikkelisuodattimen toimintaa ei testattu tilanteissa, jotka sisälsivät siirtymiä kerrosten välillä. Siirtyminen kerrosten välillä on kuitenkin toteutettavissa työssä esitetyn algoritmin avulla, mutta työssä esitetyn karttarakenteen luonteen kannalta kerrosten välinen siirtymä ja kerroksen tunnistus olisi luonnollisempaa toteuttaa diskreetin kerrostunnistuksen sijaan jatkuvalla kerros- tai korkeusestimaatilla. Toinen mahdollinen jatkotutkimusaihe voisi olla ulkotiloista sisätiloihin siirtymisen tarkempi tutkiminen ja voidaanko siirtymän sujuvuuteen vaikuttaa karttarakenteen ja erityisesti graafin laajentamisella osittain rakennuksen ulkopuolelle.

Kirjallisuutta

- [1] Simo Ali-Löytty: *Kalmanin suodatin ja sen laajennukset paikannuksessa*. Diplomityö, Tampereen teknillinen yliopisto, 2004.
- [2] Simo Ali-Löytty, Niilo Sirola ja Robert Piché: *Consistency of Three Kalman Filter Extensions in Hybrid Navigation*. Teoksessa *Proceedings of The European Navigation Conference GNSS 2005*, Munich, Saksa, heinäkuu 2005.
- [3] Firas Alsehly, Tughrul Arslan ja Zankar Sevak: *Indoor positioning with floor determination in multi story buildings*. Teoksessa *2011 International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation (IPIN2011)*, sivut 1–7, 2011.
- [4] M. Sanjeev Arulampalam, Simon Maskell, Neil Gordon ja Tim Clapp: *A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking*. IEEE Transactions on Signal Processing, 50(2):174–188, 2002.
- [5] Christian Ascher, C. Kessler, R. Weis ja G.F. Trommer: *Multi-floor map matching in indoor environments for mobile platforms*. Teoksessa *2012 International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation (IPIN2012)*, sivut 1–8, 2012.
- [6] Alan Bain ja Dan Crisan: *Fundamentals of Stochastic Filtering*. Springer, 2009.
- [7] Patrick Billingsley: *Probability and Measure*. John Wiley & Sons, 1995.
- [8] Nicolas Chopin: *Central Limit Theorem for Sequential Monte Carlo Methods and Its Application to Bayesian Inference*. The Annals of Statistics, 32(6):2385–2411, 2004, ISSN 00905364.
- [9] Dan Crisan ja Arnaud Doucet: *A survey of convergence results on particle filtering methods for practitioners*. IEEE Transactions on Signal Processing, 50(3):736–746, maaliskuu 2002.

- [10] Pavel Davidson, Jussi Collin ja Jarmo Takala: *Application of particle filters for indoor positioning using floor plans*. Teoksessa *Ubiquitous Positioning Indoor Navigation and Location Based Service (UPINLBS), 2010*, sivut 1–4, lokakuu 2010.
- [11] Randal Douc, Olivier Cappe ja Eric Moulines: *Comparison of Resampling Schemes for Particle Filtering*. Teoksessa *Proceedings of the 4th International Symposium on Image and Signal Processing Analysis*, 2005.
- [12] Arnaud Doucet, Nando de Freitas ja Neil Gordon (toimittajat): *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*. Statistics for Engineering and Information Science. Springer, 2001.
- [13] Arnaud Doucet ja Adam M. Johansen: *A Tutorial on Particle Filtering and Smoothing: 15 years later*. Teoksessa Crisan, Dan ja Boris Rozovskiĭ (toimittajat): *The Oxford Handbook of Nonlinear Filtering*, luku 24, sivut 656–704. Oxford University Press, 2011.
- [14] Hans Driessen ja Yvo Boers: *MAP estimation in particle filter tracking*. Teoksessa *IET Seminar on Target Tracking and Data Fusion: Algorithms and Applications*, 2008.
- [15] R. M. Dudley: *Real Analysis and Probability*. Cambridge University Press, 2004.
- [16] Frédéric Evennou, Marx François ja Emil Novakov: *Map-aided indoor mobile positioning system using particle filter*. Teoksessa *2005 IEEE Wireless Communications and Networking Conference (WCNC 2005)*, nide 4, sivut 2490–2494, maaliskuu 2005.
- [17] R. Faragher ja R. Harle: *Location Fingerprinting with Bluetooth Low Energy Beacons*. Teoksessa *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 2015.
- [18] Brian Ferris, Dirk Hähnel ja Dieter Fox: *Gaussian Processes for Signal Strength-Based Location Estimation*. Teoksessa *2006 Robotics: Sciences and Systems Conference (RSS 2006)*, elokuu 2006.
- [19] Fredrik Gustafsson: *Particle filter theory and practice with positioning applications*. IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine, 25(7):53–82, heinäkuu 2010.
- [20] Kari Heine: *On the Stability of the Discrete Time Filter and the Uniform Convergence of Its Approximations*. Väitöskirja, Tampereen teknillinen yliopisto, 2007.

