PRO GRADU -TUTKIELMA

Marianne Holm

Trigonometria Suomen kouluopetuksessa 1950–2000-luvuilla

TAMPEREEN YLIOPISTO
Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka
Helmikuu 2015

Tampereen yliopisto
Informaatiotieteiden yksikkö
HOLM, MARIANNE: Trigonometria Suomen kouluopetuksessa 1950–2000-luvuilla
Pro gradu -tutkielma, 66 s.
Matematiikka
Helmikuu 2015

Tiivistelmä

Tässä tutkielmassa selvitettiin, kuinka trigonometrian opetus on muuttunut Suomessa 1950–2000-lukujen aikana. Tutkielman ensimmäisessä osassa on tutustuttu kouluopetuksessa esiintyvien trigonometrian oppisisältöjen matemaattiseen teoriaan. Tutkielman toisessa osassa tutustutaan trigonometrian kouluopetukseen tutkittavan ajanjakson aikana. Kouluissa opetettaviin trigonometrian oppisisältöihin on perehdytty oppiennätysten, opetussuunnitelmien sekä oppikirjojen avulla. Trigonometrian oppimäärä on aikojen saatossa opetussuunnitelmauudistusten myötä vähentynyt huomattavasti. Trigonometrian opetuksen kehityksen kannalta selkein murros tutkittavalla ajanjaksolla on tapahtunut 1970-luvulla, jonka jälkeen trigonometristen oppisisältöjen määrät ovat supistuneet vähitellen.

Asiasanat trigonometria, oppikirja, oppiennätys, opetussuunnitelma

Sisältö

1 Johdanto

Matematiikan opetuksen kehittämisestä on puhuttu lähiaikoina jatkuvasti eri medioissa. Viime joulukuussa hyväksytty perusopetuksen opetussuunnitelma sekä tällä hetkellä tekeillä oleva lukion opetussuunnitelma ovat nostaneet kiivaan keskustelun siitä, miten koulumatematiikka saataisiin vastaamaan mahdollisimman hyvin nykypäivän tarpeita. Jotta voimme kehittää matematiikan opetusta, on otettava selvää, miten nykyiseen tilanteeseen on tultu ja mitkä asiat siihen ovat vaikuttaneet. Tässä tutkimuksessa asiaa lähestyttiin trigonometrian opetuksen näkökulmasta, koska trigonometrian opetuksen kehityksestä Suomen kouluissa ei ole tehty aiempaa tutkimusta. Trigonometrian opetuksella on hyvin pitkä historia, jonka läpi käyminen kokonaisuudessaan ei ollut mahdollista tässä tutkielmassa sen laajuuden tähden. Tästä syystä tutkittavaksi ajanjaksoksi valittiin 1950–2000-luvut, jolloin uskottiin saavan mahdollisimman kattava kuva trigonometrian opetuksen kehityksen viimeisimmistä vaiheista ja siitä, miten nykyisiin trigonometrian opetuksen oppisisältöihin on päädytty.

Tutkielman pohjana ovat oppiennätykset sekä opetussuunnitelmat, joiden avulla on pyritty kartoittamaan, mitä trigonometrian oppisisältöjä Suomen kouluissa on eri vuosikymmenien aikana opetettu. Lisäksi tutkimukseen on valittu jokaisen oppiennätyksen sekä opetussuunnitelman aikakaudelta trigonometriaa käsiteltäviä oppikirjoja, joiden avulla on saatu konkreettisempaa kuvaa trigonometrian opetuksesta. Tutkimuksen avulla on pyritty samaan käsitys siitä, miten asetetut tavoitteet trigonometrian opetukselle ovat välittyneet oppikirjojen avulla kouluihin.

Trigonometrialla on valtava määrä erilaisia käyttötarkoituksia, kuten esimerkiksi rakentamisessa, tähtitieteessä, biologiassa, arkkitehtuurissa, maanmittauksessa sekä lisäksi sinikäyrän avulla voidaan kuvata muun muassa sähkötekniikassa vaihtosahkön aallonpituuksia. Edellä esitettyä listaa voisi jatkaa loputtomiin. On siis selvää, että trigonometria ei ole olemassa vain itsensä vuoksi vaan se on erittäin tärkeä työkalu, jota tarvitaan hyvin monilla eri aloilla.

Trigonometrian opetus on koettu hyvin tärkeäksi kautta aikojen sen monikäyttöisyyden vuoksi. Trigonometrian oppimistulokset ovat kuitenkin hyvin heikkoja, joka todettiin esimerkiksi Susanna Paavola pro gradu -tutkielmassa [51]. Paavolan tekemä kyselytutkimus suomalaisten opiskelijoiden trigonometristen funktioiden ja niihin liittyvien käsitteiden osaamisesta osoitti, että asioiden hallinta on heikkoa. Lisäksi Halmetoja [10] on myös huolissaan viimeisimpien opetussuunnitelmauudistusten tuomista muutoksisa, koska niiden johdosta lukion trigonometrian oppimäärät ovat näivettyneet kaavakokoelmien selailuksi. Halmetojan mukaan lukion nykyisen opetussuunnitelman asettamien oppisisältojen hallitseminen ei anna riittävää pohjaa jatko-opintoihin, jonka tähden korkeakouluissa trigonometrian opiskelua joudutaan aloittamaan aivan alkeista. Onkin siis mielenkiintoista selvittää, kuinka nykyiseen tilanteeseen trigonometrian opetuksen osalta ollaan päädytty.

Osa I

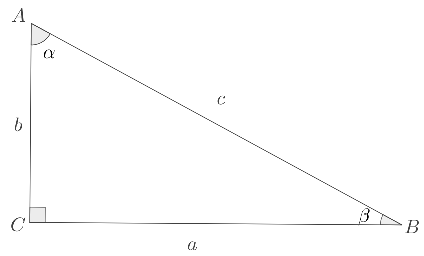
Trigonometrian matemaattinen teoria

Tässä tutkielman osassa käydään läpi keskeisimpiä kouluopetuksessa esille tulleita trigonometrian oppisisältöjä ja näiden sisältöjen taustalla olevaa matemaattista teoriaa. Ensimmäisessä osassa keskitytään trigonometrian perusteisiin eli käydään läpi peruskäsitteet, oleellisimmat määritelmät sekä laskukaavat. Läpi käydyt oppisisällöt on valittu sen mukaan, mitä 1950–2000-luvuilla matematiikan opetus on pitänyt sisällään oppikirjojen, oppiennätysten ja opetussuunnitelmien mukaan. Tämä tutkielman osa pohjautuu pääosin Kalle Väisälän teokseen Trigonometria [62]. Matemaattisessa teoriassa esitetyt kuvat on laadittu GeoGebra -ohjelmalla.

2 Suorakulmaisen kolmion trigonometriaa

2.1 Terävän kulman trigonometristen funktioiden määritelmät

Tässä luvussa taskastelemme suorakulmaista kolmiota ABC, jonka hypotenuusa on $\overline{AB} = c$ ja kateetit ovat $\overline{BC} = a$ ja $\overline{AC} = b$ (kuva 2.1). Kolmion kulma $\sphericalangle C$ on suora kulma eli $90°$ ja $\sphericalangle A = \alpha$ on terävä kulma eli $0° < \alpha < 90°$. Kaikki tällaiset suorakulmaiset kolmiot, joiden yksi terävä kulma on suuruudeltaan α, ovat yhdenmuotoisia. Näin ollen kaikissa näissä kolmioissa vastaavien sivujen suhteet ovat yhtäsuuret. Tällöin sivujen suhde on riippuvainen kulman α suuruudesta. Suorakulmaisen kolmion sivujen suhde on terävän kulman funktio. Tällaisia funktioita kutsutaan *trigonometrisiksi funktioiksi.*



Kuva 2.1. Suorakulmainen kolmio

Määritelmä 2.1. [5, s. 30] Olkoon α kolmion ABC terävä kulma kuvan 2.1 merkinnöin. Tällöin kulman α trigonometriset funktiot *sini* (sin), *kosini* (cos), *tangentti* (tan), *kotangentti* (cot), *sekantti* (sec) ja *kosekantti* (csc) ovat

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha &= \frac{a}{c} & \qquad \cot\alpha &= \frac{b}{a} = \frac{1}{\tan\alpha} \\
\cos\alpha &= \frac{b}{c} & \qquad \sec\alpha &= \frac{c}{b} = \frac{1}{\cos\alpha} \\
\tan\alpha &= \frac{a}{b} & \qquad \csc\alpha &= \frac{c}{a} = \frac{1}{\sin\alpha}
\end{aligned}
$$

Suomessa yleisimmässä käytössä ovat lähinnä vain vasemmalla esitetyt trigonometristä funktiota: sini, kosini ja tangentti. Sen sijaan kolmea oikeanpuoleista funktiota, kotangentti, sekantti ja kosekantti, käytetään enimmäkseen amerikkalaisessa kirjallisuudessa. [32, s. 8]

Määritelmä 2.2. Kahta kulmaa, joiden summa on 90° sanotaan toistensa komplementtikulmiksi.

Kun suorakulmaisen kolmion toinen terävä kulma on α, niin toinen terävä kulma on silloin sen komplementtikulma $90^\circ - \alpha$. Näin ollen trigonometristen funktioiden määritelmistä seuraa *komplementtikulman trigonometriset funktiot*:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha \qquad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot\alpha \qquad \cot(90^\circ - \alpha) = \tan\alpha$$

Kulman trigonometrinen funktio on samalla sen komplementtikulman vastaava *kofunktio*.

2.2 Pythagoraan lause

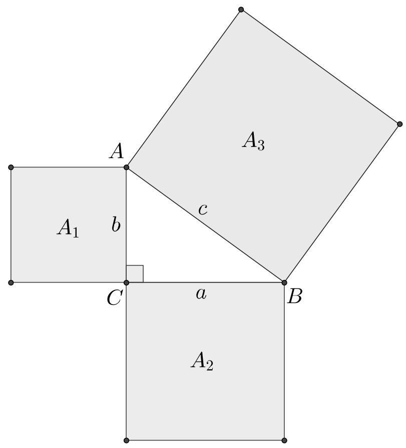
Pythagoraan lause on hyvin monikäyttöinen erilaisissa käytännön tilanteissa, jonka tähden sen opettelu on koettu hyvin tärkeäksi. Lisäksi se on myös teoreettisesti hyvin tärkeä, jonka tähden sen osaaminen jatko-opintoja ajatellen on välttämätöntä. Pythagoraan lause on kuulunut koko tutkittavan ajanjakson ajan keskikoulun ja peruskoulun oppisisältöihin.

Lause 2.1. *(Pythagoraan lause) Olkoon $\triangle ABC$ suorakulmainen kolmio, jonka kulma $\sphericalangle C$ on suora kulma, kuten kuvassa 2.1. Olkoon kolmion $\triangle ABC$ kateettien pituudet a ja b sekä hypotenuusan pituus c. Tällöin*

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Pythagoraan lauseen mukaan suorakulmaisessa kolmiossa kateettien neliöiden summa on yhtä suuri kuin hypotenuusan neliö. Eukleides esittelee teoksessaan Alkeet ensimmäisessä kirjassa myös *käänteisen Pythagoraan lauseen*, jonka mukaan kolmion yhden sivun pituuden neliön ollessa yhtä suuri kuin kahden muun sivun pituuden neliöiden summa, niin voidaan päätellä kolmion olevan suorakulmainen [7, s. 62–65].

Kun Pythagoraan lausetta tulkitaan geometrisesti niin se väittää, että piirrettäessä kuvan 2.2 mukaisesti neliöt suorakulmaisen kolmion jokaiselle sivulle, niin kahden pienemmän neliön pinta-alojen summa on yhtä suuri kuin isomman neliön pinta-ala. Kuvassa 2.2 kahden pienemmän neliön eli kateeteille piirrettyjen neliöiden pinta-alat ovat A_1 ja A_2. Samoin hypotenuusalle piirretyn neliön pinta-ala on A_3. Siis Pythagoraan lause väittää, että $A_1 + A_2 = A_3$.

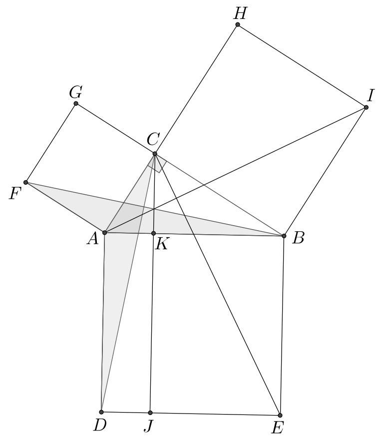


Kuva 2.2. Pythagoraan lauseen geometrinen tulkinta

Pythagoraan lausetta on todistettu aikojen saatossa monin eri tavoin, joista käydään läpi seuraavaksi vain muutama tapa. Seuraava todistustapa on esitetty Eukleideen alkeissa ja se perustuu juuri edellä mainittuun geometriseen tulkintaan. Kyseisen todistuksen arvellaan olevan täysin Eukeleideen itsensä keksimä, koska toisin kuin tätä vanhemmissa todistuksissa, niin tässä ei tarvita yhdenmuotoisuuden käsitettä. [7, s. 62–63]

Todistus. (1. tapa) Olkoon $\triangle ABC$ suorakulmainen kolmio, jossa kulma $\sphericalangle C$ on suora kulma. Osoitetaan, että hypotenuusalle $\overline{AB}$ piirretyn neliön $ABED$ pinta-ala on yhtä suuri kuin kateeteille $\overline{AC}$ ja $\overline{BC}$ piirrettyjen neliöiden $ACGF$ ja $BCHI$ pinta-alat yhteensä.

Olkoon $\overline{CK}$ kärjestä C piirretty kolmion $\triangle ABC$ korkeusjana ja leikatkoon suora $\overleftrightarrow{CK}$ janan$\overline{DE}$ pisteessä J kuvan 2.3 mukaisesti. Nyt selvästi nähdään, että jana $\overline{CJ}$ on yhdensuuntainen janojen $\overline{AD}$ ja $\overline{BE}$ kanssa. Kulmat $\sphericalangle ACB$ ja $\sphericalangle ACG$ ovat suoria kulmia, joten pisteet B, C ja G ovat samalla suoralla. Samoin voidaan päätellä myös, että pisteet A, C ja H ovat samalla suoralla.



Kuva 2.3. Ensimmäinen Pythagoraan lauseen todistus

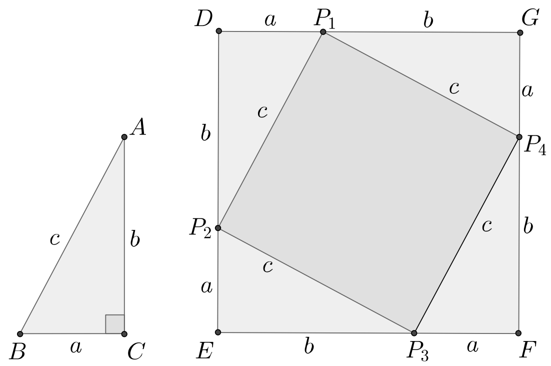
Kulmat $\sphericalangle DAC$ ja $\sphericalangle BAF$ ovat yhtä suuret, koska kumpikin kulma saadaan kulmasta $\sphericalangle BAC$ lisäämällä siihen suora kulma. Koska neliöiden kaikki sivut ovat yhtä pitkiä, niin saadaan, että $\overline{AD} = \overline{AB}$ ja $\overline{AC} = \overline{AF}$. Näin ollen on osoitettu, että kolmioiden $\triangle ACD$ ja $\triangle ABF$ vastinsivut ja niiden välinen kulma ovat yhtä suuret. Siis kolmiot $\triangle ACD$ ja $\triangle ABF$ ovat yhtenevät ja näin ollen niiden pinta-alat ovat myös yhtä suuret.

Suorakulmiolla $ADJK$ ja kolmiolla $\triangle ACD$ on yhteinen kanta ja niiden muut kärjet ovat samalla suoralla, koska $\overline{AD} \| \overline{CJ}$. Tässä voidaan olettaa suorakulmion ja kolmion pinta-alojen kaavat tunnetuiksi, joiden mukaan voidaan päätellä, että kolmion $\triangle ACD$ pinta-ala on puolet suorakulmion $ADJK$ pinta-alasta. Samoin myös kolmion $\triangle ABF$ pinta-ala on puolet suorakulmion $ACGF$ pinta-alasta, joka on kateetin $\overline{AC}$ neliö. Nyt on osoitettu, että kateetin $\overline{AC}$ neliö on pinta-alaltaan yhtä suuri kuin suorakulmio $ADJK$, joka on hypotenuusan $\overline{AB}$ neliöön sisältyvä suorakulmio.

Vastaavalla tavalla voidaan todistaa, että toiselle kateetille $\overline{BC}$ piirretyn neliön $BCHI$ pinta-ala on yhtä suuri kuin suorakulmion $JEBK$ pinta-ala. Näin ollen ollaan todistettu, että hypotenuusalle $\overline{AB}$ piirretty neliö $ABED$ on yhtä suuri pinta-alaltaan kuin neliöiden $ACGF$ ja $BCHI$ pinta-alat yhteensä. $\square$

Seuraavaksi käydään läpi toinen hieman erilainen Pythagoraan lauseen todistus. Tämä todistus on hyvin havainnollinen ja selkeä, jonka tähden se sopii hyvin esitettäväksi jopa peruskoululaisille

Todistus. [6, s. 34–35] *(2. tapa)* Olkoon $\triangle ABC$ suorakulmainen kolmio, jonka kulma $\sphericalangle C$ on suora kulma. Merkitään kolmion sivujen pituuksia seuraavasti: $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ ja $\overline{AC} = b$ kuvan 2.4 mukaisesti.



Kuva 2.4. Toinen Pythagoraan lauseen todistus

Konstruoidaan kuvan 2.4 mukainen neliö $DEFG$, jonka sivujen pituudet ovat $a + b$. Valitaan neliön sivuilta pisteet P_1, P_2, P_3 ja P_4 siten, että $\overline{P_1D} = \overline{P_2E} = \overline{P_3F} = \overline{P_4G} = a$ ja $\overline{GP_1} = \overline{DP_2} = \overline{EP_3} = \overline{FP_4} = b$. Tällöin muodostuu alkuperäisen suorakulmaisen kolmion $\triangle ABC$ kanssa yhtenevät kolmiot

$\triangle P_2P_1D$, $\triangle P_3P_2E$, $\triangle P_4P_3F$ ja $\triangle P_1P_4G$, koska kaikilla näillä kolmioilla on kaksi yhtä pitkää sivua ja niiden välillä oleva kulma on yhtä suuri. Yhtenevien kolmioiden avulla saadaan, että $\overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3} = \overline{P_3P_4} = \overline{P_4P_1} = c$. Monikulmio $P_1P_2P_3P_4$ on neliö, koska sen kaikki sivut ovat yhtä pitkiä ja kaikki kulmat ovat suoria kulmia. Tämä voidaan osoittaa esimerkiksi kulman $\sphericalangle PP_2P_3$ kohdalla seuraavalla tavalla:

$$\begin{aligned}\sphericalangle P_1P_2P_3 &= 180^\circ - \sphericalangle DP_2P_1 - \sphericalangle P_3P_2E \\ &= 180^\circ - \sphericalangle A - \sphericalangle B \\ &= \sphericalangle C \\ &= 90^\circ\end{aligned}$$

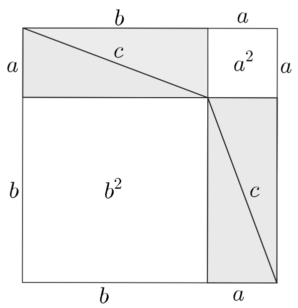
Neliön $DEFG$ pinta-alalle voidaan määrittää kaksi erilaista kaavaa. Neliön $DEFG$ sivun pituus on $a+b$, jolloin sen pinta-ala on $A(DEFG) = (a+b)^2$. Toisaalta neliön $DEFG$ pinta-ala saadaan myös neliön $P_1P_2P_3P_4$ ja kolmioiden $\triangle P_2P_1D$, $\triangle P_3P_2E$, $\triangle P_4P_3F$ ja $\triangle P_1P_4G$ pinta-alojen summana, jolloin pinta-alaksi saadaan $A(DEFG) = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} = c^2 + 2ab$. Nyt merkitsemällä saadut neliön pinta-alat yhtä suuriksi saadaan:

$$\begin{aligned}&(a+b)^2 = c^2 + 2ab \\ &a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \\ &a^2 + b^2 = c^2\end{aligned}$$

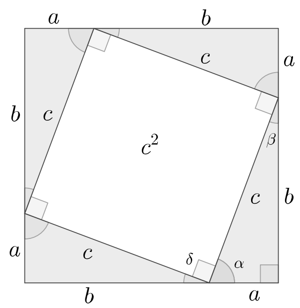
□

Käydään vielä lopuksi hyvin paljon edellistä todistusta muistuttava todistus, jossa käytetään myös hyväksi pinta-aloja. Tämä todistus on hyvin havainnollinen ja konkreettinen, joten tämän tyyllisen todistuksen avulla kouluissa voitaisiin tuoda esille matemaattisen todistuksen luonnetta. Todistuksen pystyy havainnollistamaan hyvin leikkaamalla vaikka paperista tarvittavat palaset ja havaitsemalla konkreettisesti kappaleiden pinta-alojen olevan yhtä suuret. Nyt kuitenkin käymme läpi hieman matemaattisemman version kyseisestä todistuksesta.

Todistus. (3. tapa) Konstruoidaan kaksi yhtä suurta neliötä, joiden sivun pituus on $a + b$. Molempiin neliöihin merkitään neljä suorakulmaista kolmiota kuvan 2.5 mukaisesti.



(a)



(b)

Kuva 2.5. Kolmas Pythagoraan todistus

Näiden suorakulmaisten kolmioiden kateetit ovat a ja b sekä hypotenuusa on c. Nämä kaikki kolmiot ovat yhteneviä, koska kaikilla näillä kolmioilla on kaksi yhtä pitkää sivua ja niiden välillä oleva kulma on yhtä suuri. Kun molemmista alkuperäisistä neliöistä vähennetään nämä neljä yhtenevää kolmiota, jäljelle jääneet pinta-alat molemmissa kuvioissa ovat yhtä suuret.

Kuvan 2.5 (a) jäljelle jääneiden neliöiden pinta-alojen summa on $a^2 + b^2$.

