TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Raine Rönnholm

Inkluusio ja ekskluusio kvantifioinnissa

Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka
Toukokuu 2014

Tampereen yliopisto

Informaatiotieteiden yksikkö

Rönnholm, Raine: Inkluusio ja ekskluusio kvantifioinnissa.

Pro gradu -tutkielma, 118 s.

Matematiikka

Toukokuu 2014

Tiivistelmä

Tässä tutkielmassa esitelemme uudet loogiset operaatiot, joita kutsumme inkluusio- ja ekskluusiokvanttoreiksi. Kun ensimmäisen kertaluvun logiikkaa laajennetaan inkluusiokvanttoreilla saadaan uusi logiikka, jota nimitämme INF-logiikaksi ('Inclusion Friendly Logic'). Vastaavasti lisäämällä ensimmäisen kertaluvun logiikkaan ekskluusiokvanttorit saadaan EXF-logiikka ('Exclusion Friendly Logic'), ja lisäämällä näistä kvanttoreista molemmat saadaan IEF-logiikka ('Inclusion-Exclusion Friendly Logic').

Esitämme tässä tutkielmassa esimerkkejä näiden kvanttorien käytöstä ilmaisemalla niiden avulla graafien ominaisuuksia, ja määrittelemme niitä käyttäen uusia hyödyllisiä loogisia operaatioita. Vertaamme lisäksi näiden uusien logiikoiden ilmaisuvoimaa inkluusio- ja ekskluusiologiikoihin, riippuvuuslogiikkaan, NDEP-logiikkaan ('Nondependence Logic') sekä lauseiden tasolla EMSO-logiikkaan ('Existential Monadic Second Order Logic').

Osoitamme, että EXF-logiikka on ilmaisuvoimaltaan vahvempi kuin yksipaikkainen riippuvuuslogiikka mutta heikompi kuin kaksipaikkainen riippuvuuslogiikka. Vastaavasti osoitamme, että INF-logiikan ilmaisuvoima sijoittuu aidosti yksi- ja kaksipaikkaisten NDEP-logiikoiden väliin. Lisäksi todistamme, että lauseiden tasolla INF-, EXF- sekä IEF-logiikka sisältyvät kaikki EMSO-logiikkaan. IEF-logiikalle pätee myös käänteinen väite, joten sen ilmaisuvoima on lauseiden tasolla täsmälleen sama kuin EMSO-logiikalla.

Esipuhe

Tutkimusprosessi

Aloitin valmistelun tämän tutkielman tekoa varten laajentamalla tietämystäni erilaisista logiikoista, joiden suhteen on tehty viimeaikona tutkimusta. Perehdyin erityisesti Hintikan ja Sandun kehittämään IF-logiikkaan ('Independence Friendly Logic') Mannin, Sandun ja Sevensterin teoksen [16] avulla sekä Väänäsen esittelemään riippuvuuslogiikkaan käyttäen hänen kirjoittamaansa oppikirjaa [17]. Vertailin samalla näiden kahden logiikan erilaisia lähestymistapoja samaan aiheeseen; riippuvuuslogiikka toimii atomikaavojen tasolla, kun taas IF-logiikka toimii kvantifioinnin yhteydessä. Itse viehätyin enemmän IF-logiikan tavasta, sillä se johti mielestäni luonnollisempaan ja intuitiivisempaan peliteoreettiseen semantiikkaan.

Keskustellessani ohjaajani Lauri Hellan kanssa tutkielman mahdollisesta aiheesta sain kuulla Gallianin kehittämistä inkluusio- ja ekskluusiologiikoista. Nämä logiikat muistuttavat riippuvuuslogiikan lähestymistapaa siinä mielessä, että niiden inkluusio- ja ekskluusio-operaatiot ilmaistaan atomikaavojen tasolla. Koska olin tässä vaiheessa kiinnostunut enemmän IF-logiikan lähestymistavasta, ohjaajani esitti minulle ajatuksen mahdollisista inkluusio- ja ekskluusio-operaatioista eksistenssikvantifioinnin yhteydessä.

Aloin pohtia mielekästä semantiikkaa tällaisille kvanttoreille, ja näin saivat syntynsä uudet logiikat, joita kutsun INF-logiikaksi ('Inclusion Friendly Logic') sekä EXF-logiikaksi ('Exclusion Friendly Logic'). Edellinen näistä saadaan lisäämällä ensimmäisen kertaluvun logiikkaan määrittelemäni inkluusiokvanttorit ja jälkimmäinen vastaavasti lisäämällä siihen ekskluusiokvanttorit. Logiikkaa jossa voidaan käyttää molempia näistä kvanttoreista nimitän IEF-logiikaksi ('Inclusion-Exclusion Friendly Logic').

Määrittelin näille kvanttoreille ensin kompositionaalisen totuusmäärittelmän tiimisemantiikalla, koska sen avulla niiden ilmaisukykyä oli helpompi tutkia kuin peliteoreettisella semantiikalla. Tutkin näiden kvanttorien ilmaisuvoimaa erityisesti miettimällä millaisia graafiteoreettisia ominaisuuksia niiden avulla voisi ilmaista. Vertailin niiden ilmaisuvoimaa myös suhteessa inkluusio- ja ekskluusiologiikoihin, riippuvuuslogiikkaan sekä NDEP-logiikkaan ('Nondependence Logic'), joista viimeinen on myös alunperin Gallianin esittelemä.

Kehittelin aluksi inkluusio- ja ekskluusio-operaatioiden kanssa myös monenlaisia muita kvanttoreita. Erityisesti mietin miten nämä operaatiot olisi mielekästä ilmaista universaalikvantifioinnin yhteydessä. Osoittautui kuitenkin, että suurin osa näistä ideoimistani operaatioista oli mahdollista määritellä alunperin esittämieni kvanttorien avulla, joten ei ollut tarpeellista lisätä niitä logiikan merkistöön. Koska ne ovat kuitenkin hyödyllisiä ja mielekkäitä operaatioita, suuri osa niistä on määritelty tässä tutkielmassa lyhennysmerkintöinä, ja niiden totuusehdot on todistettu vastaavissa lauseissa.

Tutkimuksen aikana paljastui monia mielenkiintoisia tuloksia siitä, mitä inkluusio- ja ekskluusiokvanttoreilla voi ilmaista, ja tutkielman aihepiiri paisui vähitellen paljon yli alkuperäisten tavoitteideni. Vaikka motivaatio inkluusio- ja ekskluusiokvanttoreiden kehittämiselle sai alkunsa siitä, miten niiden avulla voisi tehdä mielekästä peliteoreettista semantiikkaa, en lopulta ehtinyt käsitellä tätä aihetta tässä tutkielmassa. Tämän aiheen täsmällinen käsittely jääköön siis osaksi jatkotutkimusta – samoin kuin ne monet muut mielenkiintoiset kysymykset joita tämän tutkimuksen aikana tuli esiin, mutta joita en enää pystynyt sisällyttämään tämän tutkielman laajuuteen.

Lukijoita jotka tuntevat peliteoreettisen semantiikan kehotetaan kuitenkin pohtimaan aihetta tästä näkökulmasta. Tämä voi auttaa ymmärtämään määrittelemieni uusien loogisten operaatioiden mielekkyyttä sekä niiden merkitystä myös filosofisemmalla tasolla. Ideat monien lauseiden todistuksille tässä tutkielmassa ovat saaneet alkunsa pelistrategisesta ajatuksesta, joten tämä näkökulma voi auttaa hahmottamaan myös todistusten luonnetta.

Kiitokset

Haluan kiittää ennen kaikkea tutkielmani ohjaajaa professori Lauri Hellaa kannustuksesta ja rakentavasta palautteesta sekä useista mielenkiintoisista keskusteluista aiheeseen liittyen. Lisäksi esitän kiitokseni tutkielmani toiselle tarkastajalle Kerkko Luostolle sekä opiskelutoverilleni Miikka Vilanderille tutkielman oikolukemisesta sekä korjausehdotuksista sen suhteen.

Haluan esittää kiitokseni myös Jouko Väänäselle hänen tarjoamastaan tilaisuudesta luennoida tutkielmani tuloksista Amsterdamissa järjestetyssä Dependence Logic Academy Colloquiumissa ja Helsingissä pidetyssä logiikan seminaarissa. Amsterdamissa pääsin tapaamaan ensimmäistä kertaa Pietro Gallianin, Arnaud Durandin, Fan Yangin, Juha Kontisen ja Miika Hannulan, joita kaikkia haluan kiittää kiinnostuksesta tutkielmani tuloksia kohtaan sekä rohkaisusta jatkotutkimukseen.

Kiitän lisäksi Antti Kuusistoa monista mielenkiintoisista keskusteluista tutkielman aihepiiriin sekä sen filosofiseen mielekkyyteen liittyen. Kiitän myös Ari Virtasta ja Jonni Virtemaa tuesta sekä yhteistyöstä tukimusprosessin aikana. Viimeiseksi haluan vielä kiittää koko laitoksen henkilökuntaa rennon ja vapaan opiskeluympäristön luomisesta opiskelujeni ajalle.

Sisältö

Luku 1

Johdanto

1.1 Tutkimusaiheen taustaa

Inkluusio- ja ekskluusiologiikat juontavat juurensa riippuvuuden sekä epätäydellisen informaation käsitteisiin logiikassa. Ensimmäisenä askeleena tälle pidetään yleensä Henkinin [10] esittelemiä osittainjärjestettyjä kvanttoreita. Tätä ajatusta kehittelivät eteenpäin Hintikka ja Sandu [11][1] esittelemässään IF-logiikassa ('Independence Friendly Logic'). He kehittivät tälle logiikalle myös niin sanotun peliteoreettisen semantiikan [12]. Tässä lähestymistavassa tarkastellaan kahden pelaajan loogista peliä, jossa pelaajilla ei ole täydellistä informaatiota toistensa tekemistä siirroista.

Hodges [13] onnistui kehittämään IF-logiikalle myös kompositionaalisen tavan määritellä totuus. Tässä lähestymistavassa tosin täytyy tarkastella yksittäisten tulkintafunktioiden sijasta niiden joukkoja, joita nimitetään tiimeiksi. Tälläista tiimisemantiikkaa käyttäen Väänänen [17] kehitti myöhemmin ns. riippuvuuslogiikan ('Dependence Logic'). Tässä logiikassa riippuvuutta ei ilmaista kvanttoreiden tasolla kuten IF-logiikassa, vaan sen sijaan atomikaavojen tasolla ns. riippuvuusatomien avulla. Samantapainen lähestymistapa on myös Grädelin ja Väänäsen [8] kehittämässä riippumattomuuslogiikassa ('Independence Logic'), jossa tarkastellaan atomitasolla ns. riippumattomuusatomeja.

Riippuvuus- ja riippumattomuuslogiikoita on tutkittu aktiivisesti erityisesti Helsingin yliopistolla. Niiden suhteen on saavutettu viime vuosina paljon tuloksia, joista voidaan mainita esimerkiksi Durandin ja Kontisen [3] tulokset riippuvuuslogiikan ja toisen kertaluvun logiikan välisestä suhteesta sekä Gallianin, Hannulan ja Kontisen [6] hierarkiatulokset riippumattomuuslogiikalle. Näissä logiikoissa käytetylle tiimisemantiikalle on löydetty mielenkiintoisia yhteyksiä myös muiden tieteenalojen kuten kielitieteiden ja tietokantokantojen riippuvuusteorian kanssa.

[1] Tätä tutkielmaa tehdessä IF-logiikan osalta on käytetty lähteenä pääosin Mannin, Sandun ja Sevensterin oppikirjaa [16].

