Pertti Koivisto

Analyysi B

TAMPEREEN YLIOPISTO

INFORMAATIOTIETEIDEN YKSIKÖN RAPORTTEJA 67/2018

TAMPERE 2018

TAMPEREEN YLIOPISTO
INFORMAATIOTIETEIDEN YKSIKÖN RAPORTTEJA 67/2018
JOULUKUU 2018

Pertti Koivisto

Analyysi B

ISBN 978-952-03-0930-5 (pdf)

ISSN-L 1799-8158
ISSN 1799-8158

Analyysi B

Derivaatta ja integraali

Pertti Koivisto

Joulukuu 2018

Alkusanat

Tämä moniste on tarkoitettu oheislukemistoksi Tampereen yliopistossa pidettävälle kurssille Analyysi B. Monisteen tavoitteena on tukea luentojen seuraamista, harjoitustehtävien ratkaisemista ja tentteihin valmistautumista. Moniste sisältää melko kattavasti kurssilla käsiteltävät asiat, mutta paikoitellen lisäselitykset ja mahdollinen lisämateriaali helpottanevat tekstin seuraamista ja esitettyjen asioiden ymmärtämistä. Moniste ei varsinaisesti ole tarkoitettu kattavaksi itseopiskelupaketiksi.

Monisteen rakenne ja sisältö pohjautuvat Riemann-integraalin määrittelyä lukuun ottamatta suurelta osin jo edesmenneen Seppo Vepsäläisen aikoinaan Tampereen yliopistossa pitämiin luentoihin. Sisältöä on jonkin verran muokattu kevyempään suuntaan ja myös rakenteessa on tehty muutoksia.

Kurssin menestyksellinen seuraaminen edellyttää Tampereen yliopiston opintojaksolla Analyysi A (ja sen esitietoina olevilla opintojaksoilla) esitettyjen asioiden hyvää hallintaa. Jos kurssilla tarvittavat esitiedot ovat päässeet unohtumaan tai niiden hallinnassa on muusta syystä puutteita, myös esitietojen kertaamiseen pitää varata riittävästi aikaa (kurssin Analyysi B seuraamisen ohessa). Koska moniste on suoraa jatkoa kurssin Analyysi A vastaavalle monisteelle, matematiikan opiskelun luonnetta koskevien huomautusten osalta näissä alkusanoissa tyydytään viittaamaan kurssin Analyysi A monisteen alkusanoihin.

Lopuksi esitän kiitokset kaikille, jotka ovat kommenteillaan, ehdotuksillaan ja neuvoillaan auttaneet minua tämän monisteen teossa.

Pertti Koivisto

Sisältö

1 Esitietoja

1.1 Supremum ja infimum

Joukon pienintä ylärajaa (supremum) ja suurinta alarajaa (infimum) on käsitelty jo kurssilla Analyysi A. Kerrataan vielä aluksi supremumin ja infimumin määritelmät ja perusominaisuuksia sekä esitetään muutamia myöhemmissä todistuksissa tarvittavia aputuloksia.

Määritelmä 1.1. Olkoon $A \subseteq \mathbf{R}$, $A \neq \emptyset$. Jos joukon A ylärajojen joukossa on pienin, niin se on joukon A *pienin yläraja* eli *supremum* (merkitään $\sup A$).

Määritelmä 1.2. Olkoon $A \subseteq \mathbf{R}$, $A \neq \emptyset$. Jos joukon A alarajojen joukossa on suurin, niin se on joukon A *suurin alaraja* eli *infimum* (merkitään $\inf A$).

Täydellisyysaksiooman nojalla jokaisella epätyhjällä ylhäältä rajoitetulla joukon $\mathbf{R}$ osajoukolla on pienin yläraja. Vastaavasti jokaisella epätyhjällä alhaalta rajoitetulla joukon $\mathbf{R}$ osajoukolla on suurin alaraja.

Seuraava lause kuvaa infimumin ja supremumin suhdetta yksinkertaisessa erikoistapauksessa.

Lause 1.1. *Olkoot A ja B epätyhjiä joukon $\mathbf{R}$ osajoukkoja. Jos $A \subseteq B$, niin*

$$\inf B \;\leq\; \inf A \;\leq\; \sup A \;\leq\; \sup B.$$

Todistus. Harjoitustehtävä.

Yleisesti joukon A supremumin tai infimumin ei tarvitse kuulua joukkoon A. Jos ne kuitenkin kuuluvat joukkoon A, niin joukon A ylä- ja alarajoina ne ovat vastaavasti joukon A suurin alkio $\max A$ ja pienin alkio $\min A$. Tulos on voimassa myös kääntäen, mikä nähdään seuraavasta lauseesta.

Lause 1.2. *Olkoon A epätyhjä joukon $\mathbf{R}$ osajoukko.*

(a) *Jos joukossa A on suurin luku M, niin* $\sup A = M$.

(b) *Jos joukossa A on pienin luku m, niin* $\inf A = m$.

Todistus. Ks. Analyysi A.

Huomautus. Weierstrassin min-max-lauseen nojalla suljetulla välillä $[a,b]$ jatkuvan funktion f kuvajoukossa $f([a,b])$ on suurin ja pienin alkio.

Seuraava lause antaa vaihtoehtoisen tavan tutkia joukon supremumin ja infimumin olemassaoloa. Lause on hyödyllinen apuväline todistettaessa täsmällisesti supremumin ja infimumin ominaisuuksia.

Lause 1.3. *Olkoon A epätyhjä joukon $\mathbf{R}$ osajoukko. Tällöin*

(a) $\sup A = G \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{(i)} & \forall x \in A\colon x \leq G, \\ \text{(ii)} & \forall \varepsilon > 0\colon \exists x \in A\colon x > G - \varepsilon, \end{cases}$

(b) $\inf A = g \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{(i)} & \forall x \in A\colon x \geq g, \\ \text{(ii)} & \forall \varepsilon > 0\colon \exists x \in A\colon x < g + \varepsilon. \end{cases}$

Todistus. Ks. Analyysi A.

Riemann-integraalin määrittelyssä erityistä merkitystä on tilanteella, jossa yhden joukon kaikki alkiot ovat pienempiä tai yhtäsuuria kuin jonkin toisen joukon alkiot. Tällöin tarkastellaan sellaisia epätyhjiä joukkoja $A \subseteq \mathbf{R}$ ja $B \subseteq \mathbf{R}$, että

$$a \leq b \qquad \forall a \in A \text{ ja } \forall b \in B.$$

Seuraavaksi esitetään lauseiden muodossa muutama tällaisia joukkoja koskeva tulos. Tuloksia hyödynnetään myöhemmissä todistuksissa. Intuitiivisesti tulokset tuntuvat luonnollisilta, ja ne voidaan suhteellisen helposti todistaa täsmällisesti esimerkiksi lauseen 1.3 avulla. Itse täsmälliset todistukset jätetään harjoitustehtäväksi.

Lause 1.4. *Olkoot* $A \subseteq \mathbf{R}$ *ja* $B \subseteq \mathbf{R}$ *sellaisia epätyhjiä joukkoja, että* $a \leq b$ *kaikilla* $a \in A$ *ja kaikilla* $b \in B$. *Tällöin*

$$\sup A \ \leq \ \inf B.$$

Todistus. Harjoitustehtävä.

Lause 1.5. *Olkoot* $A \subseteq \mathbf{R}$ *ja* $B \subseteq \mathbf{R}$ *sellaisia epätyhjiä joukkoja, että* $a \leq b$ *kaikilla* $a \in A$ *ja kaikilla* $b \in B$. *Tällöin*

$$\sup A \ = \ \inf B$$

täsmälleen silloin, kun jokaista positiivilukua $\varepsilon > 0$ *kohti on olemassa sellaiset alkiot* $a \in A$ *ja* $b \in B$, *että*

$$b - a \ < \ \varepsilon.$$

Todistus. Harjoitustehtävä.

Hyödyntämällä lukujonon raja-arvon perusominaisuuksia saadaan lauseen 1.5 seurauksena välittömästi seuraava tulos.

Seuraus 1.6. *Olkoot* $A \subseteq \mathbf{R}$ *ja* $B \subseteq \mathbf{R}$ *sellaisia epätyhjiä joukkoja, että* $a \leq b$ *kaikilla* $a \in A$ *ja kaikilla* $b \in B$. *Tällöin*

$$\sup A \ = \ \inf B$$

täsmälleen silloin, kun on olemassa sellaiset lukujonot (a_n) *ja* (b_n), *että* $a_n \in A$, $b_n \in B$ *ja*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \ = \ \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Lisäksi tällöin

$$\sup A \ = \ \inf B \ = \ \lim_{n\to\infty} a_n \ \ (= \ \lim_{n\to\infty} b_n).$$

Todistus. Harjoitustehtävä.

1.2 Raja-arvo ja jatkuvuus

Kurssilla Analyysi A esitetyt lukujonon raja-arvoa sekä funktion raja-arvoa ja jatkuvuutta koskevat tulokset oletetaan jatkossa tunnetuksi. Tavanomaisten laskusääntöjen ohella tarvitaan esimerkiksi suljetulla välillä jatkuvien funktioiden ominaisuuksia (mm. Bolzanon lause ja Weierstrassin min-max lause). Lisäksi hyödynnetään polynomi- ja juurifunktioiden, eksponentti- ja logaritmifunktioiden sekä trigonometristen funktioiden ja niiden käänteisfunktioiden jatkuvuustuloksia sekä joitakin kurssilla Analyysi A johdettuja raja-arvotuloksia. Tällaisia ovat esimerkiksi raja-arvot

$$\boxed{\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0} \quad \text{ja} \quad \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.} \tag{1.1}$$

Eksponentti- ja logaritmifunktioiden osalta on syytä palauttaa mieleen myös logaritmin normaalit laskusäännöt sekä kaava

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log x}{\log a}} \tag{1.2}$$

$(x > 0, a > 0, a \neq 1)$, jolla a-kantainen logaritmi saadaan palautetuksi (luonnolliseksi) logaritmiksi, ja yleinen muunnoskaava

$$\boxed{f(x)^{g(x)} = e^{\log f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\log f(x)} \qquad (f(x) > 0).}$$

Muunnoskaavan erikoistapauksina tulevat käyttöön myös yleisen eksponenttifunktion määritelmä

$$\boxed{a^x = e^{x\log a} \qquad (x \in \mathbf{R},\ a > 0)} \tag{1.3}$$

ja yleisen potenssifunktion määritelmä

$$\boxed{x^a = e^{a\log x} \qquad (x > 0,\ a \in \mathbf{R}).} \tag{1.4}$$

Lisäksi tarvitaan raja-arvoa

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1.} \tag{1.5}$$

Seuraavaksi esitetään vielä kertauksena muutama tulos, joihin tullaan viittaamaan myöhemmin. Tulokset on todistettu kurssilla Analyysi A. Aluksi pari funktion raja-arvoa koskevaa lausetta.

Lause 1.7. *Olkoon* $\lim_{x\to a} f(x) = A$. *Jos tällöin on olemassa sellainen* $\delta_M > 0$, *että*

$$f(x) \leq M \qquad \forall x \in \mathrm{U}'_{\delta_M}(a),$$

niin $A \leq M$, *ja jos on olemassa sellainen* $\delta_m > 0$, *että*

$$f(x) \geq m \qquad \forall x \in \mathrm{U}'_{\delta_m}(a),$$

niin $A \geq m$.

Lause 1.8. *Olkoon* $\lim_{x\to a} f(x) = A$. *Jos* $A > 0$, *niin on olemassa sellainen* $\delta > 0$, *että*

$$f(x) \ > \ 0 \qquad \forall x \in \mathrm{U}'_{\delta}(a),$$

ja jos $A < 0$, *niin on olemassa sellainen* $\delta > 0$, *että*

$$f(x) \ < \ 0 \qquad \forall x \in \mathrm{U}'_{\delta}(a).$$

Käänteisfunktioita tutkittaessa joudutaan nytkin rajoittumaan tietyn tyyppisiin funktioihin. Täsmällisesti ottaen hyödynnetään tietoa, että jos funktio on jollakin välillä aidosti monotoninen ja jatkuva, niin funktiolla on käänteisfunktio, joka myös on aidosti monotoninen ja jatkuva.

Lause 1.9. *Olkoon* $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ *sellainen aidosti kasvava ja jatkuva funktio, että* $f(a) = A$ *ja* $f(b) = B$. *Tällöin funktiolla* $f\colon [a,b] \to [A,B]$ *on käänteisfunktio* $f^{-1}\colon [A,B] \to [a,b]$, *joka on välillä* $[A,B]$ *aidosti kasvava ja jatkuva.*

Lause 1.10. *Olkoon* $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ *sellainen aidosti vähenevä ja jatkuva funktio, että* $f(a) = A$ *ja* $f(b) = B$. *Tällöin funktiolla* $f\colon [a,b] \to [B,A]$ *on käänteisfunktio* $f^{-1}\colon [B,A] \to [a,b]$, *joka on välillä* $[B,A]$ *aidosti vähenevä ja jatkuva.*

Huomautus 1.11. Lauseet 1.9 ja 1.10 voidaan yleistää koskemaan minkä tahansa tyyppistä väliä I.

Lopuksi kerrataan vielä tasaisen jatkuvuuden määritelmä ja suljetulla välillä jatkuvien funktioiden tasaista jatkuvuutta koskeva perustulos. Tulosta hyödynnetään jatkuvien funktioiden Riemann-integroituvuuden todistamisessa.

Määritelmä 1.3. Funktio f on *tasaisesti jatkuva* välillä I, jos jokaista positiivilukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \text{ aina, kun } x_1, x_2 \in I \text{ ja } |x_1 - x_2| < \delta.$$

Lause 1.12. *Suljetulla välillä $[a, b]$ jatkuva funktio on tällä välillä tasaisesti jatkuva.*

2 Funktion derivaatta

2.1 Määritelmiä ja perusominaisuuksia

2.1.1 Määrittelyjä

Määritellään aluksi, mitä funktion derivaatalla ja derivoituvuudella tarkoitetaan.

Määritelmä 2.1. Funktio f on *derivoituva* pisteessä x, jos raja-arvo

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

on äärellisenä olemassa. Kyseistä raja-arvoa sanotaan tällöin funktion f *derivaataksi* pisteessä x ja merkitään $f'(x)$.

Huomautus. Derivaatan määritelmä tässä muodossa esitettynä sisältää oletuksen, että funktio f on määritelty pisteen x jossakin ympäristössä (piste x mukaan luettuna).

Huomautus. Muita mahdollisia derivaatan merkitsemistapoja ovat esimerkiksi

$$\frac{d}{dx} f(x), \quad Df(x), \quad D_x f(x).$$

Huomautus. Osamäärää

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

sanotaan funktion f *erotusosamääräksi* pisteessä x.

Huomautus 2.1. Derivaatan määritelmässä esiintyvä raja-arvo voidaan esittää myös muodossa

$$\lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Esimerkki 2.1. Olkoon
$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad (x \neq 0).$$
Määritetään $f'(1)$ ja $f'(-1)$.

Olkoon $0 < |h| < 1$. Tällöin
$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{\frac{1}{1+h} - 1}{h} = \frac{\frac{-h}{1+h}}{h} = -\frac{1}{1+h} \to -1, \text{ kun } h \to 0,$$
ja
$$\frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \frac{\frac{1}{-1+h} - (-1)}{h} = \frac{\frac{h}{-1+h}}{h} = \frac{1}{-1+h} \to -1, \text{ kun } h \to 0.$$
Siis $f'(1) = f'(-1) = -1$.

Esimerkki 2.2. Osoitetaan, että funktio
$$f(x) = |x|$$
ei ole derivoituva pisteessä $x = 0$.

Olkoon $h \neq 0$. Tällöin
$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1, & \text{kun } h > 0, \\ -1, & \text{kun } h < 0. \end{cases}$$
Siis raja-arvo
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$
ei ole olemassa ja f ei ole derivoituva pisteessä $x = 0$.

Esimerkki 2.3. Osoitetaan, että vakiofunktion derivaatta on aina nolla eli
$$\boxed{D(c) = 0}$$
kaikilla $c \in \mathbf{R}$.

Olkoon $f(x) = c$ ($c \in \mathbf{R}$). Jos nyt $h \neq 0$, niin erotusosamäärä
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0$$
kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Tällöin myös erotusosamäärän raja-arvo on 0, kun $h \to 0$, eli $f'(x) = 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Esimerkki 2.4. Osoitetaan, että

$$\boxed{D(\sin x) \;=\; \cos x}$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Palautetaan aluksi trigonometriasta mieleen kaava

$$\sin x - \sin y \;=\; 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \qquad \forall x, y \in \mathbf{R}. \tag{2.1}$$

Käyttämällä kaavaa (2.1) sekä hyödyntämällä kosinin jatkuvuutta ja raja-arvoa

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \;=\; 1$$

(ks. (1.1), s. 4) saadaan (kaikilla $x \in \mathbf{R}$)

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\underbrace{\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}_{\to 1}\cos(\underbrace{x+\tfrac{h}{2}}_{\to x}) \\
&= 1\cdot\cos x \\
&= \cos x.
\end{aligned}$$

Käyttämällä kaavan (2.1) sijasta kaavaa

$$\cos x - \cos y \;=\; -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

voidaan vastaavalla tavalla osoittaa (harjoitustehtävä), että

$$\boxed{D(\cos x) \;=\; -\sin x}$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Esimerkki 2.5. Osoitetaan, että

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} \;=\; 0.}$$

Olkoon $f(z) = \cos z$. Tällöin

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x} \;=\; \lim_{x\to 0}\frac{\cos(0+x)-\cos 0}{x} \;=\; f'(0) \;=\; -\sin 0 \;=\; 0.$$

Esimerkki 2.6. Olkoon $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbf{Z}_+$). Osoitetaan, että

$$\boxed{f'(x) \;=\; n \cdot x^{n-1}}$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$ ja kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$.[1]

Koska

$$y^n - x^n \;=\; (y-x)(y^{n-1} + y^{n-2}x + \cdots + yx^{n-2} + x^{n-1})$$

kaikilla $x, y \in \mathbf{R}$ ja kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$ (totea), niin huomautuksen 2.1 ja polynomifunktion jatkuvuuden nojalla

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \\
&= \lim_{y \to x} \frac{y^n - x^n}{y - x} \\
&= \lim_{y \to x} (y^{n-1} + y^{n-2}x + \cdots + yx^{n-2} + x^{n-1}) \\
&= x^{n-1} + x^{n-2}x + \cdots + xx^{n-2} + x^{n-1} \\
&= n \cdot x^{n-1}
\end{aligned}$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$ ja kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$.

Esimerkki 2.7. Osoitetaan, että

$$\boxed{D(e^x) \;=\; e^x}$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Hyödyntämällä potenssin laskusääntöjä ja raja-arvoa (ks. (1.5), s. 4)

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \;=\; 1$$

saadaan

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \;=\; \lim_{h \to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} \;=\; \lim_{h \to 0} e^x \Bigg(\underbrace{\frac{e^h - 1}{h}}_{\to 1} \Bigg) \;=\; e^x \cdot 1 \;=\; e^x$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

[1] Jos $n = 1$ ja $x = 0$, kaavassa on tulkittava $0^0 = 1$.

2.1.2 Toispuoleiset derivaatat

Erotusosamäärän raja-arvon sijasta voidaan tarkastella vain erotusosamäärän oikeanpuoleista tai vasemmanpuoleista raja-arvoa. Tällöin saadaan vastaavasti vain oikeanpuoleinen tai vasemmanpuoleinen derivaatta.

Määritelmä 2.2. Mikäli raja-arvo

$$f'(x+) \;=\; \lim_{h\to 0+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

on äärellisenä olemassa, sanotaan sitä funktion f *oikeanpuoleiseksi derivaataksi* pisteessä x. Vastaavasti mikäli raja-arvo

$$f'(x-) \;=\; \lim_{h\to 0-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

on äärellisenä olemassa, sanotaan sitä funktion f *vasemmanpuoleiseksi derivaataksi* pisteessä x.

Esimerkki 2.8. Funktiolle $f(x) = |x|$ (ks. esimerkki 2.2, s. 8)

$$f'(0+) \;=\; 1 \qquad \text{ja} \qquad f'(0-) \;=\; -1.$$

Esimerkki 2.9. Olkoon $a > 0$. Määritetään funktion

$$f(x) \;=\; x^a \qquad (x \geq 0)$$

oikeanpuoleinen derivaatta pisteessä $x = 0$.

Jos $h \to 0+$, niin

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} \;=\; \frac{(0+h)^a - 0^a}{h} \;=\; \frac{h^a}{h} \;=\; h^{a-1} \;\to\; \begin{cases} 0, & \text{kun } a > 1, \\ 1, & \text{kun } a = 1, \\ \infty, & \text{kun } 0 < a < 1. \end{cases}$$

Täten

$$f'(0+) \;=\; \begin{cases} 0, & \text{kun } a > 1, \\ 1, & \text{kun } a = 1. \end{cases}$$

Kun $0 < a < 1$, niin $f'(0+)$ ei ole olemassa.

Huomautus 2.2. Koska erotusosamäärän raja-arvo palautuu erotusosamäärän toispuoleisiin raja-arvoihin, funktio f on derivoituva pisteessä x täsmälleen silloin, kun $f'(x-)$ ja $f'(x+)$ ovat äärellisenä olemassa ja yhtä suuret.

Määritelmä 2.3. Funktio f on *derivoituva avoimella välillä* $]a, b[$, jos f on derivoituva välin jokaisessa pisteessä.

Määritelmä 2.4. Funktio f on *derivoituva suljetulla välillä* $[a, b]$, jos f on derivoituva välin jokaisessa sisäpisteessä ja lisäksi $f'(a+)$ ja $f'(b-)$ ovat äärellisenä olemassa.

Määritelmä 2.5. Funktio f on derivoituva välillä $[a, b[$, jos f on derivoituva välillä $]a, b[$ ja $f'(a+)$ on äärellisenä olemassa, ja f on derivoituva välillä $]a, b]$, jos f on derivoituva välillä $]a, b[$ ja $f'(b-)$ on äärellisenä olemassa.

Huomautus. Jos f on derivoituva välillä I, sanotaan kuvausta $f' \colon I \to \mathbf{R}$ (jonka saamat arvot välillä I ovat derivaatat $f'(x)$) funktion f *derivaattafunktioksi* (tai lyhyesti *derivaataksi*) välillä I.

Huomautus. Derivaatta $f'(x)$ ja derivaattafunktion (eli derivaatan) raja-arvo

$$\lim_{y \to x} f'(y)$$

ovat kaksi eri käsitettä (ks. esimerkki 2.10).

Esimerkki 2.10. Tarkastellaan funktion

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{kun } x \geq 1, \\ 2, & \text{kun } x < 1, \end{cases}$$

derivoituvuutta ja derivaatan raja-arvoa pisteessä $x = 1$.

1°: Raja-arvo

$$\lim_{x \to 1} f'(x) \;=\; \lim_{x \to 1+} f'(x) \;=\; \lim_{x \to 1-} f'(x) \;=\; 0,$$

sillä $f'(x) = 0$ kaikilla $x \neq 1$.

2°: Funktio f ei kuitenkaan ole derivoituva pisteessä $x = 1$, sillä

$$f'(1-) \;=\; \lim_{h \to 0-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \;=\; \lim_{h \to 0-} \frac{2-3}{h} \;=\; \lim_{h \to 0-} -\frac{1}{h} \;=\; \infty$$

ei ole äärellisenä olemassa.

Huomautus. Jos derivaattafunktio f' on jatkuva välillä I, sanotaan, että funktio f on *jatkuvasti derivoituva* välillä I.

2.1.3 Perusominaisuuksia

Lause 2.3. *Jos funktio f on derivoituva pisteessä x, niin f on jatkuva pisteessä x.*

Todistus. Jos f on derivoituva pisteessä x, niin

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \;=\; f'(x).$$

Olkoon $h \neq 0$. Tällöin

$$\begin{aligned} f(x+h) \;&=\; (f(x+h) - f(x)) \;+\; f(x) \\ &=\; h \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \;+\; f(x) \\ &\to\; 0 \cdot f'(x) \;+\; f(x) \\ &=\; f(x), \end{aligned}$$

kun $h \to 0$. Siis f on jatkuva pisteessä x. □

Huomautus. Jos funktio f ei ole jatkuva pisteessä x, niin f ei ole myöskään derivoituva pisteessä x.

Huomautus. Jos funktio on derivoituva jollakin välillä I, on se tällä välillä myös jatkuva (harjoitustehtävä).

Huomautus. Lause 2.3 ei ole kääntäen voimassa (ks. esimerkki 2.11).

Esimerkki 2.11. Funktion jatkuvuus ei takaa funktion derivoituvuutta. Esimerkiksi funktio

$$f(x) = |x|$$

on jatkuva pisteessä $x = 0$, mutta funktio ei ole derivoituva pisteessä $x = 0$ (ks. esimerkki 2.2, s. 8).

Lause 2.4. *Olkoot funktiot f ja g derivoituvia pisteessä x. Tällöin myös funktiot*

$$f+g, \quad f-g, \quad fg, \quad kf \ (k \in \mathbf{R}) \ \text{ja} \ \frac{f}{g} \ (\text{kun } g(x) \neq 0)$$

ovat derivoituvia pisteessä x ja

(i) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,

(ii) $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$,

(iii) $(kf)'(x) = k \cdot f'(x)$,

(iv) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$,

(v) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}$.

Todistus. (i) Laskemalla saadaan

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h)-f(x)]+[g(x+h)-g(x)]}{h} \\
&= f'(x)+g'(x).
\end{aligned}$$

(ii) Tulos seuraa kohdista (i) ja (iii), kun funktioksi g valitaan $-g$.

(iii) Koska vakiofunktion derivaatta on nolla, tulos saadaan kohdasta (iv) valitsemalla funktioksi g vakiofunktio k.

(iv) Laskemalla saadaan

$$\begin{aligned}
(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\,[g(x+h)-g(x)] \;+\; g(x)\,[f(x+h)-f(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \Big[\underbrace{f(x+h)}_{\to f(x)} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \;+\; g(x)\,\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\Big] \\
&= f(x)g'(x) \;+\; g(x)f'(x).
\end{aligned}$$

(v) Oletetaan, että $g(x) \neq 0$. Osoitetaan, että

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}.$$

Tällöin väite seuraa kohdasta (iv), sillä

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(x) &= f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} \;+\; \left(-\frac{g'(x)}{g(x)^2}\right)\cdot f(x) \\
&= \frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g(x)^2}.
\end{aligned}$$

Laskemalla saadaan nyt

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{g}\right)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{h \cdot g(x+h) \cdot g(x)} \\
&= \lim_{h\to 0} -\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot \frac{1}{\underbrace{g(x+h)}_{\to g(x)} g(x)} \\
&= -\frac{g'(x)}{g(x)^2}.
\end{aligned}$$

□

Esimerkki 2.12. Lauseen 2.4 sekä esimerkkien 2.3 (s. 8) ja 2.6 (s. 10) perusteella polynomifunktio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

on derivoituva ja

$$\boxed{p'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1}$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Esimerkki 2.13. Käyttämällä tulon derivointisääntöä sekä polynomin (esimerkki 2.12) ja sinin (esimerkki 2.4, s. 9) derivointikaavoja saadaan

$$D(x^5 \sin x) = 5x^4 \sin x + x^5 \cos x$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Esimerkki 2.14. Käyttämällä tulon derivointisääntöä ja eksponenttifunktion (esimerkki 2.7, s. 10) sekä sinin ja kosinin (esimerkki 2.4, s. 9) derivointikaavoja saadaan

$$\begin{aligned}
D(e^x \sin x \cos x) &= D(e^x) \sin x \cos x + e^x D(\sin x \cos x) \\
&= e^x \sin x \cos x + e^x \left(D(\sin x) \cos x \;+\; \sin x\, D(\cos x)\right) \\
&= e^x \sin x \cos x + e^x (\cos x \cdot \cos x \;+\; \sin x \cdot (-\sin x)) \\
&= e^x (\cos^2 x + \sin x \cos x - \sin^2 x)
\end{aligned}$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Esimerkki 2.15. Osoitetaan, että

$$\boxed{D(\tan x) \;=\; \frac{1}{\cos^2 x} \;=\; 1 + \tan^2 x}$$

kaikilla $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ $(n \in \mathbf{Z})$ ja

$$\boxed{D(\cot x) \;=\; -\frac{1}{\sin^2 x} \;=\; -1 - \cot^2 x}$$

kaikilla $x \neq n\pi$ $(n \in \mathbf{Z})$.

Koska

$$\sin^2 x + \cos^2 x \;=\; 1$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$, niin sinin ja kosinin derivointikaavojen (esimerkki 2.4, s. 9) sekä osamäärän derivoimissäännön avulla saadaan

$$\begin{aligned} D(\tan x) &= D\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) \\ &= \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \;=\; 1 + \tan^2 x \end{aligned}$$

kaikilla $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ $(n \in \mathbf{Z})$ ja

$$\begin{aligned} D(\cot x) &= D\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) \\ &= \frac{(-\sin x)\sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} \\ &= -\frac{1}{\sin^2 x} \;=\; -1 - \cot^2 x \end{aligned}$$

kaikilla $x \neq n\pi$ $(n \in \mathbf{Z})$.

Esimerkki 2.16. Jos $x \neq 0$, niin käyttämällä polynomin derivointikaavaa ja osamäärän derivointisääntöä saadaan

$$D\Big(\frac{1}{x}\Big) \;=\; \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} \;=\; -\frac{1}{x^2}$$

ja

$$D\Big(\frac{x-1}{x^2}\Big) \;=\; \frac{1 \cdot x^2 - 2x(x-1)}{(x^2)^2} \;=\; \frac{-x^2 + 2x}{x^4} \;=\; \frac{2-x}{x^3}.$$

2.1.4 Korkeampien kertalukujen derivaatat

Määritelmä 2.6. Jos funktion f derivaattafunktio f' on derivoituva pisteessä x, sanotaan funktion f' derivaattaa tässä pisteessä funktion f *toisen kertaluvun derivaataksi* pisteessä x ja merkitään $f''(x)$. Yleisesti funktion f n:*nnen kertaluvun derivaatta* pisteessä x on

$$f^{(n)}(x) \;=\; D\big(f^{(n-1)}(x)\big) \qquad (n = 2, 3, \ldots),$$

mikäli derivaatat ovat olemassa.

Huomautus. Funktion $f(x)$ n:nnen kertaluvun derivaatalle käytetään myös merkintöjä

$$D^n f(x) \qquad \text{ja} \qquad \frac{d^n}{dx^n} f(x).$$

Huomautus. Lisäksi voidaan määritellä, että $f^{(0)} = f$, jolloin määritelmä 2.6 on merkinnän luonteisena voimassa myös, kun $n = 1$.

Esimerkki 2.17. Koska $D(e^x) = e^x$, niin

$$D^n(e^x) \;=\; e^x$$

kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$ ja kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Esimerkki 2.18. Olkoon

$$f(x) = x^n \qquad (n \in \mathbf{Z}_+).$$

Tällöin polynomin derivointikaavan (esimerkki 2.12) perusteella

$$\begin{aligned}
f'(x) &= nx^{n-1}, \\
f''(x) &= n \cdot (n-1)x^{n-2}, \\
&\vdots \\
f^{(n-1)}(x) &= n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot x, \\
f^{(n)}(x) &= n!, \\
f^{(n+1)}(x) &= 0
\end{aligned}$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Esimerkki 2.19. Olkoon

$$f(x) = \sin x.$$

Tällöin sinin ja kosinin derivointikaavojen (esimerkki 2.4, s. 9) sekä lauseen 2.4 (s. 14) perusteella

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \cos x, \\
f''(x) &= -\sin x, \\
f'''(x) &= -\cos x, \\
f^{(4)}(x) &= \sin x, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

2.2 Yhdistetyn funktion derivaatta

Tarkastellaan seuraavaksi yhdistetyn funktion derivointikaavaa eli *ketjusääntöä*. Lauseessa 2.5 oletetaan tietenkin, että funktion f kuvajoukko sisältyy funktion g määrittelyjoukkoon, jolloin voidaan puhua yhdistetystä funktiosta $g \circ f$.

Lause 2.5. *Jos funktio f on derivoituva pisteessä x ja funktio g on derivoituva pisteessä $f(x)$, niin funktio $g \circ f$ on derivoituva pisteessä x ja*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Todistus. Olkoon f derivoituva pisteessä x ja g derivoituva pisteessä $f(x)$. Tavoitteena on nyt osoittaa, että

$$\lim_{h\to 0} \frac{(g \circ f)(x+h) - (g \circ f)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = g'(f(x))f'(x).$$

Olkoon $h \neq 0$. Merkitään

$$y = f(x) \qquad \text{ja} \qquad k = f(x+h) - f(x).$$

Koska f on derivoituvana funktiona jatkuva pisteessä $x = 0$, niin $k \to 0$, jos $h \to 0$. Lisäksi

$$f(x+h) = f(x) + k = y + k$$

ja edelleen

$$\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = \frac{g(y+k) - g(y)}{h}. \tag{2.2}$$

Olkoon

$$u(t) = \begin{cases} \dfrac{g(y+t) - g(y)}{t} - g'(y), & \text{kun } t \neq 0, \\ 0, & \text{kun } t = 0. \end{cases}$$

Koska g on derivoituva pisteessä y, niin $u(t)$ on jatkuva pisteessä $t = 0$. Lisäksi

$$g(y+t) - g(y) = t\,(u(t) + g'(y)) \qquad \forall\, t \in \mathbf{R},$$

joten myös

$$\frac{g(y+k) - g(y)}{h} = \frac{k\,(u(k) + g'(y))}{h} = (u(k) + g'(y)) \cdot \frac{k}{h} \qquad \forall\, k \in \mathbf{R}.$$

Jos nyt $h \to 0$, niin $u(k) \to 0$ (sillä myös $k \to 0$ ja u on jatkuva pisteessä $k = 0$) ja

$$\frac{k}{h} \;=\; \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \;\to\; f'(x).$$

Täten

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(y+k) - g(y)}{h} \;=\; g'(y)f'(x) \;=\; g'(f(x))f'(x),$$

mistä väite seuraan yhtälön (2.2) perusteella. □

Huomautus. Lauseen 2.5 tulos voidaan esittää myös muodossa

$$(g \circ f)'(x) \;=\; \frac{dg}{df} \cdot \frac{df}{dx}.$$

Vastaavasti jos $f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_n$ on yhdistetty funktio ja alla esiintyvät derivaatat ovat olemassa, niin voidaan yleistää

$$\frac{d}{dx}(f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n) \;=\; \frac{df_1}{df_2} \cdot \frac{df_2}{df_3} \cdot \cdots \cdot \frac{df_n}{dx}.$$

Esimerkki 2.20. Käyttämällä polynomin ja sinin derivointikaavoja sekä yhdistetyn funktion derivoimissääntöä saadaan[1]

$$\begin{aligned}
D(\sin^2(2x)) &= 2 \cdot \sin 2x \cdot D(\sin 2x) \\
&= 2 \sin 2x \cdot \cos 2x \cdot D(2x) \\
&= 2 \sin 2x \cdot \cos 2x \cdot 2 \\
&= 2 \cdot 2 \sin 2x \cos 2x \\
&= 2 \sin 4x
\end{aligned}$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Esimerkki 2.21. Vastaavasti kuin esimerkissä 2.20 saadaan

$$\begin{aligned}
D\Big(\sin(\sin(x^2))\Big) &= \cos(\sin(x^2)) \cdot D(\sin(x^2)) \\
&= \cos(\sin(x^2)) \cdot \cos(x^2) \cdot D(x^2) \\
&= \cos(\sin(x^2)) \cdot \cos(x^2) \cdot 2x \\
&= 2x \cos(x^2) \cdot \cos(\sin(x^2))
\end{aligned}$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

[1] Yhtälöketjun viimeinen yhtäsuuruus seuraa trigonometrian kaavasta $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.

Esimerkki 2.22. Käyttämällä polynomin derivointikaavaa ja yhdistetyn funktion derivoimissääntöä saadaan

$$D\Big((x^3+2x)^5\Big) \;=\; 5(x^3+2x)^4\cdot(3x^2+2) \;=\; (15x^2+10)(x^3+2x)^4$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Esimerkki 2.23. Esimerkin 2.6 (s. 10) perusteella

$$D(x^n) \;=\; nx^{n-1} \qquad \forall n \in \mathbf{Z}_+ \;\text{ ja }\; \forall x \in \mathbf{R}.$$

Osoitetaan, että jos $x \neq 0$, niin potenssin derivointikaava pätee kaikille $n \in \mathbf{Z}$.

Olkoon siis $x \neq 0$. Todetaan aluksi, että tällöin

$$D(x^0) \;=\; D(1) \;=\; 0 \;=\; 0\cdot x^{0-1}.$$

Olkoon sitten $n \in \mathbf{Z}_+$. Käyttämällä kaavaa

$$x^{-n} \;=\; \left(\frac{1}{x}\right)^n$$

ja soveltamalla yhdistetyn funktion derivointisääntöä sekä potenssin derivointikaavaa ja esimerkin 2.16 (s. 18) tulosta

$$D\Big(\frac{1}{x}\Big) \;=\; -\frac{1}{x^2}$$

saadaan

$$\begin{aligned}
D(x^{-n}) \;&=\; D\bigg(\Big(\frac{1}{x}\Big)^n\bigg) \\
&=\; n\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}\cdot D\Big(\frac{1}{x}\Big) \\
&=\; n\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}\left(-\frac{1}{x^2}\right) \;=\; -n\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)^2 \\
&=\; -n\left(\frac{1}{x}\right)^{n+1} \\
&=\; -nx^{-(n+1)} \\
&=\; -nx^{-n-1}.
\end{aligned}$$

Siis potenssin derivointikaava pätee kaikille $n \in \mathbf{Z}$ (kun $x \neq 0$) eli

$$\boxed{D(x^n) \;=\; nx^{n-1} \qquad \forall n \in \mathbf{Z},\;\; \forall x \neq 0.}$$

Esimerkki 2.24. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{kun } x \neq 0, \\ 0, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

Osoitetaan, että $f'(x)$ on olemassa kaikilla $x \in \mathbf{R}$ ja derivaattafunktio $f'(x)$ ei ole jatkuva pisteessä $x = 0$.

1°: Olkoon $x \neq 0$. Tällöin

$$f'(x) \;=\; 2x \cdot \sin \frac{1}{x} \;+\; x^2 \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \;=\; 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

tavanomaisten derivointisääntöjen nojalla.

2°: Funktio $f(x)$ on derivoituva pisteessä $x = 0$ ja $f'(0) = 0$, sillä hyödyntämällä raja-arvoa (1.1) (s. 4) saadaan

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \;=\; \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin(1/h) - 0}{h} \;=\; \lim_{h \to 0} h \sin \frac{1}{h} \;=\; 0.$$

Siis kohtien 1° ja 2° nojalla funktio $f(x)$ on derivoituva kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

3°: Osoitetaan derivaattafunktion $f'(x)$ epäjatkuvuus pisteessä $x = 0$ osoittamalla, että raja-arvo $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ ei ole olemassa. Raja-arvosta (1.1) (s. 4) seuraa, että

$$\lim_{x \to 0} 2x \sin \frac{1}{x} \;=\; 0.$$

Toisaalta raja-arvo

$$\lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x}$$

ei ole olemassa (harjoitustehtävä), joten funktion raja-arvon laskusääntöjen nojalla myöskään raja-arvo

$$\lim_{x \to 0} \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\right) \;=\; \lim_{x \to 0} f'(x)$$

ei voi olla olemassa. Siis $f'(x)$ ei ole jatkuva pisteessä $x = 0$.

Huomautus. Koska esimerkin 2.24 derivaattafunktio $f'(x)$ ei ole jatkuva pisteessä $x = 0$, niin $f'(x)$ ei ole myöskään derivoituva pisteessä $x = 0$ (eli $f''(0)$ ei ole olemassa).

Esimerkki 2.25. Olkoon $a > 0$. Osoitetaan, että

$$\boxed{D(a^x) = a^x \log a}$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Käyttämällä funktion a^x määrittelyä

$$a^x = e^{x \log a}$$

(ks. (1.3), s. 4) sekä eksponenttifunktion derivointikaavaa ja yhdistetyn funktion derivoimissääntöä saadaan

$$D(a^x) = D(e^{x \log a}) = e^{x \log a} D(x \log a) = e^{x \log a} \log a = a^x \log a$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

2.3 Käänteisfunktion derivaatta

Koska derivoituvalla funktiolla ei välttämättä ole käänteisfunktiota, on käänteisfunktion derivoituvuutta tutkittaessa rajoituttava esimerkiksi aidosti monotonisiin funktioihin (jolloin käänteisfunktio on olemassa). Lisäksi funktion derivaatan arvolle on asetettava rajoituksia.

Lause 2.6. *Oletetaan, että funktio f on jatkuva ja aidosti monotoninen jossakin pisteen x ympäristössä ja että f on derivoituva pisteessä x ja $f'(x) \neq 0$. Tällöin käänteisfunktio f^{-1} on derivoituva pisteessä $y = f(x)$ ja*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Todistus. Oletetaan, että lauseen oletukset ovat voimassa pisteessä x_0. Olkoon lisäksi $y = f(x)$ ja erityisesti $y_0 = f(x_0)$. Koska f on jatkuva ja aidosti monotoninen jossakin pisteen x_0 ympäristössä, on funktiolla f rajoitettuna tähän väliin käänteisfunktio f^{-1} (joka on jatkuva ja aidosti monotoninen jossakin pisteen y_0 ympäristössä, ks. lauseet 1.9 ja 1.10 sekä huomautus 1.11, s. 5–6). Lisäksi tällöin $x \to x_0$ täsmälleen silloin, kun $f(x) \to f(x_0)$ eli $y \to y_0$, ja $f(x) \neq f(x_0)$, kun $x \neq x_0$. Siis

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(y_0+h) - f^{-1}(y_0)}{h} &= \lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} \\
&= \frac{1}{f'(x_0)},
\end{aligned}$$

sillä f on derivoituva pisteessä x_0 ja $f'(x_0) \neq 0$. Täten f^{-1} on derivoituva pisteessä y_0 ja

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}. \qquad \square$$

Huomautus. Oletus $f'(x) \neq 0$ lauseessa 2.6 on oleellinen (ks. esimerkki 2.26).

