TAMPEREEN YLIOPISTO

Pro gradu -tutkielma

Lauri Kumpulainen

Variaatiolaskentaa ja sen sovelluksia

Informaatiotieteiden yksikkö

Matematiikka

Lokakuu 2016

Tampereen yliopisto

Informaatiotieteiden yksikkö

KUMPULAINEN, LAURI: Variaatiolaskentaa ja sen sovelluksia

Pro gradu -tutkielma, 47 s.

Matematiikka

Lokakuu 2016

Tiivistelmä

Tutkielman aiheena on variaatiolaskenta, jossa tarkastellaan funktionaalien ääriarvoja. Variaatiolaskentaa tarkastellaan funktionaalianalyysin näkökulmasta ja aiheeseen syvennytään tunnettujen variaatio-ongelmien kautta joista tunnetuin lienee Brachistochrone, josta variaatiolaskennan katsotaan saaneen alkunsa.

Tutkielmassa esitellään variaatiolaskennan peruslauseista useampi versio, tutustutaan hyvin syvällisesti Eulerin yhtälöön, kuten myös Eulerin yhtälön invarianssiin. Osansa tutkielmasta saavat myös funktionaalin differentiaali eli variaatio ja variaationaalinen derivaatta. Lisäksi tutkielmassa tarkastellaan yksinkertaisinta variaatio-ongelmaa.

Sovelluksina esitetään ratkaisut valon kululle epähomogeenisessa aineessa ja geodeesille sylinterin pinnalla.

Sisältö

1 Johdanto

Variaatiolaskenta on matematiikan analyysiin kuuluva ala, jossa pyritään ratkaisemaan funktionaaleille ääriarvoja. Funktionaalit ovat karkeasti kuvailtuna funktioita funktioiden joukolta reaaliluvuille. Usein funktionaalit ilmaistaan määrättyinä integraaleina.

Aluksi esitetään funktionaalianalyysin perusteita ja määritellään funktionaali, funktioavaruudet, funktionaalin jatkuvuus ja lineaarinen funktionaali.

Tämän jälkeen siirrytään itse aiheeseen eli variaatiolaskentaan. Ensimmäiseksi esitellään tunnettuja variaatio-ongelmia kuten katenaari ja Brachistochrone, joista jälkimmäisen esittämistä pidetään variaatiolaskennan lähtölaukauksena.

Varsinainen variaatiolaskennan käsittely aloitetaan esittelemällä variaatiolaskennan peruslause useampana eri versiona, josta edetään hyvin nopeasti ensimmäiseen variaatioon. Tämän jälkeen vuorossa on yksinkertaisimman variaatio-ongelman esittely, josta jatketaan Eulerin yhtälön muodossa.

Eulerin yhtälöiden jälkeen määritellään variaationaalinen derivaatta, jonka avulla todistetaan, ettei ekstremaalin olemassaolo riipu käytettävästä koordinaatistosta.

Sitten tartutaan toiseen variaatioon ja edetään Legendren ehdon kautta yksinkertaisimman variaatio-ongelman yleistykseen. Lopuksi ratkaistaan valon reitti epähomogeenisessa aineessa ja geodeesi sylinterin pinnalla.

Tutkielmassa keskitytään variaatiolaskentaan pitkälti kuten teoksessa Calculus of Variations [1], mutta esityksestä poiketaan jossain määrin.

Lukijalta oletetaan aineopintokurssia vastaavat perustiedot analyysistä, differentiaali- ja integraalilaskennasta ja differentiaaliyhtälöistä.

Merkinnöistä sen verran, että useimmiten tässä tutkielmassa funktio merkitään argumenttinsa kanssa $y(x)$, mutta joissain tapauksissa selkeyden vuoksi merkitään vain y. Lisäksi joissain tapauksissa merkitään $y = y(x)$.

2 Funktionaalianalyysi

Esitetään aluksi funktionaalianalyysin perusteita. Funktionaalin käsite on saanut alkunsa variaatiolaskennasta. Näillä pian määriteltävillä funktionaaleilla on tärkeä rooli monien alojen ongelmissa, kuten esimerkiksi analyysissä, mekaniikassa ja geometriassa.

2.1 Funktionaalit

Määritelmä 2.1. (Ks. [2, s. 50-51]). Kolmikkoa $(\mathcal{R}, +, \cdot)$ kutsutaan *lineaariavaruudeksi*, mikäli sille pätee yhteenlasku $+ : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ ja kertolasku $\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ ja seuraavat aksioomat:

L1 $x + y = y + x$ jokaisella $x, y \in \mathcal{R}$,

L2 $x + (y + z) = (x + y) + z$ jokaisella $x, y, z \in \mathcal{R}$,

L3 on olemassa alkio $0 \in \mathcal{R}$ siten, että $x + 0 = x$ jokaisella $x \in \mathcal{R}$,

L4 jokaisella $x \in \mathcal{R}$ on olemassa alkio $-x$ siten, että $x + (-x) = 0$,

L5 on olemassa alkio $1 \in \mathcal{R}$ siten, että $1 \cdot x = x$ jokaisella $x \in \mathcal{R}$,

L6 $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ jokaisella $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, missä $x \in \mathcal{R}$,

L7 $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ jokaisella $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, missä $x \in \mathcal{R}$ ja

L8 $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ jokaisella $\alpha \in \mathbb{R}$, missä $x, y \in \mathcal{R}$.

Määritelmä 2.2. (Ks. [1, s. 1] ja [2, s. 50 - 51]). Olkoot $\mathcal{R}$ lineaariavaruus ja K skalaarikunta. Kuvausta $J : \mathcal{R} \to K$ kutsutaan *funktionaaliksi.* Funktionaalianalyysissä skalaarikunta K on joko $\mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$.

2.2 Funktioavaruudet

Avaruutta, jonka pisteet ovat funktioita, kutsutaan *funktioavaruudeksi.* Funktioavaruus on siis tiettyjen joukkojen X ja Y välillä määriteltyjen funktioiden muodostama joukko. Funktioanalyysin tapauksessa ei ole olemassa mitään yleistä avaruutta, kuten $\mathbb{R}^n$ reaalianalyysissä tai $\mathbb{C}^n$ kompleksianalyysissä. Tarkasteltavan ongelman luonne määrää tutkittavan funktioavaruuden.

Määritelmä 2.3. (Ks. [1, s. 6]). Olkoon $\mathcal{R}$ lineaariavaruus. Kuvausta, joka kuvaa jokaisen alkion $x \in \mathcal{R}$ epänegatiiviselle luvulle $\|x\|$ sanotaan *normiksi.* Lineaariavaruuden $\mathcal{R}$ sanotaan olevan *normeerattu*, mikäli seuraavat ehdot ovat voimassa:

N1 $\|x\| = 0$ jos ja vain jos $x = 0$,

N2 $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ ja

N3 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Määritelmä 2.4. (Ks. [1, s. 6]). Olkoon $\mathcal{R}$ normeerattu lineaarinen avaruus. Olkoot $x, y \in \mathcal{R}$, jolloin erotuksen $\|x - y\|$ sanotaan olevan alkioiden x ja y välinen *etäisyys.*

Tarkastellaan seuraavaksi muutamia tutkielman kannalta olennaisia normeerattuja lineaariavaruuksia.

Määritelmä 2.5. (Ks. [1, s. 6-7] ja [2, s. 52]). Avaruus $\mathcal{C}[a, b]$ koostuu kaikista välillä $[a, b]$ määritellyistä jatkuvista funktioista $y(x)$. Avaruuden $\mathcal{C}[a, b]$ laskutoimitukset määritellään seuraavasti:

$$(y + \hat{y})(x) = y(x) + \hat{y}(x)$$
$$(\alpha y)(x) = \alpha y(x),$$

missä $\alpha \in \mathbb{R}$. Normi määritellään asettamalla

$$\|y\|_0 = \max_{a \leq x \leq b} |y(x)| \,.$$

Näin ollen avaruudessa $\mathcal{C}[a, b]$ funktioiden y ja $\hat{y}$ välinen etäisyys on

$$\|y - \hat{y}\|_0 = \max_{a \leq x \leq b} |y(x) - \hat{y}(x)| \,.$$

Toisin sanoen funktion $\hat{y}$ etäisyys funktiosta y on pienempi kuin ε, mikäli funktion $\hat{y}$ kuvaaja pysyy 2ε leveän alueen rajaamalla alueella.

Määritelmä 2.6. (Ks. [1, s. 6-7] ja [2, s. 52]). Avaruus $\mathcal{D}_1[a,b]$ koostuu niistä välillä $[a,b]$ määritellyistä funktioista, jotka ovat jatkuvia ja joilla on jatkuva ensimmäinen derivaatta. Laskutoimitukset ovat samat kuin avaruudessa $\mathcal{C}[a,b]$, mutta normi määritellään asettamalla

$$\|y\|_1 = \max_{a \le x \le b} |y(x)| + \max_{a \le x \le b} |y'(x)| \,.$$

Funktioiden y ja $\hat{y}$ välinen etäisyys avaruudessa $\mathcal{D}_1[a,b]$ on täten

$$\|y - \hat{y}\|_1 = \max_{a \le x \le b} |y(x) - \hat{y}(x)| + \max_{a \le x \le b} |y'(x) - \hat{y}'(x)| \,.$$

Kaksi avaruuden $\mathcal{D}_1[a,b]$ funktiota ovat lähellä toisiaan, jos funktiot ja näiden ensimmäiset derivaatat ovat lähellä toisiaan, koska jos

$$\|y - \hat{y}\|_1 < \varepsilon,$$

niin

$$|y(x) - \hat{y}(x)| < \varepsilon \quad \text{ja} \quad |y'(x) - \hat{y}'(x)| < \varepsilon,$$

jokaisella $x \in [a,b]$.

Tämä voidaan yleistää avaruuksiin $\mathcal{D}_1[a,b], \ldots, \mathcal{D}_n[a,b]$ ja vieläkin pidemmälle usean muuttujan funktioihin ja niiden derivaattojen muodostamiin avaruuksiin.

Esimerkki 2.7. Esimerkiksi jos tarkastellaan väliä $[-1,1]$ ja $\varepsilon = 1$, niin tällöin vaikkapa funktiot $-x^2$ ja $-x^2 + \frac{1}{10}$ ovat lähellä toisiaan avaruudessa $\mathcal{C}[-1,1]$, mutta myöskin avaruudessa $\mathcal{D}_1[-1,1]$, koska molempien ensimmäinen derivaatta on $-2x$.

Määritelmä 2.8. (Ks. [8, s. 119]). Määritellään avaruudessa $\mathcal{C}[a,b]$ joukko

$$B_0(\hat{y}(x), \varepsilon) = \{y(x) \in \mathcal{C}[a,b] \mid \|y(x) - \hat{y}(x)\|_0 < \varepsilon\}.$$

ja avaruudessa $\mathcal{D}_1[a,b]$ joukko

$$B_1(\hat{y}(x), \varepsilon) = \{y(x) \in \mathcal{D}_1[a,b] \mid \|y(x) - \hat{y}(x)\|_1 < \varepsilon\}.$$

Näitä joukkoja kutsutaan pisteen $y(x)$ B_0*-ympäristöiksi* ja B_1*-ympäristöiksi.*

Esimerkki 2.9. Määrätty integraali

$$J[y] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))\, dx,$$

missä $y(x) \in \mathcal{D}_1[a,b]$, on funktionaali.

2.3 Funktionaalin jatkuvuus

Määritelmä 2.10. (Ks. [1, s. 7]). Olkoon $\mathcal{R}$ normeerattu lineaariavaruus. Funktionaalin $J[y]$ sanotaan olevan jatkuva pisteessä $\hat{y}(x) \in \mathbb{R}$, jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|J[y] - J[\hat{y}]| < \varepsilon$$

aina, kun $\|y(x) - \hat{y}(x)\| < \delta$.

Huomautus. Funtionaalin jatkuvuuden määritelmässä käytettävä normi valikoituu tietenkin sen funktioiden luokan suhteen, joka on funktionaalin määrittelyjoukkona.

