Todistamisajattelun opettaminen

Iida Kyyrönen

Tampereen yliopisto
Luonnontieteiden tiedekunta
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Pro gradu -tutkielma
Ohjaajat: Lauri Hella, Terhi Mäntylä
Heinäkuu 2018

Tampereen yliopisto
Luonnontieteiden tiedekunta
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Iida Kyyrönen: Todistamisajattelun opettaminen
Pro gradu -tutkielma, 72 sivua, 7 liitesivua
Heinäkuu 2018

Matematiikka eroaa muista tieteistä juuri sen selkeyden ja luotettavuuden takia ja nämä ominaisuudet juontuvat juuri luotettavista todistuksista. Matematiikka ei siis perustu ”kokeelliseen matematiikkaan” tai intuitiiviseen päättelyyn vaan matematiikan teoreemat todistetaan tiukkojen sääntöjen mukaan.

Matematiikan opetuksessa monesti turvaudutaan, varsinkin yläkoulussa, selittäviin esimerkkeihin. Tällöin vaarana on, että oppilaat eivät opi kriittistä päättelyä ja ongelmanratkaisutaitoja. Tämän tutkielman tarkoituksena onkin selvittää, miten todistamista ja todistamisajattelua voidaan opettaa ja tukea oppilaiden ajattelun kehittymistä erityisesti yläkoulussa ja lukiossa. Koska opettajat ovat tärkeässä roolissa todistamisajattelun ja todistamisen opettamisessa, myös heidän asenteitaan, käsityksiään ja valmiuksiaan todistamista kohtaan tarkasteltiin kyselytutkimuksen avulla. Tutkimuksen perusteella ainakin Suomen yliopistokoulutus näyttäisi tuottavan asiantuntevia opettajia. Lukion kurssi MAA11 Lukuteoria ja todistaminen keskittyy osaltaan pelkästään todistamiseen ja tälle kurssille on saatavilla hyviä oppikirjoja, kuten tutkielmaan liittyvässä oppikirja-analyysissä käy ilmi. Tärkeintä todistamisajattelun kehittymiselle on kuitenkin opettajan pedagoginen osaaminen ja todistamisen lähestymistapa. Lisäksi olennaista on, minkälaista ohjausta opettaja osaa ja ehtii oppilaalle tältä pohjalta antaa.

Avainsanat ja -sanonnat: todistaminen, todistamisajattelu, opettaminen, yläkoulu, lukio, päättely, logiikka.

Sisällys

1. Johdanto

Todistaminen on olennainen osa matematiikkaa tieteenä ja matematiikkaa perustuu deduktiiviseen päättelyyn, mikä erottaa sen muista tieteistä. Esimerkiksi monet luonnontieteet kuten fysiikka perustuvat laajalti empiiristen havaintojen pohjalta tehtyihin teorioihin, kun taas matematiikassa tällaisia oletuksia ei empiiristen havaintojen pohjalta voida tehdä. Matematiikan vahvuus onkin sen aukottomaan päättelyyn perustuva ehdoton varmuus. Matematiikkaa opetetaan pääasiassa loogisen päättelykyvyn sekä kriittisen ajattelua kehittämisen vuoksi.

Ajatustapa, jonka mukaan oppilaat oppivat todistamaan seuraamalla, jäljittelemällä ja lukemalla hyviä todistuksia on vanhentunut. Tärkeää olisi, että kouluopetus tukisi todellisen ymmärryksen, päättelyn ja todistamisajattelun kehittymistä. Opettaja ja hänen osaamisensa on tässä avainasemassa: opettajan tulisikin pyrkiä mekaanisen todistamisen sijaan ohjaamaan oppilaita näkemään yhteyksiä matematiikan ja logiikan välillä sekä selkeyttää todistamisen oppilaalle mahdollisesti uutta ja outoa maailmaa. Tutkielmassa suoritetun kyselytutkimuksen mukaan juuri todistamisen vaatima erilainen ajattelutapa sekä asenteet todistamista kohtaan ovat isoimpia esteitä todistamisen oppimiselle. Juuri tämän takia olisi tärkeää aloittaa todistamisajattelun harjoittelu jo alakoulussa oikeilla metodeilla – monesti oppilailla on käsitys, että hyvin valitut esimerkit toimivat todistuksena ja todistuksen merkitys matematiikassa jää epäselväksi. Myöskin opettajankoulutuksessa tulisi useammin huomioida valmistuvien opettajien tiedot todistamisen opettamisesta, vaikka yliopistokoulutus näyttäisi ainakin suoritetun kyselytutkimuksen perusteella Suomessa antavan riittävät valmiudet todistamisen opettamiselle. Lisäksi alakoulun opettajia tulisi paremmin ohjeistaa, miten päättelytaitoja voi jo alakoulussa harjoitella.

Tutkielman aihe on ajankohtainen, sillä uuden opetussuunnitelman mukainen lukion MAA11 Lukuteoria ja todistaminen kurssi käsittelee paljon todistamista. On siis oleelllista kysyä, millaiset valmiudet opettajilla on opettaa todistamista ja todistamisajattelua; onko tähän riittävää koulutusta, tukevatko nykyiset opetusmenetelmät todistamisen ja todistamisajattelun oppimista sekä miten sitä parhaiten voisi opettaa. Otavan ja Sanoma Pron MAA11 Lukuteoria ja todistaminen kurssille tarkoitetut oppikirjat tukevat suoritetun kirja-analyysin mukaan todistamisen opettamista – vaikka käytännössä todistamisajattelun opettaminen jäänee paljon opettajan ohjauksen sekä itse oppilaan oman kiinnostuksen ja innostuksen varaan.

Tärkeintä oppilaiden todistamisajattelun kehittymisen kannalta lienee kuitenkin miettiä, miten valjastaa matemaattiset todistukset parhaalla tavalla hyödyllisiksi opetustyökaluiksi kaikilla kouluasteilla. Oppilaille hyvä todistus ei vain todista tuloksia vaan on luonteeltaan sekä selittävä että tuo aiheeseen syvempää ymmärrystä.

2. Mitä on todistaminen?

Matemaattinen todistus on yhdistelmä kieltä, matematiikkaa ja logiikkaa [Charles & Roberts 2009, s. 350]. Modernin matematiikan historia johtaa antiikin Kreikkaan ja myös puhtaan matematiikan juuret ovat sieltä. Kun babylonialaiset ja egyptiläiset keskittyivät matematiikan käytännön sovelluksiin, olivat kreikkalaiset ensimmäisiä, jotka ajattelivat matematiikkaa abstraktisti ja esittivät loogisia argumentteja sekä todistuksia. [Rossi 2006, s. 1] Länsimaiseen kouluopetukseen todistaminen on tullut antiikin Kreikasta erityisesti Eukleideen Alkeita – kokoomateoksen kautta, jota eri muodoissa hyödynnettiin vielä 1900-luvulla joissakin Euroopan maissa. Teos sisältää geometriaa, määritelmiä, teoreemoja ja niiden todistuksia. Myös suomalaiset oppikirjat sovelsivat Eukleideen teosta 1900-luvun alkupuolella. [Malinen 2004, s. 100-102]

Eukleideen teoksissa esitetään ongelmanratkaisuprosessi, jonka vaiheita ovat elementteinä julkituominen, asetelma, määrittely tai täsmennys, konstruointi, todistaminen ja johtopäätös. Todistaminen on siis ongelmaratkaisuprosessin osa, jossa päättely tapahtuu valmiiksi annettujen tosiasioiden pohjalta. Tämä prosessi voidaan yksinkertaisesti esittää muodossa oletus, väite ja todistus. Nykyisinkin matemaattisesta todistuksesta löytyvät nämä kolme osaa: oletukset, jotka rajaavat ja määrittelevät ratkaistavan ongelman, itse todistettava väite, joka matematiikan sääntöjen ja oletusten nojalla osoitetaan todeksi. [Malinen 2004, s. 101]

Itse matematiikan olemusta ja tietorakennetta tarkasteltaessa tulee määritellä matematiikan tietorakenteelle olennaisia käsitteitä. Matemaattinen *määritelmä* antaa yksikäsitteisen selityksen matemaattiselle termille tai käsitteelle [Rossi 2006, s. 4]. Esimerkiksi funktion jatkuvuus tietyssä pisteessä voidaan määritellä seuraavasti:

Funktion jatkuvuus pisteessä $\boldsymbol{a}$

Olkoon funktio f määritelty jossakin pisteen a ympäristössä, piste a mukaan luettuna. Tällöin f on *jatkuva pisteessä* a, jos jokaista positiivilukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \text{ aina, kun } |x - a| < \delta,$$

eli jos

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Aksioomilla pyritään kuvaamaan tarkasteltavina olevia olioita, esimerkiksi ryhmiä tai joukkoja ja näille olioille tosia/päteviä asioita. Aksioomien todenmukaisuus on tärkeää tarkasteltavien olioiden osalta, sillä muut matemaattiset tulokset perustuvat aksioomien todenmukaisuudelle [Rossi 2006, s. 45]. Aksiooma on siis matemaattinen väite, joka oletetaan todeksi ilman todistusta, joskin aksiooman totuus riippuu siitä, mitä olioita tarkastellaan. Aksiooma ei siis ole aina absoluuttisesti tosi. Esimerkiksi rationaali- ja reaalilukujen perusominaisuudet eli aksioomat voidaan jakaa järjestystä, kertolaskua ja yhteenlaskua koskeviin ominaisuuksiin. Näistä yhteenlaskuominaisuudet ovat rationaali- ja reaaliluvuille a, b ja c seuraavat:

- vaihdannaisuus: $a + b = b + a$
- liitännäisyys: $(a + b) + c = a + (b + c)$
- luvun nolla ominaisuus: $a + 0 = a$
- vastaluvun olemassaolo: on olemassa $-a$ siten että $a + (-a) = 0$ [Saarimäki 2008].

Otaksuma on matemaattinen väite, jota ei ole vielä todistettu oikeaksi tai vääräksi [Rossi 2006, s. 6]. Otaksuman esittäjä siis uskoo esittämänsä väitteen totuuteen. *Hypoteesi* vastaa käytännössä otaksumaa sillä erotuksella, että sen totuuteen ei oteta kantaa. [Hella 2018]

Matemaattisen tuloksen *todistus* on sarja selkeästi esitettyjä matemaattisia argumentteja, jotka vakuuttavasti perustelevat tuloksen totuuden [Rossi 2006, s. 7].

Lause tai teoreema on matemaattinen väite (engl. statement), joka on todistettu todeksi hyväksyttyjä logiikan ja matematiikan argumentteja käyttäen. Seuraavassa esimerkki teoreemasta:

Teoreema:

$$\left| \int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^2}\, dx \right| < \infty$$

[Rossi 2006, s. 7]

Matematiikan tietorakenne pohjautuu siis pätevään päättelyyn, joka edellyttää kielen syntaksin selkeää määrittelyä. Todistusteoria pohjautuukin erilaisiin annettuihin aksioomiin ja päättelysääntöihin. Näiden avulla voidaan annetuista premisseistä johtaa (eli dedusoida) johtopäätöksiä. Päättelysääntöjen avulla voidaan jo määriteltyjen kaavojen pohjalta johtaa uusia kaavoja. Deduktio puolestaan on jono kaavoja. Tässä jonossa kaavat ovat aksioomia, päättelyn premissejä tai pääteltävissä jonkin päättelysäännön avulla jonon aikaisemmista kaavoista. Tärkeää on, että aksioomat ja päättelysäännöt ovat syntaktisesti määriteltyjä (aksioomat ovat merkkijonoja ja päättelysäännöt määrittävät, kuinka uusia merkkijonoja voidaan muodostaa olemassa olevia merkkijonoja käsittelemällä).

Matematiikan yhteydessä puhutaan usein formaaleista päättelysysteemeistä. Tähän kuuluu osana luonnollinen päättely, jolla tarkoitetaan yleensä arkipäivän elämässä sekä matematiikassa, esimerkiksi merkkijonojen ja kaavojen käsittelyn yhteydessä, esiintyvää päättelyä. Myös aksioomat ja päättelysäännöt ovat osa formaalia päättelyä.

2.1 Induktiivinen ja deduktiivinen päättely

Induktiivisella päättelyllä tarkoitetaan päättelyä, joka pohjautuu havaintoihin. Monet arkielämän päättelyt ovat induktiivista päättelyä - havaintojen perusteella ennustetaan tulevia tapahtumia tai yleistetään. Esimerkiksi koska aurinko on nousut joka ikinen päivä, voidaan induktiivisella päättelyllä todeta, että se nousee huomennakin. Tämähän ei välttämättä ole totta, ainoastaan erittäin todennäköistä. Matematiikan varhaisissa vaiheissa induktiivinen päättely oli kuitenkin yleistä ja sitä käytetään edelleenkin fysiikassa. Puhtaassa matematiikassa induktiivista päättelyä ei voida hyväksyä, sillä suurikaan datamäärä ei takaa, että induktiiviseen päättelyyn perustuva otaksuma olisi välttämättä totta. Induktiivinen päättely empiirisen datan pohjalta voitaisiin hyväksyä vain, jos oletuksen pohjalla olisi mahdollista tarkastella äärettömän montaa tapausta ja kaikki mahdolliset tapaukset olisi tutkittu ja oletus voitaisiin todeta todeksi kaikissa näissä tapauksissa. [Rossi 2006, s. 2-4]

Henkilöt, joilla ei ole paljoa kokemusta matematiikasta, hyväksyvät usein epävalidia induktiivista päättelyä todistukseksi. Tämä on aivan luonnollista arkipäivän havaintojen ja päätösten perustuessa yleisesti induktiiviseen päättelyyn [Gary Martin, 1989; Gila 2000, s. 9]. Myös ala- ja yläkoulussa monesti todistusten puuttuessa matemaattisia tuloksia usein ”perustellaan” hyvin valituilla esimerkeillä [Gary Martin, 1989]. Kun oppilas on tottunut myös matematiikassa perustelemaan asioita induktiivisella päättelyllä, ei ole ihme, että deduktiiviseen päättelyyn ja todistamisajatteluun oppiminen voi lukiossa olla monille hankalaa.

Deduktiivisella päättelyllä tarkoitetaan päättelyä, jossa päättelyn lopputulos perustuu oletuksista seuraaviin loogisiin argumentteihin. Deduktiivisen päättelyn isänä pidetään antiikin kreikan matemaatikkoa Thalesta (600 eKr.), joka ensimmäisenä esitti loogisia argumentteja matemaattisten väitteittensä pohjaksi. Esimerkissä 1 hyödynnetään deduktiivista päättelyä. [Rossi 2006, s. 2-3]

Esimerkki 1.

Väite:

$$\left|\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx\right| < \infty$$

Todistus:

Koska

$\frac{\cos(x)}{x^2} < \frac{1}{x^2}$, kun $x \in [1,\infty[$ ja $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

niin

$\left|\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx\right| \le \int_1^\infty \left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right|\,dx < \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1 < \infty$ ■

Deduktiivinen päättely on hyväksytty metodi matemaattisten tulosten perusteluun. [Rossi 2006, s. 3]

Deduktiivista ajattelua käytetään matematiikassa useammin kuin huomataan ja intuitiolla suuri merkitys matemaattisissa löydöissä [Schoenfeld 1994, s. 257]. Todellisuudessa matemaattinen tutkimus etenee usein siten, että myös matemaatikkojen tulee ensin varmistua väitteen todenmukaisuudesta, ennen kuin he alkavat laatia sille formaalia todistusta [Christou et al. 2004, s. 215-216]. Todistus on siis harvoin vain formaalin matemaattisen ajattelun deduktiivisesti rakennettu tulos [Schoenfeld 1994, s. 257].

2.2 Erilaiset todistusmenetelmät

Modernin matematiikan tutkimus edistyy seuraavasti: aksiooma → määritelmä → otaksuma → otaksuman todistus → yleistäminen ja laajennus → ⋯. Uudet tulokset pitää siis yksiselitteisesti todistaa ennen kuin ne voidaan hyväksyä. [Rossi 2006, s. 45] Erilaisia todistusmenetelmiä ovat esimerkiksi suora todistus, kontrapositio todistus, epäsuora todistus ja induktiotodistus.

Suora todistus

Suora todistus on yleisin todistusmenetelmä tapauksille ”Jos O, niin C”. Teoreeman tai otaksuman todistus alkaa oletuksista (O) ja loogisten väitteiden kautta päästään teoreeman lopputulokseen (C). Jos looginen argumentointi hypoteeseista lopputulokseen on validi, on teoreema todistettu oikeaksi suoralla todistuksella. Suoran todistuksen etenemistä voidaan esittää seuraavasti:

$$O \to C_1 \to C_2 \to C_3 \to \cdots \to C$$

missä O johtaa päätelmään C_1 , C_1 johtaa päätelmään C_2 ja niin edelleen, kunnes päädytään lopputulokseen C. Esimerkeissä 2 ja 3 on esitetty esimerkit suorasta todistuksesta. [Rossi 2006, s. 51]

Esimerkki 2. Oletetaan teoreemat 1 ja 2 tunnetuiksi ja todistetuiksi.

Teoreema 1: Olkoon f ja g reaaliarvoisia funktioita. Jos $\lim_{x\to c} f(x) = L$ ja $\lim_{x\to c} g(x) = M$, niin $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x) = LM$.

Teoreema 2: Olkoon f reaaliarvoinen funktio. Jos $\lim_{x\to c} f(x) = L$ ja $L \neq 0$, niin $\lim_{x\to c} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L}$.

Teoreema 3: Olkoon *f* ja g reaaliarvoisia funktioita. Jos $\lim_{x\to c} f(x) = L$, $\lim_{x\to c} g(x) = M$ ja $M \neq 0$, niin $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$.

Todistetaan teoreema 3 suoralla todistuksella käyttäen apuna tunnettuja tuloksia teoreemoista 1 ja 2.

Muotoillaan todistus vaiheittain

Oletus *(H)*: *f* ja g ovat reaaliarvoisia funktioita, joille pätee $\lim_{x\to c} f(x) = L$, $\lim_{x\to c} g(x) = M$ ja $M \neq 0$.

Väite (C): $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$

Todistus:
$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \left[f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right] = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} \frac{1}{g(x)} = L \cdot \frac{1}{M} = \frac{L}{M}$,

missä toinen yhtäsuuruus pätee teoreeman 1 ja kolmas yhtäsuuruus teoreeman 2 perusteella.

Siis $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$, kun $\lim_{x\to c} f(x) = L$, $\lim_{x\to c} g(x) = M$ ja $M \neq 0$. ■

[Rossi 2006, s. 52-54]

Esimerkki 3. Käytä suoraa todistusta seuraavan teoreeman todistukseen.
Teoreema: Jos $x, y \in \mathbb{R}$, niin $x^2 + y^2 \geq |xy|$
Todistus:

Olkoon Jos $x, y \in \mathbb{R}$. Tarkastellaan, mitä on $(|x| - |y|)^2$.

$$(|x| - |y|)^2 = (|x|)^2 - 2|x||y| + (|y|)^2 = x^2 + y^2 - 2|xy|$$

Nyt koska $(|x| - |y|)^2 \geq 0$, niin

$$x^2 + y^2 - 2|xy| \geq 0$$

ja siten

$$x^2 + y^2 \geq 2|xy| \geq |xy|$$

Siis
$x^2 + y^2 \geq |xy|$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$. ■
[Rossi 2006, s. 55]

Kontrapositio todistus

Esimerkin 3 todistus on mahdollista rakentaa suorana todistuksena, mutta ei ole mitenkään päivänselvää lähteä tarkastelemaan tapausta $(|x| - |y|)^2$ [Rossi 2006, s. 55]. Suora todistus voi siis joissain tapauksissa olla hankala tai peräti mahdoton. Toinen mahdollinen suoran todistuksen muoto on todistus kontrapositiolla. Kun suorassa todistuksessa todistetaan ”Jos *O*, niin *C*” ($O \rightarrow C$), niin logiikan sääntöjen mukaan kontrapositio ”Jos ei *C*, niin ei *O*” ($\neg C \rightarrow \neg O$) todistaa saman asian. Todistettaessa kontrapositiolla oletetaan siis lopputulos C vääräksi, josta argumentaatioketjun seurauksena päästään todistamaan oletus *O* vääräksi. [Rossi 2006, s. 56]

$$\neg C \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow C_3 \rightarrow \cdots \rightarrow \neg O$$

Esimerkeissä 4 ja 5 on esitetty todistukset kontrapositiota hyödyntäen.

Esimerkki 4. Todista teoreema.
Teoreema: Olkoon n luonnollinen luku. Jos n^2 on parillinen, niin *n* on parillinen luonnollinen luku.

Todistetaan kontrapositiolla.
Oletus: Olkoon *n* luonnollinen luku.
Väite: Jos *n* on pariton luonnollinen luku (negaatio sille, että *n* on parillinen), niin n^2 ei ole parillinen (negaatio sille, että n^2 on parillinen)
Todistus
Oletetaan, että n on pariton,
siis on olemassa kokonaisluku *k* siten, että $n = 2k + 1$. Nyt

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2j + 1$$

missä $j = 2k^2 + 2k$, joka on kokonaisluku. Täten siis n^2 on pariton luku, jos *n* on pariton. Siis kontrapositiotodistus osoittaa, että *n* on parillinen, jos n^2 on parillinen. ■

Esimerkki 5. Todista seuraava teoreema kontrapositiolla.
Teoreema: Olkoon *x* ja *y* positiivisia luonnollisia lukuja. Jos $x \neq y$, niin $\ln(x) \neq \ln(y)$.
Todistetaan kontrapositiolla
Oletus: Olkoon *x* ja *y* positiivisia luonnollisia lukuja
Väite: Jos $\ln(x) = \ln(y)$, niin $x = y$
Todistus:
Nyt $x = e^{\ln(x)}$ ja $y = e^{\ln(y)}$. Jos $\ln(x) = \ln(y)$, niin

$$x = e^{\ln(x)} = e^{\ln(y)} = y$$

Siis $x = y$, kun $\ln(x) = \ln(y)$. Siis alkuperäinen teoreema, jos $x \neq y$, niin $\ln(x) \neq \ln(y)$, pitää paikkansa. ■

Epäsuora todistus

Epäsuorassa todistuksessa tapaukselle ”Jos *O* on tosi, niin *C* on tosi” tarkastelemalla tapausta ”*O* on tosi ja *C* on epätosi”. Jos tästä lähtöasetelmasta seuraa loogisen argumentaation kautta ristiriita, on alkuperäinen väite *C* tosi. [Rossi 2006, s. 58-60] Esimerkiksi jos todistettava väite on: $O \rightarrow C$ niin lause $O \wedge \neg C$ on loogisesti ekvivalentti lauseen $\neg(O \rightarrow C)$ kanssa. Jos siis väitteen negaatio on aina epätosi, on itse väite tosi. Siis ristiriita todistaa, että $O \rightarrow C$, sillä $\neg(O \rightarrow C)$ ei ole koskaan tosi. Esimerkissä 6 esitetään epäsuora todistus. [Rossi 2006, s. 58-60]

Esimerkki 6. Todista seuraava tulos. Kaikilla $x > 0$ pätee $x + \frac{4}{x} \geq 4$.

Oletus: $x > 0$

Väite: $x + \frac{4}{x} \geq 4$

Todistus:

Oletetaan $x > 0$. Tarkastellaan väitteen negaatiota $x + \frac{4}{x} < 4$. Nyt

$$x + \frac{4}{x} < 4 \Leftrightarrow x^2 + 4 < 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 < 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 < 0$$

missä on ristiriita, sillä $(x-2)^2 \geq 0$, kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Siis kaikilla $x > 0$ pätee $x + \frac{4}{x} \geq 4$. ■

[Rossi 2006, s. 60-61]

Induktiotodistus

Induktiotodistus on usein hyödyllinen, jos halutaan todistaa, että jokin ominaisuus pätee lauseelle P_n kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Induktiotodistus sisältää aina samat vaiheet: alkuaskeleen ja induktioaskeleen. Induktiotodistus voidaan jakaa heikkoon (I_1) ja vahvaan induktioon (I_2). Heikon ja vahvan induktiotodistuksen etenemistä voidaan kuvata seuraavasti. [Rossi 2006, s. 63]

Heikko induktio I_1: Väite, joka on muotoa ”P_n pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}$” voidaan todistaa näyttämällä seuraavat kaksi ehtoa tosiksi.

1. Alkuaskel: P_0 on totta
2. Induktioaskel: Jos P_k on totta, niin myös P_{k+1} on totta ja implikaatio pätee jokaisella $k \in \mathbb{N}$.

Vahva induktio I_2: Väite, joka on muotoa ”P_n pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}$” ” voidaan todistaa näyttämällä seuraavat kaksi ehtoa tosiksi.

1. Alkuaskel: P_0 on totta
2. Induktioaskel: Jokaisella $k \in \mathbb{N}$ pätee implikaatio, jos P_0, P_1,…, P_k ovat totta niin myös P_{k+1} on totta.

Esimerkki 7. Todista käyttämällä heikkoa induktiota:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \forall\, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$$

Todistus:

Olkoon P_n väite $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

1. Alkuaskel

Olkoon $n = 1$. Nyt $\sum_{i=1}^{1} i = 1$ ja $\frac{1(1+1)}{2} = 1$. Siis P_1 on totta.

2. Induktioaskel

Oletetaan, että P_k on totta. Siis $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$

Jos P_{k+1} on totta, niin
$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Tarkastellaan, mitä on $\sum_{i=1}^{k+1} i$:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \sum_{i=1}^{k} (i + (k+1)) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2}$$

$$= \frac{k^2 + 3k + 2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Siis P_{k+1} on totta, kun P_k on totta. Siten $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \forall\, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. ■

[Rossi 2006, s. 65-66]

Esimerkki 8. Todista käyttämällä induktiota. Olkoon lukujono a_n määritelty siten, että $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ ja $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$, kaikilla $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Todista, että $a_{n+2} = 2^{n+1} - 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

Todistus:

Olkoon P_n väite $a_{n+2} = 2^{n+1} - 1$.

1. Alkuaskel: Jos $n = 1$, niin $a_{1+2} = a_3 = 3a_2 - 2a_1 = 3 - 0 = 3$ ja $2^{1+1} - 1 = 4 - 1 = 3$.

Oletetaan, että $P_1, \dots, P_k$ ovat kaikki tosi jollain $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Nyt $a_{j+2} = 2^{j+1} - 1$, kun $j = 1, 2, \dots, k$.

2. Induktioaskel: Jos P_{k+1} on tosi, niin silloin

$$\begin{aligned}
&a_{k+3} = 3a_{k+2} - 2a_{k+1} \\
&= 3(2^{k+1} - 1) - 2(2^k - 1\,) \\
&= 3 \cdot 2^{k+1} - 3 - 2 \cdot 2^k + 2 \\
&= 3 \cdot 2^{k+1} - 2^{k+1} - 1 \\
&= (3 - 1)2^{k+1} - 1 \\
&= 2 \cdot 2^{k+1} - 1 \\
&= 2^{k+2} - 1
\end{aligned}$$

Siis P_{k+1} on tosi, jos $P_1, \dots, P_k$ ovat tosia. Vahvan induktion nojalla $a_{n+2} = 2^{n+1} - 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

Luonnollisen kielen ilmaisut ovat usein pitkiä ja hankalia. Kvanttoreilla normaalin kielen ilmaisua voidaan yksinkertaistaa ja lyhentää. Olemassaolo kvanttoria merkitään $\exists$ (engl. exists) ja kaikki kvanttori $\forall$ (engl. for all). Kvanttoreiden käyttöä on esitelty seuraavassa esimerkissä.

Esimerkki 9.
Merkitään $O(x)$: ”x opiskelee yliopistossa.”
Nyt lause ”On olemassa opiskelija, joka opiskelee yliopistossa” voidaan lyhentää seuraavasti: $\exists x\ O(x)$

Samassa lauseessa voi olla myös useampia kvanttoreita. Esimerkissä 10 esitetään esimerkki kahden kvanttorin lauseesta.

Esimerkki 10.
Valitaan perusjoukoksi kerrostalon asukkaat.
Merkitään $K(x, y)$: ”x tietää y:n salaisuuden.”
Nyt $\exists x \forall y\ K(x, y)$ tarkoittaa ”On olemassa asukas, joka tietää kaikkien salaisuudet.”