Esimerkki 2.26. Esimerkiksi funktio

$$f(x) = x^3$$

on jatkuva, aidosti kasvava ja derivoituva kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Lisäksi sillä on käänteiskuvaus, joka on jatkuva ja aidosti kasvava kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Käänteiskuvaus ei kuitenkaan ole derivoituva pisteessä $x = 0$ (harjoitustehtävä).

Esimerkki 2.27. Osoitetaan, että

$$\boxed{D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in \left]-1, 1\right[.}$$

Funktio

$$f(x) = \sin x$$

on jatkuva ja aidosti kasvava[1] välillä $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Lisäksi f on derivoituva tällä välillä ja

$$f'(x) = \cos x > 0 \qquad \forall x \in \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[$$

(esimerkki 2.4, s. 9). Täten sinin käänteisfunktio $\arcsin x$ on lauseen 2.6 nojalla derivoituva kaikilla $x \in \left]-1, 1\right[$.

Määritetään sitten arkussinin derivaatta välillä $\left]-1, 1\right[$. Olkoon $y = \arcsin x$. Koska

$$\sin^2 y + \cos^2 y = 1,$$

niin

$$\cos(\arcsin x) = \pm\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2} \qquad \forall x \in \left]-1, 1\right[. \tag{2.3}$$

Kaavassa (2.3) on valittava merkki $+$, sillä $\arcsin x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ja kosini on tällä välillä positiivinen. Täten käänteisfunktion derivoimiskaavan perusteella

$$D(\arcsin x) = \frac{1}{D(\sin y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

kaikilla $x \in \left]-1, 1\right[$.

[1] Täsmällinen todistus, ks. esimerkki 3.14, s. 50.

Esimerkki 2.28. Vastaavaavalla tavalla kuin esimerkissä 2.27 voidaan osoittaa (harjoitustehtävä), että kosinin käänteisfunktio $\operatorname{arc}\cos x$ on derivoituva kaikilla $x \in]-1,1[$, tangentin käänteisfunktio $\operatorname{arc}\tan x$ on derivoituva kaikilla $x \in \mathbf{R}$ ja kotangentin käänteisfunktio $\operatorname{arc}\cot x$ on derivoituva kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Lisäksi käänteisfunktion derivoimiskaavan perusteella (kun $y = \operatorname{arc}\cos x$, $y = \operatorname{arc}\tan x$ tai $y = \operatorname{arc}\cot x$)

$$D(\operatorname{arc}\cos x) = \frac{1}{D(\cos y)} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sin(\operatorname{arc}\cos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

kaikilla $x \in]-1,1[$,

$$D(\operatorname{arc}\tan x) = \frac{1}{D(\tan y)} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2(\operatorname{arc}\tan x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$ ja

$$D(\operatorname{arc}\cot x) = \frac{1}{D(\cot y)} = \frac{1}{-1-\cot^2 y} = -\frac{1}{1+\cot^2(\operatorname{arc}\cot x)} = -\frac{1}{1+x^2}$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$ (harjoitustehtävä).

Siis

$$\boxed{\begin{aligned} D(\operatorname{arc}\cos x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} && \forall x \in]-1,1[\,, \\ D(\operatorname{arc}\tan x) &= \frac{1}{1+x^2} && \forall x \in \mathbf{R}, \\ D(\operatorname{arc}\cot x) &= -\frac{1}{1+x^2} && \forall x \in \mathbf{R}. \end{aligned}}$$

Esimerkki 2.29. Osoitetaan, että

$$\boxed{D(\log x) = \frac{1}{x} \qquad \forall x > 0}$$

Eksponenttifunktio e^x on jatkuva ja aidosti kasvava kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Lisäksi $D(e^x) = e^x$ (esimerkki 2.7, s. 10) ja $e^x > 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Täten eksponenttifunktion käänteisfunktio $\log x$ on lauseen 2.6 nojalla derivoituva kaikilla $x > 0$ ja ($y = \log x$)

$$D(\log x) = \frac{1}{D(e^y)} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}.$$

Esimerkki 2.30. Olkoon $a > 0$, $a \neq 1$ ja $x > 0$. Koska (ks. (1.2), s. 4)

$$\log_a x \;=\; \frac{\log x}{\log a},$$

niin esimerkin 2.29 nojalla

$$\boxed{D(\log_a x) \;=\; D\Big(\frac{\log x}{\log a}\Big) \;=\; \frac{1}{\log a}\cdot\frac{1}{x} \;=\; \frac{1}{x\log a}.}$$

Esimerkki 2.31. Osoitetaan, että

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} \;=\; 1.}$$

Olkoon $f(z) = \log z$ $(z > 0)$. Tällöin

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} \;=\; \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-\log 1}{x} \;=\; f'(1) \;=\; \frac{1}{1} \;=\; 1.$$

Huomautus. Jos $f(x) > 0$, niin käyttämällä muunnoskaavaa (ks. s. 4)

$$f(x)^{g(x)} \;=\; e^{\log f(x)^{g(x)}} \;=\; e^{g(x)\log f(x)}$$

funktion $f(x)^{g(x)}$ ominaisuudet voidaan palauttaa funktion $g(x)\log f(x)$ ominaisuuksiin. Jos esimerkiksi f ja g ovat derivoituvia, niin funktion $f(x)^{g(x)}$ derivaatta voidaan laskea käyttämällä eksponenttifunktion derivointikaavaa ja yhdistetyn funktion derivointisääntöä, jolloin

$$D(f(x)^{g(x)}) \;=\; e^{g(x)\log f(x)}D\big(g(x)\log f(x)\big) \;=\; f(x)^{g(x)}D\big(g(x)\log f(x)\big).$$

Esimerkki 2.32. Määritetään $f'(x)$, kun

$$f(x) \;=\; x^x \qquad (x > 0).$$

Olkoon $x > 0$. Koska

$$f(x) \;=\; x^x \;=\; e^{\log x^x} \;=\; e^{x\log x},$$

niin

$$f'(x) \;=\; e^{x\log x}\cdot D(x\log x) \;=\; e^{x\log x}\cdot\Big(1\cdot\log x \;+\; x\cdot\frac{1}{x}\Big) \;=\; (\log x + 1)\,x^x.$$

Esimerkki 2.33. Olkoon

$$f(x) = (x^2+1)^{\sin 3x}.$$

Vastaavalla tavalla kuin esimerkissä 2.32 voidaan osoittaa (harjoitustehtävä), että nyt

$$f'(x) = \left(3\cos(3x)\cdot\log(x^2+1) + \frac{2x\sin 3x}{x^2+1}\right)(x^2+1)^{\sin 3x}.$$

Esimerkki 2.34. Osoitetaan, että

$$\boxed{D(x^a) = ax^{a-1} \qquad \forall a \in \mathbf{R},\ \ \forall x > 0}$$

(eli jos $x > 0$, niin potenssin derivointikaava pätee kaikille $a \in \mathbf{R}$).

Olkoon siis $x > 0$ ja $a \in \mathbf{R}$. Hyödyntämällä yleisen potenssifunktion määrittelyä

$$x^a = e^{a\log x}$$

(ks. (1.4), s. 4) sekä yhdistetyn funktion derivoimissääntöä ja eksponentti- ja logaritmifunktioiden derivointikaavoja saadaan

$$D(x^a) = D(e^{a\log x}) = e^{a\log x}D(a\log x) = e^{a\log x}\cdot a\cdot\frac{1}{x} = ax^a\,\frac{1}{x} = ax^{a-1}.$$

Huomautus 2.7. Esimerkkien 2.9 (s. 11) ja 2.34 nojalla funktio x^a on derivoituva välillä $[0,\infty[$, jos $a \geq 1$.

2.4 Rollen lause ja väliarvolause

Tutkitaan aluksi ennen Rollen lausetta ja väliarvolausetta funktion käyttäytymistä yhdessä yksittäisessä pisteessä.

Lause 2.8. *Oletetaan, että funktio f on derivoituva pisteessä a.*

(i) *Jos $f'(a) > 0$, niin on olemassa sellainen $\delta > 0$, että*

$$f(x) < f(a) \quad \forall x \in \left]a-\delta, a\right[\qquad \textit{ja} \qquad f(x) > f(a) \quad \forall x \in \left]a, a+\delta\right[.$$

(ii) *Jos $f'(a) < 0$, niin on olemassa sellainen $\delta > 0$, että*

$$f(x) > f(a) \quad \forall x \in \left]a-\delta, a\right[\qquad \textit{ja} \qquad f(x) < f(a) \quad \forall x \in \left]a, a+\delta\right[.$$

Todistus. Todistetaan kohta (i). Kohta (ii) todistetaan vastaavasti (harjoitustehtävä). Koska

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) > 0,$$

niin lauseen 1.8 (s. 5) nojalla on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0 \qquad \forall x \in \mathrm{U}'_{\delta}(a).$$

Jos nyt $x \in \left]a-\delta, a\right[$, niin $x - a < 0$, joten myös

$$f(x) - f(a) < 0 \qquad \text{eli} \qquad f(x) < f(a).$$

Jos taas $x \in \left]a, a+\delta\right[$, niin $x - a > 0$, joten myös

$$f(x) - f(a) > 0 \qquad \text{eli} \qquad f(x) > f(a).$$

□

Huomautus. Ehdosta $f'(a) > 0$ ei voi päätellä, että funktio f olisi kasvava millään välillä $\left]a-\delta, a+\delta\right[$, ja ehdosta $f'(a) < 0$ ei voi päätellä, että funktio f olisi vähenevä millään välillä $\left]a-\delta, a+\delta\right[$.

Seuraus 2.9. *Jos funktio f saavuttaa suurimman tai pienimmän arvonsa pisteessä a ja f on derivoituva pisteessä a, niin $f'(a) = 0$.*

Huomautus. Seuraus 2.9 ei ole voimassa kääntäen.

2.4.1 Rollen lause

Seurauksen 2.9 avulla voidaan todistaa Rollen lause.

Lause 2.10 (Rollen lause). *Jos*

(i) *f on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$,*

(ii) *f on derivoituva avoimella välillä $]a, b[$,*

(iii) *$f(a) = f(b)$,*

niin on olemassa sellainen $\xi \in\,]a, b[$, että $f'(\xi) = 0$.[1]

Todistus. 1°: Jos f on vakiofunktio, niin

$$f'(x) = 0 \qquad \forall x \in\,]a, b[\,.$$

Täten mikä tahansa välin $]a, b[$ piste kelpaa vaadituksi pisteeksi.

2°: Jos f ei ole vakiofunktio, niin on olemassa sellainen $c \in\,]a, b[$, että

$$f(c) > f(a) \quad \text{tai} \quad f(c) < f(a).$$

Oletetaan nyt, että

$$f(c) > f(a) = f(b)$$

(tapaus $f(c) < f(a)$ todistetaan täysin vastaavasti). Koska f on suljetulla välillä $[a, b]$ jatkuva, niin f saavuttaa Weierstrassin min-max-lauseen nojalla suurimman arvonsa jossakin välin $[a, b]$ pisteessä ξ. Tällöin

$$f(\xi) \;\geq\; f(c) \;>\; f(a) \;=\; f(b),$$

joten $\xi \in\,]a, b[$. Siis f on derivoituva pisteessä ξ. Lisäksi seurauksen 2.9 nojalla

$$f'(\xi) = 0.$$

Siis ξ on vaadittu piste. □

Seuraus 2.11. *Jos f on derivoituva välillä I ja on olemassa sellaiset $x_1, x_2 \in I$, että*

$$x_1 < x_2 \qquad \textit{ja} \qquad f(x_1) = f(x_2),$$

niin on olemassa sellainen $\xi \in\,]x_1, x_2[$, että $f'(\xi) = 0$.

[1] Ksii (pienenä kirjaimena ξ) on kreikkalaisen kirjaimiston 14. kirjain.

Huomautus 2.12. Seurauksen 2.11 nojalla välillä I derivoituvalla funktiolla on tällä välillä aina kahden nollakohtansa välissä vähintään yksi derivaatan nollakohta.

Esimerkki 2.35. Tutkitaan funktion

$$f(x) \;=\; x^3 + 3x$$

nollakohtien lukumäärää.

1°: Koska

$$f'(x) \;=\; 3x^2 + 3 \;=\; 3(x^2 + 1) \;>\; 0 \qquad \forall x \in \mathbf{R},$$

niin derivaattafunktiolla f' ei ole yhtään nollakohtaa. Siis huomautuksen 2.12 nojalla funktiolla f voi olla korkeintaan yksi nollakohta.

2°: Selvästi $f(0) = 0$, joten funktiolla f on ainakin yksi nollakohta (joka on pisteessä $x = 0$).

Kohdista 1° ja 2° seuraa, että funktiolla f on täsmälleen yksi (reaalinen) nollakohta.

Esimerkki 2.36. Osoitetaan, että funktiolla

$$f(x) \;=\; e^{1-x^2} - \arcsin(x^2)$$

on korkeintaan 2 nollakohtaa välillä $]-1, 1[$.

Funktio on määritelty välillä $[-1, 1]$. Lisäksi

$$f'(x) \;=\; -2x \cdot e^{1-x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \cdot 2x \;=\; -2x \cdot \left(e^{1-x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\right)$$

välillä $]-1, 1[$. Koska

$$e^{1-x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} \;>\; 0 \qquad \forall x \in \left]-1, 1\right[,$$

niin $f'(x) = 0$ välillä $]-1, 1[$ täsmälleen silloin, kun $x = 0$. Täten derivaattafunktiolla f' on korkeintaan 1 nollakohta välillä $]-1, 1[$ (itse asiassa täsmälleen yksi eli pisteessä $x = 0$). Siis huomautuksen 2.12 nojalla funktiolla f voi olla korkeintaan kaksi nollakohtaa välillä $]-1, 1[$.

Huomautus 2.13. Käyttämällä huomautusta 2.12 ja Bolzanon lausetta saadaan joskus määritettyä funktion nollakohtien täsmällinen määrä.

Esimerkki 2.37. Esimerkissä 2.36 osoitettiin, että funktiolla

$$f(x) \;=\; e^{1-x^2} - \arcsin(x^2)$$

on korkeintaan 2 nollakohtaa välillä $]-1,1[$. Osoitetetaan nyt, että nollakohtia on täsmälleen 2.

Funktio on määritelty ja jatkuva välillä $[-1,1]$. Lisäksi

$$f(0) \;=\; e^{1-0} - \arcsin 0 \;=\; e - 0 \;=\; e \;>\; 0$$

ja

$$f(-1) \;=\; f(1) \;=\; e^{1-1} - \arcsin 1 \;=\; 1 - \tfrac{\pi}{2} \;<\; 0.$$

Täten Bolzanon lauseen nojalla funktiolla f on nollakohta sekä välillä $]-1,0[$ että välillä $]0,1[$. Siis funktiolla f on ainakin kaksi nollakohtaa välillä $]-1,1[$.

Täten funktiolla f on täsmälleen kaksi nollakohtaa välillä $]-1,1[$.

Esimerkki 2.38. Käyttämällä huomatusta 2.13 voidaan osoittaa, että funktiolla

$$f(x) \;=\; x^4 + 4x^2 - 7x - 5$$

on täsmälleen kaksi nollakohtaa (harjoitustehtävä).

2.4.2 Väliarvolause

Todistetaan aluksi Rollen lausetta käyttäen kahta funktiota koskeva väliarvolauseen yleistys.

Lause 2.14 (Yleistetty väliarvolause). *Jos funktiot f ja g ovat jatkuvia suljetulla välillä $[a,b]$ ja derivoituvia avoimella välillä $]a,b[$, niin on olemassa sellainen piste $\xi \in\,]a,b[$, että*

$$g'(\xi)\,[f(b) - f(a)] = f'(\xi)\,[g(b) - g(a)]\,. \tag{2.4}$$

Todistus. Olkoon

$$h(x) = f(x)\,[g(b) - g(a)] - g(x)\,[f(b) - f(a)]\,.$$

Tällöin h on jatkuva välillä $[a, b]$ ja derivoituva välillä $]a, b[$, sillä f ja g ovat jatkuvia välillä $[a, b]$ ja derivoituvia välillä $]a, b[$. Lisäksi

$$h(a) \;=\; f(a)g(b) - f(a)g(a) - g(a)f(b) + g(a)f(a) \;=\; f(a)g(b) - f(b)g(a)$$

ja

$$h(b) \;=\; f(b)g(b) - f(b)g(a) - g(b)f(b) + g(b)f(a) \;=\; f(a)g(b) - f(b)g(a),$$

joten

$$h(a) = h(b).$$

Siis h toteuttaa Rollen lauseen edellytykset, joten on olemassa sellainen $\xi \in \,]a, b[$, että $h'(\xi) = 0$ eli

$$f'(\xi)\,[g(b) - g(a)] - g'(\xi)\,[f(b) - f(a)] = 0. \qquad \square$$

Huomautus 2.15. Jos lauseessa 2.14 tehdään funktiolle g lisäoletus, että $g'(x) \neq 0$ kaikilla $x \in \,]a, b[$, saadaan

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \qquad \text{(Cauchyn väliarvokaava).} \tag{2.5}$$

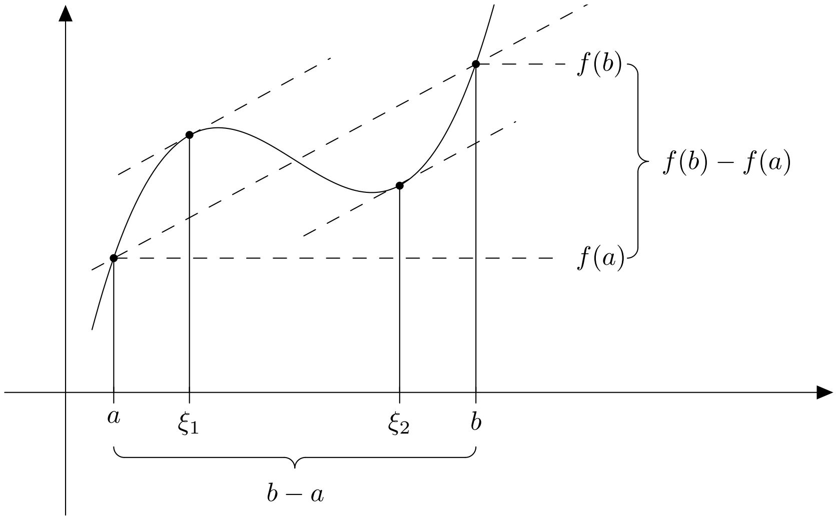
Todistus. Jos olisi $g(a) = g(b)$, niin Rollen lausetta voitaisiin soveltaa funktioon g välillä $[a, b]$, jolloin olisi olemassa sellainen $\xi_1 \in \,]a, b[$, että

$$g'(\xi_1) = 0,$$

mikä on vastoin huomautuksen oletuksia.

Siis on oltava $g(a) \neq g(b)$, jolloin kaavassa (2.4) voidaan jakaa puolittain lausekkeilla $g(b) - g(a)$ ja $g'(\xi)$. $\square$

Jos lauseessa 2.14 valitaan $g(x) = x$ (kaikilla $x \in [a, b]$), saadaan varsinainen differentiaalilaskennan väliarvolause.



Kuva 2.1: Funktion f kuvaajan pisteisiin $(\xi_1, f(\xi_1))$ ja $(\xi_2, f(\xi_2))$ piirretyt tangentit ovat pisteiden $(a, f(a))$ ja $(b, f(b))$ kautta kulkevan suoran suuntaisia, joten tangenteilla ja kyseisellä suoralla on sama kulmakerroin.

Lause 2.16 (Differentiaalilaskennan väliarvolause). *Jos funktio f on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$ ja derivoituva avoimella välillä $]a, b[$, niin on olemassa sellainen $\xi \in\,]a, b[$, että*

$$f(b) - f(a) \;=\; f'(\xi)(b - a).$$

Huomautus. Lauseesta 2.16 käytetään usein lyhyesti pelkästään nimitystä väliarvolause. Siitä käytetään myös lyhennettä VAL.

Huomautus. Väliarvolauseen tulos voidaan esittää myös muodossa (vrt. kuva 2.1)

$$f'(\xi) \;=\; \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Huomautus. Piste ξ riippuu paitsi funktiosta f myös välistä $[a, b]$ (vrt. kuva 2.1 ja esimerkki 2.39).

Esimerkki 2.39. Olkoon
$$f(x) = x^3.$$
Tarkastellaan väliä $[0, b]$, missä $b > 0$, ja määritetään väliarvolauseessa esiintyvä piste ξ.

Funktio f on polynomina jatkuva ja derivoituva välillä $[0, b]$, joten väliarvolauseen nojalla on olemassa sellainen $\xi \in \,]0, b[$, että

$$b^3 - 0 \;=\; 3\xi^2(b - 0).$$

Siis

$$\xi \;=\; \frac{b}{\sqrt{3}} \in \,]0, b[\,.$$

Siis ξ todellakin riippuu koko ajan välin päätepisteistä.

Esimerkki 2.40. Osoitetaan väliarvolauseen avulla, että

$$|\cos x - 1| \;\leq\; |x| \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Tarkastellaan funktiota $f(t) = \cos t$. Esimerkin 2.4 (s. 9) nojalla f on jatkuva ja derivoituva kaikilla $t \in \mathbf{R}$ ja

$$f'(t) \;=\; -\sin t \qquad \forall\, t \in \mathbf{R}.$$

1°: Olkoon $x > 0$. Sovelletaan väliarvolausetta funktioon f välillä $[0, x]$ (f on jatkuva ja derivoituva välillä $[0, x]$). On siis olemassa sellainen $\xi \in \,]0, x[$, että

$$\cos x - \cos 0 \;=\; -\sin\xi \cdot (x - 0).$$

Koska $\cos 0 = 1$ ja $|\sin\xi| \leq 1$ kaikilla $\xi \in \mathbf{R}$, niin

$$|\cos x - 1| \;=\; |-\sin\xi \cdot x| \;=\; |\sin\xi| \cdot |x| \;\leq\; |x|\,.$$

2°: Olkoon $x < 0$. Sovelletaan väliarvolausetta funktioon f välillä $[x, 0]$ (f on jatkuva ja derivoituva välillä $[x, 0]$). On siis olemassa sellainen $\xi \in \,]x, 0[$, että

$$\cos 0 - \cos x \;=\; -\sin\xi \cdot (0 - x)$$

eli

$$\cos x - \cos 0 \;=\; -\sin\xi \cdot (x - 0).$$

Väite seuraa nyt vastaavasti kuin kohdassa 1°.

Koska väite on tosi, kun $x = 0$, niin kohdista 1° ja 2° seuraa, että väite pätee kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Esimerkki 2.41. Osoitetaan väliarvolauseen avulla, että

$$\sqrt{x} \ < \ \frac{x+1}{2} \qquad \forall x > 1$$

ja

$$\sqrt{x} \ < \ \frac{x+1}{2}, \qquad \text{kun } 0 < x < 1.$$

Tarkastellaan funktiota

$$f(t) = \sqrt{t} \qquad (t \geq 0)$$

ja sovelletaan väliarvolausetta funktioon f väleillä $[1, x]$ sekä $[x, 1]$. Yksityskohdat jätetään harjoitustehtäväksi.

Huomautus 2.17. Jos esimerkiksi $x > a$ ja funktio f toteuttaa väliarvolauseen oletukset välillä $[a, x]$, niin funktion f arvolle pisteessä x saadaan arvio

$$f(x) \ = \ f(a) + f'(\xi)(x - a),$$

missä $\xi \in \,]a, x[$.

Esimerkki 2.42. Olkoon f sellainen funktio, että $f(-3) = -7$ ja

$$2 \ \leq \ f'(x) \ \leq \ 3 \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Osoitetaan, että $1 \ \leq \ f(1) \ \leq \ 5$.

Nyt f on derivoituva (ja jatkuva) välillä $[-3, 1]$, joten huomautuksen 2.17 nojalla on olemassa sellainen $\xi \in \,]-3, 1[$, että

$$f(1) \ = \ f(-3) + f'(\xi)(1 - (-3)) \ = \ -7 + 4 \cdot f'(\xi).$$

Koska $2 \leq f'(\xi) \leq 3$, niin

$$f(1) \ \geq \ -7 + 4 \cdot 2 \ = \ -7 + 8 \ = \ 1$$

ja

$$f(1) \ \leq \ -7 + 4 \cdot 3 \ = \ -7 + 12 \ = \ 5.$$

2.5 Integraalilaskennan peruslause

Osoitetaan vielä funktion derivaattaa käsittelevän luvun lopuksi, että ainoastaan vakiofunktion derivaatta voi olla identtisesti nolla jollakin välillä. Lausetta kutsutaan joskus integraalilaskennan peruslauseeksi, koska lauseen tulos mahdollistaa osaltaan Riemann-integraalin arvon määrittämisen derivaattaa hyödyntäen.

Lause 2.18 (Integraalilaskennan peruslause). *Jos $f' \equiv 0$ välillä I, niin f on vakio välillä I.*[1]

Todistus. Oletetaan, että $x, y \in I$ ja $x < y$. Koska f on derivoituva välillä I, on f myös jatkuva välillä I (ja siis myös välillä $[x, y]$). Siis väliarvolausetta voidaan soveltaa funktioon f välillä $[x, y]$. On siis olemassa sellainen $\xi \in]x, y[$, että

$$f(y) - f(x) \;=\; \overbrace{f'(\xi)}^{=0}(y - x) \;=\; 0.$$

Siis

$$f(y) \;=\; f(x).$$

Täten f on vakio kaikilla $x \in I$. □

Seuraus 2.19. *Jos*

$$f'(x) \;=\; g'(x) \qquad \forall x \in I,$$

niin on olemassa sellainen vakio $C \in \mathbf{R}$, että

$$f(x) \;=\; g(x) + C \qquad \forall x \in I.$$

Seuraus 2.20. *Jos*

$$f'(x) \;=\; g'(x) \qquad \forall x \in I$$

ja on olemassa sellainen $x \in I$, että $f(x) = g(x)$, niin

$$f(x) \;=\; g(x) \qquad \forall x \in I.$$

[1] Merkintä $f' \equiv 0$ välillä I tarkoittaa, että $f'(x) = 0$ kaikilla $x \in I$.

Esimerkki 2.43. Määritetään funktio f, kun tiedetään, että $f(0) = 1$ ja

$$f'(x) \;=\; x+1 \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Koska

$$D\Big(\frac{x^2}{2}+x\Big) \;=\; x+1,$$

niin seurauksen 2.19 perusteella on olemassa sellainen $C \in \mathbf{R}$, että

$$f(x) \;=\; \frac{x^2}{2}+x+C.$$

Koska

$$f(0) \;=\; 0+0+C \;=\; 1,$$

niin $C = 1$. Siis

$$f(x) \;=\; \frac{x^2}{2}+x+1 \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Esimerkki 2.44. Osoitetaan, että

$$\arcsin x + \arccos x \;=\; \tfrac{\pi}{2} \qquad \forall x \in [-1,1]\,.$$

Välin päätepisteissä väite pätee, sillä

$$\arcsin(-1)+\arccos(-1) \;=\; -\tfrac{\pi}{2}+\pi \;=\; \tfrac{\pi}{2}$$

ja

$$\arcsin 1 + \arccos 1 \;=\; \tfrac{\pi}{2}+0 \;=\; \tfrac{\pi}{2}.$$

Tarkastellaan siis väliä $]-1,1[$. Koska

$$D(\arcsin x + \arccos x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \;=\; 0 \qquad \forall x \in \,]-1,1[\,,$$

niin integraalilaskennan peruslauseen nojalla on olemassa sellainen vakio $C \in \mathbf{R}$, että

$$\arcsin x + \arccos x \;=\; C \qquad \forall x \in \,]-1,1[\,.$$

Koska

$$\arcsin 0 + \arccos 0 \;=\; 0+\tfrac{\pi}{2} \;=\; \tfrac{\pi}{2},$$

niin

$$C \;=\; \tfrac{\pi}{2}.$$

Siis

$$\arcsin x + \arccos x \;=\; \tfrac{\pi}{2} \qquad \forall x \in \,]-1,1[\,.$$

Huomautus 2.21. Funktiot $\arcsin x$ ja $\arccos x$ eivät ole derivoituvia pisteissä $x = -1$ ja $x = 1$, joten integraalilaskennan peruslausetta ei voida esimerkissä 2.44 käyttää koko välillä $[-1, 1]$. Esimerkisssä tilanne on ratkaistu tarkastelemalla arvoja välin päätepisteissä erikseen.

Funktio

$$f(x) = \arcsin x + \arccos x$$

on kuitenkin jatkuva koko välillä $[-1, 1]$. Täten toinen mahdollisuus olisi osoittaa ensin integraalilaskennan peruslauseen avulla, että $f(x) = \frac{\pi}{2}$ välillä $]-1, 1[$, ja sitten todeta funktion jatkuvuutta sekä raja-arvoja

$$\lim_{x \to -1+} f(x) = \tfrac{\pi}{2} \qquad \text{ja} \qquad \lim_{x \to 1-} f(x) = \tfrac{\pi}{2}$$

hyödyntämällä, että väite pätee myös välin päätepisteissä.

Esimerkki 2.45. Osoitetaan, että

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{kun } x > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$

Olkoon

$$f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x} \qquad (x \neq 0).$$

Tällöin f on derivoituva väleillä $]-\infty, 0[$ ja $]0, \infty[$. Lisäksi

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} \cdot (-\frac{1}{x^2}) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0 \qquad \forall x \neq 0.$$

Täten integraalilaskennan peruslauseen nojalla on olemassa sellaiset $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$, että

$$f(x) = \begin{cases} C_1, & \text{kun } x > 0, \\ C_2, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$

Koska

$$f(1) = \arctan 1 + \arctan 1 = \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\pi}{2}$$

ja

$$f(-1) = \arctan(-1) + \arctan(-1) = (-\tfrac{\pi}{4}) + (-\tfrac{\pi}{4}) = -\tfrac{\pi}{2},$$

niin

$$C_1 = \tfrac{\pi}{2} \qquad \text{ja} \qquad C_2 = -\tfrac{\pi}{2},$$

mistä esimerkin tulos seuraa.

3 Derivoituvan funktion ominaisuuksia

Tarkastellaan sitten muutamia derivaatan sovelluksia. Aluksi tutkitaan, miten derivaattaa voidaan hyödyntää funktion raja-arvon määrittämisessä.

3.1 l'Hospitalin sääntö

Cauchyn väliarvokaavaa käyttämällä voidaan todistaa *l'Hospitalin sääntö*, jonka avulla saadaan kätevästi laskettua tiettyjä raja-arvoja. Säännöstä käytetään myös nimeä *l'Hôpitalin sääntö.*

Lause 3.1 (l'Hospitalin sääntö).[1] *Oletetaan, että*

(i) $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ *ja* $\lim_{x\to a} g(x) = 0$,

(ii) $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *on olemassa.*

Tällöin myös funktiolla f/g *on raja-arvo pisteessä* $x = a$ *ja*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Todistus. Koska raja-arvo

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

on olemassa, niin on olemassa sellainen $\delta > 0$, että $f'(x)$ ja $g'(x)$ ovat olemassa puhkaistussa ympäristössä $\mathrm{U}'_\delta(a)$ sekä lisäksi $g'(x) \neq 0$ tässä ympäristössä. Määritellään nyt[2]

$$f(a) = g(a) = 0,$$

jolloin f ja g tulevat jatkuviksi pisteessä a.

Valitaan nyt $x \in \mathrm{U}'_\delta(a)$. Tällöin f ja g ovat jatkuvia välillä $[a, x]$ (tai $[x, a]$) ja derivoituvia välillä $]a, x[$ (tai $]x, a[$). Siis Cauchyn väliarvokaavan (s. 34) nojalla on

[1] Myös l'Hôpitalin sääntö.

[2] Lauseen oletusten perusteella ei tiedetä, ovatko funktiot f ja g määriteltyjä pisteessä a. Jos niitä ei ole määritelty, niin määritellään ne nyt. Jos ne on määritelty, mutta $f(a) \neq 0$ tai $g(a) \neq 0$, niin muutetaan kyseisten funktioiden määrittelyä. Tämä voidaan tehdä, sillä funktioiden arvolla pisteessä a ei ole vaikutusta etsittyyn raja-arvoon.

olemassa sellainen $\xi \in \,]a, x[$ (tai $\xi \in \,]x, a[$), että

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Jos nyt $x \to a$, myös $\xi \to a$. Siis

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad \square$$

L'Hospitalin sääntöä voidaan soveltaa myös toispuoleisiin raja-arvoihin sekä tapauksiin, joissa tarkastellaan raja-arvoa äärettömyydessä tai joissa raja-arvo on ääretön (huomautukset 3.2–3.4, todistukset jätetään harjoitustehtäväksi).

Huomautus 3.2. Lauseen 3.1 laskusääntöä voidaan soveltaa myös $\frac{\infty}{\infty}$ -muotoisille raja-arvoille (ts. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$ (tai $-\infty$)). Edelleen laskusääntöä voidaan soveltaa myös toispuoleisiin raja-arvoihin.

Huomautus 3.3. Lauseessa 3.1 voi a olla myös $\pm\infty$.

Huomautus 3.4. Lauseessa 3.1 voi raja-arvo $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ olla myös $\pm\infty$.

Esimerkki 3.1. Määritetään

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan x}.$$

Koska funktiot x ja $\tan x$ ovat derivoituvia pisteen 0 jossakin ympäristössä sekä

$$\lim_{x \to 0} x = 0 \qquad \text{ja} \qquad \lim_{x \to 0} \tan x = 0,$$

niin l'Hospitalin säännön nojalla

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan x} \overset{\text{H}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + \tan^2 x} = 1.$$

Yhtälöketju on tässä luettava ikään kuin lopusta alkuun. Koska

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + \tan^2 x} = 1$$

(eli raja-arvo on olemassa ja $= 1$), niin l'Hospitalin sääntöä voidaan soveltaa ja saadaan yllä oleva tulos.

Esimerkki 3.2. Jos asia on ilmeistä, l'Hospitalin sääntöä käytettäessä ei aina erikseen korosteta, että tarkasteltavat funktiot toteuttavat vaadittavat ehdot. Esimerkiksi voidaan kirjoittaa yksinkertaisesti

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{15}+x-2}{x^{11}-3x+2} \overset{\text{H}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 1} \frac{15x^{14}+1}{11x^{10}-3} = \frac{15+1}{11-3} = 2.$$

Vaadittavien ehtojen toteutuminen on kuitenkin aina tarkistettava. Erityisesti on syytä huomata, että sääntöä ei voi käyttää, jos kyseessä ei ole mikään yllä oleva epämääräinen muoto (ks. kuitenkin huomautus 3.5, s. 46). Esimerkiksi

$$\lim_{x\to 1} \frac{15x^{14}+1}{11x^{10}-3} \neq \lim_{x\to 1} \frac{14\cdot 15x^{13}}{10\cdot 11x^{9}} = \lim_{x\to 1} \frac{210}{110}x^4 = \frac{21}{11}.$$

Esimerkki 3.3. Olkoon $a > 1$ ja $s \in \mathbf{R}$. Osoitetaan, että

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^s} = \infty} \qquad \text{ja} \qquad \boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{x^s}{a^x} = 0.}$$

1°: Olkoon $s = 0$. Tällöin

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^s} = \lim_{x\to\infty} a^x = \infty.$$

2°: Olkoon $s < 0$. Tällöin

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^s} = \lim_{x\to\infty} x^{-s}a^x = \infty.$$

3°: Olkoon $s > 0$. Käyttämällä l'Hospitalin sääntöä saadaan (tapaus $s = 1$)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x} \overset{\text{H}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{a^x \log a}{1} = \infty.$$

Koska myös $a^{\frac{1}{s}} > 1$, niin

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^s} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\left(a^{\frac{1}{s}}\right)^s\right)^x}{x^s} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\left(a^{\frac{1}{s}}\right)^x\right)^s}{x^s} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\left(a^{\frac{1}{s}}\right)^x}{x}\right)^s = \infty.$$

Siis kohtien 1°–3° perusteella

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^s} = \infty$$

ja edelleen

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^s}{a^x} = 0.$$

Esimerkki 3.4. Esimerkin 3.3 perusteella

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)^s}{x} \;=\; \lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)^s}{e^{\log x}} \;=\; 0$$

kaikilla $s \in \mathbf{R}$, joten

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)^s}{x} \;=\; 0 \qquad \forall s \in \mathbf{R}.}$$

Esimerkki 3.5. Olkoon $s > 0$. Käyttämällä l'Hospitalin sääntöä saadaan

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^s} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{\mathrm{H}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{s x^{s-1}} \;=\; \lim_{x\to\infty} \frac{1}{s x^s} \;=\; 0.$$

Siis

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^s} \;=\; 0 \qquad \forall s > 0.}$$

Esimerkki 3.6. Osoitetaan, että

$$\boxed{\lim_{x\to 0+} x(\log x)^a \;=\; 0 \qquad \forall a \in \mathbf{Z}_+}$$

Logaritmin laskusääntöjen ja esimerkin 3.4 perusteella

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+} x(\log x)^a \;&=\; \lim_{x\to 0+} x\Big(-\log\tfrac{1}{x}\Big)^a \\
&=\; \lim_{x\to 0+} \frac{(-1)^a \Big(\log\frac{1}{x}\Big)^a}{\frac{1}{x}} \\
&=\; \lim_{z\to\infty} (-1)^a \frac{(\log z)^a}{z} \\
&=\; 0.
\end{aligned}$$

Esimerkki 3.7. Esimerkin 3.6 seurauksena havaitaan, että funktio ($a \in \mathbf{Z}_+$)

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x = 0, \\ x(\log x)^a, & \text{kun } x > 0, \end{cases}$$

on jatkuva, kun $x \geq 0$.

Esimerkki 3.8. Määritetään raja-arvo

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right).$$

Muunnetaan lauseke $\infty-\infty$ ensin sopivaan muotoon, ja sovelletaan sitten l'Hospitalin sääntöä kaksi kertaa peräkkäin. Siis

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}\\ &\overset{\mathrm{H}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}\\ &\overset{\mathrm{H}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2+x}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Esimerkki 3.9. Määritetään raja-arvo

$$\lim_{x\to 0+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}.$$

Käyttämällä suoraan l'Hospitalin sääntöä saadaan

$$\lim_{x\to 0+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} \overset{\mathrm{H}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0+}\frac{-\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}}}{1} = \lim_{x\to 0+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = ?$$

eli lauseke vain monimutkaistuu. Siirtymällä muotoa $\frac{0}{0}$ olevasta lausekkeesta muotoon $\frac{\infty}{\infty}$ saadaan

$$\lim_{x\to 0+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} \overset{\mathrm{H}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to 0+}\frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0+}\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = 0.$$

Yksinkertaisemmilla laskuilla selvitään tekemällä muuttujanvaihdos ($z=\frac{1}{x}$), jolloin

$$\lim_{x\to 0+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{z\to\infty}\frac{e^{-z}}{\frac{1}{z}} = \lim_{z\to\infty}\frac{z}{e^z} \overset{\mathrm{H}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{z\to\infty}\frac{1}{e^z} = 0.$$

Huomautus 3.5. Jos tarkasteltava lauseke ei ole suoraan l'Hospitalin säännön vaatimassa muodossa, lauseke voidaan joskus muuntaa sopivaan muotoon. Esimerkissä 3.8 tarkasteltiin jo tapausta $\infty - \infty$. Muotoa $0 \cdot \infty$ olevat lausekkeet saadaan myös helposti muotoon $\frac{0}{0}$ tai $\frac{\infty}{\infty}$. Muotoa 0^0, 1^∞ ja ∞^0 olevat lausekkeet taas voidaan muuntaa

$$0^0 = (0+)^0 = e^{\log(0+)^0} = e^{0\log(0+)} = e^{0\cdot(-\infty)},$$

$$1^\infty = e^{\log 1^\infty} = e^{\infty\log 1} = e^{\infty\cdot 0}$$

ja

$$\infty^0 = e^{\log\infty^0} = e^{0\log\infty} = e^{0\cdot\infty},$$

jotka palautuvat muotoa $\frac{0}{0}$ tai $\frac{\infty}{\infty}$ olevan raja-arvon määrittämiseen.[1]

Esimerkki 3.10. Muuunnetaan muotoa $0 \cdot (-\infty)$ oleva lauseke ensin muotoon $\frac{-\infty}{\infty}$ ja käytetään sitten (kaksi kertaa) l'Hospitalin sääntöä. Siis

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1-} \sqrt{1-x}\cdot\log\left(\log\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 1-} \sqrt{1-x}\,\log(-\log x) \\
&= \lim_{x\to 1-} \frac{\log(-\log x)}{(1-x)^{-\frac{1}{2}}} \\
&\overset{\mathrm{H}}{\underset{\frac{-\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to 1-} \frac{\left(\frac{1}{-\log x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)}{(-\frac{1}{2})\cdot(1-x)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-1)} \\
&= \lim_{x\to 1-} \frac{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\log x}}{\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}} \\
&= \lim_{x\to 1-} \frac{2}{x} \cdot \lim_{x\to 1-} \frac{(1-x)^{\frac{3}{2}}}{\log x} \\
&\overset{\mathrm{H}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} 2\cdot\lim_{x\to 1-} \frac{\frac{3}{2}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}\cdot(-1)}{\frac{1}{x}} \\
&= 2\cdot\lim_{x\to 1-} -\frac{3}{2}\,x\,(1-x)^{\frac{1}{2}} \\
&= 2\cdot 0 \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

[1] Yllä 0+ tarkoittaa raja-arvotarkastelua $f(x) \to 0+$ eli raja-arvoa 0 voidaan lähestyä vain oikealta puolelta.