2.4 Lineaarinen funktionaali

Määritelmä 2.11. (Ks. [1, s. 8]). Olkoot $\mathcal{R}$ normeerattu lineaariavaruus ja $J[h]$ avaruudessa $\mathcal{R}$ määritelty funktionaali jokaisella $h \in \mathcal{R}$. Tällöin funktionaalin $J[h]$ sanotaan olevan *lineaarinen funktionaali*, jos seuraavat ehdot pätevät:

F1 $J[\alpha h] = \alpha J[h]$ jokaisella $h \in \mathcal{R}$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$,

F2 $J[h_1 + h_2] = J[h_1] + J[h_2]$ jokaisella $h_1, h_2 \in \mathcal{R}$,

F3 $J[h]$ on jatkuva jokaisella $h \in \mathcal{R}$.

Esimerkki 2.12. (Ks. [1, s. 9]). Olkoot $h(x) \in \mathcal{C}[a, b]$, $x_0 \in [a, b]$, $\alpha(x) \in \mathcal{C}[a, b]$ ja $\alpha_i(x) \in \mathcal{C}[a, b]$, missä $i \in \{1, \ldots, n\}$. Tällöin kaava

$$J[h] = h(x_0),$$

integraali

$$J[h] = \int_a^b h(x)\ dx$$

ja myöskin integraali

$$J[h] = \int_a^b \alpha(x) h(x)\ dx$$

määrittelevät lineaarisen funktionaalin avaruudessa $\mathcal{C}[a,b]$. Edelleen integraali

$$J[h] = \int_a^b [\alpha_0(x)h(x) + \alpha_1(x)h'(x) + \cdots + \alpha_n(x)h^{(n)}(x)]\ dx$$

määrittelee lineaarisen funktionaalin avaruudessa $\mathcal{D}_n[a,b]$.

Nämä toteuttavat lineaarisen funktionaalin määritelmän ehdot integraalin jatkuvuuden ja lineaarisuuden nojalla. Osoitetaan esimerkiksi, että integraali

$$J[h] = \int_a^b h(x)\ dx$$

on lineaarinen integraali.

F1: Olkoot $\alpha(x), h(x) \in \mathcal{C}[a,b]$. Tällöin

$$\begin{aligned} J[\alpha h] &= \int_a^b \alpha(x)h(x)\ dx \\ &= \alpha(x)\int_a^b h(x)\ dx \\ &= \alpha J[h]. \end{aligned}$$

F2: Olkoot $h_1(x), h_2(x) \in \mathcal{C}[a,b]$. Täten

$$\begin{aligned} J[h_1 + h_2] &= \int_a^b h_1(x) + h_2(x)\ dx \\ &= \int_a^b h_1(x)\ dx + \int_a^b h_2(x)\ dx \\ &= J[h_1] + J[h_2]. \end{aligned}$$

F3: Olkoot $h(x) \in \mathcal{C}[a,b]$. Nyt integraali

$$J[h] = \int_a^b h(x)\ dx$$

on jatkuva, koska $h(x)$ on jatkuva.

Todistetaan, että $h(x)$ tosiaankin on jatkuva.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Nyt

$$\begin{aligned}
\left|J[h] - J[\hat{h}]\right| &= \left|\int_a^b h(x)\ dx - \int_a^b \hat{h}(x)\ dx\right| \\
&\leq \left|\int_a^b h(x) - \hat{h}(x)\ dx\right| \\
&\leq \left\|h(x) - \hat{h}(x)\right\|_0 |a-b| < \varepsilon,
\end{aligned}$$

aina kunhan,

$$\left\|h(x) - \hat{h}(x)\right\|_0 < \frac{\varepsilon}{|a-b|} = \delta.$$

Siis määritelmän 2.10 nojalla $J[h]$ on jatkuva.

3 Variaatiolaskenta

Tutkielman varsinainen aihe aloitetaan tarkastelemalla tunnettuja variaatio-ongelmia.

3.1 Katenaari ja katenoidi

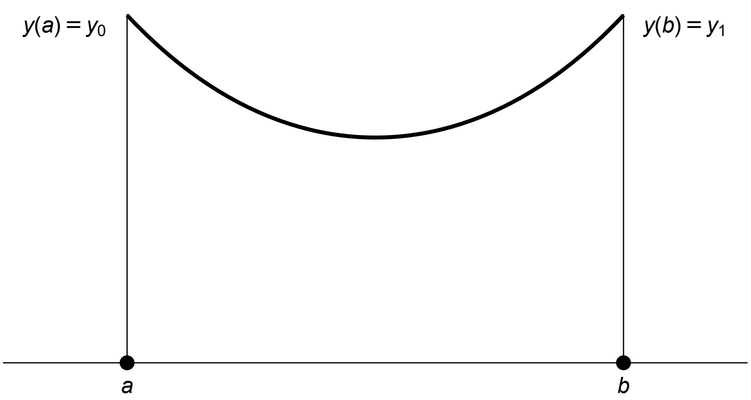
Tarkastellaan köyttä, joka on asetettu kahden tolpan varaan. Etsitään käyrää, joka vastaa köyden muotoa. Galilei Galileo tutki tätä ongelmaa ja hänen mukaansa köyttä vastaava *käyrä* [4, s. 217] oli paraabeli [6, s. 12]. Hän oli kuitenkin väärässä.

Matemaattisesti tarkastellen köyttä voidaan mallintaa funktiolla

$$y : [a, b] \to [0, c[,$$

ja tolppien päissä olevia kiinnityspisteitä $y(a) = y_0$ ja $y(b) = y_1$. Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että $y_0 = y_1$, jolloin tilanne vastaa kuvaa 3.1. Nyt ongelma voidaan ratkaista minimoimalla funktionaali

$$J[y] = \int_a^b y\sqrt{1 + y'(x)^2}\ dx.$$



Kuva 3.1: Katenaari

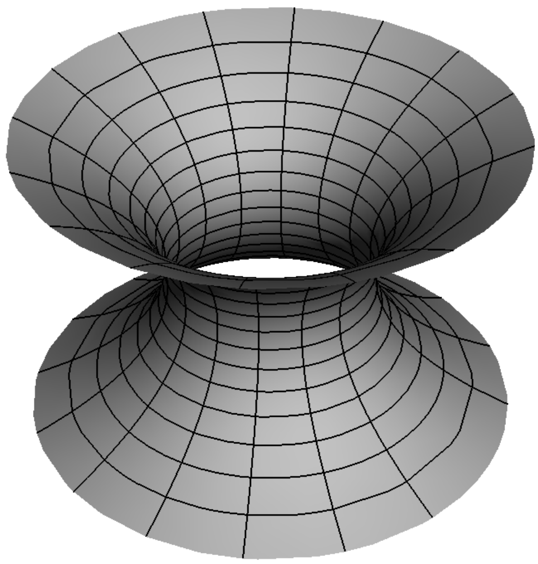
Vuonna 1691 matemaatikko Jakob Bernoulli esitti tämän ongelman haasteeksi muille matemaatikoille [7, s. 124]. Heistä Gottfried Wilhelm Leibniz, Christian Huygens ja Jakobin veli Johann Bernoulli ratkaisivat ongelman ja vastaava käyrä on hyperbolinen kosini. Tätä käyrää kutsutaan *katenaariksi.*

Katenaarin yhtälö annetaan yleensä muodossa

$$a \cosh\left(\frac{x}{a}\right),$$

missä $a > 0$ on vakio.

Katenaarin pyörähdyskappale on *katenoidi*, joka saadaan, kun katenaari pyörähtää horisontaaliakselinsa ympäri [1, s. 21]. Katenoidi on ratkaisu ongelmaan, jossa etsitään minimaalista pyörähdyskappaleen pinnan pinta-alaa, jonka kahden pisteen kautta kulkeva käyrä muodostaa pyörähtäessään horisontaaliakselinsa ympäri [1, s. 20].

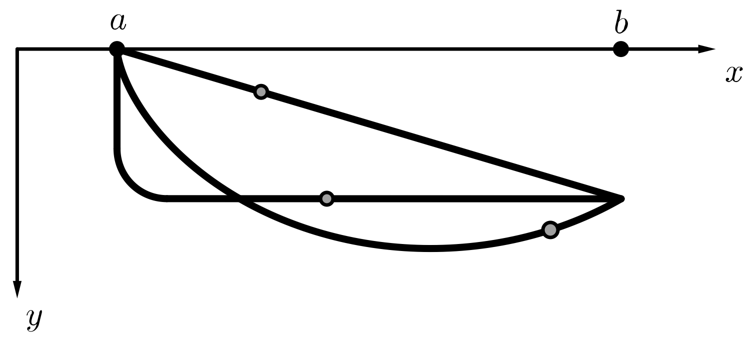


Kuva 3.2: Katenoidi

3.2 Brachistochrone

Matemaatikko Johann Bernoulli muotoili vuonna 1696 ongelman nimeltä *Brachistochrone* [3, s. 30-31], jonka hän esitti haasteeksi hänen aikalaisille matemaatikoille.

Ongelmassa tarkastellaan kahta pistettä, jotka ovat vertikaalisessa tasossa. Hiukkanen lähtee liukumaan kitkattomasti pisteestä a kohti pistettä b. Mikä on hiukkasen nopein reitti pisteestä a pisteeseen b?



Kuva 3.3: Brachistochrone ongelma

Tuntuisi aluksi selvältä, että suora linja olisi nopein reitti, mutta näin ei ole. Myös Galilei Galileo tutki tätäkin ongelmaa vuonna 1683 ja havaitsi, että suora linja ei ole nopein reitti. Hänen mukaansa nopein reitti on ympyrän kaari, mutta tämäkään ei ole nopein reitti.

Reitin kulkemiseen kuluva aika saadaan reitin pituuden ja hiukkasen nopeuden suhteesta. Reitti voidaan ilmaista käyränä $y(x)$ ja *käyrän pituus* saadaan integraalina [3, s. 27]

$$\int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx.$$

Hiukkasen nopeuden selvittämiseksi tarvitaan energian säilymislakia [5, s. 86]. Alkutilanteessa kineettinen energia [5, s. 66] ja potentiaalienergia [5, s. 67] ovat molemmat 0, koska kokonaisenergia on aina 0, joten

$$\frac{mv^2}{2} - mgy = 0,$$

missä v on hiukkasen nopeus, m on hiukkasen massa, ja g on gravitaatiovakio. Ilman yleisyyden menettämistä voidaan olettaa, että $m = 1$ ja $g = \frac{1}{2}$. Tällöin edellinen yhtälö on yksinkertaisesti

$$v = \sqrt{y(x)}.$$

Näin ollen Brachistochronen ratkaiseminen redusoituu funktionaalin

$$J[y] = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{y(x)}}\, dx,$$

minimoimiseen, missä $y(x)$ on pisteet a ja b yhdistävä *differentioituva käyrä* ([**?**, s. 102]). Nopein reitti onkin siis itseasiassa *sykloidi* [3, s. 31].

3.3 Variaatiolaskennan peruslause

Seuraavaksi käsitellään perustavanlaatuisia tuloksia, joilla on suuri merkitys variaatiolaskennassa. Variaatiolaskennan peruslauseesta on olemassa useita eri versioita, joista tässä luvussa on muutama.

Lause 3.1. *Jos $\alpha(x)$ on jatkuva välillä $[a,b]$, ja jos*

$$\int_a^b \alpha(x)h(x)\ dx = 0$$

jokaisella funktiolla $h(x) \in \mathcal{C}[a,b]$ siten, että $h(a) = h(b) = 0$, niin $\alpha(x) = 0$ jokaisella $x \in [a,b]$.

Todistus. (Vrt. [1, s. 9]). Oletetaan vastoin väitettä, että funktio $\alpha(x)$ on positiivinen jossain pisteessä $x \in [a,b]$. Tällöin $\alpha(x)$ on positiivinen myös jollain välillä $[x_1, x_2] \subset [a,b]$. Jos asetetaan

$$h(x) = (x - x_1)(x_2 - x),$$

missä $x \in [x_1, x_2]$ ja $h(x) = 0$ muutoin, niin tällöin selvästi $h(x)$ toteuttaa väitteen ehdot. Nyt,

$$\int_a^b \alpha(x)h(x)\ dx = \int_{x_1}^{x_2} \alpha(x)(x - x_1)(x_2 - x)\ dx > 0,$$

koska integrandi on positiivinen. Mutta tämä on ristiriita. Siis vasta-oletus on väärä ja väite $\alpha(x) = 0$ pätee. $\square$

Huomautus. Tämä lause pätee vaikka korvaamme avaruuden $\mathcal{C}[a,b]$ avaruudella $\mathcal{D}_n[a,b]$. Tämä osoitetaan yksinkertaisesti samanlaisella todistuksella, jossa

$$h(x) = ((x - x_1)(x_2 - x))^{n+1}$$

missä $x \in [x_1, x_2]$ ja $h(x) = 0$ muutoin.