Kuvan 2.5 (b) jäljelle jäänyt nelikulmio on neliö, koska jokaisen sen kulman voidaan osoittaa olevan 90°. Otetaan esimerkiksi kulma δ:

$\delta = 180° - (\alpha + \beta)$ ja koska $\alpha + \beta = 90°$
$\delta = 90°$

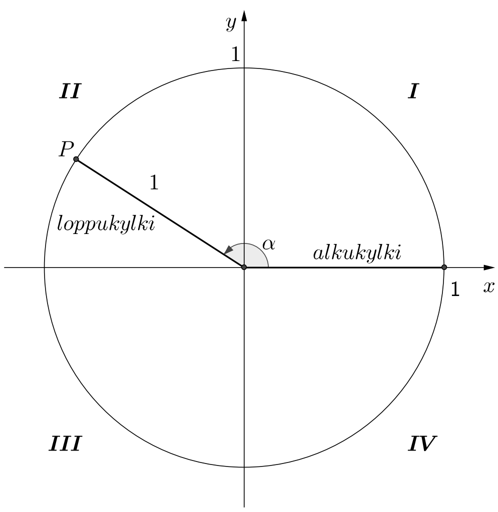
Siis neliön pinta-ala on c^2 ja sen sivu on c, joka on aiemmin määritellyn suorakulmaisen kolmion hypotenuusa. Molempien kuvioiden pinta-alat ovat yhtä suuret kolmioiden poistamisen jälkeen. Nyt voidaan merkitä kuvioiden pinta-aloja seuraavasti:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

□

2.3 Yksikköympyrä ja kehäpiste

Määritelmä 2.3. Ympyrää, jonka keskipiste on origo ja säde on 1, kutsutaan *yksikköympyräksi*. Yksikköympyrän yhtälö on $x^2 + y^2 = 1$. Kulma α esitetään yksikköympyrän keskuskulmana niin, että kulman kärki on origossa ja kulman alkukylki on positiivisella x-akselilla kuvan 2.6 mukaisesti. Kulman α loppukyljen ja ympyrän kehän leikkauspiste P on kulman α *kehäpiste*.

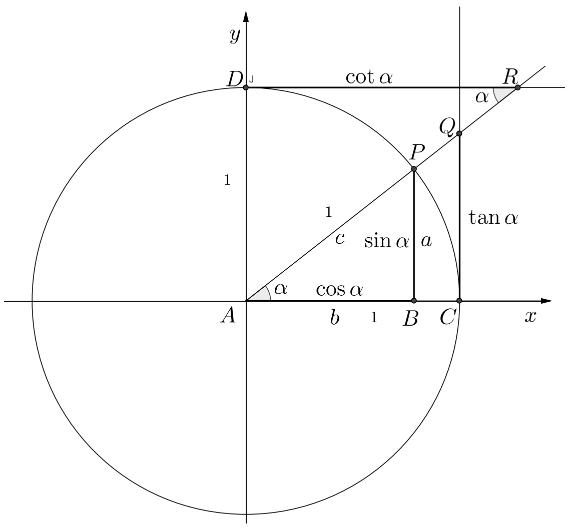


Kuva 2.6. Yksikköympyrä ja kulman kehäpiste

Trigonometriassa kulma ajatellaan asetetuksi kuvan 2.6 mukaisesti suorakulmaiseen koordinaatistoon, joka jakaa tason neljään neljännekseen. Neljännekset nimetään yleisesti käyttäen roomalaisia numeroita I–IV. Numerointi kiertää vastapäivään kuten kuvassa 2.6. Sen mukaan, missä koordinaattitason neljänneksessä kulman loppukylki kulloinkin on, sanotaan myös kulman olevan I, II, III tai IV neljänneksessä. Esimerkiksi kuvassa 2.6 kulma on toisessa neljänneksessä.

2.4 Terävän kulman trigonometristen funktioiden määritelmät yksikköympyrässä

Tarkastelemme vielä terävää kulmaa α, jonka asetamme kuvan 2.7 mukaisesti xy-koordinaatistoon. Kulman kärki A tulee origoon ja sen alkukylki positiiviselle x-akselille. Koordinaattiakseleilla oleviin pisteisiin C ja D piirretään tangentit. Tällöin kulman loppukylki leikkaa r-säteisen origokeskisen ympyrän kehän leikkauspisteessä P, pystytangenttia pisteessä Q ja vaakatangenttia pisteessä R. Asetamme origokeskisen ympyrän säteen pituudeksi 1, jolloin saadaan yksikköympyrä. Tällöin suorakulmaisista kolmioista $\triangle ABP$, $\triangle ACQ$ ja $\triangle ADR$, joissa kussakin on yhtenä sivuna ympyrän säde ja toisena kulmana α, saadaan trigonometristen funktioiden määritelmä seuraavanlaiseen muotoon. Seuraava lause on määritelty vain terävälle kulmalle, mutta tutkielman luvussa 3 trigonometristen funktioiden määritelmä yleistetään koskemaan kaikenlaisia kulmia (kts. kappale 3.2).



Kuva 2.7. Suorakulmainen kolmio yksikköympyrässä

Lause 2.2. [62, s. 8–9] *Olkoon terävä kulma α yksikköympyrän keskuskulma ja piste P kulman α kehäpiste kuvan 2.7 mukaisesti. Tällöin trigonometristen funktoiden määritelmä saadaan seuraavanlaiseen muotoon*

$\sin\alpha$ *on kulman α kehäpisteen P etäisyys x-akselista eli pisteen P y-koordinaatti*

$\cos\alpha$ *on kulman α kehäpisteen P etäisyys y-akselista eli pisteen P x-koordinaatti*

$\tan\alpha$ *on pisteen Q etäisyys x-akselista*

$\cot\alpha$ *on pisteen R etäisyys y-akselista*

3 Yleiset trigonometriset funktiot

Edellä trigonometriset funktiot on määritelty, kun α on terävä kulma ($0 < \alpha < 90°$). Tässä luvussa yleistämme määritelmän koskemaan kaikkia kulmia.

3.1 Suunnattu kulma

Edellä olemme määritelleet trigonometriset funktiot, kun α on terävä kulma. Pyrkimyksenä on yleistää määritelmä koskemaan kaikkia kulmia. Jotta mukaan saadaan myös negatiiviset ja yli 360° kulmat, niin kulmakäsite on tarpeellista laajentaa ja tutkia *suunnattuja kulmia.*

Trigonometriassa kulma ajatellaan asetettavaksi xy-koordinaatistoon niin että sen kärki on origokeskisen yksikköympyrän origossa ja alkukylki on positiivisella x-akselilla. *Positiivisen kulman* voidaan ajatella syntyvän niin, että kulman alkukylki on positiivisella x-akselilla ja loppukylki kiertyy origon ympäri positiiviseen kiertosuuntaan eli vastapäivään. Loppukyljen kiertyessä negatiiviseen kiertosuuntaan eli myötäpäivään saadaan *negatiivinen kulma.*

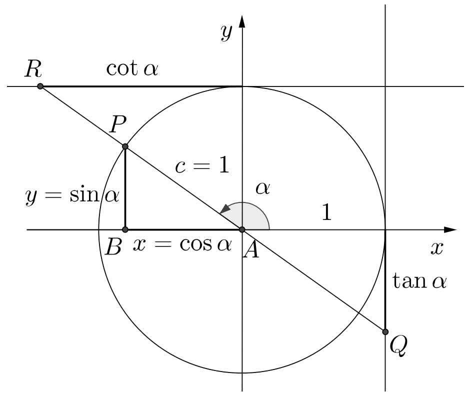
Jos annamme kulman loppukyljen kiertyä positiiviseen suuntaan origon ympäri enemmän kuin 360°, niin saamme kulman, joka on suurempi kuin 360°. Kun loppukyljen annetaan kiertyä origon ympäri yhä enemmän, saadaan kuinka suuria positiivisia kulmia tahansa. Jos taas annamme kulman loppukyljen kiertyä negatiiviseen kiertosuuntaan, niin saadaan vastaavasti kuinka pieniä kulmia tahansa.

3.2 Trigonometristen funktioiden yleistäminen

Tarkastelimme jo aiemmin kappaleessa 2.4 suorakulmaiseen xy-koordinaatistoon sijoitettua terävää kulmaa. Nyt laajennettaessamme trigonometristen funktioiden määritelmää kaikille kulmille sopivaksi, siirrymme käsittelemään kulmia jälleen suorakulmaiseen xy-koordinaatistoon.

Määritelmä 3.1. Olkoon kulma α minkalainen kulma tahansa. Esitetään kulma α yksikköympyrän keskuskulmana ja olkoon kulman α kehäpiste P, jonka koordinaatit ovat (x, y), kuten kuvassa 3.1. Tällöin saadaan trigonometristen funktioiden yleiset määritelmät muotoon:

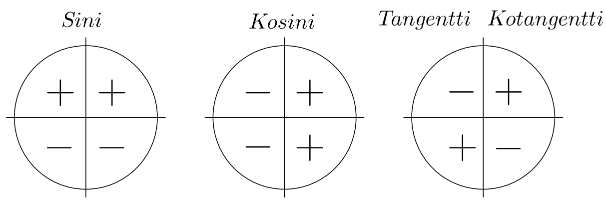
$$\begin{array}{lll} \sin\alpha = y & \cot\alpha = \dfrac{x}{y} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\ (y \neq 0) & \tan\alpha = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\ (x \neq 0) \\ \cos\alpha = x & \sec\alpha = \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\cos\alpha}\ (x \neq 0) & \csc\alpha = \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{\sin\alpha}\ (y \neq 0) \end{array}$$



Kuva 3.1. Yleiset trigonometriset funktiot

Jos kulma α on terävä kulma, määritelmä yhtyy aikaisempaan lauseeseen 2.2. Lisäksi kuvasta 3.1 voidaan helposti todeta, että aiemmin terävälle kulmalle yksikköympyrän avulla esitellyt trigonometriset funktiot (lause 2.2) pätevät kaikenlaisiin kulmiin. Nyt kuitenkin on huomattava, että Q- ja R-pisteiden määrittelemiseksi on usein tarpeellista jatkaa kulman α loppukylkeä täydeksi suoraksi. [62, s. 16]

Kehäpisteen avulla voidaan määritellä myös trigonometristen funktioiden merkki eri neljänneksissä. Oppikirjoissa puhutaan usein *merkkikaavioista.*



Kuva 3.2. Merkkikaaviot

Tangentin ja kotangentin määritelmien mukaan ne ovat toistensa käänteislukuja, joten saadaan

$$\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} \qquad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$

Sijoittamalla pisteen P koordinaatit $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ yksikköympyrän yhtälöön $x^2+y^2 = 1$ saadaan yleisesti voimassa oleva Pythagoraan lause trigonometrisille funktioille.

Lause 3.1. *Yleinen Pythagoraan lause trigonometrisille funktioille. Kaikille kulmille α pätee*

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Todistus. Jos α on suora kulma, niin

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1^2 + 0 = 1$$

Jos α on terävä kulma, niin Pythagoraan lauseen mukaan saadaan

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = 1$$

Jos α on tylppä kulma, niin sen vieruskulman β on oltava terävä kulma

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$$

Näin ollen lause on todistettu. [31, s. 61–62]

□

3.3 Peruskaavat ja funktioiden väliset yhteydet

Tähän kappaleeseen on koottu vielä yhteen edellä esiteltyjä kaavoja, joita kutsutaan usein kirjallisuudessa *trigonometrian peruskaavoiksi* niiden perustavaa laatua olevan merkityksen vuoksi trigonometriassa. Näiden trigonometrian peruskaavojen avulla pystytään lausumaan kukin trigonometrinen funktio jokaisen muun trigonometrisen funktion avulla. Peruskaavoja käytettäessä tulee tuntea määritettävän funktion merkki vaikka sen perusteella, missä neljänneksessä kulma on.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} \qquad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \cot\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

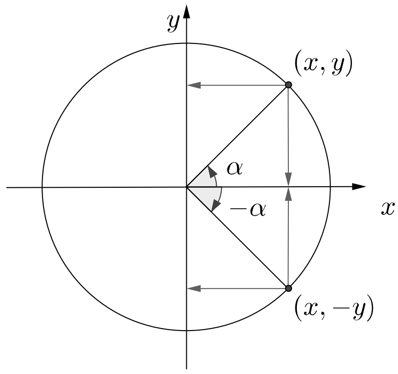
Lause 3.2. *Trigonometristen funktioiden väliset yhteydet:*

$$\begin{aligned}
\sin x &= \pm\sqrt{1-\cos^2 x} = \pm\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 x}}\\
\cos x &= \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}} = \pm\frac{\cot x}{\sqrt{1+\cot^2 x}}\\
\tan x &= \frac{1}{\cot x} = \pm\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \pm\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}\\
\cot x &= \frac{1}{\tan x} = \pm\frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x} = \pm\frac{\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}
\end{aligned}$$

Lauseen 3.2 kaavoja käytettäessä on huomattava, että siinä esiintyville neliöjuurille on otettava määritettävän kulman neljännestä vastaava merkki merkkikaavioiden mukaisesti (kts. kuva 3.2).

3.4 Vasta-, suplementti- ja eksplementtikulmat

Kulman α ja sen vastakulman $-\alpha$ kehäpisteet ovat symmetrisesti x-akselin suhteen. Siis kehäpisteiden y-koordinaatit ovat toistensa vastalukuja. Kun taas vastakulmien kehäpisteiden x-koordinaatit ovat samat. Tämä selkiytyy kuvasta 3.3.



Kuva 3.3. Vastakulmien sinit ja kosinit

Lause 3.3. *Vastakulmien α ja $-\alpha$ sinit, tangentit ja kotangentit ovat vastalukuja ja kosinit ovat yhtä suuret.*

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha \qquad \cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

Kulmat α ja β ovat toistensa suplementtikulmat, jos kulmien summa on $180°$. Tällöin suplementtikulmille on voimassa:

$$\sin\alpha = \sin\beta \qquad \cos\alpha = -\cos\beta$$
$$\tan\alpha = -\tan\beta \qquad \cot\alpha = -\cot\beta$$
$$\sec\alpha = -\sec\beta \qquad \csc\alpha = \csc\beta$$

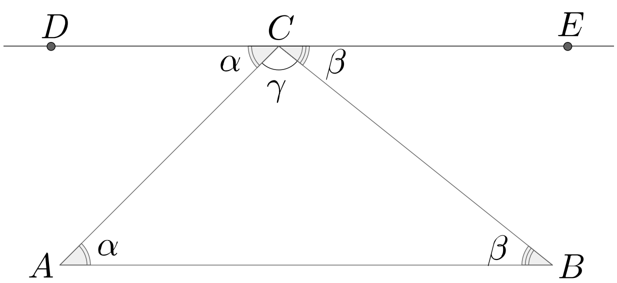
Kulmat α ja β ovat toistensa eksplementtikulmat, jos kulmien summa on $360°$. Tällöin eksplementtikulmille on voimassa:

$$\sin\alpha = -\sin\beta \qquad \cos\alpha = \cos\beta$$
$$\tan\alpha = -\tan\beta \qquad \cot\alpha = -\cot\beta$$
$$\sec\alpha = \sec\beta \qquad \csc\alpha = -\csc\beta$$

3.5 Kolmion kulmien summa

Lause 3.4. *Kolmion kulmien summa on oikokulma eli $180°$.*

Todistus. Oletetaan, että kolmion $\triangle ABC$ kulmat ovat α, β ja γ kuten kuvassa 3.4. Todistamista varten piirretään kuvan mukaisesti apusuora $\overleftrightarrow{DE}$, joka kulkee kolmion kärjen C kautta ja on yhdensuuntainen kolmion sivun $\overline{AB}$ kanssa. Nyt selvästi nähdään, että $\sphericalangle ACD = \alpha$ sekä $\sphericalangle BCE = \beta$. Tällöin $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ ja lause on todistettu.



Kuva 3.4. Kolmion kulmien summa

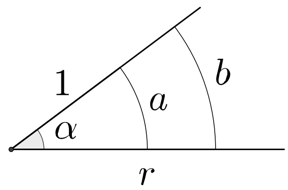
□

3.6 Radiaanit

Kulman α suuruus voidaan ilmaista muun muassa tähän mennessä käytetyillä asteilla tai radiaaneilla.

Määritelmä 3.2. Kulman α suuruus *radiaaneissa* on kulmaa vastaavan ympyrän kaaren b suhde säteeseen r

$$\alpha = \frac{b}{r}$$



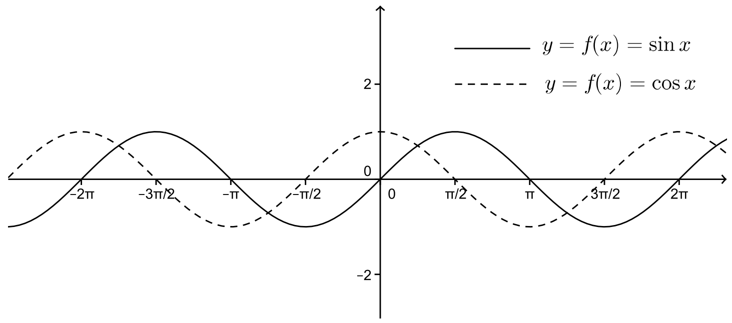
Kuva 3.5. Radiaanit

Kulman suuruus radiaaneina on reaaliluku, koska se on kahden pituuden suhde. Radiaania kutsutaan myös absoluuttiseksi kulmanyksiköksi ja sille voidaan käyttää tarvittaessa lyhennettä rad. Yksikköympyrän tapauksessa ympyrän säde $r = 1$, jolloin kulman suuruus radiaaneissa vastaa kulmaa vastaavan yksikkösäteisen ympyränkaaren a pituutta. Yhteys asteiden ja radiaanien välille saadaan parhaiten täyskulman avulla, koska koko ympyrän kehän pituus on $2\pi r$, niin täyskulma eli $360° = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ radiaania. [5, s. 5–7]

3.7 Trigonometristen funktioiden jaksollisuus ja kuvaajat

Yksikköympyrän avulla voidaan päätellä funktion $\sin x$ saamat arvot, kun kulma x kasvaa arvosta 0 arvoon 2π. Kun kulman x suuruus kasvaa arvosta 0 arvoon $\frac{\pi}{2}$, niin funktion $\sin x$ arvo kasvaa arvosta 0 arvoon 1. Kun kulma kasvaa arvosta $\frac{\pi}{2}$ arvoon $\frac{3\pi}{2}$, niin funktion $\sin x$ arvo vähenee arvosta 1 arvoon -1. Kun kulma kasvaa arvosta $\frac{3\pi}{2}$ arvoon 2π, niin silloin funktion $\sin x$ arvo kasvaa arvosta -1 arvoon 0. Kun kulmalle x annetaan arvoksi muita reaalilukuja saadaan kuvan 3.6 mukainen kuvaaja, jossa sinifunktiota kuvaa yhtenäinen viiva. [5, s. 76–78]

Samoin voidaan päätellä, mitä arvoja funktio $\cos x$ saa, kun kulma x kasvaa arvosta 0 arvoon 2π. Kun kulma x kasvaa arvosta 0 arvoon π, niin $\cos x$ pienenee arvosta 1 arvoon -1. Kun kulma kasvaa arvosta π arvoon 2π, niin funktion arvo kasvaa arvosta -1 arvoon 1. Samoin kuin edellä myös kosinifunktion kuvaaja saadaan kuvan 3.6 mukaiseksi, jossa kyseinen kuvaaja on kuvattu katkonaisella viivalla. [5, s. 79–80]



Kuva 3.6. Sinikäyrä $y = \sin x$ ja kosinikäyrä $y = \cos x$

Kuvan 3.6 kuvaajista nähdään, että funktiot $\sin x$ ja $\cos x$ on määritelty kaikilla reaaliluvun x arvoilla. Funktioiden $\sin x$ ja $\cos x$ arvojoukko on välillä $[-1, 1]$. Sini- ja kosinifunktiot ovat jatkuvia ja niiden saamat arvot toistuvat 2π:n välein, joten funktiot ovat jaksollisia ja niiden perusjakso on 2π. Kun kulmaan x lisätään 2π:n positiivisia tai negatiivisia monikertoja n, niin saadaan kulma, jolla on sama kehäpiste kuin kulmalla x. Tällöin kulmien kehäpisteiden x-koordinaatit ovat samat, joten kulmien kosinit ovat yhtä suuret. Samoin myös kulmien kehäpisteiden y-koordinaatit ovat samat, joten myös kulmien sinit ovat yhtä suuret. Samoin voidaan päätellä myös kosinin osalta, joten näin ollen saadaan ilmaistua funktioiden jaksollisuus seuraavalla tavalla:

$$\sin(x + n \cdot 2\pi) = \sin x,\ n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(x + n \cdot 2\pi) = \cos x,\ n \in \mathbb{Z}$$

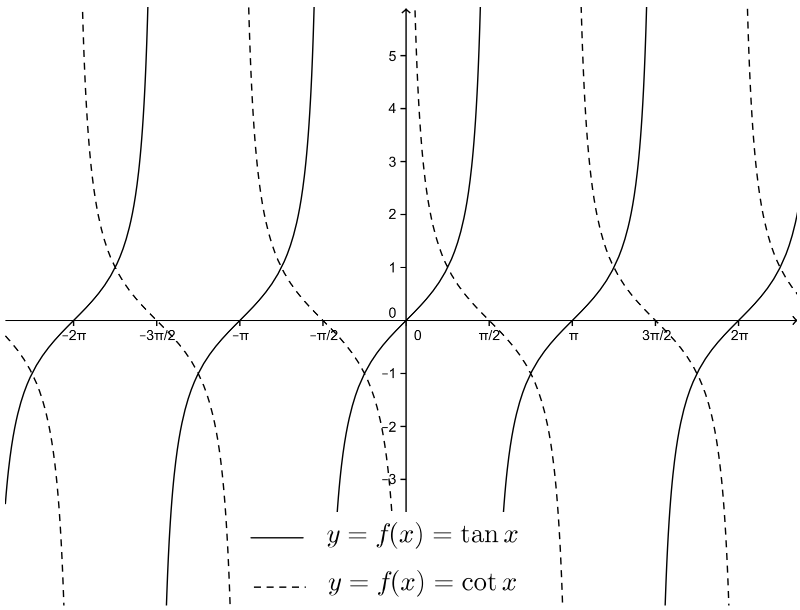
Lisäksi kuvaajasta nähdään, että sinifunktio on pariton funktio, koska $\sin(-x) = -\sin x$ eli ehto $f(-x) = -f(x)$ toteutuu kaikissa funktion määrittelypisteissä. Näin ollen sinifunktion kuvaaja on symmetrinen origon suhteen. Sen sijaan kosinifunktio on parillinen funktio, koska $\cos(-x) = \cos x$ eli ehto $f(-x) = f(x)$ toteutuu kaikissa funktion määrittelypisteissä.