Tiimisemantiikan sijasta riippuvuuslogiikalle voidaan määritellä myös peliteoreettinen semantiikka [17], mutta se on luonteeltaan varsin erilainen kuin IF-logiikan peliteoreettinen semantiikka. Eräs toinen mielenkiintoinen uusi lähestymistapa on Kuusiston [14] esittelemä ns. kahden tiimin semantiikka ('double team semantics'), joka mahdollistaa mielekkäämmän tavan käsitellä negaatioita riippuvuuslogiikassa. Tämä lähestymistapa tarjoaa uudenlaisen peliteoreettisen semantiikan riippuvuuslogiikalle sekä sen sukulaislogiikoille.

Inkluusio- ja ekskluusiologiikat ovat alunperin Gallianin [5] esittelemiä logiikoita, jotka liittyvät läheisesti riippuvuuslogiikkaan. Ne ovat tutkimuskohteina vielä tuoreempia kuin riippuvuuslogiikka ja erityisesti inkluusiologiikan suhteen on tehty tämän ja viime vuoden aikana monia mielenkiintoisia tuloksia. Näistä mainittakoon esimerkiksi Gallianin ja Hellan [7] löytämä yhteys inkluusiologiikan ja kiintopistelogiikan välille sekä Hannulan [9] tutkimus inkluusiologiikan paikkalukuhierarkiasta. Avoimia kysymyksiä näiden logiikoiden suhteen on kuitenkin vielä paljon.

1.2 Tutkimustuloksia

Tässä tutkielmassa esittelemme uudet loogiset operaatiot, joita kutsumme inkluusio- ja ekskluusiokvanttoreiksi. Kun ensimmäisen kertaluvun logiikkaa laajennetaan inkluusiokvanttoreilla saadaan uusi logiikka, jota kutsumme INF-logiikaksi ('Inclusion Friendly Logic'). Vastaavasti ekskluusiokvanttoreita käyttämällä saadaan EXF-logiikka ('Exclusion Friendly Logic') ja molemmilla näistä kvanttoreista saadaan IEF-logiikka ('Inclusion-Exclusion Friendly Logic').

Tutkiessamme EXF-logiikan ilmaisukykyä saamme osoitettua, että se on vahvempi kuin yksipaikkainen riippuvuuslogiikka, mutta kuitenkin heikompi kuin kaksipaikkainen riippuvuuslogiikka (kappaleet 4.2 ja 4.4). Vastaavasti verratessamme INF-logiikan ilmaisukykyä NDEP-logiikkaan osoitamme, että INF-logiikan ilmaisuvoima asettuu aidosti yksi- ja kaksipaikkaisten NDEP-logiikoiden väliin (kappale 4.3).

Inkluusiokvanttorin avulla voidaan ilmaista yksipaikkainen inkluusioatomi (kappale 3.1), ja vastaavasti ekskluusiokvanttorin avulla voidaan ilmaista yksipaikkainen ekskluusioatomi (kappale 3.2). Näin ollen yksipaikkaiset inkluusioatomit voidaan ottaa INF-logiikkaan lyhennysmerkinnöiksi, ja vastaavasti voidaan tehdä yksipaikkaisille ekskluusioatomeille EXF-logiikassa.

Osoitamme myöhemmin, että myös käänteiset väitteet pätevät, eli että inkluusio- ja ekskluusiokvanttorit voidaan ilmaista käyttäen yksipaikkaisia inkluusio- ja ekskluusioatomeja (kappaleet 4.2 ja 4.3). Täten INF-logiikka on ekvivalentti yksipaikkaisen inkluusiologiikan kanssa ja vastaavasti EXF-logiikka on ekvivalentti yksipaikkaisen ekskluusiologiikan kanssa. Tulokset INF- ja EXF-logiikoiden ilmaisuvoimasta ovat siis samalla tuloksia inkluusio- ja ekskluusiologiikoiden yksipaikkaisten fragmenttien ilmaisuvoimasta.

Edellisten tulosten nojalla tiedetään siis, että yksipaikkainen ekskluusiologiikka sijoittuu ilmaisuvoimaltaan aidosti yksi- ja kaksipaikkaisten riippuvuuslogiikoiden väliin. Kuitenkin Gallianin tulosten [5] nojalla ekskluusiologiikka ja riippuvuuslogiikka ovat yleisessä tapauksessa ekvivalentit. Vastaavalla tavalla yksipaikkainen inkluusiologiikka sijoittuu ilmaisuvoimaltaan aidosti yksi- ja kaksipaikkaisten NDEP-logiikoiden väliin, mikä on mielenkiintoista, sillä Gallianin tulosten nojalla myös inkluusiologiikka ja NDEP-logiikka ovat yleisessä tapauksessa ekvivalentit.

Ehkä kuitenkin tärkein tämän tutkielman uusista tuloksista on INF- ja EXF-logiikoiden suhde lauseiden tasolla EMSO-logiikkaan ('Existential Monadic Second Order Logic'). Ensinnäkin jokaista INF- ja EXF-lausetta vastaa sen kanssa loogisesti ekvivalentti EMSO-lause (kappale 4.4). IEF-lauseille pätee sama ja lisäksi myös käänteinen väite, joten IEF-logiikka on lauseiden tasolla itse asiassa ekvivalentti EMSO-logiikan kanssa (kappale 4.5).

Edellisista tuloksista seuraa suoraan, että EMSO-logiikka on ekvivalentti inkluusio-ekskluusiologiikan kanssa, jossa esiintyy ainoastaan yksipaikkaisia inkluusio- ja ekskluusioatomeita. Gallianin ja Väänäsen tulosten nojalla tiedetään, että sekä riippuvuuslogiikka että ekskluusiologiikka vastaavat molemmat lauseiden tasolla ESO-logiikkaa ('Existential Second Order Logic'). Näin ESO-logiikasta saadaan erotettua EMSO-logiikkaa vastaava fragmentti inkluusio- sekä ekskluusiologiikoita apuna käyttäen.

1.3 Tutkielman rakenne

Luvussa 2 määrittelemme tässä tutkielmassa käytetyn syntaksin ja semantiikan ensimmäisen kertaluvun logiikalle. Esitämme määritelmät niin, että ensimmäisen kertaluvun logiikka on helposti laajennettavissa logiikoiksi, joita tutkimme myöhemmissä luvuissa. Luvussa 2 esittelemme myös joitan aputuloksia sekä käsitteitä, joita tarvitsemme tässä tutkielmassa.

Luvussa 3 määrittelemme INF-, EXF- ja IEF-logiikoiden syntaksin sekä semantiikan. Lisäksi esitelemme monia muita uusia loogisia operaatioita, joita voidaan määritellä inkluusio- ja ekskluusiokvanttoreiden avulla. Luvun lopussa tutkimme erityisesti IEF-logiikassa määriteltäviä universaali-inkluusio- ja universaaliekskluusiokvanttoreita. Tässä luvussa esitämme myös paljon esimerkkejä näiden uusien loogisten operaatioiden ilmaisukyvystä.

Luvussa 4 esittelemme useita inkluusio- ja ekskluusiologiikan sukulaislogiikoita sekä tuloksia niiden välisistä suhteista. Sitten alamme tutkia INF-, EXF- sekä IEF-logiikoiden ilmaisuvoimaa suhteessa näihin. Luvun lopussa määrittelemme vielä EMSO-logiikan ja vertaamme inkluusio- ja ekskluusiokvanttoreiden ilmaisuvoimaa siihen lauseiden tasolla.

Lopuksi luvussa 5 esitämme vielä lyhyen yhteenvedon tämän tutkielman tuloksista. Samalla pohdimme joitain avoimeksi jääneitä kysymyksiä sekä aiheeseen liittyviä mielenkiintoisia teemoja jatkotutkimusta silmälläpitäen.

1.4 Vaadittavia esitietoja

Lukijan odotetaan tuntevan naiivin joukko-opin perusteet kuten kuvauksen ja relaation käsitteet sekä joukko-opilliset operaatiot. Tässä tutkielmassa käytetään pääosin vakiintuneita merkintätapoja, mutta joitain erityisempiä joukko-opillisia merkintöjä on koottuna luvun 2 alkuun.

Lukijan oletetaan tietävän myös ensimmäisen kertaluvun logiikan perusteet. Tässä tutkielmassa käytetty syntaksi ensimmäisen kertaluvun logiikalle sekä mallin käsite esitellään luvussa 2. Semantiikaksi määritellään perinteisen Tarskin totuusmääritelmän sijasta tiimisemantiikka, mutta lukijan oletetaan kuitenkin tuntevan Tarskin totuusmääritelmän, niin kuin se on määriteltynä esimerkiksi lähteessä [2, s. 8].

Lukijan oletetaan lisäksi tuntevan graafiteorian peruskäsitteet sekä tavanomaiset merkinnät. Tässä tutkielmassa ei käsitellä varsinaisesti graafiteorian tuloksia, mutta graafeja käytetään useiden esimerkkien yhteydessä. Lisäksi tutkittujen logiikoiden ilmaisuvoimaa voidaan mitata määrittelemällä niiden avulla erilaisia graafien ominaisuuksia.

Kaikki tässä tutkielmassa käytetyt logiikat esitellään siinä määrin kun on tarpeellista, ja niiden suhteen esitetään täsmällisesti kaikki tarvittavat määritelmät sekä lauseet. Tutkielmassa käytetyistä merkinnöistä on pyritty saamaan keskenään mahdollimman yhdenmukaisia, mutta tästä johtuen käytetty notaatio ei ole aina samanlainen kuin lähdeteoksissa.

Luku 2

Alustavia määritelmiä

Tässä luvussa esittelemme ensin joitain käyttämiämme merkintöjä, ja sitten määrittelemme syntaksin ja semantiikan ensimmäisen kertaluvun logiikalle. Tarskin totuusmääritelmän sijasta esittelemme tiimisemantiikan, joka osoittautuu kuitenkin ensimmäisen kertaluvun logiikan tapauksessa oleellisesti yhtäpitäväksi totuusmääritelmäksi.

2.1 Merkintöjä

Olkoon A joukko, jota tarkastellaan perusjoukon M osajoukkona. Käytämme seuraavia joukko-opillisia merkintöjä:

- $|A| :=$ Joukon A kardinaliteetti.
- $A^n := \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ kpl}}$.
- $\overline{A} := M \setminus A$.
- $\mathcal{P}(A) := \{B \subseteq M \mid B \subseteq A\}$.
- $\mathcal{P}^*(A) := \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$.

Olkoon f kuvaus ja X joukko kuvauksia, joilla on yhteinen määrittelyjoukko. Käytämme seuraavia merkintöjä:

- $\mathrm{dom}(f) :=$ Kuvauksen f määrittelyjoukko.
- $\mathrm{ran}(f) :=$ Kuvauksen f maalijoukko.
- $\mathrm{im}(f) :=$ Kuvauksen f arvojoukko.
- $f \upharpoonright A$ on kuvaus $A \cap \mathrm{dom}(f) \to \mathrm{ran}(f)$, s.e. $x \mapsto f(x)$.
- $X \upharpoonright A := \{f \upharpoonright A \mid f \in X\}$.

2.2 Syntaksi

Olkoon $\{v_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ numeroituvasti ääretön joukko *muuttujia*. Käytämme symboleita $\{x, y, z, \dots\}$ merkitsemään metamuuttujia, jotka viittaavat johonkin muuttujaan joukossa $\{v_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Määritelmä 2.1. *Aakkosto L on joukko vakio-, relaatio- ja funktiosymboleita.* Merkitään vakiosymboleita c_i:llä, relaatiosymboleita R_i:llä ja funktiosymboleita f_i:llä, missä $i \in \mathbb{N}$. Jokaiseen aakkoston L symboliin k liitetään *paikkaluku* $\#_L(k) \in \mathbb{N}$. Symbolin k paikkaluku on nolla, jos ja vain jos k on vakiosymboli.

Huomautus. Aakkosto L voi sisältää kutakin symbolia korkeintaan numeroituvasti äärettömän määrän, mutta se voi olla myös tyhjä joukko. Jatkossa kun puhumme aakkostosta L ja emme tee siitä mitään oletuksia, niin sen ajatellaan olevan mielivaltainen.