Esimerkki 3.11. Määritetään raja-arvo

$$\lim_{x\to 0+} (e^x - 1)^x .$$

Raja-arvo on muotoa 0^0, mutta muunnoksella

$$\lim_{x\to 0+} (e^x - 1)^x = \lim_{x\to 0+} e^{\log(e^x-1)^x} = \lim_{x\to 0+} e^{x\log(e^x-1)}$$

se voidaan palauttaa muotoa $0\cdot(-\infty)$ (ja edelleen $\frac{-\infty}{\infty}$) olevan raja-arvon määrittämiseen. Hyödyntämällä raja-arvoa (1.5) (s. 4) saadaan

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+} x\log(e^x - 1) &= \lim_{x\to 0+} \frac{\log(e^x-1)}{\frac{1}{x}} \\
&\overset{\mathrm{H}}{\underset{\frac{-\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{e^x-1}\cdot e^x}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to 0+} -x\cdot e^x \cdot \frac{x}{e^x-1} \\
&= 0\cdot 1\cdot 1 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Siis

$$\lim_{x\to 0+} (e^x - 1)^x = \lim_{x\to 0+} e^{x\log(e^x-1)} = e^0 = 1.$$

Esimerkki 3.12. Osoitetaan, että

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a \qquad (a\in\mathbf{R}).}$$

Raja-arvo on muotoa 1^∞, mutta muunnoksella

$$\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^{\log\left(1+\frac{a}{x}\right)^x} = e^{x\log\left(1+\frac{a}{x}\right)}$$

tehtävä palautuu muotoa $\infty\cdot 0$ ja edelleen muotoa $\frac{0}{0}$ olevan raja-arvon määrittämiseen. Koska

$$\lim_{x\to\infty} x\log\left(1+\frac{a}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\log\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{\mathrm{H}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{a}{x}}\cdot\left(-\frac{a}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} a\cdot\frac{1}{1+\frac{a}{x}} = a,$$

niin

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\log\left(1+\frac{a}{x}\right)} = e^a.$$

3.2 Funktion monotonisuus

Koska funktion derivaatta ilmaisee funktion muutosnopeuden, on luonnollista, että derivaatan avulla voidaan tutkia funktion monotonisuutta.

Lause 3.6. *Oletetaan, että funktio f on jatkuva välillä I ja derivoituva välin I sisäpisteissä. Tällöin f on kasvava välillä I täsmälleen silloin, kun*

$$f'(x) \geq 0$$

välin I sisäpisteissä.

Todistus. "$\Rightarrow$": Oletetaan ensin, että f on kasvava välillä I. Olkoon x jokin välin I sisäpiste. Koska f on kasvava välillä I, niin

$$\begin{cases} f(x+h) \leq f(x), & \text{kun } h < 0 \text{ ja } x+h \in I, \\ f(x+h) \geq f(x), & \text{kun } h > 0 \text{ ja } x+h \in I. \end{cases}$$

Siis

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0, \quad \text{kun } h \neq 0 \text{ ja } x+h \in I.$$

Täten lauseen 1.7 (s. 5) perusteella (raja-arvo on olemassa, koska f on derivoituva pisteessä x)

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0.$$

"$\Leftarrow$": Oletetaan toiseksi, että $f'(x) \geq 0$ aina, kun x on välin I sisäpiste. Olkoot x_1 ja x_2 sellaisia välin I pisteitä, että $x_1 < x_2$. Koska f on jatkuva välillä I ja derivoituva välin I sisäpisteissä, niin f on jatkuva välillä $[x_1, x_2]$ ja derivoituva välillä $]x_1, x_2[$. Täten väliarvolausetta voidaan soveltaa funktioon f välillä $[x_1, x_2]$. On siis olemassa sellainen $\xi \in\,]x_1, x_2[$, että

$$f(x_2) - f(x_1) = \overbrace{f'(\xi)}^{\geq 0}\overbrace{(x_2 - x_1)}^{> 0} \geq 0.$$

Siis

$$f(x_1) \leq f(x_2),$$

joten f on kasvava välillä I. $\square$

Lause 3.7. *Oletetaan, että funktio f on jatkuva välillä I ja derivoituva välin I sisäpisteissä. Tällöin f on aidosti kasvava välillä I täsmälleen silloin, kun*

$$f'(x) \geq 0$$

välin I sisäpisteissä ja epäyhtälössä yhtäsuuruus ei ole voimassa millään välin I osavälillä (vaan korkeintaan yksittäisissä pisteissä).

Todistus. 1°: Oletetaan ensin, että funktio f on aidosti kasvava välillä I. Tällöin lauseen 3.6 nojalla

$$f'(x) \geq 0 \qquad \forall x \in I.$$

Jos nyt olisi olemassa sellainen $I_1 \subseteq I$, että

$$f'(x) = 0 \qquad \forall x \in I_1,$$

niin f olisi integraalilaskennan peruslauseen (lause 2.18, s. 38) nojalla vakio kaikilla $x \in I_1$. Siis f ei olisi aidosti kasvava, mikä on vastoin oletusta.

2°: Oletetaan toiseksi, että $f'(x) \geq 0$ aina, kun x on välin I sisäpiste, ja että yhtäsuuruus ei ole voimassa millään välin I osavälillä. Tällöin f on lauseen 3.6 nojalla kasvava välillä I.

Tehdään vastaoletus, että f ei ole aidosti kasvava. Tällöin on olemassa sellaiset pisteet $x_1, x_2 \in I$, että

$$x_1 < x_2 \qquad \text{ja} \qquad f(x_1) = f(x_2).$$

Kasvavana funktiona f on tällöin vakio välillä $[x_1, x_2]$, joten

$$f'(x) = 0 \qquad \forall x \in \,]x_1, x_2[\,,$$

mikä on vastoin oletusta. □

Lause 3.8. *Oletetaan, että funktio f on jatkuva välillä I ja derivoituva välin I sisäpisteissä. Tällöin f on vähenevä välillä I täsmälleen silloin, kun*

$$f'(x) \leq 0$$

välin I sisäpisteissä.

Todistus. Harjoitustehtävä.

Lause 3.9. *Oletetaan, että funktio f on jatkuva välillä I ja derivoituva välin I sisäpisteissä. Tällöin f on aidosti vähenevä välillä I täsmälleen silloin, kun*

$$f'(x) \leq 0$$

välin I sisäpisteissä ja epäyhtälössä yhtäsuuruus ei ole voimassa millään välin I osavälillä (vaan korkeintaan yksittäisissä pisteissä).

Todistus. Harjoitustehtävä.

Esimerkki 3.13. Osoitetaan, että funktio

$$f(x) = \tan x$$

on aidosti kasvava välillä $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Nyt f on jatkuva ja derivoituva välillä $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Koska (esimerkki 2.15, s. 17)

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} > 0 \qquad \forall x \in \,]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[,$$

niin f on lauseen 3.7 nojalla aidosti kasvava välillä $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Esimerkki 3.14. Osoitetaan, että funktio

$$f(x) = \sin x$$

on aidosti kasvava välillä $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Funktio f on nyt jatkuva ja derivoituva kaikilla $x \in \mathbf{R}$ ja

$$f'(x) = \cos x \geq 0 \qquad \forall x \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}].$$

Lisäksi yhtäsuuruus on välillä $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ voimassa vain, kun $x = -\frac{\pi}{2}$ ja $x = \frac{\pi}{2}$. Täten f on lauseen 3.7 nojalla aidosti kasvava välillä $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Esimerkki 3.15. Osoitetaan, että funktio

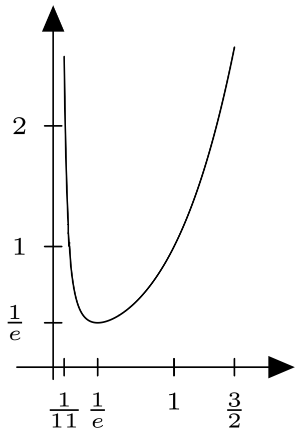
$$f(x) = x + \cos x$$

on aidosti kasvava koko joukossa $\mathbf{R}$.

Selvästi f on jatkuva ja derivoituva kaikilla $x \in \mathbf{R}$ ja

$$f'(x) = 1 - \sin x \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Edelleen $f'(x) = 0$ vain, jos $x = \frac{\pi}{2} + n\,2\pi$ $(n \in \mathbf{Z})$. Siis f on lauseen 3.7 nojalla aidosti kasvava koko joukossa $\mathbf{R}$.



Kuva 3.1: Funktion $f(x) = x^{2+\log x}$ kuvaaja välillä $[\frac{1}{11}, \frac{3}{2}]$.

Esimerkki 3.16. Tutkitaan funktion

$$f(x) \;=\; x^{2+\log x} \qquad (x > 0)$$

monotonisuutta.

Koska

$$f(x) \;=\; x^{2+\log x} \;=\; e^{\log x^{2+\log x}} \;=\; e^{(2+\log x)\log x} \;=\; e^{2\log x + \log^2 x},$$

niin f on selvästi jatkuva, kun $x > 0$. Lisäksi tällöin

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{2\log x+\log^2 x} \cdot D\Big(2\log x + \log^2 x\Big) \\ &= e^{2\log x+\log^2 x} \cdot \Big(2\cdot\frac{1}{x} \;+\; 2\log x \cdot \frac{1}{x}\Big) \\ &= \frac{2(1+\log x)}{x} \cdot x^{2+\log x}. \end{aligned}$$

Nyt $\log x = -1$, kun $x = e^{-1}$ eli $x = \frac{1}{e}$, joten

$$f'(x) = 0, \qquad \text{kun } x = \tfrac{1}{e}.$$

Lisäksi $\log x$ on aidosti kasvava ja x sekä $x^{2+\log x}$ ovat positiivisia tutkittavalla alueella, joten

$$f'(x) \;<\; 0 \qquad \forall x \in \,]0, \tfrac{1}{e}[$$

ja

$$f'(x) \;>\; 0 \qquad \forall x > \tfrac{1}{e}.$$

Täten $f(x)$ on lauseen 3.9 nojalla aidosti vähenevä välillä $]0, \frac{1}{e}]$ ja lauseen 3.7 nojalla aidosti kasvava, kun $x \geq \frac{1}{e}$.

Esimerkki 3.17. Olkoon

$$f(x) = x^n \qquad (n \in \mathbf{Z}_+).$$

Tutkimalla funktion f derivaattaa saadaan seuraavat tulokset (harjoitustehtävä).

- Jos n on pariton, niin f on aidosti kasvava koko reaalilukujen joukossa.
- Jos n on parillinen, niin f on aidosti vähenevä välillä $]-\infty, 0]$ ja aidosti kasvava välillä $[0, \infty[$.

Esimerkki 3.18. Olkoon

$$f(x) = x^n \qquad (x \neq 0, n \in \mathbf{Z}_-).$$

Tutkimalla funktion f derivaattaa saadaan seuraavat tulokset (harjoitustehtävä).

- Jos n on pariton, niin f on aidosti vähenevä väleillä $]-\infty, 0[$ ja $]0, \infty[$.
- Jos n on parillinen, niin f on aidosti kasvava välillä $]-\infty, 0[$ ja aidosti vähenevä välillä $]0, \infty[$.

Esimerkki 3.19. Olkoon $I =]0, \infty[$ ja

$$f(x) = x^a \qquad (a \in \mathbf{R}).$$

Tutkimalla funktion f derivaattaa saadaan seuraavat tulokset (harjoitustehtävä).

- Jos $a < 0$, niin f on aidosti vähenevä välillä I.
- Jos $a = 0$, niin f on sekä kasvava että vähenevä välillä I.
- Jos $a > 0$, niin f on aidosti kasvava välillä I (ja myös välillä $[0, \infty[$).

3.3 Funktion ääriarvot

Tutkitaan vielä lopuksi funktion paikallisia ääriarvokohtia ja ääriarvojen luonnetta hyödyntämällä funktion derivaattaa. Aluksi määritellään, mitä paikallisilla ääriarvoilla tarkoitetaan.

Määritelmä 3.1. Funktiolla f on pisteessä a *paikallinen maksimi*, jos on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$f(x) \leq f(a) \qquad \forall x \in \mathrm{U}_\delta(a).$$

Jos yhtäsuuruus on voimassa vain, kun $x = a$, kyseessä on *aito paikallinen maksimi.*

Määritelmä 3.2. Funktiolla f on pisteessä a *paikallinen minimi*, jos on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$f(x) \geq f(a) \qquad \forall x \in \mathrm{U}_\delta(a).$$

Jos yhtäsuuruus on voimassa vain, kun $x = a$, kyseessä on *aito paikallinen minimi.*

Esimerkki 3.20. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x = 0, \\ 0, & \text{kun } x \neq 0. \end{cases}$$

Tällöin funktiolla f on pisteessä $x = 0$ aito paikallinen maksimikohta. Myös jokainen muu reaalilukuakselin piste on paikallinen ääriarvokohta (mutta ei aito).

Esimerkki 3.21. Koska funktio

$$f(x) = x + \cos x.$$

on aidosti kasvava koko reaalilukujoukossa (ks. esimerkki 3.15, s. 50), niin funktiolla f ei ole paikallisia ääriarvoja.

Lause 3.10. *Funktiolla f on pisteessä a aito paikallinen maksimi, jos on olemassa sellainen $\delta > 0$, että f on jatkuva ympäristössä $\mathrm{U}_\delta(a)$ ja*

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in \,]a-\delta, a[\qquad \textit{ja} \qquad f'(x) < 0 \quad \forall x \in \,]a, a+\delta[\,.$$

Todistus. Oletuksen nojalla f on jatkuva välillä $]a-\delta, a+\delta[$. Koska $f'(x) > 0$ kaikilla $x \in \,]a-\delta, a[$, niin f on lauseen 3.7 (s. 49) nojalla aidosti kasvava välillä $]a-\delta, a]$. Siis

$$f(x) < f(a) \qquad \forall x \in \,]a-\delta, a[\,.$$

Toisaalta $f'(x) < 0$ kaikilla $x \in \,]a, a+\delta[$, joten f on lauseen 3.9 (s. 50) nojalla aidosti vähenevä välillä $[a, a+\delta[$. Siis

$$f(x) < f(a) \qquad \forall x \in \,]a, a+\delta[\,.$$

Täten

$$f(x) < f(a) \qquad \forall x \in \mathrm{U}'_\delta(a),$$

joten funktiolla f on pisteessä a aito paikallinen maksimi. □

Lause 3.11. *Funktiolla f on pisteessä a aito paikallinen minimi, jos on olemassa sellainen $\delta > 0$, että f on jatkuva ympäristössä $\mathrm{U}_\delta(a)$ ja*

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in \,]a-\delta, a[\qquad \textit{ja} \qquad f'(x) > 0 \quad \forall x \in \,]a, a+\delta[\,.$$

Todistus. Harjoitustehtävä.

Huomautus. Lauseet 3.10 ja 3.11 eivät ole kääntäen voimassa.

Huomautus. Lauseissa 3.10 ja 3.11 ei vaadita, että derivaatta $f'(a)$ olisi olemassa. Sen sijaan jatkuvuus pisteessä a on oleellinen vaatimus.

Huomautus. Aiemmin on osoitettu (seuraus 2.9, s. 30), että jos a on paikallinen ääriarvokohta ja $f'(a)$ on olemassa, niin $f'(a) = 0$. Siis paikallinen ääriarvo saavutetaan joko derivaatan nollakohdassa tai pisteessä, jossa funktio ei ole derivoituva.

Huomautus 3.12. Jos funktio f on jatkuva pisteessä a ja f' on samanmerkkinen pisteen a kummallakin puolella, niin a ei ole funktion f paikallinen ääriarvokohta (harjoitustehtävä).

Esimerkki 3.22. Määritetään funktion

$$f(x) = 2 \arctan x - \log(1 + x^2)$$

paikalliset ääriarvokohdat ja mahdollisten ääriarvojen laatu.

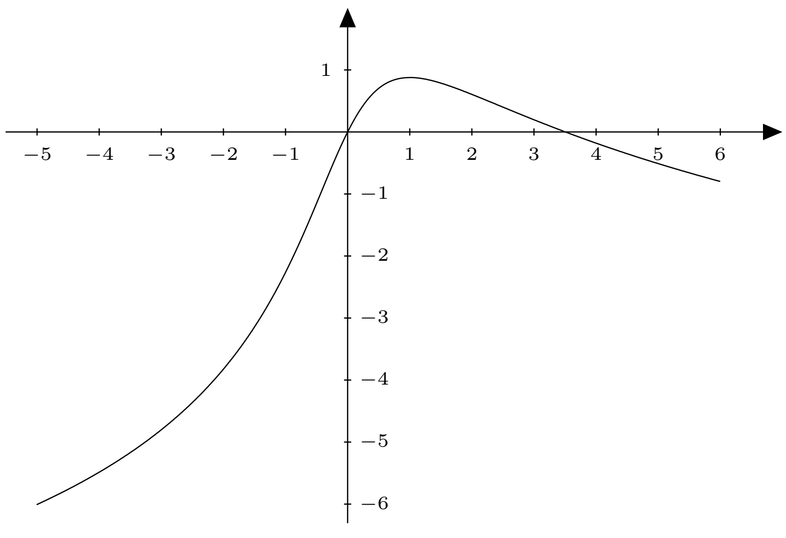
Koska f on jatkuva ja derivoituva kaikilla $x \in \mathbf{R}$, niin mahdolliset paikalliset ääriarvokohdat ovat derivaatan nollakohtia. Nyt

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{1 + x^2} \cdot 2x = \frac{2 - 2x}{1 + x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

ja

$$\begin{cases} f'(x) > 0, & \text{kun } x < 1, \\ f'(x) < 0, & \text{kun } x > 1. \end{cases}$$

Siis funktiolla f on pisteessä $x = 1$ aito paikallinen maksimikohta. Funktion kuvaaja välillä $[-5, 6]$ on esitetty kuvassa 3.2.



Kuva 3.2: Funktion $f(x) = 2 \arctan x - \log(1 + x^2)$ kuvaaja välillä $[-5, 6]$.

Esimerkki 3.23. Määritetään funktion

$$f(x) = x^{2+\log x} \qquad (x > 0)$$

paikalliset ääriarvokohdat ja mahdollisten ääriarvojen laatu.

Nyt f on jatkuva ja derivoituva, kun $x > 0$. Täten mahdolliset paikalliset ääriarvokohdat ovat derivaatan nollakohtia. Esimerkissä 3.16 (s. 51) osoitettiin, että

$$f'(x) = \frac{2(1+\log x)}{x} \cdot x^{2+\log x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \tfrac{1}{e}$$

ja

$$\begin{cases} f'(x) < 0, & \text{kun } 0 < x < \frac{1}{e}, \\ f'(x) > 0, & \text{kun } x > \frac{1}{e}. \end{cases}$$

Täten funktiolla f on pisteessä $x = \frac{1}{e}$ aito paikallinen minimikohta, jossa funktion minimiarvo on (vrt. kuva 3.1, s. 51)

$$f(\tfrac{1}{e}) = (\tfrac{1}{e})^{2+\log\frac{1}{e}} = (\tfrac{1}{e})^{2+(-1)} = \tfrac{1}{e}.$$

Esimerkki 3.24. Osoitetaan, että funktiolla

$$f(x) = x^3$$

ei ole paikallisia ääriarvokohtia.

Koska f on jatkuva ja derivoituva kaikilla $x \in \mathbf{R}$, niin funktion f mahdolliset paikalliset ääriarvokohdat ovat derivaatan nollakohtia. Nyt

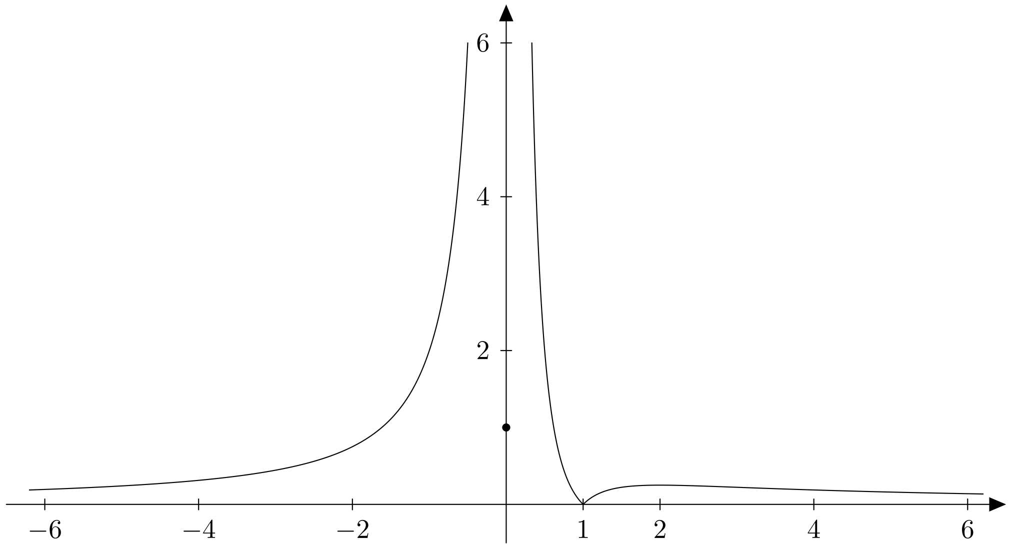
$$f'(x) = 3x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

Kuitenkin $f'(x) > 0$ kaikilla $x \neq 0$, joten f' ei vaihda merkkiään pisteessä $x = 0$. Siis piste $x = 0$ ei ole funktion f ääriarvokohta, mistä tulos seuraa.

Esimerkki 3.25. Etsitään funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-1|}{x^2}, & \text{kun } x \neq 0, \\ 1, & \text{kun } x = 0, \end{cases}$$

paikalliset ääriarvokohdat, ja määritetään mahdollisten ääriarvojen laatu.



Kuva 3.3: Esimerkin 3.25 funktion kuvaaja välillä $[-6, 6]$.

1°: Olkoon $x > 1$. Tällöin

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2},$$

joten f on jatkuva sekä derivoituva ja

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x(x-1)}{x^4} = \frac{x^2 - 2x^2 + 2x}{x^4} = \frac{2x - x^2}{x^4} = \frac{2-x}{x^3}.$$

Siis

$$\begin{cases} f'(x) > 0, & \text{kun } 1 < x < 2, \\ f'(x) = 0, & \text{kun } x = 2, \\ f'(x) < 0, & \text{kun } x > 2, \end{cases}$$

joten funktiolla f on aito paikallinen maksimikohta pisteessä $x = 2$ (maksimiarvo $f(2) = \frac{1}{4}$).

2°: Olkoon $x = 1$. Koska $f(1) = 0$ ja $f(x) > 0$ kaikilla $x \neq 1$, niin piste $x = 1$ on funktion f aito paikallinen minimikohta.

3°: Olkoon $x < 1$ ja $x \neq 0$. Tällöin

$$f(x) = \frac{1-x}{x^2},$$

joten f on jatkuva sekä derivoituva ja

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x(1-x)}{x^4} = \frac{-x^2 - 2x + 2x^2}{x^4} = \frac{x^2 - 2x}{x^4} = \frac{x-2}{x^3}.$$

Koska $f'(x) \neq 0$ kaikilla $x < 1$ $(x \neq 0)$, niin funktiolla f ei ole paikallisia ääriarvokohtia, kun $x < 1$ ja $x \neq 0$.

4°: Olkoon $x = 0$. Koska

$$\lim_{x\to 0} f(x) \ = \ \lim_{x\to 0} \frac{|x-1|}{x^2} \ = \ \infty,$$

niin on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$f(x) \ > \ 1 \ = \ f(0) \qquad \forall x \in \mathrm{U}'_\delta(0).$$

Siis piste $x = 0$ on funktion f aito paikallinen minimikohta.

Kohdista 1° – 4° seuraa, että funktiolla f on aito paikallinen minimikohta pisteissä $x = 0$ ja $x = 1$ sekä aito paikallinen maksimikohta pisteessä $x = 2$.

Lause 3.13. *Oletetaan, että funktio f on kahdesti derivoituva pisteessä a ja $f'(a) = 0$. Tällöin*

(i) *jos $f''(a) < 0$, niin a on funktion f aito paikallinen maksimikohta,*

(ii) *jos $f''(a) > 0$, niin a on funktion f aito paikallinen minimikohta.*

Todistus. Todistetaan kohta (i), ja jätetään kohdan (ii) todistus harjoitustehtäväksi. Jos $f''(a) < 0$, niin lauseen 2.8 (s. 30) nojalla on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$f'(x) \ > \ f'(a) \ = \ 0 \qquad \forall x \in \,]a-\delta, a[$$

ja

$$f'(x) \ < \ f'(a) \ = \ 0 \qquad \forall x \in \,]a, a+\delta[\,.$$

Derivoituva funktiona f on jatkuva ympäristössä $\mathrm{U}_\delta(a)$, joten lauseen 3.10 nojalla funktiolla f on aito paikallinen maksimikohta pisteessä a. □

Esimerkki 3.26. Osoitetaan, että piste $x = 0$ on funktion

$$f(x) \ = \ e^x + \sin x - 2x$$

aito paikallinen minimikohta.

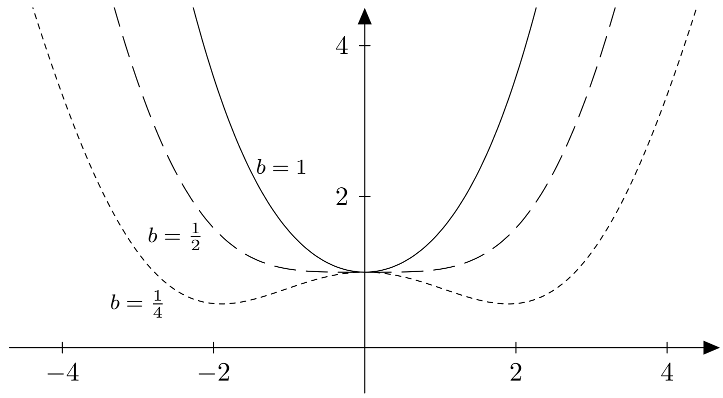
Nyt

$$f'(x) \ = \ e^x + \cos x - 2 \qquad \text{ja} \qquad f''(x) \ = \ e^x - \sin x.$$

Koska

$$f'(0) \ = \ 1 + 1 - 2 \ = \ 0 \qquad \text{ja} \qquad f''(0) \ = \ 1 - 0 \ = \ 1 \ > \ 0,$$

niin piste $x = 0$ on funktion f aito paikallinen minimikohta.



Kuva 3.4: Funktion $bx^2 + \cos x$ kuvaaja, kun $b = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$ ja $b = 1$.

Esimerkki 3.27. Tutkitaan, onko funktiolla

$$f(x) \;=\; bx^2 + \cos x \quad (b \in \mathbf{R})$$

paikallista ääriarvokohtaa pisteessä $x = 0$, ja määritetään mahdollisen ääriarvon laatu.

Nyt

$$f'(x) \;=\; 2bx - \sin x \qquad \text{ja} \qquad f''(x) \;=\; 2b - \cos x.$$

Siis $f'(0) = 0$ kaikilla $b \in \mathbf{R}$. Koska $f''(0) = 2b - 1$, niin

$$f''(0) \;>\; 0, \;\text{ kun } b > \tfrac{1}{2}, \qquad \text{ja} \qquad f''(0) \;<\; 0, \;\text{ kun } b < \tfrac{1}{2}.$$

Täten piste $x = 0$ on funktion f aito paikallinen minimikohta, kun $b > \frac{1}{2}$, ja aito paikallinen maksimikohta, kun $b < \frac{1}{2}$.

Olkoon sitten $b = \frac{1}{2}$. Tällöin $f''(0) = 0$, joten lausetta 3.13 ei voida hyödyntää. Koska

$$f''(x) \;=\; 2 \cdot \tfrac{1}{2} - \cos x \;=\; 1 - \cos x \;>\; 0 \qquad \forall x \in \mathrm{U}'_{\frac{\pi}{2}}(0),$$

niin f' on aidosti kasvava pisteen $x = 0$ ympäristössä. Siis

$$\begin{cases} f'(x) \;<\; 0, & \text{kun } -\tfrac{\pi}{2} < x < 0, \\ f'(x) \;=\; 0, & \text{kun } x = 0, \\ f'(x) \;>\; 0, & \text{kun } 0 < x < \tfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

joten piste $x = 0$ on funktion f aito paikallinen minimikohta (kun $b = \frac{1}{2}$).

Huomautus 3.14. Jos funktiolla f on välillä I suurin (pienin) arvo, niin se saavutetaan joko

(i) välin sisäpisteessä paikallisessa ääriarvokohdassa, tai

(ii) väliin mahdollisesti kuuluvassa päätepisteessä.

Huomautus 3.15. Jos funktio f on jatkuva ja I on suljettu väli, niin suurin (pienin) arvo saavutetaan aina. Muulloin saavuttaminen on epävarmaa.

Esimerkki 3.28. Olkoon $a > 1$. Osoitetaan, että

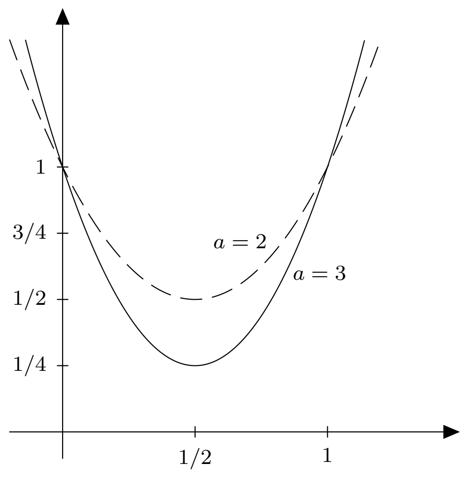
$$2^{1-a} \;\leq\; x^a + (1-x)^a \;\leq\; 1 \qquad \forall x \in [0,1].$$

Olkoon

$$f(x) \;=\; x^a + (1-x)^a.$$

Tällöin f on jatkuva sekä derivoituva välillä $[0,1]$ ja

$$f'(x) \;=\; ax^{a-1} + a(1-x)^{a-1}(-1) \;=\; a\Big(x^{a-1} - (1-x)^{a-1}\Big)\,.$$



Kuva 3.5: Funktion $x^a + (1-x)^a$ kuvaaja välillä $[0,1]$, kun $a = 2$ (katkoviiva) ja $a = 3$ (yhtenäinen viiva).

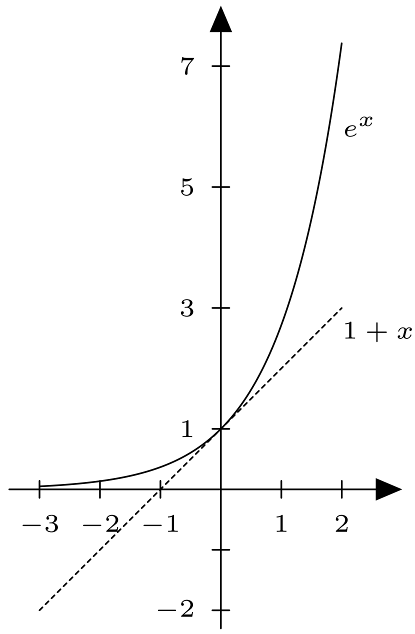
Koska yleinen potenssifunktio $(a-1>0)$ on välillä $[0,1]$ aidosti kasvava, niin

$$\begin{aligned} f'(x)=0 \;&\Leftrightarrow\; x^{a-1}-(1-x)^{a-1} \;=\; 0 \\ &\Leftrightarrow\; x^{a-1}=(1-x)^{a-1} \\ &\Leftrightarrow\; x=1-x \\ &\Leftrightarrow\; x=\tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Nyt

$$f(0) \;=\; f(1)=1 \qquad \text{ja} \qquad f(\tfrac{1}{2}) \;=\; \left(\tfrac{1}{2}\right)^a+\left(\tfrac{1}{2}\right)^a \;=\; \tfrac{2}{2^a} \;=\; 2^{1-a}.$$

Lisäksi $2^{1-a}<1$, kun $a>1$. Siis välillä $[0,1]$ funktion f suurin arvo on 1 ja pienin arvo on 2^{1-a}, mistä väite seuraa.



Kuva 3.6: Funktioiden e^x ja $1+x$ kuvaajat välillä $[-3,2]$.

Esimerkki 3.29. Osoitetaan, että

$$\boxed{e^x \;\geq\; 1+x \qquad \forall x\in\mathbf{R}}$$

ja $e^x=1+x$ täsmälleen silloin, kun $x=0$.

Tarkastellaan apufunktiota

$$g(x) \;=\; e^x-1-x,$$

jolloin

$$g'(x) \;=\; e^x - 1$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Koska $e^0 = 1$, niin $g'(0) = 0$. Lisäksi e^x on aidosti kasvava kaikilla $x \in \mathbf{R}$, joten

$$g'(x) < 0 \qquad \forall x < 0 \qquad \text{ja} \qquad g'(x) > 0 \qquad \forall x > 0$$

eli g on aidosti vähenevä, kun $x \leq 0$ (lause 3.9, s. 50), ja aidosti kasvava, kun $x \geq 0$ (lause 3.7, s. 49). Siis funktion g pienin arvo $g(0) = 0$ saavutetaan pisteessä $x = 0$, mistä väite seuraa.

Esimerkki 3.30. Osoitetaan, että

$$\boxed{\log x \;\leq\; x - 1 \qquad \forall x > 0}$$

ja $\log x = x - 1$ täsmälleen silloin, kun $x = 1$.

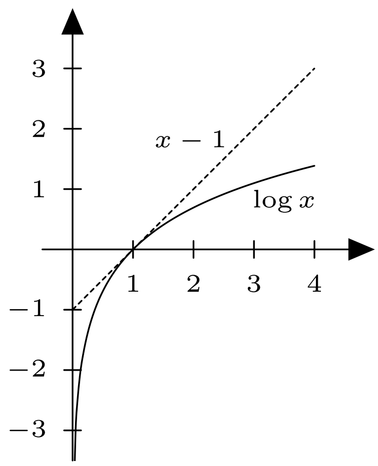
Tulos on esimerkin 3.29 suora seuraus, sillä

$$x \;=\; e^{\log x} \;\geq 1 \;+ \log x \qquad \forall x > 0$$

ja

$$x \;=\; e^{\log x} \;=\; 1 + \log x$$

täsmälleen silloin, kun $\log x = 0$ eli $x = 1$.



Kuva 3.7: Funktioiden $\log x$ ja $x - 1$ kuvaajat välillä $]0, 4]$.

4 Pinta-alat ja porrasfunktiot

4.1 Ala- ja yläsumma

Tarkastellaan aluksi seuraavaa yksinkertaista tapaa arvioida jonkin ylhäältä rajoitetun ei-negatiivisen funktion f kuvaajan ja x-akselin välistä pinta-alaa A jollakin välillä $[a, b]$.

1. Jaetaan väli $[a, b]$ osaväleihin (n kpl).
2. Muodostetaan kullekin osavälille kaksi suorakulmiota siten, että toisen pinta-ala pienempi ja toisen suurempi kuin funktion f kuvaajan ja x-akselin välinen pinta-ala kyseisellä osavälillä.
3. Lasketaan yhteen pinta-alat toisaalta niistä suorakulmioista, joiden pinta-ala on pienempi kuin funktion f kuvaajan ja x-akselin välinen pinta-ala, ja toisaalta niistä suorakulmioista, joiden pinta-ala on suurempi kuin funktion f kuvaajan ja x-akselin välinen pinta-ala.

Tällöin haluttu pinta-ala on yhteenlaskujen tuloksena saatujen arvojen välissä. Mahdollinen virhe riippuu siitä, paljonko suorakulmioiden pinta-alat eroavat etsitystä pinta-alasta kullakin osavälillä.

Yksinkertainen tapa muodostaa halutut suorakulmiot on hyödyntää kullakin osavälillä funktion pienintä ja suurinta arvoa (tai infimumia ja supremumia, jos pienintä tai suurinta arvoa ei ole olemassa). Tarkastellaan seuraavaksi asiaa vähän täsmällisemmin.

Määritellään aluksi, mitä suljetun välin jaolla tarkoitetaan.

Määritelmä 4.1. Välin $[a, b]$ (äärellinen) *jako* on joukko $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, missä

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Jakoa voidaan merkitä myös P_n tai $P_n[a, b]$.

Huomautus. Koska jatkossa ei tarkastella äärettömiä jakoja, niin puhuttaessa välin jaosta tarkoitetaan aina välin äärellistä jakoa.

Huomautus. Jaon jakopisteet ovat aina suuruusjärjestyksessä. Lisäksi kullakin jakovälillä on nollaa suurempi pituus.

Määritelmä 4.2. Olkoon funktio f rajoitettu välillä $[a, b]$, ja olkoon lisäksi $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ jokin välin $[a, b]$ jako. Merkitään edelleen

$$m_j \;=\; \inf\Big\{f(x) \;\Big|\; x \in [x_{j-1}, x_j]\Big\} \;=\; \inf\Big\{f(x) \;\Big|\; x_{j-1} \le x \le x_j\Big\}$$

ja

$$M_j \;=\; \sup\Big\{f(x) \;\Big|\; x \in [x_{j-1}, x_j]\Big\} \;=\; \sup\Big\{f(x) \;\Big|\; x_{j-1} \le x \le x_j\Big\},$$

kun $j = 1, 2, \ldots, n$. Tällöin summaa

$$L_P(f) \;=\; \sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1})$$

sanotaan jakoa P vastaavaksi *alasummaksi* ja summaa

$$U_P(f) \;=\; \sum_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1})$$

sanotaan jakoa P vastaavaksi *yläsummaksi.*

Huomautus. Alussa tarkastellulle pinta-alalle A pätee

$$L_P(f) \;\le\; A \;\le\; U_P(f).$$

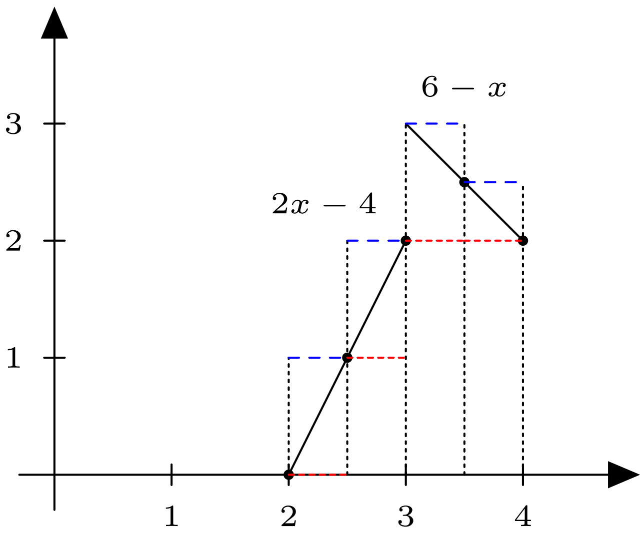
Esimerkki 4.1. Arvioidaan funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 4, & \text{kun } x \in [2, 3], \\ 6 - x, & \text{kun } x \in\,]3, 4], \end{cases}$$

kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-alaa A välillä $[2, 4]$ ylä- ja alasummia käyttäen, kun välin jako on tasavälinen ja osavälien lukumäärä $n = 4$.

Koska jako on tasavälinen ja osavälejä on 4, tarkasteltava jako on välin $[2, 4]$ jako $P = \{2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4\}$. Nyt

$$\begin{aligned} m_1 \;&=\; \inf\Big\{f(x) \mid x \in [2, \tfrac{5}{2}]\Big\} \;=\; 0, \\ m_2 \;&=\; \inf\Big\{f(x) \mid x \in [\tfrac{5}{2}, 3]\Big\} \;=\; 1, \\ m_3 \;&=\; \inf\Big\{f(x) \mid x \in [3, \tfrac{7}{2}]\Big\} \;=\; 2, \\ m_4 \;&=\; \inf\Big\{f(x) \mid x \in [\tfrac{7}{2}, 4]\Big\} \;=\; 2 \end{aligned}$$



Kuva 4.1: Esimerkin 4.1 funktion f kuvaaja välillä $[2, 4]$ sekä jakoa $P = \{2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4\}$ vastaavat funktion f ala- ja yläsummat.

ja

$$\begin{aligned} M_1 &= \sup\Big\{f(x) \mid x \in [2, \tfrac{5}{2}]\Big\} = 1, \\ M_2 &= \sup\Big\{f(x) \mid x \in [\tfrac{5}{2}, 3]\Big\} = 2, \\ M_3 &= \sup\Big\{f(x) \mid x \in [3, \tfrac{7}{2}]\Big\} = 3, \\ M_4 &= \sup\Big\{f(x) \mid x \in [\tfrac{7}{2}, 4]\Big\} = \tfrac{5}{2}. \end{aligned}$$

Koska jaon P jokaisen osavälin pituus on $\frac{1}{2}$, saadaan

$$L_P(f) = \sum_{j=1}^{4} m_j \cdot \tfrac{1}{2} = (0 + 1 + 2 + 2) \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{2}$$

ja

$$U_P(f) = \sum_{j=1}^{4} M_j \cdot \tfrac{1}{2} = (1 + 2 + 3 + \tfrac{5}{2}) \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{17}{4}.$$

Siis $\frac{5}{2} \leq A \leq \frac{17}{4}$.

Tuntuu luonnolliselta ajatella, että kun jakoa tihennetään, niin ainakin riittävän siististi käyttäytyvillä funktioilla $L_P(f)$ ja $U_P(f)$ lähestyvät toisiaan ja samalla myös pinta-alaa A. Tämä havainto toimii usein integraalin määrittelyn lähtökohtana.

Pelkkä intuitioon pohjautuva havainto ei kuitenkaan riitä integraalin määritelmäksi. Integraalin määrittely voidaan suorittaa täsmällisesti esimerkiksi tutkimalla alasumman supremumia ja yläsumman infimumia. Menettely onkin varsin yleisesti käytetty. Jatkossa kyseistä tekniikkaa ei kuitenkaan käytetä, vaan integraali määritellään täsmällisesti porrasfunktioiden (ks. luku 4.2) avulla.

Huomautus 4.1. Jos määritelmässä 4.2 valitaan infimumin tai supremumin sijasta mikä tahansa välin $[x_{j-1}, x_j]$ piste ξ_j, summaa

$$S_P(f, \xi) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$$

sanotaan jakoa P vastaavaksi *Riemann-summaksi* tai *Riemannin summaksi*.