2.3 Todistamisen merkitys matematiikassa

Mitä on matemaattinen tieto? Matemaattinen tieto eroaa muusta tiedosta, mutta sen perusluonne ja esitystapa eroavat tiedosta. Tiedon voisi määritellä seuraavasti: paljon muusta

- sen pitää olla totta
- sen pitää olla uskottava ja
- se pitää olla uskottavasti perusteltavissa [Brook & Stainton 2001]

Ihmisen mieli ei kuitenkaan luo totuutta tai väärää vaan se luo uskomuksia. Mikä tekee uskomuksista tosia, on niiden suhde faktaan. Faktat taas eivät ole missään suhteessa ihmisen mieleen tai uskomuksiin. Uskomukset ovatkin riippuvaisia niitten olemassaolosta ihmisen mielessä, mutta niiden totuusarvo ei ole missään yhteydessä ihmisen mieleen. [Loewenberg et al. 2002]

Jotta matemaattista lausetta (engl. statement) (esimerkiksi teoreema) voitaisiin pitää matemaattisena tietona, pitäisi tukea seuraavien ominaisuuksien kehittymistä: (a) uskomusta lauseen totuuteen (b) tämän uskomuksen totuuden perustelemista (Ei siis pelkästään perustelemista formaalilla todistuksella vaan myös totuuden perustelemista faktoilla). Toisin sanoen oppilaan näkökulmasta, jos hänelle annetaan matemaattisen teoreeman lause *p*, tulisi oppilaan osata vastata kahteen peruskysymykseen: (a) ”Uskotko, että *p* on totta?” ja olettaen, että vastaus tähän on ”Kyllä”, (b) ”Miksi uskot, että *p* on totta?” Usein oppilaat perustelevat tämän formaalin todistuksen sijaan hyvin valituilla esimerkeillä. Joskus perustelut kuitenkin lähenevät formaalin todistuksen ideaa ja voivat auttaa oppilasta formaalin todistuksen rakentamisessa. [Loewenberg et al. 2002]

Matematiikassa todistuksilla on monta funktiota ja niiden tulisi tulla opetuksessa jollain tavalla esille, joskaan ne kaikki eivät ole yhtä relevantteja matematiikan oppimiselle. Matematiikko odottaa todistukselta muutakin kuin kyseessä olevan väitteen oikeellisuuden perustelua. Parhaimmillaan todistus auttaa ymmärtämään teoreeman syvemmin. Tärkeää ei siis ole vain, että todistus on pätevä, vaan *miksi* se on pätevä. [Gila 2000, s. 7-8]

Todistamisen funktioiksi voidaan katsoa muun muassa:

- verifikaatio (käsittelee väitteen totuutta)
- perustelu (selittää miksi väite on pätevä)
- systematisointi (organisoi tulokset deduktiivisen päättelyn verkoksi, jossa kaikki perustuu lauseisiin sekä matemaattisiin argumentteihin)
- uudet havainnot (uusien tulosten keksiminen)
- kommunikaatio (matemaattisen tiedon siirtäminen)
- empiirisen teorian muodostaminen [Gila 2000, s. 8]

Todistukset voivat myös johtaa uusiin läpimurtoihin. Lisäksi todistukset voivat osoittaa tarpeen paremmille määritelmille tai johtaa hyvien algoritmien löytämiseen. [Gila 2000, s. 8] Todistuksen perään kirjoitettu latinan kielinen ”q.e.d.” (quod erat demonstrandum) tai suomeksi ”m.o.t.” (mikä oli todistettava) kuvaa todistuksen päättelyn täydellisyyttä. [Malinen 2004, s. 101]

Koska parhaimmat todistukset osoittavat teorian paikkansapitävyyden lisäksi miksi se on totta ovat oppilaille parhaat todistukset luonteeltaan selittäviä. Opetuksen kannalta ongelmana voi olla, että monia teoreemoja ei voida todistaa selittävillä todistuksilla. Tällöin pitää turvautua todistukseen matemaattisella induktiolla, (mikä saattanee olla oppilaille hankalasti ymmärrettävissä), epäsuoralla todistuksella tai muulla ei selittävällä metodilla. [Gila 2000, s. 9] Tämä voi olla oppilaan kannalta hämmentävää.

2.4 Miksi todistamista tulisi opettaa kouluissa?

Luokkahuoneessa aika on rajallista ja monet ovatkin sitä mieltä, että heurististen taitojen harjoittelu tulisi olla ensisijaista todistamisajatteluun nähden. Tämä ajattelu juontuu käsityksestä, että opetuksessa tulee tehdä ”valinta” tutkivien ongelmaratkaisutehtävien (jotka nähdään soveltavina ja hyödyllisinä) sekä itse todistusten (jotka nähdään vähemmän hyödyllisinä ja monille oppilaille epämieluisina) välillä. Todistaminen koetaan siis usein hankalana esteenä ennemmin kuin työkaluna ymmärtämisen syventämiseen. Heuristiset tekniikat nähdäänkin siksi usein hyödyllisempinä kuin todistaminen opetettaessa matemaattisesti pätevää päättelyä ja todistaminen nähdään vain todistamisen opettamisena ilman muuta lisäarvoa. Opetuksellisesti arvokkaampana nähdään sen sijaan tutkivat ja kokeilevat tehtävät, jotka kehittävät intuitiivista ajattelua deduktiivisen päättelyn sijaan ja jotka todennäköisemmin kehittävät laskurutiinia ja tuovat ”merkityksellistä sisältöä” oppitunneille. [Gila 2000, s. 9-10]

Pohdittaessa todistamisen osuutta matematiikan opetuksessa tulee tarkastella sen osuutta itse matematiikassa. Vaikka matematiikan alueella on ollut ja on edelleen erilaisia mielipiteitä hyväksyttävistä todistuksista, tulisi tämän olla toissijaista verrattuna todistusten tuomaan matemaattiseen ymmärrykseen. Lisäksi todistaminen on keskeinen osa matematiikkaa ja sen perusluonnetta, joten on tärkeää tutustuttaa oppilaat todistamisen mahdollisuuksiin ja rajoihin. Matemaattisen ymmärryksen syventäminen tulisi kouluopetuksessa olla todistamisen opettamisen keskiössä ja erityisesti todistusten esittäminen ymmärryksen syventämisen kautta olisi oppilaiden oppimisen kannalta hyödyllistä. Todistamista voidaankin vertaiskuvallisesti ajatella seuraavasti: aksioomat, määritelmät ja teoreemat ovat matematiikan kartalla kaupungin nähtävyyksiä ja niitä yhdistävät tiet ja reitit todistuksia. Oppilaan kannalta olisi tärkeää osata yhdistää nähtävyydet ja kaupungin kohokohdat toisiinsa, mikä matematiikassa tapahtuu todistusten avulla. Todistukset siis auttavat ymmärtämään asioiden välisiä yhteyksiä ja hahmottamaan kokonaisuutta. [Gila 2000, s. 5-7]

Todistamisen harjoittelussa kehittyvistä ajattelun taidoista on hyötyä niin matematiikassa kuin koulun ulkopuolisessa elämässä. Esimerkiksi tekniselle alalle suuntautuessa hyvästä matemaattisesta osaamisesta on hyötyä ja työelämässä hyvät ongelmanratkaisutaidot ovat usein arvostettuja.

2.5 Opetussuunnitelma ja todistaminen

Todistamisen tärkeys on koulumaailmassa huomattu ja sen opettaminen on sisällytetty uuteen Lukion opetussuunnitelman perusteisiin. Kuitenkin on huomattavaa, ettei todistamisajattelun opettamisen perustelu voi pohjautua pelkästään tähän dokumenttiin vaan enemminkin dokumentin taustalla vallitseviin arvoihin ja käsityksiin.

Lukiokoulutuksen tehtäviksi mainitaan ”laaja-alaisen yleissivistyksen vahvistaminen” sekä kriittisen, itsenäisen ajattelun harjoittelu sekä syventää oppilaan kiinnostusta tieteiden maailmaan [Opetushallitus 2015, s. 12]. Tähän voidaan katsoa kuuluvan oppilaiden ajattelutaitojen sekä eri luonnontieteiden yleispiirteisiin perehtyminen – matematiikassa se tarkoittaa muun muassa päättelytaitoja, todistamiseen ja todistamisajatteluun perehdyttämistä. Lukiokoulutuksen tulisi myös antaa yleiset jatko-opiskelumahdollisuudet [Opetushallitus 2015, s. 12].

MAA11 Lukuteoria ja todistaminen on ensimmäinen valtakunnallinen syventävä pitkän matematiikan kurssi ja käsittää Taulukossa 1 esitetyt sisällöt ja tavoitteet.

Taulukko 1. *MAA11 Lukuteoria ja todistaminen: sisällöt ja tavoitteet. [Opetushallitus 2015, s. 135]*

	Tavoitteet	***Keskeiset sisällöt***
Suoraan yhteydessä todistamisajattelun kehittymiseen	• *(oppilas) perehtyy logiikan alkeisiin ja tutustuu todistusperiaatteisiin sekä harjoittelee todistamista*	• *konnektiivit ja totuusarvot* • *geometrinen todistaminen* • *suora, käänteinen ja ristiriitatodistus* • *induktiotodistus*
Epäsuorasti yhteydessä todistamisajattelun kehittymiseen	• *(oppilas) hallitsee lukuteorian peruskäsitteet ja perehtyy alkulukujen ominaisuuksiin* • *(oppilas) osaa tutkia kokonaislukujen jaollisuutta jakoyhtälön ja kokonaislukujen kongruenssin avulla* • *(oppilas) syventää ymmärrystään lukujonoista ja niiden summista* • *(oppilas) osaa käyttää teknisiä apuvälineitä lukujen ominaisuuksien tutkimisessa.*	• *kokonaislukujen jaollisuus ja jakoyhtälö* • *Eukleideen algoritmi* • *alkuluvut ja Eratostheneen seula* • *aritmetiikan peruslause* • *kokonaislukujen kongruenssi*

Osa kurssin sisällöistä on suoraan yhteydessä todistamisajattelun kehittymiseen kuten logiikan alkeet, todistusperiaatteet sekä todistamisen harjoittelu. Kurssilla tulevat todistamisen eri tavat, kuten geometrinen, suora, käänteinen, ristiriita ja induktiotodistus sekä konnektiivit ja totuusarvot. Kurssilla on myös todistamiseen epäsuorasti liittyviä sisältöjä, joiden harjoittelu mahdollisesti kehittää todistamisajattelua ja jotka tulee mahdollisesti hallita ennen kuin todistamisen voi kunnolla hallita (esimerkiksi lukuteorian hallitseminen varmasti helpottaisi induktiotodistuksen ymmärtämistä). Myöskin näiden sisältöjen hallitseminen mahdollistaa monipuolisempien todistustehtävien harjoittelun.

3. Todistamisen ja todistamisajattelun opettaminen

Koulumatematiikassa todistamista ja loogista ajattelua voidaan tarkastella kahdesta eri näkökulmasta, traditionaalisen mallin tai ongelmanratkaisun mallin avulla. Traditionaalinen malli käyttää loogisia päättelysääntöjä sekä matematiikassa hyväksyttyjä metodeja systemaattisten todistusten tekemiseen. Ongelmanratkaisu malliin ei välttämättä liity suoraa todistamista, mutta siinä pyritään todistamisen tapaan ratkaisemaan oppilaille mielekkäitä ongelmia päättelyn avulla, joskaan käytetty päättely ei välttämättä ole matemaattisen todistamismallin mukaista. Kokeilun, yrityksen ja erehdyksen kautta päästään varmistuksiin ja toteen näyttämisiin, joiden kautta ongelma saadaan lopulta ratkaistua. Traditionaalinen malli siis keskittyy pelkästään puhtaaseen todistamiseen, ongelmanratkaisu mallissa todistamisajattelu kuuluu osaksi ongelmanratkaisuprosessia. [Malinen 2004, s. 105-106]

Todistaminen ja todistamisajattelu eroavat toisistaan, vaikka ne usein virheellisesti mielletään samaksi asiaksi. Vaikka itse todistaminen vaatii todistamisajattelua, myös monet ongelmanratkaisutilanteet aukeavat samankaltaisilla päättelyprosesseilla. Päättelyprosessiin kuuluvat hypoteesin muodostaminen (heuristinen prosessi), hypoteesin testaaminen, joka johtaa hypoteesin hylkäämiseen tai hyväksymiseen. Oppilaan kannalta päättelyprosessissa on tärkeää osata tunnistaa, mitä hän on pitänyt hypoteesina ja miten hän on sitä testannut. [Malinen 2004, s. 106]

Malisen (2004) mukaan kouluopetus sisältää hyvin vähän algoritmisia ongelmanratkaisutilanteita, jotka kehittäisivät todistamisajattelua. Todistamisajattelun kehittämiseksi olisikin tärkeää esittää oppilaille päättelytilanteita, joissa tarkastellaan erilaisia vaihtoehtoja ja arvioidaan niiden totuutta. Opettajan vastuulle jää oikeanlaisten tehtävien ja tilanteiden luominen sekä oppilaiden ohjaus tuomalla esille loogista ajattelua ohjaavia kysymyksiä ja lähtökohtia. Näin toimiakseen opettajan tulee hallita sekä logiikkaa että oppimiseen ja ajatteluun liittyviä psykologisia prosesseja. Todistamisajattelun oppimiseksi ei Malisen mukaan tarvitse opettaa todistuksia ja tehdä niitä vaan riittää, että oppilaille annetaan loogista päättelyprosessia kehittäviä tehtäviä ja kysymyksiä. [Malinen 2004, s. 107-109; Epp, 2003]

3.1 Todistamisajattelun kehittyminen lapsuudesta aikuisuuteen: ilmenevä, symbolinen ja formaali maailma

Matemaattinen ajattelu voidaan Tallin (2002) mukaan jakaa ilmenevään, symboliseen ja formaaliin. Ilmenevä maailma rakentuu vuorovaikutuksessa ihmisen ja ympäristön kanssa aisteja hyväksi käyttäen. Ilmenevä maailma koostuu havainnoistamme ja toimistamme todellisessa maailmassa sekä niiden reflektoinnista, käsitteiden rakentamisesta ja niiden välisistä yhteyksistä. Ilmenevät todistukset ovat suorassa yhteydessä todelliseen maailmaan ja siitä tekemiimme fyysisiin havaintoihimme siitä, esimerkiksi monet geometriset todistukset kuuluvat tähän kategoriaan.

Symbolinen maailma koostuu käyttämistämme symboleista, kuten aritmetiikalle ja algebralle tyypillisistä symboleista. Ne mahdollistavat vastausten saamisen laskemalla ja käsittelemällä symboliesityksiä. [Tall 2002]

Formaali maailma koostuu määritelmistä ja symboleista, jotka johtavat aksiomaattisten teorioiden rakentamiseen [Tall 2002].

Nämä kolme erilaista maailmaa voidaan mieltää erilaisiksi tavoiksi ajatella matematiikkaa ja todistamista. Jotkut ihmiset pystyvät toimimaan kaikissa näissä maailmoissa, mutta monesti toiminta rajoittuu vain yhteen tai kahteen maailmaan. Onkin siis huomattava, kuinka erilaisia esimerkiksi geometrian ja algebran todistukset ovat. Erityisesti monilla oppilailla on vaikeuksia siirtyä matemaattisessa ajattelussa formaaliin maailmaan. [Tall 2002]

Näiden kolmen ajattelumallin kognitiivisen kehityksen voidaan ajatella tapahtuvan vaiheittain. Ensin luonnollisesti kehittyy ilmenevä maailma vuorovaikutuksestamme fyysisen maailman kanssa. Symbolinen maailma alkaa kehittyä muun muassa laskemisen, lisäämisen, asioiden ryhmittelyn ja jakamisen seurauksena. Symboleilla merkitään numeroita, summaa, tuloa jne. Symbolisen maailman symbolit ovat duaalisia: niitä käytetään prosessissa (esim. laskemisessa) sekä konseptina (esim. summa). Tämä maailma kehittyy ilmenevän maailman rinnalle. Paljon myöhemmin, jos ollenkaan, kehittyy formaali maailma aksiomaattisine määritelmineen ja todistuksineen. [Tall 2002]

Jokainen näistä kolmesta maailmasta kehittyy omalla tavallaan. Ilmenevä maailma perustuu havaintoihin fyysisestä maailmasta. Kieli mahdollistaa asioiden ja esineiden kuvaamisen, jolloin asiat ja esineet voidaan jaotella ominaisuuksiensa mukaan eri kategorioihin. Esimerkiksi kuvio on ympyrä, koska se on pyöreä tai kuvio on neliö koska sillä on neljä yhtä pitkää sivua sekä kaikki kulmat ovat suorakulmia. Tällaiset *kuvaukset* kehittyvät pikkuhiljaa tarkemmiksi *määritelmiksi*. Määritelmien avulla voidaan testata, mihin kategoriaan esine tai asia kuuluu ja määritelmät johtavat deduktiiviseen päättelyyn: *jos* jollain esineellä on nämä ominaisuudet, *niin* sitten sillä on myös nämä ominaisuudet. Esimerkiksi Euklidiset todistukset ovat kehittyneet kielen ja geometristen kuvioiden ilmenevien ominaisuuksien pohjalta. [Tall 2002]

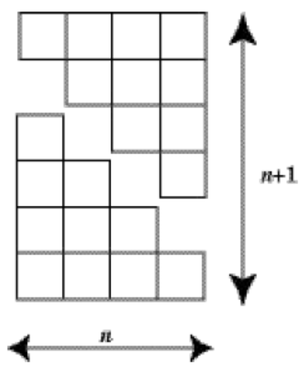
Symbolinen maailma on hyvin erilainen. Jokainen käsite saa alkunsa prosessista, esimerkiksi numeron käsite kehittyy prosessina, kun laskemisessa aletaan käyttää numerosymboleita. Esimerkiksi yhteenlaskusta kehittyy summan käsite ja yhteenlaskuprosessien toistamisesta syntyy tulon käsite. Näin ilmenevän maailman prosesseista päästään siirtymään symboliseen maailmaan. Kehittyy käsitys algebrasta, joka on aritmetiikan yleistys. Esimerkiksi symboli $2n - 1$ kuvaa luvun n kertomista kahdella ja tästä tulosta vähennetään vielä yksi. [Tall 2002]

Formaali maailma pohjautuu ilmenevään ja symboliseen maailmaan. Formaali maailma perustuu määritelmiin ja todistuksiin. Ilmenevässä maailmassa käytämme aistejamme ja valitsemme ominaisuudet, joiden avulla teemme määritelmiä. Ilmenevässä maailmassa siis käsitteet johtavat määritelmiin, kun taas formaalissa maailmassa määritelmät johtavat käsitteisiin. Formaali todistus pohjautuu määritelmiin, joista deduktiivisesti voidaan johtaa teoreemoja, joiden pohjalle voidaan deduktiivisesti rakentaa lisää teoreemoja. Pohja todistuksille pysyy siis koko ajan samana. [Tall 2002]

Todistaminen ei kuitenkaan kuulu kokonaan vain formaaliin maailmaan vaan se on yhteydessä sekä ilmenevään, että symboliseen maailmaan. Kuitenkin todistamiseen liittyvää päättelyä ilmenevässä ja symbolisessa maailmassa ei useinkaan voida pitää täydellisenä todistuksena. Näissä maailmoissa ilmenevä päättely kuitenkin helpottaa oppilaita arvioimaan päättelynsä totuutta. [Tall 2002]

Gary Martin (1989) on tutkinut alakoulun opettajiksi opiskelevien opiskelijoiden induktiivista ja deduktiivista ajattelua matemaattisten todistusten yhteydessä. Hänen mukaansa monet hyväksyvät induktiivisia argumentteja matemaattisten väitteiden todistuksiksi riippumatta siitä, onko matemaattinen väite tuttu vai ei. Opiskelijoilla on hänen mukaansa kaksi todistusmallia, induktiivinen ja deduktiivinen, joista induktiivinen on rakentunut arkipäivän kokemusten perusteella ja deduktiivinen, joka on yhteydessä matematiikan opiskeluun. Kiintoisaa on, että Gary Martinin tutkimuksen mukaan induktiiviset ja deduktiiviset argumentit eivät sulje toisiaan pois vaan induktiivinen ja deduktiivinen malli ovat olemassa samaan aikaan: vaikka opiskelijoille opetetaan deduktiivista päättelyä he silti turvautuvat aiemmin rakentuneeseen induktiiviseen malliin. Esimerkiksi monet opiskelijat, jotka hyväksyivät deduktiivisen todistuksen, halusivat silti empiirisiä esimerkkejä varmistuakseen todistuksen oikeellisuudesta. Kiintoisaa on myös, että monet opiskelijat hyväksyivät väärät deduktiiviset argumentit, silloin kuin todistus oli muuten rakennettu matemaattisesti näyttämään pätevältä.

Oppilaat voivat käyttää erilaisia tapoja oikeuttamaan päättelynsä totuutta. Esimerkiksi, että *n*:n ensimmäisen kokonaisluvun summa saadaan kaavalla $\frac{n(n+1)}{2}$, voidaan perustella ”intuitiivisesti” eri tavoin (deduktiivinen formaali päättely olisi todistaa kaava matemaattisella induktiolla). Yksi tapa on piirtää tapauksesta kuva (Kuva 1), jolloin on mahdollista konkreettisesti nähdä ratkaisu eli todistus on ilmenevä.



Kuva 1. *Kaksi kertaa summa* $1 + \cdots + n$ *on suorakulmio, jonka sivujen mitat ovat n ja n+1. [Tall 2002]*

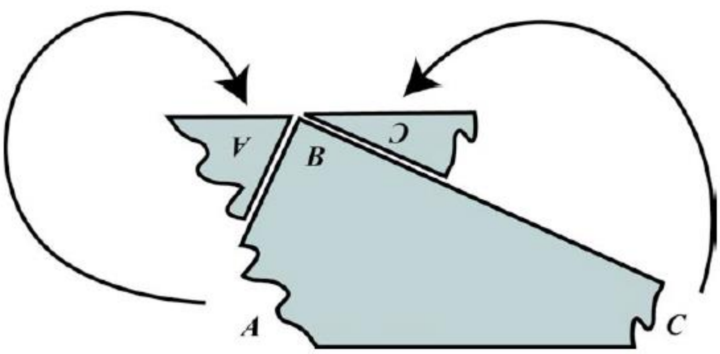
Symbolisessa maailmassa asiaa voisi havainnollistaa Gaussin tavoin laskemalla yhteen luvut 1-100 kaksi kertaa ”käänteisessä järjestyksessä” (Kuva 2). Kokonaissummaksi tulee tällöin 100×101 ja summa $1 + 2 + \cdots + 100$ on siis puolet tästä tulosta. Symbolien avulla on siis mahdollista havainnollistaa päättelyä. [Tall 2002]

$$\begin{array}{l}
\quad\;\, 1 + \quad 2 + \ldots + \quad 99 + 100 \\
100 + \;\; 99 + \ldots + \quad\; 2 + \quad 1 \\
\hline
101 + 101 + \ldots + 101 + 101 \; = 100 \times 101
\end{array}$$

Kuva 2. *Kaksi kertaa ensimmäisen sadan numeron summa on* 100×101.
[Tall 2002]

Formaalin maailman tapaan väitteen voisi todistaa induktiolla. Kuitenkin monesti, pelkkä formaali todistus ei ole läsnä vaan todistettaessa hyödynnetään kaikkia maailmoja – on oikeutettava todistuksensa oikeellisuus ja monesti tämä tapahtuu muiden kuin formaalin maailman kautta. Tall (2002) kutsuu näitä eri maailmojen päättelymuotoja ”totuuden oikeutukseksi”. Huomattavaa on, että monista oppilaista edellä esitetyt ilmenevän ja symbolisen maailman päättelyt ovat vakuuttavia, mutta formaali induktiotodistus ei ole. Kuitenkin matematiikan kannalta vain induktiotodistus on pätevä todistus ja muissa päättelyissä on huomattavia puutteita.

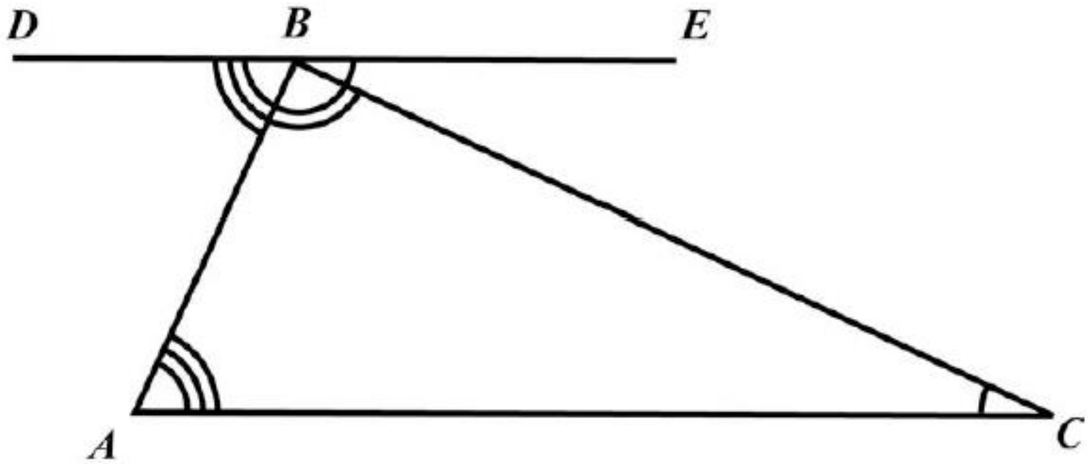
Ilmenevässä maailmassa todistamisajattelu kehittyy kokeiluista fyysisessä maailmassa ja myöhemmin todistaminen siirtyy Euklidiseen geometriaan. Totuuden oikeutukset kehittyvät ilmenevästä maailmasta fyysisen havainnoinnin ja kokeilun tuloksena. Jos kokeilu johtaa odotettuun tulokseen, niin totuus oikeutetaan. Esimerkiksi miten ”tiedetään”, että kolmion kulmien summa on 180 astetta? Revitään kolmiosta kulmat irti ja asetetaan ne vierekkäin, jolloin muodostuu suora (Kuva 3). [Tall 2002]



Kuva 2. *Ilmenevän maailman ”totuuden oikeutuksen” demonstraatio.*
[Tall 2002]

Maallikolle tilanne saattaa näyttää selvältä. Mutta esimerkissä (Kuva 3) käsiteltiin vain yksittäistapausta, jolla on tietyn suuruiset kulmat. [Tall 2002] Entä jos kolmio olisikin toisenlainen? Päteekö sama totuus edelleen?