Lause 3.2. *Jos $\alpha(x)$ on jatkuva välillä $[a,b]$, ja jos*

$$\int_a^b \alpha(x)h'(x)\ dx = 0$$

jokaisella funktiolla $h(x) \in \mathcal{D}_1[a,b]$ siten, että $h(a) = h(b) = 0$, niin $\alpha(x) = c$ jokaisella $x \in\ [a,b]$, missä c on vakio.

Todistus. (Vrt. [1, s. 10]). Olkoon c vakio, joka on määritelty ehdon

$$\int_a^b (\alpha(x) - c)\ dx = 0,$$

avulla ja olkoon

$$h(x) = \int_a^x (\alpha(\xi) - c)\ d\xi,$$

joten $h(x)$ selvästi kuuluu avaruuteen $\mathcal{D}_1$ ja toteuttaa ehdon $h(a) = h(b) = 0$. Nyt pätee

$$\int_a^b (\alpha(x) - c)h'(x)\ dx = \int_a^b \alpha h'(x)\ dx - c(h(b) - h(a)) = 0,$$

kun taas toisaalta

$$\int_a^b (\alpha(x) - c)h'(x)\ dx = \int_a^b (\alpha(x) - c)^2\ dx.$$

Tästä seuraa, että $\alpha(x) - c = 0$ eli $\alpha(x) = c$ jokaisella $x \in [a,b]$. $\square$

Lause 3.3. *Jos $\alpha(x)$ on jatkuva välillä $[a,b]$, ja jos*

$$\int_a^b \alpha(x)h''(x)\ dx = 0$$

jokaisella funktiolla $h(x) \in \mathcal{D}_1$ siten, että $h(a) = h(b) = 0$ ja $h'(a) = h'(b) = 0$, niin $\alpha(x) = c_0 + c_1 x$ jokaisella $x \in [a,b]$, missä c_0 ja c_1 ovat vakioita.

Todistus. (Vrt. [1, s. 10-11]). Olkoot c_0 ja c_1 määritelty seuraavien ehtojen avulla:

$$\int_a^b (\alpha(x) - c_0 - c_1 x)\ dx = 0$$

$$\int_a^b\ dx = \int_a^x (\alpha(\xi) - c_0 - c_1\xi)\ d\xi = 0,$$

ja olkoon

$$h(x) = \int_a^x d\xi \int_a^\xi (\alpha(t) - c_0 - c1t)\ dt,$$

jolloin nähdään, että $h(x) \in \mathcal{D}_1[a, b]$ ja se toteuttaa ehdot $h(a) = h(b) = 0$, $h'(a) = h'(b) = 0$. Täten pätee

$$\begin{aligned}
&\int_a^b (\alpha(x) - c_0 - c_1 x) h''(x)\ dx \\
&= \int_a^b \alpha(x) h''(x)\ dx - c_0(h'(b) - h'(a)) - c_1 \int_a^b x h''(x)\ dx \\
&= -c_1(bh'(b) - ah'(a)) - c_1(h(b) - h(a)) = 0,
\end{aligned}$$

ja toisaalta taas

$$\int_a^b (\alpha(x) - c_0 - c_1 x) h''(x)\ dx = \int_a^b (\alpha(x) - c_0 - c_1 x)^2\ dx = 0.$$

Joten $\alpha(x) - c_0 - c_1 x = 0$ eli $\alpha(x) = c_0 + c_1 x$ jokaisella $x \in [a, b]$. □

Lause 3.4. *Jos $\alpha(x)$ ja $\beta(x)$ ovat jatkuvia välillä $[a, b]$, ja jos*

$$\int_a^b (\alpha(x) h(x) + \beta(x) h'(x))\ dx = 0 \tag{3.1}$$

jokaisella funktiolla $h(x) \in \mathcal{D}_1[a, b]$ siten, että $h(a) = h(b) = 0$, niin $\beta(x)$ on differentioituva, ja $\beta'(x) = \alpha(x)$ jokaisella $x \in [a, b]$.

Todistus. (Vrt. [1, s. 11]). Asetetaan

$$A(x) = \int_a^x \alpha(\xi)\ d\xi,$$

ja integroidaan osittain, josta saadaan

$$\int_a^b \alpha(x) h(x)\ dx = -\int_a^b A(x) h'(x)\ dx.$$

Huomataan, että yhtälö 3.1 voidaan kirjoittaa uudessa muodossa

$$\int_a^b (-A(x) + \beta(x)) h'(x)\ dx = 0.$$

Mutta nyt lauseen 3.2 nojalla tästä seuraa, että

$$\beta(x) - A(x) = c,$$

missä c on vakio, ja funktion $A(x)$ määritelmän nojalla

$$\beta'(x) = \alpha(x),$$

jokaisella $x \in [a, b]$, kuten väitettiin. □

3.4 Taylorin kehitelmä

Lause 3.5. *Olkoon $F(x, y, z)$ funktio, jonka osittaisderivaatat kertaluokkaan $n + 1$ saakka ovat jatkuvia jossain pisteen (x, y, z) ympäristössä. Tällöin funktion $F(x, y, z)$ Taylorin kehitelmä on*

$$\begin{aligned}
F(x+k, y+j, z+k) = {} & F(x, y, z) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right) F(x, y, z) \\
& + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 F(x, y, z) \\
& + \cdots + \\
& + \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)^n F(x, y, z) \\
& + \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n+1} F(x + \theta h, y + \theta j, z + \theta k),
\end{aligned}$$

missä $\theta \in [a, b]$.

Huomautus. Hyvä esitys yhden muuttujan tapauksesta todistuksen kera löytyy Walter Rudinin teoksesta Principles of Mathematical Analysis [12] sivuilta 110 ja 111. Taylorin kehitelmää sovelletaan useassa tämän tutkielman kohdassa.

3.5 Ensimmäinen variaatio

Määritelmä 3.6. (Ks. [1, s. 11]). Olkoot $\mathcal{R}$ normeerattu lineaariavaruus ja $J[y]$ avaruudessa $\mathcal{R}$ määritelty funktionaali. Olkoon

$$\Delta J[h] = J[y + h] - J[y]$$

sen *lisäys*, missä $h(x)$ on lisäys muuttujan $y(x)$ suhteen. Jos $y(x)$ on kiinteä, niin $\Delta J[h]$ on funktion $h(x)$ funktionaali, joka yleensä on epälineaarinen funktionaali. Oletetaan, että

$$\Delta J[h] = \varphi[h] + \varepsilon(h) \|h\|_1 ,$$

missä $\varphi[h]$ on lineaarinen funktionaali ja $\varepsilon(h) \longrightarrow 0$, kun $\|h\| \longrightarrow 0$. Tällöin funktionaalin $J[y]$ sanotaan olevan *differentioituva*. Edelleen lisäyksen $\Delta J[h]$ *pääasiallista lineaariosaa* $\varphi[h]$ sanotaan funktionaalin $J[y]$ *variaatioksi* (tai *differentiaaliksi*). Merkitään variaatiota $\delta J[h] = \varphi[h]$.

Huomautus. Pääasiallinen lineaariosa $\varphi[h]$ eroaa lisäyksestä $\Delta J[h]$ vain infinitesimaalin verran enemmän kuin $\frac{1}{\|h\|_1}$. Toisin sanoen

$$\begin{aligned} \Delta J[y] &= \varphi[h] + \varepsilon(h) \|h\|_1 \\ \Delta J[y] - \varphi\ [h] &= \varepsilon(h) \|h\|_1 , \end{aligned} \tag{3.2}$$

joten

$$\lim_{\|h\|_1 \to 0} \Delta J[y] - \varphi[h] = 0.$$

Lause 3.7. *Differentioituvan funktionaalin variaatio on yksikäsitteinen.*

Todistus. (Vrt. [1, s. 12]). Aluksi havaitaan, että jos $\varphi[h]$ on differentioituva lineaarinen funktionaali, ja jos

$$\lim_{\|h\|_1 \to 0} \frac{\varphi[h]}{\|h\|_1} = 0,$$

niin $\varphi[h] = 0$ jokaisella $h(x)$. Oletetaan sitten, että $\varphi[h_0] \neq 0$ jollakin $h_0 \neq 0$. Tällöin asettamalla

$$h_n = \frac{h_0}{n}, \quad \lambda = \frac{\varphi[h_0]}{\|h_0\|_1},$$

näemme, että $\|h_n\|_1 \longrightarrow 0$, kun $n \longrightarrow \infty$, mutta

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\varphi[h_n]}{\|h_n\|_1} = \lim_{n \to \infty} \frac{n\varphi[h_0]}{n \|h_0\|_1} = \lambda \neq 0,$$

vastoin oletusta.

Oletetaan lopuksi, että funktionaalin $J[y]$ variaatio ei ole yksikäsitteisesti määritelty. Toisin sanoen, että pätee

$$\Delta J[h] = \varphi_1[h] + \varepsilon_1(h) \|h\|_1 ,$$

$$\Delta J[h] = \varphi_2[h] + \varepsilon_2(h) \|h\|_1 ,$$

missä $\varphi_1[h]$ ja $\varphi_2[h]$ ovat lineaarisia funktionaaleja, ja $\varepsilon_1(h), \varepsilon_2(h) \longrightarrow 0$, kun $\|h\|_1 \longrightarrow 0$. Tästä seuraa, että

$$\varphi_1[h] - \varphi_2[h] = (\varepsilon_1(h) + \varepsilon_2(h)) \|h\|_1 = \varepsilon(h) \|h\|_1 ,$$

missä $\varepsilon_1(h) + \varepsilon_2(h) = \varepsilon(h)$ ja siten erotus $\varphi_1[h] - \varphi_2[h] = \varepsilon(h) \|h\|_1$ on infinitesimaalin verran suurempi kuin $\frac{1}{\|h\|_1}$ (ks. yhtälö 3.2). Mutta koska erotus $\varphi_1[h] - \varphi_2[h]$ on jatkuva, todistuksen ensimmäisen osan nojalla erotus $\varphi_1[h] - \varphi_2[h]$ katoaa identtisesti, kuten väitetttiin. □

Määritelmä 3.8. (Ks. [1, s. 12]). Funktionaalilla $J[y]$ sanotaan olevan *ekstremaali* pisteessä $\hat{y}(x)$, mikäli erotus $J[y] - J[\hat{y}]$ ei muuta merkkiään jossain pisteen $\hat{y}(x)$ ympäristössä.

Ekstremaalin sanotaan olevan *minimi*, mikäli $J[y] - J[\hat{y}] \geq 0$ ja *maksimi*, mikäli $J[y] - J[\hat{y}] \leq 0$.

Määritelmä 3.9. (Ks. [1, s. 13]). Funktionaalilla $J[y]$ sanotaan olevan *heikko ekstremaali* pisteessä $\hat{y}(x)$, mikäli on olemassa $\varepsilon > 0$ siten, että erotuksella $J[y] - J[\hat{y}]$ on sama merkki jokaisessa funktionaalin määrittelyjoukon pisteessä $y(x)$, jolla pätee ehto $\|y - \hat{y}\|_1 < \varepsilon$, missä $\|\cdot\|_1$ on avaruuden $\mathcal{D}_1$ normi.

Määritelmä 3.10. (Ks. [1, s. 13]). Funktionaalilla $J[y]$ sanotaan olevan *vahva ekstremaali* pisteessä $\hat{y}(x)$, mikäli on olemassa $\varepsilon > 0$ siten, että erotuksella $J[y] - J[\hat{y}]$ on sama merkki jokaisessa funktionaalin määrittelyjoukon pisteessä $y(x)$, jolla pätee ehto $\|y - \hat{y}\|_0 < \varepsilon$, missä $\|\cdot\|_0$ on avaruuden $\mathcal{C}$ normi.