- [21] Kari Heine ja Dan Crisan: *Uniform Approximations of Discrete-time Filters*. Teoksessa *Advances in Applied Probability*, sivut 979–1001, 2008.
- [22] Xiao Li Hu: *A General Convergence Result for Particle Filtering*. Teoksessa *IEEE Transactions on Signal Processing*, sivut 3424 – 3429, 2011.
- [23] John K. Hunter ja Bruno Nachtergaele: *Applied Analysis*. Luentomoniste, 2000.
- [24] Andrew H. Jazwinski: *Stochastic Processes and Filtering Theory*, nide 64 sarjassa *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, 1970.
- [25] Susanna Kaiser, Mohammed Khider ja Patrick Robertson: *A human motion model based on maps for navigation systems*. *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking*, 2011(1):1–14, 2011.
- [26] Elliot D. Kaplan (toimittaja): *Understanding GPS: Principles and Applications*. Artech House, Norwood, 1996.
- [27] M. Waqas A. Khan, Elena Simona Lohan ja Robert Piché: *Statistical Sensor Fusion of Ultra Wide Band Ranging and Real Time Kinematic Satellite Navigation*. International Conference on Localization and GNSS (ICL-GNSS), 2015, 2015.
- [28] Muhammad Irshan Khan ja Jari Syrjärinne: *Investigating Effective Methods for Integration of Building’s Map with Low cost Inertial Sensors and Wifi-based Positioning*. Teoksessa *2013 International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation (IPIN2013)*, sivut 884–891, lokakuu 2013.
- [29] Louisa Lam, Seong Whan Lee ja Ching Y. Suen: *Thinning Methodologies—A Comprehensive Survey*. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(9):869–885, syyskuu 1992, ISSN 0162-8828.
- [30] Lin Liao, Dieter Fox, Jeffrey Hightower, Henry Kautz ja Dirk Schulz: *Voronoi tracking: location estimation using sparse and noisy sensor data*. Teoksessa *2003 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. (IROS 2003)*, sivut 723–728, lokakuu 2003.
- [31] Hui Liu, H. Darabi, P. Banerjee ja Jing Liu: *Survey of Wireless Indoor Positioning Techniques and Systems*. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C: Applications and Reviews*, 37(6):1067–1080, marraskuu 2007.

- [32] Hung Huan Liu ja Yu Non Yang: *WiFi-Based Indoor Positioning for Multi-Floor Environment*. Teoksessa *TENCON 2011*, sivut 597–601, 2011.
- [33] Cristina S. Maiz, Elisa M. Molanes-Lopez, Joaquin Miguez ja Petar M. Djuric: *A Particle Filtering Scheme for Processing Time Series Corrupted by Outliers*. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 60(9):4611–4627, 2012.
- [34] Joaquin Miguez, Dan Crisan ja Petar M. Djuric: *On the convergence of two sequential Monte Carlo methods for maximum a posteriori sequence estimation and stochastic global optimization*. Teoksessa *Statistics and Computing*, 2013.
- [35] Henri Nurminen: *Position estimation using RSS measurements with unknown measurement model parameters*. Diplomityö, Tampereen teknillinen yliopisto, joulukuu 2012.
- [36] Henri Nurminen, Mike Koivisto, Simo Ali-Löytty ja Robert Piché: *Motion Model for Positioning with Graph-Based Indoor Map*. Teoksessa *2014 International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation (IPIN2014)*, lokakuu 2014.
- [37] Henri Nurminen, Anssi Ristimäki, Simo Ali-Löytty ja Robert Piché: *Particle filter and smoother for indoor localization*. Teoksessa *2013 International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation (IPIN2013)*, sivut 137–146, lokakuu 2013.
- [38] Henri Nurminen, Jukka Talvitie, Simo Ali-Löytty, Philipp Müller, Elena Simona Lohan, Robert Piché ja Markku Renfors: *Statistical path loss parameter estimation and positioning using RSS measurements*. Teoksessa *Ubiquitous Positioning, Indoor Navigation and Location Based Service (UPINLBS2012)*, sivut 1–8, lokakuu 2012.
- [39] Henri Nurminen, Jukka Talvitie, Simo Ali-Löytty, Philipp Müller, Elena Simona Lohan, Robert Piché ja Markku Renfors: *Statistical path loss parameter estimation and positioning using RSS measurements in indoor wireless networks*. Teoksessa *2012 International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation (IPIN2012)*, sivut 461–469, marraskuu 2012.
- [40] J.R. de Oliveira ja R.A.F Romero: *Image skeletonization method applied to generation of topological maps*. Teoksessa *6th Latin American Robotics Symposium (LARS)*, 2009.

- [41] Tommi Perälä ja Simo Ali-Löytty: *Kalman-type Positioning Filters with Floor Plan Information*. Teoksessa *Proceedings of the 6th International Conference on Advances in Mobile Computing and Multimedia*, MoMM '08, sivut 350–355, New York, NY, USA, 2008. ACM, ISBN 978-1-60558-269-6.
- [42] Robert Piché ja Mike Koivisto: *A Method to Enforce Map Constraints in a Particle Filter's Position Estimate*. Teoksessa *11th IEEE Workshop on Positioning, Navigation and Communication (WPNC'14)*, maaliskuu 2014.
- [43] William K. Pratt: *Digital Image Processing: PIKS Inside*. John Wiley & Sons, 2001.
- [44] Branko Ristic, Sanjeev Arulampalam ja Neil Gordon: *Beyond the Kalman Filter, Particle Filters for Tracking Applications*. Artech House, Boston, London, 2004.
- [45] Keijo Ruohonen: *Stokastiset prosessit*. Luentomoniste, 1989.
- [46] Simo Särkkä: *Bayesian Filtering and Smoothing*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2013.
- [47] Martin Schafer, Christian Knapp ja Samarjit Chakraborty: *Automatic generation of topological indoor maps for real-time map-based localization and tracking*. Teoksessa *2011 International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation (IPIN2011)*, sivut 1–8, syyskuu 2011.
- [48] Steven S. Skiena: *The Algorithm Design Manual*. Springer-Verlag, New York, NY, USA, 1998.
- [49] Tommi Sottinen: *Todennäköisyysteoria*. Luentomoniste, 2006.