Tämän tutkimiseksi tarvitaan yleinen esimerkki, joka edustaa kaikkia mahdollisia kolmioita. Tämä voidaan tehdä Euklidisen geometrian avulla. Kuvassa 4 on esitetty komio ABC. Kuvaan on lisätty suora DE, joka on yhdensuuntainen suoran AC kanssa. Näin ollen samankohtaisia kulmia ja ristikulmien ominaisuuksia hyödyntäen saadaan, että kulmat DBA ja BAC ovat yhtäsuuria sekä kulmat EBC ja BCA ovat yhtäsuuria. Nyt kulmat *DBA*, *ABC* ja *CBE* muodostavat suoran, joka on 180 astetta, kuten myös kulmat *BAC*, *ABC* ja *BCA*. [Tall 2002]



Kuva 4. *Euklidinen todistus. [Tall 2002]*

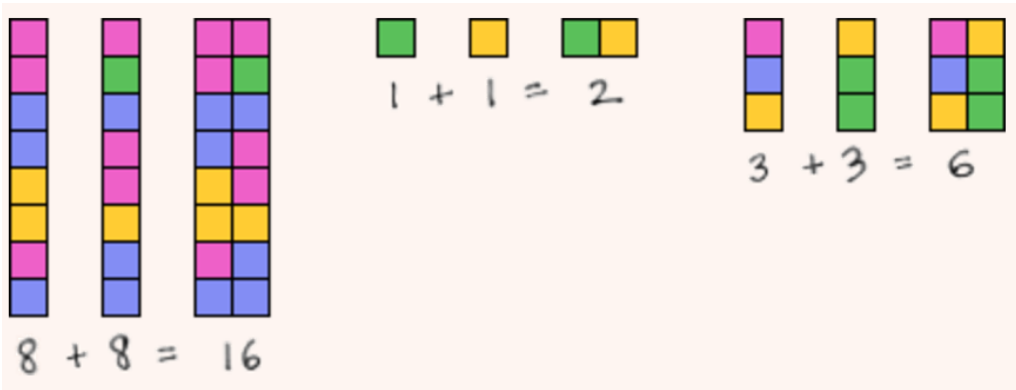
Ilmenävä ja symbolinen maailma mahdollistavat sen, että jo alakoulussa voidaan lähteä rakentamaan oppilaan todistamisajattelua ilman, että tarvitaan oppilaalle siinä vaiheessa tuntematonta formaalia maailmaa. Tarkastellaan esimerkiksi, miten luokkahuoneessa voitaisiin tarkastella väitettä ”Kahden saman luvun summa on aina parillinen”. [Annenberg foundation 2017]

Oppilaalle väite ”Kahden yhtä suuren luvun summa on aina parillinen” ei välttämättä aukea heti. Jotta ongelman ratkaisuun voidaan ryhtyä, pitää varmistaa, että oppilaat ovat täysin ymmärtäneet ongelman. Väitettä voidaan selventää oppilaille sanomalla se toisin: ”Eli jos valitaan mikä tahansa luku 0, 1, 2, 3 jne. ja lisätään siihen luku itse, saadaan parillinen luku. [Annenberg foundation 2017]

Seuraava askel ongelman ratkaisussa olisi väitteen testaaminen. Esimerkiksi $1 + 1 = 2$, $2 + 2 = 4$, $15 + 15 = 30$, $103 + 103 = 206$ ja $2102 + 2102 = 4204$. Huomataan, että summat ovat siis aina parillisia lukuja. [Annenberg foundation 2017]

Seuraavaksi nousee esiin kysymys, onko edellinen totta myös luvuille, joita ei testattu. Voihan tietenkin olla jokin luku, jota ei testattu ja jolle väite ei päde. Tästä varmistumiseksi pitäisi kuitenkin testata kaikki mahdolliset luvut ja tämä on käytännössä mahdotonta. [Annenberg foundation 2017]

Miten siis todistaa väitteen oikeellisuus, jos sitä ei voi testata? Kuva 5 havainnollistaa tilannetta. Jotta luku olisi parillinen, tulee palikoiden olla symmetrisiä. Nyt nähdään, että jos mitkä tahansa kaksi samaa lukua summataan yhteen, saadaan symmetrinen tulos eli samojen lukujen summa on parillinen. [Annenberg foundation 2017]



Kuva 5. *Väitteen totuuden testaaminen palikoilla [Annenberg foundation 2017]*

Väite voidaan näyttää todeksi myös muilla keinoilla. Esimerkiksi voidaan tehdä lista luvuista seuraavalla tavalla:

$$1 + 1 = 2$$
$$2 + 2 = 4$$
$$3 + 3 = 6$$
$$4 + 4 = 8$$
$$5 + 5 = 10$$
$$6 + 6 = 12$$
$$7 + 7 = 14$$
$$jne.$$

Havaitaan, että lista alkaa luvusta 2, joka on parillinen luku. Joka kerralla, summa myös kasvaa luvulla 2. Tämä johtuu siitä, että aina seuraavaan summaan siirryttäessä luku 1 yhteenlaskettaviin lukuihin. Esimerkiksi $4 + 4 = 8$, josta seuraava summa on $5 + 5 = 10$ ja yhteenlaskettavat luvut ovat molemmat yhdellä isompia. Siis tämän perusteella voidaan päätellä, että mikä tahansa luku lisättynä itseensä tuottaa summaksi parillisen luvun. [Annenberg foundation 2017]

Yksi mahdollinen tapa näyttää väite toteen on tarkastella tapausta siten, että kun kaksi samaa lukua laskee yhteen, niin summasta tulee kaksi kertaa alkuperäisen luvun suuruinen:

$$6 + 6 = 12$$
$$2 \cdot 6 = 12$$

Nyt kun summan jakaa kahdella, päästään takaisin alkuperäiseen lukuun:

$$\frac{12}{2} = 6$$

Parilliset luvut ovat aina jaollisia kahdella eli parillinen luku n voidaan ilmaista muodossa $n = 2k$, missä $k \in \mathbb{Z}$. Siis nähdään, että kahden yhtä suuren luvun summa on aina parillinen. [Annenberg foundation 2017]

Tämä esimerkki on hyvä oppilaille, sillä kaikki pystyvät testaamaan väitettä joillakin numeroilla. Testaaminen useilla luvuilla ei kuitenkaan ole todistus (ellei väite koske vain rajattua määrää lukuja), vaikka se onkin tutkimisen välineenä usein toimiva. Tämä tutkimisprosessi kuitenkin vahvistaa oppilaiden käsitystä siitä, että väite saattaa olla totta. [Annenberg foundation 2017] Samalla he tutustuvat ratkaistavaan ongelmaan ja tutkivat parillisten ja parittomien lukujen yhteyttä ongelmaan.

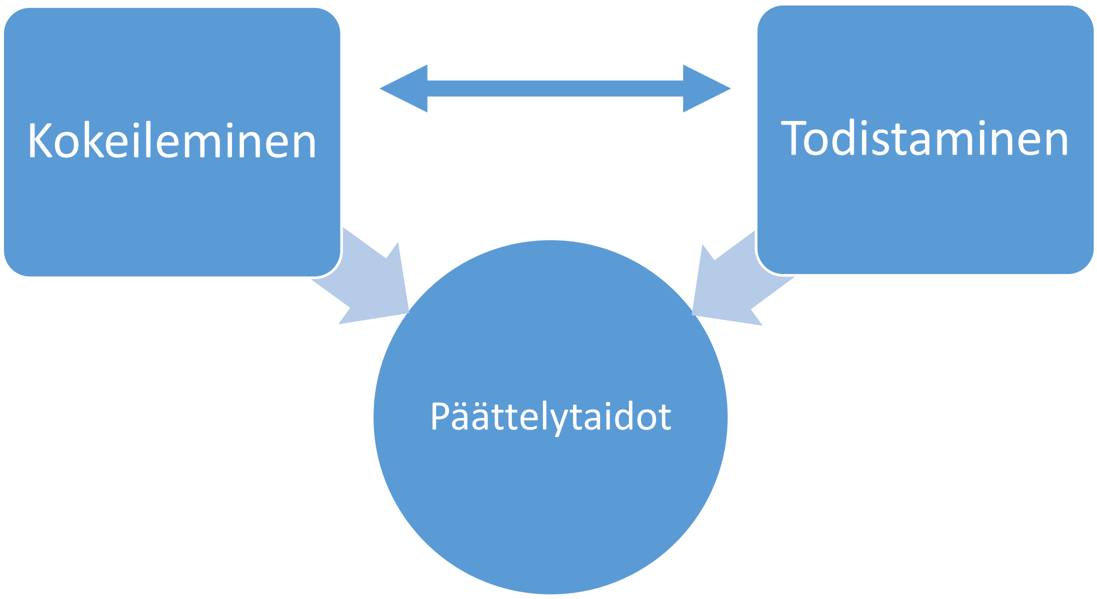
Kaikki perustelut pohjautuivat käsitteen ”parillinen luku” tuntemiseen. Jos oppilaalla on ongelmia ongelman ratkaisun ymmärtämisestä, hän tarvitsee todennäköisesti apua käsitteen parillinen ja pariton hallitsemisessa. Myös lukujen erilaisten esitysten työstäminen voi auttaa, kuten myös lukujonojen ominaisuuksista. [Annenberg foundation 2017]

Todistus ei siis koskaan ole puhtaan formaalin ajattelun tulos. Kaikkien uusien teorioiden tulee tulla jostain ja ne eivät muodostu kirjoittamalla erillisiä lauseita peräkkäin, jotta nähtäisiin, mitä niillä voitaisiin todistaa. Matemaatikot etsivät todistuksia teoreemoille, koska heillä on intuitio, että jokin teoreema voisi olla totta ja sitten he etsivät sille formaalia todistusta. Esimekiksi Fermat'n viimeisen teoreeman todistamiseen meni yli kolme vuosisataa. [Tall 2002]

3.2 Kokeileminen vs. todistaminen

Teoreemojen ja väitteiden testaaminen voi huomattavasti syventää oppilaan ymmärrystä ja edistää oppimista. Erityisesti geometriassa voidaan monia lauseita tarkastella tietokoneohjelmien avulla. Tarkasteltavia tilanteita on tällöin helppo muunnella ja huomata, että tarkasteltava matemaattinen tulos pitää silti paikkansa. Oppilaalle syntyy täten vahva mielikuva tuloksen oikeellisuudesta. Tällainen mahdollisuus testata matemaattisia tuloksia myös motivoi oppilaita ja voi johtaa ”uusien” tulosten keksimiseen. [Gila 2000, s. 12-13]

Tällainen kokeellinen tulosten ja teoreemojen tarkastelu, vaikkakin se edistää ymmärrystä, saattanee kuitenkin johtaa oppilasta harhaan. Helposti syntyy mielikuva, että jos väite on usealla testatulla vaihtoehdoilla tosi, on se aina tosi. Kuitenkaan mitään matemaattista tulosta ei voida perustella turvautumalla kokeiluun tai toistoon. Koska kokeileminen ja testaaminen ovat kuitenkin olennainen osa matematiikan opetusta ja oppilaan oppimista, ei kokeilemista ja testaamista tulisi hylätäkään täysin vaan olisi tärkeää tuoda todistaminen sen rinnalle mukaan opetukseen. Vaikka nämä ovatkin erillisiä osa-alueita, ne molemmat ovat toisiaan tukevia ja molemmat kehittävät ongelmanratkaisutaitojen oppimista (Kuva 6). Kuitenkin oppilaat tulisi saada ymmärtämään, että vaikka kokeileminen on tehokas työkalu, se ei voi korvata matemaattista todistusta. [Christou et al. 2004; Gila 2000, s. 12-13]



Kuva 6. *Kokeileminen ja todistaminen eivät ole toisiaan poissulkevia prosesseja vaan molemmat tukevat päättelytaitojen oppimista.*

Kun oppilaille on näytetty jonkin teoreeman todistus, he usein vaativat teoreeman empiiristä testaamista huolimatta siitä, että he ymmärtävät todistuksen. Matemaattiselta kannalta tämä tuntuu turhalta ja usein opettajat olettavatkin, etteivät oppilaat ole ymmärtäneet todistusta. Jos kuitenkin oppilas rinnastetaan tässä tilanteessa kokeelliseen tiedemieheen, joka törmää ensimmäistä kertaa ko. ilmiöön, on lisätuen vaatiminen aivan luonnollista. Esimerkiksi fyysikko tuskin täysin uskoisi mitään teoriaa, ennen kuin se on käytännössä testattu. Täten todistamista olisi kouluympäristössä varmaankin helpointa lähestyä luonnontieteilijän silmälasein. [Gila 2000, s. 19]

Healy & Hoyle (1999) tutkivat oppilaiden käsityksiä todistuksista. Sen mukaan suuri osa oppilaista lähestyisi tutkittavaa algebrallista todistustehtävää ensin empiirisesti esimerkiksi kokeilemalla väitteen pätevyyttä konkreettisilla luvuilla. Kuitenkin oppilaat uskoivat saavansa paremman arvosanan algebrallista todistusta käyttäen kuin turvautumalla empiirisiin argumentteihin. Algebrallisesti muotoillun todistuksen katsottiin useammin olevan pätevä todistus. Kuitenkin empiristinen lähestymistapa katsottiin hyödylliseksi lähestymistavaksi selitettäessä väitteen matemaattista sisältöä – mitä formaali todistus ei tee.

Kokonaisuudessaan oppilaat kokevat algebran olevan sallittu työkalu todistamisessa, mutta sanallisia selityksiä ja kuvia ei helposti hyväksytä riittävän hyviksi välineiksi formaalin todistuksen muotoilussa. Algebra on opettajalta hyväksyttävä ja vaadittava todistustapa, oppilaiden mielestä heille riittää ymmärtää muut todistus- ja päättelymenetelmät, erityisesti jos päätelmät ovat selittäviä. Jotta oppilaat ymmärtäisivät kielen ja kuvien tärkeyden todistuksissa tulisi algebra mahdollisesti ottaa opetuksessa mukaan aikaisemmin. Olisi myös syytä kiinnittää huomiota ajatuksen kulkua ja symboleita selittävään kieleen. [Healy & Hoyle 1999]

Tietokoneavusteiset geometriaohjelmat (engl. Dynamic geometry software, DGS) ovat tuoneet uusia mahdollisuuksia opetukseen. Erityisen hyödyllisiä tietokoneavusteiset ohjelmat ovat geometrian opetuksessa. Ne esimerkiksi mahdollistavat oppilaille nopean ja tutkivan tavan selvittää, onko jokin väite totta vai ei sekä tarjoavat oppilaille mahdollisuuden tutustua tarkemmin todistettavaan tilanteeseen. Kun oppilaat rohkaistuvat tutkimaan/tarkastelemaan tilannetta lähemmin, he samalla luovat pohjaa todistukselle ja sen syvällisemmälle ymmärtämiselle. Kuitenkin DGS lasketaan usein induktiiviseksi menetelmäksi, mistä johtuen on syytä pelätä, että DGS:n käyttö opetuksessa mahdollisesti lisää kokeellisten ja teoreettisten menetelmien välistä kuilua. [Christou et al. 2004]

Christou et al. (2004) on tutkinut, synnyttääkö DGS:n hyödyntäminen opetuksessa tällaista kuilua kokeellisten ja teoreettisten menetelmien välille sekä miten tällaisen kuilun syntymistä mahdollisesti voitaisiin välttää. Christou et al. mukaan DGS voi oikein hyödynnettynä olla erittäin hyödyllinen pedagoginen apuväline todistamisen opetuksessa. DGS mahdollistaa oppilaille tilaisuuden tutustua kyseessä olevaa väitettä koskevaan tilanteeseen ja liittää uudet tiedot heidän aikaisempaan tietoonsa. Tilanteen kokeellinen induktiivinen tarkastelu ei niinkään vastaa kysymykseen, miksi väite pätee, mutta se vakuuttaa oppilaat väitteen paikkansapitävyydestä. Tämä taas johtaa oppilaat etsimään (deduktiivisin keinoin) vastausta siihen, *miksi* väite on totta. [Christou et al. 2004]

3.3 Todistaminen ja kognitiiviset prosessit

Mitä sitten oppilaan pään sisällä tapahtuu todistuksen käsittelyn aikana? Barnard ja Tall (1997) ovat tutkineet kognitiivisia yksiköitä sekä niiden välisiä yhteyksiä, jotka johtavat deduktiivisen todistuksen muodostamiseen. Kognitiivisilla yksiköillä tarkoitetaan kognitiivista rakenneosaa, joka voidaan kerralla pitää huomion keskipisteenä. Kognitiivinen yksikkö voi olla esimerkiksi jokin symboli, fakta (esim. $3 + 4 = 7$ tai kahden parillisen luvun summa on parillinen), suhde tai teoreema jne. Kognitiivisten yksiköiden koko vaihtelee yksilöittäin: jollekulle toiselle kognitiivinen yksikkö ei ole toiselle kognitiivinen yksikkö. Barnardin ja Tallin (1997) hypoteesin mukaan hyödyllisen ajatusmallin luomiseen tarvitaan kahta asiaa:

1. Kykyä *tiivistää* tieto mahtumaan kognitiivisiin yksiköihin.
2. Kykyä *luoda yhteyksiä* kognitiivisten yksiköiden välille siten, että hyödyllinen informaatio voidaan tarvittaessa ottaa käyttöön tai pois huomion keskipisteestä.

Matemaattisten ideoiden tiivistäminen liittyy yhteyksiin huomioitavien kognitiivisten yksiköiden välillä ja niiden luomaan kognitiiviseen rakenteeseen. Tätä kognitiivista rakennetta kutsutaan *hetkelliseksi työmuistiksi*. Kun huomion keskipisteeseen tuodaan eri asioita, hetkellinen työmuisti muuttuu dynaamisesti, mahdollistaen uusien yhteyksien huomioimisen ja toisien pois sulkemisen. [Barnard & Tall 1997]

Kognitiivisen rakenteen maksimaaliseen hyötykäyttöön tarvitaan rutinoituja taustatoimintoja, jotka eivät tarvitse suurta huomiota ja vie ajattelukapasiteettia. Tärkeää on myös kyky tiivistää kognitiivisia yksiköitä yhdeksi operoitavaksi kognitiiviseksi skeemaksi. Näin vapautuu mentaalista kapasiteettia muihin toimintoihin sekä ongelman ratkaisuun ja kompleksisista kokonaisuuksista tulee helpommin hallittavia. [Barnard & Tall, 1997]

Matemaattinen todistus sisältää *peräkkäisiä prosesseja*, joista jokainen antaa vihjeitä seuraavasta. Monesti todistuksen muodostamisessa tarvitaan useiden uusien *kognitiivisten linkkien* muodostumista.

Barnard & Tall (1997) tutkivat kognitiivisten linkkien osuutta matemaattisessa todistuksessa. He ottivat tarkasteluun $\sqrt{2}$:n irrationaalisuuden todistamisen. Tutkimuksessa oppilaiden/opiskelijoiden piti selvittää $\sqrt{2}$:n irrationaalisuuden todistuksessa esiintyvät vaiheet:

I. Oletetaan, että $\sqrt{2}$ ei ole irrationaalinen.
II. $\sqrt{2}$ voidaan esittää muodossa $\frac{a}{b}$, missä a, b ovat kokonaislukuja ja niillä ei ole yhteisiä tekijöitä.
III. Tästä seuraa, että $a^2 = 2b^2$,
IV. ja siten a^2 on parillinen.
V. Siitä seuraa, että a on parillinen.
VI. Nyt $a = 2c$, jollekin kokonaisluvulle c,
VII. Siitä seuraa, että $b^2 = 2c^2$,
VIII. jolloin myös b^2
IX. ja siten myös b on parillinen.
X. Nyt jos a ja b ovat parillisia, seuraa siitä ristiriita oletuksen kanssa, jonka mukaan luvuilla a ja b ei ole yhteisiä tekijöitä
XI. Siis $\sqrt{2}$ on irrationaalinen.

$\sqrt{2}$:n irrationaalisuuden todistamisessa tarvitaan askelta $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, josta laskutoimitus $a^2 = 2b^2$ on tästä seuraava askel, joka on yhteydessä algebraan. Tästä vaiheesta päättely, että a on parillinen, vaatii kognitiivisten linkkien muodostumista kognitiivisten yksiköiden välille. [Barnard & Tall 1997]

Ajatteluprosessin vaiheet ja tyypilliset linkit kognitiivisten yksiköiden välillä on esitetty liitteessä 1. Linkit, joiden kanssa opiskelijoilla oli useammin ongelmia on esitetty liitteen kuvassa aaltonuolella. [Barnard & Tall 1997]

Liittestä 1 on helposti havaittavissa, missä kohdin oppilailla oli suurimpia ongelmia. Yleistä oli, ettei epäsuora todistus ollut opiskelijoille tuttu. Sen ymmärrys kuitenkin helpottuu, kun se tulee tutummaksi. Toiseksi hankalaa oli erottaa tuttujen termien ja näiden algebrallisten esitysten välisiä yhteyksiä, kuten parillinen ja pariton luku ja niiden algebrallinen esitys. Erityisen vaikea oli oppilaille päätellä yhteys, että jos $\boldsymbol{a^2}$ on parillinen, niin a on parillinen. Helpompaa oli toistaa päätelmä, että b on myös parillinen, sillä samantapainen päättely oli jo a:n kohdalla käyty läpi. Huomio, että $\boldsymbol{\frac{a}{b}}$ on valmiiksi supistuneessa muodossa, oli monille vaikea tehdä, erityisesti, jos opiskelija suoritti todistusta ensimmäistä kertaa. [Barnard & Tall 1997]

Kokonaisuudessaan monet avainoivallukset, jotka tulee tehdä todistuksessa eteenpäin pääsemiseksi, tekevät todistuksesta vaativan ongelman ratkaistavaksi. Jotkut oppilaat, jotka olivat nähneet todistuksen aikaisemmin, luottivat enemmän opettajansa auktoriteettiin ja todistuksen muistelemiseen kuin omaan päättelyynsä ja linkkien luomiseen. [Barnard & Tall 1997]

3.4 Ongelma opettajankoulutuksessa

Matematiikka on osa koulujen opetussuunnitelmaa lähes kaikissa maissa. Se on myös yliopistoissa edelleen tärkeässä roolissa sen eri aloille sovellettavuuden takia. Yleisesti matematiikan opettajien matematiikan tietämys on peräisin yliopistosta. [Jones 2000]

Matematiikkaa ja päättelyä onkin harjoitettu jo antiikin Kreikan ajoista asti. Suomessa 1950-luvun jälkeen todistamisajattelun kouluopetusta uudistettiin ottamalla opetukseen mukaan logiikan päättelysääntöjä. Myös psykologinen tutkimus tuli mukaan matematiikan opetukseen. Ihmisen ajattelu nähtiin kognitiivisena prosessina ja konstruktivistinen näkemys oppimisesta rantautui kouluihin. [Malinen 2004, s. 103-105]

Suomessa kouluopetukseen otettiin 1970-luvulla mukaan formaalit geometriset todistukset, mutta 1990-luvun jälkeen todistamista ei juuri esiintynyt kouluopetuksessa. [Malinen 2004, s. 103-105] Vuonna 2016 voimaan tulleessa opetussuunnitelmassa pitkän matematiikan syventävä kurssi MAA11 muutettiin Lukuteoria ja logiikka kurssista nimelle Lukuteoria ja todistaminen ja todistamista opetetaan järjestelmällisemmin lukion pitkän matematiikan opiskelijoille. [Opetushallitus 2015]

Koulumatematiikan opetus vaatii siis nykypäivänä riittävää tietotaitoa todistamisesta sekä sen opettamisesta. Opettaja ja opettajan tietotaito ovatkin suoraan yhteydessä oppilaille syntyviin käsityksiin ja tietotaitoon. Oppilaiden ymmärrystä todistamisesta ja sen roolista matematiikassa voi heikentää opettajien vajaa käsitys ja ymmärrys todistamisesta ja todistamisajattelun opettamisesta. Jonesin (2000) mukaan ylipistosta valmistuvilla opettajilla ei useinkaan ole riittävää tietotaitoa todistamisen opettamiseen. Vaikka todistamista opetellaan jokaisella yliopistokurssilla, puuttuu monilta valmistuvilta opettajilta riittävä ymmärrys, arvostus ja taito todistusten luomiseen. Erityisesti formaalin päättelyketjun ja päättelyn pätevyyden kanssa monilla on ongelmia. Käsitykset ja todistamisajattelu eivät välttämättä ole vielä kehittyneet riittävästi formaalille tasolle. Tämä itsessään johtaa oravanpyörään: jos yliopistosta valmistuneilla opettajilla ei ole valmiuksia opettaa todistamisajattelua eikä kunnollista ymmärrystä todistamisesta, eivät he myöskään pysty sitä pätevästi lukiolaisille (sekä yläkoululaisille ja alakoululaisille) opettamaan. Monilla jopa matematiikassa hyvin pärjäävillä oppilailla onkin ongelmia todistusten ymmärtämisessä ja muodostamisessa. [Jones 2000]

Mitä ongelmia valmistuvilla opettajilla sitten on? Monilla on vähän tai ei ollenkaan keinoja erottaa erilaisia päättelyn muotoja, he eivät esimerkiksi saata ymmärtää selityksen, argumentin ja todistuksen eroa. Kyky oikeuttaa ja selittää matemaattista päättelyä vaatisi näkemysten kehittymistä: matematiikka ei ole vain laskennallinen systeemi vaan se koostuu toisiinsa yhteydessä olevista rakenteista. Näitä kykyjä voidaan harjoitella muun muassa kursseilla, jotka pakottavat oppilaat päättelemään asioiden oikeellisuutta ja tarkastelemaan toisten mahdollisten selitysten oikeellisuutta, testata ideoitaan ja toisten selityksiä. Myös totuusväittelyt ovat hyvä argumentaation harjoittelukeino. Yksi suuri ongelma nimittäin on, että opettajat ottavat argumentit ja päättelyn apuna käytetyt faktat itsestään selvästi oikeutettuina ja tosina, vaikka ne oppilaille eivät sitä välttämättä ole. [Jones 2000]

Eppin (2003) mukaan yliopisto-opiskelijoilla on paljon ongelmia loogisessa päättelyssä ja todistuksen rakentamisessa. Ongelma ilmenee erityisesti siirryttäessä yliopissa alemman tason enemmän laskupainotteisista kursseista syvemmän tason kursseihin, joissa deduktiivisen ja abstraktin ajattelun rooli painottuu. Epp luuli aluksi ylemmän tason kurssien ongelmien johtuvan puutteellisista pohjatiedoista ja liian nopeasta siirtymisestä ”kiinnostavaan matematiikkaan”. Kuitenkin ongelmat olivat paljon syventävämmän laatuisia. Opiskelijoilla oli aivan omanlaisia käsityksiä logiikasta ja kielestä ja todistukset olivat usein hyvin heikkoja yrityksiä. Yritykset koostuivat monesti muutamasta erillisestä laskusta ja väärin tai huonosti muotoillusta sanallisesta päättelystä.

Jopa yksinkertaisen matemaattisen väitteen totuuden tai vääryyden arviointi vaatii monimutkaista kognitiivista aktiivisuutta. Loogisten argumenttien tulee esiintyä oikeassa järjestyksessä, jotta päättely olisi validia, joskaan loogisten päättelysääntöjen käyttö ei välttämättä ole tietoista. Otetaan esimerkiksi seuraava väite ja sen totuuden arviointiin tarvittava kognitiivinen taustatyö. [Epp 2003]

Minkä tahansa rationaaliluvun neliö on rationaalinen.

1. Pitää ymmärtää, että väite koskee kaikkia lukuja päättymättömässä rationaalilukujen joukossa. Siten ei ole mahdollista testata jokaista lukua tässä joukossa, vaan on muodostettava kaikille rationaaliluvuille yleistettävissä oleva totuus. [Epp 2003]
2. Pitää tajuta, että väitteen yleisen totuuden osoittamiseksi pitää käsitellä tiettyä rationaalilukua, josta ei tiedetä mitään muuta, kuin että se on rationaalinen. Tämän luvun neliöt pitää edelleen näyttää rationaalisiksi. [Epp 2003]
3. Pitää olla ymmärrys (mahdollisesti tiedostamatta) määritelmien tärkeydestä matemaattisten väitteiden käsittelyssä; jotta voi tehdä päätelmiä rationaaliluvuista, pitää tarkalleen ymmärtää, mitä rationaaliluvulla tarkoitetaan. [Epp 2003]
4. Pitää ymmärtää (mahdollisesti tiedostamatta), että määritelmät ovat universaaleja ja niillä on ”jos” ja ”jos ja vain jos” suunnat. [Epp 2003]
5. Pitää olla ymmärrys murtolukujen kertolaskun universaaliuudesta. [Epp 2003]

Otetaan toinen esimerkki vastaesimerkin avulla väitteen vääräksi todistamisesta.