Yksikköympyrän avulla voidaan päätellä, mitä arvoja funktio $y = \tan x$ saa, kun kulma x kasvaa arvosta $-\frac{\pi}{2}$ arvoon $\frac{\pi}{2}$. Kun x kasvaa arvosta $-\frac{\pi}{2}$ arvoon 0, niin $\tan x$ kasvaa $-\infty$:stä arvoon 0. Kun x kasvaa arvosta 0 arvoon $\frac{\pi}{2}$, niin funktion arvo kasvaa arvosta 0 kohti ∞:tä. Näin välille $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ saatu käyrä toistuu π:n välein, kuten kuvassa 3.7 on kuvattu tangenttifunktion kuvaajaa yhtenäisellä viivalla. Funktion nollakohdat ovat $x = n\pi$. Funktion merkki vaihtuu funktion nollakohdissa sekä kohdissa $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, joissa tangenttia ei ole määritelty, koska näissä kohdissa kuvaajalla on y-akselin suuntaiset asymptootit. [5, s. 108–109]

Kuvaan 3.7 on piirretty katkoviivalla myös funktion $y = \cot x$ kuvaaja, jonka asymptootteina ovat suorat $x = n\pi$. Tangentti ja kotangentti ovat parittomia funktioita, joten $\tan(-x) = -\tan x$ ja $\cot(-x) = -\cot x$. [5, s. 109–110] Tangentti- ja kotangenttifunktion arvojoukko on $\mathbb{R}$ ja niiden niiden saamat arvot toistuvat π:n välein, joten näin ollen saadaan ilmaistua funktioiden jaksollisuus seuraavalla tavalla:

$$\tan(x + n \cdot \pi) = \tan x,\ n \in \mathbb{Z}$$

$$\cot(x + n \cdot \pi) = \cot x,\ n \in \mathbb{Z}$$



Kuva 3.7. Tangenttikäyrä $y = \tan x$ ja kotangenttikäyrä $y = \cot x$

3.8 Yhteen- ja vähennyslaskukaavat

Lause 3.5. *Sinin ja kosinin yhteen- ja vähennyslaskukaavat*

$$(1)\ \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

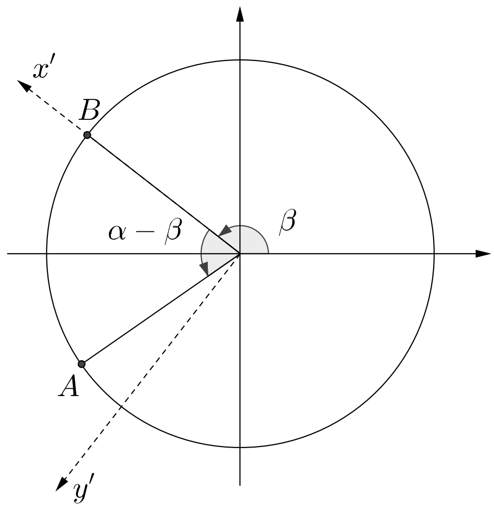
$$(2)\ \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$(3)\ \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$(4)\ \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

Todistus. [33, s. 6–7] Todistetaan ensin kosinin vähennyslaskukaava (lause 3.5 kohta 1). Lisättäessä kulmaan α ja β sopivat 2π:n moninkerrat voidaan olettaa, että $0 \leq \alpha, \beta < 2\pi$. Määritelmän 3.3 mukaan $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\beta - \alpha)$, joten näin ollen voidaan olettaa, että $\alpha \geq \beta$.

Olkoon pisteiden A ja B koordinaatit suorakulmaisessa xy-koordinaatistossa $A = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ ja $B = (\cos\beta, \sin\beta)$. Kierretään koordinaatistoa vastapäivään kuvan 3.8 mukaisesti, kunnes x-akseli kulkee pisteen B kautta. Tällöin saadusta $x'y'$-koordinaatistossa pisteiden A ja B koordinaatit ovat
$A = (\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta))$ ja $B = (1, 0)$.



Kuva 3.8. Kosinin vähennyslaskukaavan todistus

Muodostetaan pisteiden A ja B etäisyys $\overline{AB}$ xy-koordinaatistossa

$$\overline{AB} = \sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2}$$

Lisäksi muodostetaan pisteiden etäisyys $x'y'$-koordinaatistossa

$$\overline{AB} = \sqrt{(\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + \sin^2(\alpha - \beta)}$$

Nämä edellä muodostetut etäisyydet ovat samat molemmissa koordinaatistoissa, koska molemmat ovat suorakulmaisia koordinaatistoja ja niiden yksiköt ovat sama. Etäisyyksien neliöt ovat siis yhtä suuret, joten tästä seuraa

$(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = (\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + \sin^2(\alpha - \beta)$ eli

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$$
$$= \cos^2(\alpha - \beta) - 2\cos(\alpha - \beta) + 1 + \sin^2(\alpha - \beta)$$

Lauseen 3.1 nojalla saadaan

$$2-2\left(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\right)=2-2\cos\left(\alpha-\beta\right)$$

Tästä sieventämällä saadaan kosinin vähennyskaava ja näin ollen lauseen ensimmäinen kohta on todistettu. Kosinin vähennyslaskukaavasta saadaan lauseen 3.3 ja määritelmän 2.2 avulla johdettua kosinin yhteenlaskukaava ja sinin yhteen- sekä vähennyslaskukaava seuraavasti:

2. Sijoitetaan kosinin vähennyslaskukaavaan β:n paikalle $-\beta$, jolloin saadaan:

$$\begin{aligned}\cos\left(\alpha+\beta\right)&=\cos\alpha\cos\left(-\beta\right)+\sin\alpha\cos\left(-\beta\right)\\&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

3. Määritelmän 2.2 ja kosinin vähennyslaskukaavan avulla saadaan:

$$\begin{aligned}\sin\left(\alpha+\beta\right)&=\cos\left(90^\circ-\left(\alpha+\beta\right)\right)\\&=\cos\left(\left(90^\circ-\alpha\right)-\beta\right)\\&=\cos\left(90^\circ-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(90^\circ-\alpha\right)\sin\beta\\&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

4. Sijoitetaan edelliseen tulokseen β:n paikalle $-\beta$ ja käytetään määritelmää 2.2, jolloin saadaan:

$$\sin\left(\alpha-\beta\right)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$ □

Lauseen 3.5 kaavoista saadaan edelleen

$$\begin{aligned}\sin\left(\alpha+\beta\right)+\sin\left(\alpha-\beta\right)&=2\sin\alpha\cos\beta\\\sin\left(\alpha+\beta\right)-\sin\left(\alpha-\beta\right)&=2\cos\alpha\sin\beta\\\cos\left(\alpha+\beta\right)+\cos\left(\alpha-\beta\right)&=2\cos\alpha\cos\beta\\\cos\left(\alpha+\beta\right)-\cos\left(\alpha-\beta\right)&=-2\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

Jos merkitään, että $x=\alpha+\beta=$ ja $y=\alpha-\beta$, jolloin $\alpha=\frac{x+y}{2}$ ja $\beta=\frac{x-y}{2}$. Tällöin saadaan *kahden sinin summa ja erotus.*

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

Lisäksi saadaan kaavat *kahden kosinin summalle ja erotukselle.*

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

Kun sinin, kosinin ja tangentin yhteenlaskukaavoihin sijoitetaan $\alpha = \beta$, saadaan *kaksinkertaisen kulman sinin, kosinin ja tangentin kaava.*

$$\begin{aligned}
\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\
\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\
&= 2\cos^2\alpha - 1 \\
&= 1 - 2\sin^2\alpha \\
\tan 2\alpha &= \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}
\end{aligned}$$

Näistä kaksinkertaisen kulman kaavoista saadaan vielä johdettua *kulman puoliskon sini, kosini ja tangentti.*

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$$

$$\tan\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}$$

Lause 3.6. *Tangentin yhteen- ja vähennyslaskukaavat*

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

Todistus. Kun sinin yhteenlaskukaava jaetaan kosinin yhteenlaskukaavalla saadaan määritelmään 3.1 nojaten

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

Jakamalla saadun yhtälön oikean puolen murtolausekkeen osoittajan ja nimittäjän jäsenet tulolla $\cos\alpha\cos\beta$ ja käyttämällä jälleen määritelmän 3.1 kaavaa saadaan todistettua tangentin yhteenlaskukaava. Samalla tavalla voidaan myös todistaa tangentin vahennyslaskukaava jakamalla sinin vähenneslaskukaava kosinin vähennyslaskukaavalla. □

3.9 Kolmion pinta-ala

Lause 3.7. *(Kolmion pinta-ala) Olkoon a kolmion kanta ja h kolmion korkeus. Tällöin kolmion pinta-ala A saadaan seuraavalla kaavalla*

$$A = \frac{ah}{2}$$

Todistus. Olkoon a kolmion kanta ja h kolmion korkeus. Käydään läpi tapaukset, jolloin kolmio on suorakulmainen, teräväkulmainen tai tylppäkulmainen kolmio.

Tapaus 1. Kolmion on suorakulmainen. Kun kolmio täydennetään suorakulmioksi suorakulmaisella kolmiolla, jonka pinta-ala on A'. Tällöin suorakulmion pinta-ala on ah. Toisaalta sen pinta-ala on $A + A'$. Nyt selvästi pätee, että $A = A'$. Tällöin voidaan ilmoittaa suorakulmion pinta-ala kahdella tavalla ja merkitä nämä yhtäsuuriksi.

$$\begin{aligned} A + A' &= ah \\ A + A &= ah \\ A &= \frac{ah}{2} \end{aligned}$$

Tapaus 2. Kolmio on teräväkulmainen, jolloin kolmion korkeusjana on kolmion sisällä. Nyt voidaan käyttää edellisessä tapauksessa todistettua suorakulmaisen kolmion pinta-alan lauseketta. Jaetaan kolmio kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi piirtämällä kolmion huipusta kohtisuora korkeusjana kannalle a. Tällöin kolmioiden pinta-alat ovat A_1 ja A_2. Olkoon toisen kolmion kanta x, jolloin toisen kolmion kanta on $a - x$. Nyt teräväkulmaisen kolmion pinta-alaksi saadaan

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 \\ A &= \frac{(a-x)h}{2} + \frac{xh}{2} = \frac{ah}{2} \end{aligned}$$

Tapaus 3. Kolmio on tylppäkulmainen, jolloin kolmion korkeusjana on kolmion ulkopuolella. Kolmion kantasivun jatke x ja kolmion korkeusjana muodostavat suorakulmaisen kolmion, jonka pinta-ala on $A' = \frac{xh}{2}$. Tämä kolmio ja alkuperäinen kolmio muodostavat yhdessä suorakulmaisen kolmion, jonka pinta-alaksi saadaan

$$A + A' = \frac{(x+a)\,h}{2}$$

Nyt alkuperäisen kolmion pinta-alaksi saadaan

$$A = \frac{(x+a)\,h}{2} - A' = \frac{(x+a)\,h}{2} - \frac{xh}{2} = \frac{xh + ah - xh}{2} = \frac{ah}{2}$$

□

Lause 3.8. *(Kolmion pinta-alan trigonometrinen kaava) Jos kolmion sivujen a ja b välinen kulma on γ, niin tämän kolmion pinta-ala A on*

$$A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

Todistus. Jos h on sivun a vastainen korkeus, niin $A = \frac{1}{2}ah$. Koska $\frac{h}{b} = \sin\gamma$ niin $h = b\sin\gamma$. Näin ollen väite on osoitettu todeksi. □

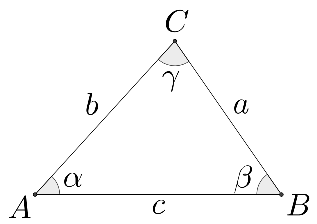
3.10 Sinilause

Lause 3.9. *(Sinilause) Jos kolmion sivut ovat a, b sekä c ja niiden vastaiset kulmat ovat α, β sekä γ ja kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde on R, niin*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

Seuraavaksi esitellään kaksi erilaista tapaa todistaa sinilause. Ensimmäinen todistustapa on hyvin yleinen oppikirjoissa. Siinä sinilause perustellaan muodostamalla erilaiset lausekkeet kolmion pinta-alalle, joiden avulla saadaan lause todistettua. Ensimmäisessä todistuksessa käytetäänkin lauseessa 3.8 esitettyä kolmion pinta-alan trigonometristä kaavaa. Ensimmäinen todistus ei osoita kolmion ympäri piirretyn ympyrän säteen suhdetta kulmien trigonometrisiin lausekkeisiin, joka tulee todistetuksi toisessa todistavassa.

Todistus. Olkoon kolmio ABC, jonka sivut ovat a, b ja c, kuten kuvassa 3.9.



Kuva 3.9. Sinilauseen todistus kolmion pinta-alan avulla

Kolmion pinta-ala on sama laskettiinpa se, mistä kulmasta tahansa. Näin ollen saamme ilmaistua kolmion pinta-alan, A, kolmella erilaisella lausekkeella.

$$A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta$$

Kertomalla yhtälö termillä $\dfrac{2}{abc}$ saadaan

$$\frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}$$

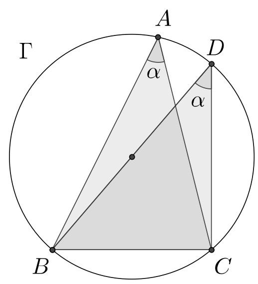
Tämä voidaan esittää hieman tutummassa muodossa

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$\square$

Koska pinta-ala ei kuitenkaan ole kovinkaan primitiivinen käsite niin käymme vielä läpi todistuksen, joka käyttää hyväksi kehäkulmalausetta. Tässä todistuksessa osoitetaan myös kolmion ympäri piirretyn ympyrän säteen suhde kulmien trigonometrisiin lausekkeisiin.

Todistus. [30, s. 62–63] Olkoon kolmio ABC, jonka sivut ovat a, b ja c. Oletetaan, että $\sphericalangle BAC$ on terävä kulma. Piirretään kuvan 3.10 mukaisesti kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän Γ halkaisija $\overline{BD}$.



Kuva 3.10. Sinilauseen todistus, kun α on terävä kulma

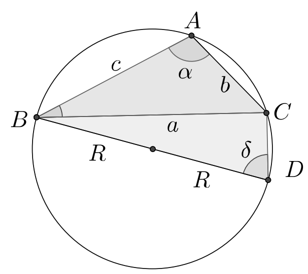
Nyt voidaan olettaa Thaleen lause tunnetuksi, jonka mukaan kolmio BCD on suorakulmainen, koska piste C on jokin muu ympyrän Γ piste kuin A tai B. Kehäkulmalauseen perusteella, jonka mukaan samaa tai yhtenevän kaaren sisältämät kehäkulmat ovat yhtenevät. Näin ollen saadaan $\sphericalangle BDC = \alpha$. Siis

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{a}{2R} \\ &\Rightarrow \frac{a}{\sin\alpha} = 2R \end{aligned}$$

Oletetaan, että $\sphericalangle A$ on tylppä kulma. Silloin piste D on eri puolella janaa $\overline{BC}$ kuin piste A, kuten kuvassa 3.11. Tällöin muodostuu jännekulmio $ABDC$, jolloin tiedetään, että $\sphericalangle BDC = \delta$ ja $\sphericalangle BAC = \alpha$ ovat toistensa vieruskulmia. Kolmio BDC on suorakulmainen. Tällöin saadaan, että

$$\sin\alpha = \sin\delta = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{a}{2R}$$
$$\Rightarrow \frac{a}{\sin\alpha} = 2R$$

□



Kuva 3.11. Sinilauseen todistus, kun α on tylppä kulma

3.11 Kosinilause

Kosinilause on Pythagoraan lauseen laajennus vinokulmaisille kolmioille.

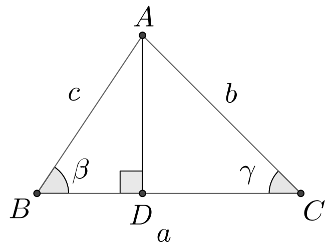
Lause 3.10. *(Kosinilause) Jos kolmion sivut ovat a, b ja c sekä c:n vastainen kulma on γ, niin*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Todistus. [30, s. 63–64] Tarkastellaan kolmiota ABC, jonka sivut ovat a, b ja c sekä c:n vastainen kulma on γ. Jos kulma γ on suora kulma, on kyseessä Pythagoraan lause, joka on todistettu jo aiemmin tässä tutkielmassa. Tarkastelemme tässä todistuksessa siis tapaukset, jossa kulma γ on terävä tai tylppä kulma. Oletetaan, että sivun b vastainen kulma β on terävä kulma. Olkoon $\overline{AD}$ sivua a vastaan piirretty korkeusjana.

Jos kulma γ on terävä kulma kuten kuvassa 3.12, niin

$$\frac{\overline{BD}}{c} = \cos\beta \qquad \frac{\overline{CD}}{b} = \cos\gamma$$



Kuva 3.12. Kosinilauseen todistus, kun γ on terävä kulma

Nyt saadaan, että

$$\begin{aligned} a &= \overline{BD} + \overline{CD} = c\cos\beta + b\cos\gamma \\ &\Rightarrow c\cos\beta = a - b\cos\gamma \end{aligned}$$

Tämä korottamalla neliöön saadaan yhtälö muotoon

$$c^2\cos^2\beta = a^2 + b^2\cos^2\gamma - 2ab\cos\gamma$$

Toisaalta sinilauseen perusteella
$c^2\sin^2\beta = b^2\sin^2\gamma$, joten

$$\begin{cases} c^2\cos^2\beta = a^2 + b^2\cos^2\gamma - 2ab\cos\gamma \\ c^2\sin^2\beta = b^2\sin^2\gamma \end{cases}$$

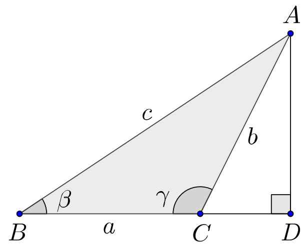
$$\Rightarrow c^2\cos^2\beta + c^2\sin^2\beta = a^2 + b^2\cos^2\gamma - 2ab\cos\gamma + b^2\sin^2\gamma$$
$$\Rightarrow c^2\left(\cos^2\beta + \sin^2\beta\right) = a^2 + b^2\left(\cos^2\gamma + \sin^2\gamma\right) - 2ab\cos\gamma$$

Väite seuraa tästä, kun käytetään sinin ja kosinin peruskaavaa (lause 3.1)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Jos kulma γ on tylppä kuvan 3.13 mukaisesti, niin

$$\frac{\overline{BD}}{c} = \cos\beta \qquad \frac{\overline{CD}}{b} = -\cos\gamma$$



Kuva 3.13. Kosinilauseen todistus, kun γ on tylppä kulma

Nyt saadaan, että

$$a = \overline{BD} - \overline{CD} = c\cos\beta + b\cos\gamma$$

$$\Rightarrow c\cos\beta = a - b\cos\gamma$$

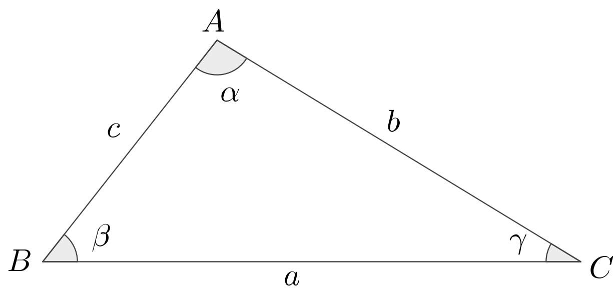
Tästä todistus voidaan jatkaa samaan tapaan kuin terävän kulman tapauksessa.

$\square$

3.12 Tangenttilause

Lause 3.11. *(Tangenttilause) Kolmiolle, jonka kaksi kulmaa ovat α ja β sekä näiden vastaavien sivujen pituudet ovat a ja b kuten kuvassa 3.14, on voimassa tangenttilause*

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$$



Kuva 3.14. Tangenttilause

Todistus. Sinilauseen (lause 3.9) mukaan saadaan

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

Olkoon $d = \dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta}$, jolloin $a = d\sin\alpha$ ja $b = d\sin\beta$.

Nyt saadaan

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{d\sin\alpha - d\sin\beta}{d\sin\alpha + d\sin\beta} = \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}$$

Sinin ja kosinin yhteen- ja vähennyslaskukaavoista johdettujen kaavojen mukaan saadaan

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2} \text{ ja } \sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2}$$

Tällöin tangentin määritelmän mukaan saadaan yhtälö haluttuun muotoon ja lause todistettua

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta} = \frac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

□

Osa II

Trigonometria kouluopetuksessa

4 Opetussuunnitelmat sekä oppikirjat

Tämän tutkielman tarkoituksena on selvittää, kuinka trigonometrian opetus on muuttunut 1950–2000-lukujen välisenä aikana. Tutkielman aineistona on käytetty vuodesta 1941 vuoteen 2004 mennessä Suomessa julkaistuja oppikoulun oppiennätyksiä sekä keskikoulun, peruskoulun ja lukion opetussuunnitelmia sekä opetussuunnitelman perusteita. Näistä julkaisuista on tutkittu niiden matematiikalle asettamat oppisisällölliset tavoitteet ja samalla erityistä huomiota on kiinnitetty trigonometrian oppisisältöihin. Jokaisen julkaisun vaikutusajalta tutkimukseen on valittu yksi oppikirjasarja. Näistä oppikirjoista on varmistettu, minkä oppiennätyksen tai opetussuunnitelman mukaan oppikirjantekijät ovat ilmoittaneet kirjasarjansa laatineen. Kyseisistä oppikirjasarjoista on käyty läpi kaikki osat ja lopulliseen tutkimusaineistoon on valittu kirjat, jotka käsittelevät trigonometriaa. Oppikirjojen oppisisältöjä on vertailtu oppiennätysten ja opetussuunnitelmien asettamiin oppisisältöjen tavoitteisiin, jolloin on pyritty saamaan käsitys siitä, miten asetetut tavoitteet trigonometrian opetukselle ovat välittyneet oppikirjojen avulla kouluihin opettajille sekä oppilaille. Lisäksi tutkielman kappaleessa 4.12 on luotu katsaus vuonna 2014 hyväksyttyyn Perusopetuksen opetussuunnitelmaan sekä Lukion tuntisuunnitelmaan, koska näiden mukaisia oppikirjoja ei vielä ole ilmestynyt, niin ei näitä voitu ottaa mukaan varsinaiseen tutkimukseen.