Huomautus. Edellä olevista määritelmistä seuraa välittömästi, että jokainen vahva ekstremaali on heikko ekstremaali.

Lause 3.11. *Välttämätön ehto differentioituvan funktionaalin $J[y]$ ekstremaalin olemassaololle pisteessä $\hat{y}(x)$ on, että sen variaatio katoaa pisteessä $\hat{y}(x)$. Toisin sanoen pisteessä $\hat{y}(x)$ pätee $\delta J[h] = 0$ kaikilla $h(x) \in \mathcal{D}_1[a, b]$.*

Todistus. (Vrt. [1, s. 13]). Oletetaan, että funktionaalilla $J[y]$ on minimi pisteessä $\hat{y}(x)$. Variaation $\delta J[y]$ määritelmän nojalla

$$\Delta J[h] = \delta J[h] + \varepsilon(h) \|h\|_1 , \tag{3.3}$$

missä $\varepsilon \longrightarrow 0$, kun $\|h\|_1 \longrightarrow 0$. Siten, kunhan $\|h\|_1 < \varepsilon$, lisäyksen $\Delta J[y]$ merkki on sama kuin variaation $\delta J[h]$ merkki.

Tehdään vastaoletus, että $\delta J[h_0] \neq 0$ jollain $h_0(x) \in \mathcal{D}_1[a,b]$. Tällöin jokaisella $\alpha > 0$ pätee funktionaalin lineaarisuuden nojalla, että

$$\delta J[-\alpha h_0] = -\delta J[\alpha h_0].$$

Näin ollen yhtälölle 3.3 on voimassa, että jokaisella $\varepsilon > 0$ pätee $\|h\|_1 < \varepsilon$, joten se voi saada kumman tahansa merkin. Mutta tämähän on mahdotonta, koska oletuksen nojalla funktionaalilla $J[y]$ on minimi pisteessä $\hat{y}(x)$ eli

$$\Delta J[h] = J[\hat{y} + h] - J[\hat{y}] \geq 0$$

kunhan $\|h\|_1 < \varepsilon$. Joten päädytään ristiriitaan ja alkuperäinen väite pätee. $\square$

3.6 Yksinkertaisin variaatio-ongelma

Olkoon $F(x,y,z)$ funktio, jonka jokaisella argumentilla on jatkuva ensimmäinen ja toinen derivaatta. Tällöin, kaikkien niiden funktioiden $y(x)$ joukossa, jotka ovat jatkuvasti differentioituvia $a \leq x \leq b$ ja toteuttavat rajaehdot

$$y(a) = A, \quad y(b) = B, \tag{3.4}$$

etsi funktio, jolla funktionaalilla

$$J[y] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))\, dx \tag{3.5}$$

on heikko ekstremaali.

Yksinkertaisimmassa variaatio-ongelmassa täytyy siis löytää heikko ekstremaali funktionaalille 3.5, missä hyväksyttävien funktioiden joukko on kaksi pistettä yhdistävien *sileiden käyrien y* [4, s. 419] joukko

$$S = \{y \in \mathcal{D}_1[a,b] \mid y(a) = A, y(b) = B\}.$$

Useimmiten puhutaan kuitenkin vain käyristä. Luvuissa 3.1 ja 3.2 esitellyt ongelmat ovat tätä yksinkertaisinta tyyppiä.

3.7 Eulerin yhtälö

Jotta lauseen 3.11 välttämätöntä ehtoa voidaan käyttää, täytyy kyetä laskemaan funktionaalin 3.5 variaatio.

Määritelmä 3.12. (Ks. [1, s. 15]). Yhtälöä

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0. \tag{3.6}$$

kutsutaan *Eulerin yhtälöksi.*

Lause 3.13. *Olkoon $F(x, y, z)$ funktio, jolla on jatkuva ensimmäinen derivaatta ja toinen derivaatta. Olkoon lisäksi*

$$J[y] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))\ dx$$

funktionaali, joka on määritelty kaikkien niiden funktioiden $y(x)$ joukossa, joilla on jatkuvat ensimmäiset derivaatat välillä $[a, b]$ ja jotka toteuttavat rajaehdot $y(a) = A$ ja $y(b) = B$. Tällöin välttämätön ehto funktionaalin $J[y]$ ekstremaalin olemassaololle on, että $y(x)$ toteuttaa Eulerin yhtälön

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0.$$

Todistus. (Vrt. [1, s. 14-15]). Oletetaan, että $h(x)$ on lisätty funktioon $y(x)$. Jotta funktio $y(x) + h(x)$ täyttäisi rajaehdot, täytyy olla $h(a) = h(b) = 0$. Tällöin funktionaalin 3.5 lisäys on

$$\begin{aligned}
\Delta J[h] &= J[y + h] - J[y] \\
&= \int_a^b F(x, y(x) + h(x), y'(x) + h'(x))\ dx - \int_a^b F(x, y(x), y'(x))\ dx \\
&= \int_a^b (F(x, y(x) + h(x), y'(x) + h'(x)) - F(x, y(x), y'(x)))\ dx,
\end{aligned}$$

josta edelleen lauseen 3.5 nojalla

$$\Delta J[h] = \int_a^b (F_y(x, y(x), y'(x))h(x) + F_{y'}(x, y(x), y'(x))h'(x))\ dx + \dots, \tag{3.7}$$

missä alaindeksit osittaisderivaattaa kyseisen muuttujan suhteen, ja jäännöstermi jätetään merkitsemättä, kuten tapana on. Yhtälön 3.7 oikean puolen integraali merkitsee lisäyksen ΔJ pääasiallista lineaariosaa, ja koska funktionaalin $J[y]$ variaatio on

$$\delta J[h] = \int_a^b (F_y(x, y(x), y'(x))h(x) + F_{y'}(x, y(x), y'(x))h'(x))\ dx$$

Lauseen 3.11 nojalla, välttämätön ehto funktionaalin $J[y]$ ekstremaalille pisteessä y on, että

$$\delta J[h] = \int_a^b (F_y h + F_{y'} h')\ dx = 0 \tag{3.8}$$

Jokaisella $h \in S_0 = \{\hat{h} \in \mathcal{D}_1[a, b] \mid \hat{h}(a) = \hat{h}(b) = 0\}$. Mutta lauseen 3.4 nojalla yhtälö 3.8 implikoi, että

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0. \tag{3.9}$$

□

Huomautus. Eulerin yhtälö on yleensä toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö ja sen *integraalikäyriä* kutsutaan [9, s. 39] ekstremaaleiksi. Toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön ratkaisu riippuu kahdesta mielivaltaisesta vakiosta, jotka määritetään rajaehtojen $y(a) = A$ ja $y(b) = B$ avulla.

Monissa tapauksissa Eulerin yhtälö on itsessään riittävä täydellisen ratkaisun löytämiseen. Usein ekstremaalin olemassaolo on selvää tarkasteltavan ongelman luonteesta. Muotoa

$$\int_a^b F(x, y(x), y'(x))\ dx$$

olevan funktionaalin Eulerin yhtälö on yleisesti toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö, mutta voi olla ettei ekstremaalina oleva käyrä ole kahdesti differentioituva.

Esimerkki 3.14. (Vrt. [1, s. 16-17]). Tarkastellaan esimerkin vuoksi funktionaalia

$$J[y] = \int_{-1}^{1} y(x)^2(2x - y'(x))^2 \, dx,$$

missä

$$y(-1) = 0, \quad y(1) = 1.$$

Funktionaalin $J[y]$ minimi on yhtä kuin nolla ja se löydetään funktion

$$y(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } -1 \leq x \leq 0 \\ x^2, & \text{kun } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

avulla. Tällä funktiolla ei ole toista derivaattaa, kun $x = 0$. Kuitenkin $y(x)$ toteuttaa Eulerin yhtälön. Koska

$$F(x, y(x), y'(x)) = y(x)^2(2x - y'(x))^2,$$

niin funktiot

$$F_y = 2y(x)(2x - y'(x))^2, \quad F_{y'} = -2y(x)^2(2x - y'(x)), \quad \frac{d}{dx}F_{y'}$$

katoavat identtisesti, kun $x \in [-1, 1]$. Siis vaikka Eulerin yhtälö on toista kertalukua ja $y''(x)$ ei ole olemassa välillä $[-1, 1]$, niin sijoittamalla funktio $y(x)$ Eulerin yhtälöön havaitaan, että se toteuttaa sen.

Lause 3.15. *Oletetaan, että funktiolla $y(x)$ on jatkuva ensimmäinen derivaatta ja se toteuttaa Eulerin yhtälön*

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0.$$

Tällöin, jos funktiolla $F(x, y(x), y'(x))$ on jatkuva ensimmäinen ja toinen derivaatta kaikkien argumenttiensa suhteen, niin funktiolla $y(x)$ on jatkuva toinen derivaatta kaikissa pisteissä (x, y), missä

$$F_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) \neq 0.$$

Todistus. (Vrt. [1, s. 17-18]). Tarkastellaan erotusta

$$\begin{aligned} \Delta F_{y'} &= F_{y'}(x + \Delta x, y(x) + \Delta y(x), y'(x) + \Delta y'(x)) - F_{y'}(x, y(x), y'(x)) \\ &= \Delta x \overline{F}_{y'x} + \Delta y \overline{F}_{y'y} + \Delta y' \overline{F}_{y'y'}, \end{aligned}$$

missä yläviiva indikoi sitä, että vastaavat derivaatat on laskettu tiettyjä välikäyriä pitkin. Kun jakajana on Δx, niin saadaan raja-arvo lausekkeelle

$$\frac{\Delta F_{y'}}{\Delta x} = \overline{F}_{y'x} + \frac{\Delta y(x)}{\Delta x}\overline{F}_{y'y} + \frac{\Delta y'(x)}{\Delta x}\overline{F}_{y'y},$$

kun $\Delta x \longrightarrow 0$. Koska oletuksen nojalla funktion $F(x, y(x), y'(x))$ toiset derivaatat ovat jatkuvia, niin tällöin pätee, että kun $\Delta x \longrightarrow 0$, niin $\overline{F}_{y'x}$ suppenee kohti funktiota $F_{y'x}$. Tämä tarkoittaa, että $\overline{F}_{y'x}$ suppenee kohti osittaisderivaatan $\frac{\partial^2 F}{\partial y}\partial x$ arvoa pisteessä x.

Funktion $y(x)$ derivaatan $y'(x)$ olemassaolosta ja sen toisen derivaatan $F_{y'y}$ jatkuvuudesta seuraa, että toinen termi $\frac{\Delta y(x)}{\Delta x}\overline{F}_{y'y}$ on niin ikään raja-arvo, kun $\Delta x \longrightarrow 0$. Mutta tällöinhän myös kolmannella termillä on raja-arvo eli

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y'(x)}{\Delta x}\overline{F}_{y'y'} = C$$

on olemassa. Kun $\Delta x \longrightarrow 0$, niin $\overline{F}_{y'y'}$ suppenee kohti $F_{y'y'}$, ja koska

$$y''(x) = \frac{C}{F_{y'y'}},$$

niin $F_{y'y'} \neq 0$. Siten raja-arvo

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y'(x)}{\Delta x} = y''(x)$$

on olemassa. Lopuksi yhtälöstä

$$\frac{d}{dx}F_{y'} - F_y = 0,$$

löydetään lauseke funktiolle $y''(x)$. Näin ollen $y''(x)$ on jatkuva aina, kun $F_{y'y'} \neq 0$. □

Huomautus. Tässä oletettiin, että ekstremaalit ovat sileitä.

Käydään seuraavaksi läpi muutamia esimerkkejä, joissa Eulerin yhtälö voidaan redusoida ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöksi tai joissa ratkaisu saadaan yksinkertaisesti integroimalla.

Esimerkki 3.16. (Ks. [1, s. 18]). Tarkastellaan funktionaalia

$$\int_a^b F(x, y'(x))\, dx,$$

missä y ei esiinny eksplisiittisesti funktiossa F. Tässä tapauksessa Eulerin yhtälö saa muodon

$$\frac{d}{dx} F_{y'} = 0,$$

jolla on selvästi ensimmäinen integraali

$$F_{y'} = C, \tag{3.10}$$

missä C on vakio. Tämä on ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö, joka ei sisällä funktiota $y(x)$. Ratkaisemalla yhtälö 3.10 muuttujan $y'(x)$ suhteen, saadaan yhtälö, joka on muotoa

$$y'(x) = f(x, C),$$

josta $y(x)$ saadaan integraalimuodossa.