Kaikille reaaliluvuille a ja b, jos $a > b$*, niin* $a^2 > b^2$*.*

1. Pitää ymmärtää (tietoisesti tai tiedostamatta), että väite on universaali eli se koskee kaikkia reaalilukuja. Täten yksikin vastaesimerkki riittää todistamaan väitteen vääräksi. Siis tietoisesti tai tiedostamatta pitää olla tietoinen universaalin lauseen negaation olemassaolosta. [Epp 2003]
2. Vastaesimerkin löytämiseksi, pitää löytää reaaliluvut a ja b siten, että $a > b$, mutta $a^2 \leq b^2$. Siis tiedostamatta tai tietoisesti tulee ymmärtää, että lauseen *”jos p, niin q”* negaatio on *”p ja ei q”*. [Epp 2003]
3. Vastaesimerkin vaatimusten täyttämiseksi tulee mahdollisesti tutkia useita erityyppisiä reaalilukuja pätevän lukuparin löytämiseksi. [Epp 2003]

Esitetään vielä esimerkki epäsuorassa todistuksessa vaaditusta kognitiivisesta ajattelusta:

Kaikille reaaliluvuille x pätee, jos x on irrationaalinen, niin $-x$ *on irrationaalinen.*

1. Pitää ymmärtää, että väitteen totuuden arvioimiseksi pitää olettaa, että on olemassa reaaliluku x, joka on irrationaalinen ja $-x$ on rationaalinen ja nähdä johtaako tämä oletus loogisesti ristiriitaan. [Epp 2003]
2. Vaihtoehtoisesti voi todeta, että väite on loogisesti ekvivalentti seuraavan kanssa: Kaikille reaaliluvuille x pätee, että jos $-x$ on rationaalinen, niin x on rationaalinen. Tämän argumentin todistus pitää myös osata rakentaa suoralla todistuksella. [Epp 2003]

Monet matemaatikot ottavat näissä esimerkeissä esitetyn päättelyn itsestään selvyytenä. Kuitenkin harvoilla yliopisto-opiskelijoillakaan on selkeää intuitiivista ymmärrystä päättelyn perusteista. Erityisesti väitteet, joiden todistamisessa vaaditaan vastaesimerkin käyttöä tai epäsuoraa todistusta tuottavat vaikeuksia useille jo pitkällä opinnoissaan oleville. [Epp 2003]

Jos todistamista halutaan systemaattisesti opettaa, tulee hallita kolme osa-aluetta. Tarvitaan (1) tarkempi käsitys todistuksen roolista matematiikassa (epistemologinen analyysi), (2) syvempi ymmärrys todistamisen opettelemiseen kuuluvista kompleksista prosesseista, (3) toimivien opetustapojen kehittämistä, käyttöönottoa ja arviointia sekä todistamisajattelun kehittämistä tukeva oppimisympäristö alakoulusta lukioon. [Loewenberg et al. 2002] Nämä kaikki kolme osa-aluetta pitäisi huomioida opettajankoulutuksessa.

Miksi sitten todistaminen nähdään yläkoulussa ja lukiossa vaikeana? Esimerkiksi monet geometrian todistukset esitetään formaalina deduktiivisena todistuksena. Tällöin ei huomioida oppilaiden intuition osuutta todistuksessa tai ovatko päättelyn argumentit heille vakuuttavia. Deduktiivista ajattelua ja kokeilua (sisältäen esimerkiksi piirroksia, diagrammeja ja erilaisia ajattelumalleja) tulisikin harjoittaa yhdessä: erillisenä pelkkä deduktiivinen päättely ei oppilaalle ole välttämättä vakuuttavaa. Monille oppilaille todistus näyttäytyy rituaalina ilman merkitystä. Tätä korostaa myös se, että todistus pitää esittää tiettyä kaavaa käyttäen ja monesti pelkillä matemaattisilla symboleilla. [Loewenberg et al. 2002]

3.5 Yleiset ongelmat päättelytaitojen ja todistamisajattelun oppimisessa

Yksi syy, miksi oppilailla on paljon ongelmia todistusten ymmärtämisen kanssa, on ero yleisen kielen ja matematiikan kielen välillä. Puhekielessä rakenteet tulkitaan kontekstin ja ympäristön perusteella, kun taas matematiikassa formaalit lauserakenteet ovat yksiselitteisiä, ja merkitys voi paljonkin poiketa sen puhekielisestä merkityksestä. [Epp 2003]

Perinteisessä matematiikan opetuksessa kiinnitetään suhteellisen vähän huomiota yleisen kielen ja matematiikan eroihin. Saman asian voi yleiskielellä sanoa monella eri tapaa, mutta matemaattisesti ajatellen merkitys on monesti erilainen. [Epp 2003]

Toinen merkittävä syy oppilaiden formaalin päättelyn ongelmiin voi olla heidän aikaisempi matemaattinen koulutushistoriansa. Matematiikan opettajilla on usein käytössään rajatusti aikaa opettamiseen ja siksi heidän tuleekin monesti valita kahden eri lähestymistavan väliltä. [Epp 2003] Yleisten periaatteiden opettaminen johtaa syvempään ymmärrykseen, mutta ajan rajallisuuden vuoksi heikkojen oppilaiden voi olla hankalampaa pysyä mukana sekä soveltaa tietoa ja he eivät monesti pärjää kokeissa kovinkaan hyvin (mitä nykyinen koululaitos painottaa, opetuksen mitattavissa olevaa tuloksellisuutta). Toisaalta kapeakatseinen keskittyminen ongelmanratkaisustrategioihin voi johtaa oppilaiden parempaan kykyyn selvitä perustehtävistä, mutta teoriapohja voi jäädä hämäräksi, jolloin siirtyminen korkeatasoisempaan matematiikkaan voi olla hankalaa. Tähän lähestymistapaan kuuluu monesti teorioiden ”perusteleminen” hyvin valituilla esimerkeillä, mikä edelleen vahvistaa oppilaiden mahdollisesti virheellistä käsitystä matematiikan empiirisestä luonteesta. Koska monesti menestymistä mitataan kokeilla ja testeillä, on luonnollisempaa, että monet opettajat valitsevatkin nämä strategiat ja oikotiet yleisten periaatteiden opettamisen sijaan. [Epp 2003]

3.6 Voiko formaalia päättelyä edes opettaa?

Jo pitkään on väitelty, voiko jollain aihealueella opittua päättelykykyä siirtää toiselle alueelle. [Epp 2003] Esimerkiksi Cheng et al. (1986) eivät huomanneet eroa yliopisto-opiskelijoiden, jotka olivat osallistuneet logiikan alkeiskursseille ja niiden, jotka eivät, päättelytaitojen välillä. Myös Deer (1969) sai vastaavia tuloksia: vaikka opiskelijoille oli esitelty logiikan alkeita, se ei parantanut oppilaiden kykyä todistaa geometrian teoreemoja.

Vaikka näiden tutkimusten perusteella näyttäisikin siltä, että pelkkä perinteinen logiikan opetus ei auta oppilaita kehittämään formaalia päättelyä, voidaan kuitenkin todeta, että, (1) kun logiikan abstraktien sääntöjen harjoittelu yhdistetään konkreettisiin monialaisiin esimerkkeihin, on oppilaiden päättelykyvyn kehitys huomattavasti parempi, kuin pelkkä logiikan tai esimerkkien harjoittelu yksin ja (2) logiikan sääntöjen opettaminen liittämällä päättelytapahtumat arkipäivään auttaa oppilaita liittämään päättelysäännöt jatkossa myös abstraktimpaan kontekstiin. [Cheng et al. 1986]

Tunnetusti lähikehityksen vyöhykkeellä (L. S. Vygotsky) oppilaan on oikeanlaisessa ohjauksessa edellisen oppimisensa pohjalta mahdollista oppia uutta. Sama pätee myös todistamisen opetteluun. Jotta oppilas pystyisi todella ymmärtämään loogista päättelyä, tulee hänen olla tutustunut logiikan päättelysääntöihin. Täten esimerkiksi todistamista käsittelevällä kurssilla tulisi ensin perehdyttää oppilaat logiikan sääntöihin ennen varsinaiseen todistamiseen siirtymistä. Jos kuitenkin logiikka nähdään hyvin irrallisena ja tylsänä oppilaille ja sen harjoittelu sivuutetaan, törmätään näihin päättelyongelmiin myöhemmin ja jopa vahvimmilla oppilailla saattaa esiintyä virheitä logiikan sääntöjen tuntemattomuuden takia. Tosin, jos logiikan opettaminen sivuutetaan, mutta opettaja yksilöllisesti ohjaa oppilaita todistusten vaatimassa loogisessa päättelyssä, oppilaat pärjäävät suhteellisen hyvin. Toisaalta taas tällaisia resursseja pitkäjänteiseen yksilölliseen ohjaamiseen harvoin löytyy. Nämä perusteet pitäisi huomioida myös yliopistossa, sillä useilla valmistuvilla opettajilla on vajavaiset taidot deduktiivisessa päättelyssä. [Epp 2003]

Pelkällä logiikan mekaanisella harjoittelulla ei näyttäisi olevan vaikutusta oppilaiden päättelytaitoihin. Kuitenkin logiikan linkittäminen kieleen, arkipäivään ja muuhun matematiikkaan tukee päättelytaitojen oppimista ja yhdistämistä ongelmanratkaisuun ja todistamiseen. Esimerkiksi todistamista ja matemaattista päättelyä sisältävällä kurssilla katsaus logiikkaan luo hyvän pohjan ja tukiverkon, jonka pohjalta oppilaat voivat suunnistaa todistamiseen liittyvässä päättelyssä. Se myös tukee oppilaiden näkemystä matematiikan rationaalisuudesta. Matemaattisten lauseiden totuus tai vääryys on usein niin monimutkaista, että vaikka oppilaat olisivatkin motivoituneita, he eivät välttämättä täysin ymmärrä todistusta ilman kunnollista tietoa ja kokemusta logiikan perusteista. Logiikka antaa myös opettajille työvälineen keskustella oppilaiden kanssa, miksi matemaatikot tekevät todistaessaan mitä tekevät ja auttaa käsittelemään oppilaiden virheitä. [Epp 2003]

Matematiikan todistuksia on kuitenkin hankala rakentaa täsmällisiksi pelkästään logiikan päättelysääntöjen avulla. Logiikan formaalin järjestelmän hyödyntämisen sijaan olisi loogisen ajattelun harjoittaminen tärkeämpää. Päättely ja todistaminen mielletään usein ajatteluprosesseiksi, joihin ei tarvita erityistä ohjausta logiikan keinoin. Kuitenkin oppilaan todistamisajattelun kehittäminen vaatii opettajalta päättelyn ja todistamisen eri muotojen hallintaa sekä tietoa päättelyn eri vaiheista ja prosesseista. Logiikan avulla voidaan tuoda selvyyttä päättelyjen ja todistamisajattelun monipuolisuuteen ja kompleksisuuteen. [Malinen 2004, s. 101-103]

Yksi hyvä lähestymistapa päättelyn opettamiseen on hyödyntää arkipäivän ja formaalin kielen samankaltaisuuksia. Esimerkiksi on selvää, että lause ”Jos Timo asuu Tampereella, niin hän asuu Suomessa”, ei päde käänteisesti ”Jos Timo asuu Suomessa, hän asuu Tampereella. Myös seuraavalle väitteelle ”Kaikki tässä huoneessa ovat yli 30-vuotiaita” löydetään helposti vastaesimerkki nimeämällä yksi alle kolmekymmentävuotias. [Epp 2003]

Oppilaiden kannalta voi olla hyödyllistä, jos loogisia päättelysääntöjä opetettaessa esitetään esimerkkejä arkipäivän tilanteista, jossa päättely esiintyy. Oppilaita voi jopa kehottaa opettelemaan joitakin lauseita muistisäännöiksi, kuinka operoida matemaattisten päättelysääntöjen kanssa. Myös eroavaisuuksista matematiikan logiikan ja arkipäivän logiikan välillä kannattaa pohtia yhdessä oppilaiden kanssa. Tämä helpottaa oppilaita ratkaisemaan intuitiivisen päättelyn pohjalta seuraavia ristiriitatilanteita. Lisäksi kannattaa muistuttaa oppilaille, että he käyttävät loogista päättelyä jatkuvasti arkipäivän elämässä, joten myöskään matemaattista loogista päättelyä ei loppujen lopuksi ole niin vaikea oppia. [Epp 2003]

Yhteenvedon tekeminen loogisista päättelysäännöistä ja symboleista auttaa oppilaita suuntaamaan huomionsa oleelliseen. Kuitenkin vain sääntöjen ulkoa opettelu ei yksin laajenna oppilaiden päättelytaitoja. Täten logiikan harjoittelussa tulisikin painottaa logiikan yhteyttä kieleen ja matematiikkaan yleisesti. Myös negaatioihin tulee kiinnittää riittävästi huomiota, sillä voidakseen arvioida jonkin lauseen totuutta, tulee oppilaan myös ymmärtää missä tapauksessa se ei ole totta. Oppilaille onkin hyvä antaa harjoituksia, joissa heidän pitää kääntää lauseita formaalin ja ei formaalin kielen välillä. Joillekin oppilaille ”pienten sanojen” kuten ”ja”, ”tai”, ”jos” tai ”on yhtä suuri kuin” merkitystä on vaikea havaita, vaikka matemaattisissa lauseissa niillä on suurtakin merkitystä. Tehtävät, joissa yhdistyy kieli, logiikka ja matematiikka auttavat näitä oppilaita havainnoimaan sanojen merkityksiä. [Epp 2003]

Totuustauluja käytetään usein logiikan alkeiden opetuksessa ja niiden avulla on helppo havainnoida lauseiden ja premissien totuusarvoja, ekvivalenssia sekä tautologioita. Oppilaiden olisi hyvä syvemmin ymmärtää määritelmät ”tai”, ”ja”, ”ei” ja ”jos-niin”. Totuustaulut auttavat oppilaita järjestelemään tietämystään sekä navigoimaan logiikan abstraktissa maailmassa. Esimerkiksi totuustaulun avulla voi tarkastella, että ja-lause on totta, *jos ja vain jos* molempien premissien totuusarvot ovat totta tai, että lause on epätosi, *jos ja vain jos* jompikumpi tai molemmat premissit ovat epätosia. Totuustaulut ovat siis kätevä tapa tarkastella lauseen totuutta. Totuustaulut johtavat kuitenkin helposti mekaaniseen toimintaan tuloksen ymmärtämisen sijaan. Oppilaita tulisikin totuustauluja käytettäessä pyytää selvittämään, mistä he ovat lopulliset tulokset päätelleet, esimerkiksi viittaamalla jonkin totuustaulun rivin arvoihin. [Epp 2003]

Se, kuinka hyvin oppilaat pystyvät soveltamaan oppimaansa toisenlaisessa tilanteessa, riippuu siitä, mihin asioihin oppilaiden huomio kohdistetaan oppimisprosessin aikana. Yksittäisen ison tehtävän hallinta riippuu sen yksittäisten osien hallinnasta. Jos oppilaalla on hankaluuksia hallita yksittäisiä osia, ei ongelman ratkaisu useinkaan onnistu. Oppilaan oppiminen on kuitenkin tehokkaampaa, jos yksittäisiä osia harjoitellaan ensin erikseen kuin, että ne ovat osana isoa ongelmaa. Kykyä käyttää eri taitoja voi harjoitella opettamalla, mistä eri ”vihjeistä” oppilas tietää tarvitsevansa mitäkin taitoa tai osa-aluetta. [Epp 2003]

Aikaisemman tiedon siirtäminen ja käyttöönotto uudessa kontekstissa on siis myös olennaista päättelytaitojen kehittymisessä. Opettajan tulisikin auttaa oppilaita tunnistamaan vihjeet, joiden perusteella he tunnistavat jonkin kyvyn tarpeellisuuden kyseisessä tilanteessa. Esimerkiksi logiikan perusteisiin voi viitata aina, kun ne nousevat esiin muussa matemaattisessa yhteydessä - esimerkiksi vastaesimerkin yhteydessä voidaan muistella, miten yksikin vastaesimerkki riitti kumoamaan väitteen ja mahdollisesti palata ihan arkipäivän esimerkkiin asti. Perusteisiin palaaminen takaa hyvän pohjan ennen kuin suunnistetaan puhtaasti matemaattisiin esimerkkeihin ja sovelluksiin. [Epp S. 2003]

Oppilasta voi auttaa päättelyprosessin etenemisessä. Opettajien tulisi osata ohjata oppilaita päättelyprosesseissa ja tukea oppilaiden konstruktivistista käsitteenmuodostusta luomalla riittävän motivoivia oppimistilanteita. Selkeät selitykset ja täsmennykset ovat oppilaan ohjauksen avainasemassa todistamisajattelua kehitettäessä. Myös luokkatovereiden antama ohjaus ja keskustelu tukevat päättelyprosessien kehittymistä. Opettajien ammattitaidon tulee lisäksi olla riittävä, jotta he voivat ammattitaitoisesti virittää todistamisajattelua kehittäviä ongelmanratkaisu- ja päättelytilanteita. Erityisen hyviä todistamisajattelua kehittäviä tehtäviä ovat avoimet ongelmat sekä keskustelut päätelmien todenmukaisuudesta. Loppujen lopuksi todistamisajattelu kehittyy oppilaille kuitenkin sisältä käsin ja opettaja voi vain luoda parhaat mahdollisuudet ja puitteet sen kehittymiselle. [Malinen 2004, s. 107-109]

3.7 Miten oppia lukemaan ja tekemään todistuksia, vaihtoehtoinen näkemys

Kun on kyse puhtaasta todistamisesta, nousevat oppilaille esille kysymykset ”Kuinka oppia lukemaan ja ymmärtämään matemaattisia todistuksia?” sekä ”Kuinka oppia itse tekemään matemaattisia todistuksia, harvemmin oppilaat kysyvät ”Kuinka oppia päättelemään?”. Charlesin ja Robertsin (2009) näkökulman mukaan todistuksia oppii parhaiten lukemalla useita eri todistuksia eri kirjoittajilta ja todistamaan oppii lukemalla muiden hyviä todistuksia, jäljittelemällä hyviä todistuksia omia todistuksia tehdessä sekä antamalla muiden ihmisten lukea itse tehtyjä todistuksia ja ottamalla vastaan kritiikkiä. [Charles & Roberts 2009, s. 349]

Charles ja Roberts (2009) antavat neuvoja todistusten lukemiselle ja kirjoittamiselle. Todistuksen lukeminen tulisi aloittaa tekemällä yleissilmäys todistuksesta ja selvittämällä, mitä metodeja, määritelmiä ja teoreemoja todistuksessa on käytetty. Tämän jälkeen tulee selkeästi erotella todistuksen väite ja oletukset. Ensimmäisellä lukukerralla ei siis ole tarkoitus ymmärtää ja verifioida kaikkia todistuksen vaiheita. Toisella lukukerralla todistus kannattaa katsoa tarkkaan läpi ja toistaa kirjoittajan tekemät laskutoimitukset ja päätelmät sekä tarkistaa niiden oikeellisuus.

Todistusten lukeminen voi joskus olla työlästä muun muassa siksi, että kirjoitetun todistuksen järjestys ei välttämättä vastaa järjestystä, jossa alkuperäinen todistus on kehitetty tai todistuksessa ei kerrota tarkkaan, mitä todistusmenetelmiä on käytetty tai kaikkia päätelmiä ei ole tarkkaan selitetty tai kaikkia välivaiheita ei ole tarkkaan selvitetty. [Charles & Roberts 2009, s. 349-350] Myöskin matemaattinen teksti, joka on selkeästi ja perusteellisesti deduktiivisesti rakennettua, eroaa huomattavasti matemaatikkojen omassa työssään käyttämästään ajattelusta [Schofield 1994, s. 257]. Joskin hyviä todistuksia lukemalla ja kopioimalla voi oppia todistamaan, väittäisin, että tämä on suhteellisen vanhentunut käsitys mallioppimisesta ja parempiakin metodeja todistamisen ja syvemmän ymmärryksen opettamiseen on nykyään olemassa.

3.8 Alakoulun opettajat ja todistamisajattelu

Päättelyprosessien ja todistamisajattelun kehittäminen on mahdollista jo varhaisessa vaiheessa lasten luonnollisessa ympäristössä [Malinen 2004, s. 108-109]. Alakoulun opettajien näkökulmat todistamisesta ovat tärkeitä, vaikka he eivät suoranaisesti todistamista opetakaan [Gary Martin, 1989]. He antavat alakoulun oppilaille mallin matemaattisesta todistamisesta sekä päättelystä. Jos oppilaat oppivat alakoulussa uskomaan, että muutama hyvin valittu esimerkki riittää todistukseksi, voi oppilaiden myöhemmin olla hankalaa ymmärtää matemaattisia todistuksia. Todistamisajattelun opettaminen ei siis liity pelkästään lukioon, vaan pohja sille tulisi rakentaa jo ala- ja yläkoulun aikana. [Gary Martin 1989] Alakoulussa luodulta pohjalta voidaan vähitellen irrottautua päättelyn ympäristösidonnaisuudesta ja siirtyä käyttämään päättelyssä formaalia ajattelua ja päättelyä, joka vähitellen johtaa todistamisajatteluun [Malinen 2004, s. 108-109]. Näin oppilaat oppisivat lukion loppuun mennessä tunnistamaan päättelyä ja todistamista ja yhdistämään ne matematiikkaan, kehittelemään ja arvioimaan matemaattisia argumentteja ja todistuksia sekä käyttämään ja tunnistamaan erilaisia päättely- ja todistusmenetelmiä. Jos tässä epäonnistutaan, niin oppilailla, jotka jatkavat yliopisto-opintoihin, tulee todennäköisesti olemaan hankaluuksia opintojen alkuvaiheessa. [Gila 2000, s. 10-11] Kuitenkin koulu on tärkeässä roolissa ajattelun ja päättelyn kehittämisessä. [Malinen 2004, s. 108-109] Monesti alakoulussa katsotaan todistamisen ja päättelyn olevan toissijaisia opetussuunnitelmallisia tavoitteita niillä luokka-asteilla, vaikka päättely onkin yksi matemaattinen perustaito. [Loewenberg et al. 2002]

4. Tutkimusmetodit ja -kysymykset

Tässä luvussa esitetään kyselytutkimuksen sekä oppikirja-analyysin tutkimusmetodit ja kysymykset sekä opinnäytetyön tavoitteet. Lisäksi perustellaan ja esitellään tutkimus- ja analyysimetodien valinta. Tutkimusmetodien valinnassa on käytetty apuna Anttila, P. (2014) artikkelia.

Tämän opinnäytetyön tavoitteet

- Selvittää tieteellisistä lähteistä (kirjallisuuskatsaus) todistamisen ja todistamisajattelun opettamisen nykytila.
- Selvittää kyselytutkimuksella matematiikan opettajaopiskelijoiden sekä opettajien asenteita ja tietämystä todistamisajattelusta ja todistamisajattelun opettamisesta.
- Selvittää tukevatko nykyiset MAA11 kurssin oppikirjat todistamisen ja todistamisajattelun oppimista.

4.1 Kyselytutkimus: tutkimuskysymykset ja tutkimusmetodit

Kyselytutkimuksen tutkimuskysymykset olivat seuraavat:

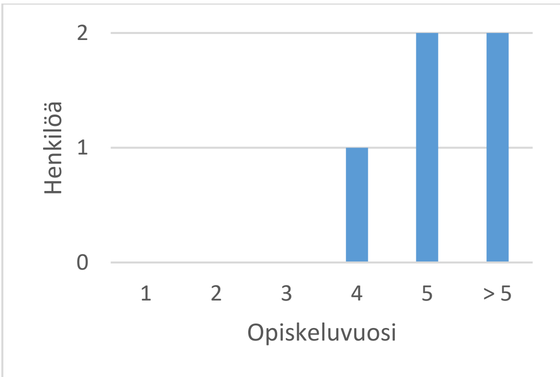
- Mitä todistaminen opiskelijoitten ja opettajien mielestä tarkoittaa? Onko tästä selkeää käsitystä?
- Mitä todistamisajattelu opiskelijoiden ja opettajien mielestä tarkoittaa? Onko tästä selkeää käsitystä?
- Miten todistamista opetetaan?
- Millainen asenne on todistamista kohtaan?
- Miten todistamisen opettamista perustellaan?
- Miten logiikan rooli nähdään todistamisessa?
- Antaako yliopistokoulutus riittävät valmiudet todistamisen opettamiseen?

Koska tavoitteena oli selvittää opettajien ja opettajaopiskelijoiden käsityksiä, mielipiteitä ja asenteita todistamisesta ja todistamisajattelun opettamisesta päädyttiin tutkimus toteuttamaan kyselytutkimuksena, sillä sen avulla voidaan selvittää isojen joukkojen käsityksiä, mielipiteitä ja asenteita. Lisäksi sen avulla on helppo tarkastella muuttujien välisiä suhteita.

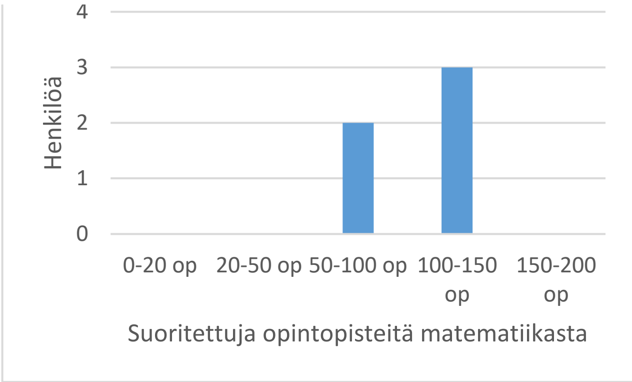
Kyselylomakkeen luomisessa ei käytetty valmista lomakepohjaa vaan kysymykset kehitettiin tutkimuskysymysten pohjalta. Kyselylomakkeen luomisprosessissa konsultoitiin kolmea opettajaopiskelijaa, jotta lomakkeesta saataisiin mahdollisimman tarkoituksen mukainen ja vastaajille helposti ymmärrettävä. Lomake testattiin ennen käyttöönottoa. Kysely luotiin käyttämällä Tampereen yliopiston E-lomake ohjelmaa. Kyselyn rakenne on tarkemmin selitetty luvussa 5 ja itse kyselylomakkeet löytyvät liitteistä 2 ja 3. Kysely lähetettiin sähköpostilla mahdollisille vastaajajoukoille. Kyselyyn vastaaminen oli vapaaehtoista.

Kysely kohdistettiin yläkoulun ja lukion matematiikan opettajille, sillä he ovat alakoulun opettajia enemmän tekemisissä todistamisen opettamisen kanssa. Kysely lähetettiin noin sadalle opettajalle ja 60 opiskelijalle Tampereella ja sen lähialueilla. Opettajia kyselyyn vastasi 13, joista kaikkiin kysymyksiin oli vastannut 11 opettajaa. Opiskelijoita kyselyyn vastasi 5, heistä kolme opiskelijaa Tampereen yliopistosta, yksi Tampereen teknillisestä yliopistosta ja yksi molemmissa yliopistoissa opiskeleva opiskelija.

Kaikki tutkimukseen vastanneet opiskelijat olivat opiskelleet yliopistossa vähintään kolme vuotta tai enemmän (Kuva 7). Opintopisteitä opiskelijoilla oli matematiikasta kertynyt vähintään 50 (Kuva 8). Näin ollen, koska opiskelijat eivät olleet vasta aloittaneita yliopistossa, voitiin heidän olevan suhteellisen perehtyneitä matematiikan yleiseen luonteeseen ja todistamiseen.

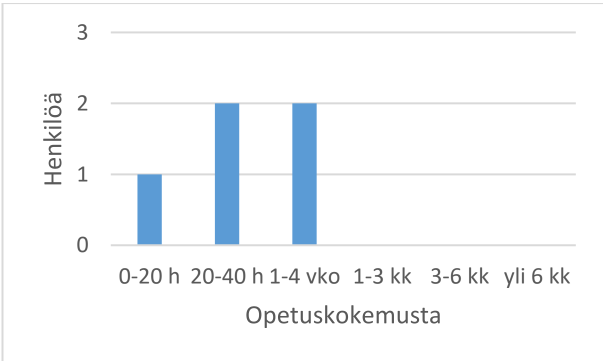


Kuva 7. *Kyselyyn vastanneiden opiskelijoiden opiskeluvuosi.*



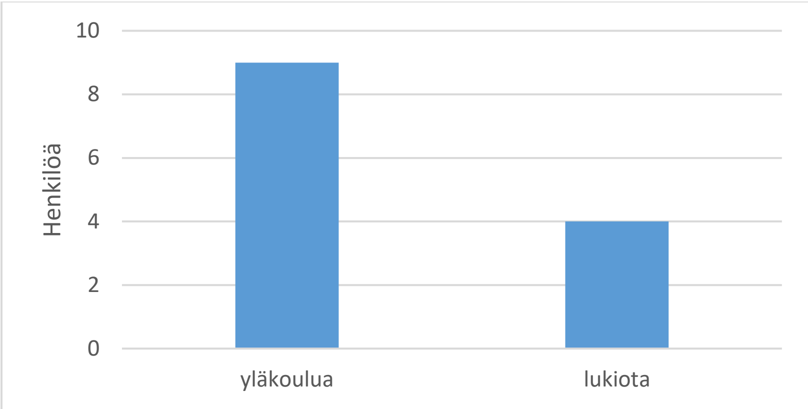
Kuva 8. *Kyselyyn vastanneiden opiskelijoiden suoritetut opintopisteet matematiikassa.*

Opetuskokemusta kenelläkään ei ollut 1-4 viikkoa enempää (Kuva 9), joten käytännön opetustilanteiden tunteminen lienee ollut opiskelijoille suhteellisen uutta.