Suomen koulujärjestelmän organisaatiossa on tapahtunut tutkittavalla ajanjaksolla merkittäviä muutoksia. 1970-luvulla peruskoulu-uudistus oli näistä muutoksista suurin, koska sitä ennen Suomessa oli kansakoulut ja oppikoulut. Varsinaisen kansakoulun jälkeen niillä, joilla siihen oli taloudelliset mahdollisuudet, oli mahdollisuus hakea oppikouluun. Oppikoulu jakautui viisivuotiseen keskikouluun ja kolmivuotiseen lukioon. [15, s. 242–248] Peruskoulu-uudistuksen myötä kansakoulut ja keskikoulu yhdistettiin peruskouluksi, kun taas lukiot erotettiin omiksi kouluikseen. [59, s. 24]

Oppikoulujärjestelmä oli pääasiassa valtiollinen ja valtio perustikin pelkästään poikia kouluttavia lyseoita tai tyttölyseoita. Lisäksi perustettiin yksityisiä pojille sekä tytöille tarkoitettuja yhteislyseoita. Lyseoilla oli hieman erilaisia painotuksia, jotka on otettu myös huomioon oppiennätyksissä, joissa on lueteltu kaikille koulumuodoille omat oppiennätykset. [15, s. 246–248] Oppikoulujärjestelmän aikana lukiot olivat yleensä linjajakoisia, jolloin yleisimpiä linjoja olivat matematiikan linja ja kielilinja. Molemmissa linjoissa opetettiin matematiikkaa sekä kieliä, mutta niiden painotuksissa oli eroja. Sen sijaan 1970-luvulla vahvistetusta lukion opetussuunnitelmasta linjat ovat jääneet pois, mutta matematiikan opetus on jaettu lyhyeen ja pitkään kurssiin. Tämä lukion matematiikan jako on säilynyt siitä asti tähän päivään entisellään, ainoastaan välillä niitä on kutsuttu hieman eri nimillä, kuten esimerkiksi suppeampi ja laaja oppimäärä tai lyhyt ja pitkä matematiikka. Lisäksi ensimmäisessä peruskoulun opetussuunnitelmassa [52] matematiikassa on käytössä tasokurssit, jonka jälkeen tasokursseista on luovuttu peruskoulun opetussuunnitelmen perusteissa.

Tutkimuksessa käytettyjä oppikirjoja voidaan pitää luotettavana tutkimusaineistona, koska kouluhallitus tarkasti käytetyt oppikirjat vuosina 1866–1992. Tällöin sai käyttää ainoastaan kouluhallituksen tarkistamia ja hyväksymiä oppikirjoja sekä lisäksi opetuksessa tuli noudattaa oppikirjojen sisällöllistä rakennetta, jolloin tämä johti oppikirjasidonnaiseen opetukseen. [57, s. 276–277, 293] Tutkimusaineistoon valituista ennen vuotta 1992 julkaistuista oppikirjasarjoista on varmistettu niiden olleen kouluhallituksen hyväksymiä. Vuoden 1992 jälkeen opetuksen järjestäjä on ollut vastuussa annettujen tavoitteiden toteutumisesta, jolloin myös oppikirjojen valinnassa on tullut ottaa tämä seikka huomioon. Tutkimuksessa käytettyjen vuoden 1992 jälkeen julkaistujen kirjojen on varmistettu olleen yleisessä käytössä Suomen kouluissa. On kuitenkin huomioitava, että nykyään mikään ei velvoita opettajaa etenemään oppikirjan sisältöjen mukaisesti vaan sen sijaan opetuksen tulisi rakentua koulukohtaisen opetusuunnitelman pohjalle.

Oppikirjojen oppisisältöjä on verrattu tämän tutkielman ensimmäisessä osassa esiteltyyn trigonometrian matemaattisen teorian osa-alueisiin. Keskikoulun ja peruskoulun aineistoa läpi käydessä *valmistelevaan oppiainekseen* on laskettu kuuluvaksi kulman ja kolmion määritelmä, kulmien ja kolmioiden nimeäminen, kulmien mittaaminen sekä niiden luokittelu.

Lukion pitkän matematiikan oppikirjojen sisältöjä tutkittaessa huomattiin tiettyjen asiasisältöjen säilyneen melko samanlaisina 1950-luvulta ihan 2000-luvulle asti. Tutkittavalta ajanjaksolta valituista oppikirjoista kävi ilmi, että kaikissa kirjoissa trigonometriset funktiot määritellään yksikköympyrän avulla kuten kappaleessa 3.2. Yksikköympyrän käyttöä varten kirjoissa määritellään yksikköympyrä kuten määritelmässä 2.3, jolloin trigonometristen funktioiden merkki eri neljänneksissä käydään kirjoissa sanallisesti tai kuvallisesti merkkikaavoiden avulla kuten kuvassa 3.2. Kaikkien kirjojen oppisisältöihin kuuluu myös suunnattu kulma (kappale 3.1), jonka ohella on käyty myös vastakulman käsite sekä vastakulmien trigonometriset funktiot kuten määritelmässä 3.3. Lisäksi trigonometristen funktioiden kuvaajien käsittely kuuluu kaikkien eri vuosikymmenten lukion oppikirjoihin, jonka ohella käsitellään radiaanit kulman suuruudeen mittayksikkönä kuten määritelmässä 3.2. Osassa kirjoissa trigonometristen funktioiden kuvaajat on tullut piirtää itse ja osasta kirjoista kuvat löytyvät jo valmiina. Näistä kuvaajista on yleisesti tutkittu trigonometristen funktoiden jaksollisuutta kuten kappaleessa 3.7. Kaikkien vuosikymmenten kirjojen oppisisältöihin kuuluu sinilause (lause 3.9) sekä kosinilause (lause 3.10), jotka myös todistetaan tai johdetaan kaikissa kirjoissa. Lisäksi yleinen Pythagoraan lause (3.1) esitetään kaikissa oppikirjoissa. Jatkossa oppiennätysten tai opetussuunnitelmien toteutumista pitkän matematiikan oppikirjoissa käsiteltäessä ei näitä edellä mainittuja oppisisältöjä erikseen mainita, jos niiden käsittely ei erityisesti poikkea edellä mainitusta. Lyhyen matematiikan oppikirjojen osalta ei samantyylisiä yleistyksiä voi tehdä, joten ne käsitellään tapauskohtaisesti kappaleissa, joissa käsitellään lukion oppikirjoja.

4.1 Vuonna 1941 vahvistetut oppikoulun oppiennätykset

Vuonna 1941 vahvistettujen oppikoulujen oppiennätykset [4, s. 83–96] asettaa matematiikan opetuksen päämääräksi kehittää oppilaita ajattelemaan johdonmukaisesti sekä työskentelemään suunnitelmallisesti ja määrätietoisesti. Näiden matematiikan opetukselle lueteltujen päämäärien seurauksena matematiikan opetuksen on ajateltu palvelevan muun muassa maanpuolustuskasvatusta. Oppiennätyksen laadinnassa on pyritty supistamaan opetussisältöä, joka on lisännyt oppikirjojen tekijöiden sekä opettajien pedagogista vapautta. Tämä periaate on johtanut siihen, että oppiennätyksessä ei ole lueteltu yksityiskohtaisesti, mitä kullakin luokka-asteella tulisi opettaa, vaan on pyritty antamaan opettajalle vain viitteitä kurssin sisällöistä. Oppiennätys antaakin opettajalle oikeuden karsia oppisisältöjä, koska oppiennätys korostaa, että opetuksen laadulla on vain merkitystä eikä niinkään oppisisältöjen laajuudella. [4, s. 20–21]

Vuoden 1941 oppiennätyksen mukaan opetuksen tuli olla keskikoulussa selvästi konkreettisempaa kuin lukiossa, koska enemmistö keskikoulun oppilaista astui käytännön työelämään koulun jälkeen, jolloin he eivät joutuneet harjoittamaan opintoja jatko-opinnoissa. Trigonometriaa käsiteltiin keskikoulun viidennellä luokalla, jolloin opiskeltavaan aineistoon kuuluivat kolmioiden yhdenmuotoisuuksien pääkohdat, tutustuminen terävien kulmien trigonometrisiin funktioihin ja niiden käyttöön sekä Pythagoraan lause. [4, s. 83–89]

Oppiennätyksessä mainitaan, että lukio -opetuksen tulee luoda perusta korkeakouluopintoihin. Lukion matemaattisen linjan eli matematiikan pitkän kurssin kahdeksannen luokan oppisisällöiksi luetellaan suorakulmaisten kolmioiden ratkaisu, trigonometristen funktioiden yleiset määritelmät, trigonometristen funktioiden väliset kaavat, vinokulmaisten kolmioiden ratkaisu ja lisäksi mainitaan myös sovelluksia geometrian, fysiikan ja maantieteen alalta. Lukion kielilinjan eli matematiikan lyhyemmän kurssin trigonometrian oppisisällöissä mainitaan ainoastaan suorakulmaisten kolmioiden ratkaiseminen. [4, s. 83–89]

Vuoden 1941 oppiennätys antaa myös metodiset ohjeet geometrian opetukselle, jonka mukaan opetuksen tulee alkaa valmistelevalla kurssilla ennen kuin siirrytään varsinaisiin todistuksiin. Valmistelevalla kurssilla on tarkoitus antaa oppilaille havaintoon perustuva selkeä käsitys geometrian alkukäsitteistä sekä perehtyä apuvälineiden, kuten esimerkiksi viivoittimen, kulmaviivoittimen, kulmansiirtäjän, astelevyn ja harpin käyttöön. Koko geometrian opetuksen tulee olla havainnollista ja käytännöllistä, jolloin ei ole tarkoituksenmukaista pitää silmällä ainoastaan tieteellistä tarkkuutta. Käytännössä tämä tarkoittaakin, että ennen varsinaisten lauseiden todistusta on hyödyllistä tutkia käytännöllisesti, pitääkö lause paikkaansa. Varsinkin trigonometrian opetuksessa tärkeimpänä päämääränä vuoden 1941 oppiennätyksen mukaan on antaa oppilaalle selvä käsitys trigonometristen funktioiden määritelmistä sekä funktioiden muutoksista ja niiden välisistä riippuvuuksista. [4, s. 93–96]

4.1.1 Oppiennätyksen toteutuminen keskikoulun oppikirjassa

Vuonna 1948 kouluhallituksen hyväksymä Makkosen ja Pimiän kirjoittama Geometria ja trigonometria I [34] on tarkoitettu keskikoulun matematiikan oppikirjaksi. Kirja koostuu kahdesta osasta: valmistavasta oppimäärästä ja deduktiivisesta päättelystä. Kirjan tekijöiden alkulauseen mukaan oppikirjan ensimmäinen eli valmistava osa on tarkoitettu läpikäytäväksi keskikoulun kolmannella luokalla, joka vastaisi nykyisen peruskoulun seitsemännettä luokkaa. Toinen osa, jossa käytetään johdonmukaisesti deduktiivista etenemistä, kuuluu keskikouun neljännelle ja viidennelle luokka-asteelle. [34, s. 6]

Kirjan valmistavassa osassa käydään läpi erilaisia käsitteitä, joita tarvitaan myöhemmin trigonometrian opiskelussa. Näiden tavanomaisten valmistelevien oppiainesten lisäksi kirjassa käydään läpi komplementti-, suplementti- ja eksplementtikulma. [34, s. 28–29]

Kirjan toisessa osassa tutustutaan geometrisen tutkimuksen menettelyyn, jossa oppilaalle esitellään deduktiivista päättelytapaa ja lauseiden todistamista. Ensimmäisenä todistuksen esimerkkinä kirjassa käydään kolmion kulmien summan todistus lauseen 3.4 todistuksen mukaisesti. [34, s. 44–46] Kolmioiden yhtevenyys ja yhdenmuotoisuus on saanut kirjassa hyvin suuren painoarvon, kun taas varsinainen trigonometrian osuus on esitetty hyvin lyhyesti.

Trigonometriassa käsitellään pelkästään suorakulmaisia kolmioita. Luvun alussa oppilas ohjataan tutkimaan yhdenmuotoisten suorakulmaisten kolmioiden sivujen suhteita, jolloin alustetaan uutena tulevaa asiaa eli trigonometrisia funktioita. Terävän kulman trigonometriset funktiot sini, kosini, tangentti ja kotangentti määritellään määritelmän 2.1 mukaisesti. Tämän jälkeen harjoitellaan suorakulmaisen kolmion ratkaisemista trigonometristen taulujen avulla. [34, s. 127–129]

Kirjassa on myös esitelty Pythagoraan lause, jonka todistus on suoritettu samalla tavalla kuin Eukleideen alkeissa, jolloin se perustuu pinta-alatulkintaan kuten lauseen 2.1 todistuksen ensimmäisessä tavassa on esitetty. [34, s. 102] Vuonna 1941 vahvistetussa oppiennätyksessä oppisisällöt on listattu vain suuntaa antavasti, joten sen osalta voidaan todeta tutkittavan kirjan sisältävän kaikki vaadittavat keskikoulun oppisisällöt trigonometrian osalta.

4.1.2 Oppiennätyksen toteutuminen lukion oppikirjoissa

Tutkimukseen valittiin luontevasti edellä käydyn keskikoulun oppikirjan Makkosen ja Pimiän kirjoittamat jatko-osat Geometria ja trigonometria II–III, jotka kattavat sekä lyhyen kurssin että pitkän kurssin oppisisällöt. Aluksi käymme läpi sekä lyhyeen että pitkään kurssiin kuuluvia oppisisältöjä. Geometria ja trigonometria II [35, s. 37–42] sisältää hyvin vähän trigonometriaa, koska ainoana asiana käydään läpi Pythagoraan lause ja sen sovelluksia. Tämän jälkeen kirjassa johdetaan vielä yleinen Pythagoraan lause (lause 3.1).

Kirjasarjan kolmannen osan [36] ensimmäinen luku kuuluu vielä lyhyeen kurssiin, mutta muut luvut ainoastaan pitkään kurssiin. Ensimmäisessä luvussa esitellään terävän kulman (kappale 2.1) ja komplementtikulman (määr. 2.2) sini, kosini, tangentti ja kotangentti. Trigonometrian peruskaavat (kappale 3.3) esitellään kirjassa ja yleisen Pythagoraan lauseen johtaminen on jätetty harjoitustehtäväksi (lause 3.1). Suorakulmaisen kolmion ratkaisemiseen kirja antaa hyvin tapauskohtaiset ohjeet sen mukaan, mitä osia kolmiosta jo tunnetaan. Jokaiseen tapaukseen annetaan kirjassa selvä kaava ja ohje ratkaista kolmiosta tietyt osat. Trigonometristen funktioiden arvojen määrittämisen avuksi tutustutaan trigonometrisiin taulukoihin, joiden käyttö on mukavinta suorittaa logaritmeilla. [36, s. 5–19]

Kirjan toinen ja kolmas luku kuuluvat kirjantekijöiden mukaan pitkän kurssin oppimäärään. Toinen luku alkaa aiemmin määriteltyjen trigonometristen funktioiden sinin, kosinin, tangentin ja kotangentin yleistämisellä, jossa apuna käytetään yksikköympyrää. Trigonometristen funktioiden jälkeen kirjassa esitellään palautuskaavat, joiden avulla terävää kulmaa suurempien kulmien arvot pystytään lausumaan terävien kulmien trigonometristen funktoiden arvojen avulla. Näitä kaavoja tarvitaan erityisesti trigonometrisiä taulukoita käytettäessä funktioiden arvojen määrittämiseen, koska taulukoissa mainitaan ainoastaan trigonometristen funktoiden arvot teräville kulmille. Palautuskaavat perustuvat aiemmin esiteltyihin suplementti- ja eksplementtikulmien trigonometrisiin kaavoihin (lause 3.3). Näiden kaavojen lisäksi kirjan toisessa luvussa esitellään hyvin paljon erilaisia trigonometrisia kaavoja ja niiden johtoja, kuten esimerkiksi sinin, kosinin sekä tangentin yhteen- ja vähennyslaskukaavat (lauseet 3.5 ja 3.6), kahden sinin tai kosinin summa- ja erotuskaavat sekä kaksinkertaisten kulmien ja kulman puoliskon kaavat. [36, s. 20–40]

Kirjan kolmannessa luvussa käydään läpi enemmän kolmioita koskevia lauseita ja kaavoja sekä vinokulmaisen kolmion ratkaisemista. Sinilauseen (lause 3.9) ja kosinilauseen (lause 3.10) lisäksi kirja esittelee tangenttilauseen (lause 3.11). Nämä lauseet todistetaan tämän tutkimuksen matemaattisen teorian osassa esitetyllä tavalla. Vinokulmaisen kolmion eri osien ratkaisemiseen annetaan hyvin kaavamaiset ohjeet eri tilanteisiin, jos kolmiosta tunnetaan esimerkiksi kaksi sivua ja näiden välinen kulma tai kaksi sivua ja toisen vastainen kulma tai kaksi kulmaa ja pinta-ala tai kaksi kulmaa ja sisään piirretyn ympyrän säde. [36, s. 41–62]

Vuonna 1941 vahvistetut oppiennätykset eivät antaneet kovin tarkkoja ohjeita lukion oppisisällöistä, joten tutkittavan oppikirjasarjan voidaan todeta noudattavan oppiennätyksiä. On kuitenkin hyvin tulkinnan varaista, mitä kaikkea oppiennätysten hyvin ympäripyöreät maininnat oppisisällöistä tarkoittavat. Näin ollen on hyvin vaikea sanoa, että ylittyykö jopa lukion oppimäärä kirjassa osittain. Ainakin lyhyen kurssin osalta oppiennätyksissä mainittiin ainoastaan suorakulmaisten kolmioiden ratkaiseminen, jolloin voidaan päätellä, että trigonometristen peruskaavojen käsittelyn menevän oppisisältönä ylitse oppiennätysten asettamista tavoitteista.

4.2 Vuonna 1958 vahvistetut keskikoulun oppiennätykset

Vuonna 1958 ilmestyneessä ryhmäkirjeessä keskikoulujen rehtoreille [19] asiana on keskikoulun matematiikan oppiennätykset. Oppiennätyksessä mainitaan keskikoulun matematiikan opetuksen päämääräksi antaa oppilaille sellainen määrä matemaattista koulutusta, jota heiltä voidaan kohtuudella edellyttää sekä yleissivistyksen että käytännöllisten ja teoreettisten jatko-opintojen vaatimukset huomioon ottaen. Opetuksen päämäärissä mainitaan myös, että opetuksen tulee antaa oppilaille riittävä taito geometrian ja trigonometrian perusteisiin.

Oppiennätyksessä on lueteltu oppisisällöt, jotka ovat samanlaiset trigonometrian osalta sekä kahdeksanluokkaisten lyseoiden ja yhteislyseoiden keskikouluasteella, yhdeksänluokkaisten tyttölyseoiden keskikouluasteella, kuusiluokkaisilla tyttökouluilla sekä kuusiluokkaisilla poika- ja yhteislyseoilla. Trigonometriaan liittyvissä oppisisällöissä käydään läpi kulma ja muita peruskäsitteitä, kolmion kulmien summa, terävän kulman trigonometriset funktiot ja niiden sovelluksia sekä Pythagoraan teoreema.

4.2.1 Oppiennätyksen toteutuminen keskikoulun oppikirjassa

Kouluhallituksen hyväksymä Väisälän kirjoittama Keskikoulun geometria -oppikirja [60] on hyvin samankaltainen kuin edeltäjänsä. Oppikirjan ensimmäisessä luvussa käydään läpi valmistelevaa oppiainesta. Lisäksi myös tässä oppikirjassa käydään läpi käsitteet komplementti- suplementti- ja eksplementtikulma. Kirjassa kulman mittaamisen yhteydessä esitellään kulman mittayksiköksi aste ja tarkemmissa mittauksissa kerrotaan käytettävän myös minuuttia ja sekuntia. Ensimmäinen luku rakentuu hyvin pitkälti havainnoille, jossa on suoritettu vain muutamia lyhyitä deduktiopäätelmiä, joista yhtenä esimerkkinä on kolmion kulmien summan todistus (lause 3.4). [60, s. 23]

Toisessa luvussa käydään läpi kulmien laskemista. Neliöjuuren käsite käydään läpi alustavasti, koska sitä tarvitaan Pythagoraan lauseen avulla määritettäessä suorakulmaisen kolmion sivun pituutta. Pythagoraan lause todistetaan oppikirjassa kahdella tavalla, joista ensimmäinen on sama kuin Eukleideen alkeissa ja toisessa konstruoimalla kaksi yhtäsuurta neliötä kuten lauseen 2.1 todistuksen 3. tavassa on esitetty. [60, s. 47–48]

Terävän kulman trigonometriset funktiot sini, kosini, tangentti ja kotangentti on määritelty hyvin havainnollisesti matemaattisten symbolien avulla sekä sanallisesti. Trigonometristen funktioiden arvon määrittämisen avuksi on esitetty trigonometristen funktioiden arvojen taulukko ja kirjassa opastetaan taulukon käyttöön. Edeltäjästään poiketen tässä keskikoulun oppikirjassa käydään läpi komplementtikulmien trigonometriset funktiot (määr. 2.2). Lisäksi oppikirjassa on käyty läpi trigonometristen funktioiden arvon muuttuminen kun kulma α kasvaa $0°$:sta $90°$:een kuten esimerkissä 4.1, jolloin trigonometristen funktioiden tutkiminen muistuttaa hieman tutkimuksen kappaleen 3.7

käsittelyä hyvin alkeellisella tasolla ilman kuvaajia.

Esimerkki 4.1. Kun kulma α kasvaa 0°:sta 90°:een, niin $\sin\alpha$ kasvaa 0:sta 1:een.

Kirjan oppisisältöjä verrattaessa oppiennätyksen asettamiin tavoitteisiin voidaan todeta, että kirja toteuttaa nämä tavoitteet hyvin. Kirjasta on kuitenkin löydettävissä asioita, jotka ylittävät selvästi oppiennätysten asettamat tavoitteet, kuten esimerkiksi trigonometristen funktioiden arvon muuttumisen tarkastelu sekä komplementtikulmien trigonometriset funktiot.