Esimerkki 3.17. (Ks. [1, s. 19]). Olkoon funktionaali

$$J[y] = \int_a^b F(y(x), y'(x))\, dx,$$

jolloin

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = F_y - F_{y'y} y'(x) - F_{y'y'} y''(x). \tag{3.11}$$

Nyt F ei ole riippuvainen muuttujasta x. Kerrotaan yhtälö 3.11 muuttujalla $y'(x)$ ja saadaan

$$F_y y'(x) - F_{y'y} y'(x)^2 - F_{y'y'} y'(x) y''(x) = \frac{d}{dx}(F - y'(x) F_{y'}).$$

Tällöin Eulerin yhtälöllä on ensimmäinen integraali

$$F - y'(x) F_{y'} = C,$$

missä C on vakio.

Aiemmin tarkasteltiin katenaarin pyörähdyskappaleen katenoidin muodostamaa minimaalista pintaa, joka on itseasiassa esimerkin 3.17 tapaus.

Esimerkki 3.18. (Ks. [1, s. 19]). Jos funktionaali on muotoa

$$\int_a^b F(x, y(x))\, dx,$$

niin Eulerin yhtälö on muotoa $F_y(x, y(x)) = 0$, ja siksi se ei ole differentiaaliyhtälö, vaan algebrallinen yhtälö, jonka ratkaisu koostuu yhdestä tai useammasta käyrästä $y(x)$.

Esimerkki 3.19. (Ks. [1, s. 19]). Useissa ongelmissa törmätään funktionaaliin, joka on muotoa

$$\int_a^b f(x, y)\sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx,$$

mikä esittää funktion $f(x, y)$ integraalia käyrän $y = y(x)$ pituuden s suhteen $(ds = \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx)$.

Nyt Eulerin yhtälölle pätee

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \\
&f_y(x, y)\sqrt{1 + y'(x)^2} - \frac{d}{dx}\left(f(x, y)\frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}}\right) = \\
&f_y\sqrt{1 + y'(x)^2} - f_x\frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} - f_y\frac{y'(x)^2}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} - f\frac{y''(x)}{(1 + y'(x)^2)^{\frac{3}{2}}} = \\
&\frac{1}{\sqrt{1 + y'(x)^2}}\left(f_y - f_x y'(x) - f\frac{y''(x)}{1 + y'(x)^2}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Toisin sanoen

$$f_y - f_x y'(x) - f\frac{y''(x)}{1 + y'(x)^2} = 0.$$

Esimerkki 3.20. (Ks. [1, s. 19-20]). Oletetaan, että

$$J[y] = \int_1^2 \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{x}\, dx, \quad y(1) = 0, \quad y(2) = 1.$$

Integrandi ei sisällä muuttujaa $y(x)$, ja siten Eulerin yhtälö saa muodon $F_{y'} = C$. Joten,

$$\frac{y'(x)}{x\sqrt{1 + y'(x)^2}} = C,$$

jolloin

$$y'(x)^2(1 - C^2x^2) = C^2x^2$$

tai

$$y'(x) = \frac{Cx}{\sqrt{1 - C^2x^2}}$$

josta seuraa

$$y(x) = \int \frac{Cx\ dx}{\sqrt{1 - C^2x^2}} = \frac{1}{C}\sqrt{1 - C^2x^2} + C_1$$

ja hiukan sievennettynä

$$(y(x) - C_1)^2 + x^2 = \frac{1}{C^2}.$$

Näin ollen ratkaisu on ympyrä, jonka keskipiste on y-akselilla. Alkuehdoista $y(1) = 0$, $y(2) = 1$, saadaan lyhyehkön laskennan jälkeen, että

$$C = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad C_1 = 2,$$

joten ratkaisuksi saadaan

$$(y - 2)^2 + x^2 = 5.$$

Esimerkki 3.21. (Ks. [1, s. 21-22]). Funktionaalin

$$J[y] = \int_a^b (x - y(x))^2\ dx, \tag{3.12}$$

kohdalla Eulerin yhtälö redusoituu esimerkin 3.18 tapaukseen, koska

$$\frac{\partial}{\partial y}(x - y(x))^2 = 2(x - y(x)) = 2x - 2y(x),$$

jolloin ratkaisu on suora $y = x$ ja integraali 3.12 katoaa tällä suoralla.

Tarkastellaan seuraavaksi esimerkein tilanteita, joissa Eulerin yhtälö ei toteudu tai toteutuu.

Esimerkki 3.22. Tarkastellaan funktionaalia

$$J[y] = \int_1^2 (3y'(x) + 2y(x) + x)\ dx, \tag{3.13}$$

jossa rajaehtoina ovat $y(1) = 3$ ja $y(2) = 5$.

Välttämätön ehto sille, että funktionaalilla 3.22 on ekstremaali annettujen rajaehtojen puitteissa on, että se toteuttaa Eulerin yhtälön

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0.$$

Mutta tässä tapauksessa Eulerin yhtälö on

$$2 - \frac{d}{dx}3 = 0,$$

joka ei selvästikään toteudu. Näin ollen ekstremaalia ei ole olemassa.

Esimerkki 3.23. Tarkastellaan funktionaalia

$$J[y] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{y'(x)^2}{2} + \frac{y(x)^2}{2} + x \right) dx, \tag{3.14}$$

jolla on rajaehdot $y(0) = 0$ ja $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Lasketaan aluksi osittaisderivaatat F_y ja $F_{y'}$, joiksi saadaan

$$F_y = y(x)$$

ja

$$F_{y''} = -y'(x).$$

Näin ollen Eulerin yhtälö saa muodon

$$y(x) - \frac{d}{dx}(-y'(x)) = 0,$$

joka on toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö

$$y''(x) + y(x) = 0.$$

Tämä on helppo ratkaista ja sen yleinen ratkaisu on

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

ja rajaehdot toteuttavat ratkaisu saadaan, kun $C_1 = 0$ ja $C_2 = 1$. Koska $y(x)$ toteuttaa Eulerin yhtälön, niin funktionaalilla 3.14 on olemassa ekstremaali.

3.8 Variaationaalinen derivaatta

Aivan kuten analyysissä myös funktionaalianalyysissä voidaan määritellä differentiaalin lisäksi derivaatta.

Tarkastellaan muotoa

$$J[y] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))\, dx, \quad y(a) = A, \quad y(b) = B \tag{3.15}$$

olevia funktionaaleja, jotka vastaavat yksinkertaisinta variaatio-ongelmaa, joka esiteltiin luvussa 3.6. Menetelmänä on jakaa käyrä ensin äärelliseen määrään n ja sitten antaa $n \longrightarrow \infty$. Jaetaan väli $[a, b]$ tasaisesti $n+1$ osaväliin asettamalla välien päätepisteiksi

$$x_0 = a, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} = b, \quad (x_{i+1} - x_i = \Delta x),$$

ja korvataan sileä käyrä $y(x)$ polygonisuoralla, jonka pisteitä ovat

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n), (x_{n+1}, y_{n+1}),$$

missä $y_i = y(x_i)$. Nyt yhtälöä 3.15 voidaan approksimoida summalla

$$J(y_1, \ldots, y_b) \equiv \sum_{i=0}^{n} F\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}\right)\Delta x, \tag{3.16}$$

mikä on n muuttujan funktio. Lasketaan seuraavaksi osittaisderivaatat

$$\frac{\partial J(y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_k},$$

ja tarkastellaan, että mitä näille derivaatoille tapahtuu, kun osavälien lukumäärä kasvaa rajattomasti. Havaitaan, että yhtälössä 3.16 jokainen muuttuja y_k sijaitsee vain kahdessa termissä, jotka ovat $i = k$ ja $i = k - 1$, jolloin

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial y_k} &= F_y\left(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}\right)\Delta x \\ &\quad + F_{y'}\left(x_{k-1}, y_{k-1}, \frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta x}\right) - F_{y'}\left(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}\right).\end{aligned} \tag{3.17}$$

Kun $\Delta x \longrightarrow 0$ eli kun osavälien lukumäärä kasvaa rajatta, niin yhtälön 3.17 oikea puoli menee nollaksi. Jotta voidaan saada raja-arvo, joka ei ole yhtä kuin nolla, kun $\Delta x \longrightarrow 0$, niin jaetaan yhtälö 3.17 jakajalla Δx jolloin saadaan

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial y_k} &= F_y\left(x_k, y_k, \frac{y_{k+1}-y_k}{\Delta x}\right) \\ &- \frac{1}{\Delta x}\left(F_{y'}\left(x_k, y_k, \frac{y_{k+1}-y_k}{\Delta x}\right) - F_{y'}\left(x_{k-1}, y_{y-1}, \frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta x}\right)\right).\end{aligned} \tag{3.18}$$

Kun $\Delta x \longrightarrow 0$, niin lauseke 3.18 suppenee kohti raja-arvoa

$$\frac{\delta J}{\delta y} \equiv F_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx}F_{y'}(x, y(x), y'(x)),$$

Määritelmä 3.24. (Ks. [1, s. 27]). Yllä olevaa rajaa-arvoa sanotaan funktionaalin 3.15 *variaationaaliseksi derivaataksi*

Huomautus. Variaationaalinen derivaatta $\frac{\delta J}{\delta y}$ on vain Eulerin yhtälön 3.9 vasen puoli, ja siten Eulerin yhtälön merkitys on se, että tarkasteltavan funktionaalin variaationaalisen derivaatan tulisi kadota jokaisessa pisteessä.

3.9 Eulerin yhtälön invarianssi

Oletetaan, että tavanomaisen tasokoordinaatiston sijaan tarkastellaan käyräviivaista koordinaatistoa, jossa koordinaatit ovat u ja v, missä

$$\begin{aligned} x &= x(u, v), \\ y &= y(u, v), \end{aligned} \qquad J = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3.19}$$

Tällöin tavanomaisessa xy-tasossa yhtälöstä $y = y(x)$ saatu käyrä vastaa käyrää, joka saadaan jollakin yhtälöllä

$$v = v(u)$$

uv-tasossa. Kun tehdään muuttujien vaihto, niin funktionaali

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')\ dx$$

muuntuu funktionaaliksi

$$\begin{aligned} J_1[v] &= \int_{a_1}^{b_1} F\left(x(u,v), y(u,v), \frac{y_u + y_v v'}{x_u + x_v v'}\right)(x_u + x_v v')\ du \\ &= \int_{a_1}^{b_1} F_1(u, v, v')\ du, \end{aligned}$$

missä

$$F_1(u,v,v') = F\left(x(u,v), y(u,v), \frac{y_u + y_v v'}{x_u + x_v v'}\right)(x_u + x_v v').$$

Osoitetaan, että jos $y = y(x)$ toteuttaa Eulerin yhtälön

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \tag{3.20}$$

joka vastaa alkuperäisen funktionaalin $J[y]$ tapausta, niin tällöin $v = v(u)$ toteuttaa Eulerin yhtälön

$$\frac{\partial F_1}{\partial v} - \frac{d}{du}\frac{\partial F_1}{\partial v'} = 0 \tag{3.21}$$

joka vastaa uutta funktionaalia $J_1[v]$. Todistetaan tämä variaationaalisen derivaatan avulla. Olkoon $\Delta\sigma$ alue, jonka käyrät $y = y(x)$ ja $y = y(x) + h(x)$ rajaavat, ja olkoon $\Delta\sigma_1$ alue, joka vastaavasti on rajattu käyrien $v = v(u)$ ja $v = v(u) + \eta(u)$ toimesta uv-tasossa. Kun nyt $\Delta\sigma, \Delta\sigma_1 \longrightarrow 0$, niin suhde $\frac{\Delta\sigma}{\Delta\sigma_1}$ lähestyy *jakobiaania* [4, s. 356]

$$J = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

joka on oletuksen nojalla eri kuin nolla. Näin ollen, jos

$$\lim_{\Delta\sigma \to 0} \frac{J[y+h] - J[y]}{\Delta\sigma} = 0,$$

niin myöskin

$$\lim_{\Delta\sigma_1 \to 0} \frac{J_1[v+\eta] + J_1[v]}{\Delta\sigma_1} = 0.$$

Tästä seuraa, että $v(u)$ toteuttaa yhtälön 3.21, jos $y(x)$ toteuttaa yhtälön 3.20.