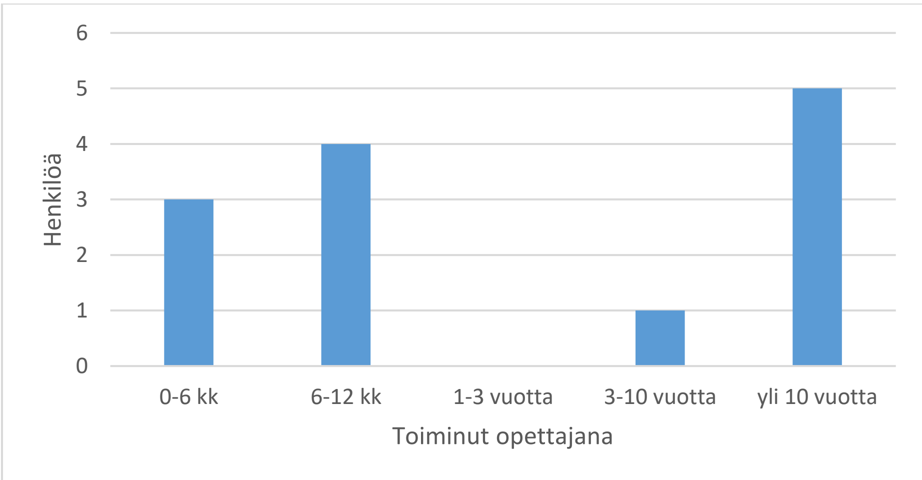
Kuva 9. *Opiskelijoiden opetuskokemuksen määrä.*

Opettajia kyselyyn vastasi yhteensä 13; heistä 11 oli vastannut myös avoimiin kysymyksiin 6-12. Yläkoulun opettajia kyselyyn vastasi 9 ja lukion opettajia 4 (Kuva 10). Kaikkiin avoimiin kysymyksiin vastanneita opettajia oli yläkoulusta 7 ja lukiosta 4 henkilöä.



Kuva 10. *Kyselyyn vastanneiden opettajien jakautuminen yläkoulun ja lukion opettajiin.*

Opettajien opetuskokemus vaihteli suhteellisen äskettäin valmistuneista opettajista jo useamman vuoden opettajina toimineisiin opettajiin (Kuva 11).



Kuva 11. *Kyselyyn vastanneiden opettajien opetuskokemuksen määrä.*

Kyselyn kvalitatiivisen luonteen vuoksi vastausten analysointiin käytettiin kvalitatiiviselle aineistolle sopivia analyysimenetelmiä. Vastausten luokittelussa käytettiin aineistolähtöistä luokittelua ja sisällön merkityksiä ja erilaisten teemojen esiintymismääriä analysoitiin. Tarkastelun pohjana toimi luvuissa 2 ja 3 esitetty teoria.

4.2 Oppikirja-analyysi: tutkimuskysymykset ja tutkimusmetodit

Oppikirja-analyysin tutkimuskysymykset olivat seuraavat:

- Miten oppikirjat johdattavat todistamiseen ja esittelevät todistamisen?
- Mikä on oppikirjojen pedagoginen lähestymistapa todistamiseen?

- Miten oppikirjat tukevat oppilaan ajattelun kehittymistä ja millä tavalla vai edistävätkö oppikirjat pelkästään ”mekaanisen todistamisen” oppimisessa?
- Täyttävätkö oppikirjat opetussuunnitelman vaatimat sisällöt?

Oppikirja-analyysissä aineistoa analysoitiin pääasiassa aineistolähtöisesti. Lisäksi jonkin verran tarkasteltiin luvuissa 2 ja 3 esitetyn teorian ja aineiston suhdetta. Oppikirjojen yleistä rakennetta ja sisältöä tarkasteltiin niin opettajan kuin oppilaan näkökulmasta ja pedagoginen lähestymistapa oli erityisen tarkastelun kohteena.

5. Tutkimus matematiikan opettajaopiskelijoiden ja opettajien asenteista ja valmiuksista todistamisen opettamiseen

Tässä luvussa tarkastellaan tutkimusta, jossa kartoitettiin opettajaopiskelijoiden sekä opettajien asenteita ja tietämystä todistamisajattelua ja todistamista kohtaan.

5.1 Tutkimuksen tarkoitus ja toteutus

Tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää matematiikan opettajaopiskelijoiden sekä opettajien asenteita ja tietämystä todistamisajattelusta ja todistamisajattelun opettamisesta. Lisäksi haluttiin selvittää, antaako yliopistokoulutus riittävät eväät todistamisajattelun ja todistamisen opettamiseen. Lisäksi tarkasteltiin, onko opiskelijoiden ja opettajien tietämyksessä ja asenteissa eroavaisuuksia. Tutkimuksen laadullisen luonteen vuoksi suurin osa kysymyksistä oli kvalitatiivisia.

Tutkimuksen suunnittelu lähti liikkeelle uudesta lukion MAA11 kurssista ja sen vaatimuksista oppilaille ja opettajille, mitä kautta päädyttiin tutkimuskysymyksiin. Tutkimuskysymykset olivat seuraavat:

- Mitä todistaminen opiskelijoitten ja opettajien mielestä tarkoittaa? Onko tästä selkeää käsitystä?
- Mitä todistamisajattelu opiskelijoiden ja opettajien mielestä tarkoittaa? Onko tästä selkeää käsitystä?
- Miten todistamista opetetaan?
- Millainen asenne on todistamista kohtaan?
- Miten todistamisen opettamista perustellaan?
- Miten logiikan rooli nähdään todistamisessa?
- Antaako yliopistokoulutus riittävät valmiudet todistamisen opettamiseen?

Lisäksi tutkimuksessa oltiin kiinnostuneita selvittämään, vaikuttaako opettajan opetustehtävän luonne (yläkoulu/lukio) tai opetuskokemuksen määrä opettajan käsityksiin todistamisesta ja sen opettamisesta? Entä vaikuttaako opiskelijan opintovaihe käsityksiin todistamisesta ja todistamisajattelusta? Vaikuttaako uuden opetussuunnitelman mukaisen MAA11 kurssin tunteminen käsityksiin todistamisesta ja sen opettamisesta? Myös tarkasteltiin, että nähdäänkö todistamisen opettaminen tärkeänä yläkoulussa ja lukiossa. Lisäksi selvitettiin, mitkä seikat koetaan oppilaiden suurimmiksi esteiksi todistamisen ja todistamisajattelun oppimisessa. Viimeisenä katsottiin vielä eroavatko opiskelijoiden ja opettajien vastaukset. Miksi ja miten?

Tutkimus suoritettiin kyselytutkimuksena kahdella eri kyselylomakkeella (Liitteet 2 ja 3). Kyselytutkimus toteutettiin luomalla kyselylomakkeet Tampereen yliopiston E-lomake ohjelmalla. Kyselylomakkeen laadinnassa huomioitiin tutkimuskysymykset. Kysely sisälsi sekä monivalinta että avoimia kysymyksiä. Avoimet kysymykset käsittelivät ensin asenteita ja tietämystä todistamisajattelusta ja todistamisesta, myöhemmät kysymykset käsittelivät asenteita ja käsityksiä todistamisesta ja todistamisajattelun opettamisesta. Monivalintakysymyksillä kartoitettiin pääasiassa vastaajien taustatietoja. Opiskelijoille ja opettajille esitettiin samat kysymykset taustakysymyksiä lukuun ottamatta, joissa selvitettiin muun muassa matematiikan opintopistemäärää, yliopistoa, opetuskokemusta ja opiskeluaikaa. Opettajilta kysyttiin puolestaan, kauanko he olivat toimineet opettajina sekä opettavatko he yläkoulussa vai lukiossa. Molemmilta ryhmiltä kysyttiin, ovatko he tutustuneet uuteen MAA11 kurssiin, joka yläkoulun ja lukion kursseista keskittyy eniten käsittelemään todistamista. Taustakysymysten tarkoituksena oli tarkastella, onko näillä asioilla vaikutusta vastausten piirteisiin.

Kyselyn jakelu suoritettiin lähettämällä kysely sähköpostitse mahdollisille vastaajajoukoille. Opettajien kysely lähettiin Tampereen alueen matematiikan opettajille, joiden työsähköpostiosoitteet löytyivät yläkoulujen ja lukioiden verkkosivuilta. Kysely lähettiin noin sadalle opettajalle. Opiskelijat valikoituivat tutkimukseen Tampereen yliopistosta myöskin sähköpostiosoitteiden saatavuuden perusteella. Kysely lähetettiin noin 60 opiskelijalle. Lopullinen vastaajajoukko koostui yhteensä viidestä Tampereen yliopiston sekä Tampereen teknillisen yliopiston matematiikan opettajaopiskelijasta (kolme opiskelijaa Tampereen yliopistosta, yksi Tampereen teknillisestä yliopistosta ja yksi molemmissa yliopistoissa opiskeleva opiskelija). Opettajat kyselyyn tavoitettiin pääasiassa Tampereen alueen kouluista ja vastauksia saatiin yhteensä 13 kappaletta.

Vastauslomakkeet analysoitiin tarkasti. Ensin tarkasteltiin opettajien ja opiskelijoiden taustatietoja. Kaikkien vastauksien kohdalla tarkasteltiin, löytyykö vastauksissa usein esiintyvien piirteiden sekä taustatietojen väliltä yhteyttä. Avoimet kysymykset analysoitiin selvittämällä, mitä piirteitä vastauksista eniten nousee esille ja kuinka monta kertaa. Myös täysin muista vastauksista eroavat vastaukset huomioitiin. Lisäksi arvioitiin mahdollisia syitä vastausten sisällölle. Monivalintakysymyksistä tarkasteltiin yleisintä vastausta sekä eroavatko muut vastaukset suuresti valtavirrasta.

5.2 Opiskelijoiden vastausten analyysi

Melkein kaikissa (80%, 4 kpl) opiskelijoiden vastauksissa tuli esille, että todistaminen tarkoittaa heidän mielestään matemaattisen väitteen tai lauseen osoittamista todeksi tai epätodeksi. Osassa vastauksista (40%, 2 kpl) myös aukoton perustelu liitettiin osaksi todistamista. 40% (2) opiskelijoista liitti todistamisen suoraan pelkästään matematiikkaan.

Todistamisajattelusta ei opiskelijoilla ollut niin selkeää ja yhtäläistä käsitystä. Todistamisajattelu oli osalle aivan uusi termi, kuten eräs opiskelija vastauksessaan toteaakin. Todistamisajattelua ei kuitenkaan selkeästi osattu liittää yleisesti myös matematiikan tai edes todistamisen ulkopuolelle. Yksi opiskelija (20%) oli vastannut kysymykseen, mitä todistamisajattelu hänen mielestään tarkoittaa, seuraavasti: *”Deduktiivista ajattelua, myös (matemaattista) luovuutta”.* Toinen opiskelija taas oli vastannut kysymykseen, mitä todistamisajattelu hänen mielestään tarkoittaa, seuraavasti: *”Kykyä ajatella matemaattisesti todistusten osalta. Kykyä ymmärtää valmiita todistuksia, niiden kriittistä käsittelyä, omien todistusten tuottamista täsmällisesti ja matematiikassa hyväksytyillä tavoilla. Lisäksi positiivista asennetta todistamiseen.”* Tämä vastaus keskittyi todistamisajatteluun pelkästään osana matemaattista todistamista. Osassa vastauksissa (40%, 2 kpl) todistamisajattelu yhdistettiin deduktiiviseen tai matemaattiseen ajatteluun, joissain vastauksissa (40%, 2 kpl) tuli ilmi asioiden tai kokonaisuuksien hahmottaminen ja yksityiskohtien huomioiminen osana isompaa kokonaisuutta. Yksi opiskelija (20%) vastasi todistamisajattelun tarkoittavan *”asioiden kritiikillistä tarkastelua ja argumenttien pätevyyden tutkimista”*. Kokonaisuudessaan vastaukset olivat hyvin erilaisia.

Suurin osa opiskelijoista (80%, 4 kpl) oli sitä mieltä, että todistamista opetetaan pääasiassa ongelmanratkaisukyvyn ja kriittisen ajattelun kehittämisen takia. Päätökset olisi hyvä osata perustella ja tällaisen perustelun, loogisen ajattelun ja kriittisen arviointikyvyn harjoittamisen matematiikassa katsottiin olevan hyödyllinen taito myös myöhemmin työelämässä. Osa (40%, 2 kpl) mainitsikin todistamisen harjoittelussa kehittyvät taidot hyödyllisiksi matematiikan ulkopuolella. Yhden opiskelijan vastaus (20%) keskittyi selvittämään matematiikan opetuksen tarpeen pelkästään matematiikan perusluonteella: *”Koska matematiikan perusta on todistamiseen perustuvaa, ja yleisesti on hyvä osata muodostaa itse todistuksia (mikäli niitä johonkin tarvitsee).”*

Logiikan yhteys todistamiseen oli kaikille opiskelijoille selvä ja sama: kaikissa vastauksissa (100%, 5 kpl) tuli ilmi, että todistaminen nojautuu loogiseen päättelyyn. Eräs opiskelija sanoikin suoraan:*” Todistaminen on puhdasta logiikkaa - havaitaan syy-seuraus-suhteita. Todistustekniikkakin on puhdasta logiikkaa.”* Osa opiskelijoista (40%, 2 kpl) nostaa esille myös algoritmisen ajattelun sekä lauselogiikan työkaluna väitteiden tarkastelussa.

Todistamisen opettamisesta oli selvästi eroavia käsityksiä. Jotkut opiskelijat (40%, 2 kpl) käyttäisivät esimerkkejä ja siitä siirtyisivät oppilaiden itse ratkaistaviin tehtäviin. Osa (40%, 2 kpl) ottaisi todistamisen mukaan myös muissa oppiaineissa. Joku (20%, 1 kpl) mainitsi, että todistamista voisi ottaa kaikilla kursseilla esille. Osalla (40%, 2 kpl) oli selkeä pedagoginen lähestymistapa ja selkeä ajatus todistamisen opettamiseen, osalla (40%), kpl ei tuntunut olevan pedagogista käsitystä asiasta. Esimerkiksi yksi opiskelija vastasi perusteellisesti *”Käyttäisin kaavojen johtamista jo yläkoulussa ja käsittelisin todistamista (esimerkiksi Pythagoraan lause, jne). Lukiossa todistaminen lisääntyisi ja opiskelijoiden tulisi itse tuottaa todistuksia tunnetuista väitteistä. Paljon esimerkkejä täsmällisestä todistamisesta, harjoitustehtäviä ja todistusten havainnollistamista. Kertoisin, miten todistamistaidosta hyötyy ja auttaisin opiskelijoita pääsemään todistusten ongelmakohdissa eteenpäin. Todistaminen ei saisi jäädä vain matematiikkaan, vaan esimerkiksi kaavojen johtamista ja ratkaisujen perustelemista tulisi opettaa myös lähioppiaineissa. Virheiden etsimisestä, korjaamisesta, pari- ja ryhmätyöskentelystä sekä kielentämisestä voisi olla hyötyä todistamisen opettamisessa.”*, kun taas toinen opiskelija tuntui olevan opettamisen kanssa hieman hukassa ja opettaisi todistamista seuraavasti: *”Numeroteorian kautta jaollisuuden avulla. Ensin osoittaisin muutaman esimerkin kautta, sitten induktiotodistuksella. Toinen olisi epäsuoratodistus vastaoletuksen kautta.”*. Kaksi opiskelijaa (40%, 2 kpl) mainitsi lisäksi, että on tärkeää, että oppilaat huomaavat asioiden yleisen tarkastelun mahdollisuuden muuttujien avulla suhteessa asioiden luvuilla tarkastelemiseen.

Oppilaiden suurin ongelma todistamista opeteltaessa oli opiskelijoiden mielestä todistamisen vaatima uuden tyyppinen erilainen ajattelutapa (80%, 4 kpl), jota ei ole aikaisemmin koulussa juuri harjoiteltu, ja se saattaa siksi tuntua oppilaista vaikealta. Oppilaiden ajattelu ei välttämättä ole riittävän kehittynyttä todistamisen vaatimalle tasolle (80%, 4 kpl). Moni (40%, 2 kpl) mainitsi lisäksi, että koska todistaminen koetaan niin vaikeaksi ja erilaiseksi, ei oppilailla ole halukkuutta ja motivaatiota opetella sitä. Oppilaille syntyvät käsitykset vaikeasta ja oudosta todistamisesta voivat olla oppimisen esteenä. Lisäksi todistamisen opettamiseen ei muun oppimäärän lisäksi ole riittävästi aikaa (20%, 1 kpl).

Kaikki opiskelijat (100%, 5 kpl) olivat sitä mieltä, että todistamista opetetaan paljon yliopistossa ja neljä viidestä koki tämän vuoksi aineenhallinnallisesti olevansa pätevä opettamaan todistamista. Kuitenkin 80% (4 kpl) vastauksista sisälsi epävarmuutta siitä, miten todistamisajattelua ja todistamista tulisi opetusmielessä pedagogisesti lähestyä ja yksi opiskelija sanoi toivovansa sitä osaksi opetusta. Opiskelijoiden mietteitä kuvasi kokonaisuudessaan hyvin tämä vastaus: *”Vaikka todistaminen ei ole edelleenkään itselleni helppoa, uskoisin taitojeni riittävän lukiotasolla opettamiseen aineenhallinnan puolesta. Miten taas pedagogisesti asiaa tulisi lähestyä, on itselleni aivan mysteeri.”*

5.3 Opettajien vastausten analyysi

Useimmiten yläkoulun ja lukion opettajien vastausten välillä ei ollut selkeitä eroavaisuuksia. Myöskään opettajakokemuksen määrällä ei suurimmassa osassa tapaukista juurikaan ollut vaikutusta vastausten luonteeseen.

Suurin osa opettajista (82%, 9 kpl) määritteli todistamisen olevan jonkin asian osoittamista oikeaksi tai matemaattisen väitteen todistamista oikeaksi. Osa (36%, 4 kpl) myös näkivät loogiset perustelut tai aukottoman päättelyketjun tärkeänä osana todistamista ja osa (27%, 3 kpl) mainitsi lisäksi todistuksen perustuvan aikaisemmin todeksi osoitettuihin lauseihin, aksioomiin tai määritelmiin. Todistaminen mainittiin joissain vastauksissa (18%, 2 kpl) osana matematiikan luonnetta. 36% (4 kpl) opettajista liitti vastauksissa todistamisen yleisesti asioiden oikeaksi osoittamiseen, 64% (7 kpl) liitti todistamisen suoraan matematiikkaan.

Suuri osa opettajista (36%, 4 kpl) yhdisti todistamisajattelun suoraan matemaattiseen todistamiseen. Todistamisajattelu nähtiin osana todistamisprosessia esimerkiksi kokonaisuuksien hahmottamisena tai kriittisenä ajatteluna (36%, 4 kpl). Yksi opettaja vastaasikin näin: *”Todistamisajattelu tarkoittaa mielestäni sitä, että osataan arvioida kriittisesti vastauksiaan ja osataan perustella ne systemaattisesti niillä todistamissäännöillä, jotka ovat yleisessä käytössä. Yliopistossa oletus, väite, lopputulos, mutta koulumatematiikassa todistaminen voi sisältyä jo vastauksen ratkaisuprosessiin.”* Vastauksissa ei juurikaan (ainakaan selkeästi) nähty todistamisajattelua erillisenä todistamisesta esimerkiksi ongelmanratkaisua ei selkeästi yhdistetty todistamisajatteluun. Osalla opettajista (36%, 4 kpl) ei ollut selkeää käsitystä todistamisajattelusta ja vastaukset olivat välillä ympäripyöreitä. Esimerkiksi yksi opettaja oli vastannut seuraavasti: *”Sitä, että todistaminen tapahtuu yksiselitteisesti ja aukottomasti”*, toinen *”Keinoja/ajatuksia todistamisesta”*, kolmas *”Ajattelutapaa, jossa haetaan yleisiä totuuksia”*. Kuitenkin suurin osa opettajista näki todistamisajattelun jonkinlaisena todistamiseen tai matematiikkaan yhdistettävissä olevana ajattelutapana, joskin sen tarkempi määrittely oli monelle selvästi hankalaa. Epäilisinkin, että asiaa ei ole paljon ajateltu ja termi oli suhteellisen uusi monille. Eräs yli 10 vuotta opettajana toiminut yläkoulun opettaja totesikin, ettei ole *”kovin paljon pohtinut tälläistä, ei ole ihan joka jokapäiväistä arkea peruskoulussa”*. Keskenään vastaukset erosivat toisistaan suuresti ja selkeästi osa opettajista oli perehtyneempiä todistamisajattelun käsitteeseen kuin toiset.

Opettajista suurin osa (73%, 8 kpl) mainitsi vastauksissaan, että todistamista opetetaan kriittisen ajattelun ja/tai päättelytaitojen sekä ongelmanratkaisutaitojen kehittämisen vuoksi. Joissakin vastauksissa (55%, 6 kpl) perusteltiin todistaminen lisäksi sillä, että se antaa syvemmän pohjan ymmärtää matematiikkaa ja matematiikan luonnetta. Esimerkiksi yksi opettaja vastasi seuraavasti: *” Todistamista opetetaan juuri siitä syystä, että ajattelu ja perustelutaidot kehittyvät sekä kriittisyys valmiiksi pureskeltuja asioita kohtaan katoaa. Asiat ymmärretään syvällisemmin, kun tiedetään, mistä ne ovat seurausta ja mitä niiden taustalla on”* toinen opettaja vastasi: *”Esim. miksi joku kaava on niinkuin se on. Ajattelun kehittämistä, johtopäätösten tekemistä.”* Yleisesti vastaukset keskittyivät siihen, kuinka todistaminen auttaa ymmärtämään matematiikkaa ja sen luonnetta paremmin. Toisaalta osassa vastauksissa ”*ajattelun kehittymisen*” yhteydessä ei aina mainittu sen tarkoittavan juuri matemaattista ajattelua. Ainoastaan yksi opettaja (20%) suoraan mainitsi vastauksessaan todistamisen opettamisen *”auttavan arkielämän päätöksissä”*.

Logiikka kuului kaikkien opettajien (100%, 5 kpl) mielestä osaksi todistamisprosessia: erilaiset todistustavat pohjautuvat monen (55%, 6 kpl) mielestä logiikkaan ja päättelyn validisuus (82%, 9 kpl) vaatii logiikkaa taustalle. Kaikki opettajat näkivät logiikan tavalla tai toisella erottamattomana osana todistamista. Eräs opettaja yksinkertaisesti, mutta lyhyesti totesi, että *”Logiikan avulla osoitetaan väitteiden paikkansapitävyys.”*

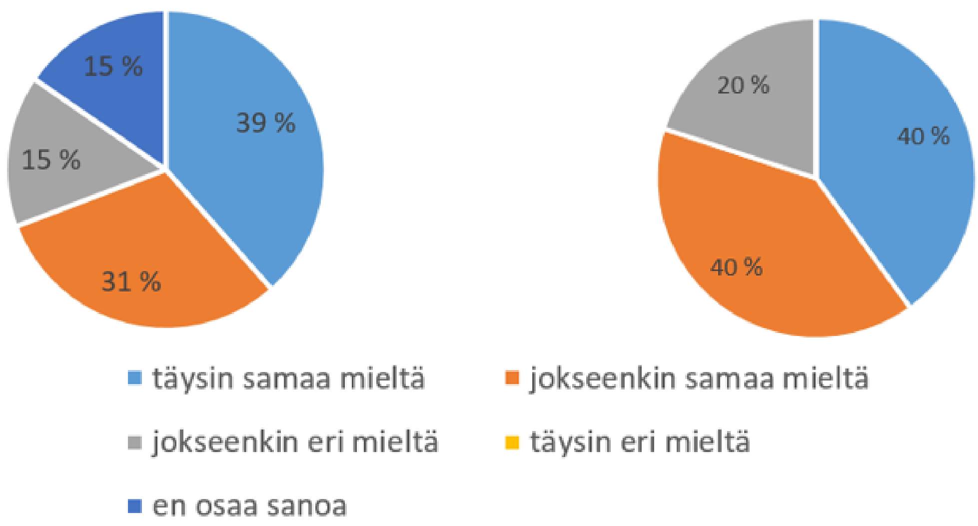
Opettajista suuri osa (45%, 5 kpl) opettaisi todistamista näyttämällä itse esimerkkejä todistuksista tai käymällä asioita yhteisesti läpi. Osa antaisi sitten oppilaitten harjoitella itse yksinkertaisilla todistuksilla. Myös logiikan ja perustelujen merkitystä korostettiin todistamista harjoiteltaessa (45%, 5 kpl). Tyypillinen vastaus kysymykseen olikin seuraavan tyyppinen: *” Perusesimerkkien avulla ja tehtävien avulla. Ehkä myös hieman logiikkaa kertaamalla, jotta selvenee miksi kyseiset todistusmenetelmät ovat toimivia.”* Yläkoulun opettajista kaksi (18%) mainitsi, että varsinainen todistaminen ei juurikaan kuuluisi yläkoulun opetuksen osaksi. Heistä toinen kuitenkin harjoittaisi edelleen perustelemista sekä rohkaisisi oppilaita pohtimaan ja johtamaan esim. potenssilaskennan kaavoja ja miettimään, miksi sellaisia saa matematiikassa hyödyntää. Toinen opettaja näki suuret ryhmäkoot todistamisajattelun esteenä: *”Varmasti jos ryhmäkoot olisivat vähän pienempiä se mahdollistaisi paremmin oppilaiden yksilöllisten tasoerojen huomioimisen. Tässä puhutaan kuitenkin aika pitkälti sellaisista vaativamman pään tehtävistä, jotka eivät ole ihan kaikille niitä ensimmäisiä ja tärkeimpiä asioita opetella.”* Yläkoulun opettajat painottivat vastauksissaan hieman useammin yhteistä pohtimista ja läpikäyntiä, mikä on yläkoulussa oppilaiden taitotaso huomioiden todennäköisesti pedagogiselta kannalta katsottuna hyödyllisempää. Lukion opettajien vastauksissa on enemmän huomattavissa asenne, että he esimerkeillä ja pohtimiseen kannustamisella luovat oppilaille pohjan, jota kautta oppilaat pystyvät itse ratkaisemaan todistamistehtäviä ja kehittämään itsenäisesti deduktiivista ajattelua.

Opettajien mielestä oppilaiden suurimmat ongelmat todistamisessa olivat todistamisen vaatima ”perinteisestä koulumatematiikasta” eroava ajattelutapa (73%, 8 kpl), esimerkiksi kokonaisuuksien ymmärtäminen ja erot yleisen ja yksittäistapausten välillä ovat oppilaille vaikeita hahmottaa. Myös todistuksen rakenne oli muutaman opettajan (18%, 2 kpl) mielestä oppilaille hankalaa ja jo pelkästään oletuksen ja väitteen hahmottaminen on useille oppilaille vaikeaa. Yksi opettaja (9%) lisäksi mainitsi, että *”Todistamista pelätään ja todistamistehtävät sivuutetaan herkästi. Tästä syystä ns. todistustekniikka ja rutiininomaisuus puuttuvat.”* Asenteet (18%, 2 kpl) ja rutiinin puute (27%, 3 kpl) nähtiin siis ongelmana. Opetuskokemuksella ei ollut vaikutusta vastauksiin, kuten ei myöskään sillä, oliko opettaja yläkoulun vai lukion opettaja.