Riemannin summaan palataan myöhemmin luvussa 5.7. Myös Riemannin summa voidaan ottaa integraalin täsmällisen määrittelyn perustaksi.

4.2 Porrasfunktio

Edellisen luvun lopussa todettiin, että integraalin täsmällisessä määrittelyssä hyödynnetään nyt porrasfunktioita. Määritellään seuraavaksi, mitä porrasfunktiolla tarkoitetaan.

Määritelmä 4.3. Funktio $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ on *porrasfunktio* välillä $[a,b]$ (tai välin $[a,b]$ porrasfunktio), jos on olemassa sellainen välin $[a,b]$ jako $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ ja sellaiset luvut $a_j \in \mathbf{R}$ ($j = 1, 2, \ldots, n$), että

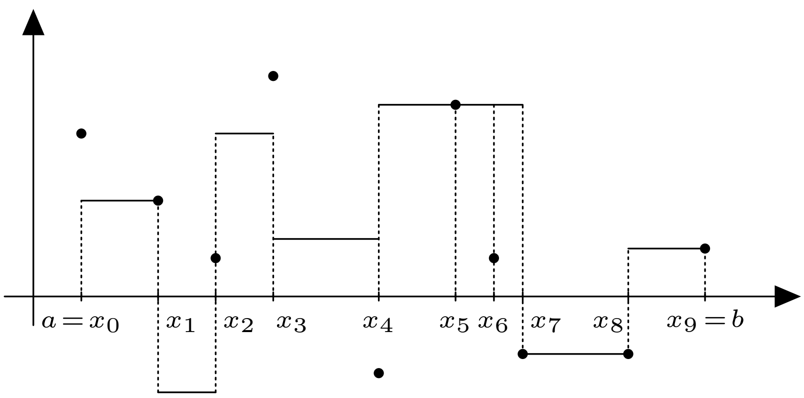
$$f(x) = a_j \qquad \forall x \in \left]x_{j-1}, x_j\right[.$$

Huomautus. Porrasfunktion välijaon voi tehdä monella tapaa.

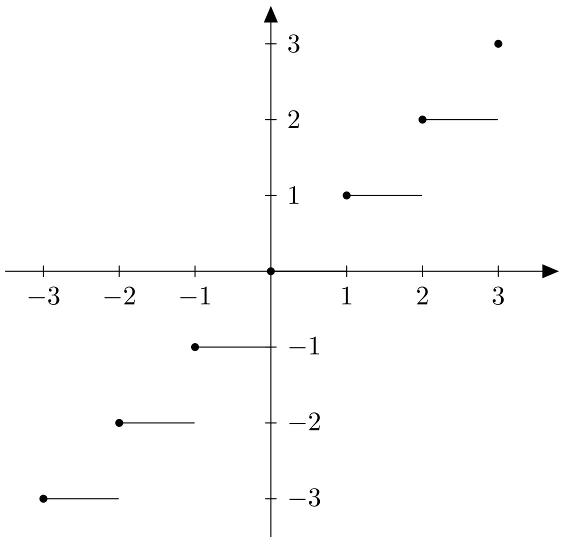
Huomautus. Porrasfunktion arvoille välijaon jakopisteissä ei aseteta mitään ehtoa (toki funktio on määritelty koko välillä, joten sillä on jakopisteissäkin joku arvo).

Välin $[a,b]$ porrasfunktio muodostuu välin $[a,b]$ avoimilla osaväleillä määriteltyistä vakiofunktioista. Lisäksi porrasfunktiolla on joku arvo välin jakopisteissä. Porrasfunktion *porraspisteitä* ovat funktion epäjatkuvuuskohdat välillä $[a,b]$ sekä välin $[a,b]$ päätepisteet. Porrasfunktion vakioarvo voi vaihtua vain porraspisteessä.

Määritelmässä 4.3 esiintyvän jaon P pitää sisältää kaikki funktion porraspisteet. Lisäksi jako P voi sisältää muitakin pisteitä (eli porrasfunktio voi saada saman arvon usealla jakovälillä ja vielä jakopisteissäkin).



Kuva 4.2: Välin $[a,b]$ porrasfunktion arvot ja porrasfunktion välijako $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_9 = b\}$. Funktion porraspisteet ovat jaon P pisteet lukuun ottamatta pistettä x_5.



Kuva 4.3: Lattiafunktion $f(x) = \lfloor x \rfloor$ kuvaaja välillä $[-3, 3]$. Funktion porraspisteet välillä $[-3, 3]$ ovat $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ ja 3.

Esimerkki 4.2. Funktio $f\colon [0, 8] \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{kun } 0 \leq x < 1, \\ 4, & \text{kun } 1 \leq x \leq 4, \\ 3, & \text{kun } 4 < x < 6, \\ 0, & \text{kun } x = 6, \\ 2, & \text{kun } 6 < x \leq 8, \end{cases}$$

on välin $[0, 8]$ porrasfunktio. Funktion porraspisteet ovat $0, 1, 4, 6$ ja 8. Funktion välijaoksi kelpaa mikä tahansa välin $[0, 8]$ jako, joka sisältää funktion porraspisteet.

Esimerkki 4.3. Lattiafunktio $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{Z}$,

$$f(x) = \lfloor x \rfloor$$

on porrasfunktio millä tahansa suljetulla reaalilukuvälillä $[a, b]$. Funktion porraspisteet ovat välin $[a, b]$ päätepisteet sekä välillä $]a, b[$ sijaitsevat kokonaislukupisteet (ks. kuva 4.3). Funktion välijaoksi kelpaa mikä tahansa välin $[a, b]$ jako, joka sisältää funktion porraspisteet.

Esimerkki 4.4. Tutkimalla funktion arvoja voidaan osoittaa, että funktio

$$f(x) = \lceil 2x \rceil - 1$$

on porrasfunktio välillä $[1, 3]$ (harjoitustehtävä).

Huomautus 4.2. Jos f ja g ovat välin $[a, b]$ porrasfunktioita ja $\lambda \in \mathbf{R}$, myös λf, $f + g$ ja fg ovat välin $[a, b]$ porrasfunktioita.

Todistus. Osoitetaan, että λf on välin $[a, b]$ porrasfunktio. Muiden tapausten todistus jätetään harjoitustehtäväksi.

Olkoon siis f välin $[a, b]$ porrasfunktio ja $\lambda \in \mathbf{R}$. Koska f on välin $[a, b]$ porrasfunktio, on olemassa sellainen välin $[a, b]$ jako $\{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ ja sellaiset $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$, että

$$f(x) = a_j \qquad \forall x \in \,]x_{j-1}, x_j[\,,$$

kun $j = 1, 2, \ldots, n$. Täten

$$(\lambda f)(x) \;=\; \lambda \cdot a_j \qquad \forall x \in \,]x_{j-1}, x_j[\,,$$

kun $j = 1, 2, \ldots, n$. Siis λf on välin $[a, b]$ porrasfunktio. □

Huomautus 4.3. Olkoon $c \in \,]a, b[$ jokin välin $[a, b]$ sisäpiste. Tällöin f on porrasfunktio välillä $[a, b]$ täsmälleen silloin, kun funktion f rajoittumat väleille $[a, c]$ ja $[c, b]$ ovat porrasfunktioita kyseisillä väleillä (harjoitustehtävä).

Esitetään luvun 4.2 lopuksi vielä aputulos, jota tarvitaan myöhemmin. Aputulos tarkoittaa, että jos rajoitettua funktiota f arvioidaan porrasfunktioiden avulla, merkitystä on vain porrasfunktioilla, joiden arvot ovat riittävän lähellä funktion f arvoja.

Lause 4.4. *Olkoon $M > 0$ ja f sellainen funktio, että $0 \leq f \leq M$ välillä $[a, b]$. Jos g ja h ovat porrasfunktioita ja $g \leq f \leq h$ välillä $[a, b]$, niin on olemassa sellaiset välin $[a, b]$ porrasfunktiot g' ja h', että*

$$0 \;\leq\; g' \;\leq\; f \;\leq\; h' \;\leq\; M$$

ja

$$h' - g' \;\leq\; h - g.$$

Todistus. Harjoitustehtävä.

Huomautus. Funktioita vertailtaessa (ja muissakin yhteyksissä) jätetään usein funktion argumentti kirjoittamatta. Näin on menetelty myös lauseessa 4.4, missä esimerkiksi

$$g(x) \ \leq \ f(x) \ \leq \ h(x) \qquad \forall x \in [a, b]$$

on ilmaistu lyhyemmin toteamalla, että $g \leq f \leq h$ välillä $[a, b]$. Jos ei ole sekaannuksen vaaraa, näin voidaan menetellä. Tarvittaessa argumentti on tietysti kirjoitettava näkyviin.

4.3 Porrasfunktion integraali

Aloitetaan integraalin täsmällinen määrittely tutkimalla porrasfunktion integraalia.

Määritelmä 4.4 (Porrasfunktion integraali). Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ porrasfunktio ja $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ sellainen välin $[a,b]$ jako, että

$$f(x) = a_j \qquad \forall x \in \,]x_{j-1}, x_j[\,,$$

kun $j = 1, 2, \ldots, n$. Olkoon lisäksi

$$\ell(I_j) \;=\; x_j - x_{j-1}$$

jaon P osavälin $I_j = \,]x_{j-1}, x_j[$ pituus ($j = 1, 2, \ldots, n$). Tällöin porrasfunktion f *integraali* yli välin $[a,b]$ on

$$\int_a^b f \;=\; \int_a^b f(x)\,dx \;=\; \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \ell(I_j).$$

Huomautus. Porrasfunktion integraalin merkinnässä dx tarkoittaa, että integroitavan porrasfunktion integraalia lasketaan muuttajan x suhteen.

Huomautus 4.5. Porrasfunktion integraali ei riipu valitusta välijaosta P (harjoitustehtävä).

Huomautus 4.6. Porrasfunktion integraali ei riipu millään tavalla funktion arvosta välijaon jakopisteissä.

Huomautus. Porrasfunktion integraali on reaaliluku.

Esimerkki 4.5. Vakiofunktio

$$f(x) = c \qquad (c \in \mathbf{R})$$

on porrasfunktio millä tahansa välillä $[a, b]$, sillä tarvittavaksi jaoksi voidaan valita $P = \{a, b\}$ (eli vain yksi jakoväli). Tällöin

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \int_a^b c\,dx \;=\; c \cdot (b - a).$$

Esimerkki 4.6. Määritetään lattiafunktion (ks. esimerkki 4.3) $f\colon\ [-1, 3] \to \mathbf{Z}$,

$$f(x) = \lfloor x \rfloor$$

porrasintegraali yli välin $[-1, 3]$.

Tarkastellaan välin $[-1, 3]$ jakoa $P = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$. Tällöin kunkin osavälin pituus on yksi, joten

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3} f \;&=\; (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ &=\; -1 + 0 + 1 + 2 \\ &=\; 2.\end{aligned}$$

Esimerkki 4.7. Olkoon $n \in \mathbf{Z}_+$ ja P_n välin $[0, 1]$ jako, jonka jakopisteet ovat

$$P_n = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \;\middle|\; p = 0, 1, \ldots, n,\ q = 1, 2, \ldots, n,\ p \leq q \right\}.$$

Määritetään porrasfunktion

$$h_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in P_n, \\ \dfrac{1}{n}, & \text{kun } x \in [0, 1] \setminus P_n, \end{cases}$$

porrasintegraali yli välin $[0, 1]$.

Olkoon k jaon P_n jakovälien lukumäärä, ja olkoot $\ell(I_1), \ell(I_2), \ldots, \ell(I_k)$ jaon P_n jakovälien pituudet. Tällöin

$$\int_0^1 h_n(x)\,dx \;=\; \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n} \cdot \ell(I_j) \;=\; \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} \ell(I_j) \;=\; \frac{1}{n} \cdot 1 \;=\; \frac{1}{n}.$$

Esimerkki 4.8. Olkoon
$$f(x) = x^3.$$
Määritetään sellainen porrasfunktio h, että $f \leq h$ välillä $[0,1]$ ja
$$\int_0^1 h \;<\; \frac{1}{2}.$$

Tarkastellaan aluksi tapauksia, joissa välin $[0,1]$ jaon osavälien lukumäärä on pieni. Jos $P = \{0 = x_0, x_1, \ldots, x_n = 1\}$ on välin $[0,1]$ jako, niin asetetaan $h(0) = 0$ ja
$$h(x) = x_j^3 \qquad \forall x \in \,]x_{j-1}, x_j]\,,$$
kun $j = 1, 2, \ldots, n$. Koska f on kasvava välillä $[0,1]$, niin tällöin h on sellainen välin $[0,1]$ porrasfunktio, että $f \leq h$ välillä $[0,1]$.

Kun $P = \{0,1\}$ (eli vain yksi jakoväli), niin
$$\int_0^1 h \;=\; 1 \cdot 1 \;=\; 1 \;>\; \frac{1}{2}.$$
Siis jakoa P vastaava porrasfunktio h ei kelpaa.

Kun $P = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ (eli tasavälinen jako, jossa on kaksi jakoväliä), niin
$$\int_0^1 h \;=\; \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \;+\; 1 \cdot \frac{1}{2} \;=\; \frac{9}{16} \;>\; \frac{1}{2}.$$
Siis jakoa P vastaava porrasfunktio h ei kelpaa.

Kun $P = \{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$ (eli kolme jakoväliä), niin
$$\int_0^1 h \;=\; \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \;+\; \frac{27}{64} \cdot \frac{1}{4} \;+\; 1 \cdot \frac{1}{4} \;=\; \frac{16 + 27 + 64}{256} \;=\; \frac{107}{256} \;<\; \frac{1}{2}.$$
Täten jakoa P vastaava porrasfunktio h kelpaa. Jos siis
$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x = 0, \\ \frac{1}{8}, & \text{kun } x \in \,]0, \frac{1}{2}], \\ \frac{27}{64}, & \text{kun } x \in \,]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], \\ 1, & \text{kun } x \in \,]\frac{3}{4}, 1], \end{cases}$$
niin h on sellainen välin $[0,1]$ porrasfunktio, että $f \leq h$ välillä $[0,1]$ ja
$$\int_0^1 h \;<\; \frac{1}{2}.$$

Edellä esitetty menettely toimii tietysti vain, jos haluttu porrasfunktio löytyy pienellä jakovälien lukumäärällä. Paremmin yleistyvä menetelmä saadaan, kun tutkitaan tasavälistä jakoa ja annetaan jakovälien lukumäärän kasvaa.

Olkoon siis $n \in \mathbf{Z}_+, t = \frac{1}{n}$ ja $P = \{0, t, 2t, \ldots, nt = 1\}$ välin $[0,1]$ tasavälinen jako. Olkoon edelleen $h_n(0) = 0$ ja

$$h_n(x) = (jt)^3 \qquad \forall x \in \,](j-1)t, jt]\,,$$

kun $j = 1, 2, \ldots, n$. Koska f on kasvava välillä $[0,1]$, niin tällöin h_n on sellainen välin $[0,1]$ porrasfunktio, että $f \le h_n$ välillä $[0,1]$.

Hyödyntämällä aputulosta (todistus esimerkiksi induktiolla)

$$\sum_{j=1}^{n} j^3 \;=\; \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

saadaan

$$\int_0^1 h_n \;=\; \sum_{j=1}^{n} (jt)^3 \cdot t \;=\; t^4 \sum_{j=1}^{n} j^3 \;=\; \frac{1}{n^4} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} \;=\; \frac{(n+1)^2}{4n^2}.$$

Koska

$$\frac{(n+1)^2}{4n^2} < \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; n^2 + 2n + 1 \,<\, 2n^2 \;\Leftrightarrow\; n^2 - 2n - 1 \,>\, 0 \;\overset{n \in \mathbf{Z}_+}{\Leftrightarrow}\; n \ge 3,$$

niin esimerkiksi h_3 kelpaa halutuksi porrasfunktioksi.

Yleisesti saadaan (kun $a > \frac{1}{4}$)

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)^2}{4n^2} \;=\; \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 < a \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{n} \,<\, 2\sqrt{a} - 1 \\ &\Leftrightarrow \quad n \,>\, \frac{1}{2\sqrt{a} - 1}, \end{aligned}$$

joten tehtävä on helppo ratkaista myös pienemmillä tavoitearvoilla kuin $a = \frac{1}{2}$. Esimerkiksi

$$n \,>\, \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{3}} - 1} \;=\; \frac{\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \;=\; \frac{\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})}{4 - 3} \;=\; 3 + 2\sqrt{3} \;\overset{n \in \mathbf{Z}_+}{\Leftrightarrow}\; n \ge 7,$$

joten

$$\int_0^1 h_7 \,<\, \frac{1}{3}.$$

Esitetään lopuksi vielä muutamia porrasintegraalien perusominaisuuksia. Ominaisuudet ovat ilmeisiä porrasfunktioiden määrittelyn perusteella. Täsmälliset todistukset jätetään osin harjoitustehtäväksi.

Lause 4.7. *Jos g ja h ovat porrasfunktioita ja $g \leq h$ välillä $[a, b]$, niin*

$$\int_a^b g \leq \int_a^b h.$$

Todistus. Harjoitustehtävä.

Lause 4.8 (Lineaarisuus). *Jos f ja g ovat välin $[a, b]$ porrasfunktioita ja $\lambda \in \mathbf{R}$, niin*

$$\int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f \qquad \text{ja} \qquad \int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Todistus. Todistetaan vakiolla kertomista koskeva tulos. Funktioiden summaa koskeva tulos jätetään harjoitustehtäväksi.

Olkoon siis f välin $[a, b]$ porrasfunktio ja $\lambda \in \mathbf{R}$. Koska f on välin $[a, b]$ porrasfunktio, on olemassa sellainen välin $[a, b]$ jako $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ ja sellaiset $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$, että

$$f(x) = a_j \qquad \forall x \in \,]x_{j-1}, x_j[\,,$$

kun $j = 1, 2, \ldots, n$. Jos nyt

$$\ell(I_j) = x_j - x_{j-1}$$

on jaon P osavälin $I_j = \,]x_{j-1}, x_j[$ pituus ($j = 1, 2, \ldots, n$), niin

$$\int_a^b (\lambda f) = \sum_{j=1}^n \lambda a_j \cdot \ell(I_j) = \lambda \sum_{j=1}^n a_j \cdot \ell(I_j) = \lambda \int_a^b f. \qquad \square$$

Lause 4.9 (Additiivisuus). *Olkoon f välin $[a,b]$ porrasfunktio ja $c \in \,]a,b[$. Tällöin*

$$\int_a^b f \;=\; \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Todistus. Koska f on välin $[a,b]$ porrasfunktio ja $c \in \,]a,b[$, niin f on porrasfunktio[1] myös väleillä $[a,c]$ ja $[c,b]$ (huomautus 4.3, s. 69).

Olkoon nyt P jokin välin $[a,b]$ jako, joka sisältää kaikki funktion f porraspisteet välillä $[a,b]$, ja $P' = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ välin $[a,b]$ jako $P' = P \cup \{c\}$. Oletetaan lisäksi, että

$$f(x) = a_j \qquad \forall x \in \,]x_{j-1}, x_j[\,,$$

kun $j = 1, 2, \ldots, n$.

Tällöin $c = x_k$ jollakin $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Lisäksi $\{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ on välin $[a,c]$ jako, joka sisältää kaikki funktion f porraspisteet välillä $[a,c]$, ja $\{x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n\}$ on välin $[c,b]$ jako, joka sisältää kaikki funktion f porraspisteet välillä $[c,b]$. Koska porrasfunktion integraali on riippumaton välitusta välijaosta, niin

$$\begin{aligned}
\int_a^b f \;&=\; \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot (x_j - x_{j-1}) \\
&=\; \sum_{j=1}^{k} a_j \cdot (x_j - x_{j-1}) \;+\; \sum_{j=k+1}^{n} a_j \cdot (x_j - x_{j-1}) \\
&=\; \int_a^c f \;+\; \int_c^b f.
\end{aligned}$$

□

[1] Täsmällisesti ottaen porrasfunktioita ovat funktion f rajoittumat kyseisille väleille.

5 Riemann-integraali

5.1 Ala- ja yläintegraali

Jos funktio f on rajoitettu välillä $[a,b]$, niin on olemassa sellaiset vakiot $m \in \mathbf{R}$ ja $M \in \mathbf{R}$, että

$$m \;\le\; f(x) \;\le\; M \qquad \forall x \in [a,b]\,.$$

Jos lisäksi g ja h ovat sellaisia porrasfunktioita, että $g \le f \le h$ välillä $[a,b]$, niin

$$g \le M \qquad \text{ja} \qquad h \ge m$$

välillä $[a,b]$. Koska vakiofunktio on porrasfunktio, niin lauseen 4.7 (s. 75) nojalla

$$\int_a^b g \;\le\; \int_a^b M \;=\; M\cdot(b-a)$$

ja

$$\int_a^b h \;\ge\; \int_a^b m \;=\; m\cdot(b-a).$$

Siis joukko

$$L \;=\; \left\{ \int_a^b g \;\middle|\; g \text{ on porrasfunktio ja } g \le f \text{ välillä } [a,b] \right\} \tag{5.1}$$

on ylhäältä rajoitettu ja joukko

$$U \;=\; \left\{ \int_a^b h \;\middle|\; h \text{ on porrasfunktio ja } f \le h \text{ välillä } [a,b] \right\} \tag{5.2}$$

on alhaalta rajoitettu. Lisäksi kumpikaan joukoista ei selvästikään ole tyhjä joukko. Täten voidaan asettaa seuraava määritelmä.

Määritelmä 5.1. Olkoon f välillä $[a,b]$ rajoitettu funktio, ja olkoot L ja U ehdoissa (5.1) ja (5.2) määritellyt joukot. Tällöin

$$I_L(f,[a,b]) \;=\; \sup L$$

on funktion f *alaintegraali* yli välin $[a,b]$ ja

$$I_U(f,[a,b]) \;=\; \inf U$$

on funktion f *yläintegraali* yli välin $[a,b]$.

Esimerkki 5.1. Määritetään *Dirichlet'n funktion*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & \text{kun } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, \end{cases}$$

ala- ja yläintegraali yli välin $[a, b]$.

Funktio f on selvästi rajoitettu välillä $[a, b]$, joten etsittävät ala- ja yläintegraali ovat olemassa.

I: Määritetään ensin alaintegraali $I_L(f, [a, b])$. Olkoon siis L ehdossa (5.1) määritelty joukko.

1°: Olkoon g jokin sellainen porrasfunktio, että $g \leq f$ välillä $[a, b]$. Olkoot lisäksi $I_1, I_2, \ldots, I_n$ porrasfunktion g jotakin jakoa vastaavat (avoimet) jakovälit ja $a_1, a_2, \ldots, a_n$ funktion g (vakio)arvot jakoväleillä $I_1, I_2, \ldots, I_n$. Tällöin $a_j \leq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, sillä jokainen reaalilukuväli sisältää irrationaalipisteitä. Täten

$$\int_a^b g \;=\; \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \ell(I_j) \;\leq\; \sum_{j=1}^{n} 0 \cdot \ell(I_j) \;=\; 0,$$

missä $\ell(I_j)$ on osavälin I_j pituus. Siis $z \leq 0$ kaikilla $z \in L$, joten 0 on joukon L (eräs) yläraja.

2°: Tarkastellaan porrasfunktiota $g(x) = 0$ kaikilla $x \in [a, b]$. Tällöin $g \leq f$ välillä $[a, b]$ ja

$$\int_a^b g \;=\; \int_a^b 0 \;=\; 0 \cdot (b - a) \;=\; 0.$$

Siis $0 \in L$.

Kohdista 1° ja 2° seuraa nyt lauseen 1.2 (s. 2) perusteella, että

$$I_L(f, [a, b]) \;=\; \sup L \;=\; \max L \;=\; 0.$$

II: Määritetään sitten vastaavalla tavalla yläintegraali $I_U(f, [a, b])$. Olkoon U ehdossa (5.2) määritelty joukko.

1°: Olkoon h jokin sellainen porrasfunktio, että $f \leq h$ välillä $[a, b]$. Olkoot lisäksi $I_1, I_2, \ldots, I_n$ porrasfunktion h jotakin jakoa vastaavat (avoimet) jakovälit ja $a_1, a_2, \ldots, a_n$ funktion h (vakio)arvot jakoväleillä $I_1, I_2, \ldots, I_n$. Tällöin $a_j \geq 1$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, sillä jokainen reaalilukuväli sisältää rationaalipisteitä. Täten

$$\int_a^b h \;=\; \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \ell(I_j) \;\geq\; \sum_{j=1}^{n} 1 \cdot \ell(I_j) \;=\; b - a,$$

missä $\ell(I_j)$ on osavälin I_j pituus. Siis $z \geq b - a$ kaikilla $z \in U$, joten $b - a$ on joukon U (eräs) alaraja.

2°: Tarkastellaan porrasfunktiota $h(x) = 1$ kaikilla $x \in [a, b]$. Tällöin $f \leq h$ välillä $[a, b]$ ja

$$\int_a^b h \;=\; \int_a^b 1 \;=\; 1 \cdot (b - a) \;=\; b - a.$$

Siis $b - a \in U$.

Kohdista 1° ja 2° seuraa nyt lauseen 1.2 (s. 2) perusteella, että

$$I_U(f, [a, b]) \;=\; \inf U \;=\; \min U \;=\; b - a.$$

Ala- ja yläintegraalin määrittelyn sekä porrasfunktioiden, supremumin ja infimumin perusominaisuuksien nojalla voidaan esittää seuraavat huomautukset.

Huomautus 5.1. Lauseiden 1.4 (s. 3) ja 4.7 (s. 75) nojalla aina

$$I_L(f, [a, b]) \;\leq\; I_U(f, [a, b]),$$

mutta välttämättä ei päde (ks. esimerkki 5.1)

$$I_L(f, [a, b]) \;=\; I_U(f, [a, b]).$$

Huomautus 5.2. Jos g ja h ovat porrasfunktioita ja $g \leq f \leq h$ välillä $[a, b]$, niin huomautuksen 5.1 sekä supremumin ja infimumin perusominaisuuksien nojalla

$$\int_a^b g \;\leq\; I_L(f, [a, b]) \;\leq\; I_U(f, [a, b]) \;\leq\; \int_a^b h.$$

Huomautus 5.3. Jos f on välin $[a, b]$ porrasfunktio, niin huomautuksen 5.2 perusteella

$$I_L(f, [a, b]) \;=\; I_U(f, [a, b]) \;=\; \int_a^b f.$$

5.2 Riemann-integraali ja Riemann-integroituvuus

Määritellään sitten Riemann-integraali ala- ja yläintegraalin avulla.

Määritelmä 5.2 (Riemann-integraali). Rajoitettu funktio $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ on *Riemann-integroituva* välillä $[a,b]$, jos

$$I_L(f,[a,b]) \;=\; I_U(f,[a,b]).$$

Tällöin funktion f *Riemann-integraali* yli välin $[a,b]$ on

$$\int\limits_a^b f \;=\; \int\limits_a^b f(x)\,dx \;=\; I_L(f,[a,b]) \;=\; I_U(f,[a,b]).$$

Huomautus. Riemann-integraalin merkinnässä dx tarkoittaa, että integroitavan funktion integraalia lasketaan muuttajan x suhteen.

Huomautus. Kun jatkossa puhutaan funktion integroituvuudesta, tarkoitetaan aina (ellei toisin mainita) funktion Riemann-integroituvuutta.

Huomautus. Riemann-integraali on reaaliluku.

Huomautus 5.4. Huomautuksen 5.3 (s. 79) nojalla porrasfunktiot ovat Riemann-integroituvia ja porrasfunktion Riemann-integraali on sama kuin luvussa 4.3 tarkasteltu porrasfunktion integraali.

Huomautus. Huomautuksen 5.4 perusteella porrasfunktion integraalille ja Riemann-integraalille on luontevaa käyttää samaa merkintää.

Huomautus. Huomautuksesta 5.4 nähdään, että funktion jatkuvuus ei ole edellytys funktion Riemann-integroituvuudelle.

Huomautus 5.5. Jos funktio f on Riemann-integroituva välillä $[a,b]$, niin huomautuksen 5.2 (s. 79) nojalla

$$\int_a^b g \;\le\; \int_a^b f \;\le\; \int_a^b h$$

aina, kun g ja h ovat sellaisia välin $[a,b]$ porrasfunktioita, että $g \le f \le h$.

Esimerkki 5.2. Esimerkin 5.1 perusteella Dirichlet'n funktio

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & \text{kun } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, \end{cases}$$

ei ole Riemann-integroituva millään reaalilukuvälillä $[a,b]$.

Funktion Riemann-integroituvuuden tutkiminen ala- ja yläintegraaleja laskemalla on yleisesti ottaen melko hankalaa. Seuraava yksinkertainen havainto helpottaa jonkin verran asiaa.

Lause 5.6 (Riemannin ehto). *Välillä $[a,b]$ rajoitettu funktio f on Riemann-integroituva välillä $[a,b]$ täsmälleen silloin, kun jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellaiset välin $[a,b]$ porrasfunktiot g ja h, että $g \le f \le h$ välillä $[a,b]$ ja*

$$\int_a^b h - \int_a^b g \;<\; \varepsilon.$$

Todistus. Väite seuraa suoraan Riemann-integraalin määritelmästä ja lauseesta 1.5 (s. 3), kun tutkitaan ala- ja yläintegraalin määrittelyssä esiintyneitä joukkoja

$$L \;=\; \left\{ \int_a^b g \;\middle|\; g \text{ on porrasfunktio ja } g \le f \text{ välillä } [a,b] \right\}$$

ja

$$U \;=\; \left\{ \int_a^b h \;\middle|\; h \text{ on porrasfunktio ja } f \le h \text{ välillä } [a,b] \right\}.$$

□

Esimerkki 5.3. Kurssilla Analyysi A tarkasteltiin *Thomaen funktiota*[1]

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, \\ 1, & \text{kun } x = 0, \\ \dfrac{1}{q}, & \text{kun } x \in \mathbf{Q} \text{ ja } x = \dfrac{p}{q} \ (p \neq 0, q > 0) \text{ on supistetussa muodossa,} \end{cases}$$

joka on jatkuva kaikilla $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ ja epäjatkuva kaikilla $x \in \mathbf{Q}$. Osoitetaan Riemannin ehtoa käyttäen, että f on Riemann-integroituva välillä $[0, 1]$.

Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Olkoon n jokin sellainen kokonaisluku, että

$$n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

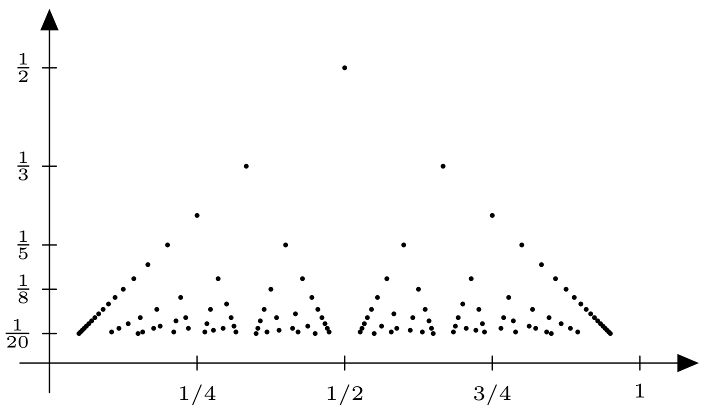
Olkoon lisäksi g sellainen porrasfunktio, että $g(x) = 0$ kaikilla $x \in [0, 1]$, ja h esimerkin 4.7 (s. 72) porrasfunktio h_n. Tällöin

$$\int_0^1 g = 0 \qquad \text{ja} \qquad \int_0^1 h = \frac{1}{n}.$$

Täten on olemassa sellaiset porrasfunktiot g ja h, että $g \leq f \leq h$ välillä $[0, 1]$ (harjoitustehtävä) ja

$$\int_0^1 h - \int_0^1 g = \frac{1}{n} - 0 = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Siis f on välillä $[0, 1]$ Riemann-integroituva Riemannin ehdon nojalla.



Kuva 5.1: Thomaen funktion arvot $\frac{1}{q}$ $(q = 1, 2, \ldots, 20)$ välillä $]0, 1[$.

[1] Funktiota kutsutaan myös popcorn-, sadepisara- tai viivotinfunktioksi.

Huomautus. Esimerkki 5.3 osoittaa, että myös varsin epäjatkuvat funktiot voivat olla Riemann-integroituvia.

Seuraava lause helpottaa joskus Riemannin ehdon käyttöä tutkittaessa funktion Riemann-integroituvuutta. Lause antaa myös tavan määrittää integraalin arvo.

Lause 5.7. *Välillä $[a,b]$ rajoitettu funktio f on Riemann-integroituva välillä $[a,b]$ täsmälleen silloin, kun on olemassa sellaiset porrasfunktiot g_n ja h_n $(n = 1, 2, \dots)$, että $g_n \le f \le h_n$ välillä $[a,b]$ ja*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_a^b h_n.$$

Lisäksi tällöin

$$\int_a^b f \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_a^b h_n.$$

Todistus. Väite seuraa suoraan Riemann-integraalin määritelmästä ja seurauksesta 1.6 (s. 3), kun tutkitaan ala- ja yläintegraalin määrittelyssä esiintyneitä joukkoja

$$L \;=\; \left\{ \int_a^b g \;\middle|\; g \text{ on porrasfunktio ja } g \le f \text{ välillä } [a,b] \right\}$$

ja

$$U \;=\; \left\{ \int_a^b h \;\middle|\; h \text{ on porrasfunktio ja } f \le h \text{ välillä } [a,b] \right\}.$$

□

Esimerkki 5.4. Lauseen 5.7 nojalla esimerkin 5.3 Thomaen funktion f Riemann-integraaliksi yli välin $[0,1]$ saadaan

$$\int_0^1 f \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_0^1 h_n \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \;=\; 0.$$

Huomautus 5.8. Lauseen 5.7 vaatimat porrasfunktiot g_n ja h_n muodostetaan usein valitsemalla porrasfunktion g_n arvoiksi välin $[a, b]$ jotakin jakoa vastaavilla (avoimilla) jakoväleillä $I_1, I_2, \ldots, I_n$ arvot $m_1, m_2, \ldots, m_n$, missä

$$m_j \;=\; \inf\{f(x) \mid x \in I_j\}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Vastaavasti porrasfunktion h_n arvoiksi (avoimilla) jakoväleillä $I_1, I_2, \ldots, I_n$ valitaan $M_1, M_2, \ldots, M_n$, missä

$$M_j \;=\; \sup\{f(x) \mid x \in I_j\}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Tarvittavat porrasfunktioiden jonot muodostuvat tällöin jakovälien määrän lisääntyessä. Porrasfunktioiden arvoiksi kunkin jaon jakopisteissä voidaan valita esimerkiksi funktion f arvo kyseisissä pisteissä.

Käytännössä tarkastellaan usein tasavälistä jakoa. Jos porrasfunktioita g_n ja h_n vastaavassa tasavälisessä jaossa on n osaväliä, kunkin jakovälin pituudeksi t saadaan

$$t \;=\; \frac{b-a}{n}.$$

Tällöin $g_n \le f \le h_n$ sekä

$$\int_a^b g_n \;=\; \sum_{j=1}^{n} t \cdot m_j \;=\; \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} m_j$$

ja

$$\int_a^b h_n \;=\; \sum_{j=1}^{n} t \cdot M_j \;=\; \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} M_j.$$

Jos nyt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_a^b h_n \;=\; S,$$

niin f on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$ ja

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; S.$$

Huomautus 5.9. Jos funktio on jatkuva välillä $[a, b]$, voidaan infimumin ja supremumin sijasta käyttää funktion pienintä ja suurinta arvoa kullakin (suljetulla) jakovälillä, mikä tietysti helpottaa porrasfunktioiden muodostamista.

Esimerkki 5.5. Osoitetaan, että funktio

$$f(x) = kx \qquad (k > 0)$$

on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$, ja määritetään

$$\int_a^b kx\,dx.$$

Olkoon $n \in \mathbf{Z}_+$ ja $\{a, a+t, a+2t, \dots, a+nt\}$ sellainen välin $[a, b]$ tasavälinen jako, että

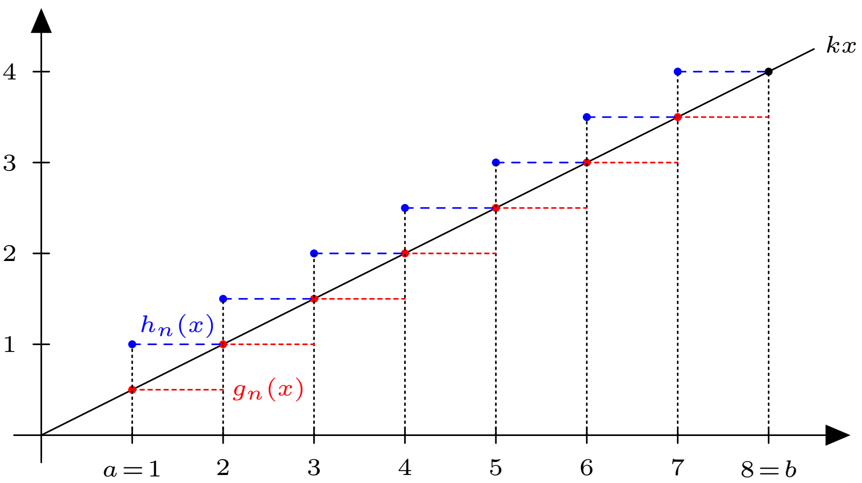
$$t \;=\; \frac{b-a}{n}.$$

Olkoon lisäksi

$$g_n(x) \;=\; k \cdot (a + (j-1)t) \qquad \text{ja} \qquad h_n(x) \;=\; k \cdot (a + jt),$$

kun $x \in [a + (j-1)t, a + jt[\;\; (j = 1, 2, \dots, n)$, ja

$$g_n(b) \;=\; h_n(b) \;=\; f(b) \;=\; kb.$$



Kuva 5.2: Funktion $f(x) = kx$ ja esimerkissä 5.5 esiintyvien välin $[a, b]$ porrasfunktioiden g_n ja h_n kuvaajat $(k = \frac{1}{2}, a = 1, b = 8, n = 7)$.

Tällöin g_n ja h_n ovat porrasfunktioita ja $g_n \le f \le h_n$ välillä $[a, b]$ (sillä f on kasvava). Edelleen

$$
\begin{aligned}
\int_a^b g_n &= \sum_{j=1}^{n} t \cdot k \cdot (a + (j-1)t) \\
&= tka \sum_{j=1}^{n} 1 \,+\, t^2 k \sum_{j=1}^{n} (j-1) \\
&= tka \cdot n \,+\, t^2 k \cdot \frac{n(n-1)}{2} \\
&= \frac{b-a}{n} \cdot ka \cdot n \,+\, \Big(\frac{b-a}{n}\Big)^2 \cdot k \cdot \frac{n(n-1)}{2} \\
&= (b-a)ka \,+\, \frac{(b-a)^2}{2} \cdot k \cdot \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\to 1} \\
&\to (b-a)ka \,+\, \frac{(b-a)^2}{2} k, \quad \text{kun } n \to \infty,
\end{aligned}
$$

ja

$$
\begin{aligned}
\int_a^b h_n &= \sum_{j=1}^{n} t \cdot k \cdot (a + jt) \\
&= tka \sum_{j=1}^{n} 1 \,+\, t^2 k \sum_{j=1}^{n} j \\
&= tka \cdot n \,+\, t^2 k \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{b-a}{n} \cdot ka \cdot n \,+\, \Big(\frac{b-a}{n}\Big)^2 \cdot k \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\
&= (b-a)ka \,+\, \frac{(b-a)^2}{2} \cdot k \cdot \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{\to 1} \\
&\to (b-a)ka \,+\, \frac{(b-a)^2}{2} k, \quad \text{kun } n \to \infty.
\end{aligned}
$$

Täten f on lauseen 5.7 nojalla Riemann-integroituva välillä $[a, b]$ ja

$$
\int_a^b kx\,dx \;=\; (b-a)ka + \frac{(b-a)^2}{2} k \;=\; k(b-a)\Big(a + \frac{b-a}{2}\Big) \;=\; k \cdot \frac{b^2 - a^2}{2}.
$$

Esimerkki 5.6. Hyödyntämällä geometrisen summan kaavaa ja raja-arvoa (1.5) (s. 4) voidaan vastaavalla tavalla kuin esimerkissä 5.5 osoittaa (harjoitustehtävä), että e^x on Riemann-integroituva välillä $[0, b]$ $(b > 0)$ ja

$$\int_0^b e^x \, dx \; = \; e^b - 1.$$

Huomautus 5.10. Jos esimerkissä 5.5 riittää vain osoittaa Riemann-integroituvuus, selvitään vähemmillä laskutoimituksilla. Tällöin ei tarvitse laskea raja-arvoja, vaan riittää osoittaa, että jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $n \in \mathbf{Z}_+$, että porrasfunktioiden h_n ja g_n integraalien erotus on pienempi kuin ε.

Esimerkki 5.7. Osoitetaan vain, että esimerkin 5.5 funktio $f(x) = kx$ $(k > 0)$ on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$. Integraalin arvoa ei tarvitse määrittää.

Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Riemannin ehdon nojalla f on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$, jos on olemassa sellainen $n \in \mathbf{Z}_+$, että (esimerkin 5.5 määrittelyin ja merkinnöin)

$$\begin{aligned}
\int_a^b h_n - \int_a^b g_n \quad &= \quad \sum_{j=1}^{n} t \cdot k \cdot (a + jt) \; - \; \sum_{j=1}^{n} t \cdot k \cdot (a + (j-1)t) \\
&= \quad t \cdot \underbrace{k \cdot (a + nt)}_{=f(b)} \; - \; t \cdot \underbrace{k \cdot a}_{=f(a)} \\
&= \quad t \cdot (kb - ka) \\
&= \quad \frac{b-a}{n} \cdot k \cdot (b - a) \\
&= \quad \frac{k(b-a)^2}{n} \\
&< \quad \varepsilon.
\end{aligned}$$

Vaadittu luku $n \in \mathbf{Z}_+$ löytyy nyt valitsemalla

$$n \; > \; \frac{k(b-a)^2}{\varepsilon},$$

joten f on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$.