Huomautus. Sillä, että onko käyrällä ekstremaalia, ei ole riippuvainen koordinaatistosta. Kun ratkaistaan Eulerin yhtälöitä, koordinaattimuunnoksista on usein hyötyä.

Esimerkki 3.25. (Ks. [13, s. 110-111]). Olkoon funktionaali

$$J[y] = \int_a^b \sqrt{x^2 + y^2(x)}\sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

missä a, b ovat jotkin rajaehdot. Tästä saadaan Eulerin yhtälöksi

$$y(x) - xy'(x) - \frac{(x^2 + y^2(x))y''(x)}{1 + y'^2(x)} = 0,$$

joka on kamalan vaikea ratkaistavaksi. Napakoordinaatti muunnoksen avulla tästä kuitenkin päästään hyvin nopeasti eteenpäin. Olkoot $x = r\cos(\theta)$ ja $y = r\sin(\theta)$. Tällöin $x^2 + y^2(x) = r^2(\theta)$ ja $\sqrt{1 + y'^2(x)}\ dx = \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\ d\theta$. Näin ollen alkuperäinen funktionaali saa muodon

$$J[r] = \int_{\alpha}^{\beta} r(\theta)\sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\ d\theta,$$

missä α, β riippuvat rajaehdoista a, b. Havaitaan, että integradissa ei ole muuttujaa θ, joten tilanne on sama kuin esimerkissä 3.17. Täten Eulerin yhtälön ensimmäiseksi integraaliksi saadaan välittömästi

$$f - r' f_{r'} = C,$$

missä f on funktionaalin $J[r]$ integrandi ja C on vakio.

3.10 Toinen variaatio

Määritelmä 3.26. (Ks. [1, s. 98]). Olkoon $\mathcal{R}$ normeerattu lineaariavaruus. Olkoon lisäksi $B[x, y]$ funktionaali, joka on avaruudessa $\mathcal{R}$ määritelty ja avaruuden $\mathcal{R}$ alkioista
x, y riippuvainen. Funktionaalin $B[x, y]$ sanotaan olevan *bilineaarinen*, jos se on lineaarinen funktionaali muuttujan y suhteen jokaista kiinteää alkiota x kohden ja päinvastoin. Täten

$$\begin{aligned} B[x + y, z] &= B[x, z] + B[y, z], \\ B[\alpha x, y] &= \alpha B[x, y], \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} B[x, y + z] &= B[x, y] + B[x, z], \\ B[x, \alpha y] &= \alpha B[x, y] \end{aligned}$$

jokaisella $x, y, z \in \mathcal{R}$ ja jokaisella $\alpha \in \mathbb{R}$.

Määritelmä 3.27. (Ks. [1, s. 98]). Jos bilineaariseen funktionaaliin asetetaan $x = y$, niin saadaan *neliömuotoinen funktionaali.* Neliömuotoisen funktionaalin $A(x) = B[x, x]$ sanotaan olevan *positiivisesti definiitti*, jos $A[x] > 0$ jokaisella $x \neq 0$.

Määritelmä 3.28. (Ks. [1, s. 99]). Olkoot $\mathcal{R}$ normeerattu lineaariavaruus ja funktionaali $J[y]$ määritelty avaruudessa $\mathcal{R}$. Funktionaalin sanotaan olevan *kahdesti differentioituva*, jos sen lisäys voidaan kirjoittaa muodossa

$$\Delta J[h] = \varphi_1[h] + \varphi_2[h] + \varepsilon(h) \left\| h \right\|_2^2,$$

missä lineaarinen funktionaali $\varphi_1[h]$ on ensimmäinen variaatio, lineaarinen funktionaali $\varphi_2[h]$ on neliömuotoinen funktionaali, ja $\varepsilon(h) \longrightarrow 0$, kun $\left\| h \right\|_2 \longrightarrow 0$. Neliömuotoista funktionaalia $\varphi_2[h]$ kutsutaan funktionaalin $J[y]$ *toiseksi variaatioksi* ja sitä merkitään $\delta^2 J[y]$.

Huomautus. Toisen variaation olemassaolo ja yksikäsitteisyys todistetaan kuten ensimmäisenkin tapauksessa todistettiin lauseessa 3.7, joten se sivuutetaan.

Lause 3.29. *Välttämätön ehto sille, että kahdesti differentioituvalla funktionaalilla $J[y]$ on minimi pisteessä $\hat{y}(x)$ on, että*

$$\delta J[\hat{y}] = 0 \text{ ja } \delta^2 J[\hat{y}] \geq 0$$

pisteessä $\hat{y}(x)$ ja kaikilla $h(x) \in \mathcal{D}_2[a,b]$. Maksimin tapauksessa muuten samoin paitsi, että $\delta^2 J[\hat{y}] \leq 0$.

Todistus. (Vrt. [1, s. 99-100]). Määritelmän nojalla

$$\Delta J[h] = \delta J[h] + \delta^2 J[h] + \varepsilon(h) \left\| h \right\|_2^2, \tag{3.22}$$

missä $\varepsilon(h) \longrightarrow 0$, kun $\left\| h \right\|_2^2 \longrightarrow 0$. Lauseen 3.11 nojalla $\delta J[h] = 0$ pisteessä $\hat{y}(x)$ ja jokaisella $h(x) \in \mathcal{D}_2[a,b]$, ja siksi yhtälö 3.22 voidaan sieventää muotoon

$$\Delta J[h] = \delta^2 J[h] + \varepsilon(h) \left\| h \right\|_2^2. \tag{3.23}$$

Siksi pätee, että kun $\left\| h \right\|_2^2$ on riittävän pieni, niin lisäyksen $\Delta J[h]$ merkki on sama kuin toisen variaation $\delta^2 J[h]$ merkki on. Tehdään vastaoletus, että $\delta^2 J[h_0] < 0$ jollakin hyväksyttävällä $h_0 \in \mathcal{D}_2[a,b]$. Tällöin millä tahansa $\alpha \neq 0$ pätee, riippumatta miten pienellä, että

$$\delta^2 J[\alpha h_0] = \alpha^2 \delta^2 J[h_0] < 0.$$

Näin ollen yhtälö 3.23 on negatiivinen mielivaltaisen pienellä $\|h\|_2$. Mutta tämähän on mahdotonta, koska oletuksen nojalla funktionaalilla $J[y]$ on minimi pisteessä $\hat{y}(x)$ eli

$$\Delta J[y] = J[\hat{y} + h] - J[\hat{y}] \geq 0$$

jokasella riittävän pienellä $\|h\|_2$. Tämä on ristiriita. □

Ehto $\delta^2 J[h] \geq 0$ on välttämätön, mutta ei riittävä ehto funktionaalin $J[y]$ minimille.

Määritelmä 3.30. (Ks. [1, s. 100]). Olkoon $\mathcal{R}$ normeerattu lineaariavaruus. Olkoon lisäksi neliömuotoinen funktionaali $\varphi_2[h]$ määritelty avaruudessa $\mathcal{R}$. Neliömuotoisen funktionaalin $\varphi_2[h]$ sanotaan olevan *vahvasti positiivinen*, mikäli on olemassa vakio $k > 0$ siten, että

$$\varphi_2[h] \geq k \|h\|_2^2$$

jokaisella $h(x)$.

Lause 3.31. *Riittävä ehto funktionaalin $J[y]$ minimille pisteessä $\hat{y}(x)$, kun ensimmäinen variaatio $\delta J[h]$ katoaa pisteessä $\hat{y}(x)$, on, että toinen variaatio $\delta^2 J[h]$ on vahvasti positiivinen pisteessä $\hat{y}(x)$.*

Todistus. (Vrt. [1, s. 100]). Olkoon $\hat{y}(x) \in \mathcal{R}$. Nyt $\delta J[h] = 0$ jokaisella hyväksyttävällä $h(x)$, ja siten

$$\Delta J[h] = \delta^2 J[h] + \varepsilon \|h\|_2^2 ,$$

missä $\varepsilon \longrightarrow 0$, kun $\|h\|_2 \longrightarrow 0$. Edelleen pisteessä $\hat{y}(x)$ pätee, että

$$\delta J[h] \geq k \|h\|_2^2 ,$$

missä $k > 0$ on vakio. Siten, riittävän pienellä ε_1, $|\varepsilon| < \frac{1}{2}k$, jos $\|h\|_2 < \varepsilon_1$. Tästä seuraa, että

$$\Delta J[h] = \delta^2 J[h] + \varepsilon \|h\|_2^2 > \frac{1}{2} k \|h\|_2^2 > 0,$$

jos $\|h\|_2 < \varepsilon_1$ eli kun funktionaalilla $J[y]$ on minimi pisteessä $\hat{y}(x)$, kuten väitettiinkin. □

3.11 Legendren ehto

Olkoon $F(x, y, z)$ funktio, jonka jokaisella argumentilla on jatkuvat osittaisderivaatat kolmanteen kertalukuun saakka. Etsitään toiselle variaatiolle lauseke yksinkertaisimpaan variaatio-ongelmaan eli funktionaaliin, joka on muotoa

$$J[y] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))\, dx, \tag{3.24}$$

ja jotka ovat määritelty käyrille $y(x)$, joilla on kiinnitetyt päätepisteet

$$y(a) = A, \quad y(b) = B.$$

Aluksi asetetaan funktiolle $y(x)$ lisäys $h(x)$, joka täyttää rajaehdot

$$h(a) = 0, \quad h(b) = 1. \tag{3.25}$$

Nyt lauseen 3.5 nojalla funktionaalin $J[y]$ lisäys voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} \Delta J[h] &= J[y+h] - J[y] \\ &= \int_a^b (F_y h(x) + F_{y'} h'(x))\, dx \\ &+ \frac{1}{2}\int_a^b (\overline{F}_{yy} h(x)^2 + 2\overline{F}_{yy'} h(x)h'(x) + \overline{F}_{y'y'} h'(x)^2)\, dx, \end{aligned} \tag{3.26}$$

missä jäännöstermi on mukana ja

$$\overline{F} = F_{yy}(x, y(x) + \theta h(x), y'(x) + \theta h'(x)) \quad (0 < \theta < 1),$$

ja vastaavasti $\overline{F}_{yy'}$ ja $\overline{F}_{y'y'}$. Jos korvaamme $\overline{F}_{yy}$, $\overline{F}_{yy'}$ ja $\overline{F}_{y'y'}$ pisteessä $(x, y(x), y'(x))$ derivaatoilla F_{yy}, $F_{yy'}$ ja $F_{y'y'}$, niin yhtälö 3.26 voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} \Delta J[h] &= \int_a^b (F_y h(x) + F_{y'} h'(x))\, dx \\ &+ \frac{1}{2}\int_a^b (F_{yy} h(x)^2 + 2F_{yy'} h(x)h'(x) + F_{y'y'} h'(x)^2)\, dx + \varepsilon, \end{aligned} \tag{3.27}$$

missä ε on itseasiassa

$$\int_a^b (\varepsilon_1 h(x)^2 + \varepsilon_2 h(x)h'(x) + \varepsilon_3 h'(x)^2)\, dx. \tag{3.28}$$

Koska derivaatat F_{yy}, $F_{yy'}$ ja $F_{y'y'}$ ovat jatkuvia niin siitä seuraa, että $\varepsilon_1(h)$, $\varepsilon_2(h)$, $\varepsilon_3(h) \longrightarrow 0$, kun $\|h\|_2 \longrightarrow 0$. On ilmeistä, että ε on infitesimaalin verran suurempi kuin $\frac{1}{\|h\|_2^2}$. Havaitaan, että tässä on kyse samasta asiasta kuin ensimmäisessä variaatiossa, jota on selvennetty yhtälössä 3.2.