Avointen kysymysten perusteella 82 % (9 kpl) opettajista oli sitä mieltä, että koulutus antoi riittävät eväät todistamisen ja todistamisajattelun opettamiselle, sillä yliopistossa todistettiin paljon. Eräs opettaja vastasikin *”Kyllä. Varmasti kun tuollaisia tehtäviä on itse opiskellessa aika paljon tehnyt, se on ihan riittävä pohja myös opettaa niitä.”* Kuvassa 14 onkin esitetty, kuinka 70% (9 kpl) opettajista kokee olevansa kykeneväisiä laatimaan matemaattisen todistuksen ammattinsa vaatimalla tasolla. Vain kaksi opettajaa (18%) oli avointen kysymysten perusteella sitä mieltä, että koulutus ei ole antanut riittävää pohjaa todistamisen opettamiselle. Toinen heistä (lukion opettaja) sanoi, ettei ollut kovin syvällisesti lukenut matematiikkaa, mistä puutteelliset taidot johtuvat. Toisen mielestä yliopistossa ei keskitytty riittävästi siihen, miten todistamisajattelua voisi kehittää ja hän vastasikin seuraavasti: *”Yliopistossa todistettiin ja todistettiin, mutta tarpeeksi ei opetettu miten ajatteluaan voisi kehittää. Aineenopettajaksi suuntautuessani olisin kaivannut yksinkertaisia ja helppoja todistuksia enemmän korkealentoisten todistusten sijaan, joista oli todella vaikea löytää todistuksen ydin.”*

5.4 Opettajien ja opiskelijoiden vastausten vertailu

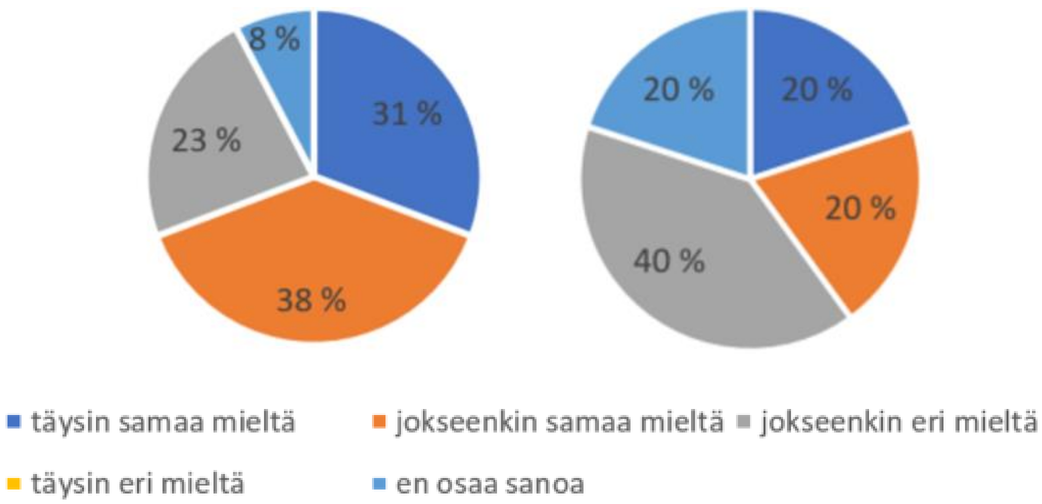
Kuvassa 12 on esitetty opettajien ja opiskelijoiden vastaukset kysymykseen ’Osaan mielestäni laatia matemaattisen todistuksen opettajan ammatin vaatimalla tasolla’.



Kuva 12. *Opettajien (vasen) ja opiskelijoiden (oikea) vastausjakauma kysymykseen ”Osaan mielestäni laatia matemaattisen todistuksen opettajan ammatin vaatimalla tasolla”.*

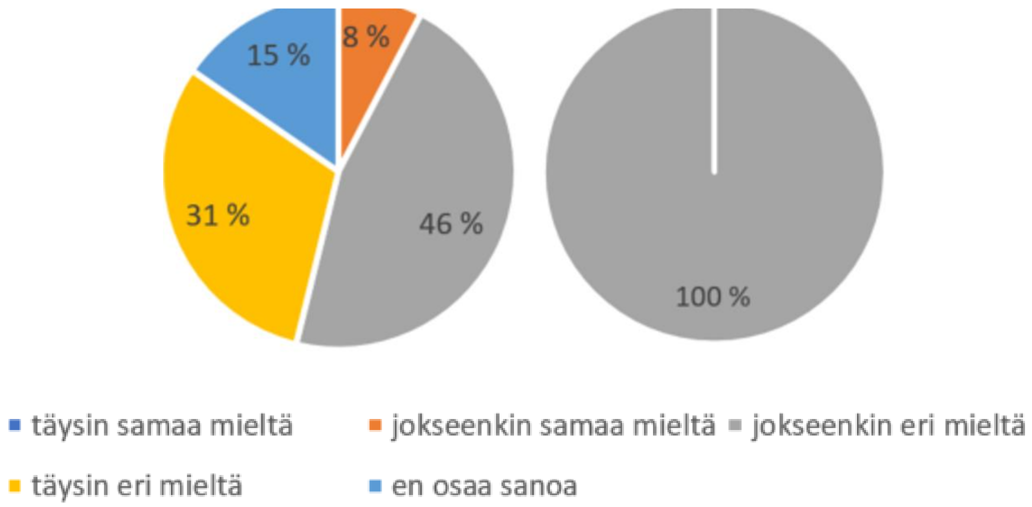
Vastausten perusteella suurin osa opiskelijoista ja opettajista näyttäisi kokevansa olevan kyvykäs laatimaan todistuksen ammattinsa vaatimalla tasolla.

Opettajista jopa 69% (9 kpl) (Kuva 13) oli sitä mieltä, että hyvin valittu esimerkki riittää yläkoulussa täysin tai melkein kokonaan perustelemaan matemaattisen tuloksen. Kukaan ei ollut täysin sitä mieltä, että hyvin valittu esimerkki ei ollenkaan kävisi yläkoulussa todistamisen sijaan. Opiskeliijoiden vastaukset samaan kysymykseen jakautuivat suhteellisen paljon, joskaan kukaan opiskelija ei ollut täysin sitä mieltä, että hyvin valittu esimerkki ei riittäisi, mutta kaksi opiskelijaa (40%, 2 kpl) koki olevansa jokseenkin eri mieltä. Yksi opiskelija (20%) oli jokseenkin samaa mieltä ja yksi (20%) jopa täysin samaa mieltä.



Kuva 13. *Opettajien (vasen) sekä opiskelijoiden (oikea) vastausjakauma kysymykseen "Hyvin valittu esimerkki/esimerkit todistamisen sijaan riittävät yläkoulussa perustelemaan matemaattisen tuloksen".*

Kuvassa 14 on esitetty vastausjakauma samaan kysymykseen lukiossa.



Kuva 14. *Opettajien (vasen) sekä opiskelijoiden (oikea) vastausjakauma kysymykseen ”Hyvin valittu esimerkki/esimerkit todistamisen sijaan riittävät lukiossa perustelemaan matemaattisen tuloksen”.*

Suurin osa opettajista (77%, 10 kpl) oli jokseenkin tai täysin eri mieltä ja kukaan ei ole täysin samaa mieltä väitteen ”Hyvin valittu esimerkki tai esimerkit todistamisen sijaan riittävät lukiossa perustelemaan matemaattisen tuloksen” kanssa. Eli siis lukiossa hyvin valittu esimerkki/esimerkit koettiin jokseenkin riittämättömäksi keinoksi matemaattisen tuloksen perustelemiseen. Kaikki opiskelijat vastasivat olevansa jokseenkin eri mieltä väitteen *”Hyvin valittu esimerkki/esimerkit todistamisen sijaan riittävät yläkoulussa perustelemaan matemaattisen tuloksen”* kanssa.

Kokonaisuudessaan opettajien ja opiskelijoiden käsitykset todistamisesta olivat pohjimmiltaan suunnilleen samankaltaisia. Molemmilla ryhmillä todistaminen liittyi selkeästi jonkin todeksi tai oikeaksi osoittamiseen. Molemmat myös liittivät todistamisen matematiikkaan.

Todistamisajattelusta oli huomattavissa, että sekä opiskelijoilla että opettajilla ei kaikilla ollut aivan selkeää käsitystä termin määritelmästä tai mitä se edes heidän mielestään tarkoittaa. Kuitenkin molempien vastausten isot linjat olivat samankaltaisia ja todistamisajattelu miellettiinkin paljon matemaattiseksi tai todistamisessa tarvittavaksi ajattelutavaksi sekä kokonaisuuksien hahmottamiseksi ja kriittiseksi ajatteluksi.

Todistamista opetetaan sekä opettajien että opiskelijoiden mielestä ongelmanratkaisukyvyn ja kriittisen ajattelun kehittämisen takia. Opettajista osa mainitsi myös todistamisen opettamisen luovan syvempää ymmärrystä matematiikkaan. Opiskelijoista kuitenkin jopa 40% (2 kpl) oli sitä mieltä, että todistamista harjoiteltaessa kehittyvistä taidoista on hyötyä koulun ulkopuolellakin. Opettajista kukaan ei maininnut tätä seikkaa.

Todennäköisesti ero johtuu siitä, että opettajankoulutuksessa vielä olevat opettajat pohtinevat todennäköisesti opetuksessaan oppiaineiden ja opetettavien asioiden hyötyjä oppilaalle esimerkiksi työelämässä. Opettajille taas ei arkipäivän työssä koulun ulkopuolisen elämän ja oppiaineessa opittavien taitojen harjoittelun yhteyksiin sekä niiden pohtimiseen ole samalla lailla aikaa ja kiinnostusta kuin opettajankoulutuksessa.

Todistamisen sekä opettajat että opiskelijat näkivät logiikan irrottamattomana osana todistamista ja siihen sisältyvää prosessia. Molemmat mainitsivat muun muassa logiikan sekä ajattelussa että logiikan säännöt, joita voi hyödyntää todistamisessa.

Taulukkoon 2 on koottu opettajien ja opiskelijoiden avointen kysymysten vastaukset avoimiin kysymyksiin, jotka koskivat asenteita ja käsityksiä todistamisesta sekä todistamisajattelusta.

Taulukko 2. *Opiskelijoiden ja opettajien vastausten pääpiirteet avoimiin kysymyksiin, joissa selvitettiin asenteita ja käsityksiä todistamisesta ja todistamisajattelusta.*

Kysymys	Opiskelijat	Opettajat
Mitä todistaminen mielestäsi tarkoittaa?	• matemaattisen väitteen tai lauseen osoittamista todeksi (80%, 4 kpl) • aukotonta perustelua (40%, 2 kpl)	• asian oikeaksi osoittamista (82%, 9 kpl) • selkeä yhteys matematiikkaan (64%, 7 kpl)
Mitä todistamisajattelu mielestäsi tarkoittaa?	• matematiikkaan liittyvää ajattelua (80%, 4 kpl) • kokonaisuuksien hahmottamista ja deduktiivista ajattelua (40%, 2 kpl) • termin määritteleminen osalle hankalaa	• todistamiseen yhdistettävä ajattelutapa (36%, 4 kpl) • kriittistä ajattelua ja kokonaisuuksien hahmottamista (36%, 4 kpl) • termin määritteleminen suhteellisen vaikeaa
Miksi mielestäsi todistamista opetetaan?	• ongelmanratkaisukyvyn ja kriittisen ajattelun kehittämisen takia (80%, 4 kpl) • todistamisen harjoittelussa kehittyvät taidot hyödyllisiä myös koulun ulkopuolella (40%, 4 kpl)	• kriittisen ajattelun ja ongelmanratkaisukyvyn kehittäminen (73%, 8 kpl) • syvempi ymmärrys matematiikkaan (55%, 6 kpl)
Miten logiikka liittyy todistamiseen?	• todistaminen nojautuu loogiseen päättelyyn (100%, 5 kpl) • lauselogiikka ja algoritminen ajattelu työkaluna todistamisessa (40%, 2 kpl)	• logiikka osana todistamisprosessia (100%, 11 kpl) • mm. päättelyn validisuus ja eri todistusmenetelmät pohjautuvat logiikkaan (82%, 9 kpl)

Taulukossa 3 tarkastellaan opiskelijoiden ja opettajien vastausten pääpiirteitä avoimiin kysymyksiin, jotka koskivat todistamisen ja todistamisajattelun opettamista.

Taulukko 3. *Opiskelijoiden ja opettajien vastausten pääpiirteet avoimiin kysymyksiin, jotka käsittelivät todistamisen ja todistamisajattelun opettamista.*

Kysymys	**Opiskelijat**	**Opettajat**
Miten opettaisit/opetat todistamista ja todistamisajattelua?	• esimerkkien avulla (40%, 2 kpl) • oppiainerajat ylittäen (40%, 2 kpl) • asioiden yleisen tarkastelun hahmottaminen suhteessa yksittäistapauksiin (40%, 2 kpl) • joko selkeä optimistinen (todellisuus hieman hukassa) ajatusmaailma (40%, 2 kpl) tai ei selkeää pedagogista suunnitelmaa (40%, 2 kpl)	• esimerkkejä ja yhteistä läpikäyntiä (45%, 5 kpl) • logiikka ja pätevät perustelut (45%, 5 kpl)
Suurimmat esteet todistamisen oppimiselle?	• oppilaiden asenteet (40%, 2 kpl) • ajanpuute (20%, 1 kpl) • uudentyyppinen ajattelutapa (aikaisemman todistamisajattelun harjoituksen puute) (80%, 4 kpl) • oppilaiden valmiudet eivät riittävät (80%, 4kpl)	• perinteisestä koulumatematiikasta eroava ajattelutapa (73%, 8 kpl) • rutiinin puute (27%, 3 kpl) ja asenteet todistamista kohtaan (18%, 2 kpl)
Onko koulutus antanut valmiudet todistamisen opettamiseen?	• Todistamisen katsotaan olevan hallinnassa (80%, 4 kpl) • Todistamisen opetukseen liittyvä pedagoginen lähestymistapa ei ole selkeä (80%, 4 kpl)	• kyllä, sillä yliopistossa todistetaan paljon (82%, 9 kpl)

Sekä opettajat, että opiskelijat opettaisivat muun muassa esimerkkien avulla. Opettajat painottivat vastauksissaan lisäksi logiikkaa ja päteviä perusteluja. Tämä voinee johtua siitä, että opettajat huomaavat helposti oppilaiden puutteet perustelussa, kun opiskelijat harvemmin törmäävät tähän ongelmaan. Opiskelijoilla oli myös ajatuksia oppiainerajat ylittävästä opetuksesta. Tätä saatetaan painottaa opettajankoulutuksessa, joten siksi se mahdollisesti esiintyy opiskelijoiden vastauksissa, mutta ei opettajien vastauksissa. Myös opettajilla saattaa ajanpuutteen takia olla vaikeaa ehtiä miettiä oppianerajat ylittäviä tehtäviä, kun perusasiatkin pitää ehtiä käsitellä ja opettaa kaikille. Opiskelijoiden vastauksista näki lisäksi, että käytännön opetuskokemusta ei juuri ole, joten pedagoginen lähestymistapa oli epäselvä tai ylioptimistinen ajankäytön ja oppilaiden taitotason suhteen.

Suurimpana esteenä todistamisen oppimiselle sekä opettajat että opiskelijat näkivät todistamisen vaatiman uudentyyppisen ajattelutavan, johon oppilaat eivät olleet aikaisemmin tottuneet. Molemmat myös mainitsivat oppilaiden asenteet ongelmana. Opiskelijat mainitsivat lisäksi oppilaiden riittämättömät valmiudet.

Suurin osa opettajista ja opiskelijoista oli sitä mieltä, että yliopistokoulutus antaa riittävät valmiudet todistamisen opettamiselle, sillä yliopistossa todistetaan paljon. Kuitenkin osaa opiskelijoista mietitytti pedagoginen lähestymistapa. Tämä ei näyttänyt opettajia samalla tavalla vaivaavan, mikä voi johtua siitä, että he ovat opetustyössään kehittäneet oman pedagogisen lähestymistapansa asiaan. Opiskelijoiden epäröinti herättää kuitenkin kysymyksen, että pitäisikö opettajankoulutuksessa kiinnittää asiaan enemmän huomiota.

Sekä opettajat, että opiskelijat katsoivat suurimmaksi osaksi koulutuksen antaneen riittävät eväät todistamisajattelun ja todistamisen opettamiseen. Kuitenkin vain yksi opettaja (9%) oli sitä mieltä, että koulutus ei ollut valmistanut siihen, miten todistamisen opettamista tulisi pedagogiselta kannalta lähestyä, kun taas opiskelijoista 80% mainitsi tämän epäkohdan.

Opettajista 69% (9 kpl) oli jokseenkin samaa mieltä tai täysin samaa mieltä siitä, että hyvin valittu esimerkki riittää yläkoulussa todistamisen sijaan perustelemaan matemaattisen tuloksen, kun taas vain 40% (2 kpl) opiskelijoista oli tätä mieltä. Ero opiskelijoihin oli 29%, mutta koska otos on suhteellisen pieni, erosta ei voida vielä varmasti päätellä mitään konkreettista. Joskin voinee olla, että opiskelijoilta puuttuva käytännön kokemus tekee heidät liian optimistisiksi yläkoululaisten taidoista. Lukiossa kuitenkin sekä opettajat ja opiskelijat olivat sitä mieltä, että hyvin valitut esimerkit eivät enää riitä matemaattisen tuloksen perustelemiseen.

Osalle vastaajista uuden opetussuunnitelman mukainen MAA11kurssi oli tuttu, osalle ei. Yhteyttä vastausten piirteiden ja kurssin tuntemisen välillä ei kuitenkaan ollut havaittavissa.

5.5 Johtopäätökset ja pohdinta

Kerätyn aineiston perusteella opiskelijoilla ja opettajilla on yleisesti ottaen hyvät käsitykset todistamisesta. Todistamisen suurin osa määritteli jonkin asian oikeaksi osoittamiseksi. Todistamisajattelusta oli erinäisiä mielipiteitä. Osa yhdisti sen selkeästi kriittiseen ajatteluun, kokonaisuuksien hahmottamiseen ja deduktiiviseen päättelyyn, mutta osa ei aikaisemmin ollut edes törmännyt termiin tai osannut kunnolla määritellä sitä. Todistamisajattelua ei juurikaan osattu yhdistää matematiikan ulkopuolelle.

Todistamista opetetaan pääasiassa ongelmanratkaisukyvyn ja kriittisen ajattelun kehittämisen vuoksi. Sekä opettajat että opiskelijat opettaisivat todistamista pääsääntöisesti hyvin esimerkkitehtävien avulla ja lisäksi logiikka nähdään erottamattomana osana todistamista ja sen opettamista.

Yliopistokoulutuksen nähdään antavan riittävät valmiudet todistamisen opettamiseen. Kuitenkin opiskelijoilla, joilla ei juurikaan ole opetuskokemusta, pedagoginen lähestymistapa oli epäselvä, todennäköisesti juuri opetuskokemuksen puutteesta johtuen ja koska opettajankoulutuksessa tuskin usein mietitään todistamisen opettamisen lähtökohtia. Todistamisen opettamisessa käytännön tosiasiat (kuten käytettävissä oleva aika ja oppilaiden taitotaso) olivat opettajilla paljon paremmin hallussa kuin opiskelijoilla.

Yleisesti oltiin sitä mieltä, että todistamisen vaatima uudentyyppinen ajattelutapa oli oppilaiden suurimpana esteenä todistamisen oppimiselle. Oppilaille syntyvät käsitykset vaikeasta ja oudosta todistamisesta voivat olla oppimisen esteenä. Lisäksi ongelmiksi nähtiin liian vähäinen aika sekä yläkoulun asenteet; siellä ei pohjusteta todistamisen opettamista, jolloin se on lukiossa ihan kokonaan uusi asia. Valitettavaa on, että yhden opettajan mukaan liian isot ryhmäkoot estävät yläkoulussa osalta oppilaiden mahdollisuuden todistamisen opetteluun ja todistamisajattelun kehittämiseen jo yläkoulussa. Tällöin todistaminen saattaa jatkossa lukiossa olla entistä vaikeampaa.

Yläkoulussa hyvin valitut esimerkit katsotaan vielä yleisesti hyväksytyksi perustelutavaksi, mutta lukiossa ne eivät enää opettajien ja opiskelijoiden mielestä riitä. Yläkoulussa vielä harjoitellaankin perustaitoja, mutta lukioon mennessä oppilailla on yleiset valmiudet jo abstraktimpaan ajatteluun, jolloin esimerkkien sijaan oppilaiden voidaan olettaa ja vaatiakin ymmärtävän formaaleja matemaattisia todistuksia. Koska todistamisen ei varsinaisesti juuri nähty sellaisenaan kuuluvan yläkouluun olisi ehkä viisasta painottaa siellä todistamisajattelun harjoitteluun esimerkiksi ongelmanratkaisutehtävien avulla. Todistamisajattelun kehittämisen kannalta voisi olla hyvä, että jos todistamista ei formaalissa muodossa oteta esille yläkoulussa niin ainakin valitut esimerkit olisivat todistamisajattelun kehittämistä tukevia. Kuitenkin jo yläkoulussa voisi silti mahdollisesti esittää oppilaille muutamia helppoja todistuksia, jotta harhakäsitystä esimerkkien yleispätevyydestä todistuksena ei pääsisi syntymään.

Pienen otoksen takia mahdolliset erot opettajien ja opiskelijoiden välisissä vastauksissa sekä liittyen opintopistemäärään, uuden opetussuunnitelman mukaisen MAA11 kurssin tuntemiseen tai opetuskokemuksen määrään jäivät hyvin vaikeasti arvioitaviksi. Mahdollisesti isommalla otoskoolla olisi mahdollista havaita selkeitä eroavia trendejä vastauksissa ja mahdollisesti havaita myös eroja siinä, onko opettaja yläkoulun vai lukion opettaja. Nyt selviä eroavaisuuksia ei juuri ollut havaittavissa. Tulevissa tutkimuksissa olisi hyvä saada isompi vastaajajoukko näiden asioiden selvittämiseksi.

Tuloksiin on saattanut vaikuttaa lisäksi vastausten laatu: miten hyvin vastaajat ovat jaksaneet miettiä vastauksiaan sekä kirjoittaa auki ajatuksiaan. Lisäksi koska kyselyyn vastaaminen oli vapaaehtoista kaikille, joille se lähetettiin, on mahdollista, että vain asiasta kiinnostuneet ja aktiiviset opettajat ja opiskelijat ovat vastanneet, mikä voi osaltaan olla vaikuttanut tuloksiin.

6. MAA11 Lukuteoria ja todistaminen, oppikirja-analyysi

Tässä luvussa tarkastellaan uuden opetussuunnitelman mukaista MAA11 Lukuteoria ja todistaminen kurssia. Erityisesti tarkastellaan kurssiin tarkoitettuja kahden eri kustantajan oppikirjoja: Otavan oppikirjaa Juuri: Lukuteoria ja todistaminen [Hähkiönieni et al. 2017] sekä Sanoma Pron kirjaa Tekijä, Pitkä matematiikka 11, Lukuteoria ja todistaminen. [Heiskanen et al. 2017].

6.1 Oppikirja-analyysi

Koska todistamisosuus on tälle kurssille uusi kokonaisuus, kirja-analyysi painottuu näihin osioihin oppikirjoissa. Analyysissä tarkastellaan, miten oppikirjat johdattavat todistamiseen ja esittelevät todistamisen. Myös pedagogista lähestymistapaa, esimerkiksi miten oppikirjoissa tarkastellaan ja lähestytään todistamista, analysoidaan. Lisäksi arvioidaan, kuinka hyvin oppikirjat tukevat oppilaan ajattelun kehittymistä ja millä tavalla vai edistävätkö oppikirjat pelkästään "mekaanisen todistamisen" oppimisessa. Tarkastelun kohteena on lisäksi toteuttavatko oppikirjat opetussuunnitelman vaatimat sisällöt.

Analyysi suoritettiin katsomalla oppikirjojen yleistä rakennetta ja sisältöä. Esimerkiksi sisällön järjestystä ja järkevyyttä tarkasteltiin oppilaan oppimisen sekä opettajan näkökulmasta. Erityisen tarkastelun kohteena oli logiikan ja yleisen kielen yhteys todistamiseen, sillä niiden on todettu tutkimuksissa olevan yhteydessä todistamisen ja todistamisajattelun oppimiseen [Cheng et al. 1986; Epp 2003; Malinen 2004, s. 101-103]. Oppikirjan esimerkit ja teoriaosuudet sekä johdannot ja niiden sisällöt käytiin tarkasti läpi. Myös esimerkkien laatua ja lukumäärän riittävyyttä arvioitiin sekä tehtävien jaottelua, sisältöä ja tasoa käytiin läpi. Lisäksi oppikirjaa myös tarkasteltiin siltä kannalta, kuinka se oppilaan ainoana oppimateriaalina toimii, esimerkiksi jos oppilas suorittaa kurssin itsenäisesti tai ei osallistu oppitunnille. Oppilaan motivointi ja ulkoasuseikat huomioitiin myös analyysissä.

Sanoma Pron oppikirja

Sanoma Pron kirja Tekijä, Pitkä matematiikka 11, on jaoteltu kolmeen päälukuun: 1) Logiikan alkeet, 2) Todistusmenetelmiä ja 3) Lukuteoria. Tämä oppikirja-analyysi keskittyy lukuihin 1 ja 2, jotka ovat oleellisimpia todistamisajattelua ja päättelyä ajatellen. Luvut 1 ja 2 on edelleen jaettu alalukuihin seuraavasti:

1. **Logiikan alkeet**

1.1 Lauseen formalisointi

1.2 Lauseen totuusarvot

1.3 Tautologia

Todistusmenetelmiä luvun sijoittaminen ”Logiikan alkeet”-luvun jälkeen on hyvä ratkaisu, sillä logiikka luvussa pohjustetaan päättelyä ja myös todistusmenetelmien perustelussa voidaan siten hyödyntää logiikan päättelysääntöjä. Tällöin oppilaalla on pohja, johon eri todistusmenetelmät on helppo perustaa. Oppikirjojen sisällysluettelot löytyvät tarkemmin liitteestä 4.

Logiikan osuus (luku 1) alkaa selkeästi logiikan perusteiden esittelemisellä: esitetään konnektiivit, lauseet, luonnollinen kieli ja formaali kieli. Konnektiivien esittelyssä tilannetta havainnollistetaan sekä luonnollisen kielen että kuvien avulla, mikä tukee niin kielellisesti kuin visuaalisestikin oppivia opiskelijoita. Alusta alkaen luonnollinen kieli otetaan mukaan ja se kulkee koko ensimmäisen luvun läpi, jolloin opiskelijan on helppo aina palata siihen, jos lauseiden ja konnektiivien ymmärtämisen kanssa on ongelmia. Luku 1.1 keskittyykin paljon lauseiden suomentamiseen ja formalisointiin, mikä vahvistaa oppilaan ymmärryspohjaa sekä matematiikan yhteyttä luonnolliseen kieleen ja arkipäivään. Tähän lauseiden formalisointiin oppilas voi jatkossa vaikean tilanteen tullen palata. Lauseiden suomentamisen ja formalisoinnin avulla oppilas oppii pienten sanojen merkityksen matematiikan kannalta. Suurin osa tehtävistä pohjautuu luonnollisen kielen lauseiden suomentamiseen ja formalisointiin, muutama vaativampi tehtävä on puhtaasti matemaattisten lauseiden formalisointia.

Luku 1.2 esittelee lauseiden totuusarvon tutkimista. Aluksi pysytään selkeyden vuoksi pelkissä totuustauluissa, mutta esimerkit laajentavat yhteyttä luonnolliseen kieleen. Tehtävissä harjoitellaan totuustaulujen laatimista ja tulkitsemista, sekä lauseiden formalisointia ja arkipäivän ongelmien ratkaisua logiikan ja totuustaulujen avulla.

Luku 1.3 esittelee tautologian. Luvun avaintermit ovat tautologia, kontradiktio ja looginen ekvivalenttisuus. Lisäksi esitellään kaksoiskiellon laki, De Morganin lait ja kontraposition laki. Positiivista on, että luonnollinen kieli kulkee mukana niin esimerkeissä kuin tehtävissäkin.

Luku 1.4 käsittelee avointa lausetta ja kvanttoreita. Erityisesti kvanttoreiden käsittely on oleellista ennen todistamiseen siirtymistä, jotta oppilaat ymmärtävät todistamisessa esiintyvien tilanteiden rajat ja mahdollisuudet. On tärkeää ymmärtää mitä joukkoa missäkin tilanteessa tutkitaan, mikä on oletus ja mikä väite sekä mihin suuntaan todistuksessa loogisesti edetään.