4.3 Vuonna 1960 vahvistetut lukion matematiikan oppiennätykset

Yleiskirjeessä valtion ja yksityisten oppikoulujen sekä kansakoulun yhteydessä toimivien keskikoulujen rehtoreille [20] esitellään lukion matematiikan oppiennätykset. Oppiennätyksessä on lueteltu matematiikan opetuksen metodisia ohjeita, joissa korostuu ajatus siitä, että jokaisella oppilaalla tulisi olla hänen omalle taitotasolleen sopivia tehtäviä. Tätä perustellaan sillä, että oppilaat saavat tyydytystä matematiikan opiskelusta erityisesti silloin, kun he saavat ratkaista tehtäviä, joissa on heille sopivasti haastetta. Sopivien tehtävien avulla oppiennätyksen mukaan voidaan ylläpitää oppilaiden harrastuneisuutta sekä kiinnostusta matematiikkaa kohtaan.

Lukion ensimmäiselle vuodelle matemaattisen linjan eli pidemmän kurssin oppisisältöihin on listattu Pythagoraan teoreema, seuraavalla luokka-asteella käydään läpi trigonometriset funktiot ja niiden välisiä kaavoja, trigonometristen taulujen käyttö, suora- ja vinokulmaisen kolmion ratkaiseminen ja niihin liittyviä sovelluksia sekä trigonometristen yhtälöiden ratkaiseminen. Oppikoulun kahdeksannen luokan oppisisältöihin ei kuulu trigonometriaa.

Oppiennätykseen on laadittu oppimäärän tarkempi selvittely, jossa käy ilmi joitakin oppisisältöjä, joita ei varsinaisessa oppisisältöjen luettelossa mainita. Tämän tarkemman oppimäärä selvittelyn mukaan lukion matemaattisella linjalla trigonometriassa käsitellään trigonometristen funktioiden välisten peruskaavojen lisäksi trigonometristen funktioiden yhteenlasku- ja vähennyslaskukaavat sekä niistä välittömästi johdettavat kaavat. Oppiennätyksen mykaan päähuomio trigonometrian opetuksessa tulee kiinnittää kaavojen hyvään hallintaan sekä trigonometristen funktioiden riippuvuuteen kulman suuruudesta ja niiden jaksollisuuteen. Vinokulmaiset kolmiot ratkaistaan sini- ja kosinilauseita käyttäen. Trigonometrian tehtävät sekä harjoitukset tulee olla hyvin käytännöllisiä ja arkielämään liittyviä sovelluksia.

Oppiennätyksissä luetellaan myös lukion kielilinja ja tyttölyseoiden matemaattisen linjan eli lyhyen kurssin oppisisällöt. Nämä oppisisällöt on kuitenkin esitelty hyvin väljästi, jolloin niihin on jäänyt hyvin paljon tulkinnanvaraa niin oppikirjan tekijöille kuin opettajille. Väljyys selittyy kuitenkin sillä, että esimerkiksi kielilinjoilla saattoi olla eri tuntimäärät matematiikkaa, jolloin oppiennätysten antamia oppisisältöjä käytiin sen verran kuin se ajallisesti oli mahdollista. Oppisisällössä trigonometrian osalta ei mainita muuta kuin keskikoulussa opittujen asioiden täydentävää kertausta trigonometristen laskutehtävien avulla. Tarkemmassa oppimäärän selvittelyssä oppisisältöihin mainitaan kuuluvaksi Pythagoraan lause ja trigonometristen funktioiden väliset kaavat.

4.3.1 Oppiennätyksen toteutuminen lukion oppikirjoissa

Kalle Väisälän Lukion geometria -oppikirjan oppisisällöt kuuluvat sekä lyhyeen että pidempään kurssiin. Ainoana trigonometrian liittyvänä asiana kirjassa käydään Pythagoraan lause. [61, s. 122–124] Kirjan hyvin suppean trigonometrian sisällön voidaan todeta olevan puutteellinen lyhyen kurssin osalta, koska se ei täytä kaikkia oppiennätyksessä lyhyelle kurssille lueteltuja oppisisältöjen vaatimuksia, joihin kuuluisi esimerkiksi trigonometristen funktioiden väliset kaavat.

Väisälän kirjoittama Trigonometria [62] käsittää kokonaisuudessaan lukion pidemmän kurssin trigonometrian. Kyseisen oppikirjan sisältö on hyvin pitkälti sama kuin edeltäjänsä Pimiän ja Mikkosen oppikirja Geometria ja Trigonometria II–III [35][36]. Oppisisältöjen vastaavuuden lisäksi asiat on käyty läpi oppikirjoissa samalla tavalla ja asioiden painotukset vastaavat toisiaan. Ainoastaan lauseessa 3.11 esitelty tangenttilause ei kuulu Väisälän oppikirjan oppisisältöihin, kun taas kirjassa käydään läpi trigonometristen funktioiden arvojen määrääminen graafisesti. Lisäksi kirjaan on laadittu taulukko, jossa trigonometriset funktiot on lausuttu toisten trigonometristen funktioiden avulla kuten lauseessa 3.2. Oppikirja-analyysin perusteella voidaan todeta, että oppiennätyksen asettamat oppisisällölliset tavoitteet toteutuvat moitteettomasti Väisälän kirjoittamissa lukion pidemmän kurssin oppikirjoissa. Kuitenkaan Väisälän oppikirjat eivät auta opiskelijoita löytämään itselleen sopivan tasoisia tehtäviä, vaikka oppiennätyksessä se pidettiin hyvin tärkeänä. Tältä osin oppikirja jättää jokaiselle opiskelijalle sopivien harjoitustehtävien löytämisen opettajien tehtäväksi. Sen sijaan Väisälän oppikirjoissa korostuu se, että oppiennätyksen mukaan trigonometrian opetuksessa tulee kiinnittää huomiota kaavojen hyvään hallintaan. Tämä näkyy parhaiten kirjassa valmiiksi johdettujen trigonometristen funktioiden välisten kaavojen suurena määränä.

4.4 Vuoden 1970 peruskoulun matematiikan opetussuunnitelma

1970-luvulla matematiikan opetus on ollut melkoisen myllerryksen keskellä, jolloin erilaisia opetuksen oppisisällöllisiä tavoitteita ja opetukseen annettuja ohjeita on ollut monia. Tässä kappaleessa luodaan yleiskatsaus näistä julkaisuista, jotka ovat vahvimmin vaikuttaneet peruskoulun matematiikan opetukseen kyseisenä aikana. Merkille pantavaa on se, että 1970-luvulla pyrittiin toteuttamaan uudeksi matematiikaksi kutsuttua matematiikan opetuksen kokonaisuudistusta samaan aikaan peruskouluun siirtymisen kanssa.

Vuonna 1972 vahvistettu keskikoulun matematiikan opetussuunnitelma [22, s. 24–37] luo pohjaa peruskoulun opetussuunnitelman joustavalle käyttöönotolle. Keskikoulun opetussuunnitelman laadinnassa on pidetty silmällä vuonna 1970 ilmestynyttä Peruskoulun Opetussuunnitelmakomitean mietintöä II [52, s. 140–151], jonka mukaan matematiikan opetuksessa tulee pyrkiä edistämään oppilaiden kokonaiskehitystä. Lisäksi keskikoulun opetussuunnitelman metodisissa ohjeissa kehotetaan lukijaa perehtymään Peruskoulun Opetussuunnitelmakomitean mietinnössä annettuihin ohjeisiin työtavoista.

Vuoden 1972 keskikoulun matematiikan opetussuunnitelman mukaan keskikoulun ensimmäisellä luokalla tutustutaan kulman käsitteeseen ja harjoitellaan harpin käyttöä. Neljännellä luokalla uutena oppiaineksena tulee Pythagoraan lause. Viidennellä luokalla perehdytään suorakulmaisen kolmion trigonometriaan ja käydään läpi Pythagoraan lauseen sovelluksia. [22, s. 29–30]

Peruskoulun opetussuunnitelmakomitean mietinnössä II työtavoissa korostetaan oppiaineksen yksilöllistämistä ja eriyttämistä. Sen mukaan oppikirjojen tulisi erottaa perusoppiaines, johon kaikkien tulisi perehtyä sekä tämän täydennyksenä käytetty lisäaines sekä varsinaiset lisäkurssit. Näin oppiaineksen avulla voitaisiin tarjota oppilaille mahdollisimman yksilöllisiä mahdollisuuksia, jolloin jokaiselle oppilaalle löytyisi mahdollisimman sopivan tasoisia tehtäviä ja oppiainesta. Mietinnössä on lueteltu oppiaines luokka-asteittain, mutta trigonometrian osalta oppiaines on lueteltu hyvin suurpiirteisesti. Mietinnön mukaan peruskoulun kahdeksannella luokalla keskikurssilla aloitetaan trigonometrian käsittely ja laajalla kurssilla käsitellään tasokuvioiden ominaisuuksia ja trigonometriaa. Yhdeksännen luokan yleiskurssin oppiainekseen on lueteltu tasokuvioiden ominaisuuksien ja trigonometrian käsittely, kun taas keskikurssilla ja laajalla kurssilla käsitellään trigonometrian ja vektoreiden käyttöä geometriassa. [52, s. 148–149] Opetussuunnitelman antamat suunnat trigonometrian opetukseen on hyvin väljät, jolloin se on omalta osaltaan antanut hyvin paljon tulkinnanvaraa sekä oppikirjantekijöille ja opettajille. Tästä syystä peruskoulun opetussuunnitelman rinnalle on julkaistu POPS-70 opas, jonka tavoitteena on auttaa opettajia toteuttamaan opetussuunnitelman tavoitteita. [21]

Näiden edellä mainittujen opetussuunnitelmien lisäksi 1970-luvulla matematiikan opetukseen vaikutti vahvasti vuonna 1967 julkaistu Pohjoismaisen matematiikan opetuksen uudistuskomitean mietintö ja se muodosti pohjan matematiikan opetuksen uudistamiselle kaikissa Pohjoismaissa. Kyseisen mietinnön myötä Suomessa uudistui samanaikaisesti sekä koko koulujärjestelmä että matematiikan opetus, joka koki niin radikaalin muutoksen, että sitä alettiin kutsumaan uudeksi matematiikaksi. Tällä uudistuksella pyrittiin siihen, että ymmärtämiseen pohjautuvan opettamisen avulla oppilaiden matemaattinen ajattelu kehittyisi saumattomasti jo peruskoulun ensimmäisistä vuosista lähtien. [53]

Uudistuksen tuomien muutosten myötä matematiikan sisäisiä painotuksia muutettiin huomattavasti. Näkyvin uudistuksen piirre oli muodollisuuden voimakas korostuminen opetuksessa joukko-opin ja logiikan välityksellä. Soveltaminen ja perinteinen ongelmanratkaisu vähenivät voimakkaasti. Seppälä tuumii, että uuden matematiikan kannattajat olivat luultavasti sitä mieltä, että kun asioita käsitellään matemaattisen muodollisesti heti alusta pitäen, niin soveltamis- ja ongelman ratkaisutaidot tulevat ikään kuin kaupan päälle. Uudistuksen tuomien uusien oppisisältöjen myötä yläasteen laajan kurssin sisältö oli 1970-luvulla paljon laajempi kuin aiemmat keskikoulujen tai nykyisen yläkoulun matematiikan oppisisällöt. [55] Muutos aikaisempaan näkyi esimerkiksi siinä, että aikaisemmin vallalla ollut matematiikan kolmijako aritmetiikkaan, algebraan ja geometriaan sai väistyä kokonaan [28, s. 49]. Geometrian osuus väheni voimakkaasti sekä euklidisesta geometriasta luovuttiin, joka oli kuulunut vuosisatojen ajan Suomessa matematiikan oppisisältöihin [55]. Lisäksi uusien oppisisältöjen sekä uuden matematiikan tuomien opetusihanteiden myötä myös deduktiivisesta todistusperinteestä luovuttiin [28, s. 49]. Kynigos toteaa, että suuntaus on ollut tutkimuksellisesti perusteltu, koska peruskoulun yläasteen koko ikäluokalle tarkoitettu yhteinen oppiaines ei merkittävässä määrin voi perustua deduktiivisen metodin käyttöön, sillä useimmat oppilaat eivät ole vielä tässä vaiheessa kypsiä deduktiiviseen tarkastelutapaan muutoin kuin ulkomuistiin perustuvaan oppimiseen [56, s. 18].

Uudistuksen seuraamukset ja tavoitteet ovat keskenään kuitenkin hieman ristiriitaisia. Suurista ennakkovalmisteluista huolimatta uusi matematiikka ajautui lukuisten ristiriitojen myötä vaikeuksiin. Syynä uuden matematiikan luomiin ristiriitoihin ja uudistuksen kariutumiseen on luultavasti se, että joukko-oppia ei osattu käyttää metodisena apuvälineenä, niin kuin uudistuksessa oli alunperin tarkoitus. [55, s. 10–11] Alaluokkien laskennonopetuksen perustaminen joukko-opin käsitteistöön oli yhtä outoa opettajille kuin lasten vanhemmillekin. Alaluokkia opettivat usein vanhat kansakoulun opettajat, joille tarjottiin uuteen matematiikkaan liittyvää täydennyskoulutusta, mutta he eivät voineet omaksua uusia asioita muutamassa päivässä tai viikossa. Yleiseen tietoisuuteen levisikin tuohon aikaan käsitys, etteivät lapset opi laskemaan. Näin saattoikin jossain määrin olla, vaikka ongelma oli ehkä opetuksen laadussa eikä sen sisällössä. Matematiikan kannalta katsottuna uudistuksen ajatus ei suinkaan ole mieletön, mutta sen toteuttaminen olisi edellyttänyt alaluokkien opettajilta tavatonta uusiutumiskykyä. Sorvali arveleekin uuden matematiikan olleen mainettaan parempi, mutta ehkä se soveltui kuitenkin paremmin matemaattisesti lahjakkaille oppilaille. [59, s. 26]

Pohjoismaisen matematiikan opetuksen uudistuskomitean mietinnössä on esitetty ehdotus peruskoulun opetussuunnitelmaksi, joka sisältää kurssikohtaisen esittelyn oppisisällöistä. Näiden oppisisältöjen mukaan trigonometrian opetuksen luonne eroaa edeltäjistään huomattavasti. Trigonometrian opetus on kohdistettu kahdeksannelle luokalle, jolloin oppisisällöissä on mainittu yksikköympyrän käyttö trigonometristen funktioiden määrittelyssä. Lisäksi trigonometrian oppisisältöihin kuuluu sini- ja kosinifunktioiden kuvaajien piirtäminen koordinaatistoon, johon tarvittavat lukuparit saadaan suorittamalla mittauksia yksikköympyrästä. Oppisisältöjen sovelluksina on kulmien ja sivujen laskemista suorakulmaisessa kolmiossa käyttäen taulukkoja ja laskuviivainta. [53, s. 52,74]

1970-luvun alkupuolella Suomen matematiikan opetukseen vaikuttanut, Pohjoismaisen matematiikan opetuksen uudistuskomitean mietinnön tuoma "uusi matematiikka" aiheutti kovaa kritiikkiä, jonka myötä matematiikan opetusuunnitelman todettiin olevan liian laaja käytettävissä olevaan opetustuntimäärään nähden. Eräänä tärkeänä uudistuksena opetussuunnitelmassa pidettiin spiraaliperiaatetta, jolla tarkoitettiin lähinnä sitä, että monet matemaattiset käsitteet käsitellään jo koulun ensimmäisillä luokilla. Tämän jälkeen samaan asiaan palataan toistuvasti seuraavina kouluvuosina niin, että jokaisen käsittelyn yhteydessä liitetään oppiainekseen yhä laajempia kokonaisuuksia. Näin vähitellen edetään asian täydelliseen ymmärtämiseen ja hallintaan. Tätä spiraalirakennetta pyrittiin noudattamaan juuri uuden matematiikan osalta uusissa oppikirjoissa pilkkomalla oppiainesta hyvin sirpalemaiseksi, jolloin se johti hyvin pinnalliseen oppimiseen. [28, s. 49–54] Opettajat alkoivatkin kutsumaan spiraalirakennetta hyvin kuvaavasti sipaisuperiaatteeksi [55, s. 11]. Myös oppikirjat saivat voimakasta kritiikkiä osakseen oppiaineksen sirpaleisuudesta. Näiden ongelmakohtien noustessa esiin kouluhallitus asetti peruskoulun matematiikan opetuksen kehittämistyöryhmän, jonka tehtäväksi tuli laatia ehdotus peruskoulun matematiikan oppiaineksesta. [28, s. 49–54]

Joukko-oppihysterian selkeyttämiseksi kouluhallitus julkaisi vuonna 1976 ehdotuksen peruskoulun perustavoitteista ja perusoppiaineksesta [23], jonka avulla haluttiin ottaa takapakkia ja palata takaisin perusteisiin. Kyseinen toimenpide oli kansanvälistä perua ns. Back to Basics-liikkeelle, joka Suomessa vaikutti oppikirjojen kautta varsinaisesti 80-luvulla [55, s. 11]. Ehdotuksessa on listattu perusoppiaines, jonka oppilaan tulisi hallita yhdeksännen kouluvuoden päättyessä. Tähän oppiainekseen on listattu kuuluvaksi sini- ja tangenttifunktion määritelmä yksikköympyrän avulla, jolloin opetuksessa tulisi samalla korostaa yhteyttä suorakulmaiseen kolmioon ja sen ratkaisemiseen soveltavien tehtävien avulla. Lisäksi oppilaan tulisi osata määrittää trigonometristen funktioiden arvoja taulukon, laskuviivaimen tai laskimen avulla. [23]

4.4.1 Opetussuunnitelman toteutuminen peruskoulun oppikirjoissa

Tutkimukseen valittiin peruskouluun tarkoitettu, kouluhallituksen hyväksymä sekä peruskoulun opetussuunnitelmaa noudattava Matematiikan tiedot -oppikirjasarja. Kirjasarjan ensimmäisessä eli seitsemännelle luokalle tarkoitetussa kirjassa [63] käydään läpi valmistelevaa oppiainesta varsinaisen trigonometrian opetusta varten, mutta varsinaisiin trigonometrian oppisisältöihin kirjassa ei vielä mennä. Sen sijaan seitsemännen luokan kirjassa käydään läpi geometristen asioiden todistaminen.

Kahdeksannen luokan kirjassa [64] näkyy hyvin Pohjoismaisen matematiikan opetuksen uudistuskomitean mietinnön tuomat muutokset koulumatematiikkaan trigonometrian osalta. Kirjassa määritellään yksikköympyrä, jonka avulla määritellään trigonometrisistä funktioista sini ja kosini. Määrittelyn jälkeen tutustutaan edellä esiteltyjen trigonometristen funktioiden kuvaajien kulkuun, kun kulma on $0° - 90°$ välillä. Trigonometristen funktioiden arvon määrittämistä opetetaan taulukoiden, laskutikun ja laskimen avulla, mutta suurimman painoarvon kirjassa saa laskutikun ja taulukoiden käyttö. Pythagoraan lauseen todistus suoritetaan yhdenmuotoisuudesta saatujen verrantojen avulla, mutta tämä on kuitenkin merkitty vain laajan kurssin oppisisällöksi. Lisäksi kirjassa esitellään laajaan oppimäärään kuuluvaksi yleinen Pythagoraan lause (lause 3.1), jonka voimassaolosta kaikille kulmille mainitaan, mutta tässä vaiheessa sitä käytetään kuitenkin vain teräville kulmille. Trigonometrian osuuden lopuksi tutustutaan suorakulmaiseen kolmioon koordinaatistossa, jolloin määritellään trigonometriset funktiot sini ja kosini suorakulmaisessa kolmiossa määritelmän 2.1 mukaisesti.

Yhdeksännen luokan kirjassa [65] jatketaan trigonometrian käsittelyä. Kahdeksannen luokan kirjassa trigonometristen funktioiden sinin ja kosinin määrittelyjoukko oli $0° < \alpha < 90°$, mutta yhdeksännellä luokalla kulmien käsittelyä laajennetaan, jolloin trigonometristen funktioiden määrittelyjoukoksi asetetaan $0° < \alpha < 360°$. Tämän jälkeen uutena asiana määritellään tangentti määritelmän 3.1 mukaisesti sinin ja kosinin osamääränä. Tangenttia ei siis määritellä kuitenkaan yksikköympyrän avulla. Uuden trigonometrisen funktion määrittelyn jälkeen tutustutaan laskutikun käyttöön ja tarkastellaan tangenttifunktion kuvaajaa. Lopuksi määritellään vielä tangentti suorakulmaisessa kolmiossa.

1970-luvulla ohjeita peruskoulun oppisisällöistä on ollut useita, joissa sisällöt ovat vaihdelleet. Tästä syystä oppikirjantekijöillä ei ole kyseisenä aika ollut mitään selkeä linjaa, jonka mukaan toimia. Voidaankin todeta, että tutkimukseen valitun yläkoulun oppikirjasarjan sisällöissä näkyy hyvin vahvasti Pohjoismaisen matematiikan uudistuskomitean mietinnön tuomat muutokset koulumatematiikkaan. Kyseisen kirjasarjan kirjat eroavat hyvin paljon edeltäjistään. Suurimpana erona aiempiin oppikirjojen sisältöihin on hyvin laaja asiasisältö sekä trigonometristen funktioiden määrittely yksikköympyrän avulla. Lisäksi analysoinnissa kävi ilmi, että vuonna 1976 julkaistun Ehdotus perustavoitteiksi ja perusoppiainekseksi peruskoulussa [23] listatut oppisisällöt ei kuitenkaan täysin täyty oppikirjasarjassa, koska tangenttia ei määritellä yksikköympyrän avulla. Muilta osin kirjasarjan voidaan todeta toteuttavan Peruskoulun opetussuunnitelman asettamat oppisisältötavoitteet.

4.5 Vuoden 1973 lukion matematiikan opetussuunnitelma

Korkeakoulujen matematiikan sekä peruskoulun ja keskikoulun matematiikan opetuksen uudistumisen ja pitkään jatkuneen kehitystyön myötä myös lukion opetussuunnitelmaa tuli uudistaa ja ajanmukaistaa. Vuoden 1973 lukion matematiikan opetussuunnitelmassa [22, s. 38–56] matematiikan opetuksen yleistavoitteena on, että lukion tulee antaa opiskelijoille perusteellinen valmius erilaisiin jatko-opintoihin ja herättää harrastuneisuutta matematiikan käsitemaailmaa kohtaan. Pitkällä kurssilla lähinnä tähdätään matemaattis-luonnontieteellisiin ja teknisiin jatko-opintoihin. Lyhyellä kurssilla sen sijaan tähdätään lähinnä humanistisiin, yhteiskuntatieteellisiin sekä palvelu- ja kauppa-alan jatko-opintoihin, mutta kuitenkin samalla ottaen huomioon fysiikan opetussuunnitelmien asettamat vaatimukset.