Määrittelemme seuraavaksi *termien joukon* T_L sekä kielen FO_L, jota kutsumme *ensimmäisen kertaluvun logiikaksi*:

Määritelmä 2.2. Määritellään *L-termien joukko* T_L seuraavasti:

- $v_i \in \mathrm{T}_L$, kaikilla $i \in \mathbb{N}$.
- Jos $c_i \in L$, niin $c_i \in \mathrm{T}_L$.
- Jos $f_i \in L$, s.e. $\#_L(f_i) = n$ ja $t_1, \dots, t_n \in \mathrm{T}_L$, niin $f_i t_1 \dots t_n \in \mathrm{T}_L$.

Määritelmä 2.3. Määritellään kieli FO_L seuraavasti:

- Jos $t_1, t_2 \in \mathrm{T}_L$, niin $t_1 = t_2 \in \mathrm{FO}_L$ ja $\neg t_1 = t_2 \in \mathrm{FO}_L$.
- Jos $t_1, \dots, t_n \in \mathrm{T}_L$ ja $R_i \in L$ s.e. $\#_L(R_i) = n$, niin $R_i t_1 \dots t_n \in \mathrm{FO}_L$ ja $\neg R_i t_1 \dots t_n \in \mathrm{FO}_L$.
- Jos $\varphi, \psi \in \mathrm{FO}_L$, niin $(\varphi \wedge \psi) \in \mathrm{FO}_L$ ja $(\varphi \vee \psi) \in \mathrm{FO}_L$.
- Jos $\varphi \in \mathrm{FO}_L$ ja x on muuttuja, niin $\exists^{\mathrm{s}} x\, \varphi \in \mathrm{FO}_L$ ja $\forall x\, \varphi \in \mathrm{FO}_L$.

Jos $\varphi \in \mathrm{FO}_L$, niin sanotaan että φ on *FO_L-kaava*. Kutsumme muotoa $t_1 = t_2$, $\neg t_1 = t_2$, $R_i t_1 \dots t_n$ ja $\neg R_i t_1 \dots t_n$ olevia kaavoja *literaaleiksi*.

Käytämme myös merkintää: $t_1 \neq t_2 := \neg t_1 = t_2$. Voimme lisäksi jättää jatkossa kaavoista uloimmat sulkeet kirjoittamatta. Toteamme myöhemmin pykälässä 2.3.2 sekä konjunktion että disjuntion olevan liitännäisiä, joten voimme jättää peräkkäiset konjunktiot sekä disjunktiot suluttamatta.

Emme määrittele negaatiota perinteiseen tapaan niin, että se saa esiintyä minkä tahansa kaavan edessä. Lisäksi tavanomaisen eksistenssikvanttorin $\exists$ sijaan käytämme kvanttoria $\exists^{\mathrm{s}}$. Palaamme tähän määritellessämme semantiikan ja tulemme huomaamaan, että lopputuloksena on joka tapauksessa ensimmäisen kertaluvun logiikan kanssa ekvivalentti logiikka.

Määritelmä 2.4. Käytetään termissä $t \in \mathrm{T}_L$ esiintyvien muuttujien joukolle merkintää $\mathrm{Vr}(t)$ ja vastaavasti kaavassa $\varphi \in \mathrm{FO}_L$ esiintyvien muuttujien joukolle merkintää $\mathrm{Vr}(\varphi)$. Määritellään kaavan φ *vapaiden muuttujien joukko* $\mathrm{Fr}(\varphi)$ rekursiivisesti seuraavasti:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Fr}(\varphi) &= \mathrm{Vr}(\varphi), \text{ kun } \varphi \text{ on literaali} \\
\mathrm{Fr}(\varphi \wedge \psi) &= \mathrm{Fr}(\varphi) \cup \mathrm{Fr}(\psi) \\
\mathrm{Fr}(\varphi \vee \psi) &= \mathrm{Fr}(\varphi) \cup \mathrm{Fr}(\psi) \\
\mathrm{Fr}(\exists^{\mathrm{s}} x\, \varphi) &= \mathrm{Fr}(\varphi) \setminus \{x\} \\
\mathrm{Fr}(\forall x\, \varphi) &= \mathrm{Fr}(\varphi) \setminus \{x\}
\end{aligned}$$

Jos $\mathrm{Fr}(\varphi) = \emptyset$, niin sanotaan että φ on FO_L*-lause*.

Voimme kirjoittaa myös lyhyemmin: $\mathrm{Vr}(t_1, \ldots, t_n) := \mathrm{Vr}(t_1) \cup \cdots \cup \mathrm{Vr}(t_n)$. Mikäli kaava φ sisältää vapaat muuttujat $x_1, \ldots, x_n$, niin voimme korostaa tätä kirjoittamalla kaavan φ muodossa $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$.

Määritelmä 2.5. Määritellään kaavan φ *alikaavojen joukko* $\mathrm{Sf}(\varphi)$ rekursiivisesti seuraavasti:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sf}(\varphi) &= \{\varphi\}, \text{ kun } \varphi = (t_1 = t_2) \text{ tai } \varphi = R_i t_1 \ldots t_n \\
\mathrm{Sf}(\neg\varphi) &= \{\neg\varphi\} \cup \{\varphi\}, \text{ kun } \varphi = (t_1 = t_2) \text{ tai } \varphi = R_i t_1 \ldots t_n \\
\mathrm{Sf}(\varphi \wedge \psi) &= \{\varphi \wedge \psi\} \cup \mathrm{Sf}(\varphi) \cup \mathrm{Sf}(\psi) \\
\mathrm{Sf}(\varphi \vee \psi) &= \{\varphi \vee \psi\} \cup \mathrm{Sf}(\varphi) \cup \mathrm{Sf}(\psi) \\
\mathrm{Sf}(\exists^{\mathrm{s}} x\, \varphi) &= \{\exists^{\mathrm{s}} x\, \varphi\} \cup \mathrm{Sf}(\varphi) \\
\mathrm{Sf}(\forall x\, \varphi) &= \{\forall x\, \varphi\} \cup \mathrm{Sf}(\varphi)
\end{aligned}$$

Kaava $\psi \in \mathrm{FO}_L$ on kaavan φ *aito alikaava*, jos $\psi \in \mathrm{Sf}(\varphi)$ ja $\psi \neq \varphi$.

Huomautus. Vaikka merkitsemmekin kaavan φ alikaavojen joukkoa tavanomaisella joukkomerkinnällä, oletamme että saman alikaavan eri esiintymät voidaan erottaa toisistaan joukossa $\mathrm{Sf}(\varphi)$. Täsmällisesti tämä voitaisiin tehdä esimerkiksi indeksöimällä kaikki kaavan φ alikaavat. Pitäydymme kuitenkin tässä pelkistetyssä esityksessä.

2.3 Semantiikka

Määrittelemme seuraavaksi semantiikan ensimmäisen kertaluvun logiikalle. Esittelemme ensin *mallin*, *tulkintafunktion* sekä *tiimin* käsitteet. Käyttämässämme tiimisemantiikassa kaavan $\varphi \in \mathrm{FO}_L$ totuus määritellään mallin sekä siihen liittyvän tiimin suhteen.

2.3.1 Tiimisemantiikka

Määritelmä 2.6. *L-Malli* $\mathcal{M}$ on järjestetty pari $(M, \mathcal{I})$, missä M on epätyhjä joukko ja $\mathcal{I}$ aakkostossa L määritelty funktio. Joukkoa M kutsutaan mallin $\mathcal{M}$ *universumiksi* ja funktiota $\mathcal{I}$ mallin $\mathcal{M}$ *tulkinnaksi*. Tulkinta $\mathcal{I}$ kuvaa aakkoston L symbolit seuraavalla tavalla:

- Jos $c_i \in L$, niin $\mathcal{I}(c_i) \in M$.
- Jos $R_i \in L$ ja $\#_L(R_i) = n$, niin $\mathcal{I}(R_i) \subseteq M^n$.
- Jos $f_i \in L$ ja $\#_L(f_i) = n$, niin $\mathcal{I}(R_i)$ on kuvaus $M^n \to M$.

Jos $k \in L$, niin merkitsemme $k^{\mathcal{M}} := \mathcal{I}(k)$.

Oletamme tässä tutkielmassa yleensä mallin $\mathcal{M}$ aakkoston L olevan mielivaltainen. Näin ollen puhumme L-mallin $\mathcal{M}$ sijaan usein vain mallista $\mathcal{M}$.

Määritelmä 2.7. Olkoon $\mathcal{M}$ malli. *Tulkintafunktio* s on kuvaus muuttujien joukon joltakin osajoukolta V mallin $\mathcal{M}$ universumille M. Käytetään tulkintafunktion s *määrittelyjoukolle* V merkintää $\mathrm{dom}(s)$.

Tiimi X on sellainen joukko tulkintafunktioita, että kaikilla $s, s' \in X$ pätee, että $\mathrm{dom}(s) = \mathrm{dom}(s')$. Käytämme tälle tiimin X alkioiden yhteiselle määrittelyjoukolle merkintää $\mathrm{dom}(X)$.

Sallimme myös tyhjän kuvauksen $s = \emptyset$ ja tyhjän tiimin $X = \emptyset$. Näille määrittelemme, että $\mathrm{dom}(s) = \mathrm{dom}(X) = \emptyset$. Jos mallin $\mathcal{M}$ universumissa M on vain yksi alkio, niin on voimassa seuraava tulos:

Lemma 2.1. *Olkoon $\mathcal{M} = (M, \mathcal{I})$ malli ja $X \neq \emptyset$ siihen liittyvä tiimi. Nyt on voimassa:*

$$\textit{Jos } |M| = 1, \textit{ niin myös } |X| = 1.$$

Todistus. Oletetaan, että $|M| = 1$, eli on olemassa alkio $a \in M$, siten että $M = \{a\}$. Olkoot $s, s' \in X$ ja $x \in \mathrm{dom}(X)$. Koska $\mathrm{ran}(s) = \mathrm{ran}(s') = M$, niin täytyy olla, että $s(x) = a = s'(x)$. Koska muuttuja $x \in \mathrm{dom}(X)$ oli mielivaltaisesti valittu, niin täytyy olla, että $s = s'$. Edelleen koska $s, s' \in X$ olivat mielivaltaisesti valittuja, niin $X = \{s\}$. Näin ollen siis $|X| = 1$. □

Lemman 2.1 tulos on ilmeinen, mutta tulemme tässä tutkielmassa viittaamaan siihen monesti, sillä yhden alkion universumin mallit pitää käsitellä lauseissa usein omana erikoistapauksenaan.

Määritelmä 2.8. Jos s on tulkintafunktio ja $a \in M$, niin *muunnettu tulkintafunktio* $s[a/v_i] : \mathrm{dom}(s) \cup \{v_i\} \to M$ määritellään seuraavasti:

$$s[a/v_i](v_j) = \begin{cases} a, & \text{jos } i = j \\ s(v_j), & \text{jos } i \neq j \end{cases}$$

Olkoon X tiimi, $A \subseteq M$ ja $F : X \to \mathcal{P}(M)$. Merkitään:

$$X[A/v_i] := \{s[a/v_i] \mid a \in A, s \in X\}$$
$$X[F/v_i] := \{s[a/v_i] \mid a \in F(s), s \in X\}$$

Käytämme lisäksi seuraavia merkintöjä:

$$s[a_1/x_1, \dots, a_n/x_n] := s[a_1/x_1] \dots [a_n/x_n]$$
$$X[A_1/x_1, \dots, A_n/x_n] := X[A_1/x_1] \dots [A_n/x_n]$$
$$X[F_1/x_1, \dots, F_n/x_n] := X[F_1/x_1] \dots [F_n/x_n]$$

Huomataan, että jos $x \notin \mathrm{dom}(s)$, niin $s[a/x]$ laajentaa tulkintafunktiota s lisäämällä siihen tulkinnan muuttujalle x. Jos taas $x \in \mathrm{dom}(s)$ ja $a \neq s(x)$, niin $s[a/x]$ muuttaa tulkintafunktiota s antamalla uuden tulkinnan muuttujalle x. Ja tietenkin jos $x \in \mathrm{dom}(s)$ ja $a = s(x)$, niin $s[a/x] = s$.