Luku 1 on siis kokonaan johdattelua ja pohjustusta luvun 2 todistamistehtäviä varten. Logiikan liittäminen arkipäivään syventää oppilaan ymmärrystä ja motivoi tämän erillisen osa-alueen opettelussa. Logiikan hyödyt ja sovellukset oppilas näkee selkeästi vasta luvussa 2, joten motivointi on irrallisuuden välttämiseksi tarpeellista.

Kirjassa todistamisosuus (luku 2) on edelleen jaettu alalukuihin, joiden otsikot ovat ”Suora todistus”, ”Vastaesimerkki”, ”Epäsuora todistus” ja ”Matemaattinen induktio”. Oppilaan on siis jo otsikoiden perusteella helppo ymmärtää eri todistusmenetelmien eroavaisuus. Alalukujen järjestys on valittu siten että lähdetään liikkeelle oppilaille todennäköisesti tutuimmasta ja loogisesti selkeimmästä suorasta todistuksesta ja siitä edetään vastaesimerkin ja epäsuoran todistuksen kautta matemaattiseen induktioon, joka todennäköisesti ei ole oppilaille ennestään tuttu.

Päälukujen alussa on lyhyt johdanto luvun käsittelemään aiheeseen. Luvun yksi alussa kerrotaan yleisesti, mitä logiikka tutkii ja mainitaan sen antiikin Kreikkaan asti ulottuvasta historiasta. Lisäksi todetaan, että jo aikaisemmilla kursseilla on todistettu erilaisia tuloksia – todistaminen ei siten ole oppilaalle uusi asia. Johdannossa myös selvitetään aksiooman ja lauseen ero, mikä ei välttämättä ole oppilaalle itsestään selvä asia, mutta yleistiedon, ajattelun ja päättelyn validisuuden kannalta tärkeää ymmärtää. Todistamisen todetaan olevan myös oleellinen osa matematiikan perusluonnetta. Kirja ei siis suoraan hyppää todistamiseen vaan hiljalleen johdattaa oppilaan päättelyn kautta todistuksiin.

Jokaisen alaluvun alussa oleva tutkimusosio pohjustaa ko. todistusmenetelmää. Yksin oppilaalle voi olla hankala tarkastella Tutkimus-osion ongelmaa varsinkin luvussa 2, mutta ryhmässä tai opettajan tai avustajan ohjauksella ongelman tarkasteleminen voi olla tuottoisaa. Hyvää on myös, että näihin tutkimusongelmiin yleensä esitetään jonkinlaiset ratkaisut, joten jos oppilas ei ole oppitunnilla mukana, pystyy hän silti ymmärtämään ongelman ratkaisuineen tai hän voi palata siihen tunnin jälkeen tai ylimääräisenä materiaalina, mikäli kirjan esimerkkiä ei tunnilla ole käsitelty. Logiikan perustelut kulkevat luvussa 2 hyvin mukana ja niillä perustellaan hyvin todistusmenetelmien käyttöä.

Esimerkkejä on hyvä lukumäärä, jos ajatellaan opettajan antavan tunnilla muutaman lisäesimerkin. Tämä on kuitenkin jätetty suhteellisen paljon opettajan varaan – ilman lisäesimerkkejä esimerkkejä on hyvälle oppilaalle ehkä riittävä määrä, mutta heikommille oppilaille tarvitsisi vastaesimerkistä ja epäsuorasta todistuksesta kaksi tai kolme esimerkkiä lisää. Täytyy nimittäin muistaa, että todistaminen on monille oppilaille outo ja vieras asia ja voi tuntua aluksi hyvin hankalalta myös lahjakkaimmista oppilaista. Mallioppimiseen kantaa ottamatta useat hyvät esimerkit tukevat oppimista ja auttavat alkuun tehtävissä. Suorasta todistuksesta ja matemaattisesta induktiosta esimerkkejä on riittävä määrä. Luvun 1.3 tehtävissä vaaditaan kaksoiskiellon, de Morganin ja kontrapositio lain käyttöä, joista kirjassa ei kuitenkaan ole riittäviä esimerkkejä. Tämä saattanee johtaa heikompia oppilaita vaikeuksiin tehtävissä, joissa looginen ekvivalenttisuus pyydetään todistamaan ilman totuustauluja. Oppilaille saattaa jäädä epäselväksi, että loogisen ekvivalenttisuuden todistamiseksi ei tarvitse aina tarkastella totuustauluja.

Esimerkit on sidottu teoriaan suhteellisen hyvin: esimerkiksi luvun 2.1 alussa esitetty ongelma on alaluvussa 2.1 ensimmäinen esimerkki. Logiikan sääntöjä käyttäen perustellut suorassa todistuksessa ja epäsuorassa todistuksessa esitetyt lauseiden lyhenteet P, Q ja R sekä niiden selitykset kulkevat sinisellä värillä esimerkkien sivussa, jolloin oppilaan on helpompi hahmottaa logiikan ja todistamisen yhteys sekä liittää kurssin alussa opittu teoriaosuus käytäntöön. Näin kurssin alussa opitut asiat tulevat huomioitua ja oppilaan on logiikan pohjalta helpompi ymmärtää todistusmenetelmiä ja niiden oikeutusta. Sivumarginaaliin on myös punaisella otsikolla eroteltu muun muassa määritelmiä ja aikaisemmasta tuttuja tuloksia kuten esimerkiksi kontraposition laki, muistikaava ja rationaaliluvun määritelmä. Lisäksi marginaalissa on esitelty huomioita, kuten että ”Induktiotodistuksen aloituskohta n_0 voi olla myös negatiivinen kokonaisluku”. Esimerkeissä on selityksiä selvennetty merkitsemällä eri väreillä, esimerkiksi luvun a^2 parittomuutta selvennetään merkitsemällä punaisella seuraavasti $a^2 = 2(2n^2 + 2n) + 1$. Induktioperiaatteen kuvaaminen ja ”oikeuttaminen” portaita putoavan pallomallin avulla esittelee mielestäni suhteellisen hyvin intuitiivisen oikeutuksen induktiotodistukselle. Esimerkeissä otetaan huomioon, että alkuaskeleessa voi esiintyä jokin muukin luku kuin yksi.

Tehtäviä on paljon ja taso vaihteleva, joten lahjakkaammillekin oppilaille riittänee tekemistä ja haastetta luvussa 1 ja 2. Sisällöllisesti todistamisosuuden esimerkit sisältävät eritasoisia algebrallisia ja geometrisia tehtäviä. Mukana on myös epäyhtälöitä ja matemaattisen induktion yhteydessä lukujonoja ja sarjoja. Lisäksi tehtävät on jaettu kahteen helpompaan ja haastavampaan tehtäväsarjaan. Tämä tukee eritasoisia opiskelijoita. Kirja tukee omalta osaltaan ymmärryksen ja päättelyn tärkeyttä suhteessa ”mekaaniseen” tehtävien suorittamiseen, mutta toisaalta opettajan tulee olla oppitunnilla tarkkana esittämiensä esimerkkien ja hyväksyttävien vastausten kanssa, jotta oppilaat todella aidosti ymmärtävät päättelyn oikeellisuuden tärkeyden, eivätkä noudata vain mekaanista suoritusmallia niin logiikassa kuin todistamisessa.

Kaksiosaista YO-koetta ajatellen tehtävät on merkitty eri tavalla riippuen siitä, saako niissä hyödyntää symbolista laskentaa, taulukkolaskentaa tai geometrian ohjelmistoa. Tehtävissä on lisäksi viittauksia esimerkkeihin, joista voi olla apua tehtävän ratkaisussa. Videologolla merkittyihin tehtäviin liittyy opiskelijan digikirjassa ja opettajan digiaineistossa opetusvideo. Erityisesti geometriaohjelmiston avulla ratkaistavat tehtävät on merkitty geometrialogolla. Pedagogiselta kannalta on hyvä, että oppilaat oppivat käyttämään apuvälineitä tehtävien ratkaisemisessa. Toisaalta ilman apuvälineitä ratkaistavat tehtävät kehittävät ajattelua eri tavalla. Kuitenkin huomattavaa on, että tällaiset merkinnät kirjoissa ovat suhteellisen uusia johtuen tekniikan viimeaikaisesta kehityksestä sekä ylioppilaskirjoitusten uudistuksista. (Videoiden sisällön arviointi ei ole tässä opinnäytetyössä mahdollista, sillä digikirjaa/opettajan aineistoa ei ollut tutkimuksen aikana mahdollista saada käyttöön.)

Kirjan takana ovat vastaukset tehtäviin. Mielestäni tämä on hyvä erityisesti todistamistehtävien osalta. Tehtävät voivat tuntua aluksi vierailta ja vaikeilta ja oppilaan on hyvä pystyä tarkistamaan, onko oma ratkaisu oikein. Myös jos tehtävä on heikommalle oppilaalle mahdottoman vaikea ratkaista itse, saattavat he ymmärtää kirjassa esitetyn ratkaisun ja oppia siitä. Kaikki oppilaat eivät kuitenkaan kysy opettajalta ratkaisuja tehtäviinsä, joita he eivät ole osanneet ratkaista ja myös oppitunnilla aika on rajallista. Kaikki opettajat eivät tietenkään ole samaa mieltä siitä, että kirjoissa tulisi olla ratkaisut. Vaarana on, että oppilaat eivät jaksa ajatella itse, vaan kopioivat ratkaisut suoraan kirjan takaa ymmärtämättä ratkaisua. Oppilaalla saattaa myös olla erilainen, mutta oikea ratkaisu tai tehtävä on ratkaisu oikein, mutta laskuvirheen takia vastaus on väärin. Kuitenkin uskoisin, että, jos oppilas huomaa vastauksensa oleva väärä ja hän tutkailee ratkaisuaan, hän oppii enemmän, kuin tyytymällä väärään vastaukseensa ilman tietoa siitä, että se mahdollisesti on väärin. Ilman oikeita ratkaisuja voi helpommin syntyä vääriä käsityksiä opittavasta asiasta.

Kaikki tarpeelliset määritelmät on kirjassa esitetty ja lauseet perusteltu. Tärkeät tulokset ja määritelmät kuvataan sinisissä laatikoissa lihavoiduilla otsikoilla, jolloin ne nousevat selkeästi esille.

Luvun yksi ja kaksi jälkeen oppilaalla on todennäköisesti suhteellisen hyvä yleiskatsaus eri todistamismenetelmistä. Kirja tukee hyvin ymmärryksen syventämistä ja päättelyn kehittämistä, mutta todellinen ymmärryksen taso ja todistamisajattelun kehittyminen riippuu oppilaasta itsestään sekä opettajan kyvystä luoda todistamisajattelua kehittävät olosuhteet. Opettajan tehtävä olisi huomioida esimerkkien monipuolisuutta, yhteyttä logiikkaan ja arkipäivään sekä motivoida oppilaita. Vaikeinta on saada oppilaat irrottautumaan ”rutiineista” ja ”mekaanisesta” tehtävien suorittamisesta. Oppilaiden tulisi opettajan johdolla pystyä oppimaan reflektoimaan oman päättelynsä oikeellisuutta eikä vain tyytyä oikeiden ratkaisuiden tuottamiseen ilman syvällistä ymmärrystä. Logiikka ja kirjan todistusmenetelmät toimivat loppujen lopuksi vain ohjenuorana oppilaalle. Oppilaan todellista päättelytaitojen ja todistamisajattelun kehitystä on vaikea arvioida, sillä rutiininomaisella suorituksella pärjää kokeissa yleensä hyvin. Oppikirjan voidaan todeta noudattavan opetussuunnitelmaa kyseisen kurssin logiikan ja todistamisosuuden osalta.

Otavan oppikirja

Otavan MAA11 kurssille tarkoitettu kirja, Juuri: Lukuteoria ja todistaminen, on puolestaan jaettu neljään päälukuun: 1) Lukuteorian alkeet, 2) Modulolaskentaa, 3) Logiikkaa, 4) Todistaminen. Tämä oppikirja-analyysi keskittyy todistamisajatteluun ja päättelyyn painottuviin lukuihin, jotka ovat luvut 3 ja 4. Nämä luvut on jaettu alalukuihin seuraavasti:

3. Logiikkaa

3.1 Looginen päättely ja konnektiivit

3.1 Totuustaulut

4. Todistaminen

4.1 Väitteen todistaminen oikeaksi tai vääräksi

4.2 Suora ja epäsuora todistus

4.3 Rekursiivinen lukujono ja induktioperiaate

4.4 Induktiotodistus

Logiikka luku on järkevästi sijoitettu ennen varsinaiseen todistamiseen siirtymistä. Kuitenkin huomattavaa on, että varsinaisesti kirja ei luvussa 4 juuri hyödynnä harjoiteltuja logiikan säätöjä ja malleja, jolloin logiikan osuus ja käyttökelpoisuus voi jäädä oppilaalle irralliseksi, ellei opettaja sitä itse ota opetukseen mukaan.

Luku 3 alkaa johdattelevilla esimerkeillä, joiden avulla pikkuhiljaa siirrytään luonnollisen kielen kautta formaaliin kieleen ja konnektiiveihin. Luonnollinen kieli kulkee koko ajan mukana, jolloin oppilas voi palata siihen, jos konnektiivien tai lauseiden ymmärtämisen kanssa on ongelmia. Luvussa keskitytään paljon lauseiden suomentamisen ja formalisoinnin harjoitteluun, jolloin oppilas oppii kiinnittämään huomiota pienten sanojen merkitykseen lauseiden matemaattisen merkityksen kannalta.

Luku 3.2 käsittelee totuustauluja. Tämäkin luku lähtee liikkeelle luonnollisen kielen kautta, josta siirrytään tutkimaan lauseiden totuusarvoja. Näin yhteys logiikan ja luonnollisen kielen välillä pysyy selkeästi esillä. Muutaman esimerkin jälkeen selvitetään kaksoiskiellon laki, de Morganin lait ja kontraposition laki sekä konnektiivien suoritusjärjestys. Lisäksi tutustutaan totuustaulujen avulla tautologian ja ristiriidan käsitteisiin.

Kirjassa todistamisosuus on hieman epäselvästi järjestetty. Luvussa 4.1 selvitetään, että väitteen voi todistaa oikeaksi tai vääräksi ja esitellään todistus vastaesimerkin avulla. Luvussa tulee esiin myös suoran todistuksen käsite, vaikka sitä ei suoranaisesti mainita tai nosteta esille. Tämä voi jatkossa hieman sekoittaa oppilasta, sillä kirjan otsikoiden perusteella suora todistus tulee vasta luvussa 4.2.

Luku 4.3 ”Rekursiivinen lukujono ja induktioperiaate” pohjustaa hyvin luvussa 4.4 esitettävää induktiotodistusta. Induktiotodistuksen periaate on monesti oppilaille vaikea ymmärtää, joten sen kunnollinen pohjustaminen on syvemmän ymmärryksen kannalta tärkeää.

Kokonaisuudessaan kirjan lukujen otsikot kuvaavat suhteellisen hyvin kappaleiden sisältöä. Luvussa 4 myös edetään tutummasta asiasta tuntemattomampaan, mikä on todennäköisesti oppilaalle helpompaa päättelyn ja todistamisajattelun kehittymisen kannalta.

Kirjassa päälukujen alussa on lyhyt esittely kyseisen luvun aiheesta ja sisällöstä. Tämän jälkeen on muutama ennakkotehtävä, jotka oppilaan on mahdollista ratkaista aiempien tietojensa avulla. Nämä ovat oppilaalle hyvä johdanto aiheeseen. Alaluvut alkavat johdannolla ja digijohdannolla. Johdantojen esimerkit ovat hyvin valittuja ja uuteen asiaan tutustutaan selittävän esimerkin kautta. Johdannon jälkeen esitetään johdannossa esiin tulleet keskeiset asiat lauseissa tai määritelmissä.

Esimerkkien lukumäärä on mielestäni riittävä, jos opettaja esittää näiden lisäksi tunnilla vielä muutaman lisäesimerkin. Esimerkeissä hyödynnetään hyvin myös aikaisemmin kurssilla luvuissa 1 ja 2 esitettyjä asioita. Myös geometriaan pohjautuvia todistuksia löytyy ja esimerkit ovat monipuolisia. Johdanto on aina suoraan sidoksissa luvussa esitettävään teoriaan.

Induktioperiaatetta oikeutetaan intuitiivisesti vertaamalla sitä dominonappuloiden kaatumiseen. Oppilaan on helppo ymmärtää, että kaikki nappulat kaatuvat, jos ensimmäinen nappula kaatuu ja dominonappulan kaatumisesta seuraa aina seuraavan nappulan kaatuminen.

Oppilaalle on harjoittelun kannalta selkeämpää, että tehtävissä on erikseen mainittu, jos se on tarkoitettu ratkaistavaksi ilman teknisiä apuvälineitä tai sopivalla ohjelmalla. Tällöin oppilas pystyy harjoittamaan ajatteluaan eri tavalla ja myös valmistautuu kaksiosaiseen yo-kokeeseen. Jos tehtävässä ei ole erikseen mainittu, niin tietokoneen tai muun laitteen käyttö tehtävän ratkaisussa on sallittua. Toisaalta on huomattava, että todistamistehtävissä ja todistamisajattelua kehittävissä tehtävissä teknisistä apuvälineistä harvemmin on apua itse päättelyprosessissa. Joihinkin tehtäviin on merkitty vihreälle pohjalle kysymysmerkki, mikä tarkoittaa, että ratkaisuun on olemassa kirjan takana vinkki. Vinkit ovat hyviä ja niillä oppilas voi helpommin päästä hankalammankin tehtävän ratkaisun jäljille.

Kirjassa on lopussa lyhyet kertausosiot, joissa on lyhyesti teoriaosuus ja muutama aiheeseen liittyvä tehtävä. Nämä ovat hyviä oppilaan kokeeseen valmistautumisen ja asioiden kertaamisen kannalta. Näin oppilas voi myös testata, onko hän oppinut ja ymmärtänyt kurssin tärkeimmät sisällöt. Näiden lisäksi on vielä koko kirjasta kokoavia tehtäviä, joista osa on ratkaistava apuvälineillä ja osa ilman. Sinisellä logolla on merkitty aiheeseen liittyviä appletteja tai videoita, jotka löytyvät Otavan verkkosivuilta. Videot ovat lyhyitä ja yksinkertaisia ja suhteellisen selkeitä. Toisaalta videoihin olisi ehkä kaivattu sanallista selitystä, mutta toisaalta videot toimivat yksilöllisenä opetusmateriaalina myös oppitunnilla, vaikka oppilaalla ei olisikaan mukanaan omia kuulokkeita. Osa appleteista on todella hyviä, välillä taas ohje ja appletin tarkoitus jää hieman epäselväksi. Parantamalla ohjeistusta ja liittämällä applettiin syventäviä selvityksiä ja huomioita, voisi kaikista appleteista saada erittäin hyviä.

Tehtävät on jaoteltu ydintehtäviin, vahvistaviin tehtäviin ja syventäviin tehtäviin. Kuten nimikin kertoo, ydintehtävät keskittyvät kyseisen kappaleen keskeisiin uusiin asioihin. Vahvistavat tehtävät ovat monipuolisempia sekä luovat pohjaa tuleville tulevien asioiden ymmärtämiselle ja vahvistavat oppilaan osaamista ja ymmärrystä. Syventävät tehtävät ovat yleensä soveltavampia ja haastavampia ja näin myös varmistavat aiheen perusteellisen hallinnan. Kaikkiin tehtäviin löytyy kirjan takaa vastaukset. Kertaus tehtäviin ja kokoaviin tehtäviin löytyy myös ratkaisut Otavan verkkosivuilta.

Opettajan tulisi korostaa eri todistamistapojen eroja, sillä kirja ei tätä selkeästi tee. Myöskin lukujen pääkohtien parempi esiintuominen ja mahdolliset logiikan perustelut todistamismenetelmille auttaisivat varmasti monia oppilaita. Kirja tukee hyvin matematiikan yhteyttä arkipäivään ja opettajan pitäisi pysyä tällä linjalla pitääkseen oppilaat kiinnostuneena ja motivoituneina. Opettajan tulisi myös tarjota oppilaille monipuolisia esimerkkejä. Vaikein tehtävä opettajalla on johdattaa oppilaat oikeasti reflektoimaan ja päättelemään ja pois tehtävien mekaanisesta suorittamisesta. Kuten jo aikaisemmin todettu, kirja on vain ohjenuora oppilaalle. Kurssikoe voi mitata oppilaan osaamista jollain tasolla, mutta todellista luovan päättelytaidon kehittymistä on hankalaa mitata. Yleisesti ottaen oppikirja on logiikan ja todistamisen alueella opetussuunnitelman mukainen.

6.2 Oppikirjojen vertailua

Molemmissa kirjoissa logiikka on järkevästi sijoitettu ennen varsinaista todistamista ja sen harjoittelua. Kuitenkin Sanoma Pro:n kirjassa käytetään kirjassa aikaisemmin esiintyneessä logiikassa opittuja asioita eri todistamistapojen perustelussa huomattavasti paremmin. Tällöin oppilaalle syntyy käsitys logiikan hyödyllisyydestä ja myös todistusmenetelmät tulevat paremmin perustelluiksi ja siten todennäköisemmin syvällisemmin ymmärretyiksi. Otavan kirjassa logiikka jää helposti irralliseksi osa-alueeksi, jonka merkitykseen ei sen syvemmin paneuduta, vaikka luvussa 4 tähän olisi mahdollisuus. Erityisesti epäsuoran todistuksen perustelu voi jäädä oppilaalle jokseenkin epäselväksi Otavan kirjassa, kun logiikkaa ei käytetä apuna. Logiikan perustelut todistamiskeinon oikeuttamiseen Sanoma Pron kirjassa selkeyttää asioita huomattavasti. Otavan kirjassa todistamisosuuden sijoittaminen kirjan loppuun (Liite 4) mahdollistaa aikaisemmin kurssilla opittujen asioiden ja lukuteorian hyödyntämisen todistamistehtävissä, kun taas Sanoma Pron kirjassa lukuteoria on sijoitettu kirjan loppuosaan todistamismenetelmien jälkeen.

Sanoma Pron kirja lähestyy todistamista selkeästi ja ymmärrettävästi. Eri todistamismenetelmät on jaettu eri lukuihin, jolloin oppilaan on helppo erottaa ne toisistaan ja harjoitella yhtä todistamistapaa kerrallaan edeten tutuimmasta ehkä oppilaalle tuntemattomampaan. Otavan kirjassa taas jako eri todistamismenetelmiin ei ole niin selkeä lukujen kesken. Koska todistaminen voi olla oppilaalle vaikeaa, voi hänen olla aluksi hankalaa selvittää, mitä todistusmenetelmää hänen tulisi milloinkin hyödyntää. Sanoma Pron kirjasta harjoittelevalle voi taas olla vaikeampaa tunnistaa, mitä todistamismenetelmää pitää käyttää, jos sitä ei ole erikseen kerrottu. Kuitenkin väittäisin, että näin harjoitusvaiheessa Sanoma Pron kirja lähestyy aihetta selkeämmin ja luo oppilaalle selkeämmän kokonaiskuvan eri todistamismenetelmistä.

Otavan kirjan johdanto-osiot vastaavat suurin piirtein Sanoma Pron tutkimusosioita alalukujen alussa. Otavan kirjassa johdantoesimerkkeihin esitetään aina selkeät ratkaisut, kun Sanoma Pron kirjassa asia jää välillä pelkästään oppilaan oman tutkimuksen varaan. Tällöin mahdollisia virheratkaisuja ja ajattelua voi syntyä helpommin. Toisaalta, kun ratkaisua ei suoraan ole esitetty, oppilaan on pakko itse ilman apuja tarkastella ongelmaa. Haittapuolena voi olla, että jos ongelma (erityisesti heikoille oppilaille) on liian vaikea, oppilas ei edes yritä ratkaista sitä tai luovuttaa kesken.

Otavan kirjassa on monesti johdattelevampi lähestymistapa uuteen asiaan ja sitä lähestytään ”pikkuhiljaa”, kun taas Sanoma Pron kirjassa mennään lyhyen johdannon jälkeen usein heti asian ytimeen.

Sanoma Pron kirjassa on enemmän värejä ja kuvia, mikä tekee sen ulkoasullisesti oppilaalle helpommaksi seurata. Myös erilaiset fontit ja tekstin asettelu luovat selkeämmän kokonaisuuden kuin Otavan kirjassa. Kuvia on hyödynnetty hyvin Sanoma Pron kirjassa, esimerkiksi konnektiivien esittelyn yhteydessä kuvat tukevat syvempää ymmärtämistä ja oppimista. Todistamisen yhteydessä oletus, väite ja todistus on lihavoitu ja selkeästi erotettu muusta tekstistä. Otavan kirjassa oletus, väite ja todistus on kursivoitu ja todistus on omalla rivillään, mutta ne eivät niin selkeästi erotu muun tekstin joukosta.

Oppilaan vasta opetellessa todistamista näiden vaiheiden selkeä erottaminen olisi tärkeää. Sanoma Pron kirjassa on myös käytetty enemmän ulkoasullisia tehokeinoja tuomaan selkeyttä: värejä on enemmän, ydinasiat on esitetty sinipohjaisissa laatikoissa, jotka erottuvat heti, sivumarginaalissa on eri värillä ja fontilla olevia huomioita, muistutuksia ja lisäyksiä, mitkä helpottavat kirjan lukemista ja oppimista. Erityisen hyvää on suoran ja käänteisen todistuksen yhteydessä joka esimerkin kohdalla kulkevat logiikan perustelut.

Logiikkaa lähestytään molemmissa kirjoissa hyvin luonnollisen kielen kautta. Erityisesti Otavan kirjassa luvuissa 3.1 ja 3.2 lähestytään uutta asiaa luonnollisen kielen kautta.

Huomattavaa on, että Otavan kirjassa kvanttorimerkintöjä ei ole käsitelty, kun taas Sanoma Pron kirjassa ne tulevat esille. Kvanttorimerkintä eivät aivan suoranaisesti liity todistamiseen ja todistamisajatteluun, mutta monesti matemaattiset väitteet, on esitetty kvanttoreiden avulla luonnollisen kielen ilmaisujen sijaan. Kvanttoreihin tutustuminen lukiossa voi auttaa oppilasta jatko-opinnoissa. Kvanttoreiden opettelu myös ohjaa oppilaan ajattelua keskittymään ja ymmärtämään pienten sanojen ja merkkien suurempaa merkitystä. Koko väite saattaa muuttua aivan toiseksi yhden kvanttorin muuttuessa.

Otavan kirjassa luvun neljä esimerkkitodistuksissa ei ole perässä m.o.t., q.e.d. tai pientä neliömerkintää vaan mainitaan sanallisesti ”Tämä todistaa väitteen” tai ”Väite on näin todistettu”. Mielestäni olisi tärkeää opettaa jo kirjan kaikissa omissa esimerkeissä, miten todistuksen päättyminen merkitään matemaattisesti korrektilla tavalla.

Otavan kirjassa on luvussa 4.3 hyvin käytetty rekursiivista lukujonoa alustuksena induktioperiaatteeseen. Tämän pohjalta oppilaan on varmasti helpompi ymmärtää induktiotodistuksen periaate luvussa 4.4. Toisaalta induktiotodistuksesta on vähemmän esimerkkejä kuin Sanoma Pron kirjassa. Koska induktiotodistus on oppilaalle aivan uusi ja mahdollisesti vaikea asia, jää opettajalle tällöin enemmän vastuuta monipuolisista esimerkeistä.

Sanoma Pron kirjassa on päälukujen alussa laajempi johdanto ja esimerkiksi todistamisen historiaa verrattuna Otavan kirjaan. Tällä tavoin kirja motivoi oppilasta jokseenkin paremmin aiheeseen ja saa oppilaan kiinnostuksen heräämään.

Taulukkoon 4 on koottu keskeisimmät kirja-analyysissä esille tulleet piirteet molemmista oppikirjoista. Plusmerkillä (+) on merkittu oppikirjan hyviä puolia ja miinusmerkillä (-) asioita, joita oppikirjassa voisi parantaa.