Opetussuunnitelman uudistuksen pohjana on pidetty lähinnä Pohjoismaisen Matematiikan Opetuksen Uudistamistoimikunnan (PMOU:n) ehdotuksia, jolloin lukion matemaattisen opetuksen erityistavoitteet voidaan tiivistää seuraavasti: laskuteknisten valmiuksien hankkiminen, matematiikan loogiseen ja abstraktiin rakenteeseen tutustuminen sekä matematiikan soveltaminen.

Uudistuksen myötä oppiaines lisääntyi paljon myös lukion kohdalla. Lukion pitkän matematiikan kursseissa ei monilta osin ollut juurikaan eroa yliopiston matematiikan perusopintojen kursseihin. [55, s. 10] Tästä syystä lukion kursseja jouduttiin uudistamaan hyvin radikaalisti. Suurin tällainen muutos vanhoihin lukion oppiennätyksiin verrattuna tapahtui geometrisen oppiaineksen käsittelyssä. Tämä muutos tarkoitti käytännössä Eukleideen mukaiselle systematiikalle perustuvasta esityksestä luopumista ja geometrisluonteisista tarkasteluista siirryttiin suurelta osin vektoreiden käyttöön. Samalla jätettiin pois harppi-viivain konstruktiot. Lisäksi trigonometristen yhtälöiden ratkaisemisen harjoittelua karsittiin aivan perustapauksiin. Uudistettuun lukion opetussuunnitelmaan on laadittu myös lista pohjatiedoista, jotka edellytetään oppilailta lukioon siirryttäessä. Geometrian ja trigonometrian osalta pohjatietoihin on listattu yksinkertaisten geometristen tasokuvioiden alkeellisten ominaisuuksien hallinta sekä Pythagoraan lause.[22, s. 41–42] Uudistuksen tuomat lukion uudet oppimäärät osoittautuivat kuitenkin pian liian laajoiksi ja matematiikan muodollisuus aiheutti peruskoulun lisäksi myös lukion puolella vastustusta [55, s. 11].

Lukion vuoden 1973 opetussuunnitelman mukaan lukion lyhyen kurssin ensimmäisen vuosikurssin sisältöön kuuluu trigonometrian osalta trigonometristen funktioiden määritelmät, funktioiden $\sin(x)$ ja $\cos(x)$ kuvaajat ja suorakulmaiseen kolmioon liittyviä laskuja. Pitkän kurssin trigonometrian oppiaines on sijoitettu myös ensimmäiseen vuosikurssiin. Trigonometrian opetettaviin oppisisältöihin kuuluu Pythagoraan lause, sinilause ja kosinilause. Lisäksi opetusuunnitelma listaa oppiainekseen kuuluvaksi yleisesti trigonmetriaa, jota tarkennetaan opetussuunnitelman kohdassa huomautuksia pitkän kurssin eri kohtiin. Näissä huomautuksissa [22, s. 54] trigonometrian opetukseen luetellaan kuuluvaksi:

- Radiaani
- Trigonometristen funktioiden määritelmät, jaksollisuus ja kuvaajat
- Trigonometriset funktiot toistensa avulla lausuttuina
- Kahden kulman summan ja erotuksen kosinin ja sinin kaavat
- Trigonometristen yhtälöiden ja epäyhtälöiden ratkaiseminen (ainakin tyyppiä $\sin kx = a$ olevat yhtälöt sekä vastaavat epäyhtälöt hallittava)

4.5.1 Opetusuunnitelman toteutuminen lukion oppikirjoissa

Tutkimukseen valittu lyhyen kurssin oppikirja Matematiikka 10 [8] noudattaa oppikirjan tekijöiden mukaan syksyllä 1973 voimaan tullutta lukion matematiikan opetussuunnitelmaa. Oppikirja-analysoinnissa kävi ilmi, että kirjassa toteutuvat opetussuunnitelmassa asetetut oppisisällöt. On kuitenkin selvästi nähtävissä, että kirja sisältää runsaasti oppisisältöjä, joihin ei viitata opetussuunnitelmassa. Ensinnäkin edeltäjistään poiketen kirjassa käydään trigonometristen funktioiden sinin, kosinin, tangentin ja kotangentin määritelmät yksikköympyrän avulla kuten määritelmässä 3.1 ja samalla käydään läpi suunnattu sekä yli 360 asteen kulma (kappale 3.1). Opetussuunnitelman mukaan trigonometrisistä funktioista sinin ja kosinin kuvaajia tulee tutkia, mutta näiden lisäksi kirjassa perehdytään myös tangentin kuvaajaan. Kuvaajien tulkinnan ohessa käydään läpi myös funktioiden jaksot, jota ei myöskään mainita opetussuunnitelman oppisisällöissä. Samoin ylimääräisenä asiana kirjassa käydään läpi komplementtikulman trigonometriset funktiot (määr. 2.2).

Pidemmän kurssin Lukion matematiikka -kirjasarjasta ensimmäisen vuosikurssin kirja [3, s. 151–194] sisältää trigonometrian kurssin. Opetussuunnitelmassa luetellut oppisisällölliset asiat toteutuvat kirjassa, mutta opetussuunnitelmassa listattujen sisältöjen lisäksi kirja sisältää paljon trigonometrian oppisisältöjä. Kirjassa on huomattavia eroja aiempiin lukion pitkän kurssin oppikirjoihin. Aiemmin lukion pitkän kurssin oppikirjojen oppisisältöihin kuuluneet tangentin yhteen- ja vähennyslaskukaavat (lause 3.6) sekä sinin, kosinin ja tangentin kulman puoliskon kaavat ovat jääneet pois. Trigonometristen taulukoiden käyttö funktioiden arvojen määrittämisessä on jäänyt sivuun laskimien ja laskutikun yleistyessä, jolloin myös taulukon käytössä apuna olleet palautuskaavat ovat jääneet kokonaan pois. Komplementti- (määr. 2.2) ja suplementtikulmien (lause 3.3) trigonometriset funktiot ovat jääneet pois. Kirjassa on koottu selkeästi esille trigonometristen funktioiden määritelmien yhteyteen myös näiden määrittely- ja arvojoukot, joita aiemmissa oppikirjoissa ei ole ollut. Aiemmista oppikirjoista löytyneet suora- ja vinokulmaisen kolmion ratkaisemiseen annetut tapauskohtaiset ohjeet ovat jääneet pois, mutta kuitenkin harjoitustehtävissä näitä käytetään. Oppikirjoissa esitettyjen erilaisten valmiiden kaavojen esittämisen ja johtamisten vähentäminen lisää opiskelijoille haastetta, koska heidän tulee osata johtaa näitä kaavoja peruskaavoista. Oppikirjojen muutoksen taustalla saattaa olla pyrkimys ohjata oppilaita ymmärtävään ja tutkivaan oppimiseen, jonka myötä oppikirjojen teoriaosuuksissa ei enää luetella valmiita laskukaavoja vaan oppijan tulee ymmärtää tietyt peruskaavat, joiden avulla hän voi löytää kunkin ongelman ratkaisemiseen tarvittavat matemaattiset keinot. Näin ollen oppikirja-analyysin perusteella voidaan nähdä, että oppikirjoissa tapahtunut muutos saattaa olla peruja myös tutkittavan ajanjakson aikana tapahtuneesta oppimiskäsitysten muutoksesta.

4.6 Vuoden 1985 peruskoulun opetussuunnitelman perusteet

Vuonna 1982 kouluhallituksen julkaiseman Peruskoulun matematiikan oppimäärä ja oppimääräsuunnitelman [25] mukaan matematiikan opetuksen tulisi tukea oppilasta kohtaamaan matematiikan avulla ratkeavia ongelmia. Tärkeänä pidettiin, että oppilas ymmärtää opetettavien asioiden rakenteen ja yhteyden sekä osaa liittää matemaattiset tiedot ja taidot muuhun kokemusmaailmaansa. Geometrian opetuksen tuleekin lähteä liikkeelle kolmiulotteisen ympäristön tarkastelulla, jolloin oppiminen perustuu lähinnä oppilaan omiin havaintoihin, piirtämiseen ja mittaamiseen. Erilaisiin tasokuvioihin tutustutaan jo alakoulun puolella, mutta oppimääräsuunnitelman mukaan vasta kahdeksannella luokalla opetetaan suorakulmaisen kolmion ominaisuuksia ja niihin liittyviä laskuja, jolloin tutustutaan Pythagoraan lauseeseen. Varsinaiseen trigonometriaa opetetaan vasta yhdeksännellä luokalla, jolloin uusina asioina opetetaan sini-, kosini- ja tangenttifunktioiden määritelmät sekä suorakulmaisen kolmion ratkaisemista.

Vuonna 1985 ilmestynyt Peruskoulun opetussuunnitelman perusteiden [27, s. 147–160] matematiikan oppisisältöt vastaavat täysin vuoden 1982 peruskoulun matematiikan oppimäärä ja oppimääräsuunnitelmaa [25], joitakin sanamuotoja lukuun ottamatta. Ainoana erona oppisisällöissä on se, että opetusuunnitelmassa yhdeksännen luokan oppisisällöt on lueteltu hyvin pinnallisesti. Tästä hyvä esimerkki on, että yhdeksännellä luokalla tulee opettaa trigonometriaa, mutta sen tarkemmin trigonometrian oppisisältöjä ei ole lueteltu. Peruskoulun matematiikan opetuksen eri tahojen edustajat kiinnittivät huomiota opetussuunnitelman väljyyteen sekä siitä johtuvaan opetuksen sirpaleisuuteen. Tästä syystä perustettiin Matematiikan opetus 1990-luvulla -keskusteluryhmä, joka koostui ala- ja yläasteen opettajien sekä kouluhallinnon, opettajankoulutuksen, tutkimuksen ja oppikirjojen kustantajien edustajista. Tämän keskusteluryhmä kritisoi väljään muotoon kirjoitettua opetussuunnitelmaa, joka saattoi synnyttää hyvinkin laajan skaalan erilaisia opetuksen toteutuksia. [9, s. 22]

Matematiikan opetuksen tavoitteet peruskoulun opetussuunnitelmassa ovat myös suurimmalta osin samanlaiset kuin oppimääräsuunnitelmassa. Matematiikan opetuksen tavoitteeksi vuoden 1985 opetussuunnitelma luettelee laskutaidon lisäksi, luovan ajattelun kehittämisen, ongelmanratkaisuun liittyvien taitojen harjoittamisen ja matematiikan soveltamisen jokapäiväiseen elämään. Opetussuunnitelmassa todetaan, että laskutoimitusten mekaaninen harjoittelu on menettämässä merkitystään laskimien yleistymisen vuoksi. Näin ollen yhä tärkeämmäksi on tullut laskutoimitusten ja niiden välisten yhteyksien ymmärtäminen sekä peruslaskutoimitusten sujuva osaaminen myös päässälaskuna. [27, s. 147–150]

Matematiikan opetuksen eri tahojen edustajista koostuva keskusteluryhmän mukaan opetussuunnitelman tavoitteet antavat hyvän lähtökohdan opetukselle. Mutta kuitenkin ryhmän näkemyksen mukaan sen aikainen opetus keskittyi lähinnä vain laskutaidon saavuttamiseen ja helpon mallin mukaiseen soveltamiseen. Lisäksi käytännön koulutyö keskittyi heidän mukaansa oikeiden työskentelytottumuksien ohjaamiseen, kuten esimerkiksi siistin vihkotyöskentelyn harjoittamiseen. Keskusteluryhmän mukaan opetussuunnitelman sisältöalueiden painotukset tulisi tarkistaa seuraavaan opetussuunnitelmaan, jolloin matematiikan opetuksessa tulisi painottaa enemmän geometriaa. [9, s. 22–25]

4.6.1 Opetussuunnitelman toteutuminen peruskoulun oppikirjoissa

Vuoden 1985 opetussuunnitelmaa noudattava sekä kouluhallituksen hyväksymä peruskoulun oppikirjasarja AHAA matematiikkaa 7–9 eroaa trigonometrian oppisisältöjen osalta jonkin verran edeltäjistään. AHAA matematiikkaa 7 -oppikirjassa käydään läpi valmistelevaa oppiainesta tulevia trigonometrian opintoja varten. Kirjassa käydään läpi myös kolmioiden kulmien summa, joka osoitetaan oikeaksi kuvasarjan avulla, jossa piirroshahmot kiskovat kolmion kulmat irti ja asettamalla palat rinnakkain, toteavat kulmista muodostuvan oikokulma. [48, s. 202–214]

Kahdeksannen luokan kirjassa [49, s. 222–236] käydään opetussuunnitelman mukaisesti Pythagoraan lause (lause 2.1). Lisäksi kirjassa käydään Peruskoulun matematiikan oppimäärä ja oppimääräsuunnitelmassa mainittu suorakulmaisen kolmion ominaisuuksia ja niihin liittyviä laskuja. Yhdeksännen luokan kirjassa [50, s. 88–98] perehdytään suorakulmaisten kolmioiden yhdenmuotoisuuksiin, mutta asiaa ei kuitenkaan liitetä suoraan trigonometrisiin funktioihin. Suorakulmaisen kolmion trigonometrisistä funktioista käydään läpi sini, kosini ja tangentti. Trigonometrisiä funktioita sovelletaan myös erilaisten kuin suorakulmaisen kolmion muotoisiin kappaleisiin, joita voidaan kuitenkin jakaa suorakulmaisiin kolmioihin ja sen avulla ratkaista kuvioiden kulmia tai eri osien pituuksia.

AHAA matematiikkaa 7–9 -kirjasarjan oppisisällöt eroavat melko paljon edeltäjistään. Erityisesti trigonometristen oppisisältöjen suppeneminen on erityisen huomattava muutos aiempien vuosikymmenten oppikirjoihin verrattuna. Varsinaiset todistukset ovat jääneet kokonaan pois oppisisällöistä. Trigonometrisistä funktioista kotangentin määritelmä on jätetty pois. Trigonometristen funktioiden arvojen määrittämiseen käytetään ainoastaan laskinta, jonka tähden kirjassa ei enää mainita taulukoita tai laskutikkuja. Kirjasarjassa ei mainita ollenkaan eksplementti-, suplementti- ja komplementtikulmia. Lisäksi 70-luvulla Pohjoismaisen matematiikan opetuksen uudistuskomitean mietinnön tuomat uudistukset ovat jääneet kokonaan pois, joten tältäkin osin voidaan todeta mietinnön tuomien uudistuksien olleen hyvin lyhytkestoisia.

4.7 Vuoden 1985 lukion opetussuunnitelman perusteet

Pohjoismaisen Matematiikan Opetuksen Uudistamistoimikunnan (PMOU:n) ehdotuksia mukaillen laaditut opetussuunnitelmat 1970-luvulla herätti kiivasta keskustelua ja kritiikkiä. Muutaman kiihkeän vuoden jälkeen päätettiin palata vanhaan matematiikkaan. Sorvali kuvaakin lopputulosta toimivaksi, mutta näkee tilanteen katastrofaalisena puhtaan matematiikan mittapuulla mitattuna, koska pitkän matematiikan opiskellut ylioppilas ei tiedä, mitä sanat määritelmä, lause ja todistus tarkoittavat. Tämän seurauksena enää vain harvat pystyvät tuottamaan omin avuin yliopiston matematiikan opinnoissa yksinkertaistakaan uutta todistusta. Sorvali toteaakin tässä mielessä 1900-luvulla tason romahtaneen, mutta eihän toisin voisi ollakaan, kun ylioppilaiden määrä kohosi tuolla vuosisadalla 40-kertaiseksi. Nämä realiteetit huomioon ottaen on turha, jopa mieletöntä haikailla takaisin Väisälän kirjojen tasoisia oppikirjoja. [58, s. 12–13]

Vuonna 1981 kouluhallitus julkaisi Lukion matematiikan kurssimuotoisen oppimäärä ja oppimääräsuunnitelman [24], jossa lukion matematiikan oppisisällöt on jaettu kursseihin. Tämän mukaan yleisessä oppimäärässä kolmas kurssi käsittelee trigonometriaa ja tason vektoreita. Trigonometrian opetuksen tavoitteiksi on mainittu, että oppilas tuntee trigonometristen funktioiden perusominaisuudet ja osaa käyttää niitä yksinkertaisissa sovelluksissa. Oppimääräsuunnitelman mukaan, lukion matematiikan yleiseen oppimäärän varsinaisten kurssien oppisisältöihin kuuluu trigonometristen funktioiden määritelmät yksikköympyrässä, funktioiden $\sin(x)$ ja $\cos(x)$ kuvaajat sekä suorakulmaiseen kolmioon liittyviä sovelluksia. Lisäksi oppisisällöissä on joitakin osia merkitty tähdellä, joka osoittaa, että kyseinen asia ei kuulu varsinaiseen kurssiin, vaan se voidaan käsitellä mikäli aikaa ja kiinnostusta riittää. Yleiseen oppimäärän oppisisältöihin onkin merkitty tähdellä radiaanit.

Matematiikan laajan oppimäärän kolmas kurssi sisältää pienen osuuden geometrian kertausta ja täydennystä, johon kuuluu trigonometrian osalta sini- ja kosinilause. Varsinainen trigonometrian ja funktio-opin opetus keskittyy kurssiin viisi, jonka tavoitteeksi on lueteltu trigonometrian osalta, että oppilas hallitsee trigonometrian peruskäsitteet ja osaa käyttää trigonometriaa sovelluksissa. Oppimääräsuunnitelmaan on listattu trigonometrian oppisisällöt, joihin kuuluu radiaani, trigonometristen funktioiden määritelmät, jaksollisuus, kuvaajat, trigonometristen funktioiden väliset peruskaavat, yhteen- ja vähennyslaskukaavat sekä trigonometrisia yhtälöitä.

Vuonna 1985 kouluhallituksen vahvistamat lukion opetussuunnitelman perusteiden [26, s. 283–295] oppisisällöt ja tavoitteet ovat hyvin samanlaiset kuin vuoden 1981 oppimääräsuunnitelmassa. Ainoana erona oppisisällöissä on, että oppisisältöjä on merkitty entistä enemmän tähdillä. Tähtien avulla opetussuunnitelmassa on pyritty korostamaan oppisisältöjen tärkeysjärjestystä ja mahdollistamaan perusasioiden tarkempaa läpikäymistä. Yhdellä tähdellä merkityt asiat ovat oppimäärää syventävää ja täydentävää oppiainesta, jota on tarkoitus opetuksessa käsitellä, mutta jolle varattua aikaa voidaan tarvittaessa käyttää myös esimerkiksi perusasioiden harjoitteluun. Kahdella tähdellä merkityt oppiainekset ovat yli kurssin, joten ne eivät kuulu varsinaiseen oppimäärään. Nämä asiat voidaan käsitellä mikäli aikaa ja kiinnostusta riittää. Opetussuunnitelmassa yleisen oppimäärän oppisisällöissä yhdellä tähdellä on merkitty trigonometristen funktioiden määritelmät yksikköympyrässä sekä funktioiden $\sin(x)$ ja $\cos(x)$ kuvaajat. Sen sijaan radiaanit on merkitty kahdella tähdellä. Kun taas laajassa oppimäärässä yhdellä tähdellä on merkitty trigonometristen funktioiden yhteen- ja vähennyslaskukaavat sekä trigonometriset yhtälöt.

4.7.1 Opetussuunnitelman toteutuminen lukion oppikirjoissa

Lukion yleisen oppimäärän oppikirja Uuden lukion matematiikka 1 [47] sisältää kolmannen kurssin, joka kattaa trigonometrian oppisisällöt. Aluksi kirjassa tutustutaan kulman sijoittamiseen koordinaatistoon, jolloin esille nousee myös suunnattu kulma (kappale 3.1), yksikköympyrä sekä merkkikaaviot (kuva 3.2). Tämän jälkeen yksikköympyrän avulla määritellään sini, kosini sekä tangentti kuten määritelmässä 3.1, mutta aihe on merkitty tähdellä, joten asia voidaan käsitellä aikataulun salliessa. Erityisesti huomio kiinnittyi tässä siihen, että aikaisempien vuosikymmenten oppikirjoissa esiteltyihin trigonometrisiin funktioihin kuuluva kotangentti, on jäänyt tästä oppikirjasta pois. Suorakulmaisen kolmion trigonometria kuuluu yleiseen oppimäärään ja aiheeseen perehdytäänkin ensin tutkimalla yhdenmuotoisia suorakulmaisia kolmioita. Opetussuunnitelman mukaisesti kirjassa käydään sini- ja kosinifunktion kuvaajat. Kirja opastaa pääasiassa määrittämään trigonometristen funktioiden arvon laskimen avulla, mutta mainitsee myös trigonometriset taulukot. Lopuksi kirjassa esitellään vielä yleinen Pythagoraan lause (lause 3.1) sekä komplementtikulman trigonometriset funktiot (määr. 2.2). Tämän vuosikymmenen kirja sisältää erityisen paljon trigonometrian oppisisältöjä muihin vuosikymmenten lyhyen matematiikan oppikirjoihin verrattuna, vaikka samaa eroa oppisisältöjen välillä ei ole nähtävissä opetussuunnitelmia vertailtaessa. Tämänkin oppikirjan osalta on selkeästi huomattavissa, että oppisisältöihin on lisätty asioita, joita ei opetussuunnitelmassa mainita.

Laajan oppimäärän oppikirjasarjaksi valittiin myös Uuden lukio matematiikka, joista ensimmäinen ja toinen osa sisältävät trigonometrian oppisisältöjä. Ensimmäisen osan [37, s. 213–234] kolmannessa kurssissa käsitellään vektoreita ja geometriaa, jolloin esille nousee joitakin trigonometrian osa-alueita. Kertauksenomaisesti ensin kirjassa käydään läpi suorakulmaisen kolmion terävän kulman trigonometriset funktiot sini, kosini ja tangentti. Tämän jälkeen tutustutaan yksikköympyrään, jonka avulla määritellään sini ja kosini. Trigonometrian perukaavoista käydään läpi yleinen Pythagoraan lause (lause 3.1), Pythagoraan lause sekä sen käänteislause (lause 2.1).