Määritelmä 2.9. Olkoon $\mathcal{M}$ malli, s tulkintafunktio ja $t \in \mathrm{T}_L$, siten että $\mathrm{Vr}(t) \subseteq \mathrm{dom}(s)$. Määritellään *termin t tulkinta* $s(t)$ seuraavasti:

- Jos $t = v_i$, niin $s(t) = s(v_i)$.
- Jos $t = c_i$, niin $s(t) = c_i^{\mathcal{M}}$.
- Jos $t = f_i t_1 \dots t_n$, niin $s(t) = f_i^{\mathcal{M}}(s(t_1), \dots, s(t_n))$.

Jos X on tiimi, niin käytämme merkintää:

$$X(t) := \{s(t) \mid s \in X\}$$

Huomautus. Jos termi t ei ole muuttuja, niin sen tulkinta $s(t)$ riippuu tulkintafunktion s lisäksi myös mallin $\mathcal{M}$ tulkinnasta $\mathcal{I}$. Käytämme kuitenkin yksinkertaisuuden vuoksi lyhyttä merkintää $s(t)$.

Olemme nyt valmiit määrittelemään *tiimisemantiikan* ensimmäisen kertaluvun logiikalle. Se muistuttaa läheisesti Tarskin totuusmääritelmää, vaikka käsitteleekin joukkoa tulkintafunktioita.

Määritelmä 2.10. Olkoon $\mathcal{M}$ malli, φ FO_L-kaava ja X tiimi, siten että $\mathrm{Fr}(\varphi) \subseteq \mathrm{dom}(X)$. Sanotaan että φ *on tosi mallissa $\mathcal{M}$ tiimillä X*, jos $\mathcal{M} \vDash_X \varphi$. Määritellään tämä rekursiivisesti kaavan φ rakenteen suhteen:

- $\mathcal{M} \vDash_X t_1 = t_2$, joss $s(t_1) = s(t_2)$ kaikilla $s \in X$.
- $\mathcal{M} \vDash_X \neg t_1 = t_2$, joss $s(t_1) \neq s(t_2)$ kaikilla $s \in X$.
- $\mathcal{M} \vDash_X R_i t_1 \dots t_n$, joss $(s(t_1), \dots, s(t_n)) \in R_i^{\mathcal{M}}$ kaikilla $s \in X$.
- $\mathcal{M} \vDash_X \neg R_i t_1 \dots t_n$, joss $(s(t_1), \dots, s(t_n)) \notin R_i^{\mathcal{M}}$ kaikilla $s \in X$.

- $\mathcal{M} \vDash_X \psi \wedge \theta$, joss $\mathcal{M} \vDash_X \psi$ ja $\mathcal{M} \vDash_X \theta$.
- $\mathcal{M} \vDash_X \psi \vee \theta$, joss on olemassa joukot $Y, Y' \subseteq X$,
  siten että $Y \cup Y' = X$, $\mathcal{M} \vDash_Y \psi$ ja $\mathcal{M} \vDash_{Y'} \theta$.
- $\mathcal{M} \vDash_X \exists^{\mathrm{s}} x\, \psi$, joss on olemassa $F : X \to \mathcal{P}^*(M)$, s.e. $\mathcal{M} \vDash_{X[F/x]} \psi$.
- $\mathcal{M} \vDash_X \forall x\, \psi$, joss $\mathcal{M} \vDash_{X[M/x]} \psi$.

Jos $\mathcal{M} \vDash_X \varphi$ ei päde, niin merkitään $\mathcal{M} \nvDash_X \varphi$. Mikäli $\mathcal{M} \vDash_{\{\emptyset\}} \varphi$, niin sanotaan että φ *on totta $\mathcal{M}$:ssä* ja merkitään $\mathcal{M} \vDash \varphi$. Mikäli φ on tosi kaikissa malleissa $\mathcal{M}$, niin sanotaan että φ on *validi* ja merkitään $\vDash \varphi$. Sanotaan, että FO_L-kaavat φ ja ψ ovat *loogisesti ekvivalentit*, jos kaikilla L-malleilla $\mathcal{M}$ ja tiimeillä X on voimassa:

$$\mathcal{M} \vDash_X \varphi, \text{ joss } \mathcal{M} \vDash_X \psi.$$

Yhden alkion tiimin $X = \{s\}$ tapauksessa voimme käyttää lisäksi lyhennysmerkintää $\mathcal{M} \vDash_s \varphi$, kun tarkoitamme että $\mathcal{M} \vDash_{\{s\}} \varphi$. Näin ei kuitenkaan merkitä jos $s = \emptyset$, ettei merkinnästä tule monitulkintainen.

Huomautus. Jos $X = \emptyset$, niin määritelmän 2.10 perusteella $\mathcal{M} \vDash_X \varphi$, kaikilla malleilla $\mathcal{M}$ ja kaavoilla $\varphi \in \mathrm{FO}_L$[1]. Koska määritelmässä 2.10 kaavalta φ ja tiimiltä X vaaditaan, että $\mathrm{Fr}(\varphi) \subseteq \mathrm{dom}(X)$, niin ainoastaan FO_L-lauseille voi päteä, että $\mathcal{M} \vDash \varphi$.

2.3.2 Huomautuksia ja aputuloksia

Olkoot $\varphi_i \in \mathrm{FO}_L$, jokaisella $i \in \{1, \dots, n\}$. Määritelmänsä perusteella konjunktio on selvästi liitännäinen, ja ketjulle konjunktioita pätee:

$$\mathcal{M} \vDash_X \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i, \text{ joss } \mathcal{M} \vDash_X \varphi_i \text{ jokaisella } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Vastaavasti disjunktio on liitännäinen ja ketjulle disjunktioita pätee:

$$\mathcal{M} \vDash_X \bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i, \text{ joss on olemassa } Y_1, \dots, Y_n \subseteq X,$$
$$\text{s.e. } \bigcup_{i=1}^{n} Y_i = X \text{ ja } \mathcal{M} \vDash_{Y_i} \varphi_i \text{ jokaisella } i \in \{1, \dots, n\}.$$

[1] Tämä on ns. tyhjän tiimin ominaisuus ('empty team property'). Ensimmäisen kertaluvun logiikan lisäksi myös kaikki muut tässä tutkielmassa määrittelemämme logiikat toteuttavat tämän ominaisuuden. Koska tämä pätee triviaalisti niiden semantiikan nojalla, emme mainitse tätä jatkossa aina erikseen.

Tiimisemantiikassa eksistenssikvantifiointi määritellään usein seuraavalla tavalla käyttäen tavanomaista eksistenssikvanttoria $\exists$:

$$\mathcal{M} \vDash_X \exists x\, \psi, \text{ joss on olemassa } f : X \to M \text{ s.e. } \mathcal{M} \vDash_{X[f/x]} \psi,$$
$$\text{missä } X[f/x] := \{s[f(s)/x] \mid s \in X\}.$$

Määrittelemämme semantiikka kvanttorille $\exists^{\mathrm{s}}$ eroaa siten, että valintafunktio F liittää kuhunkin tiimin X tulkintafunktioon universumin alkion sijasta universumin jonkin epätyhjän osajoukon. Tätä kutsutaan monesti eksistenssikvanttorin *lax-semantiikaksi.* Käytämme eri semantiikan merkiksi eksistenssikvanttorille merkintää $\exists^{\mathrm{s}}$, missä yläindeksi s viittaa sanaan 'set'.

Kuvaus F voi valita osajoukoksi myös yksiön, joten mikäli pätee, että $\mathcal{M} \vDash_X \exists x\, \varphi$, niin selvästi pätee myös, että $\mathcal{M} \vDash_X \exists^{\mathrm{s}} x\, \varphi$. Ensimmäisen kertaluvun logiikalle on voimassa myös käänteinen väite [6, s. 7], joten sille näiden kahden kvanttorin semantiikat ovat yhtäpitävät.

Määrittelemässämme syntaksissa sallimme negaation esiintyvän ainoastaan atomikaavojen edessä. Tämä ehto ei kuitenkaan rajoita ilmaisuvoimaa, sillä jokainen ensimmäisen kertaluvun logiikan lause voidaan esittää ekvivalentissa muodossa, jossa negaatio esiintyy ainoastaan atomikaavojen edessä (katso esimerkiksi [16, s. 42-43]).

Tarkastellaan seuraavaksi mikä on määrittelemämme tiimisemantiikan ja tavanomaisen Tarskin totuusmääritelmän (katso esimerkiksi [2, s. 8]) välinen suhde. Merkitään $\mathcal{M} \vDash_s^T \varphi$, jos ja vain jos kaava $\varphi \in \mathrm{FO}_L$ on tosi mallissa $\mathcal{M}$ tulkintafunktiolla s käyttäen Tarskin totuusmääritelmää.

Lause 2.2. *Olkoon X tiimi ja $\varphi \in \mathrm{FO}_L$. Nyt on voimassa:*

$$\mathcal{M} \vDash_X \varphi, \text{ joss } \mathcal{M} \vDash_s^T \varphi \text{ kaikilla } s \in X.$$

Todistus. Todistetaan suoraviivasella induktiolla kaavan φ rakenteen suhteen kuten esimerkiksi lähteessä [17, s. 37-38]. □

Tästä tuloksesta seuraa, että tiimisemantiikka ei muuta ensimmäisen kertaluvun logiikan ilmaisuvoimaa. Yhden alkion tiimin tapauksessa lause saadaan muotoon:

$$\mathcal{M} \vDash_s \varphi, \text{ joss } \mathcal{M} \vDash_s^T \varphi.$$

Tämän perusteella käyttämämme lyhennysmerkintä totuudesta yhden alkion tiimillä on mielekäs. Suorana seurauksena tästä yhdistettynä lauseeseen 2.2 saamme seuraavan lemman:

Lemma 2.3. *Olkoon X tiimi ja $\varphi \in \mathrm{FO}_L$. Nyt on voimassa:*

$$\mathcal{M} \vDash_X \varphi, \text{ joss } \mathcal{M} \vDash_s \varphi \text{ kaikilla } s \in X.$$

Tämä on edelleen yhtäpitävää sen kanssa, että kaava $\varphi \in \mathrm{FO}_L$ toteutuu tiimillä X, jos ja vain jos se toteutuu jokaisella sen osatiimillä $Y \subseteq X$. Määrittelemme vielä lopuksi kaksi ominaisuutta mielivaltaiselle logiikalle $\mathcal{L}$, jolle on määritelty tiimisemantiikka.

Määritelmä 2.11. Oletetaan, että $\mathcal{L}$ on jokin logiikka, jolle on määritelty tiimisemantiikka. Sanotaan, että

- $\mathcal{L}$ on *alaspäin suljettu*, jos ja vain jos kaikille $\mathcal{L}$-kaavoille φ pätee:

$$\text{Jos } \mathcal{M} \models_X \varphi \text{ ja } Y \subseteq X, \text{ niin } \mathcal{M} \models_Y \varphi.$$

- $\mathcal{L}$ on *suljettu yhdisteiden suhteen*, jos ja vain jos kaikille $\mathcal{L}$-kaavoille φ pätee:

$$\text{Jos } \mathcal{M} \models_{X_i} \varphi \text{ jokaisella } i \in I, \text{ niin } \mathcal{M} \models_{\cup_{i \in I} X_i} \varphi.$$

Jälkimmäisessä kohdassa joukko I on mielivaltainen (mahdollisesti ääretön) indeksijoukko.

Lemman 2.3 nojalla ensimmäisen kertaluvun logiikka on selvästi sekä alaspäin suljettu, että suljettu yhdisteiden suhteen. On kuitenkin syytä pitää mielessä, että nämä ominaisuudet kuten myöskään lemma 2.3 eivät päde kaikille ensimmäisen kertaluvun logiikan laajennoksille, joita määrittelemme seuraavissa luvuissa.