Huomautus. Huomautus 5.10 koskee muitakin vastaavia tapauksia (vrt. lause 5.12, s. 90).

Esimerkki 5.8. Vastaavalla tavalla kuin esimerkissä 5.7 voidaan osoittaa (harjoitustehtävä), että funktio

$$f(x) = \sin x$$

on Riemann-integroituva välillä $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Jos funktio f on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$, niin Riemannin ehdon (lause 5.7) nojalla on olemassa sellaiset porrasfunktiot g_n ja h_n ($n = 1, 2, \dots$), että $g_n \le f \le h_n$ välillä $[a, b]$ ja

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b h_n = \int_a^b f.$$

Jos sitten funktion f arvo muuttuu joissakin yksittäisissä välin $[a, b]$ pisteissä $x_1, x_2, \dots, x_m$, niin porrasfunktioiden g_n ja h_n arvoja voidaan muuttaa vastaavasti siten, että funktioiden g_n ja h_n arvot pysyvät muuten ennallaan, mutta pisteissä $x_1, x_2, \dots, x_m$ porrasfunktioiden arvoksi asetaan funktion f uusi arvo. Tällöin edelleen $g_n \le f \le h_n$ välillä $[a, b]$.

Lisäksi porrasfunktioiden integraaleja laskettaessa pisteet $x_1, x_2, \dots, x_m$ voidaan ottaa (mahdollisesti uusiksi) jakopisteiksi, joten porrasfunktioiden g_n ja h_n arvot kyseisissä pisteissä eivät vaikuta porrasfunktioiden g_n ja h_n integraalien arvoihin. Täten porrasfunktioiden g_n ja h_n integraalien arvot (ja samalla niiden raja-arvo) pysyvät ennallaan.

Edellä olevan perusteella voidaan esittää seuraava huomautus. Huomautuksen todistuksen tekniset yksityiskohdat jätetään harjoitustehtäväksi.

Huomautus 5.11. Jos f on välillä $[a, b]$ Riemann-integroituva funktio ja g on sellainen välillä $[a, b]$ määritelty funktio, että

$$f(x) = g(x)$$

välillä $[a, b]$ lukuun ottamatta pisteitä $x_1, x_2, \dots, x_m \in [a, b]$, niin myös g on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$ ja

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Huomautus. Huomautuksen 5.11 perusteella funktion arvot äärellisessä pistejoukossa eivät ole merkityksellisiä funktion integroituvuuden tai integraalin arvon kannalta.

Esimerkki 5.9. Esimerkissä 5.5 osoitettiin, että funktio $f(x) = kx$ $(k > 0)$ on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$ ja

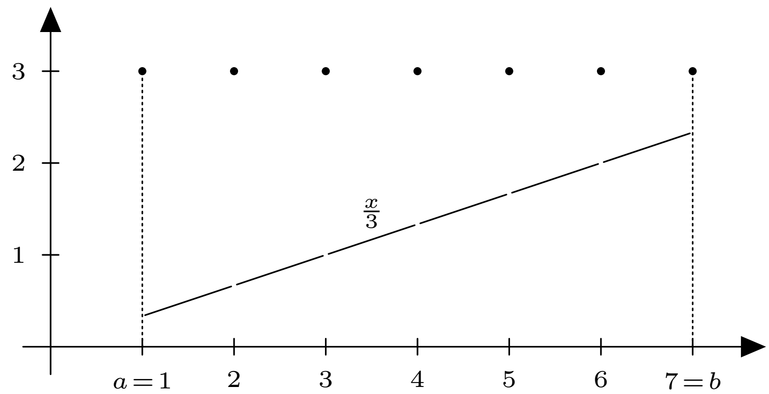
$$\int_a^b kx\,dx \;=\; k \cdot \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Täten huomautuksen 5.11 perusteella funktio

$$g(x) = \begin{cases} 3, & \text{kun } x \in \mathbf{Z}, \\ \dfrac{x}{3}, & \text{kun } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}, \end{cases}$$

on Riemann-integroituva jokaisella suljetulla välillä $[a, b]$ ja esimerkiksi (ks. kuva 5.3)

$$\int_1^7 g(x)\,dx \;=\; \frac{1}{3} \cdot \frac{7^2 - 1^2}{2} \;=\; \frac{48}{6} \;=\; 8.$$



Kuva 5.3: Esimerkin 5.9 funktion g kuvaaja välillä $[1, 7]$.

5.3 Integroituvia funktioita

Osoitetaan seuraavaksi, että sekä suljetulla välillä monotoniset että suljetulla välillä jatkuvat funktiot ovat Riemann-integroituvia kyseisellä välillä. Aluksi tarkastellaan monotonisia funktioita.

Lause 5.12. *Välillä $[a, b]$ monotoninen funktio on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$.*

Todistus. Todistetaan tapaus, jossa funktio f on kasvava välillä $[a, b]$. Tapaus, jossa funktio on vähenevä, todistetaan vastaavasti (harjoitustehtävä).

Olkoon siis f kasvava välillä $[a, b]$. Jos $f(a) = f(b)$, niin f on vakiofunktiona porrasfunktio ja siten Riemann-integroituva välillä $[a, b]$. Täten voidaan olettaa, että $f(a) < f(b)$.

Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Olkoon nyt $\{a, a + t, a + 2t, \ldots, a + nt\}$ sellainen välin $[a, b]$ tasavälinen jako, että jakovälin pituus

$$t = \frac{b-a}{n} < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}.$$

Olkoon lisäksi

$$g(x) = f(a + (j-1)t) \qquad \text{ja} \qquad h(x) = f(a + jt),$$

kun $x \in [a + (j-1)t, a + jt[$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, sekä $g(b) = h(b) = f(b)$. Tällöin g ja h ovat porrasfunktioita ja $g \leq f \leq h$ välillä $[a, b]$ (sillä f on kasvava). Täten

$$\begin{aligned}
\int_a^b h - \int_a^b g &= \sum_{j=1}^{n} t \cdot f(a + jt) - \sum_{j=1}^{n} t \cdot f(a + (j-1)t) \\
&= t \cdot \underbrace{f(a + nt)}_{= f(b)} - t \cdot f(a) \\
&= t \cdot (f(b) - f(a)) \\
&< \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \cdot (f(b) - f(a)) \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Siis f on Riemannin ehdon nojalla Riemann-integroituva välillä $[a, b]$. □

Esimerkki 5.10. Olkoon $a > 0$. Aidosti vähenevänä funktiona funktio

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$. Osoitetaan vielä, että

$$\int_a^b \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

Koska f on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$, niin lauseen lauseen 5.7 (s. 83) nojalla on olemassa sellaiset porrasfunktiot g_n ja h_n ($n = 1, 2, \dots$), että $g_n \le f \le h_n$ välillä $[a, b]$ ja

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b h_n. \tag{5.3}$$

Olkoon nyt $n \in \mathbf{Z}_+$ ja $\{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ jokin välin $[a, b]$ jako, joka sisältää sekä porrasfunktion g_n että porrasfunktion h_n porraspisteet. Koska nyt $\sqrt{x_{j-1}x_j}$ on välin $]x_{j-1}, x_j[$ piste ($j = 1, 2, \dots, n$) ja $g_n \le f \le h_n$ välillä $[a, b]$, niin

$$g_n(x) \le f(\sqrt{x_{j-1}x_j}) \le h_n(x) \qquad \forall x \in \,]x_{j-1}, x_j[$$

eli

$$g_n(x) \le \frac{1}{x_{j-1}x_j} \le h_n(x) \qquad \forall x \in \,]x_{j-1}, x_j[\,,$$

kun $j = 1, 2, \dots, n$. Lisäksi

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_{j-1}x_j}(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{x_{j-1}} - \frac{1}{x_j}\right) = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b},$$

joten

$$\int_a^b g_n \le \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_{j-1}x_j}(x_j - x_{j-1}) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

ja

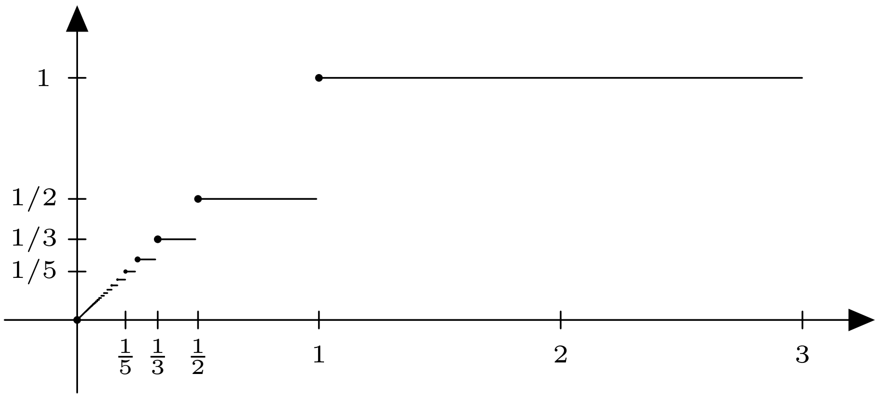
$$\int_a^b h_n \ge \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_{j-1}x_j}(x_j - x_{j-1}) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

Siis

$$\int_a^b g_n \le \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \le \int_a^b h_n \qquad \forall n \in \mathbf{Z}_+,$$

joten ehtojen (5.3) nojalla

$$\int_a^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b h_n = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$



Kuva 5.4: Esimerkin 5.11 funktion f kuvaaja välillä $[0, 3]$.

Esimerkki 5.11. Tutkitaan funktion (ks. kuva 5.4)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lceil \frac{1}{x} \rceil}, & \text{kun } x \in \,]0, 3], \\ 0, & \text{kun } x = 0, \end{cases}$$

Riemann-integroituvuutta välillä $[0, 5]$.

Koska x on kasvava, niin $\frac{1}{x}$ on vähenevä välillä $]0, 3]$. Täten myös funktio $\lceil \frac{1}{x} \rceil$ on vähenevä ja vastaavasti sitten funktio f on kasvava välillä $]0, 3]$. Lisäksi $f(0) = 0$ ja $f(x) > 0$ kaikilla $x \in \,]0, 3]$. Täten f on kasvava koko välillä $[0, 3]$. Kasvavana funktiona f Riemann-integroituva välillä $[0, 3]$.

Huom. Funktio f ei ole porrasfunktio välillä $[0, 3]$, sillä porrasfunktiolla on vain äärellinen määrä epäjatkuvuuskohtia.

Huomautus 5.13. Tutkimalla lauseen 5.12 todistuksen porrasfunktioita havaitaan (totea), että jos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ on jokin välin $[a, b]$ jako ja funktio f on kasvava välillä $[a, b]$, niin

$$\sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1})(x_j - x_{j-1}) \;\leq\; \int_a^b f(x)\,dx \;\leq\; \sum_{j=1}^{n} f(x_j)(x_j - x_{j-1}).$$

Jos vastaavasti f on vähenevä, niin

$$\sum_{j=1}^{n} f(x_j)(x_j - x_{j-1}) \;\leq\; \int_a^b f(x)\,dx \;\leq\; \sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1})(x_j - x_{j-1}).$$

Seuraavaksi osoitetaan, että suljetulla välillä jatkuvat funktiot ovat Riemann-integroituvia kyseisellä välillä. Todistuksessa hyödynnetään tietoa, että suljetulla välillä $[a, b]$ jatkuva funktio f on tasaisesti jatkuva välillä $[a, b]$. Tällöin jokaista positiivilukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{aina, kun } x, y \in [a, b] \text{ ja } |x - y| < \delta, \tag{5.4}$$

ks. määritelmä 1.3 (s. 6) ja lause 1.12 (s. 6).

Lause 5.14. *Välillä $[a, b]$ jatkuva funktio on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$.*

Todistus. Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Koska f on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$, niin ehdon (5.4) nojalla on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a} \quad \text{aina, kun } x, y \in [a, b] \text{ ja } |x - y| < \delta. \tag{5.5}$$

Olkoon nyt $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ sellainen välin $[a, b]$ tasavälinen jako, että jakovälin pituus

$$t = \frac{b - a}{n} < \delta.$$

Tällöin siis $|x_j - x_{j-1}| < \delta$, kun $j = 1, 2, \ldots, n$.

Olkoon edelleen $g(x_j) = h(x_j) = f(x_j)$, kun $j = 0, 1, \ldots, n$, ja

$$g(x) = m_j = \min\Big\{f(z) \;\Big|\; z \in [x_{j-1}, x_j]\Big\}, \qquad \text{kun } x \in\,]x_{j-1}, x_j[\,,$$

ja

$$h(x) = M_j = \max\Big\{f(z) \;\Big|\; z \in [x_{j-1}, x_j]\Big\}, \qquad \text{kun } x \in\,]x_{j-1}, x_j[\,,$$

kun $j = 1, 2, \ldots, n$. Tällöin g ja h ovat porrasfunktioita ja $g \leq f \leq h$ välillä $[a, b]$.

Koska f on suljetulla välillä jatkuva funktio, tarvittavat minimi- ja maksimiarvot ovat olemassa kullakin osavälillä ja lisäksi f saavuttaa kyseiset arvot jossakin osavälin pisteessä. Täten kullakin osavälillä $[x_{j-1}, x_j]$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ on olemassa sellaiset pisteet $x'_j, x''_j \in [x_{j-1}, x_j]$, että

$$m_j = f(x'_j) \qquad \text{ja} \qquad M_j = f(x''_j).$$

Koska $\left|x'_j - x''_j\right| < \delta$ ja $M_j \geq m_j$, niin ehdon (5.5) nojalla

$$M_j - m_j < \frac{\varepsilon}{b - a} \qquad \forall j = 1, 2, \ldots, n.$$

Täten

$$
\begin{aligned}
\int_a^b h - \int_a^b g &= \sum_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j)\underbrace{(x_j - x_{j-1})}_{>0} \\
&< \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}(x_j - x_{j-1}) \\
&= \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{j=1}^{n}(x_j - x_{j-1}) \\
&= \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a) \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Siis f on Riemannin ehdon nojalla Riemann-integroituva välillä $[a, b]$. □

Esimerkki 5.12. Polynomifunktiot ovat jatkuvina funktioina Riemann-integroituvia millä tahansa suljetulla välillä $[a, b]$.

5.4 Perusominaisuuksia

Esitetään aluksi kaksi määritelmää tai sopimusta, joilla helpotetaan käytännön laskutoimituksia.

Määritelmä 5.3. Olkoon f välillä $[a, b]$ Riemann-integroituva funktio. Tällöin

$$\int_b^a f(x)\,dx \;=\; -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Määritelmä 5.4. Olkoon f pisteessä $a \in \mathbf{R}$ määritelty funktio. Tällöin

$$\int_a^a f(x)\,dx \;=\; 0.$$

5.4.1 Lineaarisuus

Todistetaan sitten Riemann-integraalin lineaarisuus hyödyntämällä Riemannin ehdon raja-arvomuotoa ja porrasintegraalin lineaarisuutta.

Lause 5.15 (Lineaarisuus). *Olkoot f ja g Riemann-integroituvia välillä $[a, b]$ ja $\lambda \in \mathbf{R}$. Tällöin myös λf ja $f + g$ ovat Riemann-integroituvia välillä $[a, b]$ ja*

$$\int_a^b (\lambda f) \;=\; \lambda \int_a^b f \qquad \text{ja} \qquad \int_a^b (f+g) \;=\; \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Todistus. Todistetaan vakiolla kertominen, ja jätetään summafunktion $f + g$ integroituvuuden ja integraalin todistus harjoitustehtäväksi.

Olkoon siis f Riemann-integroituva välillä $[a, b]$ ja $\lambda \in \mathbf{R}$. Tällöin lauseen 5.7 (s. 83) nojalla on olemassa sellaiset porrasfunktiot g_n ja h_n $(n = 1, 2, \ldots)$, että $g_n \leq f \leq h_n$ välillä $[a, b]$ ja

$$\int_a^b f \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_a^b h_n.$$

Koska myös λg_n ja λh_n $(n = 1, 2, \dots)$ ovat porrasfunktioita välillä $[a, b]$, niin porrasintegraalin lineaarisuuden (lause 4.8, s. 75) sekä lukujonon raja-arvon laskusääntöjen nojalla

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_a^b \lambda g_n &= \lim_{n\to\infty} \lambda \int_a^b g_n = \lambda \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n \\
&= \lambda \int_a^b f \\
&= \lambda \lim_{n\to\infty} \int_a^b h_n = \lim_{n\to\infty} \lambda \int_a^b h_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \lambda h_n.
\end{aligned}$$

Jos lisäksi $\lambda \geq 0$, niin $\lambda g_n \leq \lambda f \leq \lambda h_n$ välillä $[a, b]$, ja jos $\lambda < 0$, niin vastaavasti $\lambda h_n \leq \lambda f \leq \lambda g_n$ välillä $[a, b]$. Täten lauseen 5.7 (s. 83) nojalla λf on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$ ja

$$\int_a^b (\lambda f) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \lambda g_n = \lambda \int_a^b f.$$

□

Seuraus 5.16. *Jos f ja g ovat Riemann-integroituvia välillä $[a, b]$ ja $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$, myös $\lambda_1 f + \lambda_2 g$ on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$ ja*

$$\int_a^b (\lambda_1 f + \lambda_2 g) = \lambda_1 \int_a^b f + \lambda_2 \int_a^b g.$$

Huomautus 5.17. Seuraus 5.16 voidaan induktiolla yleistää muotoon

$$\int_a^b \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i \int_a^b f_i \right),$$

missä $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ ja $f_1, f_2, \dots, f_n$ ovat Riemann-integroituvia välillä $[a, b]$.

Esimerkki 5.13. Osoitetaan, että funktio

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \in \mathbf{Q}, \\ 1, & \text{kun } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, \end{cases}$$

ei ole Riemann-integroituva millään reaalilukuvälillä $[a, b]$.

Esimerkissä 5.2 (s. 81) todettiin, että Dirichlet'n funktio

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & \text{kun } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, \end{cases}$$

ei ole Riemann-integroituva millään reaalilukuvälillä $[a, b]$. Toisaalta vakiofunktio on Riemann-integroituva jokaisella reaalilukuvälillä $[a, b]$ (esimerkki 4.5, s. 72). Täten g ei voi olla Riemann-integroituva millään reaalilukuvälillä $[a, b]$, sillä jos g olisi Riemann-integroituva, myös funktio $f = 1 - g$ olisi lauseen 5.15 nojalla Riemann-integroituva.

Huomautus. Funktio $f + g$ voi olla Riemann-integroituva välillä $[a, b]$, vaikka f ja g eivät ole Riemann-integroituvia välillä $[a, b]$ (ks. esimerkki 5.14).

Esimerkki 5.14. Esimerkin 5.13 funktioiden f ja g summa $f(x) + g(x) = 1$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Täten $f + g$ on vakiofunktiona Riemann-integroituva jokaisella reaalilukuvälillä $[a, b]$, vaikka f ja g eivät ole.

5.4.2 Itseisarvo- ja tulofunktio

Tutkitaan seuraavaksi itseisarvofunktion ja kahden funktion tulofunktion Riemann-integroituvuutta. Aluksi tarkastellaan itseisarvotunktiota.

Lause 5.18. *Jos funktio f on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$, myös funktio $|f|$ on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$.*

Todistus. Oletetaan, että f on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$. Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Koska f on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$, niin Riemannin ehdon nojalla on olemassa sellaiset porrasfunktiot g ja h, että $g \leq f \leq h$ välillä $[a, b]$ ja

$$\int_a^b h - \int_a^b g < \varepsilon. \tag{5.6}$$

Muodostetaan nyt uudet välin $[a, b]$ porrasfunktiot g' ja h' siten, että

$$g'(x) = \begin{cases} g(x), & \text{jos } g(x) \geq 0 \text{ ja } h(x) \geq 0, \\ -h(x), & \text{jos } g(x) < 0 \text{ ja } h(x) < 0, \\ 0, & \text{jos } g(x) < 0 \text{ ja } h(x) \geq 0, \end{cases}$$

ja

$$h'(x) = \begin{cases} h(x), & \text{jos } g(x) \geq 0 \text{ ja } h(x) \geq 0, \\ -g(x), & \text{jos } g(x) < 0 \text{ ja } h(x) < 0, \\ \max\{h(x), -g(x)\}, & \text{jos } g(x) < 0 \text{ ja } h(x) \geq 0. \end{cases}$$

Tällöin itseisarvon perusominaisuuksien nojalla $g' \leq |f| \leq h'$ välillä $[a, b]$.

Lisäksi porrasfunktioiden g ja h porraspisteet sisältävän jaon osaväleillä

$$h' - g' = h - g,$$

jos kyseisellä välillä g (ja siis myös h) on ei-negatiivinen, ja

$$h' - g' = (-g) - (-h) = h - g,$$

jos kyseisellä välillä h (ja siis myös g) on negatiivinen. Jos taas $g < 0$ ja $h \geq 0$, niin

$$h < h + (-g) = h - g \qquad \text{ja} \qquad -g \leq h + (-g) = h - g,$$

joten

$$h' - g' = \max\{h, -g\} - 0 = \max\{h, -g\} \leq h - g.$$

Siis kaikissa tapauksissa

$$h' - g' \leq h - g \tag{5.7}$$

välillä $[a, b]$.

Täten porrasintegraalin perusominaisuuksien nojalla

$$\begin{aligned} \int_a^b h' - \int_a^b g' &= \int_a^b (h' - g') \\ &\overset{(5.7)}{\leq} \int_a^b (h - g) \\ &= \int_a^b h - \int_a^b g \\ &\overset{(5.6)}{<} \varepsilon, \end{aligned}$$

joten $|f|$ on Riemannin ehdon nojalla Riemann-integroituva välillä $[a, b]$. □

Tutkitaan sitten kahden funktion tulofunktion Riemann-integroituvuutta. Aluksi todistetaan varsinaisessa todistuksessa hyödyllinen erikoistapaus.

Lause 5.19. *Jos funktio f on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$, myös funktio f^2 on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$.*

Todistus. Oletetaan, että f on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$. Koska $f^2 = |f|^2$, riittää osoittaa, että $|f|^2$ on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$. Täten voidaan todistuksen yleisyyttä rajoittamatta olettaa, että $f \geq 0$ välillä $[a, b]$.

Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Riemann-integroituvana funktiona f on rajoitettu välillä $[a, b]$, joten on olemassa sellainen $M > 0$, että $f \leq M$ välillä $[a, b]$. Lisäksi Riemannin ehdon nojalla on olemassa sellaiset porrasfunktiot g ja h, että $g \leq f \leq h$ välillä $[a, b]$ ja

$$\int_a^b h - \int_a^b g < \frac{\varepsilon}{2M}. \tag{5.8}$$

Koska $0 \leq f \leq M$, niin todistuksen yleisyyttä rajoittamatta voidaan olettaa (lause 4.4, s. 69), että

$$0 \leq g \leq f \leq h \leq M$$

välillä $[a, b]$. Tällöin g^2 ja h^2 ovat porrasfunktiota (huomautus 4.2, s. 69) ja

$$g^2 \leq f^2 \leq h^2$$

välillä $[a, b]$. Lisäksi huomautuksen 4.2 (s. 69) ja muiden porrasfunktioiden perusominaisuuksien sekä lauseiden 4.7 (s. 75) ja 4.8 (s. 75) nojalla

$$\begin{aligned}
\int_a^b h^2 - \int_a^b g^2 = \int_a^b (h^2 - g^2) &= \int_a^b (h+g)(h-g) \\
&\leq \int_a^b 2M \cdot (h-g) \\
&= 2M \int_a^b (h-g) \\
&\overset{(5.8)}{<} 2M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

joten f^2 on Riemannin ehdon nojalla Riemann-integroituva välillä $[a, b]$. □

Varsinainen tavoite saadaan nyt todistettua helposti aiempien tulosten avulla.

Lause 5.20. *Jos funktiot f ja g ovat Riemann-integroituvia välillä $[a, b]$, myös tulofunktio fg on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$.*

Todistus. Jos f ja g ovat Riemann-integroituvia välillä $[a, b]$, niin lauseiden 5.15 ja 5.19 nojalla myös funktio

$$fg = \frac{1}{4}\Big((f+g)^2 - (f-g)^2\Big)$$

on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$. □

Huomautus 5.21. Yleensä

$$\int_a^b (fg) \neq \int_a^b f \cdot \int_a^b g.$$

5.4.3 Additiivisuus

Riemann-integraalin additiivisuus on helppo todistaa hyödyntämällä Riemannin ehtoa ja porrasintegraalin additiivisuutta.

Lause 5.22 (Additiivisuus). *Olkoon $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ rajoitettu ja $c \in\,]a, b[$. Tällöin f on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$, jos ja vain jos f on Riemann-integroituva väleillä $[a, c]$ ja $[c, b]$. Tällöin*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Todistus. 1°: Todistetaan ensin suunta '⇐'. Jos f on Riemann-integroituva väleillä $[a, c]$ ja $[c, b]$, niin lauseen 5.7 (s. 83) nojalla on olemassa sellaiset porrasfunktiot g'_n ja h'_n $(n = 1, 2, \dots)$, että $g'_n \leq f \leq h'_n$ välillä $[a, c]$ ja

$$\int_a^c f = \lim_{n\to\infty} \int_a^c g'_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^c h'_n,$$

sekä sellaiset porrasfunktiot g_n'' ja h_n'' $(n = 1, 2, \dots)$, että $g_n'' \le f \le h_n''$ välillä $[c, b]$ ja

$$\int_c^b f = \lim_{n\to\infty} \int_c^b g_n'' = \lim_{n\to\infty} \int_c^b h_n''.$$

Tällöin funktiot

$$g_n(x) = \begin{cases} g_n'(x), & \text{jos } x \in [a, c[, \\ g_n''(x), & \text{jos } x \in [c, b], \end{cases}$$

ja

$$h_n(x) = \begin{cases} h_n'(x), & \text{jos } x \in [a, c[, \\ h_n''(x), & \text{jos } x \in [c, b], \end{cases}$$

ovat porrasfunktioita ja $g_n \le f \le h_n$ välillä $[a, b]$ $(n = 1, 2, \dots)$. Lisäksi porrasintegraalin additiivisuuden (lause 4.9, s. 76) sekä lukujonon raja-arvon laskusääntöjen nojalla

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n &= \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^c g_n + \int_c^b g_n \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^c g_n' + \int_c^b g_n'' \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_a^c g_n' + \lim_{n\to\infty} \int_c^b g_n'' \\
&= \int_a^c f + \int_c^b f \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_a^c h_n' + \lim_{n\to\infty} \int_c^b h_n'' \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^c h_n' + \int_c^b h_n'' \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^c h_n + \int_c^b h_n \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_a^b h_n.
\end{aligned}$$

Täten lauseen 5.7 (s. 83) nojalla f on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$ ja

$$\int_a^b f \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n \;=\; \int_a^c f + \int_c^b f.$$

2°: Tarkastellaan sitten suuntaa '⇒'. Olkoon f Riemann-integroituva välillä $[a, b]$. Suunta voidaan todistaa kohdan 1° tapaan, mutta toisaalta kohdan 1° nojalla on selvää, että jos f on Riemann-integroituva myös väleillä $[a, c]$ ja $[c, b]$, niin

$$\int_a^b f \;=\; \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Täten nyt riittää osoittaa, että f on Riemann-integroituva myös väleillä $[a, c]$ ja $[c, b]$. Todistetaan väite siksi suoraan Riemannin ehdon avulla.

Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Riemannin ehdon nojalla on nyt olemassa sellaiset porrasfunktiot g ja h, että $g \le f \le h$ välillä $[a, b]$ ja

$$\int_a^b h - \int_a^b g \;<\; \varepsilon. \tag{5.9}$$

Tällöin g ja h ovat porrasfunktioita[1] myös väleillä $[a, c]$ ja $[c, b]$ ja $g \le f \le h$ väleillä $[a, c]$ ja $[c, b]$. Lisäksi lauseen 4.7 (s. 75) perusteella

$$\int_a^c h - \int_a^c g \;\ge\; 0 \qquad \text{ja} \qquad \int_c^b h - \int_c^b g \;\ge\; 0, \tag{5.10}$$

joten porrasintegraalin additiivisuuden (lause 4.9, s. 76) nojalla

$$\begin{aligned}
\int_a^c h - \int_a^c g \;&\overset{(5.10)}{\le}\; \left(\int_a^c h - \int_a^c g\right) + \left(\int_c^b h - \int_c^b g\right) \\
&=\; \left(\int_a^c h + \int_c^b h\right) - \left(\int_a^c g + \int_c^b g\right) \\
&=\; \int_a^b h - \int_a^b g \\
&\overset{(5.9)}{<}\; \varepsilon
\end{aligned}$$

[1]Täsmällisesti ottaen porrasfunktioita ovat funktioiden g ja h rajoittumat kyseisille väleille.

ja

$$\int_c^b h - \int_c^b g \overset{(5.10)}{\leq} \left(\int_c^b h - \int_c^b g\right) + \left(\int_a^c h - \int_a^c g\right)$$
$$= \left(\int_a^c h + \int_c^b h\right) - \left(\int_a^c g + \int_c^b g\right)$$
$$= \int_a^b h - \int_a^b g$$
$$\overset{(5.9)}{<} \varepsilon.$$

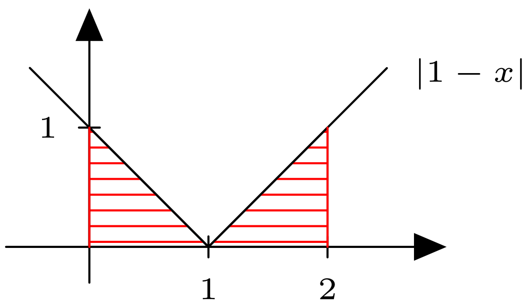
Siis f on Riemannin ehdon nojalla Riemann-integroituva väleillä $[a, c]$ ja $[c, b]$. □

Huomautus 5.23. Lauseen 5.22 kaava pätee kaikilla $a, b, c \in \mathbf{R}$ (olivatpa luvut missä tahansa järjestyksessä), jos f on Riemann-integroituva kyseisillä väleillä (harjoitustehtävä).

Esimerkki 5.15. Määritetään

$$\int_0^2 |1 - x|\, dx.$$

Integoitava funktio on selvästi jatkuva ja siten myös Riemann-integroituva välillä $[0, 2]$. Hyödyntämällä Riemann-integraalin additiivisuutta ja lineaarisuutta



Kuva 5.5: Funktion $f(x) = |1 - x|$ kuvaaja välillä $[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$ sekä funktion f kuvaajan ja x-akselin välinen alue välillä $[0, 2]$.

sekä vakiofunktion integraalia ja esimerkkiä 5.5 (s. 85) saadaan

$$\begin{aligned}
\int_0^2 |1-x|\,dx &= \int_0^1 |1-x|\,dx + \int_1^2 |1-x|\,dx \\
&= \int_0^1 (1-x)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx \\
&= \int_0^1 1\,dx - \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 x\,dx - \int_1^2 1\,dx \\
&= 1\cdot(1-0) - \frac{1^2-0^2}{2} + \frac{2^2-1^2}{2} - 1\cdot(2-1) \\
&= 1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 1 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Lopuksi tarkastellaan vielä jatkuvien funktioiden Riemann-integroituvuutta tapauksessa, jossa funktiolla on vain äärellinen määrä epäjatkuvuuskohtia. Aluksi määritellään hyödyllinen apukäsite.

Määritelmä 5.5. Funktio $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ on *paloittain jatkuva* välillä $[a,b]$, jos funktiolla f on välillä $[a,b]$ korkeintaan äärellinen määrä epäjatkuvuuskohtia ja kussakin epäjatkuvuuskohdassa funktiolla on vasemmanpuoleinen ja oikeanpuoleinen raja-arvo.[1]

Koska funktion arvoilla yksittäisissä pisteissä (esimerkiksi epäjatkuvuuspisteissä) ei ole merkitystä integraalin arvon tai integroituvuuden kannalta (huomautus 5.11, s. 88), saadaan Riemann-integraalin additiivisuuden seurauksena suoraan seuraava tulos.

Lause 5.24. *Välillä $[a,b]$ paloittain jatkuva funktio on Riemann-integroituva välillä $[a,b]$.*

Todistus. Harjoitustehtävä.

[1] Jos epäjatkuvuuskohta on välin $[a,b]$ päätepisteessä, riittää tietysti joko vasemmanpuoleinen (piste b) tai oikeanpuoleinen (piste a) raja-arvo.

5.5 Integraalien arviointia

Integraaleja ei useinkaan pystytä laskemaan tarkasti. Siksi on tärkeää pystyä arvioimaan integraaleja esimerkiksi sopivien epäyhtälöiden avulla.

Lause 5.25. *Olkoon funktio f Riemann-integroituva välillä $[a,b]$ sekä*

$$m = \inf_{x \in [a,b]} f(x) \qquad \text{ja} \qquad M = \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

Tällöin

$$m(b-a) \;\le\; \int_a^b f(x)\,dx \;\le\; M(b-a).$$

Todistus. Koska $g(x) = m$ ja $h(x) = M$ ovat porrasfunktioita ja $m \le f \le M$ välillä $[a,b]$, niin

$$m(b-a) \;=\; \int_a^b m\,dx \;\le\; \int_a^b f(x)\,dx \;\le\; \int_a^b M\,dx \;=\; M(b-a).$$

□

Seuraus 5.26. *Jos funktio f on jatkuva välillä $[a,b]$ sekä*

$$m = \min_{x \in [a,b]} f(x) \qquad \text{ja} \qquad M = \max_{x \in [a,b]} f(x),$$

niin

$$m(b-a) \;\le\; \int_a^b f(x)\,dx \;\le\; M(b-a).$$

Seuraus 5.27. *Olkoon funktio f Riemann-integroituva ja ei-negatiivinen välillä $[a,b]$. Tällöin*

$$\int_a^b f(x)\,dx \;\ge\; 0.$$

Seuraus 5.28. *Olkoot f ja g sellaisia välillä $[a,b]$ Riemann-integroituvia funktioita, että $f(x) \leq g(x)$ kaikilla $x \in [a,b]$. Tällöin*

$$\int_a^b f(x)\,dx \;\leq\; \int_a^b g(x)\,dx.$$

Esimerkki 5.16. Arvioidaan integraalia

$$\int_0^1 \sin x\,dx.$$

Jatkuvana funktiona $\sin x$ on Riemann-integroituva välillä $[0,1]$. Koska $\sin x$ on kasvava funktio välillä $[0,1]$, niin

$$0 \;\leq\; \sin x \;\leq\; \sin 1 \qquad \forall x \in [0,1].$$

Täten

$$\int_0^1 \sin x\,dx \;\geq\; \int_0^1 0\,dx \;=\; 0\cdot(1-0) \;=\; 0$$

ja

$$\int_0^1 \sin x\,dx \;\leq\; \int_0^1 \sin 1\,dx \;=\; \sin 1\cdot(1-0) \;=\; \sin 1.$$

Siis

$$0 \;\leq\; \int_0^1 \sin x\,dx \;\leq\; \sin 1 \;\; (\approx 0,84).$$

Yllä olevaa parempi arvio ylärajalle saadaan käyttämällä tulosta

$$\sin x \;\leq\; x \qquad \forall x \in [0,1].$$

Tällöin esimerkin 5.5 (s. 85) nojalla

$$\int_0^1 \sin x\,dx \;\leq\; \int_0^1 x\,dx \;=\; \frac{1^2-0^2}{2} \;=\; \frac{1}{2}.$$

Esimerkki 5.17. Olkoon $b > 1$. Osoitetaan, että

$$(b-1) \cdot e \;\le\; \int_1^b \frac{e^x}{x}\,dx \;\le\; \frac{b-1}{b} \cdot e^b.$$

Tarkastellaan funktiota

$$f(x) \;=\; \frac{e^x}{x}$$

ja väliä $[1, b]$. Jatkuvana funktiona f on Riemann-integroituva välillä $[1, b]$. Lisäksi

$$f'(x) \;=\; \frac{e^x \cdot x - 1 \cdot e^x}{x^2} \;=\; \frac{e^x(x-1)}{x^2} \;\ge\; 0 \qquad \forall x \in [1, b],$$

joten f on kasvava funktio välillä $[1, b]$. Lisäksi $f(1) = e$, joten

$$e \;\le\; \frac{e^x}{x} \;\le\; \frac{e^b}{b} \qquad \forall x \in [1, b].$$

Siis

$$\int_1^b \frac{e^x}{x}\,dx \;\ge\; \int_1^b e\,dx \;=\; e \cdot (b-1)$$

ja

$$\int_1^b \frac{e^x}{x}\,dx \;\le\; \int_1^b \frac{e^b}{b}\,dx \;=\; \frac{e^b}{b} \cdot (b-1) \;=\; \frac{b-1}{b} \cdot e^b,$$

joten

$$(b-1) \cdot e \;\le\; \int_1^b \frac{e^x}{x}\,dx \;\le\; \frac{b-1}{b} \cdot e^b.$$

Huomautus 5.29. Jos seurauksessa 5.28 oletetaan ehdon $f(x) \le g(x)$ lisäksi, että $f(x) \ge 0$, niin (harjoitustehtävä)

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \;\le\; \left| \int_a^b g(x)\,dx \right|$$

kaikilla $a, b \in \mathbf{R}$ (olivatpa luvut missä tahansa järjestyksessä).

Lause 5.30. *Olkoon funktio f Riemann-integroituva välillä $[a,b]$. Tällöin*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Todistus. Jos f on Riemann-integroituva välillä $[a,b]$, niin lauseen 5.18 (s. 97) perusteella myös $|f|$ on Riemann-integroituva välillä $[a,b]$. Lisäksi itseisarvon perusominaisuuksista seuraa, että

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$$

kaikilla $x \in [a,b]$. Täten seurauksen 5.28 (s. 106) nojalla

$$\int_a^b -|f(x)|\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

ja edelleen (lause 5.15, s. 95)

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Siis itseisarvon perusominaisuuksien perusteella

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

□

Huomautus 5.31. Koska lauseessa 5.30 oletetaan integroituvuus välillä $[a,b]$, niin $a < b$. Lauseen tulos pätee tietysti myös, jos $a = b$, mutta jos $b < a$, niin lauseen 5.30 epäyhtälö on muutettava muotoon (harjoitustehtävä)

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \left|\int_a^b |f(x)|\,dx\right|.$$

Huomautus 5.32. Lauseen 5.30 epäyhtälö voi olla myös aito (ks. esimerkki 5.18).

Esimerkki 5.18. Osoitetaan, että

$$\left| \int_{-1}^{1} x\,dx \right| < \int_{-1}^{1} |x|\,dx.$$

Esimerkin 5.5 (s. 85) nojalla

$$\int_{-1}^{1} x\,dx = \frac{1^2 - (-1)^2}{2} = 0.$$

Toisaalta lauseiden 5.22 (s. 100) ja 5.15 (s. 95) sekä esimerkin 5.5 (s. 85) perusteella saadaan

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} |x|\,dx &= \int_{-1}^{0} |x|\,dx + \int_{0}^{1} |x|\,dx \\
&= \int_{-1}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{1} x\,dx \\
&= -\int_{-1}^{0} x\,dx + \int_{0}^{1} x\,dx \\
&= -\frac{0^2 - (-1)^2}{2} + \frac{1^2 - 0^2}{2} \\
&= -\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Siis

$$\left| \int_{-1}^{1} x\,dx \right| = 0 < 1 = \int_{-1}^{1} |x|\,dx.$$

Lause 5.33. *Olkoon f jatkuva ja ei-negatiivinen välillä $[a, b]$. Jos*

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; 0,$$

niin $f(x) = 0$ kaikilla $x \in [a, b]$.

Todistus. Tehdään vastaoletus, että on olemassa sellainen $c \in [a, b]$, että $f(c) > 0$. Oletetaan, että $c \in]a, b[$ (tapaukset $c = a$ ja $c = b$ vastaavasti). Koska f on jatkuva, on olemassa sellainen $\delta > 0$, että $[c - \delta, c + \delta] \subseteq [a, b]$ ja

$$f(x) \;\geq\; \frac{f(c)}{2} \;>\; 0 \qquad \forall x \in [c - \delta, c + \delta].$$

Täten

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx \;&=\; \int_a^{c-\delta} f(x)\,dx + \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\,dx + \int_{c+\delta}^{b} f(x)\,dx \\
&\geq\; \int_a^{c-\delta} 0\,dx + \int_{c-\delta}^{c+\delta} \frac{f(c)}{2}\,dx + \int_{c+\delta}^{b} 0\,dx \\
&=\; 0 + \frac{f(c)}{2} \cdot 2\delta + 0 \\
&=\; f(c) \cdot \delta,
\end{aligned}$$

missä on ristiriita, sillä $f(c) > 0$ ja $\delta > 0$. □

Seuraus 5.34. *Olkoot f ja g sellaisia välillä $[a, b]$ jatkuvia funktioita, että $f(x) \leq g(x)$ kaikilla $x \in [a, b]$. Jos $f \not\equiv g$ välillä $[a, b]$, niin*

$$\int_a^b f(x)\,dx \;<\; \int_a^b g(x)\,dx.$$

Huomautus 5.35 (Cauchy-Schwarzin epäyhtälö). Jos funktiot f ja g ovat jatkuvia välillä $[a,b]$, niin

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \le \int_a^b f^2 \cdot \int_a^b g^2.$$

Todistus. Koska f ja g ovat jatkuvia välillä $[a,b]$, myös f^2, g^2 ja fg ovat jatkuvia ja siten myös Riemann-integroituva välillä $[a,b]$. Merkitään

$$A = \int_a^b f^2, \qquad B = \int_a^b g^2 \qquad \text{ja} \qquad C = \int_a^b fg,$$

jolloin väite saa muodon

$$C^2 \le AB.$$

Jos nyt $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, niin $(\lambda f + \mu g)^2$ on Riemann-integraalin lineaarisuuden nojalla Riemann-integroituva välillä $[a,b]$. Lisäksi aina $(\lambda f + \mu g)^2 \ge 0$, joten seurauksen 5.27 nojalla

$$0 \le \int_a^b (\lambda f + \mu g)^2 = \lambda^2 A + 2\lambda\mu C + \mu^2 B \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}.$$

Valitaan $\lambda = B$ ja $\mu = -C$. Tällöin

$$0 \le AB^2 - 2BC^2 + BC^2 = B(AB - C^2).$$

Koska aina $g^2 \ge 0$, niin seurauksen 5.27 nojalla $B \ge 0$. Jos nyt $B = 0$, niin lauseen 5.33 nojalla $g^2 \equiv 0$ välillä $[a,b]$, sillä g^2 on jatkuva välillä $[a,b]$. Täten myös $g \equiv 0$ ja edelleen $fg \equiv 0$ välillä $[a,b]$. Siis myös $C = 0$, joten $C^2 \le AB$ $(= 0)$.