Uuden lukion matematiikka 2 -oppikirja [38, s. 77–115] sisältää viidennessä kurssissa trigonometria osion. Trigonometriset funktiot sini, kosini, tangentti ja kotangentti määritellään yksikköympyrän avulla. Tämän lisäksi yllättävää on, että kirjassa esitellään myös sekantin ja kosekantin määritelmät (määr. 3.1). Trigonometristen peruskaavojen (kappale 3.3) lisäksi kirjassa esitellään komplementti- sekä suplementtikulman trigonometriset funktiot. Trigonometristen funktioiden määritelmien ohella kirjassa mainitaan myös niiden määrittely- ja arvojoukot. Sinin, kosinin ja tangentin yhteen- sekä vähennyslaskukaavat ja kaksinkertaisten kulmien kaavat kuuluvat kirjassa lukion laajaan oppimäärään, mutta kaavojen johtaminen on merkitty varsinaista oppimäärää syventäväksi ja täydentäväksi oppiainekseksi. Lukion laajan oppimäärän kirjasarjan voidaan todeta toteuttavan opetussuunnitelman asettamat vaatimukset.

4.8 Vuoden 1994 peruskoulun opetussuunnitelman perusteet

Vuonna 1994 vahvistettu peruskoulun opetussuunnitelman perusteet [41, s. 76–79] eroaa hyvin paljon edeltäjistään matematiikan osalta. Suurin ja ratkaisevin ero liittyy matematiikan oppisisältöihin, jotka on jätetty avoimeksi uusille tiedoille, keksinnöille, tärkeiksi nousseille asiaryhmille ja ajankohtaisille sovelluksille. Opetussuunnitelman mukaan perinteisiä oppisisältöjä tulee tarkastella kriittisesti, jolloin on voitava jättää pois sellaista, joka ei ole matematiikan rakenteen ymmärtämisen ja tietojen soveltamisen kannalta välttämätöntä.

Vuoden 1994 peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa matematiikan opetuksen tavoitteena on kehittää oppilaan kykyä luokitella, jäsentää ja mallintaa ympäröivässä maailmassa eteen tulevia tilanteita aiemmin oppimillaan käsitteillä sekä harjaannuttaa oppilaita johdonmukaiseen ja täsmälliseen ajatteluun sekä asioiden esittämiseen. Yläasteella matematiikan opiskelun keskeisimpiin sisältöihin kuuluu trigonometrian osalta, että oppilas tottuu käyttämään trigonometriaa ja Pythagoraan lausetta kappaleiden pinta-alojen ja tilavuuksien laskennalliseen tarkasteluun. Sen tarkemmin opetussuunnitelma ei luettele oppisisältöjä trigonometrian osalta ja niitä ei ole julkaisussa jaoteltu eri luokka-asteille kuuluviksi. Trigonometrian oppisisältöjen perusteella kyseinen opetussuunnitelma ei eroa paljoakaan vuoden 1985 peruskoulun opetussuunnitelmasta.

4.8.1 Opetussuunnitelman toteutuminen peruskoulun oppikirjoissa

Vuoden 1994 opetussuunnitelman mukaiseksi kirjasarjaksi valittiin Kerroin Yläasteen matematiikka 1–9. Kirjasarjan oppisisällöt eivät eroa lainkaan tutkimuksessa olleen 1980-luvun peruskoulun kirjasarjan oppisisällöistä. Seitsemännen luokan kirjassa käydään läpi valmistelevaa oppiainesta ja kolmioiden kulmien summa, joka osoitetaan oikeaksi leikkaamalla kolmioiden kulmat. [1, s. 201–233]

Yhdeksännen luokan kirjassa [2, s. 22–60] trigonometristen funktioiden käsittely alkaa suorakulmaisten kolmioiden yhdenmuotoisuuteen tutustumalla. Tangenttiin, siniin ja kosiniin tutustutaan tutkimalla kolmioiden sivujen suhteita, jonka jälkeen harjoitellaan funktioiden käyttöä. Trigonometrisen oppisisällön lopuksi terävän kulman trigonometrisia funktioita sovelletaan erilaisten kappaleiden pinta-alojen sekä tilavuuksien laskemisessa.

Kerroin Yläasteen matematiikkaa oppikirjasarjan voidaan todeta toteuttavan opetussuunnitelmassa esitetyt oppisisällölliset tavoitteet. Kuten jo opetussuunnitelmien perusteella voitiin sanoa 1980- ja 1990-luvun oppisisältöjen olevan hyvin paljon samanlaiset, joka tuli ilmi myös vastaavien vuosikymmenten oppikirjojen oppisisältöjä vertailtaessa.

4.9 Vuoden 1994 lukion opetussuunnitelman perusteet

Vuoden 1994 lukion opetussuunnitelman perusteet [40, s. 70–76] antaa hyvin niukasti ohjeita trigonometrian opetukseen ja listaa hyvin epätarkasti vaadittavat oppisisällöt. Opetussuunnitelma korostaa moneen otteeseen matematiikan oppisisältöjen soveltamista tavallisissa sovelluksissa. Lyhyen ja pitkän matematiikan tavoitteissa tuleekin esille pyrkimys siihen, että opiskelijat saavat kuvan matematiikan soveltamismahdollisuuksista arkielämässä. Nämä tavoitteet näkyvät hyvin myös oppisisällöissä, jotka on trigonometrian osalta lueteltu hyvin ylimalkaisesti. Lyhyen matematiikan geometria kurssilla harjoitellaan käytännön ongelmien ratkaisemista yhdenmuotoisuutta, trigonometriaa ja Pythagoraan lausetta hyväksi käyttäen. Samoin pitkän matematiikassa perehdytään trigonometrisiin funktioihin ja niiden perusominaisuuksiin sekä niiden käyttöön tavallisimmissa sovelluksissa.

4.9.1 Opetusuunnitelman toteutuminen lukion oppikirjoissa

Lukion lyhyen matematiikan Variaabeli -kirjasarjan kolmas osa käsittelee geometriaa [14]. Kirja kertaa hyvin paljon asioita, jotka kuuluvat jo peruskoulun oppikirjaan sekä opetussuunnitelmaan. Kertaavaan osuuteen kuuluu muun muassa kulmien nimeäminen ja luokittelu, kulmien piirtäminen harpilla ja viivoittimella, kolmion kulmien summa ja Pythagoraan lause. Lisäksi kuten jo peruskoulun oppikirjassa niin myös tässä lyhyen lukion kirjassa tutustutaan suorakulmaisten kolmioiden yhdenmuotoisuuksiin, jonka jälkeen käydään läpi suorakulmaisen kolmion trigonometriaa. Ainoastaan uutena asiana peruskoulun oppikirjaan verrattuna tässä kirjassa mainitaan radiaanit, mutta niiden käyttöä ei kuitenkaan sen enempää harjoitella. Tutkimukseen valittujen 1990-luvun peruskoulun sekä lukion lyhyen matematiikan oppikirjojen sisällöt trigonometrian osalta vastaavat täysin toisiaan. On siis yllättävää huomata, että ainakaan näiden oppikirjojen mukaisen trigonometrian opetuksen myötä lukiolainen ei opi peruskoulun jälkeen mitään uutta lukion lyhyessä matematiikassa. Tähän syynä saattaa olla opetussuunnitelman hyvin epätarkat listaukset vaadittavista oppisisällöistä, joita niin opettajat kuin oppikirjan tekijät voivat tulkita hyvin eri tavoin.

Lukion pitkän matematiikan kirjasarjaksi valittiin Pyramidi matematiikan tietokirja, jonka toinen osa sisältää kurssit geometria, trigonometria ja vektorit sekä analyyttinen geometria [18]. Kirjan geometria osuudessa esitellään Pythagoraan lause ja sen käänteislause. Pythagoraan lause todistetaan lauseen 2.1 todistuksen tavan kaksi mukaisesti. Varsinaisen trigonometrian osuudessa esitetään vasta-, suplementti- sekä komplementtikulmien sinin ja kosinin kaavat (määr. 2.2 ja lause 3.3). Lisäksi kirjassa esitellään sinin ja kosinin yhteenlaskukaavat (lause 3.5), joiden avulla johdetaan kaksinkertaisen kulman sinin ja kosinin kaava. Edeltäjiinsä verrattuna kirjasta on jäänyt pois vähennyslaskukaavat, tangentin yhteenlaskukaava, kulman puoliskon kaavat ja kahden sinin sekä kosinin summa ja erotus kaavat (lause 3.5). Lisäksi erona aiempien vuosikymmenten kirjoihin on, että kotangentin määritelmä (määr. 3.1) sekä käyttö on jäänyt pois.

Vuoden 1994 lukion opetussuunnitelman [40] hyvin ympäripyöreästi ja niukasti listattujen opetussisältöjen perusteella on hyvin tulkinnanvaraista arvioida, täyttävätkö tutkimukseen valittujen lyhyen ja pitkän matematiikan oppikirjat opetussuunnitelman asettamat tavoitteet. Nyt kuitenkin tämän kirja-analyysin osalta voidaan todeta, että ei ole syytä epäillä, että kirjat eivät täyttäisi opetussuunnitelman asettamia oppisisällöllisiä tavoitteita. Tutkimukseen valittujen kirjojen oppisisältöjä vertailtaessa aiempien vuosikymmenten oppikirjoihin on selkeästi huomattavissa, että 1990-luvun kirjoista on jäänyt hyvin paljon pois trigonometrisia kaavoja ja niiden johtamisia. Kirjassa luetellaan lähinnä vain trigonometrian peruskaavoja, joiden perusteella kirjantekijät ovat ehkäpä uskoneet opiskelijan johtavan muut tarvittavat kaavat. On kuitenkin todennäköistä, että trigonometrian oppimäärä on näivettynyt kaavakokoelmien selailuksi.

4.10 Vuoden 2004 peruskoulun opetussuunnitelman perusteet

Vuoden 1994 peruskoulun opetussuunnitelman perusteista poiketen vuoden 2004 peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa [43, s. 157–167] on lueteltu matematiikan oppisisällöt hieman tarkemmin, mutta nekin jättävät hyvin paljon tulkinnan varaa kunnallisen opetussuunnitelman tekijöille, opettajille ja samalla myös oppikirjan tekijöille. Vuosiluokkien 6–9 matematiikan opetuksen tavoitteiksi trigonometrian osalta on mainittu, että oppilas oppii kolmioihin liittyviä käsitteitä, Pythagoraan lauseen, trigonometriaa ja suorakulmaisen kolmion ratkaisemisen. Näitä lueteltuja oppisisältöjä vertailtaessa aiempien opetussuunnitelmien asettamiin oppisisällöllisiin tavoitteisiin voidaan todeta, että 1980-luvun jälkeen opetussuunnitelmien oppisisällöissä ei ole trigonometrian osalta tapahtunut juurikaan minkäänlaisia muutoksia.

4.10.1 Opetussuunnitelman toteutuminen peruskoulun oppikirjoissa

Tutkimukseen valittiin useissa nykypäivän peruskouluissa käytössä oleva kirjasarja Pii 7–9, joka noudattaa vuoden 2004 peruskoulun opetussuunnitelmaa. Seitsemännen luokan kirjassa käydään läpi tuttuun tapaan valmistavaa oppiainesta. [11, s. 103–140] Kahdeksannen luokan kirjassa tutustutaan suorakulmaiseen kolmioon ja sen pinta-alan laskemiseen. Lisäksi kirjassa esitetään Pythagoraan lause, joka perustellaan geometrisen tulkintaan perustuvan kuvan avulla, kuten aiemmin esitellyssä kuvassa 2.2. [12, s. 248-258]

Yhdeksännen luokan kirjassa trigonometrisiin funktioihin tangenttiin, siniin sekä kosiniin lähestytään tutkimalla suorakulmaisten kolmioiden yhdenmuotoisuuksia. Trigonometristen funktioiden arvo opetetaan määrittämään laskimen avulla. Lopuksi kirjassa on vielä trigonometristen funktoihin liittyviä soveltavia tehtäviä, joissa lasketaan erilaisten kuvioiden pinta-aloja sekä tilavuuksia. [13, s. 119–150]

Kirjasarja Pii 7–9 täyttää kaikki opetussuunnitelmassa luetellut oppisisältötavoitteet trigonometrian osalta. Kuten jo opetussuunnitelmia tutkittaessa tuli esille, että trigonometrian oppisisällöissä ei ole tapahtunut suurempia muutoksia 1980-luvun jälkeen. Sama voidaan todeta peruskoulun kirjojen oppisisältojen perusteella, jotka ovat pysyneet 1980-luvulta nykypäivään asti hyvin samanlaisina.

4.11 Vuoden 2003 lukion opetussuunnitelman perusteet

Vuonna 2003 vahvistetussa lukion opetussuunnitelman perusteissa [42, s. 118–128] matematiikan kurssien oppisisällöt on lueteltu edeltäjäänsä tarkemmin. Matematiikan opetuksen tavoitteet ovat pysyneet kuitenkin samanlaisina, jolloin opetuksessa tulee kiinnittää huomiota matematiikan ja arkielämän välisiin yhteyksiin. Lyhyen matematiikan toisessa kurssissa käsitellään geometriaa ja kurssin keskeisimpiin sisältöihin on lueteltu suorakulmaisen kolmion trigonometria ja Pythagoraan lause. Muu trigonometriaan liittyvä oppisisältö on sijoitettu lyhyen matematiikan kahdeksanteen syventävään kurssiin, jonka keskeisiin sisältöihin kuuluu trigonometristen funktioiden määrittely yksikköympyrän avulla, radiaani ja tyyppiä $f(x) = a$ olevien trigonometristen yhtälöiden ratkaiseminen.

Pitkän matematiikan geometriaa käsittelevän kolmannen kurssin yhdeksi tavoitteeksi on listattu, että opiskelija ratkaisee geometrisia ongelmia käyttäen hyväksi Pythagoraan lausetta sekä suora- ja vinokulmaisen kolmion trigonometriaa. Kurssin keskeisiin sisältöihin on lueteltu sini- ja kosinilause. Enemmän trigonometriaa käsitellään pitkän matematiikan yhdeksännellä kurssilla, joka käsittelee trigonometrisia funktioita ja lukujonoja. Kurssin tavoitteissa on mainittu, että opiskelijan tulisi oppia tutkimaan trigonometrisia funktioita yksikköympyrän symmetrioiden avulla sekä oppia ratkaisemaan trigonometrisia yhtälöitä, jotka ovat tyyppiä $\sin f(x) = a$ tai $\sin f(x) = \sin g(x)$. Lisäksi opiskelijan tulisi oppia trigonometristen funktioiden yhteydet eli yleinen Pythagoraan lause (lause 2.1) sekä tangentin määritelmä (määr. 3.1). Kurssin keskeisiin sisältöihin kuuluu suunnattu kulma, radiaani, trigonometriset funktiot symmetria- ja jaksollisuusominaisuuksineen sekä lisäksi trigonometristen yhtälöiden ratkaiseminen.

4.11.1 Opetussuunnitelman toteutuminen lukion oppikirjoissa

Lyhyen matematiikan MAB lukiolaisen matematiikka -kirjasarjan toinen osa Geometria 2 [54] sisältää pakollisen kurssin trigonometrian. Edellisen vuosikymmenen oppikirjaan verrattuna tässä kirjassa ei ole suuriakaan eroja. Ainoastaan erona löytyy Pythagoraan lauseen todistus lauseen 2.1 kolmannen todistustavan mukaisesti. Lisäksi vinokulmaisen kolmion ratkaisemista varten kirjassa johdetaan sinilause (lause 3.9). Sinilauseen kuuluminen oppikirjan sisältöön on melko yllättävää, koska sinilausetta ei mainita opetussuunnitelmassa eikä se ole sisältynyt aiempien vuosikymmenten lyhyen matematiikan oppikirjoihin.

Tutkimukseen valittiin pitkän matematiikan oppikirjasarjaksi Pitkä matematiikka, jonka kolmannesta ja yhdeksännestä osasta tutkittiin trigonometriaan liittyvät oppisisällöt. Tutkittaessa kävi ilmi, että kyseinen kirjasarja sisälsi pitkälti samat oppisisällöt kuin edellisen vuosikymmenen oppikirja. Kirjasarjan kolmas osa sisältää lukion pitkän matematiikan kurssin Geometria [16]. Suorakulmaisten kolmioiden yhdenmuotoisuuden tutkimisesta kirjassa siirrytään suorakulmaisen kolmion trigonometriaan, jolloin esitellään terävän kulman tangentti, sini ja kosini (määr. 2.1). Kirjassa käydään läpi Pythagoraan lause, joka ensin todistetaan lauseen 2.1 kolmannen todistus tavan mukaisesti sekä myöhemmin kirjassa esitellään myös Pythagoraan lauseen käänteislause. Tylpän kulman kosini ja sini määritellään koordinaatiston sekä yksinkertaistetun yksikköympyrän avulla. Lisäksi vinokulmaisten kolmioiden ratkaisemisen avuksi kirjassa johdetaan sini- sekä kosinilause (lauseet 3.9 ja 3.10).

Pitkä matematiikka kirjasarjan yhdeksännen osan nimi on Trigonometriset funktiot ja lukujonot [17]. Trigonometristen funktioista sini, kosin ja tangentti määritellään yksikköympyrän avulla, mutta lisäksi kirjan harjoitustehtävissä tutustutaan myös sekantin, kosekantin sekä kotangentin määritelmiin. Esimerkissä 4.2 on yksi kirjan harjoitustehtävistä, jossa tutustutaan kotangentin määritelmään.

Esimerkki 4.2. [54, s. 45 teht. 93] Kulman α niin sanottu kotangentti määritellään geometrisesti seuraavasti: Piirretään x-akselin suuntainen suora, joka kulkee pisteen $(0, 1)$ kautta. Asetetaan kulma α koordinaatistoon niin, että kulman kärki on origossa ja alkukylki on posiitiivinen x-akseli. Kulman α loppukylki tai sen jatke leikkaa suoran pisteessä C. Kulman α *kotangentti* on pisteen C x-koordinaatti. Kulman α kotangentti merkitään $\cot\alpha$.

a) Millä α:n arvoilla kotangentti ei ole määritelty?

b) Kaikilla määrittelyjoukossa olevilla suunnatuilla kulmilla α pätee $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Todista kaava sellaisille kulmille α, joiden loppukylki on neljännessä neljänneksessä.

Kirjassa ei varsinaisiin teoriaosuuksiin kuulu kaksinkertaisten kulmien kaavat tai yhteen- ja vähennyslaskukaavat, mutta sen sijaan niihin tutustaan ja niiden käyttöä harjoitellaan harjoitustehtävissä. Esimerkissä 4.3 on yksi kirjan harjoitustehtävä, jossa tutustutaan kaksinkertaisten kulmien kaavoihin.

Esimerkki 4.3. [54, s. 45 teht. 94] Kulman 2α tangentti saadaan kulman α tangentista taulukkokirjoissa olevalla kaavalla $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

a) Todista kaava. Käytä hyväksi kaksinkertaisen kulman kaavoja $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ ja $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

b) Kulmien 45° ja 225° tangentin arvo on 1. Määritä 22, 5°:n kulman ja 112, 5°:n tangentin tarkka arvo.

Pitkän matematiikan kirjojen analysoinnin perusteella voidaan todeta niiden sisältävän samat oppisisällöt kuin edellisen vuosikymmenen oppikirja. On selvää, että Pitkä matematiikka -kirjasarjan mukaisessa opetuksessa toteutuu opetussuunnitelman antamat oppimistavoitteet. Kirjan tekijät ovat halunneet tuoda harjoitustehtävissä esille asioita, joita ei opetussuunnitelmassa mainita. Näin ollen opettaja ja opiskelijat voivat halutessaan tutustua ylikurssin meneviin asioihin näiden harjoitustehtävien avulla.

4.12 Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014 sekä tuleva lukion opetussuunnitelma

Tutkielman teon aikana Suomessa on eletty matematiikan opetuksen kannalta erityisen jännittävää aikaa, koska tekeillä on ollut peruskoulun sekä lukion uudet opetussuunnitelman perusteet. Alan ihmisten keskuudessa on käyty kiivasta keskustelua matematiikan opetuksen kehittämisestä ja tavoitteista. Opetushallitus hyväksyi perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 22.12.2014. Näiden perusteiden mukainen paikallinen opetussuunnitelma otetaan käyttöön porrastetusti vuosiluokkien 7–9 osalta vuosina 2017, 2018 ja 2019. [45]

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden mukaan matematiikan tehtävä on luoda pohjaa matemaattisten käsitteiden ja rakenteiden ymmärtämiselle sekä kehittää oppilaiden kykyä käsitellä tietoa ja ratkaista ongelmia. Oppimista tulee tukea hyödyntämällä tieto- ja viestintäteknologiaa. Lisäksi matematiikan opetus kehittää oppilaiden kykyä käyttää ja soveltaa matematiikkaa monipuolisesti. Opetussuunnitelman perusteissa on lueteltu edeltäjiinsä verrattuna melko tarkasti matematiikan tavoitteisiin liittyvät keskeiset sisältöalueet. Trigonometrian oppisisältöjen osalta uusi opetussuunnitelman perusteet ei juurikaan eroa kuitenkaan edeltäjistään. Opetussuunnitelmassa korostuu hyvin paljon myös trigonometrian osa-alueella ymmärtävä ja tutkiva oppiminen. Asiasisältöihin kuuluu kulman käsitteen ymmärtäminen, kulmiin liittyvien ominaisuuksien tutkiminen sekä Pythagoraan lauseen, Pythagoraan lauseen käänteislauseen ja trigonometristen funktioiden käytön oppiminen. [46, s. 429–436]

Tutkimuksen aikana hyväksyttiin myös Lukion uusi tuntijako, jonka mukaan lukion oppimäärän laajuus säilyy kolmena vuotena ja 75 kurssina. Uuden tuntijaon myötä matematiikan opinnot alkavat yhteisellä opintokokonaisuudella, jonka jälkeen opiskelijan opinnot eriytyvät joko pitkään tai lyhyeen matematiikkaan. [39] Tämä muutos tulee aiheuttamaan rakenteellisia muutoksia sekä pitkän että lyhyen matematiikan kahden ensimmäisen kurssin sisältöihin. Opetushallitus käynnisti lukiokoulutuksen opetussuunnitelman perusteiden päivittämisen valtioneuvoston päätettyä tuntijaosta. Opetushallitus valmistelee opetussuunnitelman perusteet niin, että niiden mukaan laaditut opetussuunnitelmat otetaan käyttöön viimeistään vuonna 2016. Lukion opetussuunnitelman perusteiden päivittämisen yhtenä suuntaviivana on monipuolisten opiskeluympäristöjen ja opetusteknologian käytön tukeminen. [44] Nähtäväksi jää, millaisen painoarvon trigonometrian oppisisällöt saavat tulevassa lukion opetussuunnitelmassa.