Luku 3

Inkluusio ja ekskluusio loogisina operaatioina

Galliani on esitellyt väitöskirjassaan [5] uudet logiikat, joita hän nimittää inkluusio- ja ekskluusiologiikoiksi. Molemmat näistä laajentavat ensimmäisen kertaluvun logiikkaa lisäämällä siihen uusia atomikaavoja. Näiden *inkluusio-* ja *ekskluusioatomien* yhteydessä on mielekästä käyttää edellisessä luvussa määrittelemäämme tiimisemantiikkaa. Toinen mahdollinen lähestymistapa olisi peliteoreettinen semantiikka.

Otamme tässä luvussa erilaisen lähestymistavan samaan aiheeseen lisäämällä ensimmäisen kertaluvun logiikkaan *inkluusio-* ja *ekskluusiokvanttorit*. Kutsumme näin saatuja logiikoita INF- ja EXF-logiikoiksi. Nämä käyttämämme lyhenteet tulevat sanoista 'Inclusion Friendly Logic' ja 'Exclusion Friendly Logic'. Käytämme tällaisia nimityksiä, sillä logiikoidemme lähestymistapa kvantifikaation tasolla muistuttaa läheisesti Hintikan ja Sandun [11] kehittämää IF-logiikkaa ('Independence Friendly Logic').

Kappaleissa 3.1 ja 3.2 esitämme syntaksin ja semantiikan ensin INF- ja sitten EXF-logiikalle. Todistamme myös joitain näiden logiikoiden ominaisuuksia koskevia tuloksia ja annamme esimerkkejä niiden ilmaisukyvystä. Kappaleessa 3.3 esittelemme IEF-logiikan, joka saadaan yhdistämällä INF- ja EXF-logiikat. Lopuksi kappaleessa 3.4 tutkimme inkluusio- ja ekskluusiooperaatioita universaalikvantifioinnin yhteydessä.

3.1 INF-logiikka

Tässä kappaleessa määrittelemme INF-logiikan, joka saadaan kun ensimmäisen kertaluvun logiikkaa laajennetaan niin sanotuilla inkluusiokvanttoreilla. Määriteltyämme INF-logiikalle ensin syntaksin ja semantiikan, todistamme joitain sitä koskevia ominaisuuksia. Kappaleen lopussa annamme esimerkin graafiteoreettisesta ominaisuudesta, jota ei voi määritellä ensimmäisen kertaluvun logiikalla, mutta joka on ilmaistavissa INF-logiikan avulla.

3.1.1 INF-logiikan syntaksi ja semantiikka

Ennen INF-logiikan syntaksin ja semantiikan määrittelyä esittelemme ensin Gallianin määrittelemän inkluusiologiikan [5, s. 72-80], jolle käytämme myös merkintää INC-logiikka.

Määritelmä 3.1. Määritellään kieli INC_L seuraavasti:

- Jos $\varphi \in \mathrm{FO}_L$, niin $\varphi \in \mathrm{INC}_L$.
- Jos $t_1, \ldots, t_n, t'_1, \ldots, t'_n \in \mathrm{T}_L$, niin $t_1 \ldots t_n \subseteq t'_1 \ldots t'_n \in \mathrm{INC}_L$.
- Jos $\varphi, \psi \in \mathrm{INC}_L$, niin $(\varphi \wedge \psi) \in \mathrm{INC}_L$ ja $(\varphi \vee \psi) \in \mathrm{INC}_L$.
- Jos $\varphi \in \mathrm{INC}_L$ ja x on muuttuja, niin $\exists^{\mathrm{s}} x\, \varphi \in \mathrm{INC}_L$ ja $\forall x\, \varphi \in \mathrm{INC}_L$.

Jos $\varphi \in \mathrm{INC}_L$, niin sanotaan että φ on INC_L*-kaava*. Laajennetaan $\mathrm{Fr}(\varphi)$:n ja $\mathrm{Sf}(\varphi)$:n määritelmiä seuraavasti:

$$\mathrm{Vr}(t_1 \ldots t_n \subseteq t'_1 \ldots t'_n) = \mathrm{Vr}(t_1, \ldots, t_n, t'_1, \ldots, t'_n)$$
$$\mathrm{Sf}(t_1 \ldots t_n \subseteq t'_1 \ldots t'_n) = \{t_1 \ldots t_n \subseteq t'_1 \ldots t'_n\}$$

Huomautus. Päätyisimme samaan kieleen, jos korvaisimme määritelmän ensimmäisen kohdan ehdoilla:

- Jos $t_1, t_2 \in \mathrm{T}_L$, niin $t_1 = t_2 \in \mathrm{INC}_L$ ja $\neg t_1 = t_2 \in \mathrm{INC}_L$.
- Jos $t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{T}_L$ ja $R_i \in L$ s.e. $\#_L(R_i) = n$,
  niin $R_i t_1 \ldots t_n \in \mathrm{INC}_L$ ja $\neg R_i t_1 \ldots t_n \in \mathrm{INC}_L$.

Vaikka näin esitetty määritelmä antaisi kaavoille yksikäsitteisen rekursion, käytämme edellistä tapaa korostaaksemme että $\mathrm{FO}_L \subseteq \mathrm{INC}_L$. Koska käytämme ensimmäisen kertaluvun logiikan kaavoille tässä logiikassa myös samaa semantiikkaa, niin inkluusiologiikka on ensimmäisen kertaluvun logiikan laajennos. Menettelemme samaan tapaan jatkossakin määritellessämme logiikoiden laajennoksia.

Inkluusiologiikka on siis ensimmäisen kertaluvun logiikka, jonka aakkostoa on laajennettu uusilla atomikaavoilla $t_1 \ldots t_n \subseteq t'_1 \ldots t'_n$, joita nimitämme ($n$-paikkaisiksi) *inkluusioatomeiksi*. Niille käytetään seuraavanlaista totuusmääritelmää:

Määritelmä 3.2. Oletetaan, että $t_1, \ldots, t_n, t'_1, \ldots, t'_n \in \mathrm{T}_L$ ja X on tiimi, siten että $\mathrm{Vr}(t_1, \ldots, t_n, t'_1, \ldots, t'_n) \subseteq \mathrm{dom}(X)$. Määritellään:

$$\mathcal{M} \vDash_X t_1 \ldots t_n \subseteq t'_1 \ldots t'_n, \quad \text{joss jokaisella } s \in X \text{ on olemassa } s' \in X, \text{ s.e. } (s(t_1), \ldots, s(t_n)) = (s'(t'_1), \ldots, s'(t'_n)).$$

Inkluusioatomin totuusmääritelmä siis tarkoittaa, että termijonon $t_1 \dots t_n$ saamat arvot sisältyvät termijonon $t'_1 \dots t'_n$ saamiin arvoihin tiimissä X. Yksipaikkaisen inkluusioatomin $t \subseteq t'$ tapauksessa tämä on edelleen ekvivalenttia sen kanssa, että $X(t) \subseteq X(t')$[1]. Näin ollen sen kutsuminen inkluusioatomiksi on mielekästä.

Joskus haluamme tarkastella inkluusiologiikkaa, jonka inkluusioatomien paikkaluku on rajattu. Merkitsemme $\varphi \in \mathrm{INC}_L[k]$, jos $\varphi \in \mathrm{INC}_L$ ja kaikilla inkluusioatomeilla $t_1 \dots t_n \subseteq t'_1 \dots t'_n \in \mathrm{Sf}(\varphi)$ pätee, että $n \leq k$. Kutsumme näin saatua logiikkaa k-paikkaiseksi inkluusiologiikaksi tai INC[k]-logiikaksi.

Galliani on osoittanut [5, s. 74-75], että inkluusiologiikka ei ole alaspäin suljettu, mutta se on suljettu yhdisteiden suhteen. Esittelemme inkluusiologiikkaa sekä sen ilmaisuvoimaa koskevia tuloksia tarkemmin kappaleessa 4.1. Määritellään seuraavaksi INF-logiikan syntaksi:

Määritelmä 3.3. Määritellään kieli INF_L seuraavasti:

- Jos $\varphi \in \mathrm{FO}_L$, niin $\varphi \in \mathrm{INF}_L$.
- Jos $\varphi, \psi \in \mathrm{INF}_L$, niin $(\varphi \wedge \psi) \in \mathrm{INF}_L$ ja $(\varphi \vee \psi) \in \mathrm{INF}_L$.
- Jos $\varphi \in \mathrm{INF}_L$ ja x on muuttuja, niin $\exists^{\mathrm{s}} x\, \varphi \in \mathrm{INF}_L$ ja $\forall x\, \varphi \in \mathrm{INF}_L$.
- Jos $\varphi \in \mathrm{INF}_L$, x on muuttuja ja $t \in \mathrm{T}_L$, niin $(\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)\, \varphi \in \mathrm{INF}_L$.

Jos $\varphi \in \mathrm{INF}_L$, niin sanotaan että φ on INF_L-*kaava*. Laajennetaan $\mathrm{Fr}(\varphi)$:n ja $\mathrm{Sf}(\varphi)$:n määritelmiä seuraavasti:

$$\mathrm{Fr}((\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)\, \varphi) = (\mathrm{Fr}(\varphi) \setminus \{x\}) \cup \mathrm{Vr}(t)$$
$$\mathrm{Sf}((\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)\, \varphi) = \{(\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)\, \varphi\} \cup \mathrm{Sf}(\varphi)$$

Esimerkki 3.1. Oletetaan, että $R_0 \in L$ ja $\#_L(R_0) = 1$. Vapaiden muuttujien joukon määritelmän mukaan INF_L-kaava $\varphi = (\exists^{\mathrm{s}} v_0 \subseteq v_0)\, R_0 v_0$ ei ole INF_L-lause, sillä $v_0 \in \mathrm{Fr}(\varphi)$.

Käytämme *inkluusiokvanttorille* $(\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)$ seuraavaa totuusmääritelmää:

Määritelmä 3.4. Oletetaan, että $\varphi \in \mathrm{INF}_L$, $t \in \mathrm{T}_L$ ja X on tiimi, siten että $(\mathrm{Fr}(\varphi) \setminus \{x\}) \cup \mathrm{Vr}(t) \subseteq \mathrm{dom}(X)$. Määritellään:

$$\mathcal{M} \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)\, \varphi, \text{ joss on olemassa } F : X \to \mathcal{P}^*(X(t)), \text{ s.e. } \mathcal{M} \vDash_{X[F/x]} \varphi.$$

Tämä totuusmääritelmä muistuttaa paljon eksistenssikvanttorin $\exists^{\mathrm{s}} x$ totuusmääritelmää. Ainoa ero on, että valintafunktion F maalijoukkoa rajoitetaan nyt termin t saamien arvojen joukkoon tiimissä X.

[1] n-paikkaisen inkluusioatomin $t_1 \dots t_n \subseteq t'_1 \dots t'_n$ tapauksessa totuusmääritelmä on ekvivalentti sen kanssa, että $\{(s(t_1), \dots, s(t_n)) \mid s \in X\} \subseteq \{(s(t'_1), \dots, s(t'_n)) \mid s \in X\}$. Tässä tutkielmassa tutkimme tosin yleensä vain yksipaikkaisia inkluusioatomeita.

Esimerkki 3.2. Jos $\varphi \in \mathrm{INF}_L$, niin kaavat $\forall v_0 (\exists^{\mathrm{s}} v_1 \subseteq v_0)\, \varphi$ ja $\forall v_0\, \exists^{\mathrm{s}} v_1\, \varphi$ ovat keskenään loogisesti ekvivalentit, sillä muuttujan v_1 arvojen valinnan hetkellä v_0 saa tiimissä kaikki arvot universumista M. Myös vakiosymboleiden tapauksessa inkluusiokvanttorin merkitys trivialisoituu. Sillä jos $c_0 \in L$, niin $(\exists^{\mathrm{s}} v_0 \subseteq c_0)\, \varphi$ on loogisesti ekvivalentti kaavan $\exists^{\mathrm{s}} v_0 (v_0 = c_0 \wedge \varphi)$ kanssa.