Yhtälön 3.27 oikean puolen ensimmäinen termi on variaatio $\delta[h]$, ja toinen termi on toinen variaatio $\delta^2 J[h]$. Näin ollen funktionaalille 3.24 pätee, että toinen variaatio on

$$\delta^2 J[h] = \frac{1}{2}\int_a^b (F_{yy}h(x)^2 + 2F_{yy'}h(x)h'(x) + F_{y'y'}h'(x)^2)\ dx. \tag{3.29}$$

Yhtälöä 3.29 voidaan muokata edelleen käytännöllisempään muotoon. Osittaisintegroimalla ja yhtälön 3.25 avulla saadaan yhtälö

$$\int_a^b 2F_{yy'}h(x)h'(x)\ dx = -\int_a^b \left(\frac{d}{dx}F_{yy'}\right)h(x)^2\ dx.$$

Joten yhtälö 3.29 voidaan kirjoittaa uudelleen

$$\delta^2 J[h] = \int_a^b (Ph'(x)^2 + Qh(x)^2)\ dx, \tag{3.30}$$

missä

$$P = P(x) = \frac{1}{2}F_{y'y'}, \quad Q = Q(x) = \frac{1}{2}\left(F_{yy'} - \frac{d}{dx}F_{yy'}\right). \tag{3.31}$$

Lause 3.32. *Välttämätön ehto sille, että neliömuotoinen funktionaali*

$$\delta^2 J[h] = \int_a^b (Ph'(x)^2 + Qh(x)^2)\ dx, \tag{3.32}$$

joka on määritelty kaikilla funktioilla $h(x) \in \mathcal{D}_1[a,b]$ siten, että $h(a) = h(b) = 0$, on epänegatiivinen, on että

$$P(x) \geq 0 \quad (a \leq x \leq b). \tag{3.33}$$

Todistus. (Vrt. [1, s. 103]). Tehdään vastaoletus, että ehto 3.33 ei päde. Toisin sanoen oletetaan, että $P(x_0) = -2\beta$ $(\beta > 0)$ jossakin pisteessä $x_0 \in [a,b]$. Tällöin, koska $P(x)$ on jatkuva, niin on olemassa $\alpha > 0$ siten, että $a \leq x_0 - \alpha$, $x_0 + \alpha \leq \beta$, ja

$$P(x_0) < -\beta \quad (x_0 - \alpha \leq x \leq x_0 + \alpha).$$

Muodostetaan funktio $h(x) \in \mathcal{D}_1[a,b]$ siten, että funktionaali 3.32 on negatiivinen. Olkoon

$$h(x) = \begin{cases} \sin^2 \frac{\pi(x-x_0)}{\alpha}, & \text{kun } x_0 - \alpha \le x \le x_0 + \alpha, \\ 0, & \text{muutoin.} \end{cases} \tag{3.34}$$

Tällöin pätee, että

(3.35)
$$\begin{aligned} \int\limits_a^b (Ph'(x)^2 + Qh(x)^2)\,dx = \int\limits_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} P\frac{}{\pi}^2\alpha^2 \sin^2 \frac{2\pi(x-x_0)}{\alpha}\,dx \\ + \int\limits_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} Q \sin^4 \frac{\pi(x-x_0)}{\alpha}\,dx < -\frac{2\beta\pi^2}{\alpha} + 2M\alpha, \end{aligned}$$

missä

$$M = \max_{a \le x \le b} |Q(x)|\,.$$

Kun α on riittävän pieni, yhtälön 3.35 oikea puoli tulee negatiiviseksi ja siten myös funktionaali 3.32 on negatiivinen funktio $h(x)$ on määritelty kuten 3.34. Tästä päädytään ristiriitaan. □

Lause 3.33. *Välttämätön ehto sille, että funktionaalilla*

$$J[y] = \int\limits_a^b F(x, y(x), y'(x))\,dx,$$

missä $y(a) = A$, $y(b) = B$, on minimi käyrällä $y(x)$, on että epäyhtälö (Legendreen ehto)

$$F_{y'y'} \ge 0 \text{ ja } \delta J[h] = 0$$

pätee käyrän jokaisessa pisteessä.

Todistus. Käytetään ensin lausetta 3.32, jolloin voidaan soveltaa lausetta 3.31, ja väite seuraa välittömästi. □

3.12 Yksinkertaisimman variaatio-ongelman yleistys

Tarkastellaan tutkielman lopuksi yksinkertaisimman variaatio-ongelman yleistystä. Ennen sitä täytyy tutkia funktionaaleja usean muuttujan tapauksissa.

Olkoon $F(x, y, z, p, q)$ funktio, jonka ensimmäinen ja toinen derivaatta ovat jatkuvia kaikkien funktion argumenttien suhteen. Tarkastellaan funktionaalia, joka on muotoa

$$J[z] = \int\int_R F(x, y, z, z_x, z_y)\ dxdy, \tag{3.36}$$

missä R on jokin suljettu alue ja z_x, z_y ovat funktion $z = (x, y)$ osittaisderivaatat. Oletetaan, että etsitään funktiota $z(x, y)$, joka täyttää ehdot:

1. Funktio $z(x, y)$, sen ensimmäinen derivaatta ja sen toinen derivaatta ovat kaikki jatkuvia alueessa R.

2. Funktio $z(x, y)$ on määritelty alueen R reunalla Γ.

3. Funtkionaalilla 3.36 on ekstremaali pisteessä $z(x, y)$.

Lause 3.34. *Jos $\alpha(x, y)$ on kiinteä funktio, joka on jatkuva suljetussa alueessa R, ja jos integraali*

$$\int\int_R \alpha(x, y)h(x, y)\ dxdy \tag{3.37}$$

katoaa jokaisella funktiolla $h(x, y)$, jolla on jatkuvat ensimmäinen ja toinen derivaatta alueessa R ja jonka arvo on yhtä kuin nolla reunalla Γ, niin tällöin $\alpha(x, y) = 0$ kaikkialla alueessa R.

Todistus. (Vrt. [1, s. 22-23]). Tehdään vastaoletus, että $\alpha(x, y) > 0$ jossain alueen R pisteessä. Tällöin $\alpha(x, y)$ on myös positiivinen jossain ympyrässä

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq \varepsilon^2, \tag{3.38}$$

joka kirjoitetaan joukkona

$$D = \{(x, y) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq \varepsilon^2\}, \tag{3.39}$$

ja joukko D sisältyy alueeseen R, jonka keskipiste on (x_0, y_0) ja säde on ε. Määritellään funktio $h(x, y)$ siten, että $h(x, y) = 0$ ympyrän 3.38 ulkopuolella ja sisäpuolella

$$h(x, y) = ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - \varepsilon^2)^3.$$

Tällöin $h(x,y)$ täyttää väitteen ehdot. Mutta nyt huomataan, että

$$\int\int_R \alpha(x,y)h(x,y)\ dxdy = \int\int_D \alpha(x,y)h(x,y)\ dxdy,$$

joten päädytään ristiriitaan, koska ylläolevan integraali on positiivinen. $\square$

Lasketaan funktionaalin 3.36 variaatio. Olkoon $h(x,y)$ mielivaltainen funktio, jonka ensimmäinen ja toinen derivaatta ovat molemmat jatkuvia alueessa R ja, jotka katoavat alueen R reunalla Γ. Tällöin, jos $z(x,y)$ kuuluu funktionaalin 3.36 määrittelyalueeseen, niin kuuluu myöskin $z(x,y)+h(x,y)$. Koska

$$\begin{aligned} \Delta J = J[z+h] - J[z] = \int\int_R &(F(x,y,z+h,z_x+h_x,z_y+h_y) \\ &- F(x,y,z,z_x,z_y)\ dxdy, \end{aligned} \tag{3.40}$$

josta edelleen lauseen 3.5 nojalla

$$\Delta J = \int\int_R (F_z h + F_{z_x} + F_{z_y} h_y)\ dxdy + \dots,$$

missä jäännös on jätetty pois, kuten tapana on. Yhtälön oikealla puolella oleva integraali on lisäyksen ΔJ pääasiallinen lineaariosa, ja siten funktionaalin $J[z]$ variaatio on

$$\delta J = \int\int_R (F_z h + F_{z_x} + F_{z_y} h_y)\ dxdy.$$

Nyt, havaitaan, että

$$\begin{aligned} &\int\int_R (F_{z_x} h_x + F_{z_y} h_y)\ dxdy \\ &= \int\int_R \left(\frac{\partial}{\partial x}(F_{z_x}) + \frac{\partial}{\partial y}(F_{z_y})\right) dxdy - \int\int_R \left(\frac{\partial}{\partial x}F_{z_x} + \frac{\partial}{\partial y}F_{z_y}\right) h\ dxdy \\ &= \int_\Gamma (F_{z_x} h\ dy - F_{z_y} h\ dx) - \int\int_R \left(\frac{\partial}{\partial x}F_{z_x} + \frac{\partial}{\partial y}F_{z_y}\right) h\ dxdy, \end{aligned}$$

missä viimeisessä askeleessa sovellettiin Greenin lausetta [4, s. 429 ja s. 433]

$$\int\int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_\Gamma (P\ dx + Q\ dy).$$

Alueen R reunalla Γ integraali on yhtä kuin nolla, koska $h(x,y)$ katoaa reunalla Γ, ja siten, vertaamalla kahta edellistä kaavaa havaitaan, että

$$\delta J = \int\int_R \left(F_z - \frac{\partial}{\partial x}F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{z_y}\right) h(x,y)\ dxdy. \tag{3.41}$$

Näin ollen ehto sille, että variaatio $\delta J = 0$ implikoi, että kaksinkertainen integraali 3.41 katoaa kaikilla $h(x,y)$, jotka täyttävät annetut ehdot. Nyt lauseen 3.34 nojalla päädytään seuraavaan toisen kertaluvun osittaisdifferentiaaliyhtälöön, joka on jälleen Eulerin yhtälö:

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y} = 0. \tag{3.42}$$

Esimerkki 3.35. (Ks. [1, s. 24]). Etsitään minimaalinen pinta-ala annetun *tasa-arvokäyrän* [4, s. 87] rajaamalta alueelta. Täytyy etsiä minimi funktionaalille, joka on muotoa

$$J[z] = \int\int_R \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\; dxdy.$$

Tästä saadaan derivoimalla, että

$$F_z = 0,$$

$$F_{z_x} = \frac{z_x}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} = \frac{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}(z_{xx}) - z_x \left(\frac{z_x z_{xx} + z_y z_{xy}}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \right)}{1 + z_x^2 + z_y^2}$$

ja vastaavasti myös

$$\frac{\partial}{\partial y} F_{z_y} = \frac{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}(z_{yy}) - z_y \left(\frac{z_y z_{yy} + z_x z_{xy}}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \right)}{1 + z_x^2 + z_y^2}.$$

Tästä päädytään yhtälöön

$$(1 + z_x^2 + z_y^2) z_{xx} - z_x^2 z_{xx} - z_x z_y z_{xy} + (1 + z_x^2 + z_y^2) z_{yy} - z_y^2 z_{yy} - z_y z_x z_{xy} = 0,$$

jolloin Eulerin yhtälöksi saadaan

$$r(1 + q^2) - 2spq + t(1 + p^2) = 0, \tag{3.43}$$

missä $p = z_x$, $q = z_y$, $r = z_{xx}$, $s = z_{xy}$, $t = z_{yy}$. Yhtälöllä 3.43 yksinkertainen geometrinen merkitys, jota voidaan avata *keskikaarevuuden* [10, luku 2]

$$M = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right) = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)}$$

avulla, missä E, F, G ja e, f, g ovat pinnan ensimmäisen ja toisen perusmuodon kertoimia [11]. Jos pinta on annettu eksplisiittisenä funktiona, joka on muotoa $z = (x, y)$, niin

$$E = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2$$

$$e = \frac{r}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad f = \frac{s}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad g = \frac{t}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

ja siten

$$M = \frac{(1 + p^2)t - 2spq + (1 + q^2)r}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Yllä osoittaja vastaa Eulerin yhtälön 3.43 vasenta puolta. Näin ollen yhtälö 3.43 implikoi, välttämätön ehto sille, että kyseessä on minimaalinen pinta on, että pinnan keskikaarevuus on nolla.