5 Johtopäätökset

Tässä luvussa on esitelty tutkimuksen tulokset, joka on yhteenveto aiemmin esiteltyjen oppiennätysten, opetussuunnitelmien ja oppikirjojen vertailusta. Tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää, kuinka trigonometrian opetus on muuttunut Suomessa 1950–2000-lukujen aikana. Samalla pyrittiin tutkimaan, kuinka vahvan pohjan opetussuunnitelma antaa oppikirjojen tekemiselle ja kuinka opetussuunnitelmassa asetetut tavoitteet trigonometrian opetukselle ovat välittyneet oppikirjojen avulla kouluihin opettajille sekä oppilaille.

Trigonometrian opetuksella on hyvin pitkä historiansa, joten tutkittava ajanjakso kertoo vain sen viimeisten vuosikymmenten muutoksista. Keskikoulun ja peruskoulun oppikirjojen sekä opetussuunnitelmien analysoinnin myötä voidaankin todeta, että trigonometrian opetuksen huippuvuodet tutkittavan ajanjakson ajalta sijoittuvat 1970-luvulle. Uuden matematiikan tuomien muutosten myötä peruskoulussa terävän kulman trigonometrisiä funktioita määriteltiin yksikköympyrän avulla sekä tarkasteltiin trigonometristen funktioiden kuvaajia. Innostus uudesta matematiikasta laantui kuitenkin hyvin nopeasti, jonka myötä uudistuksen tuomat oppisisällöt jäivät pois peruskoulun opetuksesta. Sen jälkeen trigonometrian osalta peruskoulun oppikirjojen sisällöt sekä opetussuunnitelmien asettamat oppisällölliset tavoitteet ovat pysyneet 1980-luvulta nykypäivään hyvin muuttumattomina. Trigonometrisista funktioista kotangentin määritelmä sekä deduktiivinen todistaminen on hävinnyt 1980-lukuun mennessä kokonaan peruskoulun oppisisällöistä. Todistamisen sijaan viimeisimpien vuosikymmenten oppikirjoissa asioita saatetaan osoittaa erilaisten kuvasarjojen avulla, jotka havainnollistavat esimerkiksi kolmion kulmien summaa.

Lyhyen matematiikan oppisisällöistä on vaikea luoda lyhyttä yleiskatsausta, koska oppisisällöt ovat vaihdelleet tutkittavalla ajanjaksolla valtavasti. Vielä 1950-luvulla oppisisältöihin kuului trigonometriset peruskaavat, trigonometrisistä funktioista määriteltiin sinin, kosinin ja tangentin lisäksi vielä kotangentti. Kuitenkin 1970-luvulla uuden matematiikan innostuksen tuomat muutokset peruskoulussa näkyivät myös lyhyen matematiikan puolella. Peruskoulun oppisisältöjen laajenemisen myötä myös lyhyeen matematiikkan oppisisältöihin liitettiin aiemmin sinne kuulumattomia asiasisältöjä, kuten yksikköympyrän avulla trigonometristen funktioiden yleistäminen kaikille kulmille, suunnattu kulma sekä trigonometristen funktioiden kuvaajat. Muutokset näkyivät vielä seuraavan vuosikymmenen oppisisällöissä, mutta 1990-luvulle lyhyen matematiikan oppisisällöt kuihtuivat täysin, koska silloiset lyhyen matematiikan oppisisällöt eivät poikenneet varsinaisesti sen aikaisista peruskoulun oppisisällöistä. Viimeisimpään vuoden 2003 opetussuunnitelmaan suurempia muutoksia lyhyen matematiikan pakollisissa kursseissa ei ole tapahtunut, mutta sen sijaan syventävien kurssien osalta trigonometria on nostanut päätään, koska sisältöihin on lisätty trigonometristen funktioiden määrittely yksikköympyrän avulla.

Tähän tutkimukseen valittujen lukion pitkän matematikkan oppikirjojen analysoinnin myötä voidaan todeta, että näiden kirjojen oppisisällöt ovat muuttuneet aikojen saatossa hyvin hitaasti. Lukion pitkän matematiikan oppikirjoja tutkittaessa huomattiin tiettyjen asiasisältöjen säilyneen oppikirjoissa ihan 1950-luvulta 2000-luvulle asti. Näitä säilyneitä oppisisältöjä oli trigonometristen funktioiden määrittely yksikköympyrän avulla, trigonometristen funktioiden kuvaajien tarkastelu, radiaanit, funktioiden jaksollisuus, yleinen Pythagoraan lause, sini- ja kosinilause. 1970-luvulle asti oppisisältöihin on kuulunut hyvin vaativia asioita, kuten esimerkiksi lauseiden täsmälliset todistukset. Myöhemmillä vuosikymmenillä oppikirjojen teoriaosuuksia on kevennetty; aluksi siirtämällä asioita lisämateriaaleihin ja lopulta asiat on saatettu jättää oppikirjojen sisällöistä kokonaan pois. 1950-luvulta kohti nykypäivää ovat lukion pitkän matematiikan kirjoista hävinneet erilaiset trigonometristen funktioiden väliset kaavat kuten esimerkiksi yhteen- ja vähennyslaskukaavat, kahden sinin tai kosinin summan ja erotuksen, kaksinkertaisen kulman sekä kulman puoliskon kaavat. Kuitenkin tutkimukseen valitun 2000-luvun Pitkän matematiikan oppikirjasarja tuo näitä kaavoja esille erilaisissa harjoitustehtävissä, joissa käydään myös sekantin, kosekantin ja kotangentin määritelmät. 1950–1960-lukujen oppisisällöissä korostui vielä selkeästi matemaattisten kaavojen hallinta ja osaaminen, jonka jälkeen näiden kaavojen merkitys on vähentynyt ja oppikirjoissa esitetään ainoastaan peruskaavoja. Tutkimuksen ohella heräsi kysymys, opetetaanko nykypäivänä kouluissa opiskelijoita johtamaan kaavoja trigonometrian peruskaavoista vai ohjataanko opiskelijat sen sijaan vain katsomaan tarvittavat kaavat taulukkokirjasta.

Tärkeimmät vaikuttajat oppikirjojen oppisisältöihin ovat tietenkin oppikirjan tekijät, koska he viime kädessä päättävät, mitä painotuksia kirjaan otetaan. Lisäksi on huomioitava, että tutkimalla opetussuunnitelmia ja oppimateriaaleja ei saada todellista kuvaa Suomen kouluissa tapahtuvasta opetuksesta, koska jokainen opettaja tulkitsee ja käyttää oppimateriaaleja omalla tavallaan ja antaa eri painotuksia oppisisällöille. Tutkimuksen tuloksissa on kuitenkin otettava huomioon, että vaikka opetussuunnitelmalla on varmasti suuri merkitys matematiikan oppikirjojen oppisisältöihin niin myös muut yhteiskunnalliset taustatekijät vaikuttavat oppikirjojen sisältöihin. Hyvänä esimerkkinä taustatekijöiden vaikutuksesta oppikirjojen sisältöihin on 1900-luvun jälkipuoliskolla kiihtynyt tietotekniikan kehitys, joka on vaikuttanut myös oppikirjojen trigonometrian oppisisältöihin. Aiemmin trigonometristen funktioiden arvojen määrittämiseen käytettiin siihen tarkoitettuja trigonometrisia taulukoita, joiden käyttö oli melko hankalaa ja se vaati oman harjoittelunsa. Laskimien kehityksen ja yleistymisen myötä 1980-luvun oppikirjoihin ei enää trigonometristen taulukoiden käytön harjoittelu kuulu vaan sen sijaan trigonometristen funktioiden arvojen määrittämiseen harjoitellaan laskimen käyttöä. Tekniikan kehityksen myötä oppikirjojen oppisisältöjä on voitu muuttaa jättämällä jotain asioita pois ja tuomalla jotain uutta tilalle.

Oppiennätyksien ja opetussuunnitelmien asettamien oppisisältöjen tavoitteiden välillä on suuria eroja tutkittavalla ajanjaksolla. Pelkkien oppiennätysten tai opetussuunnitelmien tarkastelu ei anna kovin konkreettista kuvaa matematiikan opetuksesta, koska useiden vuosikymmenten oppiennätykset sekä opetussuunnitelmat jättävät hyvin paljon tulkinnan varaa asettamien oppisisältöjen suhteen. Nämä hyvin väljästi asetetut oppisisällölliset tavoitteet voidaan täyttää hyvin eri tavoin, jolloin oppikirjojen tekijöiden vaikutukset oppikirjojen sisältöjen suhteen muodostuu entistä suurempaan rooliin. Yleisesti voidaan todeta, että oppikirjat ovat noudattaneet oppiennätyksiä ja opetussuunnitelmia kaikilla vuosikymmenillä. Ainoastaan 1960–luvun Väisälän [61] oppikirjan lukion lyhyelle kurssille tarkoittamat oppisisällöt eivät täysin täytä aikansa oppiennätyksiä, koska teoksessa ei käydä läpi trigonometristen funktioiden välisiä kaavoja. Lisäksi tutkimuksessa kävi ilmi, että monet oppikirjat sisältävät oppisisältöjä, joita ei oppiennätyksissä tai opetussuunnitelmien oppisisällöissä mainita.

Tutkimuksessa olleiden oppikirjojen osalta voidaan todeta koulumatematiikan kehittyneen enemmänkin kuvailevaan suuntaan, jolloin tarkat matemaattiset määritelmät sekä todistukset ovat vähentyneet selvästi. Trigonometrian opetuksen kehityksen kannalta selkein murros tutkittavalla ajanjaksolla on tapahtunut 1970-luvulla, jonka jälkeen trigonometristen oppisisältöjen määrät ovat supistuneet vähitellen. Matematiikan opetuksen kannalta elämme tällä hetkellä jännittävää aikaa, koska vuoden 2014 joulukuussa Opetushallitus hyväksyi perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet sekä lisäksi tekeillä on lukion opetussuunnitelma. Tekniikan nopean kehityksen sekä uusien innovaatioiden tuomat mahdollisuudet koulumatematiikassa pyritään ottamaan huomioon uusissa opetussuunnitelmissa, joiden sisällöistä on käyty kiivasta keskustelua alan ihmisten kesken. Nähtäväksi jääkin, miten nämä muutokset vaikuttavat trigonometrian opetukseen sekä oppisisältöihin.

Lähteet

[1] Alho, K., Hiltunen, H., Luoma, M., Pulli, A. (2000) Kurssit 1-3 Kerroin Yläasteen matematiikka, Keuruu: Otava

[2] Alho, K., Hiltunen, H., Luoma, M., Pulli, A. (2002) Kurssit 7-9 Kerroin Yläasteen matematiikka, Keuruu: Otava

[3] Apajalahti, M., Laine, Y., Tanskanen, R. (1975) Lukion matematiikka I pitkä kurssi, Keuruu: Otava

[4] Asetus oppikoulujen lukusuunnitelmista sekä valtion oppikoulujen oppiennätykset ja metodiset ohjeet: Oppikoulujen lukusuunitelmista kesäkuun 13 päivänä 1941 annettu asetus, opetusministeriön valtion oppikouluja varten kesäkuu 19 päivänä 1941 vahvistamat oppiennätykset ja kouluhallituksen kesäkuun 26 päivänä 1941 vahvistamat metodiset ohjeet. (1943) Helsinki: Valtioneuvoston kirjapaino

[5] Baley, J. D., Sarell, G. (1996) Trigonometry third edition, United States: The McGraw-Hill Companies, Inc.

[6] Berele, A., Goldman, J. (2001) Geometry, Theorems and constructions, New Jersey: Prentice Hall, Inc.

[7] Eukleides. (2011) Alkeet: kuusi ensimmäistä kirjaa eli Tasogeometria, suom. Aschan, P., nykysuomentanut ja kommentoinut Kahanpää, L. Jyvänskylä: Kirjapaino Kopi-Jyvä

[8] Hakalehto, J., Honkanen, S., Kaila, L., Ranta, E. (1979) Matematiikka 10, Lyhyt kurssi, Porvoo: WSOY

[9] Halinen, I., Hänninen, L., Joki, J., Leino, J., Näätänen, M., Pehkonen, E., Pehkonen, L., Sahlberg, P., Sainio, E., Seppälä, R., Strang, T. (1991) Peruskoulun matematiikan opetuksen kehityssuunnasta 1990-luvulla, Helsinki: VAPK-kustannus

[10] Halmetoja, M. (2012) Lukion trigonometria, Matematiikkalehti Solmu 1/2012. Saatavana: http://solmu.math.helsinki.fi/2012/1. Viitattu 11.12.2014.

[11] Heinonen, M., Luoma, M., Mannila, L., Tikka, T. (2006) Pii 7: Matematiikka, Keuruu:Otava

[12] Heinonen, M., Luoma, M., Mannila, L., Tikka, T. (2007) Pii 8: Matematiikka, Keuruu: Otava

[13] Heinonen, M., Luoma, M., Mannila, L., Tikka, T. (2009) Pii 9: Matematiikka, Keuruu: Otava

[14] Hautajärvi, T., Ottelin, J., Wallin-Jaakkola, L. (2001) Variaabeli 3, Lukion lyhyt matematiikka, Geometria, Helsinki: Otava

[15] Iisalo, T. (1987) Kouluopetuksen vaiheita keskiajan katedraalikoulusta nykyisiin kouluihin, Helsinki: Otava VAPK-kustannus

[16] Kangasaho, J., Mäkinen, J., Oikkonen, J., Paasonen, J., Salmela, M., Tahvanainen, J. (2006) Pitkä matematiikka 3, Geometria, Helsinki: WSOY

[17] Kangasaho, J., Mäkinen, J., Oikkonen, J., Paasonen, J., Salmela, M., Tahvanainen, J. (2007) Pitkä matematiikka 9, Trigonometriset funktiot ja lukujonot, Helsinki: WSOY

[18] Kontkanen, P., Liira, R., Luosto, K., Nurmi, J., Nurmiainen, R., Ronkainen, A., Savolainen, S. (1998) Pyramidi matematiikan tietokirja 2, Helsinki: Kirjayhtymä Oy

[19] Keskikoulun matematiikan oppiennätykset. Ryhmäkirje valtion ja yksityisten oppikoulujen samoin kuin kansakoulun yhteydessä toimivien keskikoulujen rehtoreille, Helsingissä elokuun 22. päivänä 1958

[20] Kouluhallitus. (1960) Lukion matematiikan oppiennätykset. Yleiskirje valtion ja yksityisten oppikoulujen sekä kansakoulun yhteydessä toimivien keskikoulujen rehtoreille, Helsingissä heinäkuun 13. päivänä 1960

[21] Kouluhallitus. (1971) Matematiikka. POPS-70: Opas 6, Helsinki: Valtion painatuskeskus

[22] Kouluhallitus. (1974) Matematiikan opetussuunnitelmat. Helsinki: Valtion painatuskeskus

[23] Kouluhallitus. (1976) Matematiikka. Ehdotus perustavoitteiksi ja perusoppiainekseksi peruskoulussa, Helsinki: Kouluhallitus

[24] Kouluhallitus. (1981) Lukion kurssimuotoinen oppimäärä ja oppimääräsuunnitelma: Matematiikka, Helsinki: Valtion painatuskeskus

[25] Kouluhallitus. (1982) Peruskoulun matematiikan oppimäärä ja oppimääräsuunnitelma, Helsinki: Valtion painatuskeskus

[26] Kouluhallitus. (1985) Lukion opetussuunnitelman perusteet 1985, Helsinki: Valtion painatuskeskus

[27] Kouluhallitus. (1985) Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 1985, Helsinki: Valtion painatuskeskus

[28] Kupari, P. (1999) Laskutaitoharjoittelusta ongelmanratkaisuun. Matematiikan opettajien matematiikkauskomukset opetuksen muovaajina, Jyväskylä: Jyväskylän yliopistopaino

[29] Lehtinen, M. (2009) Trigonometria: kolmioita ja kaavoja, Esitys Päivölässä huhtikuussa 2009. Saatavana: http://solmu.math.helsinki.fi/olympia/kirjallisuus/trig.pdf. Viitattu 01.09.2014.

[30] Lehtinen, M. (2014) Todistetaanpa kosinilause, Matematiikkalehti Solmu 3/2014. Saatavana: http://solmu.math.helsinki.fi/2014/3/. Viitattu 18.12.2014.

[31] Lehtinen, M., Merikoski, J., Tossavainen, T. (2007) Johdatus tasogeometriaan, Helsinki: WSOY oppimateriaalit Oy

[32] Majaniemi, A. (2013) Geometria: Geometriaa, trigonometriaa ja vektorilaskentaa, Espoo: Tietokotka Oy

[33] Majaniemi, A. (1978) Trigonometria, Turun Yliopiston matematiikan laitoksen monisteita N:o 2

[34] Makkonen, R., Pimiä, L. (1949) Geometria ja trigonometria I, keskikoulukurssi, Helsinki: Otava

[35] Makkonen, R., Pimiä, L. (1950) Geometria ja trigonometria II, Lukion kurssi, Helsinki: Otava

[36] Makkonen, R., Pimiä, L. (1950) Geometria ja trigonometria III, Lukion kurssi, Helsinki: Otava

[37] Miinala, H., Salimäki, H., Vuorinen, M. (1987) Uuden lukion matematiikka 1, Laaja oppimäärä, Porvoo: WSOY

[38] Miinala, H., Salimäki, H., Varila, K., Vuorinen, M. (1993) Uuden lukion matematiikka 2, Laaja oppimäärä, Porvoo: WSOY

[39] Opetus- ja kulttuuriministeriö (2014) Lukion uusi tuntijako hyväksyttiin. Lukiokoulutukselle oma kehittämishanke. Saatavana: http://minedu.fi/OPM/Tiedotteet/2014/11/lukiontuntijako.html Viitattu 14.1.2015

[40] Opetushallitus. (1994) Lukion opetussuunnitelman perusteet 1994, Helsinki: Painatuskeskus

[41] Opetushallitus. (1994) Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 1994, Helsinki: Painatuskeskus

[42] Opetushallitus. (2003) Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003, Vammala: Vammalan kirjapaino Oy

[43] Opetushallitus. (2004) Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 2004, Vammala: Vammalan Kirjapaino Oy

[44] Opetushallitus. (2014) Lukion opetussuunnitelman perusteiden päivittäminen. Saatavana: http://www.oph.fi/saadokset_ja_ohjeet/opetussuunni telmien_ja_tutkintojen_perusteet/lukiokoulutus/lops2016/103/0/lukion _opetussuunnitelman_perusteiden_paivittamisen_suuntaviivat. Viitattu 14.1.2015

[45] Opetushallitus. (2014) Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014. Saatavana: http://www.oph.fi/saadokset_ja_ohjeet/opetussuunni telmien_ja_tutkintojen_perusteet/perusopetus Viitattu 14.1.2015

[46] Opetushallitus. (2014) Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014. Saatavana: http://www.oph.fi/download/163777_perusopetuksen _opetussuunnitelman_perusteet_2014.pdf. Viitattu 14.1.2015

[47] Orrainen, K., Ranta, E. (1989) Uuden lukion Matematiikka 1, Yleinen oppimäärä, Porvoo: WSOY

[48] Paasonen, J., Voutilainen, E., Kalla, H. (1986) AHAA matematiikkaa 7, Porvoo: WSOY

[49] Paasonen, J., Voutilainen, E., Kalla, H. (1986) AHAA matematiikkaa 8, Porvoo: WSOY

[50] Paasonen, J., Voutilainen, E., Kalla, H. (1986) AHAA matematiikkaa 9, Porvoo: WSOY

[51] Paavola S. (2014) Trigonometriset funktiot ja yksikköympyrä lukiossa, Helsingin yliopisto

[52] Peruskoulun opetussuunnitelmakomitea. (1970) Peruskoulun opetussuunnitelmakomitean mietintö 2: Oppiaineiden opetussuunnitelma, Helsinki: Valtion painatuskeskus

[53] Pohjoimainen koulumatematiikka. Mietinnön suomenkielinen lyhennelmä. (1967) Stockholm

[54] Peräsalo, M., Soro, R., Wuolijoki, H. (2009) MAB: Lukiolaisen matematiikka, Geometria 2, Helsinkin: WSOY

[55] Seppälä, R. (2002) Kolmekymmentä vuotta koulumatematiikkaa, osa I. Matematiikka muutoksen kourissa. Matemaattisluonnontieteellinen aikakauslehti 66. vuosikerta, Dimensio 1/2002, s. 8–12

[56] Silfverberg, H. (1999) Peruskoulun yläasteen oppilaan geometrinen käsitetieto, Tampereen yliopisto: väitöskirja

[57] Simola, H. (1995) Paljon vartijat: suomalainen kansanopettaja valtiollisessa kouludiskurssissa 1860-luvulta 1990-luvulle, Helsinki: Helsingin yliopisto

[58] Sorvali, T. (2003) Kaksi vuosisataa matematiikan opetusta. matemaattisluonnontieteellinen aikakauslehti 67. vuosikerta, Dimensio 3/2003, s. 10–13

[59] Sorvali, T. (2004) Uuden matematiikan nousu ja tuho. Matemaattisluonnontieteellinen aikakauslehti 68. vuosikerta, Dimensio 3/2004, s. 24–27

[60] Väisälä, K. (1964) Keskikoulun geometria, Porvoo: WSOY

[61] Väisälä, K. (1966) Lukion geometria, Porvoo: WSOY

[62] Väisälä, K. (1969) Trigonometria, Porvoo: WSOY

[63] Wolff, C. G., Holmström, R., Paltakari, R. (1980) Matematiikan tiedot 7 laajempi kurssi, Vaasa: Kirjayhtymä

[64] Wolff, C. G., Holmström, R., Paltakari, R. (1980) Matematiikan tiedot 8 keski- ja laaja kurssi, Vaasa: Kirjayhtymä

[65] Wolff, C. G., Holmström, R., Paltakari, R. (1980) Matematiikan tiedot 9 keski- ja laaja kurssi, Vaasa: Kirjayhtymä