Yksinkertainen esimerkki inkluusiokvanttorin epätriviaalista käytöstä on INF_L-lause $\exists^{\mathrm{s}} v_0 (\exists^{\mathrm{s}} v_1 \subseteq v_0)\, R_0 v_0 v_1$, missä $R_0 \in L$ ja $\#_L(R_0) = 2$. Palaamme tämän lauseen merkitykseen tämän kappaleen lopussa esimerkissä 3.8.

Olemme nyt määritelleet inkluusio-operaation atomitasolla inkuusiologiikassa ja kvantifioinnin yhteydessä INF-logiikassa. Onko näiden kahden loogisen operaation välillä jokin yhteys? Todistamme seuraavaksi, että yksipaikkainen inkluusioatomi on ilmaistavissa käyttäen inkluusiokvanttoria:

Lause 3.1. *Oletetaan, että $\varphi \in \mathrm{INF}_L$, $t_1, t_2 \in \mathrm{T}_L$ ja x on muuttuja, siten että $x \notin \mathrm{Vr}(t_1)$. Nyt on voimassa:*

$$\mathcal{M} \vDash_X t_1 \subseteq t_2, \text{ joss } \mathcal{M} \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t_2)(x = t_1).$$

Todistus. Oletetaan ensin, että $\mathcal{M} \vDash_X t_1 \subseteq t_2$. Määritellään $F : X \to \mathcal{P}^*(M)$, siten että $s \mapsto \{s(t_1)\}$ kaikilla $s \in X$. Valitaan mielivaltainen $r \in X[F/x]$. Nyt on olemassa $s \in X$ ja $a \in F(s)$, siten että $r = s[a/x]$. Koska F:n määritelmän nojalla $F(s) = \{s(t_1)\}$, niin $a = s(t_1)$. Koska lisäksi $x \notin \mathrm{Vr}(t_1)$, niin $s(t_1) = r(t_1)$. On osoitettu siis, että:

$$r(x) = s[a/x](x) = a = s(t_1) = r(t_1).$$

Siis $\mathcal{M} \vDash_{X[F/x]} x = t_1$.

Osoitetaan, että $\mathrm{im}(F) \subseteq \mathcal{P}(X(t_2))$: Valitaan mielivaltainen $B \in \mathrm{im}(F)$. Kuvauksen F määritelmän nojalla $B = \{s(t_1)\}$ jollain $s \in X$. Koska oletuksen nojalla $\mathcal{M} \vDash_X t_1 \subseteq t_2$, niin on olemassa $s' \in X$, siten että $s(t_1) = s'(t_2)$. Näin ollen $s(t_1) \in X(t_2)$ ja edelleen $B \subseteq X(t_2)$, eli $B \in \mathcal{P}(X(t_2))$. Koska $B \in \mathrm{im}(F)$ oli mielivaltaisesti valittu, niin $\mathrm{im}(F) \subseteq \mathcal{P}(X(t_2))$.

On osoitettu siis, että on olemassa kuvaus $F : X \to \mathcal{P}^*(X(t_2))$[2], siten että $\mathcal{M} \vDash_{X[F/x]} x = t_1$, eli $\mathcal{M} \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t_2)(x = t_1)$.

Oletetaan sitten, että $\mathcal{M} \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t_2)(x = t_1)$. Olkoon $s \in X$. Oletuksen nojalla on olemassa kuvaus $F : X \to \mathcal{P}^*(X(t_2))$, siten että $\mathcal{M} \vDash_{X[F/x]} x = t_1$. Koska $F(s) \neq \emptyset$, niin on olemassa $a \in F(s)$. Merkitään $r := s[a/x]$. Oletuksen nojalla $x \notin \mathrm{Vr}(t_1)$, joten $s(t_1) = r(t_1)$. Koska $r \in X[F/x]$ ja $\mathcal{M} \vDash_{X[F/x]} x = t_1$, niin $r(x) = r(t_1)$. Ja koska $F(s) \subseteq X(t_2)$, niin erityisesti $a \in X(t_2)$. Siis on olemassa $s' \in X$, siten että $a = s'(t_2)$. On osoitettu siis, että:

$$s(t_1) = r(t_1) = r(x) = s[a/x](x) = a = s'(t_2).$$

Koska $s \in X$ oli mielivaltaisesti valittu, niin $\mathcal{M} \vDash_X t_1 \subseteq t_2$. □

[2]Kuvauksen F määritelmän mukaan $\mathrm{ran}(F) = \mathcal{P}^*(M)$, mutta koska osoitimme, että $\mathrm{im}(F) \subseteq \mathcal{P}(X(t_2))$, niin kuvauksen F maalijoukkoa voidaan supistaa joukkoon $\mathcal{P}^*(X(t_2))$.

Lauseen 3.1 nojalla voimme jatkossa käyttää kaavoissa inkluusioatomeita $t_1 \subseteq t_2$ lyhennysmerkintöinä kaavoille $(\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t_2)(x = t_1)$, missä $x \notin \mathrm{Vr}(t_1)$. Näille kaavoille voidaan käyttää yhtäpitävää totuusmääritelmää:

$$\mathcal{M} \vDash_X t_1 \subseteq t_2, \text{ joss jokaisella } s \in X \text{ on olemassa } s' \in X \text{ s.e. } s(t_1) = s'(t_2).$$

Esimerkki 3.3. Olkoon $t \in \mathrm{T}_L$ ja x muuttuja, siten että $x \notin \mathrm{Vr}(t)$. Nyt on voimassa, että

$$\mathcal{M} \vDash_X \forall x\, (x \subseteq t), \text{ joss } X(t) = M.$$

3.1.2 Tallennuskaavat

Huomaa, että määritellessämme kvanttorin $(\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)$ emme asettaneet mitään ehtoja muuttujalle x ja termille t. Erityisesti voi olla, että $x \in \mathrm{Vr}(t)$, jolloin termin t arvo voikin muuttua muuttujan x kvantifioinnin jälkeen. Näin ollen vaikka kaikilla $s \in X$ päteekin, että $F(s) \subseteq X(t)$, niin ei välttämättä päde, että $F(s) \subseteq X[F/x](t)$. Toisin sanoen $X[F/x](x) \subseteq X(t)$, muttei välttämättä päde, että $X[F/x](x) \subseteq X[F/x](t)$.

Esimerkki 3.4. Oletetaan, että $f_0, c_0 \in L$ ja $\#_L(f_0) = 1$. Merkitään:

$$\begin{aligned}
\varphi &:= \exists^{\mathrm{s}} v_0 (\exists^{\mathrm{s}} v_0 \subseteq f_0 v_0)(v_0 = c_0) \\
\psi &:= \exists^{\mathrm{s}} v_0 (\exists^{\mathrm{s}} v_0 \subseteq f_0 v_0)(\exists^{\mathrm{s}} v_0 \subseteq f_0 v_0)(v_0 = c_0)
\end{aligned}$$

Vaikka kaavat φ ja ψ eroavat toisistaan ainoastaan siten, että sama kvanttori $(\exists^{\mathrm{s}} v_0 \subseteq f_0 v_0)$ esiintyy toisessa peräkkäin kahdesti, niin ne eivät ole loogisesti ekvivalentteja. Nimittäin kaavoille φ ja ψ pätee, että

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M} \vDash_X \varphi, \text{ joss } \mathcal{M} \vDash_X \exists^{\mathrm{s}} v_0 (f_0 v_0 = c_0), \text{ mutta} \\
&\mathcal{M} \vDash_X \psi, \text{ joss } \mathcal{M} \vDash_X \exists^{\mathrm{s}} v_0 (f_0 f_0 v_0 = c_0).
\end{aligned}$$

Koska voi olla, että $X(t) \neq X[F/x](t)$, niin kvantifioinnin $(\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)$ jälkeen tiimissä $X[F/x]$ ei ole välttämättä enää ole tietoa termin t saamista arvoista tiimillä X. On kuitenkin mahdollista tallentaa tämä informaatio tuoreisiin muuttujiin, jotka eivät tule sidotuksi x:n kvantifioinnissa. Esittelemme tätä varten tallennuskaavat, jotka osoittautuvat hyödyllisiksi tulevien määritelmiemme yhteydessä.

Määritelmä 3.5. Kaavan $\varphi \in \mathrm{INF}_L$ sekä termijoukon $\{t_1, \dots, t_n\} \subseteq \mathrm{T}_L$ *tallennuskaava* $\delta^{u_1 \dots u_n}_{t_1 \dots t_n}[\varphi]$ määritellään seuraavasti:

$$\delta^{u_1 \dots u_n}_{t_1 \dots t_n}[\varphi] := \exists^{\mathrm{s}} u_1 \dots \exists^{\mathrm{s}} u_n \left(\bigwedge_{i=1}^{n} u_i = t_i \wedge \varphi \right),$$

missä $u_1, \dots, u_n$ ovat eri muuttujia siten että $u_1, \dots, u_n \notin \mathrm{Vr}(t_1, \dots, t_n)$.

Olkoon X tiimi ja $s \in X$. Merkitään:

$$\delta^{u_1 \ldots u_n}_{t_1 \ldots t_n}[s] := s[s(t_1)/u_1, \ldots, s(t_n)/u_n]$$
$$\delta^{u_1 \ldots u_n}_{t_1 \ldots t_n}[X] := \left\{\delta^{u_1 \ldots u_n}_{t_1 \ldots t_n}[s] \mid s \in X\right\}$$

Mikäli ei aiheudu väärinkäsityksen vaaraa, niin voidaan myös merkitä:

$$\delta[\varphi] := \delta^{u_1 \ldots u_n}_{t_1 \ldots t_n}[\varphi], \quad \delta[X] := \delta^{u_1 \ldots u_n}_{t_1 \ldots t_n}[X] \quad \text{ja} \quad \delta[s] := \delta^{u_1 \ldots u_n}_{t_1 \ldots t_n}[s].$$

Huomaa, että muuttujat $u_1, \ldots, u_n$ voivat olla mitä tahansa eri muuttujia, sillä oletuksella, että $u_1, \ldots, u_n \notin \mathrm{Vr}(t_1, \ldots, t_n)$. Tällaiset muuttujat on aina mahdollista valita, sillä termijoukko on äärellinen ja muuttujia on käytössä ääretön määrä. Käyttäessämme jatkossa merkintää $\delta^{u_1 \ldots u_n}_{t_1 \ldots t_n}$ oletamme aina nämä muuttujat valituksi edellä mainitulla tavalla.