Lause 3.36. *Välttämätön ehto sille, että käyrä $y_i(x)$ on funktionaalin*

$$\int_a^b F(x, y_1(x), \ldots, y_n(x), y_1'(x), \ldots, y_n'(x))\ dx$$

ekstremaali on, että käyrät $y_i(x)$ toteuttavat Eulerin yhtälöt 3.46.

Todistus. (Vrt. [1, s. 35]). Olkoon $F(x, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n)$ funktio, jonka jokaisella argumentilla on jatkuva ensimmäinen ja jatkuva toinen derivaatta. Etsitään välttämätöntä ehtoa, jotta muotoa

$$J[y_1, \ldots, y_n] = \int_a^b F(x, y_1(x), \ldots, y_n(x), y_1'(x), \ldots, y_n'(x))\ dx, \tag{3.44}$$

olevalle funktionaalille, joka riippuu n kappaleesta jatkuvasti differentioituvista funktioista $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, jotka toteuttavat rajaehdot

$$y_i(a) = A_i, \quad y_i(b) = B, \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{3.45}$$

Toisin sanoen etsitään ekstremaalia funktionaalille 3.44, joka on määritelty kaikkien niiden sileiden käyrien joukossa, jotka yhdistävät kaksi pistettä $n + 1$ ulotteisessa euklidisessa avaruudessa ε_{n+1}.

Kuten aiemminkin, täytyy laskea funktionaalille 3.44 variaatio, jotta voidaan löytää välttämätön ehto sen ekstremaalille. Oletetaan, että jokainen $y_1(x)$ korvataan funktiolla $y_i(x)+h_1(x)$. Tässä tapauksessa funktionaalin $J[y_1, \ldots, y_n]$

variaatiolla δJ tarkoitetaan lauseketta, joka on lineaarinen pisteissä $h_i(x), h_i'(x)$, missä $i = 1, \ldots, n$, ja eroaa lisäyksestä

$$\Delta J = J[y_1 + h_1, \ldots, y_n + h_n] - J[y_1, \ldots, y_n]$$

infitesimaalin verran enemmän kuin $\frac{1}{h_i}$ ja $\frac{1}{h_i'}$, missä $i = 1, \ldots, n$ (ks. yhtälö 3.2). Koska molemmat $y_i(x)$ ja $y_i(x) + h_i(x)$ toteuttavat rajaehdot 3.45, niin jokaisella i on selvää, että

$$h_i(a) = h_i(b) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Nyt lauseen 3.5 nojalla saadaan

$$\begin{aligned}\Delta J &= \int_a^b (F(x, \ldots, y_1(x) + h_i(x), y_i'(x) + h_i'(x), \ldots)\ dx \\ &- F(x, \ldots, y_i(x), y_i'(x), \ldots))\ dx \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^n (F_{y_i} h_i(x) + F_{y_i'} h_i'(x))\ dx + \ldots,\end{aligned}$$

missä jäännöstermi on jätetty pois. Viimeinen integraali oikealla puolen esittää lisäyksen ΔJ pääasiallista lineaariosaa, ja siten funktionaalin $J[y_1, \ldots, y_n]$ variaatio on

$$\delta J = \int_a^b \sum_{i=1}^n (F_{y_i} h_i(x) + F_{y_i} h_i'(x))\ dx.$$

Koska kaikki lisäykset $h_i(x)$ ovat riippumattomia, voidaan niistä valita mielivaltaisesti yksi, kunhan vain se täyttää rajaehdot. Loput voidaan asettaa nollaksi. Näin ollen välttämätön ehto ekstremaalille on

$$\int_a^b (F_{y_i} h_i(x) + F_{y_i'} h_i'(x))\ dx = 0 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Lauseen 3.4 nojalla saadaan seuraava Eulerin yhtälöryhmä

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{3.46}$$

Koska 3.46 on yhtälöryhmä, joka koostuu n kappaleesta toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöistä, niin sen yleinen ratkaisu koostuu $2n$ kappaleesta mielivaltaisista vakioista, jotka määritetään rajaehtojen 3.45 avulla. $\square$

Huomautus. Juuri osoitettiin, että miten voidaan löytää hyvin määritellyt Eulerin yhtälöt 3.46 jokaiselle funktionaalille, joka on muotoa 3.44. Kuitenkin kaksi erilaista integrandia F voi johtaa samaan Eulerin yhtälöistä koostuvaan joukkoon. Olkoon

$$\Phi = \Phi(x, y_1, \dots, y_n)$$

mikä tahansa kahdesti differentioituva funktio, ja olkoon

$$\Psi(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') = \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Psi}{\partial y_i} y_i', \tag{3.47}$$

Nyt suoralla laskutoimituksella löydetään, että

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y_i'}\right) \equiv 0 \quad \text{jokaisella } i \in \{1, \dots, n\},$$

ja siten funktionaalit

$$\int_a^b F(x, y_1(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), \dots, y_n'(x))\, dx \tag{3.48}$$

ja

$$\begin{aligned} &\int_a^b (F(x, y_1(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), \dots, y_n'(x)) \\ &+ \Psi(x, y_1(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), \dots, y_n'(x)))\, dx \end{aligned} \tag{3.49}$$

johtaa samaan Eulerin yhtälöistä koostuvaan yhtälöryhmään. Joten integraali

$$\int_a^b \Psi(x, y_1(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), \dots, y_n'(x))\, dx = \int_a^b \frac{d\Psi}{dx}\, dx$$

saa saman arvon kaikkien rajaehdot 3.45 toteuttavien käyrien joukossa. Toisin sanoen funktionaalit 3.48 ja 3.49, jotka ovat määritelty niiden funktioiden joukossa, jotka toteuttavat rajaehdot 3.45, eroavat vakion verran. Erityisesti voidaan valita Ψ siten, että tämä vakio häviää, mutta $\Psi \not\equiv 0$.

Huomautus. Kahden funktionaalin sanotaan olevan *ekvivalentit*, mikäli niillä on samat ekstremaalit. Edellisen huomautuksen nojalla, kaksi muotoa 3.44 olevaa funktionaalia ovat ekvivalentit, jos niiden integrandit eroavat muotoa 3.47 olevan funktion verran. On myös selvää, että kaksi tämän muotoista funktionaalia ovat ekvivalentit, mikäli niiden integrandit eroavat vakiokertoimen $c \neq 0$ verran. Yleisesti muotoa 3.48 oleva funktionaali on ekvivalentti muotoa 3.49 olevan funktionaalin kanssa, kun integrandi F korvataan integrandilla cF.

Esimerkki 3.37. (Vrt. [1, s. 36-37]). Tarkastellaan valon etenemistä epähomogeenisessa väliaineessa. Oletetaan, että kolmiulotteinen avaruus on täytetty optisesti epähomogeenisella väliaineella siten, että valon etenemisnopeus jokaisessa pisteessä saadaan sijoittamalla pisteen koordinaatit funktioon $v(x, y(x), z(x))$. *Fermat'n periaatteen* [5, s. 337] nojalla, valo kulkee käyrää pitkin pisteestä pisteeseen, missä valon kulkemiseen kuluu lyhyin aika. Jos pisteitä A ja B yhdistävä käyrä $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ on määritelty, kuten

$$c(x) = (x, y(x), z(x)),$$

niin aika, joka kuluu valolta näiden pisteiden välin kulkemiseen, saadaan integraalina

$$\int_a^b \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2 + z'(x)^2}}{v(x, y(x), z(x))}\, dx.$$

Nyt Eulerin yhtälöistä koostuva yhtälöryhmä on

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\sqrt{1 + y'(x)^2 + z'(x)^2}}{v(x, y(x), z(x))^2} + \frac{d}{dx}\frac{y'(x)}{v\sqrt{1 + y'(x)^2 + z'(x)^2}} &= 0,\\
\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\sqrt{1 + y'(x)^2 + z'(x)^2}}{v(x, y(x), z(x))^2} + \frac{d}{dx}\frac{z'(x)}{v\sqrt{1 + y'(x)^2 + z'(x)^2}} &= 0,
\end{aligned}$$

jonka avulla saadaan differentiaaliyhtälöt, jotka esittävät käyriä, joita pitkin valo kulkee.

Esimerkki 3.38. (Vrt. [1, s. 37-38]). Oletetaan, että σ on pinta, joka määritellään

$$r = r(u, v). \tag{3.50}$$

Lyhintä reittiä, joka kulkee kahden pinnalla σ olevien pisteiden välillä tätä pintaa σ pitkin, kutsutaan *geodeesiksi*. Pinnan σ geodeesien yhtälöt ovat Eulerin yhtälöitä, jotka vastaavat variaatio-ongelmaa, jossa pinnalta σ etsitään kahden pinnalla σ olevan pisteen minimaalista etäisyyttä.

Pinnalla 3.50 kulkeva käyrä voidaan määritellä yhtälöillä

$$u = u(t), \quad v = v(t),$$

jolloin tämä käyrä voidaan määritellä asettamalla

$$c(t) = (u(t), v(t)).$$

Pisteiden t_1 ja t_2 välinen kaaren pituus parametrin t suhteen on integraali

$$J[u,v] = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}, \tag{3.51}$$

missä

$$E = r_u \cdot r_u, \quad F = r_u \cdot r_v, \quad G = r_v \cdot r_v.$$

Kirjoitetaan funktionaalille 3.51 Eulerin yhtälöt, joiksi saadaan

$$\frac{E_u u'^2 + 2F_u u'v' + G_u v'^2}{\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}} - \frac{d}{dt}\frac{2(Eu' + Fv')}{\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}} = 0,$$
$$\frac{E_v u'^2 + 2F_v u'v' + G_v v'^2}{\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}} - \frac{d}{dt}\frac{2(Fu' + Gv')}{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2} = 0.$$

Etsitään ympyrän muotoiselle sylinterille

$$r = (a\cos\varphi, a\sin\varphi, z) \tag{3.52}$$

geodeesi, missä muuttujat φ ja z ovat parametrien u ja v roolissa. Koska sylinterin tapauksessa kertoimet E, F ja G ovat

$$E = a^2, \quad F = 0, \quad G = 1,$$

niin sylinterin geodeeseilla on yhtälöt

$$\frac{d}{dt}\frac{a^2\varphi'}{\sqrt{a^2\varphi'^2 + z'^2}} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{z'}{\sqrt{a^2\varphi'^2 + z'^2}} = 0,$$

josta integroimalla

$$\frac{a^2\varphi'}{a^2\varphi'^2 + z'^2} = C_1, \quad \frac{z'}{\sqrt{a^2\varphi'^2 + z'^2}} = C_2.$$

Kun jaetaan ensimmäinen näistä yhtälöistä toisella, saadaan

$$\frac{dz}{d\varphi} = c_1,$$

jolla on ratkaisu

$$z = c_1\varphi + c_2,$$

jotka esittävät heliksejä tai ympyröitä sylinterin 3.52 pinnalla.

Kirjallisuutta

[1] Gelfand, I. M., Fomin, S. V. *Calculus of Variations*. New Jersey: Prentice-Hall, 1963.

[2] Kreyszig, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York: John Wiley & Sons. Inc., 1978.

[3] Liberzon, D. *Calculus of Variations and Optimal Control Theory: A Concise Introduction*. New Jersey: Princeton University Press, 2012.

[4] Colley, S. J. *Vector Calculus Fourth Edition*. Boston: Pearson, 2012.

[5] Benenson, W., Harris, J. W., Stocker, H., Lutz, H. *Handbook of Physics*. New York: Springer, 2002.

[6] Yates, R. C. *A Handbook on Curves and Their Properties*. Ann Arbor: Edwards, 1952.

[7] Lockwood, E. H. *A Book of Curves*. Lontoo: Cambridge University Press, 1961.

[8] Munkres, J.R. *Topology (2nd Edition)*. Upper Saddle River: Prentice Hall Inc, 2000.

[9] Tenenbaum, M., Pollard, H. *Differential Equations: An Elementary Textbook for Students of Mathematics, Engineering, and the Sciences*. New York: Dover Publications, 1985.

[10] Spivak, M. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Houston: Publish or Perish, 1989.

[11] Kreyszig, E. *Differential Geometry*. Toronto: University of Toronto Press, 1959.

[12] Rudin, W. *Principles of Mathematical Analysis*. New York: McGraw-Hill, 1976.

[13] Sagan, H. *Introduction to the Calculus of Variations.* New York: Dover Publications, 1993.