Taulukko 4. *MAA11 Lukuteoria ja todistaminen kurssille tarkoitettujen Otavan ja Sanoma Pron kirjojen analyysin keskeisimmät tulokset.*

	Otavan oppikirja Juuri: Lukuteoria ja todistaminen	**Sanoma Pron kirja Tekijä, Pitkä matematiikka 11**
Todistamisen pedagoginen lähestyminen	+ lähestyminen arkielämän ja yleisen kielen kautta	+ lähestyminen arkielämän ja kielen kautta + logiikka apuna
Todistamisen oppiminen ja ajattelun kehittäminen	+ monipuoliset tehtävät - oppikirja ei kunnolla tue yksinopiskelua	+ monipuoliset tehtävät - oppikirja voisi vielä paremmin tukea yksinopiskelua
Logiikka todistamisessa	+ logiikka sijoitettu ennen todistamista - logiikka jää erilliseksi kokonaisuudeksi, yhteys todistamiseen ei selvä	+ logiikka sijoitettu ennen todistamista + logiikkaa hyödynnetään todistamisen opettamisessa ja todistustapojen perustelussa
Opetussuunnitema	+ täyttää vaatimukset	+ täyttää vaatimukset
Oppilaan motivointi	+ johdattelevat tehtävät ja esimerkit + johdanto tehtäviin ratkaisut + luonnollinen kieli mukana esimerkeissä ja tehtävissä	+ selkeät kokonaisuudet + selkeä ja värikäs ulkoasu + laajemmat johdannot + luonnollinen kieli mukana esimerkeissä ja tehtävissä + aiheeseen johdattelevat tehtävät ja esimerkit - johdantotehtävien ratkaisu oppilaan omalla vastuulla
Ulkoasu	- tärkeitä asioita on välillä hankalaa erottaa tekstin joukosta	+ värikäs ja selkeä + lihavointia, erilaisia fontteja ja värejä käytetty tehokeinoina

Molemmat kirjat täyttävät opetussuunnitelman asettamat tavoitteet todistamisen osalta; sekä Otavan että Sanoma Pron kirja perehdyttävät oppilaan logiikan alkeisiin ja molemmissa tutustutaan todistamisen periaatteisiin sekä harjoitellaan todistamista. Opetussuunnitelman tavoitteiden lisäksi myös keskeiset sisällöt täyttyvät: kumpikin kirja esittelee konnektiivit ja totuusarvot, geometrinen todistaminen tulee esille sekä keskeiset todistamismenetelmät (suora-, käänteinen-, ristiriita- ja induktiotodistus) käydään läpi.

Pedagoginen lähestymistapa on suhteellisen samanlainen: todistamista lähestytään arkielämän ja kielen kautta johdattelevien tehtävien ja esimerkkien avulla. Sanoma Pron kirja ottaa lisäksi logiikan avuksi. Sanoma Pron kirjassa on myös keskitytty enemmän oppilaan motivoimiseen (niin sisällöllisesti kuin ulkoasullisesti) ja selkeiden kokonaisuuksien luomiseen.

Eritasoiset tehtävät, arkipäivän yhteydet ja yleiseen kieleen pohjautuvat lähestymistavat tukevat todistamisen oppimista ja ajattelun kehittymistä. Toisaalta riippunee paljon opettajasta ja miten hän ohjaa oppilaiden huomiota, oppivatko oppilaat vain todistamaan vai kehittyykö heidän todistamisajattelunsa.

7. Pohdinta

Tutkimuksen suunnittelu lähti liikkeelle uudesta MAA11 kurssista. Tämän pohjalta päädyttiin pohtimaan, mitä se matematiikan opetuksessa tarkoittaa, mistä päädyttiinkin tutkimuskysymyksiin. Tutkimuskysymyksiin haettiin vastauksia kyselytutkimuksen avulla, jonka pohjalta saatiin hyvin tietoa kvalitatiivisesta aiheesta, joskin tutkimuksen otos jäi odotettua paljon pienemmäksi. Tutkimuksen kyselylomakkeen ja sen kysymyksien todettiin antavan riittävän pohjan, jotta kyselyn vastausten perusteella voitiin vastata suurimpaan osaan tutkimuskysymyksistä suhteellisen luotettavasti. Kirja-analyysiin päädyttiin samoista lähtökohdista: tukevatko nykyiset MAA11 kurssille suunnatut oppikirjat todistamisen ja todistamisajattelun oppimista sekä millä tavalla.

Tulosten perusteella opettajilla ja opiskelijoilla on ainakin Suomessa suhteellisen hyvät käsitykset todistamisesta. Osalle kuitenkin todistamisajattelu ja sen erot todistamisesta ovat hankalia hahmottaa. Jotta todistamisen oppiminen olisi oppilaille helpompaa, voisi tätä käsitettä mahdollisesti painottaa enemmän opettajankoulutuksessa, sillä todistamisajattelun opettamisen voi aloittaa jo alaluokilla, vaikka itse todistaminen olisikin oppilaille vielä taitotasollisesti mahdotonta. Todistamisajattelun pohja rakentuu siis jo alaluokilta ja näin siirtyminen formaaliin päättelyyn on oppilaille myöhemmin helpompaa [Gary Martin, 1989; Malinen 2004, s. 108-109]. Oppilaat oppisivat deduktiivisen päättelyn ja perustelujen merkityksen matematiikassa paremmin sekä voisivat hyödyntää näitä taitoja myös arkielämässä. Myöskin oppilaan ajattelun kehittymistä ilmenevästä, symboliseen ja siitä formaaliin ajatteluun [Tall 2002] todennäköisesti helpottuisi. Oppilaiden taitotason huomioivia esimerkkejä ja harjoituksia kyllä löytyy [Annen-berg foundation 2017]. Jos todistamisajattelua ei ole ollenkaan aikaisemmin harjoiteltu, voi se olla aikamoinen haaste MAA11 kurssilla sekä oppilaalle että opettajalle. Kyselytutkimuksen perusteella yläasteella ei välttämättä tarvitsekaan oppilaiden vielä ymmärtää tai osata matemaattisia todistuksia, mutta jo lukiolaisen katsottaisiin oleva kypsä todistamisen vaatimaan formaaliin ajatteluun.

Opettajankoulutus on avainasemassa oppilaiden oppimiseen. Kyselytutkimuksen perusteella tulevat opettajat osaavat kyllä todistaa, mutta huomiota pitäisi mahdollisesti kiinnittää enemmän todistamisen ja todistamisajattelun opettamisen pedagogisiin lähtökohtiin ja kysymyksiin.

Kirjallisuuden perusteella todistamista ja todistamisajattelua kannattaa lähestyä luonnollisen kielen sekä logiikan kautta [Cheng et al. 1986; Epp 2003]. Myös kyselytutkimuksen perusteella logiikka on tärkeä osa ja apuväline todistamisen opettelussa. Myös uudet Otavan ja Sanoma Pron oppikirjat MAA11 kurssille lähtevät liikkeelle luonnollisen kielen kautta. Erityisesti Sanoma Pron kirjassa käytetään logiikkaa todistamisen oppimisen tukena ja apuvälineenä.

Kirjallisuuskatsauksen perusteella mahdollisesti kyseenalaistaisin Charlesin ja Robertsin (2009) käsityksen todistamisen oppimisesta. Vaikka heidän neuvonsa saattanevat jossain määrin toimiakin, niin heidän käsityksensä perustuu mallioppimiseen eikä varsinaiseen deduktiivisten päättelytaitojen harjoittamiseen. Kun todistamisajattelun taidot ovat hallinnassa, on siitä huomattavasti helpompi siirtyä todistamisen harjoitteluun.

Kyselytutkimuksen suurimpana rajoitteena oli sen huomattavasti odotettua pienemmäksi jäänyt otos. Vaikka kysely lähetettiin suurelle joukolle, niin kyselyyn vastasi vain 10 % sen saajista. Lukumäärällisesti 5 opiskelijaa ja 13 opettajaa eivät tuo täysin luottavaa aineistoa. Mahdollista on myös, että kyselyyn vastasivat vain henkilöt, joita asia aidosti kiinnosti. Tällöin otos olisi valikoitunut asiasta enemmän tietävien keskuudesta. Myöskin mahdollisesti vastaajien motivaatio ja käytettävissä oleva aika on voinut vaikuttaa tuloksiin. Pienen otoksen takia osa oleellisista asioista on voinut jäädä piileviksi tai olla kokonaan tulematta esiin. Myös korrelaatiot taustatietojen kanssa sekä opettajien ja opiskelijoiden vastausten piirteiden erot ovat voineet jäädä piiloon pienestä otoksesta johtuen.

Mahdolliset jatkotutkimukset voisivat ottaa huomioon vastaajajoukon rajoitteet. Isompi ja laajempi otos voisi selvittää tarkemmin nyt saatuja tuloksia sekä vastata kysymyksiin, onko taustatiedoilla merkitystä ja onko opettajien ja opiskelijoiden käsityksissä eroja. Myös muita kaupunkeja ja yliopistoja voisi ottaa mukaan tutkimukseen. Lisäksi aiheellista voisi olla keskittyä matematiikan opettajaopiskelijoiden koulutukseen: millä tavalla todistamisen ja todistamisajattelun pedagogisen lähestymistavan tarkastelun voisi parhaiten tuoda mukaan opettajankoulutukseen ja yliopistojen matematiikan opetukseen varsinkin MAA11 kurssia ja sen pohjustusta ajatellen.

8. Yhteenveto

Todistaminen on osa matematiikan luonnetta ja sen olemuksen kulmakivi. Todistamista opetetaan myös yleisesti loogisen päättelykyvyn sekä kriittisen ajattelua kehittämisen vuoksi.

Ajatusmaailma, jonka mukaan oppilaat oppivat todistamaan seuraamalla, jäljittelemällä ja lukemalla hyviä todistuksia on jokseenkin vanhentunut. Toki näinkin voi oppia todistamaan – oppiihan ihminen melkein mitä vain ilman ohjausta kokeilemalla uudelleen ja uudelleen - mutta todellisen ymmärryksen, päättelyn ja todistamisajattelun kehittämiseen on olemassa parempiakin tapoja. Tässä opettajan rooli ja osaaminen korostuu. Opettajan tulisikin pyrkiä mekaanisen todistamisen sijaan ohjaamaan oppilaita näkemään yhteyksiä matematiikan ja logiikan välillä sekä selkeyttää todistamisen oppilaalle monimutkaisena ja hankalana näyttäytyvää maailmaa. Kyselytutkimuksen mukaan, juuri todistamisen vaatima uusi ajattelutapa sekä asenteet todistamista kohtaan ovat suurimpia esteitä todistamisen oppimiselle. Myös juuri siksi olisi tärkeää aloittaa todistamisajattelun ja päättelyn harjoittaminen jo alakoulussa oikeilla metodeilla – liian useinkin oppilailla on käsitys, että hyvin valitut esimerkit toimivat todistuksena ja todistukset ovat matematiikan maailmassa turhia. Tällainen näkemys matematiikasta on vastoin matematiikan perusluonnetta. Lisäksi opettajankoulutuksessa tulisi kiinnittää enemmän huomiota valmistuvien opettajien osaamiseen ja tietotaitoon todistamisen opettamisesta, joskin yliopistokoulutus näyttäisi ainakin suoritetun kyselytutkimuksen perusteella Suomessa antavan riittävät valmiudet todistamisen opettamiselle. Kuitenkin kyselytutkimuksen perusteella opettajaopiskelijoiden pedagogiset käsitykset todistamisen ja todistamisajattelun opettamisesta eivät ole aivan selkeitä, joten yliopistoissa voisi mahdollisesti miettiä, olisiko aiheellista lisätä tai muuttaa nykyisiä matematiikan kursseja paremmin opettajuutta tukeviksi. Myös alakoulun opettajia tulisi aktiivisesti opastaa, kuinka päättelytaidot voi ottaa osaksi matematiikan opetusta, sillä todistamisajattelun opettamisen voi aloittaa jo alakoulusta oppilaiden taito- ja ymmärrystason huomioiden. Tällöin varsinaiseen todistamiseen siirtyminen yläkoulussa ja lukiossa olisi oppilaille mahdollisesti helpompaa. Lisäksi olisi tärkeää, että kouluissa ihan kaikilla luokka-asteilla vallitsisi ymmärrys matematiikasta tieteenä ja opettajilla olisi selkeä käsitys matematiikan epistemologiasta. Näin matematiikan perusluonne olisi opetuksessa alussa asti mukana. Oppikirja-analyysin perusteella voidaan todeta, että ainakin Otavan ja Sanoma Pron MAA11 Lukuteoria ja todistaminen kurssille tarkoitetut oppikirjat tukevat todistamisen opettamista – mutta käytännössä todistamisajattelun opettaminen jäänee paljon opettajan ohjauksen sekä itse oppilaan oman kiinnostuksen ja innostuksen varaan.

Ehkä tärkeintä oppilaiden todistamisajattelun kehittymisen kannalta olisi kuitenkin miettiä, miten valjastaa matemaattiset todistukset parhaalla tavalla hyödyllisiksi opetustyökaluiksi kaikilla kouluasteilla. Parhaimmillaan hyvä todistus tuo oppilaille lisää ymmärrystä aiheesta ja kehittää ajattelun taitoja.

9. Loppupäätelmät

Luvussa 4 esitetyn kyselytutkimuksen otos jäi pieneksi. Lisäksi kyselyyn vastaaminen oli vapaaehtoista, joten on mahdollista, että kyselyyn vastanneet ovat olleet tavallista enemmän kiinnostuneita kyselyn aihepiiristä. Tämän vuoksi jatkotutkimuksissa voisi mahdollisesti kerätä isomman otoksen. Opettajia ja opiskelijoita voisi haalia tutkimukseen muualtakin kuin Tampereen ja Pirkanmaan alueelta ja tarkastella onko eri yliopistojen tai paikkakuntien välillä eroja. Myös mahdollisesti tässä tutkimuksessa piiloon jääneet erot liittyen muun muassa opetuskokemukseen ja opintopistemäärään tai opettajan opetustehtävään (yläkoulu tai lukio) voisi näin tulla selkeämmin esille, jos eroja on siis havaittavissa.

Tutkimuksen luotettavuutta on pyritty parantamaan huolellisella aineiston keruun ja analyysin kuvaksella. Lisäksi tulosten käsittelyn yhteydessä on pyritty esittämään autenttisia lainauksia vastaajilta tutkijan tekemien tulkintojen tueksi.

Viiteluettelo

Annenberg foundation 2017. Teacher professional development and classroom resources across the curriculum. Viitattu 20.6.2017. Saatavuus: https://learner.org/courses/teachingmath/grades3_5/session_04/index.html.

Anttila, P. 2014. Tutkimisen taito ja tiedon hankinta. Metodix. Viitattu 4.7.2018. Saatavuus: https://metodix.fi/2014/05/17/anttila-pirkko-tutkimisen-taito-ja-tiedon-hankinta/#top.

Barnard, T., et al. 1996.Teaching proof. Mathematics teaching 155, 6-39.

Barnard, T. & Tall, D. 1997. Cognitive Units, Connections and Mathematical Proof. Proceedings of PME. 21, 2, s. 41-48.

Brook, A. & Stainton, R. J. 2001. Knowledge and mind. The MIT Press, Cambridge Mass., 29.

Charles, E. & Roberts, Jr. 2009. Textbooks in Mathematics: Introduction to Mathematical Proofs. CRC Press. 425.

Cheng, P., Holyok, K., Nisbett, R. & Oliver, L. 1986. Pragmatic vs. syntactic approaches to training deductive reasoning. Cognitive Psychology. 18, s. 293-328.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M. & Pitta-Pantazi, D. 2004. Proofs through exploration in Dynamic Geometry Environments. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 2, s. 215-222.

Deer, G. 1969. The Effects of Teaching an Explicit Unit in Logic on Students' Ability to Prove Theorems in Geometry. Tohtorin väitöskirja. Florida State University.

Epp, S. 2003. The Role of Logic in Teaching Proof. The mathematical Assosiation of America. Joulukuu 2003, 110.

Gila, H. 2000. Proof, Explanation and Exploration: an Overview. Educational Studies in Mathematics 44, 5-23.

Gary Martin, W. 1989. Proof Frames of Preservice Elementary Teachers. Journal for Research in Mathematics Education. 20, 1, s. 41-51.

Healy, L. & Hoyle, C. 1999. Students' views of proof. Mathematics in school, May, 19-21.

Heiskanen, P., Kaakkinen, P., Lehtonen, J., Leikas, M. & Tahvanainen, J. 2017. Tekijä, Pitkä matematiikka 11, Lukuteoria ja todistaminen. Sanoma Pro Oy. 154.

Hella, L. Haastattelu 17.4.2018. Tampereen yliopisto.

Hähkiöniemi, M., Juhala, S., Juutinen, P., Laitinen, A., Raittila, T. & Tikka, T. 2017. Juuri, Lukuteoria ja todistaminen, Otava. 138.

Jones, K. 2000. The student experience of mathematical proof at university level. Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. 31, 1, s. 53 – 60.

Loewenberg Ball, D., Hoyles, C., Jahnke, H. & Movshovitz-Hadar, N. 2002. The Teaching of Proof. ICM. 3, s. 907-920.

Malinen, P. 2004. Oppilaiden kehittyminen todistamisajatteluun. Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki Instituutti, Koulutuksen tutkimuslaitos. s. 100-110.

Opetushallitus. 2015. Lukion opetussuunnitelman perusteet.

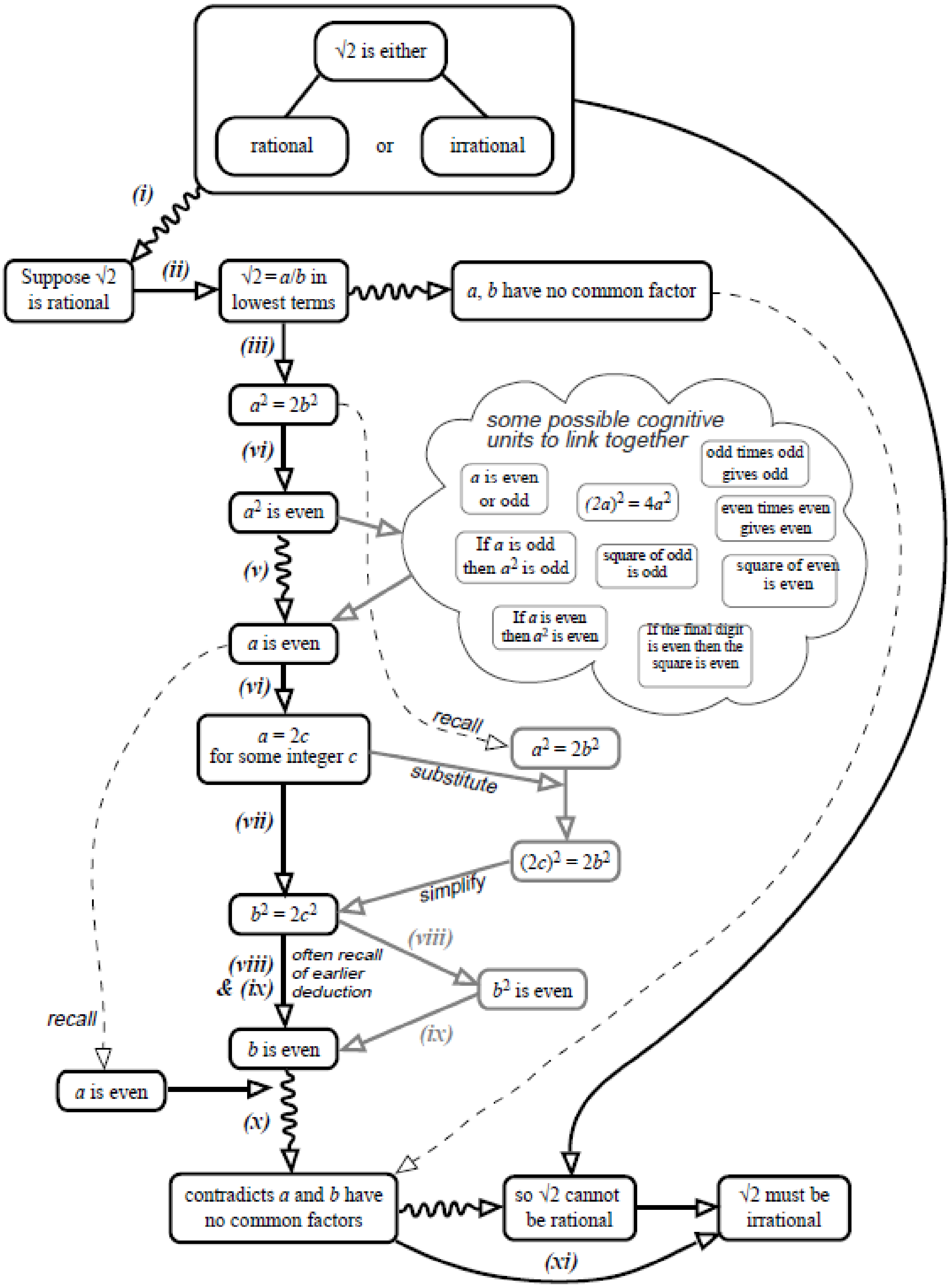
Rossi, R. 2006. Theorems, Corollaries, Lemmas, and Methods of Proof. Wiley-Interscience. 318.

Saarimäki, M. 2008. Reaalifunktion analyysiä. Jyväskylän yliopisto. Viitattu 24.4.2018. Saatavuus: http://www.math.jyu.fi/matpo/kirja/rfa/index-15.html.

Schoenfeld, A. 1994. Mathematical thinking and Problem solving. University of California. Lawrence Elbaum Associates, Publishers. 339.

Tall, D. 2002. Differing Modes of Proof and Belief in Mathematics. Mathematics Education Research Centre, University of Warwick, UK. Viitattu 21.3.2017. Saatavuus: http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdf.

Liite 1: Kognitiiviset yksiköt ja niiden väliset yhteydet $\sqrt{2}$:n irrationaalisuuden todistamisessa [Barnard & Tall 1997, s. 7].



Liite 2: Kyselylomake opettajille

Kyselylomake matematiikan opettajille
Kyselyn tarkoituksena on tutkia opettajaopiskelijoiden ja opettajien käsityksiä todistamisesta ja todistamisajattelusta. Samalla tutkaillaan valmistuvien opettajien valmiutta opettaa MAA11 kurssia ”Lukuteoria ja todistaminen”. Kysely kuuluu osaksi opinnäytetyön toteuttamista ja hyödynnetään gradun aineistona. Kysely suoritetaan anonyymisti.

Lisätietoja kyselystä tarvittaessa: Iida Kyyrönen, kyyronen.iida.s@student.uta.fi

Ympyröi kysymyksissä 1-3 parhaiten sopiva vaihtoehto.

1. Olen toiminut opettajana
a. 0-6 kk
b. 6-12 kk
c. 1-3 vuotta
d. 3-10 vuotta
e. yli 10 vuotta

2. Opetan
a. yläkoulua
b. lukiota

3. Uuden opetussuunnitelman mukainen MAA11 kurssi Lukuteoria ja todistaminen on minulle tuttu.
a. täysin samaa mieltä
b. jokseenkin samaa mieltä
c. jokseenkin eri mieltä
d. täysin eri mieltä

Vastaa kysymyksiin 4-12 oman mielipiteesi/käsityksesi mukaan.

4. Mitä todistaminen mielestäsi tarkoittaa?

5. Mitä todistamisajattelu mielestäsi tarkoittaa?

6. Miksi mielestäsi todistamista opetetaan?

7. Miten logiikka liittyy todistamiseen?

8. Miten opettaisit/opetat todistamista ja todistamisajattelua?

9. Mitkä ovat mielestäsi oppilaiden suurimmat ongelmat todistamista opeteltaessa?

10. Antoiko koulutuksesi mielestäsi riittävät eväät todistamisajattelun ja todistamisen opettamiseen? Perustele.

Valitse parhaiten sopiva vaihtoehto kysymyksissä 13-15.

11. Osaan mielestäni laatia matemaattisen todistuksen opettajan ammatin vaatimalla tasolla.
    a. täysin samaa mieltä
    b. jokseenkin samaa mieltä
    c. jokseenkin eri mieltä
    d. täysin eri mieltä
    e. en osaa sanoa

12. Hyvin valittu esimerkki/esimerkit todistamisen sijaan riittävät yläkoulussa perustelemaan matemaattisen tuloksen.
    a. täysin samaa mieltä
    b. jokseenkin samaa mieltä
    c. jokseenkin eri mieltä
    d. täysin eri mieltä
    e. en osaa sanoa

13. Hyvin valittu esimerkki/esimerkit todistamisen sijaan riittävät lukiossa perustelemaan matemaattisen tuloksen.
    a. täysin samaa mieltä
    b. jokseenkin samaa mieltä
    c. jokseenkin eri mieltä
    d. täysin eri mieltä
    e. en osaa sanoa

Liite 3: Kyselylomake opiskelijoille

Kyselylomake matematiikan opettajaopiskelijoille
Kyselyn tarkoituksena on tutkia opettajaopiskelijoiden ja opettajien käsityksiä todistamisesta ja todistamisajattelusta. Samalla tutkaillaan valmistuvien opettajien valmiutta opettaa MAA11-kurssia ”Lukuteoria ja todistaminen”. Kysely kuuluu osaksi opinnäytetyön toteuttamista ja vastauksia hyödynnetään gradun aineistona. Kysely suoritetaan anonyymisti.

Lisätietoja kyselystä tarvittaessa: Iida Kyyrönen, kyyronen.iida.s@student.uta.fi

Ympyröi kysymyksissä 1-5 parhaiten sopiva vaihtoehto.

1. Opiskeluvuosi
a. 1
b. 2
c. 3
d. 4
e. 5
f. >5

2. Suoritettujen matematiikan opintojen määrä (opintopisteinä)
a. 0-20 op
b. 20-50 op
c. 50-100 op
d. 100-150 op
e. 150-200 op
f. yli 200 op

3. Opetuskokemusta minulla on
a. 0-20 h
b. 20-40 h
c. 1– 4 vko
d. 1-3 kk
e. 3-6 kk
f. yli 6 kk

4. Uuden opetussuunnitelman mukainen MAA11 kurssi Lukuteoria ja todistaminen on minulle tuttu.
a. samaa mieltä
b. jokseenkin samaa mieltä
c. jokseenkin eri mieltä
d. täysin eri mieltä

5. Opiskelupaikka
a. TTY
b. Tampereen Yliopisto
c. Muu

Vastaa kysymyksiin 6-14 oman mielipiteesi/käsityksesi mukaan.

6. Mitä todistaminen mielestäsi tarkoittaa?

7. Mitä todistamisajattelu mielestäsi tarkoittaa?

8. Miksi mielestäsi todistamista opetetaan?

9. Miten logiikka liittyy todistamiseen?

10. Miten opettaisit todistamista ja todistamisajattelua?

11. Mitkä ovat mielestäsi oppilaiden suurimmat ongelmat todistamista opeteltaessa?

12. Oletko mielestäsi saanut koulutuksestasi riittävät eväät todistamisajattelun ja todistamisen opettamiseen? Perustele.

Valitse parhaiten sopiva vaihtoehto kysymyksissä 15-17.

13. Osaan mielestäni laatia matemaattisen todistuksen opettajan ammatin vaatimalla tasolla.
    a. täysin samaa mieltä
    b. jokseenkin samaa mieltä
    c. jokseenkin eri mieltä

d. täysin eri mieltä
e. en osaa sanoa

14. Hyvin valittu esimerkki/esimerkit todistamisen sijaan riittävät yläkoulussa perustelemaan matemaattisen tuloksen.
    a. täysin samaa mieltä
    b. jokseenkin samaa mieltä
    c. jokseenkin eri mieltä
    d. täysin eri mieltä
    e. en osaa sanoa

15. Hyvin valittu esimerkki/esimerkit todistamisen sijaan riittävät lukiossa perustelemaan matemaattisen tuloksen.
    a. täysin samaa mieltä
    b. jokseenkin samaa mieltä
    c. jokseenkin eri mieltä
    d. täysin eri mieltä
    e. en osaa sanoa

Liite 4: Sanoma Pron (vasen) ja Otavan (oikea) MAA11 kurssin oppikirjojen sisällyksen rakenne