Seuraava lemma osoittaa yhteyden merkintöjen $\delta[\varphi]$ ja $\delta[X]$ välillä sekä muuttujien $u_1, \ldots, u_n$ roolin tallennuskaavassa:

Lemma 3.2. *Olkoon $\varphi \in \mathrm{INF}_L$ ja $t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{T}_L$. Merkitään $\delta := \delta^{u_1 \ldots u_n}_{t_1 \ldots t_n}$, missä $u_1, \ldots, u_n$ ovat eri muuttujia siten että $u_1, \ldots, u_n \notin \mathrm{Vr}(t_1, \ldots, t_n)$. Nyt on voimassa:*

a) $\mathcal{M} \vDash_X \delta[\varphi]$, joss $\mathcal{M} \vDash_{\delta[X]} \varphi$.

b) Kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$ pätee:

$$\textit{jokaisella } s \in X: \; s(t_i) = \delta[s](u_i); \; \textit{erityisesti: } X(t_i) = \delta[X](u_i).$$

Todistus. a) Oletetaan ensin, että $\mathcal{M} \vDash_X \delta[\varphi]$. Siis on olemassa kuvaukset:

$$\begin{cases} F_1 : X \to \mathcal{P}^*(M), \text{ s.e. } \mathcal{M} \vDash_{X[F_1/u_1]} \exists^{\mathrm{s}} u_2 \ldots \exists^{\mathrm{s}} u_n \left(\bigwedge\limits_{i=1}^{n} u_i = t_i \wedge \varphi\right) \\ \quad \vdots \\ F_n : X[F_1/u_1, \ldots, F_{n-1}/u_{n-1}] \to \mathcal{P}^*(M), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{s.e. } \mathcal{M} \vDash_{X[F_1/u_1, \ldots, F_n/u_n]} \left(\bigwedge\limits_{i=1}^{n} u_i = t_i \wedge \varphi\right) \end{cases}$$

Merkitään $X_i := X[F_1/u_1, \ldots, F_i/u_i]$ jokaisella $i \in \{1, \ldots, n\}$. Koska on voimassa $\mathcal{M} \vDash_{X_n} \varphi$, niin riittää osoittaa, että $X_n = \delta[X]$:

Valitaan ensin mielivaltainen $r \in X_n$. Nyt on olemassa $s \in X$ ja alkiot $a_1, \ldots, a_n \in M$, siten että $r = s[a_1/u_1, \ldots, a_n/u_n]$. Olkoon $j \in \{1, \ldots, n\}$. Koska $\mathcal{M} \vDash_{X_n} u_j = t_j$, niin $r(u_j) = r(t_j)$. Ja koska $u_1, \ldots, u_n \notin \mathrm{Vr}(t_1, \ldots, t_n)$, niin $r(t_j) = s(t_j)$. On osoitettu siis, että

$$r(u_j) = r(t_j) = s(t_j).$$

Koska j oli mielivaltaisesti valittu, niin $r = s[s(t_1)/u_1, \ldots, s(t_n)/u_n]$. Näin ollen $r \in \delta[X]$. Koska $r \in X_n$ oli mielivaltaisesti valittu, niin $X_n \subseteq \delta[X]$.

Valitaan sitten mielivaltainen $r \in \delta[X]$. Siis $r = s[s(t_1)/u_1, \ldots, s(t_n)/u_n]$ jollain $s \in X$. Koska $F_i(s') \neq \emptyset$ jokaisella i ja $s' \in \mathrm{dom}(F_i)$, niin on olemassa $a_1 \in F_1(s), a_2 \in F_2(s[a_1/u_1]), \ldots, a_n \in F_n(s[a_1/u_n, \ldots, a_{n-1}/u_{n-1}])$, siten että $s[a_1/u_1, \ldots, a_n/u_n] \in X_n$. Merkitään $r' := s[a_1/u_1, \ldots, a_n/u_n]$.

Valitaan mielivaltainen $j \in \{1, \ldots, n\}$. Koska nyt $\mathcal{M} \vDash_{X_n} u_j = t_j$, niin $r'(u_j) = r'(t_j)$. Ja koska $u_1, \ldots, u_n \notin \mathrm{Vr}(t_1, \ldots, t_n)$, niin $r'(t_j) = s(t_j)$. On osoitettu siis, että

$$a_j = r'(u_j) = r'(t_j) = s(t_j).$$

Koska j oli mielivaltaisesti valittu, niin $r' = s[s(t_1)/u_1, \ldots, s(t_n)/u_n] = r$. Näin ollen siis $r \in X_n$. Koska $r \in \delta[X]$ oli mielivaltaisesti valittu, niin $\delta[X] \subseteq X_n$. On osoitettu siis, että $X_n = \delta[X]$, joten edelleen $\mathcal{M} \vDash_{\delta[X]} \varphi$.

Oletetaan sitten, että $\mathcal{M} \vDash_{\delta[X]} \varphi$. Määritellään kuvaukset:

$$\begin{cases} F_1 : X \to \mathcal{P}^*(M), \text{ s.e. } s \mapsto \{s(t_1)\} \\ \quad \vdots \\ F_n : X[F_1/u_1, \ldots, F_{n-1}/u_{n-1}] \to \mathcal{P}^*(M), \text{ s.e. } s \mapsto \{s(t_n)\}. \end{cases}$$

Merkitään $X_i := X[F_1/u_1, \ldots, F_i/u_i]$ jokaisella $i \in \{1, \ldots, n\}$. Koska oletuksen nojalla $u_1, \ldots, u_n \notin \mathrm{Vr}(t_1, \ldots, t_n)$, niin kuvausten $F_1, \ldots, F_n$ määritelmien nojalla selvästi $X_n = \delta[X]$. Näin ollen oletuksen nojalla $\mathcal{M} \vDash_{X_n} \varphi$.

Valitaan mielivaltainen $j \in \{1, \ldots, n\}$ ja $r \in X_n$. Koska $X_n = \delta[X]$, niin $r = s[s(t_1)/u_1, \ldots, s(t_n)/u_n]$ jollain $s \in X$. Koska $u_1, \ldots, u_n \notin \mathrm{Vr}(t_1, \ldots, t_n)$, niin $s(t_j) = r(t_j)$. On osoitettu siis, että:

$$r(u_j) = s(t_j) = r(t_j).$$

Koska j ja $r \in X_n$ olivat mielivaltaisesti valittuja, niin $\mathcal{M} \vDash_{X_n} \bigwedge_{i=1}^n u_i = t_i$. Näin ollen $\mathcal{M} \vDash_{X_n} \bigwedge_{i=1}^n u_i = t_i \wedge \varphi$, ja edelleen $\mathcal{M} \vDash_X \delta[\varphi]$.

b) Valitaan mielivaltainen $i \in \{1, \ldots, n\}$ ja $s \in X$. Nyt pätee:

$$s(t_i) = s[s(t_i)/u_i](u_i) = \delta[s](u_i).$$

Edelleen on voimassa:

$$\begin{aligned} X(t_i) = \{s(t_i) \mid s \in X\} &= \{\delta[s](u_i) \mid s \in X\} \\ &= \{s(u_i) \mid s \in \delta[X]\} = \delta[X](u_i). \end{aligned}$$

$\square$

Kaavan φ tallenuskaava siis kopioi annetun termijoukon arvot muuttujiin, jotka eivät esiinny termeissä $t_1, \ldots, t_n$. Näin ollen uusiin muuttujiin talletetut termien arvot voidaan säilyttää, vaikka termijoukon vapaiden muuttujien suhteen kvantifioitaisiin uudelleen kaavan φ alikaavoissa.

Esimerkki 3.5. Olkoon u on eri muuttuja kuin x. Nyt lause 3.1 voidaan esittää myös seuraavassa yhtäpitävässä muodossa:

$$\mathcal{M} \models_X t_1 \subseteq t_2, \text{ joss } \mathcal{M} \models_X \delta^u_{t_1}\Big[(\exists^{\mathrm{s}}\, x \subseteq t_2)(x = u)\Big].$$

Tällöin muuttujalle x ei tarvitse esittää ehtoa $x \notin \mathrm{Vr}(t_1)$, sillä termin t_1 arvo ennen muuttujan x kvantifiointia säilyy muuttujassa u.

3.1.3 Inkluusiokvantifiointi termijoukolle

Inkluusiokvanttorin $(\exists^{\mathrm{s}}\, x \subseteq t)$ avulla voimme vaatia, että muuttujalle x kvantifioitavat arvot ovat termin t saamien arvojen joukosta $X(t)$. Pohditaan seuraavaksi tilannetta, jossa meillä on termijoukko $\{t_1, \ldots, t_n\} \subseteq \mathrm{T}_L$ ja haluaisimme ilmaista, että muuttujan x arvot pitää kvantifioida näiden termien arvojen leikkauksesta $\bigcap_{i=1}^n X(t_i)$.

Emme voi ilmaista tätä laittamalla peräkkäin useita inkluusiokvanttoreita, sillä x:n uusi kvantifiointi korvaa edellisen. Meidän täytyy siis määritellä uusi kvanttori, joka asettaa x:n arvon yhdellä kertaa halutulla tavalla. Meidän ei kuitenkaan tarvitse laajentaa kieltä INF_L, sillä voimme määritellä tämän uuden kvanttorin inkluusiokvanttorin sekä tallennuskaavojen avulla:

Määritelmä 3.6. Oletetaan, että $\varphi \in \mathrm{INF}_L$, $t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{T}_L$ ja $u_1, \ldots, u_n$ ovat eri muuttujia, siten että $u_1, \ldots, u_n \notin \mathrm{Vr}(t_1, \ldots, t_n) \cup \mathrm{Fr}(\varphi) \cup \{x\}$. Käytetään seuraavaa lyhennysmerkintää:

$$(\exists^{\mathrm{s}}\, x \subseteq \bigcap_{i=1}^n t_i)\, \varphi := \delta^{u_1 \ldots u_n}_{t_1 \ldots t_n} \left[\exists^{\mathrm{s}}\, x \left(\bigwedge_{i=1}^n x \subseteq u_i \wedge \varphi\right)\right]$$

Tässä kaavat $x \subseteq t_i$ ovat lyhennysmerkintöjä kaavoille $(\exists^{\mathrm{s}}\, y_i \subseteq t_i)(x = y_i)$, missä jokainen y_i on eri muuttuja kuin x.

Tallennuskaavojen käytön ansiosta voimme sallia myös tapauksen, että kvantifioitava muuttuja x kuuluu joukkoon $\mathrm{Vr}(t_1, \ldots, t_n)$. Ennen kuin voimme todistaa näin määritellyn kvanttorin totuusehdon, meidän pitää esittää muutama lemma.

Sanotaan, että tiimisemantiikalla varustettu logiikka $\mathcal{L}$ on *lokaali*, jos ja vain jos kaikilla $\mathcal{L}$-kaavoilla φ, tiimeillä X ja muuttujajoukoilla V, joille pätee $\mathrm{Fr}(\varphi) \subseteq V$, on voimassa:

$$\mathcal{M} \models_X \varphi, \text{ joss } \mathcal{M} \models_{X \restriction V} \varphi.$$

Tämä tarkoittaa siis sitä, että tiimin laajentaminen muuttujilla, jotka eivät esiinny kaavan φ vapaiden muuttujien joukossa ei vaikuta kaavan φ totuuteen. Galliani on todennut [5, s. 74] tämän ominaisuuden pätevän inkluusiologiikalle. Todistamme seuraavassa lemmassa tämän ominaisuuden kanssa yhtäpitävän ehdon pätevän myös INF-logiikalle.

Lemma 3.3. *Oletetaan, että $\varphi \in \mathrm{INF}_L$ ja X sekä X' ovat tiimejä, joille pätee $X \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi) = X' \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi)$. Nyt on voimassa:*

$$\mathcal{M} \models_X \varphi, \text{ joss } \mathcal{M} \models_{X'} \varphi.$$

Todistus. Todistetaan väite induktiolla kaavan φ rakenteen suhteen:

- Olkoon φ literaali. Tällöin $\varphi \in \mathrm{FO}_L$, joten väite pätee lauseen 2.2 nojalla triviaalisti.

- Tapaukset $\varphi = \psi \wedge \theta$, $\varphi = \psi \vee \theta$, $\varphi = \exists^{\mathrm{s}} x\, \psi$ ja $\varphi = \forall x\, \psi$ ovat suoraviivaisia todistaa (katso esimerkiksi [17, s. 34-35]).

- Olkoon $\varphi = (\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)\, \psi$.