Jos taas $B > 0$, niin $AB - C^2 \ge 0$. Siis $C^2 \le AB$. $\square$

5.6 Integraalilaskennan väliarvolause

Seuraavaksi tarkastellaan integraalilaskennan väliarvolausetta.

Lause 5.36 (Integraalilaskennan väliarvolause). *Olkoon funktio f jatkuva välillä $[a, b]$. Tällöin on olemassa sellainen $\xi \in \,]a, b[$, että*

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; f(\xi)(b-a). \tag{5.11}$$

Todistus. Koska f on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$, on olemassa sellaiset pisteet $x_1, x_2 \in [a, b]$, että

$$m = f(x_1) = \min\{f(x) \mid x \in [a, b]\} \quad \text{ja} \quad M = f(x_2) = \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\}.$$

Lisäksi seurauksen 5.26 (s. 105) nojalla

$$m(b-a) \;=\; \int_a^b m\,dx \;\leq\; \int_a^b f(x)\,dx \;\leq\; \int_a^b M\,dx \;=\; M(b-a). \tag{5.12}$$

Koska f on jatkuva, niin seurauksen 5.34 (s. 110) perusteella yhtäsuuruus epäyhtälöissä (5.12) on voimassa vain silloin, kun f on vakiofunktio välillä $[a, b]$.

Jos f on vakiofunktio, niin mikä tahansa välin $]a, b[$ piste kelpaa pisteeksi ξ. Jos taas f ei ole vakio, niin

$$m(b-a) \;<\; \int_a^b f(x)\,dx \;<\; M(b-a).$$

Koska $b - a > 0$ (ts. $[a, b]$ on väli), niin tällöin

$$m \;<\; \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \;<\; M.$$

Lisäksi $x_1 \neq x_2$. Todistuksen yleisyyttä rajoittamatta voidaan olettaa, että $x_1 < x_2$.

Funktio f on nyt jatkuva suljetulla välillä $[x_1, x_2]$, joten se saavuttaa tällä välillä kaikki suurimman ja pienimmän arvonsa väliset arvot. Koska $f(x_1) = m$ ja $f(x_2) = M$, on täten olemassa sellainen $\xi \in \,]x_1, x_2[$ (jolloin myös $\xi \in \,]a, b[\,$), että

$$f(\xi) \;=\; \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

eli

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; f(\xi)(b-a).$$

□

Huomautus. Integraalilaskennan väliarvolauseesta käytetään usein lyhennettä IVAL.

Huomautus 5.37. Integraalilaskennan väliarvolauseessa oletettiin, että $a < b$ (eli $[a, b]$ on väli). Lauseen tulos eli kaava (5.11) pätee myös, kun $b < a$, mutta tällöin on tietysti oletettava, että $\xi \in\,]b, a[$.[1]

Todistus. Olkoon f jatkuva välillä $[b, a]$, missä $b < a$. Integraalilaskennan väliarvolauseen nojalla on tällöin olemassa sellainen $\xi \in\,]b, a[$, että

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; -\int_b^a f(x)\,dx \;\overset{\text{IVAL}}{=}\; -f(\xi)(a-b) \;=\; f(\xi)(b-a).$$

□

Esimerkki 5.19. Määritetään

$$\lim_{t\to 1} \frac{1}{t-1} \int_1^t \sqrt{1+2x^2}\,dx.$$

Olkoon $t \neq 1$. Koska $\sqrt{1+2x^2}$ on jatkuva välillä $[1, t]$ (kun $t > 1$) ja välillä $[t, 1]$ (kun $t < 1$), niin integraalilaskennan väliarvolauseen nojalla on olemassa sellainen $\xi \in\,]1, t[$ (kun $t > 1$) tai $\xi \in\,]t, 1[$ (kun $t < 1$), että

$$\int_1^t \sqrt{1+2x^2}\,dx \;=\; \sqrt{1+2\xi^2}\cdot(t-1).$$

Edelleen $\xi \to 1$, kun $t \to 1$. Siis

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 1} \frac{1}{t-1} \int_1^t \sqrt{1+2x^2}\,dx \;&=\; \lim_{t\to 1} \frac{1}{t-1}\cdot\sqrt{1+2\xi^2}\cdot(t-1)\\
&=\; \lim_{t\to 1} \sqrt{1+2\xi^2}\\
&\overset{\xi\to 1}{=}\; \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

[1] Usein tiedolla, onko $\xi \in\,]a, b[$ vai $\xi \in\,]b, a[$, ei ole merkitystä, mutta joskus tietysti on.

Lause 5.38 (Yleistetty integraalilaskennan väliarvolause). *Jos funktiot f ja g ovat jatkuvia välillä $[a,b]$ ja lisäksi g on välillä $[a,b]$ ei-negatiivinen, niin on olemassa sellainen $\xi \in \,]a,b[$, että*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \;=\; f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx. \tag{5.13}$$

Todistus. Koska f on jatkuva suljetulla välillä $[a,b]$, on olemassa sellaiset pisteet $x_1, x_2 \in [a,b]$, että

$$m = f(x_1) = \min\{f(x) \mid x \in [a,b]\} \quad \text{ja} \quad M = f(x_2) = \max\{f(x) \mid x \in [a,b]\}.$$

Lisäksi $g \geq 0$, joten $mg \leq fg \leq Mg$. Siis seurauksen 5.28 (s. 106) nojalla

$$m \cdot I_g \;=\; \int_a^b m \cdot g(x)\,dx \;\leq\; \int_a^b f(x)g(x)\,dx \;\leq\; \int_a^b M \cdot g(x)\,dx \;=\; M \cdot I_g, \tag{5.14}$$

missä

$$I_g \;=\; \int_a^b g(x)\,dx.$$

Jos nyt $I_g = 0$, niin epäyhtälöketjun (5.14) nojalla myös

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \;=\; 0.$$

Täten molemmat integraalit kaavassa (5.13) ovat nollia ja mikä tahansa välin $]a,b[$ piste kelpaa pisteeksi ξ. Sama tietysti pätee, jos $g \equiv 0$ välillä $[a,b]$.

Olkoon sitten $g \not\equiv 0$ välillä $[a,b]$ ja $I_g \neq 0$. Koska g on jatkuva ja $g \geq 0$, niin tällöin on olemassa sellainen piste $c \in \,]a,b[$, että $g(c) > 0$. Lisäksi $I_g > 0$.

Jos nyt epäyhtälöketjussa (5.14)

$$m \cdot I_g \;=\; \int_a^b f(x)g(x)\,dx \qquad \text{tai} \qquad \int_a^b f(x)g(x)\,dx \;=\; M \cdot I_g,$$

niin seurauksen 5.34 (s. 110) nojalla $fg \equiv m \cdot g$ tai $fg \equiv M \cdot g$ välillä $[a,b]$ eli $(f-m)g \equiv 0$ tai $(f-M)g \equiv 0$ välillä $[a,b]$. Täten $f(x) = m$ tai $f(x) = M$, kun $g(x) > 0$ (kaikilla $x \in [a,b]$). Erityisesti $f(c) = m$ tai $f(c) = M$, joten voidaan valita $\xi = c$.

Jos taas epäyhtälöketjussa (5.14)

$$m \cdot I_g \;<\; \int_a^b f(x)g(x)\,dx \;<\; M \cdot I_g,$$

niin

$$m \;<\; \frac{1}{I_g} \cdot \int_a^b f(x)g(x)\,dx \;<\; M,$$

sillä $I_g > 0$. Lisäksi tällöin $x_1 \neq x_2$. Todistuksen yleisyyttä rajoittamatta voidaan olettaa, että $x_1 < x_2$.

Funktio f on nyt jatkuva suljetulla välillä $[x_1, x_2]$, joten se saavuttaa tällä välillä kaikki suurimman ja pienimmän arvonsa väliset arvot. Koska $f(x_1) = m$ ja $f(x_2) = M$, on täten olemassa sellainen $\xi \in \,]x_1, x_2[$ (jolloin myös $\xi \in \,]a, b[\,$), että

$$f(\xi) \;=\; \frac{1}{I_g} \cdot \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

eli

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \;=\; f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx.$$

□

Esimerkki 5.20. Määritetään

$$\lim_{t \to 0+} \frac{1}{t^2} \int_0^t \frac{x}{1+e^x}\,dx.$$

Olkoon $t > 0$. Koska funktiot $\frac{1}{1+e^x}$ ja x ovat jatkuvia ja $x \geq 0$ välillä $[0, t]$, niin yleistetyn integraalilaskennan väliarvolauseen (ja esimerkin 5.5, s. 85) nojalla on olemassa sellainen $\xi \in \,]0, t[$, että

$$\int_0^t \frac{x}{1+e^x}\,dx \;=\; \frac{1}{1+e^\xi}\int_0^t x\,dx \;=\; \frac{1}{1+e^\xi} \cdot \frac{t^2 - 0^2}{2} \;=\; \frac{t^2}{2(1+e^\xi)}.$$

Edelleen $\xi \to 0+$, kun $t \to 0+$, joten

$$\lim_{t \to 0+} \frac{1}{t^2} \int_0^t \frac{x}{1+e^x}\,dx \;=\; \lim_{t \to 0+} \frac{1}{t^2} \cdot \frac{t^2}{2(1+e^\xi)} \;=\; \lim_{\xi \to 0+} \frac{1}{2(1+e^\xi)} \;=\; \frac{1}{4}.$$

Huomautus. Esimerkin 5.20 raja-arvoa ei saada määritettyä integraalilaskennan väliarvolauseen (lause 5.36) avulla, sillä tällöin tulokseksi saadaan raja-arvo (missä myös $\xi \to 0+$)

$$\lim_{t\to 0+} \frac{1}{t^2} \cdot \frac{\xi}{1+e^{\xi}} \cdot (t-0) = \lim_{t\to 0+} \frac{\xi}{t} \cdot \frac{1}{1+e^{\xi}} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{t\to 0+} \frac{\xi}{t}.$$

Nyt sekä $\xi \to 0+$ että $t \to 0+$, mutta ei tiedetä, millä nopeuksilla ξ ja t lähestyvät nollaa.

Huomautus. Vastaavasti kuin huomautuksessa 5.37 voidaan osoittaa, että yleistetyn integraalilaskennan väliarvolauseen tulos eli kaava (5.13) pätee myös, kun $b < a$. Tällöin on tietysti oletettava, että $\xi \in]b, a[$.

5.7 * Riemannin summa

Olkoon funktio f rajoitettu välillä $[a, b]$ ja $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ jokin välin $[a, b]$ jako. Luvussa 4.1 (huomautus 4.1, s. 66) mainittiin jo jakoon P liittyvä Riemannin summa

$$\boxed{S_P(f, \xi) \;=\; \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}),}$$

missä $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ on mielivaltainen välin $[x_{j-1}, x_j]$ piste.

Esimerkki 5.21. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 4, & \text{kun } x \in [2, 3], \\ 6 - x, & \text{kun } x \in \,]3, 4], \end{cases}$$

jo esimerkissä 4.1 (s. 64) tarkasteltu funktio ja $P = \{2, 3, 4\}$ välin $[2, 4]$ (tasavälinen) jako. Funktion kuvaaja on esitetty kuvassa 4.1 (s. 65).

Funktion f jakoa P vastaavat Riemannin summat $S_P(f, \xi)$ ovat nyt muotoa

$$S_P(f, \xi) \;=\; f(\xi_1)(3 - 2) + f(\xi_2)(4 - 3) \;=\; f(\xi_1) + f(\xi_2),$$

missä $\xi_1 \in [2, 3]$ ja $\xi_2 \in [3, 4]$. Siis esimerkiksi

$$\begin{aligned} f(2) + f(4) &= 0 + 2 = 2 && (\xi_1 = 2, \xi_2 = 4), \\ f(3) + f(4) &= 2 + 2 = 4 && (\xi_1 = 3, \xi_2 = 4), \\ f(\tfrac{5}{2}) + f(\tfrac{7}{2}) &= 1 + \tfrac{5}{2} = \tfrac{7}{2} && (\xi_1 = \tfrac{5}{2}, \xi_2 = \tfrac{7}{2}), \\ f(3) + f(3) &= 2 + 2 = 4 && (\xi_1 = 3, \xi_2 = 3) \end{aligned}$$

ovat funktion f jakoa P vastaavia Riemannin summia $S_P(f, \xi)$.

Sen sijaan yläsumma

$$U_P(f) \;=\; 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \;=\; 5$$

ei ole funktion f jakoa P vastaava Riemannin summa millään pisteiden ξ arvoilla (vrt. esimerkki 4.1, s. 64).

Huomautus. Jos $g(x) = f(\xi_j)$ kaikilla $x \in \,]x_{j-1}, x_j[\;$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, niin Riemannin summa $S_P(f, \xi)$ on porrasfunktion g integraali. Porrasfunktion g arvoiksi jakopisteissä voidaan valita esimerkiksi $g(x_j) = f(x_j)$, kun $j = 0, 1, \ldots, n$.

Merkitään

$$|P| = \max\{x_j - x_{j-1} \mid 1 \leq j \leq n\},$$

eli $|P|$ on jaon P pisimmän osavälin pituus. Tihennetään sitten jakoa siten, että $|P| \to 0$, ja tutkitaan raja-arvoa

$$\lim_{|P|\to 0} S_P(f,\xi).$$

Tällöin

$$\lim_{|P|\to 0} S_P(f,\xi) = L,$$

jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että jokaiselle jaolle $|P| < \delta$ pätee

$$|S_P(f,\xi) - L| < \varepsilon,$$

valittiinpa pisteet ξ_j miten tahansa.

Riemannin summaa käyttämällä saadaan vaihtoehtoinen tapa määritellä Riemann-integraali.

Lause 5.39. *Rajoitettu funktio* $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ *on Riemann-integroituva, jos ja vain jos Riemannin summilla on raja-arvo*

$$\lim_{|P|\to 0} S_P(f,\xi),$$

missä $S_P(f,\xi)$ *on funktion* f *välin* $[a,b]$ *jakoon* P *liittyvä Riemannin summa. Tällöin*

$$\int_a^b f = \lim_{|P|\to 0} S_P(f,\xi).$$

Todistus. 1°: Todistetaan ensin suunta ”$\Rightarrow$”. Oletetaan siis, että f on rajoitettu ja Riemann-integroituva välillä $[a,b]$, ja osoitetaan, että

$$\lim_{|P|\to 0} S_P(f,\xi) = \int_a^b f,$$

missä $S_P(f,\xi)$ on funktion f välin $[a,b]$ jakoon P liittyvä Riemannin summa.

Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Koska f on rajoitettu, on olemassa sellainen $M > 0$, että

$$|f(x)| \leq M \tag{5.15}$$

kaikilla $x \in [a,b]$, ja koska f on Riemann-integroituva, niin Riemannin ehdon nojalla on olemassa sellaiset välin $[a,b]$ porrasfunktiot g ja h, että $g \leq f \leq h$ ja

$$\int_a^b h - \int_a^b g \;<\; \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.16}$$

Olkoon edelleen $P_0 = \{z_0, z_1, \ldots, z_m\}$ jokin sellainen välin $[a,b]$ jako, että P_0 sisältää kaikki sekä porrasfunktion g että porrasfunktion h porraspisteet. Merkitään

$$\delta \;=\; \frac{\varepsilon}{8m \cdot M}.$$

Olkoon nyt $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ jokin sellainen välin $[a,b]$ jako, että $|P| < \delta$. Tällöin jokaista Riemannin summaa $S_P(f,\xi)$ kohti on olemassa sellainen porrasfunktio s, että

$$S_P(f,\xi) \;=\; \int_a^b s. \tag{5.17}$$

Koska $g \leq f \leq h$, niin tällöin

$$g \;\leq\; s \;=\; f(\xi_k) \;\leq\; h \tag{5.18}$$

kaikilla jaon P osaväleillä $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, jotka eivät sisällä jaon P_0 pisteitä.

Tarkastellaan sitten jaon P osavälejä $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, jotka sisältävät jaon P_0 pisteitä. Välin $[a,b]$ päätepisteitä lukuun ottamatta kukin jaon P_0 piste sisältyy yhteen tai kahteen jaon P (suljettuun) osaväliin. Täten jaon P_0 pisteitä sisältäviä jaon P osavälejä on korkeintaan $2m$ kappaletta.

Olkoon nyt

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x), & \text{jos } x \in I'_k \text{ ja } \nexists j \in \{0,1,\ldots,m\} \text{ s.e. } z_j \in I_k, \\ -M, & \text{jos } x \in I'_k \text{ ja } \exists j \in \{0,1,\ldots,m\} \text{ s.e. } z_j \in I_k, \end{cases}$$

ja

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} h(x), & \text{jos } x \in I'_k \text{ ja } \nexists j \in \{0,1,\ldots,m\} \text{ s.e. } z_j \in I_k, \\ M, & \text{jos } x \in I'_k \text{ ja } \exists j \in \{0,1,\ldots,m\} \text{ s.e. } z_j \in I_k, \end{cases}$$

missä $I'_k = \,]x_{k-1}, x_k[$ ja $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Jaon P jakopisteissä asetetaan $\tilde{g}(x_k) = -M$ ja $\tilde{h}(x_k) = M$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$. Tällöin $\tilde{g}$ ja $\tilde{h}$ ovat välillä $[a,b]$ porrasfunktioita ja ominaisuuden $g \leq f \leq h$ sekä epäyhtälöiden (5.15) ja (5.18) perusteella

$$\tilde{g} \;\leq\; f \;\leq\; \tilde{h} \qquad \text{ja} \qquad \tilde{g} \;\leq\; s \;\leq\; \tilde{h}.$$

Täten Riemann-integraalin määrittelyn ja lauseen 4.7 (s. 75) nojalla

$$\int_a^b \tilde{g} \le \int_a^b f \le \int_a^b \tilde{h} \qquad \text{ja} \qquad \int_a^b \tilde{g} \le \int_a^b s \le \int_a^b \tilde{h}$$

ja edelleen

$$\left|\int_a^b s - \int_a^b f\right| \le \int_a^b \tilde{h} - \int_a^b \tilde{g}. \tag{5.19}$$

Koska $g \le h$ välillä $[a,b]$, niin lauseen 4.7 (s. 75) nojalla

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} g \le \int_{x_{k-1}}^{x_k} h$$

jokaisella jaon P osavälillä $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Lisäksi jaon P_0 pisteitä sisältäviä jaon P osavälejä on korkeintaan $2m$ kappaletta ja porrasfunktion arvolla jakopisteessä ei ole vaikutusta porrasintegraalin arvoon. Täten

$$\int_a^b \tilde{h} - \int_a^b \tilde{g} \le \int_a^b h - \int_a^b g + 2m{\cdot}|P|{\cdot}2M \overset{(5.16)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + 4m{\cdot}|P|{\cdot}M. \tag{5.20}$$

Siis

$$\begin{aligned}
\left|S_P(f,\xi) - \int_a^b f\right| &\overset{(5.17)}{=} \left|\int_a^b s - \int_a^b f\right| \\
&\overset{(5.19)}{\le} \int_a^b \tilde{h} - \int_a^b \tilde{g} \\
&\overset{(5.20)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + 4m{\cdot}|P|{\cdot}M \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + 4m \cdot \frac{\varepsilon}{8m{\cdot}M} \cdot M \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Siis

$$\lim_{|P|\to 0} S_P(f,\xi) = \int_a^b f.$$

2°: Todistetaan sitten suunta "$\Leftarrow$". Oletetaan siis, että f on rajoitettu välillä $[a,b]$ ja

$$\lim_{|P|\to 0} S_P(f,\xi) \;=\; L,$$

missä $S_P(f,\xi)$ on funktion f välin $[a,b]$ jakoon P liittyvä Riemannin summa, ja osoitetaan, että f on Riemann-integroituva välillä $[a,b]$ ja

$$\int_a^b f = L.$$

Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Raja-arvon määritelmän nojalla on olemassa sellainen $\delta > 0$, että jos $|P| < \delta$, niin

$$|S_P(f,\xi) - L| \;<\; \varepsilon/4, \tag{5.21}$$

valittiinpa pisteet ξ_j miten tahansa.

Olkoon nyt $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ sellainen välin $[a,b]$ (esimerkiksi tasavälinen) jako, että $|P| < \delta$. Valitaan sellaiset pisteet $\underline{\xi}_k, \overline{\xi}_k \in [x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, että

$$f(\underline{\xi}_k) \;\leq\; \inf_{[x_{k-1},x_k]} f + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

ja

$$f(\overline{\xi}_k) \;\geq\; \sup_{[x_{k-1},x_k]} f - \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

Olkoon edelleen

$$g(x) \;=\; f(\underline{\xi}_k) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)}, \qquad \text{kun } x \in [x_{k-1}, x_k[\quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

ja

$$h(x) \;=\; f(\overline{\xi}_k) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}, \qquad \text{kun } x \in [x_{k-1}, x_k[\quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

sekä $g(b) = h(b) = f(b)$. Tällöin g ja h ovat porrasfunktioita ja $g \leq f \leq h$ välillä $[a,b]$ sekä

$$\begin{aligned}\int_a^b h - \int_a^b g \;&=\; \sum_{k=1}^{n} \Big(f(\overline{\xi}_k) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \Big)(x_k - x_{k-1}) \\ &\quad - \sum_{k=1}^{n} \Big(f(\underline{\xi}_k) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \Big)(x_k - x_{k-1})\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(\overline{\xi}_k)(x_k - x_{k-1})}_{\text{Merk. } S_P(f,\overline{\xi})} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{4(b-a)}(x_k - x_{k-1}) \\
&\qquad - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(\underline{\xi}_k)(x_k - x_{k-1})}_{\text{Merk. } S_P(f,\underline{\xi})} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{4(b-a)}(x_k - x_{k-1}) \\
&= S_P(f,\overline{\xi}) - S_P(f,\underline{\xi}) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \underbrace{\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})}_{=b-a} \\
&= S_P(f,\overline{\xi}) \ - \ S_P(f,\underline{\xi}) \ + \ \frac{\varepsilon}{2} \\
&= S_P(f,\overline{\xi}) \ - \ L \ + \ L \ - \ S_P(f,\underline{\xi}) \ + \ \frac{\varepsilon}{2} \\
&\le \left| S_P(f,\overline{\xi}) - L \right| \ + \ \left| L - S_P(f,\underline{\xi}) \right| \ + \ \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}
$$

missä viimeinen epäyhtälö seuraa kaavasta (5.21). Siis f on Riemannin ehdon nojalla Riemann-integroituva välillä $[a,b]$. $\square$

Huomautus 5.40. Lausetta 5.39 käytettäessä riittää tarkastella tasavälisiä jakoja (harjoitustehtävä).

Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ Riemann-integroituvuuden osoittamiseksi riittää siis osoittaa, että

$$\lim_{|P|\to 0} S_P(f,\xi) \ = \ L,$$

missä P on tasavälinen jako ja $S_P(f,\xi)$ on funktion f välin $[a,b]$ jakoon P liittyvä Riemannin summa.

Pisteen ξ pitää kuitenkin olla mielivaltainen välin piste. Funktion *Riemann-integroituvuutta osoitettaessa* ξ ei voi olla kiinteästi esimerkiksi osavälin päätepiste (toisin kuin esimerkiksi määritettäessä jo integroituvaksi tiedetyn funktion integraalin arvoa) ilman, että samalla suoritetaan myös mahdollisen virhetermin tarkastelu (ks. esimerkki 5.23, s. 124).

Esimerkki 5.22. Määritetään

$$\int_0^4 (3x+2)\,dx$$

Riemannin summien avulla.

Olkoon $f(x) = 3x+2$, $n \in \mathbf{Z}_+$, $t = \frac{4}{n}$ ja $P = \{0, t, 2t, \ldots, nt = 4\}$ välin $[0,4]$ tasavälinen jako. Olkoon lisäksi

$$\xi_k = kt \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Tällöin osavälin päätepisteenä $\xi_k \in [(k-1)t, kt]$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots, n$ ja

$$\begin{aligned}
S_P(f,\xi) &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot t \\
&= \sum_{k=1}^{n} f(kt) \cdot t \\
&= \sum_{k=1}^{n} (3(kt)+2) \cdot t \\
&= 3t^2 \sum_{k=1}^{n} k \;+\; 2t \sum_{k=1}^{n} 1 \\
&= 3t^2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \;+\; 2t \cdot n \\
&= \frac{3 \cdot 16}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \;+\; \frac{2 \cdot 4 \cdot n}{n} \\
&= 24 \cdot \frac{n+1}{n} \;+\; 8 \\
&\to 24 + 8 \\
&= 32, \text{ kun } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Koska f on jatkuvana funktiona Riemann-integroituva välillä $[0,4]$, niin lauseen 5.39 nojalla

$$\int_0^4 (3x+2)\,dx \;=\; \lim_{|P| \to 0} S_P(f,\xi) \;=\; 32.$$

Esimerkki 5.23. Tutkitaan Riemannin summien käyttöä Dirichlet'n funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & \text{kun } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, \end{cases}$$

Riemann-integroituvuuden osoittamisessa välillä $[0,1]$.

Olkoon $n \in \mathbf{Z}_+$, $t = \frac{1}{n}$ ja $P = \{0, t, 2t, \ldots, nt = 1\}$ välin $[0,1]$ tasavälinen jako. Olkoon edelleen

$$\xi_k = kt = \frac{k}{n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

jolloin osavälin päätepisteenä $\xi_k \in [(k-1)t, kt]$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots, n$. Koska $\frac{k}{n} \in \mathbf{Q}$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots, n$, niin

$$\begin{aligned} S_P(f, \xi) &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot t \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(k/n) \cdot t \\ &= \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= \frac{1}{n} \cdot n \\ &= 1 \\ (&\to 1, \text{ kun } n \to \infty). \end{aligned}$$

Nyt siis

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot t = 1,$$

mutta tästä ei voi lauseeseen 5.39 vedoten päätellä, että f olisi Riemann-integroituva välillä $[0,1]$. Valitut pisteet ξ_k eivät nimittäin olleet mielivaltaisia osavälien pisteitä vaan osavälien päätepisteitä, joten tulos ei osoita funktion f Riemann-integroituvuutta välillä $[0,1]$.

Itse asiassa esimerkissä 5.2 (s. 81) osoitettiin, että f ei ole Riemann-integroituva millään reaalilukuvälillä $[a,b]$.

Esimerkki 5.24. Määritetään raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \sqrt[n]{e^k}.$$

Olkoon $f(x) = e^x$, $n \in \mathbf{Z}_+$, $t = \frac{1}{n}$ ja $P = \{0, t, 2t, \dots, nt = 1\}$ välin $[0,1]$ tasavälinen jako. Olkoon lisäksi

$$\xi_k = kt = \frac{k}{n} \qquad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Tällöin osavälin päätepisteenä $\xi_k \in [(k-1)t, kt]$ kaikilla $k = 1, 2, \dots, n$, joten

$$S_P(f,\xi) \;=\; \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot t \;=\; \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n}} \cdot t \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \sqrt[n]{e^k}$$

on funktion e^x välin $[0,1]$ jakoa P vastaava Riemannin summa.

Koska esimerkin 5.6 (s. 87) nojalla e^x on Riemann-integroituva välillä $[0,1]$ ja

$$\int_0^1 e^x \, dx \;=\; e - 1,$$

niin lauseen 5.39 nojalla

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \sqrt[n]{e^k} \;=\; \lim_{|P|\to 0} S_P(f,\xi) \;=\; \int_0^1 e^x \, dx \;=\; e - 1.$$

Huomautus. Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ Riemannin summa voitaisiin muodostaa, vaikka f ei ole rajoitettu välillä $[a,b]$. Voidaan kuitenkin osoittaa, että jos f ei ole rajoitettu välillä $[a,b]$, niin

$$\lim_{|P|\to 0} S_P(f,\xi)$$

ei ole olemassa (harjoitustehtävä).

6 Integraali ja derivaatta

6.1 Integraali ylärajansa funktiona

Olkoon funktio f Riemann-integroituva välin I jokaisella suljetulla osavälillä ja c välin I jokin kiinteä luku. Tällöin integraali

$$\int_c^x f(t)\,dt, \qquad x \in I,$$

määrittelee funktion $G(x)\colon I \to \mathbf{R}$,

$$\boxed{G(x) \;=\; \int_c^x f(t)\,dt.} \tag{6.1}$$

Siis jokaista muuttujan x arvoa vastaa jokin tietty reaaliluku, joka on kyseessä olevan integraalin arvo.

Esimerkki 6.1. Olkoon $I = [0,5]$ ja

$$f(x) \;=\; 3,$$

kun $x \in [0,5]$. Määritetään ehdon (6.1) funktio $G\colon [0,5] \to \mathbf{R}$.

Vakiofunktiona f on Riemann-integroituva välillä $[0,5]$ (ja samalla jokaisella välin $[0,5]$ suljetulla osavälillä). Jos $c = 0$, niin ehdon (6.1) funktioksi saadaan $G\colon [0,5] \to \mathbf{R}$,

$$G(x) \;=\; \int_0^x 3\,dt \;=\; 3\cdot(x-0) \;=\; 3x.$$

Jos taas $c = 2$, niin

$$G(x) \;=\; \int_2^x 3\,dt \;=\; 3\cdot(x-2) \;=\; 3x-6,$$

ja jos $c = 5$, niin

$$G(x) \;=\; \int_5^x 3\,dt \;=\; 3\cdot(x-5) \;=\; 3x-15.$$

Yleisesti

$$G(x) \;=\; \int_c^x 3\,dt \;=\; 3\cdot(x-c) \;=\; 3x-3c,$$

jos $c \in [0,5]$.

Lause 6.1. *Ehdon* (6.1) *funktio G on jatkuva välillä I.*

Todistus. Olkoon $x \in I$. Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Olkoon edelleen $[a, b]$ jokin sellainen välin I suljettu osaväli, että x on välin $[a, b]$ sisäpiste (jos x on välin I päätepiste, valitaan $a = x$ tai $b = x$). Riemann-integroituvana funktiona f on rajoitettu välillä $[a, b]$. Siis on olemassa sellainen $M > 0$, että

$$|f(t)| \leq M \qquad \forall t \in [a, b].$$

Jos nyt $x + h \in [a, b]$, niin

$$\begin{aligned}
|G(x+h) - G(x)| &= \left| \int_c^{x+h} f(t)\,dt - \int_c^{x} f(t)\,dt \right| \\
&= \left| \int_c^{x} f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \int_c^{x} f(t)\,dt \right| \\
&= \left| \int_x^{x+h} f(t)\,dt \right| \\
&\leq \left| \int_x^{x+h} |f(t)|\,dt \right| \\
&\leq \left| \int_x^{x+h} M\,dt \right| \\
&= |M \cdot ((x+h) - x)| \\
&= M \cdot |h| \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

aina, kun

$$|h| < \delta = \frac{\varepsilon}{M}.$$

Siis jatkuvuuden määritelmän[1] nojalla funktio G on jatkuva pisteessä x ja siis myös välillä I. □

[1] Jos $x = a$, tarkastellaan oikealta jatkuvuutta, ja jos $x = b$, tarkastellaan vasemmalta jatkuvuutta.

Esimerkki 6.2. Olkoon $I = [-1, 1]$ ja

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } -1 \le x < 0, \\ 1, & \text{kun } 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

Määritetään ehdon (6.1) funktio $G\colon [-1,1] \to \mathbf{R}$, kun $c \in [-1, 0]$.

Porrasfunktiona f on Riemann-integroituva välillä $[-1, 1]$ (ja jokaisella sen suljetulla osavälillä). Jos nyt $x < 0$, niin

$$\int_c^x f(t)\,dt \;=\; \int_c^x 0\,dt \;=\; 0,$$

ja jos $x \ge 0$, niin

$$\int_c^x f(t)\,dt \;=\; \int_c^0 0\,dt + \int_0^x 1\,dt \;=\; 0 + 1 \cdot (x - 0) \;=\; x.$$

Siis ehdon (6.1) funktioksi saadaan $G\colon [-1,1] \to \mathbf{R}$,

$$G(x) \;=\; \int_c^x f(t)\,dt \;=\; \begin{cases} 0, & \text{kun } -1 \le x < 0, \\ x, & \text{kun } 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

Huomautus 6.2. Esimerkin 6.2 funktio G on selvästi jatkuva välillä $[-1, 1]$. Funktio G ei kuitenkaan ole tällä välillä derivoituva, sillä G ei ole derivoituva pisteessä $x = 0$ (totea).

Esimerkki 6.3. Vastaavasti kuin esimerkissä 6.2 voidaan osoittaa (harjoitustehtävä), että jos $I = [-1, 1]$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } -1 \le x < 0, \\ 1, & \text{kun } 0 \le x \le 1, \end{cases}$$

ja $c \in [0, 1]$, niin ehdon (6.1) funktioksi saadaan $G\colon [-1,1] \to \mathbf{R}$,

$$G(x) \;=\; \begin{cases} -c, & \text{kun } -1 \le x < 0, \\ x - c, & \text{kun } 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

Lause 6.3. *Jos funktio f on jatkuva välillä I, niin ehdon* (6.1) *funktio G on paitsi jatkuva myös derivoituva välillä I ja*

$$G'(x) \;=\; f(x) \qquad \forall x \in I.$$

Todistus. Olkoon $x \in I$. Olkoon edelleen $[a, b]$ jokin sellainen välin I suljettu osaväli, että x on välin $[a, b]$ sisäpiste (jos x on välin I päätepiste, valitaan $a = x$ tai $b = x$).

Olkoon $x + h \in [a, b]$ $(h \neq 0)$. Koska f on jatkuva välillä $[a, b]$, niin integraalilaskennan väliarvolauseen nojalla on olemassa sellainen $\xi_h \in \,]x, x + h[$ (jos $h > 0$) tai $\xi_h \in \,]x + h, x[$ (jos $h < 0$), että

$$\begin{aligned}
\frac{G(x+h) - G(x)}{h} \;&=\; \frac{1}{h}\left(\int_c^{x+h} f(t)\,dt - \int_c^{x} f(t)\,dt\right) \\
&=\; \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(t)\,dt \\
&\overset{\text{IVAL}}{=}\; \frac{1}{h} \cdot f(\xi_h) \cdot \big((x+h) - x\big) \\
&=\; f(\xi_h).
\end{aligned}$$

Lisäksi $\xi_h \to x$, kun $h \to 0$. Koska f on jatkuva välillä $[a, b]$, niin tällöin

$$\lim_{h \to 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} \;=\; \lim_{h \to 0} f(\xi_h) \;=\; \lim_{\xi_h \to x} f(\xi_h) \;=\; f(x).$$

Täten derivaatan määritelmän[1] nojalla funktio G on derivoituva pisteessä x ja siis myös välillä I ja

$$G'(x) \;=\; f(x) \qquad \forall x \in I.$$ □

Huomautus 6.4. Lauseessa 6.3 (kuten yleisestikin) derivoituvuus suljetun välin I päätepisteissä (tai puoliavoimen välin toisessa päätepisteessä) tarkoittaa oikeanpuoleisen (välin alkupiste) tai vasemmanpuoleisen (välin loppupiste) derivaatan olemassaoloa.

[1] Jos $x = a$, tarkastellaan oikeanpuoleista derivaattaa, ja jos $x = b$, tarkastellaan vasemmanpuoleista derivaattaa.

Huomautus 6.5. Lauseen 6.3 tulos voidaan esittää myös seuraavassa muodossa. Jos funktio f on jatkuva välillä I ja $c \in I$, niin

$$\frac{d}{dx}\int_c^x f(t)\,dt \;=\; f(x) \qquad \forall x \in I.$$

Esimerkki 6.4. Koska

$$f(t) \;=\; |t-1| + \sin t$$

on jatkuva kaikilla $t \in \mathbf{R}$, niin lauseen 6.3 nojalla

$$\frac{d}{dx}\int_0^x (|t-1| + \sin t)\,dt \;=\; |x-1| + \sin x \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Huomautus 6.6. Jos funktio f on jatkuva välillä I ja $c \in I$, niin

$$\frac{d}{dx}\int_x^c f(t)\,dt \;=\; \frac{d}{dx}\Big(-\int_c^x f(t)\,dt\Big) \;=\; -f(x) \qquad \forall x \in I.$$

Huomautus 6.7. Vaikka funktio

$$G(x) \;=\; \int_c^x f(t)\,dt$$

riippuu pisteen c valinnasta, niin derivaatta $G'(x)$ ei riipu pisteen c valinnasta.

Todistus. Koska

$$\int_{c_1}^x f(t)\,dt \;=\; \int_{c_1}^{c_2} f(t)\,dt + \int_{c_2}^x f(t)\,dt \;=\; \text{vakio} + \int_{c_2}^x f(t)\,dt \qquad \forall c_1, c_2 \in I,$$

niin

$$\frac{d}{dx}\int_{c_1}^x f(t)\,dt \;=\; \frac{d}{dx}\int_{c_2}^x f(t)\,dt \qquad \forall c_1, c_2 \in I.$$

□

Huomautus 6.8. Olkoon

$$h(x) \;=\; \overbrace{G(r(x))}^{\text{yhd.funktio}} \;=\; \int_c^{r(x)} f(t)\,dt,$$

missä $r(x)$ on funktion f jatkuvuusalueeseen[1] kuuluva derivoituva funktio. Tällöin

$$h'(x) \;=\; \frac{d}{dx}\int_c^{r(x)} f(t)\,dt \;=\; r'(x)\cdot G'(r(x)) \;=\; r'(x)\cdot f(r(x)).$$

Edelleen vastaavin oletuksin

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int_{r_1(x)}^{r_2(x)} f(t)\,dt \;&=\; \frac{d}{dx}\Big(\int_{r_1(x)}^{c} f(t)\,dt + \int_c^{r_2(x)} f(t)\,dt\Big) \\
&=\; -r_1'(x)\cdot f(r_1(x)) + r_2'(x)\cdot f(r_2(x)) \\
&=\; r_2'(x)\,f(r_2(x)) - r_1'(x)\,f(r_1(x)).
\end{aligned}$$

Esimerkki 6.5. Koska $\sqrt{1+t^2}$ on jatkuva kaikilla $t \in \mathbf{R}$, niin huomautuksen 6.8 nojalla

$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2}\,dt \;=\; 2x\cdot\sqrt{1+x^4} \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Esimerkki 6.6. Vastaavasti kuin esimerkissä 6.5 saadaan huomautuksen 6.8 nojalla

$$\frac{d}{dx}\int_{2x}^{3x} \sin t\,dt \;=\; 3\cdot\sin 3x - 2\cdot\sin 2x.$$

Sama tulos saataisiin tietysti myös hajoittamalla integraali ensin osiin

$$\int_{2x}^{3x} \sin t\,dt \;=\; \int_{2x}^{0} \sin t\,dt + \int_0^{3x} \sin t\,dt \;=\; \int_0^{3x} \sin t\,dt - \int_0^{2x} \sin t\,dt$$

ja derivoimalla sitten näin saadut integraalit.

[1] Jos r on derivoituva pisteessä x ja G on derivoituva pisteessä $r(x)$, niin yhdistetty funktio $G \circ r$ on derivoituva pisteessä x.

Esimerkki 6.7. Määritetään $f'(x)$, kun

$$f(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} t\,dt.$$

Derivaatta voidaan määrittää nyt kahdella eri tavalla. Helpompi tapa on käyttää huomautusta 6.8, jolloin saadaan suoraan

$$f'(x) \;=\; -\sin x \cdot \cos x - \cos x \cdot \sin x \;=\; -2\sin x \cos x.$$

Toisaalta integraalin arvo voidaan nyt myös laskea, sillä esimerkin 5.5 (s. 85) nojalla

$$\int_{\sin x}^{\cos x} t\,dt \;=\; \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2}.$$

Tällöin saadaan

$$\begin{aligned} f'(x) &= D\Big(\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2}\Big) \\ &= \frac{2 \cdot \cos x \cdot (-\sin x) - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{2} \\ &= -2\sin x \cos x. \end{aligned}$$

Esimerkki 6.8. Määritetään $f'(x)$, kun

$$f(x) = \int_0^{x^3} t \cos x\,dt.$$

Huomautuksen 6.8 ja esimerkin 5.5 (s. 85) nojalla

$$\begin{aligned} f'(x) &= D\Bigg(\int_0^{x^3} t \cos x\,dt\Bigg) \\ &= D\Bigg(\cos x \int_0^{x^3} t\,dt\Bigg) \\ &= -\sin x \cdot \int_0^{x^3} t\,dt \;+\; \cos x \cdot D\Bigg(\int_0^{x^3} t\,dt\Bigg) \\ &= -\sin x \cdot \frac{(x^3)^2 - 0^2}{2} \;+\; \cos x \cdot 3x^2 \cdot x^3 \\ &= 3x^5 \cos x - \frac{x^6}{2}\sin x. \end{aligned}$$

Esimerkki 6.9. Määritetään

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_0^x \cos(t^2)\, dt.$$

Nyt

$$\lim_{x\to 0} \int_0^x \cos(t^2)\, dt = 0,$$

joten käytetään l'Hospitalin sääntöä. Koska

$$\frac{d}{dx} \int_0^x \cos(t^2)\, dt = \cos(x^2),$$

niin

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_0^x \cos(t^2)\, dt = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \cos(t^2)\, dt}{x} \overset{\mathrm{H}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2)}{1} = 1.$$

Esimerkki 6.10. Määritetään esimerkin 5.20 (s. 115) raja-arvo

$$\lim_{t\to 0+} \frac{1}{t^2} \int_0^t \frac{x}{1+e^x}\, dx$$

käyttämällä l'Hospitalin sääntöä.

Koska

$$\frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x}{1+e^x}\, dx = \frac{t}{1+e^t},$$

niin

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0+} \frac{1}{t^2} \int_0^t \frac{x}{1+e^x}\, dx &= \lim_{t\to 0+} \frac{\int_0^t \frac{x}{1+e^x}\, dx}{t^2} \\
&\overset{\mathrm{H}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{t\to 0+} \frac{\frac{t}{1+e^t}}{2t} \\
&= \lim_{t\to 0+} \frac{1}{2(1+e^t)} \\
&= \frac{1}{2(1+1)} \\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Esimerkki 6.11. Määritetään funktion

$$f(x) = \int_0^{2x} (t-1)(t-2)^2 \, dt$$

paikalliset ääriarvokohdat ja ääriarvojen laatu.

Nyt

$$f'(x) \;=\; 2 \cdot (2x-1)(2x-2)^2 \;=\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \tfrac{1}{2} \text{ tai } x = 1$$

ja

$$\begin{cases} f'(x) < 0, & \text{kun } x < \frac{1}{2}, \\ f'(x) \geq 0, & \text{kun } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Siis funktiolla f on pisteessä $x = \frac{1}{2}$ aito paikallinen minimikohta. Piste $x = 1$ sen sijaan ei ole ääriarvokohta.

6.2 Integraalifunktio

Riemann-integraalin arvon määrittäminen tähän mennessä esitettyjä menetelmiä käyttäen on hankalaa. Seuraavaksi johdetaan oleellisesti helpompi tapa määrittää Riemann-integraalin arvo. Aloitetaan määritelmällä.

Määritelmä 6.1. Olkoon funktio f määritelty välillä I. Jos on olemassa sellainen funktio F, että

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in I,$$

niin F on funktion f *integraalifunktio (primitiivi, antiderivaatta)* välillä I.

Esimerkki 6.12. Funktio $F(x) = \arctan x$ on funktion

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

integraalifunktio koko reaalilukujoukossa, sillä (ks. esimerkki 2.28, s. 27)

$$D(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Huomautus 6.9. Jos on olemassa sellainen F, että $F'(x) = f(x)$ kaikilla $x \in I$, niin F on jatkuva välillä I.

Huomautus 6.10. Lauseen 6.3 (s. 129) nojalla välillä I jatkuvalla funktiolla f on ainakin yksi integraalifunktio välillä I, nimittäin funktio

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt, \qquad c \in I.$$

Huomautus 6.11. Jos funktio ei ole jatkuva välillä I, niin funktiolla ei välttämättä ole integraalifunktiota kyseisellä välillä, vaikka funktio olisi Riemann-integroituva välillä I (ks. huomautukset 6.2 (s. 128) ja 6.18, s. 138).[1]

[1] Vaihtoehtoisesti voitaisiin kutsua sivun 126 ehdon (6.1) funktiota G funktion f integraalifunktioksi. Tällöin integraalifunktio ja primitiivi (antiderivaatta) merkitsisivät eri asiaa ja kaikilla Riemann-integroituvilla funktioilla olisi integraalifunktio. Jatkuvilla funktioilla tällaisia eroja ei synny, joten käsitteitä ei tällä kurssilla erotella.

Lause 6.12. *Jos F on funktion f integraalifunktio välillä I, niin funktion f kaikkien integraalifunktioiden joukko välillä I on funktiojoukko $\{F+C \mid C \in \mathbf{R}\}$.*

Todistus. 1°: Jokainen muotoa $F + C$ oleva funktio on funktion f integraalifunktio välillä I, sillä

$$D(F+C) \;=\; D(F) + \overbrace{D(C)}^{=0} \;=\; D(F) \;=\; f.$$

2°: Olkoon G jokin funktion f integraalifunktio välillä I eli

$$G'(x) \;=\; f(x) \qquad \forall x \in I.$$

Tällöin

$$D(G(x) - F(x)) \;=\; f(x) - f(x) \;=\; 0 \qquad \forall x \in I,$$

joten integraalilaskennan peruslauseen nojalla $G - F$ on vakio. Siis on olemassa sellainen $C \in \mathbf{R}$, että

$$G(x) - F(x) \;=\; C \qquad \forall x \in I.$$

Täten

$$G \;=\; F + C.$$

□

Esimerkki 6.13. Esimerkin 6.12 perusteella $F(x) = \arctan x$ on funktion

$$f(x) \;=\; \frac{1}{1+x^2}$$

integraalifunktio koko reaalilukujoukossa. Täten myös esimerkiksi

$$G(x) \;=\; \arctan x - 3000 \qquad \text{ja} \qquad H(x) \;=\; 2\pi + \arctan x$$

ovat funktion f integraalifunktioita koko reaalilukujoukossa. Yleisesti kaikki funktion f integraalifunktiot ovat muotoa

$$\arctan x + C,$$

missä $C \in \mathbf{R}$.

Lause 6.13 (Integraalilaskennan päälause).[1] *Olkoon funktio f jatkuva välillä $[a, b]$ ja F jokin sen integraalifunktio tällä välillä. Tällöin*

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; F(b) - F(a).$$

Todistus. Koska f on jatkuva välillä $[a, b]$, niin huomautuksen 6.10 nojalla funktio

$$G(x) \;=\; \int_a^x f(t)\,dt$$

on funktion f integraalifunktio välillä $[a, b]$. Lauseen 6.12 nojalla G voidaan esittää kaikilla $x \in [a, b]$ muodossa

$$G(x) \;=\; \int_a^x f(t)\,dt \;=\; F(x) \,+\, C,$$

missä $C \in \mathbf{R}$. Lisäksi

$$C \;=\; \int_a^a f(t)\,dt \,-\, F(a) \;=\; -F(a),$$

joten

$$\int_a^x f(t)\,dt \;=\; F(x) - F(a) \qquad \forall x \in [a, b].$$

Sijoittamalla tähän lausekkeeseen $x = b$ saadaan

$$\int_a^b f(t)\,dt \;=\; F(b) - F(a).$$

□

Huomautus 6.14. Lauseen 6.13 tulos pätee myös, kun $b \leq a$. Jos $b = a$, niin yhtälön kumpikin puoli on nolla, ja jos $b < a$, niin

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; -\int_b^a f(x)\,dx \;=\; -(F(a) - F(b)) \;=\; F(b) - F(a).$$

[1] Lause tunnetaan myös nimellä *analyysin peruslause* tai tarkemmin sanotttuna analyysin peruslause, osa II. Tällöin analyysin peruslauseen osa I on lause 6.3 (s. 129).

Huomautus 6.15. Usein merkitään

$$F(b) - F(a) = \Big/_{a}^{b} F(x).$$

Tällöin lauseen 6.13 tulos voidaan esittää muodossa

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big/_{a}^{b} F(x).$$

Huomautus 6.16. Funktion f jatkuvuuden sijasta lauseessa 6.13 riittää olettaa (harjoitustehtävä), että f on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$ ja F on sellainen välillä $[a, b]$ jatkuva ja välillä $]a, b[$ derivoituva funktio, että

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in\,]a, b[\,.$$

Huomautus 6.17. Huomautuksessa 6.16 oletus funktion f Riemann-integroituvuudesta välillä $[a, b]$ on tarpeellinen. Funktio f ei nimittäin välttämättä ole Riemann-integroituva välillä $[a, b]$, vaikka on olemassa sellainen välillä $[a, b]$ jatkuva ja välillä $]a, b[$ derivoituva funktio F, että

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in\,]a, b[\,.$$

Huomautus 6.18. Jos välillä $[a, b]$ Riemann-integroituvalla funktiolla f on välillä $[a, b]$ integraalifunktio, niin myös funktio

$$G(x) = \int_c^x f(t)\,dt \qquad (c \in [a, b])$$

on funktion f integraalifunktio välillä $[a, b]$ (harjoitustehtävä).

Esimerkki 6.14. Koska

$$D(x^3) \;=\; 3x^2 \qquad \forall x \in \mathbf{R},$$

niin x^3 on funktion $3x^2$ (jokin) integraalifunktio (millä tahansa välillä $I \subseteq \mathbf{R}$). Koska $3x^2$ on jatkuva millä tahansa välillä $I \subseteq \mathbf{R}$, niin lauseen 6.13 ja huomautuksen 6.14 nojalla

$$\int_1^b 3x^2\,dx \;=\; \Big/_{1}^{b} x^3 \;=\; b^3 - 1^3 \;=\; b^3 - 1 \qquad \forall b \in \mathbf{R}.$$

Esimerkki 6.15. Koska

$$D(e^x) \;=\; e^x \qquad \forall x \in \mathbf{R},$$

niin e^x on funktion e^x (jokin) integraalifunktio (millä tahansa välillä $I \subseteq \mathbf{R}$). Koska e^x on jatkuva millä tahansa välillä $I \subseteq \mathbf{R}$, niin lauseen 6.13 ja huomautuksen 6.14 nojalla (vrt. esimerkki 5.6, s. 87)

$$\int_0^b e^x\,dx \;=\; \Big/_{0}^{b} e^x \;=\; e^b - e^0 \;=\; e^b - 1 \qquad \forall b \in \mathbf{R}.$$

Esimerkki 6.16. Vastaavasti

$$D(\arctan x) \;=\; \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \in \mathbf{R},$$

joten

$$\int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx \;=\; \Big/_{0}^{b} \arctan x \;=\; \arctan b - \arctan 0 \;=\; \arctan b \qquad \forall b \in \mathbf{R}.$$

Esimerkiksi

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \;=\; \arctan 1 \;=\; \frac{\pi}{4}.$$

Esimerkki 6.17. Vastaavasti

$$D(\log t) \;=\; \frac{1}{t} \qquad \forall t > 0,$$

joten

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt \;=\; \Big/_{1}^{x} \log t \;=\; \log x - \log 1 \;=\; \log x \qquad \forall x > 0.$$

Esimerkki 6.18. Koska

$$D(2\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \forall x > 0,$$

niin

$$\int_1^a \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \Big/_1^a 2\sqrt{x} = 2\sqrt{a} - 2\sqrt{1} = 2\sqrt{a} - 2 \qquad (a > 0).$$

Esimerkki 6.19. Koska

$$D\Big(-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}\Big) = -\frac{2}{\pi}\cdot\Big(-\sin\frac{\pi x}{2}\Big)\cdot\frac{\pi}{2} = \sin\frac{\pi x}{2} \qquad \forall x \in \mathbf{R},$$

niin

$$\int_0^1 \sin\frac{\pi x}{2}\,dx = \Big/_0^1 -\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2} = 0 - \Big(-\frac{2}{\pi}\cdot 1\Big) = \frac{2}{\pi}.$$

Huomautus. Funktion f integraalifunktion F määrittämistä tarkastellaan luvussa 7.

Huomautus. Yhteydet kurssien Analyysi A ja B joidenkin peruslauseiden välillä:

$$\begin{array}{ccccc} & \nearrow & B_1 \to B_2 \to B_3 & \searrow & \\ A_0 \to A_1 & & & & B_7, \\ & \searrow & B_4 \to B_5 \to B_6 & \nearrow & \end{array}$$

missä

$$\begin{aligned}
A_0 &= \mathbf{R}\text{:n täydellisyysaksiooma,}\\
A_1 &= \text{Suljetulla välillä jatkuvan funktion ominaisuudet,}^{1}\\
B_1 &= \text{Rollen lause,}\\
B_2 &= \text{Differentiaalilaskennan väliarvolause,}\\
B_3 &= \text{Integraalilaskennan peruslause,}\\
B_4 &= \text{Jatkuvan funktion integroituvuus,}\\
B_5 &= \text{Integraalilaskennan väliarvolause,}\\
B_6 &= \text{Jatkuvan funktion integraalifunktion derivoituvuus,}\\
B_7 &= \text{Integraalilaskennan päälause.}
\end{aligned}$$

[1] Suljetulla välillä jatkuva funktio on kyseisellä välillä rajoitettu ja saavuttaa suurimman sekä pienimmän arvonsa ja jokaisen niiden välissä olevan arvon. Edelleen suljetulla välillä jatkuva funktio on tällä välillä tasaisesti jatkuva.

7 * Integrointimenetelmiä

7.1 Määräämätön integraali

Integraalilaskennan päälause (lause 6.13, s. 137) antaa helpon tavan laskea annetun funktion Riemann-integraaleja, jos tunnetaan jokin kyseisen funktion integraalifunktio. Seuraavaksi tutkitaan lyhyesti muutamia menetelmiä, joilla tällainen integraalifunktio voidaan löytää.

Aloitetaan määrittelemällä, mitä määräämättömällä integraalilla tarkoitetaan.

Määritelmä 7.1. Olkoon funktio f jatkuva välillä I. Tällöin funktion f integraalifunktioiden (välillä I) joukkoa sanotaan funktion f *määräämättömäksi integraaliksi* ja sitä merkitään

$$\int f(x)\,dx \quad (\text{tai } \int f).$$

Funktion f Riemann-integraalia välillä I voidaan vastaavasti kutsua funktion f *määrätyksi integraaliksi.* Määräämätön integraali on funktiojoukko, määrätty integraali taas on reaaliluku. Kumpaakin voidaan kutsua lyhyesti funktion integraaliksi, jos asiayhteydestä käy selville, tarkoitetaanko määräämätöntä vai määrättyä integraalia. Funktion integraalin määrittämistä kutsutaan funktion *integroinniksi.*

Huomautus. Jos siis $f(x)$ on jatkuva ja $F'(x) = f(x)$ välillä I, niin

$$\int f(x)\,dx \;=\; F(x) + C, \qquad C \in \mathbf{R}.$$

Huomautus. Derivaatan laskusäännöistä seuraa suoraan, että jos kyseiset määräämättömät integraalit ovat olemassa, niin

$$\int \lambda\,(f(x) + g(x))\,dx \;=\; \lambda \int f(x)\,dx + \lambda \int g(x)\,dx, \qquad \lambda \in \mathbf{R}.$$

Huomautus 7.1. Alkeisfunktioiden derivoimiskaavojen perusteella saadaan seuraavat integrointikaavat ($C \in \mathbf{R}$). Kaavoja voidaan tietenkin soveltaa vain sellaisilla väleillä I, joilla integroitavat funktiot ovat jatkuvia.

$$\int 0\,dx = C, \tag{7.1}$$

$$\int 1\,dx = x + C, \tag{7.2}$$

$$\int x^a\,dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C \quad (a \neq -1), \tag{7.3}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x}\,dx &= \log|x| + C \quad (0 \notin I) \\ &= \begin{cases} \log x + C, & \text{kun } x > 0, \\ \log(-x) + C, & \text{kun } x < 0, \end{cases}\end{aligned} \tag{7.4}$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C, \tag{7.5}$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} + C \quad (a > 0, a \neq 1), \tag{7.6}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \tag{7.7}$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C, \tag{7.8}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C, \tag{7.9}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C, \tag{7.10}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C, \tag{7.11}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C. \tag{7.12}$$

Huomautus. Jos funktion määräämätön integraali tunnetaan, funktion määrätty integraali eli Riemann-integraali voidaan laskea käyttämällä integraalilaskennan päälausetta (lause 6.13, s. 137).

Esimerkki 7.1. Osoitetaan, että jos $n \in \mathbf{Z}$, niin

$$\int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|\, dx \;=\; 2.$$

Tarkastellaan erikseen luvun n parillisia ja parittomia arvoja. Kun n on parillinen, niin sinin integrointikaavaa käyttämällä saadaan

$$\begin{aligned}
\int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|\, dx &= \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin x\, dx \\
&= \Big/_{n\pi}^{(n+1)\pi} - \cos x \\
&= -(\cos((n+1)\pi) - \cos(n\pi)) \\
&= -(-1-1) \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Kun n on pariton, saadaan vastaavasti

$$\begin{aligned}
\int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|\, dx &= \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} -\sin x\, dx \\
&= \Big/_{n\pi}^{(n+1)\pi} \cos x \\
&= \cos((n+1)\pi) - \cos(n\pi) \\
&= 1-(-1) \\
&= 2,
\end{aligned}$$

joten tarkasteltavan Riemann-integraalin arvo on kaksi kaikilla $n \in \mathbf{Z}$.

Huomautus 7.2. Kaikkien jatkuvien funktioiden määräämätöntä integraalia ei voida lausua alkeisfunktioiden avulla äärellisessä suljetussa muodossa. Tällaisia ovat esimerkiksi

$$\int \sin(x^2)\, dx, \;\; \int \frac{\sin x}{x}\, dx, \;\; \int e^{-x^2}\, dx, \;\; \int \frac{\arctan x}{x}\, dx, \;\; \int \frac{dx}{\log x}, \;\; \int \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}, \;\; \ldots$$

Tällöin vastaavat määrätyt integraalit, esimerkiksi

$$\int\limits_0^1 e^{-x^2}\, dx,$$

pitää laskea jotenkin muuten kuin integraalilaskennan päälausetta käyttäen.

Huomautus 7.3. Käyttämällä yhdistetyn funktion derivointikaavaa saadaan integrointisääntö

$$\int f'(x) \cdot g'(f(x))\, dx \;=\; g(f(x)) + C. \tag{7.13}$$

Sääntöä voidaan tietysti soveltaa vain, jos kaikki vaadittavat oletukset ovat voimassa.

Yhdistetyn funktion derivointikaavan käyttö integrointimenetelmänä voidaan usein korvata sijoitussäännön käytöllä (ks. huomautus 7.12, s. 157).

Esimerkki 7.2. Kun $a \neq 0$, niin käyttämällä yhdistetyn funktion integrointisääntöä (7.13) ja kosinin derivointikaavaa saadaan

$$\int \sin(ax)\, dx \;=\; -\frac{1}{a}\int a\,(-\sin(ax))\, dx \;=\; -\frac{1}{a}\cos(ax) + C.$$

Jos $a = 0$, niin tuloksena on tietysti pelkästään vakiofunktio C.

Esimerkki 7.3. Käyttämällä yhdistetyn funktion integrointisääntöä sekä potenssin ja sinin derivointikaavoja saadaan

$$\int \cos x \sin^3 x\, dx \;=\; \frac{1}{4}\int 4\cos x \cdot \sin^3 x\, dx \;=\; \frac{1}{4}\sin^4 x + C.$$

Tulos saadaan helposti myös sijoitussäännön avulla (ks. esimerkki 7.18 (s. 158) ja sitä koskevat huomautukset 7.14 ja 7.15).

Vastaavasti yleisesti (integraalin olemassaoloehtojen ollessa voimassa)

$$\int f'(x) f(x)^a\, dx \;=\; \frac{1}{a+1} f(x)^{a+1} + C \qquad (a \neq -1).$$

Esimerkki 7.4. Kun $a \neq 0$,[1] niin käyttämällä yhdistetyn funktion integrointisääntöä ja logaritmin derivointikaavaa saadaan

$$\int \frac{1}{ax+b}\, dx \;=\; \frac{1}{a}\int a \cdot \frac{1}{ax+b}\, dx \;=\; \frac{1}{a}\log|ax+b| + C$$

kaikilla niillä väleillä, jotka eivät sisällä pistettä $x = -\frac{b}{a}$.

Vastaavasti yleisesti, jos $f(x) \neq 0$ (ja integraalin olemassaoloehdot ovat voimassa), niin

$$\int f'(x) f^{-1}(x)\, dx \;=\; \int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx \;=\; \log|f(x)| + C.$$

[1] Jos $a = 0$ (ja $b \neq 0$), niin kyseessä on yksinkertaisesti vakiofunktion integrointi.

Esimerkki 7.5. Kotangentin ja tangentin määrittelyalueilla saadaan vastaavasti kuin esimerkissä 7.4

$$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int \cos x \cdot \frac{1}{\sin x}\,dx = \log|\sin x| + C$$

ja

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int (-\sin x)\cdot\frac{1}{\cos x}\,dx = -\log|\cos x| + C.$$

Joskus integroitavaa lauseketta kannattaa muokata ennen integrointia. Esimerkiksi trigonometriset funktiot voidaan joskus muuntaa sopivia kaavoja käyttämällä integroinnin kannalta oleellisesti yksinkertaisempaan muotoon (ks. luku 7.5). Sopivaa muokkausta voidaan hyödyntää myös muiden funktioiden kohdalla.

Esimerkki 7.6. Olkoon $|x| < |a|$ $(a \neq 0)$. Määritetään

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx.$$

Koska integroitava funktio muistuttaa arkussinin derivaattaa, muokataan lauseke vastaamaan kyseistä derivaattaa. Käyttämällä muokkaamalla saatuun lausekkeeseen yhdistetyn funktion derivointikaavaa saadaan

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{a^2(1 - (\frac{x}{a})^2)}}\,dx \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{a^2}\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}}\,dx \\
&= \int \frac{1}{|a|}\cdot\frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{x}{|a|})^2}}\,dx \\
&= \arcsin\frac{x}{|a|} + C.
\end{aligned}$$

Tässä on erityisesti syytä huomata, että $\sqrt{a^2} = |a|$. Yllä olevan kanssa voitaisiin edetä vaihtoehtoisesti

$$\begin{aligned}
\cdots &= \int \frac{1}{\sqrt{a^2}\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}}\,dx \\
&= \frac{a}{|a|}\int \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}}\,dx \\
&= \frac{a}{|a|}\arcsin\frac{x}{a} + C.
\end{aligned}$$

Tulokset ovat samat, sillä $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

Huomautus 7.4. Määräämätöntä integraalia määritettäessä saatu tulos voidaan aina tarkistaa derivoimalla. Esimerkiksi

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x\right)\\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},\end{aligned}$$

joten

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C.$$

Kyseinen integraali voidaan määrittää esimerkiksi sopivaa sijoitusta käyttäen (vrt. esimerkki 7.16, s. 156).[1]

[1]Funktio $\operatorname{ar\,sinh} x = \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ on *hyperbolisen sinin* $\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ käänteisfunktio.

7.2 Osittaisintegrointi

Osittaisintegrointi perustuu tulon derivointikaavaan, joten oletetaan, että funktiot f ja g ovat derivoituvia jollakin välillä. Tällöin kyseisellä välillä

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Siis myös

$$\int (fg)' = \int (f'g + fg') = \int f'g + \int fg'$$

sekä edelleen

$$\int (fg)' - \int fg' = \int f'g$$

ja

$$fg - \int fg' = \int f'g,$$

jos viimeisen yhtälön integraalit ovat olemassa. Integraalien olemassaolon takaa esimerkiksi derivaattojen f' ja g' jatkuvuus. Näin on todistettu seuraava lause.

Lause 7.5. *Olkoot f ja g sellaisia välillä I derivoituvia funktioita, että derivaatat f' ja g' ovat jatkuvia tällä välillä. Tällöin*

$$\int fg' = fg - \int f'g$$

välillä I.

Määrätylle integraalille osittaisintegrointikaava saa seuraavan muodon.

Lause 7.6. *Olkoot f ja g sellaisia välillä $[a, b]$ derivoituvia funktioita, että derivaatat f' ja g' ovat jatkuvia tällä välillä. Tällöin*

$$\int_a^b fg' = \Big/_a^b fg - \int_a^b f'g.$$

Todistus. Koska f, g, f' ja g' ovat jatkuvia välillä $[a, b]$, niin myös

$$(fg)' = f'g + fg'$$

on jatkuva välillä $[a,b]$. Täten integraalilaskennan päälauseen nojalla

$$\int_a^b f'g + \int_a^b fg' = \int_a^b (f'g + fg') = \int_a^b (fg)' = \Big/_a^b fg.$$

Siis

$$\int_a^b fg' = \Big/_a^b fg - \int_a^b f'g.$$

□

Huomautus 7.7. Huomautuksen 6.16 (s. 138) perusteella lauseessa 7.6 riittää olettaa derivaattojen f' ja g' jatkuvuuden sijasta, että f' ja g' ovat Riemann-integroituvia välillä $[a,b]$ (harjoitustehtävä). Vastaavasti lauseessa 7.5 riittää, että määräämättömät integraalit ovat olemassa.

Huomautus. Osittaisintegrointi on käyttökelpoinen integrointimenetelmä, kun $f'g$ on helpompi integroida kuin fg'. Osittaisintegroinnilla pyritään tietysti aina helpompaan integroitavaan.

Esimerkki 7.7. Osittaisintegroimalla saadaan

$$\begin{aligned}
\int x \sin x \, dx &= \int x \cdot D(-\cos x)\, dx \\
&= x \cdot (-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x)\, dx \\
&= -x \cos x + \sin x + C.
\end{aligned}$$

Esimerkki 7.8. Osittaisintegroimalla saadaan (kun huomataan, että $D(x) = 1$)

$$\begin{aligned}
\int \log x \, dx &= \int 1 \cdot \log x \, dx \\
&= \int D(x) \cdot \log x \, dx \\
&= x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx \\
&= x \log x - \int 1 \, dx \\
&= x \log x - x + C.
\end{aligned}$$

Esimerkki 7.9. Käyttämällä esimerkin 7.8 menettelyä ja yhdistetyn funktion derivointikaavaa saadaan

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \arctan x \, dx &= \int_0^1 1 \cdot \arctan x \, dx \\
&= \int_0^1 D(x) \cdot \arctan x \, dx \\
&= \Big/_0^1 x \arctan x - \int_0^1 x \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx \\
&= (1 \cdot \frac{\pi}{4} - 0) - \frac{1}{2} \int_0^1 2x \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \Big/_0^1 \log(1+x^2) \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} (\log 2 - \log 1) \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{\log 2}{2}.
\end{aligned}$$

Esimerkki 7.10. Osittaisintegroimalla kaksi kertaa peräkkäin saadaan

$$\begin{aligned}
\int x^2 e^x \, dx &= x^2 e^x - \int 2x \cdot e^x \, dx \\
&= x^2 e^x - (2x e^x - \int 2e^x \, dx) \\
&= (x^2 - 2x + 2) \, e^x + C.
\end{aligned}$$

Huomautus. Joskus osittaisintegrointi johtaa *palautuskaavamenettelyyn.*

Esimerkki 7.11. Määritetään

$$\int \sin x \cos x \, dx.$$

Merkitään

$$I = \int \sin x \cos x \, dx.$$

Tällöin osittaisintegroinnilla saadaan

$$\begin{aligned} I &= \int \sin x \cos x \, dx \\ &= \int \sin x \cdot D(\sin x) \, dx \\ &= \sin^2 x - \int \cos x \cdot \sin x \, dx \\ &= \sin^2 x - I. \end{aligned}$$

Siis

$$I = \sin^2 x - I,$$

josta voidaan ratkaista

$$I = \frac{1}{2} \sin^2 x + C.$$

Siis

$$\int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + C.$$

Esimerkki 7.12. Määritetään palautuskaavamenettelyä käyttäen

$$I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n} \, dx \qquad (n \in \mathbf{Z}_+).$$

Käyttämällä osittaisintegrointia saadaan

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{1}{(1+x^2)^n} \, dx \\ &= \int D(x) \cdot \frac{1}{(1+x^2)^n} \, dx \\ &= x \cdot \frac{1}{(1+x^2)^n} - \int x \cdot (-n) \cdot \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} \cdot 2x \, dx \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} \, dx \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{(1+x^2) - 1}{(1+x^2)^{n+1}} \, dx \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{1}{(1+x^2)^n} \, dx - 2n \int \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} \, dx \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \, I_n - 2n \, I_{n+1}. \end{aligned}$$

Siis

$$I_{n+1} \;=\; \frac{1}{2n} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^n} + \frac{(2n-1)}{2n} \cdot I_n, \qquad \text{kun } n \geq 1.$$

Lisäksi

$$I_1 \;=\; \int \frac{1}{1+x^2}\, dx \;=\; \arctan x + C.$$

Siis

$$I_2 \;=\; \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \arctan x + C,$$

jne.

7.3 Sijoitusmenetelmä eli muuttujanvaihto

Osoittaisintegrointi perustui tulon derivointikaavaan. *Sijoitusmenetelmä* eli *muuttujanvaihto* puolestaan perustuu yhdistetyn funktion derivointikaavaan eli niin sanottuun ketjusääntöön. Sijoitusmenetelmällä pyritään siihen, että uusi funktio olisi helpompi integroida kuin alkuperäinen.

Lause 7.8. *Olkoon funktio $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ jatkuva ja $\varphi\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$ funktio, joka toteuttaa ehdot*

(i) $\varphi(\alpha) = a$ *ja* $\varphi(\beta) = b$,

(ii) φ *ja* φ' *ovat jatkuvia välillä* $[\alpha,\beta]$.

Tällöin

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Todistus. Olkoon nyt F jokin funktion f integraalifunktio välillä $[a,b]$. Tällöin funktio $F(\varphi(t))$ on derivoituva välillä $[\alpha,\beta]$ ja

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

Lisäksi $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ on jatkuva välillä $[\alpha,\beta]$, joten integraalilaskennan päälauseen nojalla

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \Big/_{\!\alpha}^{\beta} F(\varphi(t)) &= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \\ &= F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(x)\,dx.\end{aligned}$$

□

Huomautus 7.9. Jos lausetta 7.8 käytettäessä sijoitetaan $x = \varphi(t)$, niin

$$\begin{aligned} f(x) &\to f(\varphi(t)), \\ dx &\to \varphi'(t)\,dt, \\ a,b &\to \alpha,\beta, \end{aligned}$$

missä α ja β määräytyvät ehdoista $\varphi(\alpha) = a$ ja $\varphi(\beta) = b$.

Esimerkki 7.13. Osoitetaan, että

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx \qquad (n \in \mathbf{Z}_+).$$

Sijoitetaan $x = \varphi(t) = \frac{\pi}{2} - t$, jolloin $dx = (-1)\,dt$ ja

$$\begin{aligned} \varphi(t) = 0 &\Rightarrow t = \tfrac{\pi}{2}, \\ \varphi(t) = \tfrac{\pi}{2} &\Rightarrow t = 0. \end{aligned}$$

Koska $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$ kaikilla $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, niin

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n\left(\tfrac{\pi}{2} - t\right) \cdot (-1)\,dt \\ &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n\left(\tfrac{\pi}{2} - t\right) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\left(\tfrac{\pi}{2} - t\right) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx. \end{aligned}$$

Esimerkki 7.14. Määritetään

$$\int_1^4 \frac{1}{x + \sqrt{x}}\,dx.$$

Sijoitetaan $x = \varphi(t) = t^2$, jolloin

$$dx = \varphi'(t)\,dt = 2t \cdot dt$$

ja

$$\begin{aligned} \varphi(t) = t^2 = 1 &\Rightarrow t = 1 \quad \text{(alaraja)}, \\ \varphi(t) = t^2 = 4 &\Rightarrow t = 2 \quad \text{(yläraja)}.^{1} \end{aligned}$$

[1] Rajoiksi olisi voitu valita myös -1 ja -2, mutta tällöin laskut olisivat olleet hankalampia kuin tässä.

Siis

$$\begin{aligned}
\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx &= \int_1^2 \frac{1}{t^2+\sqrt{t^2}}\,2t\,dt \\
&= \int_1^2 \frac{2t}{t^2+t}\,dt \\
&= 2\int_1^2 \frac{1}{t+1}\,dt \\
&= 2\Big/_1^2 \log(t+1) \\
&= 2(\log 3 - \log 2) \\
&= 2\log\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Laskettaessa määräämätöntä integraalia sijoitusmenetelmällä pitää integrointirajojen vaihtamisen sijasta siirtyä integroinnin jälkeen takaisin alkuperäiseen muuttujaan. Tämän mahdollistamiseksi on oletettava sijoitettavan funktion $\varphi(t)$ käänteisfunktion olemassaolo. Käänteisfunktio on olemassa, jos sijoitettava funktio on esimerkiksi surjektio ja aidosti monotoninen.

Lause 7.10. *Olkoon funktio $f\colon I \to \mathbf{R}$ jatkuva ja $\varphi\colon I' \to I$ funktio, joka toteuttaa ehdot*

(i) *φ ja φ' ovat jatkuvia välillä I',*

(ii) *$\varphi(I') = I$,*

(iii) *φ on aidosti monotoninen välillä I'.*

Tällöin

$$\int f(x)\,dx = \left[\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt\right]_{t=\varphi^{-1}(x)},$$

missä merkintä $[\ldots]_{t=\varphi^{-1}(x)}$ tarkoittaa paluuta alkuperäiseen muuttujaan.

Todistus. Olkoon F funktion f integraalifunktio välillä I. Tällöin $F'(x) = f(x)$ ja

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C. \tag{7.14}$$

Koska $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ on jatkuva välillä I', niin sillä on integraalifunktio tällä välillä. Yksi integraalifunktio on $F(\varphi(t))$, sillä yhdistetyn funktion derivointisäännön nojalla

$$\frac{d}{dt}\,F(\varphi(t)) \;=\; F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) \;=\; f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t).$$

Siis välillä I'

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \;=\; F(\varphi(t))+C. \tag{7.15}$$

Ehdon (iii) nojalla funktio $\varphi\colon I'\to I$ on injektio ja ehdon (ii) nojalla se on surjektio. Siis φ on bijektio, joten sillä on käänteisfunktio $\varphi^{-1}\colon I\to I', t=\varphi^{-1}(x)$. Sijoittamalla tämä käänteisfunktio kaavaan (7.15) saadaan

$$\Big[\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt\Big]_{t\,=\,\varphi^{-1}(x)} \;=\; F(\varphi(\varphi^{-1}(x)))+C \;=\; F(x)+C. \tag{7.16}$$

Väite seuraa nyt ehdoista (7.14) ja (7.16). □

Huomautus 7.11. Jos lausetta 7.10 käytettäessä sijoitetaan $x=\varphi(t)$, niin

$$\begin{aligned} f(x) &\;\to\; f(\varphi(t)),\\ dx &\;\to\; \varphi'(t)\,dt. \end{aligned}$$

Paluu alkuperäiseen muuttujaan tapahtuu sijoittamalla $t=\varphi^{-1}(x)$.

Esimerkki 7.15. Määritetään

$$\int e^{kx}\,dx \qquad (k\neq 0).$$

Sijoitetaan $x=\dfrac{1}{k}\cdot t$ $\;(k\neq 0)$, jolloin

$$\begin{aligned} dx &\;=\; \varphi'(t)\,dt \;=\; \frac{1}{k}\,dt,\\ t &\;=\; \varphi^{-1}(x) \;=\; kx. \end{aligned}$$

Siis

$$\int e^{kx}\,dx = \Big[\int e^{t}\,\frac{1}{k}\,dt\Big]_{t=kx} = \Big[\frac{1}{k}\int e^{t}\,dt\Big]_{t=kx} = \Big[\frac{1}{k}\cdot e^{t}+C\Big]_{t=kx} = \;\frac{1}{k}\,e^{kx}+C.$$

Tavoitteena on tietysti ollut sijoitus $kx=t$. Tästä sitten on ratkaistu varsinainen sijoitus. Menettely on varsin yleinen (ks. huomautus 7.16, s. 159).

Integroitava funktio pyritään sijoituksen avulla usein saattamaan muotoon, josta integrointia voidaan jatkaa muilla menetelmillä, esimerkiksi osittaisintegroinnilla tai tekemällä toinen sijoitus. Hyvä tavoite on myös muuntaa tehtävä rationaalifunktion integroinniksi, sillä rationaalifunktioiden integrointia koskevassa luvussa tullaan näkemään, että rationaalifunktioiden integrointiin on olemassa selkeä menettely.

Esimerkki 7.16. Olkoon $|x| > 1$. Määritetään (vrt. huomautus 7.4, s. 146)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx.$$

Sijoitetaan $x = \frac{1}{2}\Big(t + \frac{1}{t}\Big)$, jolloin $dx = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{t^2}\Big)\,dt$ ja

$$\begin{aligned} x = \frac{1}{2}\Big(t+\frac{1}{t}\Big) \quad &\Leftrightarrow \quad 2x = \frac{t^2+1}{t} \\ &\Leftrightarrow \quad t^2 - 2xt + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad t = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2-4}}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad t = x \pm \sqrt{x^2-1}, \end{aligned}$$

josta valitaan käänteisfunktioksi laskennallisesti yksinkertaisempi $t = x + \sqrt{x^2-1}$. Tällöin

$$\sqrt{x^2-1} = t - x = \frac{1}{2}\Big(t - \frac{1}{t}\Big),$$

joten

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx &= \left[\int \frac{1}{\frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})} \cdot \frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{t^2}\Big)\,dt\right]_{t=x+\sqrt{x^2-1}} \\ &= \left[\int \frac{t}{t^2-1}\cdot\frac{t^2-1}{t^2}\,dt\right]_{t=x+\sqrt{x^2-1}} \\ &= \left[\int \frac{1}{t}\,dt\right]_{t=x+\sqrt{x^2-1}} \\ &= \Big[\log|t| + C\Big]_{t=x+\sqrt{x^2-1}} \\ &= \log\Big|x+\sqrt{x^2-1}\Big| + C.^{1} \end{aligned}$$

[1] Funktio $\operatorname{ar}\cosh x = \log\big(x+\sqrt{x^2-1}\big)$ on *hyperbolisen kosinin* $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ käänteisfunktio, kun $x \geq 1$.

Esimerkki 7.17. Määritetään

$$\int \frac{e^x}{4+(e^x+1)^2}\,dx.$$

Sijoitetaan $x = \log(t-1)$. Tällöin

$$t = e^x + 1 \qquad \text{ja} \qquad dx = \frac{1}{t-1}\,dt.$$

Muokkaamalla syntynyttä lauseketta ja käyttämällä yhdistetyn funktion ja arkustangentin derivointikaavoja saadaan

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^x}{4+(e^x+1)^2}\,dx &= \left[\int \frac{t-1}{4+t^2}\cdot\frac{1}{t-1}\,dt\right]_{t=e^x+1} \\
&= \left[\int \frac{1}{4+t^2}\,dt\right]_{t=e^x+1} \\
&= \left[\frac{1}{2}\int \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+(\frac{t}{2})^2}\,dt\right]_{t=e^x+1} \\
&= \left[\frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2}+C\right]_{t=e^x+1} \\
&= \frac{1}{2}\arctan\frac{e^x+1}{2}+C.
\end{aligned}$$

Huomautus 7.12. Jos integroitava funktio on muotoa $f(g(x))\,g'(x)$, kannattaa usein tehdä sijoitus $t = g(x)$ eli $x = g^{-1}(t)$. Tällöin käänteisfunktion derivointisäännöstä seuraa, että

$$(g^{-1})'(t) = \frac{1}{g'(x)},$$

joten termiksi $g'(x)\,dx$ saadaan

$$g'(x)\,dx = g'(x)\,(g^{-1})'(t)\,dt = g'(x)\,\frac{1}{g'(x)}\,dt = dt.$$

Siis

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \left[\int f(t)\,dt\right]_{t=g(x)}.$$

Jos funktio f on helppo integroida, integrointitehtävä on käytännössä ratkaistu. Muussa tapauksessa joudutaan vielä miettimään jatkoa.

Huomautus 7.13. Jos huomautusta 7.12 käytettäessä sijoitetaan $t = g(x)$, niin

$$\begin{array}{rcl} f(g(x)) & \to & f(t), \\ g'(x)\,dx & \to & dt. \end{array}$$

Paluu alkuperäiseen muuttujaan tapahtuu sijoittamalla $t = g(x)$.

Esimerkki 7.18. Määritetään

$$\int \cos x \, \sin^3 x \, dx.$$

Sijoitetaan $t = \sin x$ (eli $x = \arcsin t$), jolloin $dt = \cos x \, dx$. Siis

$$\begin{aligned} \int \cos x \, \sin^3 x \, dx &= \int (\sin x)^3 \cos x \, dx \\ &= \left[\int t^3 \, dt \right]_{t = \sin x} \\ &= \left[\frac{t^4}{4} + C \right]_{t = \sin x} \\ &= \frac{1}{4} \sin^4 x + C. \end{aligned}$$

Tarkasti ottaen tulos on voimassa vain reaalilukuväleillä, joilla sijoitettava funktio on bijektio ja sen derivaatta on jatkuva. Derivoimalla tulokseksi saatu lauseke kuitenkin havaitaan, että tulos pätee millä tahansa reaalilukuvälillä.

Huomautus 7.14. Esimerkissä 7.18 sijoitussääntöä voitiin käyttää vain ”paloittain”, mutta toisaalta derivoimalla voitiin osoittaa, että saatu tulos on voimassa millä tahansa reaalilukuvälillä. Menettelyä voidaan käyttää yleisestikin, mutta on aina syytä olla tarkkana, että sijoitettava funktio täyttää käytettävältä sijoituslauseelta vaadittavat oletukset.

Huomautus 7.15. Esimerkin 7.18 tulos saatiin jo aiemmin esimerkissä 7.3 (s. 144) käyttämällä yhdistetyn funktion integrointisääntöä sekä potenssin ja sinin derivointikaavoja. Sijoitussäännöllä integroitava funktio saatiin nyt niin yksinkertaiseen muotoon, että sen integrointi onnistui ilman kyseisiä sääntöjäkin.

Huomautus 7.16. Sijoitus $t = g(x)$ (eli $x = g^{-1}(t)$) kannattaa usein myös, kun integroitava funktio on muodon $f(g(x))\,g'(x)$ sijasta esimerkiksi muotoa $f(g(x))$. Tällöin integroitava funktio saattaa yksinkertaistua ja sopiva jatkomenetelmä on ehkä helpompi löytää. Sijoituksen toimivuus riippuu paljolti termistä

$$dx \;=\; (g^{-1})'(t)\,dt,$$

sillä nyt

$$\begin{aligned} f(g(x)) &\;\to\; f(t), \\ dx &\;\to\; (g^{-1})'(t)\,dt. \end{aligned}$$

Esimerkki 7.19. Määritetään

$$\int \cos 6x\,dx.$$

Sijoitetaan $t = 6x$. Tällöin $x = \dfrac{t}{6}$ ja $dx = \dfrac{1}{6}\,dt$. Siis

$$\begin{aligned} \int \cos 6x\,dx &= \left[\int \cos t \cdot \frac{1}{6}\,dt\right]_{t\,=\,6x} \\ &= \left[\frac{1}{6}\int \cos t\,dt\right]_{t\,=\,6x} \\ &= \left[\frac{1}{6}\sin t + C\right]_{t\,=\,6x} \\ &= \frac{1}{6}\sin 6x + C. \end{aligned}$$

Sijoitussääntöä voidaan esimerkin 7.19 tapaan käyttää yleisestikin yhdistetyn funktion derivointisäännön sijasta. Esimerkiksi sijoittamalla $t = ax + b$ ($a \neq 0$) saadaan

$$\int f(ax+b)\,dx \;=\; \left[\frac{1}{a}\int f(t)\,dt\right]_{t\,=\,ax+b},$$

jolloin lauseketta $f(t)$ integroitaessa ei tarvitse huomioida sisäfunktion $ax + b$ derivaattaa (vrt. esimerkki 7.4, s. 144).

Yksinkertaisissa tapauksissa yhdistetyn funktion derivointisäännön käyttö lienee kätevämpää, mutta mutkikkaissa tapauksissa esimerkiksi sisäfunktion derivaatan hahmottaminen saattaa olla vaikeaa. Tällöin sopiva sijoitus voi yksinkertaistaa tilannetta ratkaisevasti.

Huomautus 7.17. Huomautuksissa 7.12 ja 7.16 esiintyville funktioille käytetään usein sijoitusta $t = g(x)$ myös laskettaessa määrättyä integraalia sijoitussäännön avulla. Jos tällöin sijoitetaan $t = g(x)$, niin

$$\begin{aligned} f(g(x)) &\to f(t), \\ g'(x)\,dx &\to dt, \\ g(a) &\to \alpha, \\ g(b) &\to \beta. \end{aligned}$$

Usein muodostetaan sekä $t = g(x)$ että $x = g^{-1}(t)$, jolloin sijoitusta suoritettaessa voidaan valita laskennallisesti yksinkertaisimmat lausekkeet (esimerkiksi $dx \to (g^{-1})'(t)\,dt$ säännön $g'(x)\,dx \to dt$ sijasta). Tällöin on tietysti edellytettävä käänteisfunktion g^{-1} olemassaolo.

Esimerkki 7.20. Määritetään

$$\int_1^{\pi^2+1} \sin\sqrt{x-1}\,dx.$$

Sijoitetaan $t = \sqrt{x-1}$, jolloin alarajaksi saadaan

$$\sqrt{1-1} = 0$$

ja ylärajaksi

$$\sqrt{(\pi^2+1)-1} = \pi.$$

Koska $x = t^2 + 1$, niin $dx = 2t\,dt$. Siis

$$\int_1^{\pi^2+1} \sin\sqrt{x-1}\,dx = \int_0^{\pi} \sin t \cdot 2t\,dt = 2\int_0^{\pi} t\sin t\,dt.$$

Osoittaisintegroinnilla saadaan nyt helposti (ks. esimerkki 7.7, s. 148)

$$\begin{aligned} 2\int_0^{\pi} t\sin t\,dt &= 2\Big/_0^{\pi}(-t\cos t + \sin t) \\ &= 2\left((-\pi\cos\pi + \sin\pi) - (0\cdot\cos 0 + \sin 0)\right) \\ &= 2\left((\pi + 0) - (0 + 0)\right) \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

7.4 Rationaalifunktiot

Polynomit voidaan integroida helposti potenssifunktion integrointikaavojen avulla (ks. huomautus 7.1, s. 142). Myös rationaalifunktioiden

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

missä $P(x)$ ja $Q(x)$ ovat polynomeja, määräämätön integraali voidaan aina esittää alkeisfunktioita käyttäen. Tietysti on oletettava, että $Q(x) \neq 0$ integrointivälillä.

Rationaalifunktioiden integrointia on käsitelty jonkin verran jo aiemmissa luvuissa. Huomautuksessa 7.1 (s. 142) esitettiin rationaalifunktioiden

$$\frac{1}{x} \qquad \text{ja} \qquad \frac{1}{1+x^2}$$

integrointikaavat. Esimerkissä 7.4 (s. 144) yleistettiin näistä ensimmäinen tapaukseen

$$\frac{1}{ax+b}$$

ja esimerkissä 7.17 (s. 157) tarkasteltiin jälkimmäisen yleistystä osana laajempaa integrointiketjua. Lisäksi esimerkissä 7.9 (s. 149) määritettiin aputuloksena

$$\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

ja esimerkissä 7.12 (s. 150) johdettiin osittaisintegrointia käyttäen palautuskaava funktion

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx \qquad (n \in \mathbf{Z}_+)$$

integraalille. Rationaalifunktioiden integrointi palautuu suurelta osin yllä esitettyjen funktioiden integrointiin.

7.4.1 Yksinkertaisia tapauksia

Tarkastellaan aluksi muutamaa yksinkertaista esimerkkiä.

Esimerkki 7.21. Määritetään

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx.$$

Jos $a \neq 0$, niin käyttämällä yhdistetyn funktion derivointisääntöä ja arkustangentin derivointikaavaa saadaan

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.$$

Jos taas $a = 0$, niin

$$\frac{1}{x^2 + a^2} = \frac{1}{x^2} \qquad (x \neq 0).$$

Tällöin

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2}\, dx = \int \frac{1}{x^2}\, dx = -\int (-1) \cdot x^{-2}\, dx = -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

kaikilla niillä väleillä, jotka eivät sisällä pistettä $x = 0$.

Esimerkki 7.22. Määritetään

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2}\, dx.$$

Jos $a = 0$, niin kyseessä on sama funktio kuin esimerkissä 7.21. Jos taas $a \neq 0$, niin

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right) \qquad (|x| \neq |a|).$$

Käyttämällä logaritmin integrointikaavaa (ja yhdistetyn funktion derivointisääntöä) saadaan tällöin

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2 - a^2}\, dx &= \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right) dx \\
&= \frac{1}{2a} \left(\log|x-a| - \log|x+a|\right) + C \\
&= \frac{1}{2a} \log \frac{|x-a|}{|x+a|} + C
\end{aligned}$$

kaikilla niillä väleillä, jotka eivät sisällä pistettä $x = a$ tai $x = -a$.

Esimerkki 7.23. Määritetään

$$\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}\, dx.$$

Jos $a \neq b$, niin vastaavasti kuin esimerkissä 7.22 saadaan

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}\, dx &= \frac{1}{b-a} \int \left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b}\right) dx \\
&= \frac{1}{b-a} \left(\log|x+a| - \log|x+b|\right) + C \\
&= \frac{1}{b-a} \log \frac{|x+a|}{|x+b|} + C
\end{aligned}$$

kaikilla niillä väleillä, jotka eivät sisällä pistettä $x = -a$ tai $x = -b$.

Jos taas $a = b$, niin

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{(x+a)^2} \qquad (x \neq -a).$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}\,dx &= \int \frac{1}{(x+a)^2}\,dx \\
&= -\int (-1) \cdot \frac{1}{(x+a)^2}\,dx \\
&= -\frac{1}{x+a} + C
\end{aligned}$$

kaikilla niillä väleillä, jotka eivät sisällä pistettä $x = -a$.

7.4.2 Neliöinti

Tarkastellaan rationaalifunktiota

$$R(x) = \frac{1}{Q(x)},$$

missä

$$Q(x) = x^2 + px + q$$

on jokin toisen asteen polynomi. Jos polynomilla Q on reaalijuuria, niin rationaalifunktion R integrointi palautuu esimerkkiin 7.23.

Olkoon siis

$$p^2 - 4q < 0.$$

Tällöin rationaalifunktio R saadaan integroitua *neliöimällä* polynomi Q. Neliöinti tarkoittaa nyt, että polynomi Q muunnetaan muotoon

$$Q(x) = \text{vakio} \cdot ((P(x))^2 + 1),$$

missä P on ensimmäisen asteen polynomi. Tällöin R voidaan integroida käyttämällä arkustangentin derivointikaavaa ja yhdistetyn funktion derivointisääntöä. Merkintöjen yksinkertaistamiseksi käytetään lyhennysmerkintää

$$D = q - \frac{p^2}{4}.$$

Koska $p^2 - 4q < 0$, niin $D > 0$.

Siis

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx &= \int \frac{1}{(x^2+px+\frac{p^2}{4})+(q-\frac{p^2}{4})}\,dx \\
&= \int \frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})}\,dx \\
&= \int \frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2+D}\,dx \\
&= \int \frac{1}{D}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{D}}\right)^2+1}\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{D}}\int \frac{1}{\sqrt{D}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{D}}\right)^2}\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{D}}\arctan\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{D}}+C \\
&= \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.
\end{aligned}
$$

Esimerkki 7.24. Määritetään

$$\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx.$$

Käytetään neliöintiä (sekä arkustangentin derivointikaavaa ja yhdistetyn funktion derivointisääntöä). Siis

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx &= \int \frac{1}{(x^2-x+\frac{1}{4})+\frac{3}{4}}\,dx \\
&= \int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx \\
&= \int \frac{1}{\frac{3}{4}}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)^2+1}\,dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.
\end{aligned}
$$

7.4.3 Osamurtokehitelmä

Tarkastellaan sitten rationaalifunktioiden integrointia yleisesti (olettaen taas, että $Q(x) \neq 0$ integrointivälillä). Rationaalifunktio

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad (P, Q \text{ polynomeja})$$

voidaan aina esittää muodossa

$$R(x) = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)} \qquad (P_1,\ P_2,\ Q \text{ polynomeja}),$$

missä polynomin P_2 aste on pienempi kuin polynomin Q aste. Polynomi P_1 voidaan integroida helposti käyttäen polynomin derivointikaavoja. Termi P_2/Q puolestaan voidaan integroida käyttäen *osamurtoja*

$$\frac{A}{(x-a)^k},\ \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k} \qquad (k \in \mathbf{Z}_+,\ A, B, C \in \mathbf{R}),$$

missä polynomit $x - a$ ja $x^2 + px + q$ ovat polynomin Q alkutekijöitä. Alkutekijä tarkoittaa, että polynomilla $x^2 + px + q$ ei ole reaalijuuria eli

$$x^2 + px + q > 0$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$ (ja $p^2 - 4q < 0$).

Tarvittavat osamurrot riippuvat polynomista Q seuraavasti. Olkoon polynomin Q jako alkutekijöihin

$$Q(x) = a_0 \cdot \overbrace{(x-a_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-a_n)^{k_n}}^{\text{reaalijuuret}} \cdot \overbrace{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+p_mx+q_m)^{l_m}}^{\text{muut juuret}},$$

missä $a_0 \in \mathbf{R}$, $k_i \in \mathbf{Z}_+$ ja $a_i \in \mathbf{R}$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots, n$ sekä $l_j \in \mathbf{Z}_+$ ja p_j, $q_j \in \mathbf{R}$ (ja $p_j^2 - 4q_j < 0$) kaikilla $j = 1, 2, \ldots, m$. Tällöin jokainen k-kertainen tekijä $(x-a)^k$ tuottaa termit

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$$

ja jokainen l-kertainen tekijä $(x^2 + px + q)^l$ tuottaa termit

$$\frac{B_1x + C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{B_lx+C_l}{(x^2+px+q)^l}.$$

Yllä kertoimet $A_1, A_2, \ldots, A_k$, $B_1, B_2, \ldots, B_l$ ja $C_1, C_2, \ldots, C_l$ ovat reaalilukuja.

Luvussa 7.4.4 osoitetaan, että osamurrot voidaan aina integroida ja saadut integraalit ovat alkeisfunktioita. Näin ollen myös rationaalifunktioiden integraalit voidaan aina esittää alkeisfunktioiden avulla. Yllä oleva menettely yhdessä osamurtojen integroinnin kanssa antaa myös menetelmän, jolla rationaalifunktiot saadaan integroitua. Edellytyksenä on vain, että polynomi Q pystytään jakamaan alkutekijöihin. Menettelyn huono puoli on, että siinä on varsin paljon laskutoimituksia. Algoritmin tapaan esitettynä menettely on seuraava.

1. Esitetään rationaalifunktio muodossa, jossa nimittäjän asteluku on suurempi kuin osoittajan.
2. Jaetaan nimittäjä (reaalikertoimisiin) alkutekijöihin.
3. Muodostetaan osamurtokehitelmä.
4. Integroidaan osamurrot ja kohdassa 1 saatu polynomi.

Osamurtojen integrointia tarkastellaan luvussa 7.4.4.

Esimerkki 7.25. Jaetaan rationaalifunktio

$$R(x) = \frac{1}{x(x-1)^2} \qquad (x \neq 0, 1)$$

osamurtoihin. Jos $x \neq 0$ ja $x \neq 1$, niin

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x(x-1)^2} &= \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{(x-1)^2} \\
\Leftrightarrow \quad 1 &= A_1 \cdot (x-1)^2 + A_2 \cdot x(x-1) + A_3 \cdot x \\
\Leftrightarrow \quad 1 &= A_1x^2 - 2A_1x + A_1 + A_2x^2 - A_2x + A_3x \\
\Leftrightarrow \quad 1 &= (A_1 + A_2)x^2 + (-2A_1 - A_2 + A_3)x + A_1 \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} A_1 + A_2 = 0, \\ -2A_1 - A_2 + A_3 = 0, \\ A_1 = 1 \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & A_1 = 1,\ A_2 = -1 \text{ ja } A_3 = 1.
\end{aligned}$$

Siis

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

kaikilla $x \neq 0$ ja $x \neq 1$.

Huomautus. Osamurtokehitelmän muodostamisessa on monta laskutoimitusta, joten saatu tulos kannattaa aina tarkistaa. Koska

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} &= \frac{(x-1)^2 - x(x-1) + x}{x(x-1)^2} \\
&= \frac{x^2 - 2x + 1 - x^2 + x + x}{x(x-1)^2} \\
&= \frac{1}{x(x-1)^2},
\end{aligned}$$

niin esimerkin 7.25 tulos on oikein.

7.4.4 Osamurtojen integrointi

Osamurtojen integrointi sujuu seuraavasti.

Tyyppi 1. Käyttämällä logaritmin integrointikaavaa saadaan[1]

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx \;=\; A \cdot \log|x-a| + C'$$

kaikilla väleillä, jotka eivät sisällä pistettä $x = a$.

Tyyppi 2. Kun $k = 2, 3, \ldots$, niin käyttämällä potenssin integrointikaavaa (ja yhdistetyn funktion derivointisääntöä) saadaan

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx \;=\; -\frac{A}{k-1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C'$$

kaikilla väleillä, jotka eivät sisällä pistettä $x = a$.

Tyyppi 3. Tarkastellaan kolmanneksi osamurtoa

$$\frac{Bx + C}{x^2 + px + q}.$$

Aluksi havaitaan, että

$$\frac{Bx+C}{x^2+px+q} \;=\; \frac{B}{2} \cdot \frac{2x+p}{x^2+px+q} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right)\frac{1}{x^2+px+q}. \tag{7.17}$$

Yhtälön (7.17) oikean puolen ensimmäinen termi saadaan integroitua käyttämällä yhdistetyn funktion derivointisääntöä ja logaritmin derivointikaavaa. Koska nyt

$$\left|x^2 + px + q\right| \;=\; x^2 + px + q,$$

[1] Merkitään integrointivakiota nyt symbolilla C'.

niin

$$\frac{B}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx \;=\; \frac{B}{2}\log\left(x^2+px+q\right)+C'.$$

Yhtälön (7.17) oikean puolen jälkimmäinen termi saadaan integoitua käyttämällä luvussa 7.4.2 esitettyä neliöintiä. Siis

$$\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx \;=\; \left(C-\frac{Bp}{2}\right)\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\ \arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C'.$$

Tyyppi 4. Tarkastellaan lopuksi osamurtoa

$$\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k},$$

missä $k\geq 2$. Vastaavasti kuin edellä havaitaan, että

$$\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k} \;=\; \frac{B}{2}\cdot\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\frac{1}{(x^2+px+q)^k}. \tag{7.18}$$

Yhtälön (7.18) oikean puolen ensimmäinen termi saadaan integroitua käyttämällä yhdistetyn funktion derivointisääntöä ja potenssin derivointikaavaa. Siis

$$\frac{B}{2}\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\,dx \;=\; -\frac{B}{2}\cdot\frac{1}{k-1}\cdot\frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}}+C'.$$

Yhtälön (7.18) oikean puolen jälkimmäinen termi

$$\frac{1}{(x^2+px+q)^k}$$

saadaan integroitua neliöimällä ensin nimittäjässä oleva polynomi ja käyttämällä sitten esimerkissä 7.12 (s. 150) johdettua palautuskaavaa. Neliöinnin (ks. luku 7.4.2) tuloksena

$$x^2+px+q \;=\; D\cdot\left(\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{D}}\right)^2+1\right),$$

missä

$$D \;=\; q-\frac{p^2}{4}.$$

Ennen esimerkin 7.12 palautuskaavan käyttöä on siis vielä sijoitettava

$$t \;=\; \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{D}}.$$

Huomautus. Rationaalifunktion integraali voidaan aina lausua käyttäen rationaalifunktioita, logaritmia ja arkustangenttia.

Huomautus. Koska yllä esitetyt integrointitulokset ovat monimutkaisia, ei niitä kannata opetella ulkoa. Sen sijaan kannattaa opetella menetelmät, joilla tulokset johdettiin.

Esimerkki 7.26. Esimerkin 7.25 ja perusintegrointisääntöjen nojalla

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(x-1)^2}\,dx &= \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx \\ &= \log|x| - \log|x-1| + (-1)\cdot\frac{1}{x-1} + C \\ &= \log|x| - \log|x-1| - \frac{1}{x-1} + C \end{aligned}$$

kaikilla väleillä, jotka eivät sisällä nollaa tai ykköstä.

Esimerkki 7.27. Olkoon $x \neq -1$. Määritetään

$$\int \frac{x^3+2}{x^3+1}\,dx.$$

1°: Ensimmäiseksi havaitaan, että

$$\frac{x^3+2}{x^3+1} = \frac{(x^3+1)+1}{x^3+1} = 1 + \frac{1}{x^3+1},$$

missä polynomiosan integraaliksi saadaan helposti

$$\int 1\,dx = x + C.$$

2°: Rationaalifunktion

$$\frac{1}{x^3+1}$$

integroiminen aloitetaan etsimällä polynomin x^3+1 alkutekijät, joiksi saadaan

$$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1),$$

missä $x^2 - x + 1 > 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

3°: Tämän jälkeen muodostetaan rationaalifunktion

$$\frac{1}{x^3+1} \;=\; \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

osamurtokehitelmä. Koska

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} &= \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2x+A_3}{x^2-x+1} \\
\Leftrightarrow\ 1 &= A_1\cdot(x^2-x+1) + A_2x\cdot(x+1) + A_3\cdot(x+1) \\
\Leftrightarrow\ 1 &= A_1x^2 - A_1x + A_1 + A_2x^2 + A_2x + A_3x + A_3 \\
\Leftrightarrow\ 1 &= (A_1+A_2)x^2 + (-A_1+A_2+A_3)x + (A_1+A_3) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 = 0, \\ -A_1 + A_2 + A_3 = 0, \\ A_1 + A_3 = 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow\ A_1 = \frac{1}{3},\ A_2 = -\frac{1}{3} \text{ ja } A_3 = \frac{2}{3},
\end{aligned}$$

niin osamurtokehitelmäksi saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^3+1} &= \frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{-\frac{x}{3}+\frac{2}{3}}{x^2-x+1} \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x-2}{x^2-x+1}.
\end{aligned}$$

4°: Saadun lausekkeen ensimmäinen termi on helppo integroida, sillä

$$\int \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}\,dx \;=\; \frac{1}{3}\int\frac{1}{x+1}\,dx \;=\; \frac{1}{3}\log|x+1| + C.$$

Jäljelle jäävän integraalin

$$-\frac{1}{3}\int\frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx$$

määrittämiseksi havaitaan, että

$$\frac{x-2}{x^2-x+1} \;=\; \frac{\frac{1}{2}(2x-1)-\frac{3}{2}}{x^2-x+1} \;=\; \frac{1}{2}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2-x+1}. \tag{7.19}$$

Tässä viimeisen lausekkeen ensimmäinen termi voidaan integroida käyttämällä logaritmin derivointikaavaa ja yhdistetyn funktion derivointisääntöä. Siis

$$\frac{1}{2}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx \;=\; \frac{1}{2}\log\left|x^2-x+1\right| + C$$

ja edelleen

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx \;=\; \frac{1}{2}\log\left(x^2-x+1\right)+C,$$

sillä $x^2-x+1>0$.

Yhtälön (7.19) viimeisen lausekkeen jälkimmäinen termi voidaan integroida hyödyntämällä esimerkkiä 7.24 (s. 164), jolloin

$$\begin{aligned}
-\frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx &= -\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C\\
&= -\sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.
\end{aligned}$$

Yhdistämällä tulokset saadaan

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx &= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\log\left(x^2-x+1\right)-\sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C\\
&= -\frac{1}{6}\log\left(x^2-x+1\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C
\end{aligned}$$

ja edelleen

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3+2}{x^3+1}\,dx &= \int 1\,dx+\frac{1}{3}\int\frac{1}{x+1}\,dx-\frac{1}{3}\int\frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx\\
&= x+\frac{1}{3}\log|x+1|-\frac{1}{6}\log\left(x^2-x+1\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C\\
&= x+\frac{1}{6}\log\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C
\end{aligned}$$

kaikilla väleillä, jotka eivät sisällä pistettä $x=-1$.

7.5 Trigonometriset funktiot

Trigonometrian perusfunktioiden (sini, kosini, tangentti ja kotangentti) integrointikaavat esitettiin luvussa 7.1 (huomautus 7.1, s. 142, ja esimerkki 7.5, s. 145). Lisäksi yhdistetyn funktion derivointikaavaa, osittaisintegrointia ja sijoitussääntöä käyttämällä aiemmissa luvuissa johdettiin joitakin yksinkertaisia tuloksia trigonometristen funktioiden integraaleille, ks. esimerkit 7.2 ja 7.3 (s. 144), 7.7 (s. 148), 7.11 (s. 149), 7.13 (s. 153) ja 7.18–7.20 (s. 158–160). Tutkitaan nyt yksityiskohtaisemmin trigonometristen funktioiden integrointia.

7.5.1 Sijoitusmenetelmä

Tarkastellaan aluksi sijoitusta $x = 2 \arctan t$, jolloin

$$t = \tan \frac{x}{2} \qquad \text{ja} \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt. \tag{7.20}$$

Käyttämällä trigonometrian peruskaavoja

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \text{ja} \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

havaitaan, että

$$\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1+\tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{\frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} + \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \cos^2 \frac{x}{2} \tag{7.21}$$

ja

$$\frac{t^2}{1+t^2} = t^2 \cdot \frac{1}{1+t^2} = \tan^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \cos^2 \frac{x}{2} = \sin^2 \frac{x}{2}. \tag{7.22}$$

Käyttämällä nyt kaavoja

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \qquad \text{ja} \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

saadaan yhtälöiden (7.20) ja (7.21) nojalla

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \cdot \cos^2 \frac{x}{2} = 2 \cdot t \cdot \frac{1}{1+t^2} = \frac{2t}{1+t^2}$$

ja yhtälöiden (7.21) ja (7.22) nojalla

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Voidaan siis esittää seuraava huomautus.

Huomautus 7.18. Muotoa $R(\sin x, \cos x)$ olevan funktion, missä R on rationaalifunktio, integrointi voidaan palauttaa rationaalifunktion integroinniksi tekemällä sijoitus

$$x = 2 \arctan t,$$

jolloin

$$t = \tan \frac{x}{2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{ja} \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt.$$

Huomautus 7.19. Jos $\varphi(t) = 2\arctan t$, niin $\varphi(\mathbf{R}) = \left]-\pi, \pi\right[$. Huomautuksen 7.18 sijoitus on siis ilman lisäperusteluja voimassa vain välin $\left]-\pi, \pi\right[$ osaväleillä (ks. lause 7.10, s. 154). Tietysti edellytyksenä on myös, että $R(\sin x, \cos x)$ on jatkuva kyseisellä välillä.

Esimerkki 7.28. Määritetään

$$\int \frac{1}{\sin x}\, dx.$$

Tekemällä huomautuksen 7.18 sijoitus $x = 2\arctan t$ saadaan

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin x}\, dx &= \left[\int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt\right]_{t = \tan \frac{x}{2}} \\
&= \left[\int \frac{dt}{t}\right]_{t = \tan \frac{x}{2}} \\
&= \Big[\log|t| + C\Big]_{t = \tan \frac{x}{2}} \\
&= \log\left|\tan \tfrac{x}{2}\right| + C.
\end{aligned}$$

Sijoitussäännön nojalla tulos on voimassa niillä välin $\left]-\pi, \pi\right[$ osaväleillä, jotka eivät sisällä pistettä $x = 0$. Saatu tulos derivoimalla havaitaan, että tulos pätee kaikilla niillä väleillä, jotka eivät sisällä pistettä $x = k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$.

Esimerkki 7.29. Määritetään

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}\,dx$$

käyttämällä huomautuksen 7.18 sijoitusta $x = 2\arctan t$. Tällöin

$$1+\cos x \;=\; 1+\frac{1-t^2}{1+t^2} \;=\; \frac{1+t^2+1-t^2}{1+t^2} \;=\; \frac{2}{1+t^2}.$$

Koska $t = \tan\frac{x}{2}$, niin rajoiksi saadaan

$$\begin{aligned} x = 0 \quad &\Rightarrow \quad t \;=\; \tan 0 \;=\; 0 \quad \text{(alaraja)}, \\ x = \tfrac{\pi}{2} \quad &\Rightarrow \quad t \;=\; \tan\tfrac{\pi}{4} \;=\; 1 \quad \text{(yläraja)}. \end{aligned}$$

Siis

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x} \;=\; \int_0^1 \frac{1}{\frac{2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt \;=\; \int_0^1 1\,dt \;=\; \Big/_0^1\, t \;=\; 1-0 \;=\; 1.$$

Huomautus. On syytä olla tarkkana, että sijoitettava funktio täyttää vaadittavat oletukset.

Esimerkki 7.30. Määritetään

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5-3\cos x}\,dx.$$

Sijoitetaan $x = 2\arctan t$ määräämättömään integraaliin, jolloin (ks. huomautus 7.18)

$$dx \;=\; \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

ja

$$5-3\cos x \;=\; 5-3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} \;=\; \frac{5+5t^2-3+3t^2}{1+t^2} \;=\; \frac{2+8t^2}{1+t^2}.$$

Siis

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{5-3\cos x}\,dx &= \left[\int \frac{1}{\frac{2+8t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt\right]_{t=\tan\frac{x}{2}} \\
&= \left[\int \frac{1}{1+4t^2}\,dt\right]_{t=\tan\frac{x}{2}} \\
&= \left[\frac{1}{2}\int 2 \cdot \frac{1}{1+(2t)^2}\,dt\right]_{t=\tan\frac{x}{2}} \\
&= \left[\frac{1}{2}\arctan 2t + C\right]_{t=\tan\frac{x}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\arctan\Big(2\tan\frac{x}{2}\Big) + C,
\end{aligned}
$$

joten

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5-3\cos x}\,dx \;=\; \Big/_0^{2\pi} \frac{1}{2}\arctan\Big(2\tan\frac{x}{2}\Big) \;=\; 0-0 \;=\; 0.$$

Tämä ei kuitenkaan ole mahdollista, sillä koska

$$2 \;\le\; 5-3\cos x \;\le\; 8$$

kaikilla $x \in [0, 2\pi]$, niin

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5-3\cos x}\,dx \;\ge\; \int_0^{2\pi} \frac{1}{8}\,dx \;=\; \frac{\pi}{4}.$$

Virhe johtuu nyt siitä, että sijoitettu funktio $\varphi(t) = 2\arctan t$ ei täytä lauseen 7.10 (s. 154) oletuksia välillä $[0, 2\pi]$ (ks. huomautus 7.19).

Huomautus. Huomautuksen 7.18 sijoituksella joudutaan usein melko mutkikkaisiin laskuihin. Siksi on joissakin yksinkertaisissa tapauksissa helpompi käyttää muita menetelmiä.

Huomautus. Usein tulokseen johtaa myös jokin huomautuksen 7.18 sijoitusta yksinkertaisempi sijoitus. Esimerkiksi tyyppiä $R(\tan x)$ olevaan funktioon voidaan sijoittaa $t = \tan x$. Tällöin

$$x = \arctan t \qquad \text{ja} \qquad dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt,$$

joten tulokseksi saadaan rationaalifunktio

$$R(t) \cdot \frac{1}{1+t^2}.$$

7.5.2 Integroitavan muokkaus

Yksinkertaisissa tapauksissa selvitään trigonometrian peruskaavoilla. Tällöin on huomattava, että tuloksen esitysmuoto voi riippua käytetystä menettelystä. Myös integrointivakion arvo voi riippua käytetystä integrointimenetelmästä.

Esimerkki 7.31. Määritetään

$$\int \sin x \cos x \, dx.$$

Koska

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x,$$

niin käyttämällä yhdistetyn funktion derivointisääntöä ja kosinin derivointikaavaa saadaan

$$\begin{aligned}\int \sin x \cos x \, dx &= \frac{1}{2} \int 2 \sin x \cos x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int \sin 2x \, dx \\ &= -\frac{1}{4} \int 2\,(-\sin 2x) \, dx \\ &= -\frac{1}{4} \cos 2x + C.\end{aligned}$$

Toisaalta esimerkissä 7.11 (s. 149) saatiin palautuskaavamenettelyllä

$$\int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + C.$$

Tulokset näyttävät erilaisilta, mutta koska

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x, \tag{7.23}$$

niin

$$-\frac{1}{4} \cos 2x + C = -\frac{1}{4} (1 - 2 \sin^2 x) + C = \frac{1}{2} \sin^2 x + C - \frac{1}{4}.$$

Siis tulokset eroavat vain integrointivakion osalta.

Esimerkki 7.32. Kaavan (7.23) nojalla

$$\sin^2 x \;=\; \frac{1}{2}\,(1-\cos 2x).$$

Kun $a \neq 0$, niin käyttämällä yhdistetyn funktion derivointisääntöä ja perusderivointikaavoja saadaan

$$\begin{aligned}
\int \sin^2(ax)\,dx \;&=\; \int \frac{1}{2}\Big(1-\cos(2ax)\Big)\,dx \\
&=\; \int \frac{1}{2} - \frac{1}{4a}\int 2a\cdot\cos(2ax)\,dx \\
&=\; \frac{x}{2} - \frac{1}{4a}\sin(2ax) + C.
\end{aligned}$$

Esimerkki 7.33. Kun $n \in \mathbf{Z}_+$, niin esimerkin 7.32 perusteella

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\,dx \;&=\; \Big/_{\!\!-\pi}^{\,\pi} \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4n}\sin(2nx)\right) \\
&=\; \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\overbrace{\sin(2n\pi)}^{=0}}{4n}\right) - \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\overbrace{\sin(-2n\pi)}^{=0}}{4n}\right) \\
&=\; \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \\
&=\; \pi.
\end{aligned}$$

Vähänkin hankammissa tapauksissa trigonometrian kaavojen soveltaminen vaatii yleensä aika paljon työtä. Yksi tavoite on muokata integroitava funktio muotoon

$$f(\cos x)\cdot\sin x \qquad \text{tai} \qquad f(\sin x)\cdot\cos x.$$

Jos funktio f on helppo integroida, voidaan tällöin soveltaa suoraan yhdistetyn funktion derivointikaavaa. Mutkikkaammissa tapauksissa voidaan sijoittaa

$$t = \cos x \qquad \text{tai} \qquad t = \sin x$$

ja jatkaa integrointia näin saadulla funktiolla.

Esimerkki 7.34. Määritetään

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x \, dx.$$

Muunnetaan integroitava funktio ensin muotoon $f(\sin x)\cos x$ käyttämällä kaavaa

$$\sin^2 x + \cos^2 x \;=\; 1,$$

tehdään sitten sijoitus $t = \sin x$ (jolloin $dt = \cos x \, dx$), integroidaan näin saatu rationaalilauseke ja palataan lopuksi alkuperäiseen muuttujaan. Siis

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x \, dx &= \int \sin^2 x \cdot \overbrace{(1 - \sin^2 x)}^{= \cos^2 x} \cdot \cos x \, dx \\
&= \left[\int t^2 \cdot (1 - t^2) \cdot dt \right]_{t = \sin x} \\
&= \left[\int (t^2 - t^4) \, dt \right]_{t = \sin x} \\
&= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C \right]_{t = \sin x} \\
&= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.
\end{aligned}$$

Derivoimalla havaitaan, että tulos on voimassa kaikilla reaalilukuväleillä.

7.5.3 Palautuskaava

Yksi mahdollisuus on osittaisintegrointi ja sen avulla johdetut palautuskaavat. Tästä oli jo esimerkki osittaisintegrointia käsittelevässä luvussa (esimerkki 7.11, s. 149). Alla vielä lisäesimerkki.

Esimerkki 7.35. Määritetään palautuskaavamenettelyä käyttäen

$$I_n \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Kun $n \geq 2$, niin käyttämällä osittaisintegrointia ja kaavaa

$$\sin^2 x + \cos^2 x \;=\; 1$$

saadaan

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \cdot \cos x\,dx \\
&= \overbrace{\Big/_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \cdot \sin x}^{=0,\ \text{kun}\ n \geq 2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \cdot \cos^{n-2} x \cdot (-\sin x) \cdot \sin x\,dx \\
&= 0 + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x \cdot \sin^2 x\,dx \\
&= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x \cdot (1 - \cos^2 x)\,dx \\
&= (n-1)\,I_{n-2} - (n-1)\,I_n.
\end{aligned}
$$

Siis

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}, \quad \text{kun } n \geq 2.$$

Edelleen

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx = \frac{\pi}{2}$$

ja

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \Big/_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x = \sin\tfrac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1.$$

Siis

$$
\begin{cases}
I_2 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2}, \quad I_4 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{\pi}{2}, \ \ldots, \ I_{2n} = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n} \cdot \dfrac{\pi}{2}, \\[2ex]
I_3 = 1 \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3}, \quad I_5 = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{4}{5}, \ \ldots, \ I_{2n+1} = \dfrac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}.
\end{cases}
$$

Voidaan myös helposti osoittaa (ks. esimerkki 7.13, s. 153), että

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = I_n.$$

7.6 * Algebralliset funktiot

Luvussa 7.4 todettiin, että rationaalifunktion määräämätön integraali voidaan aina esittää alkeisfunktioiden avulla. Algebrallisten funktioiden osalta tämä ei valitettavasti pidä paikkaansa. Ei myöskään ole olemassa yhtenäistä menetelmää, jonka avulla algebrallisia funktioita voitaisiin yleisesti integroida.

Algebrallisten funktioiden integrointia on käsitelty jonkin verran aiemmissa luvuissa. Huomautuksessa 7.1 (s. 142) esitettiin funktion

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

integrointikaava ja esimerkissä 7.6 (s. 145) kyseinen kaava yleistettiin. Funktioiden

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \text{ja} \qquad \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

integrointia käsiteltiin huomautuksessa 7.4 (s. 146) ja esimerkissä 7.16 (s. 156). Lisäksi esimerkissä 7.14 (s. 153) algebrallisen funktion integrointi palautettiin sopivalla sijoituksella rationaalifunktion integroinniksi. Vastaavaa menettelyä käytettiin itse asiassa myös esimerkissä 7.16.

Tarkastellaan seuraavaksi muutamia yksinkertaisia tapauksia, jolloin irrationaalifunktioiden integrointi voidaan sopivalla sijoituksella palauttaa rationaalifunktioiden tai trigonometristen funktioiden integrointiin. Menettelyt ovat tietysti sovellettavissa vain, jos funktiot täyttävät kaikki sijoitusmenettelyltä vaadittavat ehdot.

Merkintä $R(\cdot)$ huomautuksissa 7.20–7.22 tarkoittaa rationaalifunktiota R.

Huomautus 7.20. Jos

$$g(x) \;=\; \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}},$$

niin muotoa

$$\int R(x, g(x))\, dx$$

oleva integraali voidaan palauttaa rationaalifunktion integroinniksi sijoituksella

$$t \;=\; g(x) \;=\; \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}},$$

sillä tällöin

$$x \;=\; \frac{b-dt^n}{ct^n-a} \qquad \text{ja} \qquad dx \;=\; \frac{(ad-bc)\, nt^{n-1}}{(ct^n-a)^2}\, dt.$$

Huomautus 7.21. Jos huomautuksessa 7.20 on $c = 0$ ja $d = 1$, niin

$$t \;=\; g(x) \;=\; \sqrt[n]{ax+b},$$

jolloin

$$x \;=\; \frac{t^n - b}{a} \qquad \text{ja} \qquad dx \;=\; \frac{n}{a}\, t^{n-1}\, dt.$$

Esimerkki 7.36. Määritetään

$$\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{x+1}}\, dx \qquad (x > -1, x \neq 1)$$

käyttämällä huomautuksen 7.21 sijoitusta.

Nyt

$$t \;=\; \sqrt{x+1}, \quad x \;=\; t^2 - 1 \quad \text{ja} \quad dx \;=\; 2t\, dt,$$

joten

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{x+1}}\, dx \;&=\; \left[\int \frac{1}{(t^2-2)\cdot t} \cdot 2t\, dt\right]_{t=\sqrt{x+1}} \\
&=\; \left[2\int \frac{dt}{t^2-2}\right]_{t=\sqrt{x+1}} \\
&=\; \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \int \left(\frac{1}{t-\sqrt{2}} - \frac{1}{t+\sqrt{2}}\right) dt\right]_{t=\sqrt{x+1}} \\
&=\; \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\log\left|t-\sqrt{2}\right| - \log\left|t+\sqrt{2}\right|\right) + C\right]_{t=\sqrt{x+1}} \\
&=\; \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\log\left|\sqrt{x+1}-\sqrt{2}\right| - \log\left|\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right|\right) + C \\
&=\; \frac{1}{\sqrt{2}} \log\left|\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}\right| + C
\end{aligned}$$

kaikilla väleillä $I \subset \,]-1,\infty[$, jotka eivät sisällä pistettä $x = 1$.

Esimerkki 7.37. Olkoon $x < 0$ tai $x > 1$. Muunnetaan

$$\int \sqrt{\frac{x}{x-1}}\,dx$$

rationaalifunktion integroinniksi käyttämällä huomautuksen 7.20 sijoitusta

$$t = \sqrt{\frac{x}{x-1}}.$$

Tällöin

$$t^2 = \frac{x}{x-1} \quad \Leftrightarrow \quad t^2(x-1) = x \quad \Leftrightarrow \quad x(t^2-1) = t^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{t^2}{t^2-1}$$

ja

$$dx = \frac{2t(t^2-1) - t^2 \cdot 2t}{(t^2-1)^2} = \frac{-2t}{(t^2-1)^2}\,dt.$$

Siis

$$\int \sqrt{\frac{x}{x-1}}\,dx = \left[\int t \cdot \frac{-2t}{(t^2-1)^2}\,dt\right]_{t=\sqrt{\frac{x}{x-1}}} = \left[-2\int \frac{t^2}{(t^2-1)^2}\,dt\right]_{t=\sqrt{\frac{x}{x-1}}}.$$

Tästä integrointia voidaan jatkaa tekemällä osamurtokehitelmä tai ehkä kätevämmin käyttämällä ensin osittaisintegrointia.

Huomautus 7.22. Muotoa $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ olevassa funktiossa toisen asteen polynomi voidaan ensin täydentää neliöksi ja sitten sijoittaa neliöosaksi muuttuja t. Tällöin päädytään johonkin muodoista

$$R(t, \sqrt{t^2+\alpha^2}), \quad R(t, \sqrt{t^2-\alpha^2}) \quad \text{tai} \quad R(t, \sqrt{\alpha^2-t^2}).$$

Näitä lausekkeita on yleensä helpompi integroida sopivalla (esimerkiksi trigonometrisella) sijoituksella.

Esimerkki 7.38. Määritetään funktion $\sqrt{5+8x-4x^2}$ kuvaajan ja x-akselin rajoittaman alueen pinta-ala välillä $[1, \frac{5}{2}]$ eli

$$A = \int_1^{\frac{5}{2}} \sqrt{5+8x-4x^2}\,dx.$$

Neliöimällä saadaan

$$5+8x-4x^2 = 9-(4x^2-8x+4) = 9-(2x-2)^2.$$

Tehdään nyt sijoitus $t = 2x - 2$, jolloin

$$x = \frac{t+2}{2} \qquad \text{ja} \qquad dx = \frac{1}{2}\,dt.$$

Rajoiksi saadaan

$$t = 2 \cdot 1 - 2 = 0 \text{ (alaraja)} \qquad \text{ja} \qquad t = 2 \cdot \tfrac{5}{2} - 2 = 3 \text{ (yläraja)}.$$

Siis

$$\int_1^{\frac{5}{2}} \sqrt{5 + 8x - 4x^2}\,dx = \int_0^3 \sqrt{9 - t^2} \cdot \frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^3 \sqrt{9 - t^2}\,dt.$$

Tehdään saatuun integraaliin vielä sijoitus $t = 3\sin u$, jolloin $dt = 3\cos u\,du$. Rajoiksi saadaan

$$\begin{aligned} 3\sin u = 0 \;&\Rightarrow\; \sin u = 0 \;\Rightarrow\; u = 0 \quad \text{(alaraja)}, \\ 3\sin u = 3 \;&\Rightarrow\; \sin u = 1 \;\Rightarrow\; u = \tfrac{\pi}{2} \quad \text{(yläraja)}. \end{aligned}$$

Käyttämällä kaavaa

$$\sin^2 u + \cos^2 u = 1$$

saadaan

$$\begin{aligned} \int_0^3 \sqrt{9 - t^2}\,dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9 - 9\sin^2 u} \cdot 3\cos u\,du \\ &= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u \cdot \sqrt{9\,(1 - \sin^2 u)}\,du \\ &= 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u \cdot \sqrt{\cos^2 u}\,du \\ &= 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\,du. \end{aligned}$$

Esimerkin 7.35 (s. 178) perusteella

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\,du = \frac{\pi}{4},$$

joten

$$A = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{8}.$$