  Oletetaan ensin, että $\mathcal{M} \models_X (\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)\, \psi$. Näin ollen on olemassa kuvaus $F : X \to \mathcal{P}^*(X(t))$, siten että $\mathcal{M} \models_{X[F/x]} \psi$. Koska oletuksen nojalla $X \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi) = X' \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi)$, niin jokaisella $s' \in X'$ on olemassa ainakin yksi $s \in X$, siten että $s \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi) = s' \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi)$. Määritellään kuvaus:

$$F' : X' \to \mathcal{P}^*(M), \quad \text{s.e. } s' \mapsto \bigcup_{s \in X_{s'}} F(s) \text{ jokaisella } s' \in X',$$
$$\text{missä } X_{s'} := \{s \in X \mid s \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi) = s' \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi)\}.$$

  Koska $\mathrm{Fr}(\psi) \subseteq \mathrm{Fr}(\varphi) \cup \{x\}$ ja $X \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi) = X' \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi)$, niin kuvauksen F' määritelmän nojalla selvästi:

$$X[F/x] \upharpoonright \mathrm{Fr}(\psi) = X'[F'/x] \upharpoonright \mathrm{Fr}(\psi).$$

  Näin ollen induktio-oletuksen nojalla $\mathcal{M} \models_{X'[F'/x]} \psi$. Riittää siis osoittaa, että $\mathrm{im}(F') \subseteq \mathcal{P}(X'(t))$: Valitaan mielivaltainen $B \in \mathrm{im}(F')$ ja $b \in B$. Nyt on olemassa $s' \in X'$, siten että $B = F'(s')$. Kuvauksen F' määritelmän nojalla on olemassa $s \in X$, siten että $b \in F(s)$.

  Koska $\mathrm{im}(F) \subseteq \mathcal{P}(X(t))$, niin $b \in X(t)$. Siis on olemassa $r \in X$, siten että $r(t) = b$. Oletuksen nojalla $X \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi) = X' \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi)$, joten on olemassa $r' \in X'$, siten että $r \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi) = r' \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi)$. Koska määritelmän 3.3 nojalla $\mathrm{Vr}(t) \subseteq \mathrm{Fr}(\varphi)$, niin

$$b = r(t) = (r \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi))(t) = (r' \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi))(t) = r'(t).$$

  Näin ollen $b \in X'(t)$. On osoitettu siis, että $\mathrm{im}(F') \subseteq \mathcal{P}^*(X'(t))$ ja $\mathcal{M} \models_{X'[F'/x]} \psi$, joten $\mathcal{M} \models_{X'} (\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)\, \psi$. Ekvivalenssin toinen suunta voidaan todistaa symmetrisesti.

$\square$

Huomautus. Lokaalisuusehto seuraa lemmasta 3.3, sillä jos $X' = X \upharpoonright V$, missä $\mathrm{Fr}(\varphi) \subseteq V$, niin selvästi $X \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi) = X' \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi)$. Vastaavasti lemma 3.3 seuraa lokaalisuusehdosta soveltamalla sitä tiimeihin X ja $X \upharpoonright V$ sekä tiimeihin X' ja $X' \upharpoonright V$, missä $V = \mathrm{Fr}(\varphi)$. Voimme näin ollen jatkossa lemmaan 3.3 viitatessamme käyttää kumpaa tahansa näistä yhtäpitävistä muotoiluista.

Esimerkki 3.6. Mikäli olisimme käyttäneet INF-logiikalle kvanttorin $\exists^{\mathrm{s}}$ sijasta kvanttoria $\exists$, jonka semantiikan esitimme luvussa 2, niin lokaalisuusehto ei olisi voimassa. Nimittäin jos $\mathcal{M} = (M, \mathcal{I})$ on malli siten, että $M = \{0, 1\}$, $X = \{\{(v_0, 0)\}, \{(v_0, 1)\}\}$ ja $\varphi = \exists v_1 \forall v_2 (v_2 \subseteq v_1)$, niin selvästi

$$\mathcal{M} \vDash_X \varphi, \text{ mutta } \mathcal{M} \nvDash_{X \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi)} \varphi.$$

Edellisen esimerkin nojalla kvanttorin $\exists^{\mathrm{s}}$ käyttäminen INF-logiikan yhteydessä on mielekkäämpää. Lemman 3.3 avulla voimme todistaa seuraavan tarvitsemamme lemman:

Lemma 3.4. *Oletetaan että $\varphi \in \mathrm{INF}_L$, $t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{T}_L$ ja $u_1, \ldots, u_n$ ovat eri muuttujia, siten että $u_1, \ldots, u_n \notin \mathrm{Vr}(t_1, \ldots, t_n) \cup \mathrm{Fr}(\varphi) \cup \{x\}$. Merkitään nyt $\delta := \delta^{u_1 \ldots u_n}_{t_1 \ldots t_n}$.*

Jos $F : X \to \mathcal{P}^*(M)$ ja $F' : \delta[X] \to \mathcal{P}^*(M)$ ovat kuvauksia siten, että $F(s) = F'(\delta[s])$ jokaisella $s \in X$, niin

$$\mathcal{M} \vDash_{X[F/x]} \varphi, \text{ joss } \mathcal{M} \vDash_{(\delta[X])[F'/x]} \varphi.$$

Todistus. Lemman 3.3 nojalla riittää osoittaa, että

$$X[F/x] \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi) = (\delta[X])[F'/x] \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi).$$

Valitaan mielivaltainen $r \in X[F/x] \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi)$. Nyt on olemassa $s \in X$ ja $a \in F(s)$, siten että $r = s[a/x] \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi)$. Oletuksen nojalla $F(s) = F'(\delta[s])$, joten $a \in F'(\delta[s])$. Näin ollen $(\delta[s])[a/x] \in (\delta[X])[F'/x]$. Tulkintafunktiot $(\delta[s])[a/x]$ ja $s[a/x]$ voivat erota toisistaan ainoastaan muuttujien $u_1, \ldots, u_n$ tulkinnan osalta, joten $(\delta[s])[a/x] \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi) = s[a/x] \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi) = r$. Näin ollen $r \in (\delta[X])[F'/x] \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi)$. Täten $X[F/x] \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi) \subseteq (\delta[X])[F'/x] \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi)$.

Valitaan sitten mielivaltainen $r \in (\delta[X])[F'/x] \upharpoonright \mathrm{Fr}(\psi)$. Nyt on olemassa $\delta[s] \in \delta[X]$ ja $a \in F'(\delta[s])$, siten että $r = (\delta[s])[a/x] \upharpoonright \mathrm{Fr}(\psi)$. Oletuksen nojalla $F'(\delta[s]) = F(s)$, joten $a \in F(s)$. Lisäksi $s \in X$, joten näin ollen $s[a/x] \in X[F/x]$. Koska tulkintafunktiot $s[a/x]$ ja $(\delta[s])[a/x]$ voivat erota toisistaan ainoastaan muuttujien $u_1, \ldots, u_n$ tulkinnan osalta, niin täytyy olla että $s[a/x] \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi) = (\delta[s])[a/x] \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi) = r$. Näin ollen $r \in X[F/x] \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi)$. On osoitettu siis, että $(\delta[X])[F'/x] \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi) \subseteq X[F/x] \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi)$. □

Olemme nyt valmiita todistamaan totuusehdon määritelmän 3.6 kvanttorille. Huomataan että totuusehto vastaa sitä intuitiota, mitä halusimme tällä uudella kvanttorilla ilmaista.

Lause 3.5. *Oletetaan, että $\varphi \in \mathrm{INF}_L$, $t_1, \dots, t_n \in \mathrm{T}_L$ ja $u_1, \dots, u_n$ ovat eri muuttujia, siten että $u_1, \dots, u_n \notin \mathrm{Vr}(t_1, \dots, t_n) \cup \mathrm{Fr}(\varphi) \cup \{x\}$. Tällöin on voimassa:*

$$\mathcal{M} \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} t_i)\, \varphi,$$

$$\textit{joss on olemassa } F : X \to \mathcal{P}^* \left(\bigcap_{i=1}^{n} X(t_i) \right), \ \textit{s.e. } \mathcal{M} \vDash_{X[F/x]} \varphi.$$

Todistus. Oletetaan ensin, että $\mathcal{M} \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} t_i)\, \varphi$. Siis

$$\mathcal{M} \vDash_X \delta \left[\exists^{\mathrm{s}} x \left(\bigwedge_{i=1}^{n} x \subseteq u_i \wedge \varphi \right) \right].$$

Lemman 3.2 nojalla

$$\mathcal{M} \vDash_{\delta[X]} \exists^{\mathrm{s}} x \left(\bigwedge_{i=1}^{n} x \subseteq u_i \wedge \varphi \right).$$

Siis on olemassa $F' : \delta[X] \to \mathcal{P}^*(M)$, siten että $\mathcal{M} \vDash_{X'} \bigwedge_{i=1}^{n} x \subseteq u_i \wedge \varphi$, missä $X' := (\delta[X])[F'/x]$. Nyt pätee erityisesti, että $\mathcal{M} \vDash_{X'} \varphi$. Osoitetaan sitten, että $\mathrm{im}(F') \subseteq \mathcal{P}(\bigcap_{i=1}^{n} \delta[X](u_i))$: Valitaan mielivaltainen $B \in \mathrm{im}(F')$ ja $a \in B$. Nyt $B = F'(s)$ jollain $s \in \delta[X]$. Merkitään $r := s[a/x]$.

Valitaan mielivaltainen $j \in \{1, \dots, n\}$. Nyt $\mathcal{M} \vDash_{X'} x \subseteq u_j$ ja $r \in X'$, joten on olemassa $r' \in X'$, siten että $r(x) = r'(u_j)$. Koska $X' = (\delta[X])[F'/x]$ ja $r' \in X'$, niin on olemassa $s' \in \delta[X]$ ja $a' \in F'(s')$, siten että $r' = s'[a'/x]$. Koska x ja u_j ovat eri muuttujia, niin $s'(u_j) = r'(u_j)$. On osoitettu siis, että

$$a = s[a/x](x) = r(x) = r'(u_j) = s'(u_j).$$

Näin ollen $a \in \delta[X](u_j)$. On osoitettu siis, että $a \in \bigcap_{i=1}^{n} \delta[X](u_i)$. Koska B ja a olivat mielivaltaisesti valittuja, niin $\mathrm{im}(F') \subseteq \mathcal{P}(\bigcap_{i=1}^{n} \delta[X](u_i))$.

Määritellään $F : X \to \mathcal{P}^*(M)$, siten että $s \mapsto F'(\delta[s])$ jokaisella $s \in X$. Nyt selvästi $F(s) = F'(\delta[s])$ jokaisella $s \in X$. Koska lisäksi $\mathcal{M} \vDash_{X'} \varphi$ ja $u_1, \dots, u_n \notin \mathrm{Fr}(\varphi)$, niin lemman 3.4 nojalla $\mathcal{M} \vDash_{X[F/x]} \varphi$. Olemme lisäksi osoittaneet, että $\mathrm{im}(F') \subseteq \mathcal{P}^*(\bigcap_{i=1}^{n} \delta[X](u_i))$, ja lemman 3.2 nojalla jokaisella $i \in \{1, \dots, n\}$ pätee $X(t_i) = \delta[X](u_i)$, joten $\mathrm{im}(F) \subseteq \mathcal{P}^*(\bigcap_{i=1}^{n} X(t_i))$.

Oletetaan sitten, että on olemassa kuvaus

$$F : X \to \mathcal{P}^* \left(\bigcap_{i=1}^{n} X(t_i) \right), \ \text{s.e } \mathcal{M} \vDash_{X[F/x]} \varphi.$$

Määritellään kuvaus $F' : \delta[X] \to \mathcal{P}^*(M)$, siten että $\delta[s] \mapsto F(s)$ jokaisella $s \in \delta[X]$. Merkitään $X' := (\delta[X])[F'/x]$. Koska $\mathrm{im}(F) \subseteq \mathcal{P}^*(\bigcap_{i=1}^{n} X(t_i))$ ja lemman 3.2 nojalla jokaisella $i \in \{1, \dots, n\}$ pätee, että $X(t_i) = \delta[X](u_i)$, niin $\mathrm{im}(F') \subseteq \mathcal{P}^*(\bigcap_{i=1}^n \delta[X](u_i))$. Koska lisäksi jokaisella $s \in X$ pätee, että $F(s) = F'(\delta[s])$ ja $u_1, \ldots, u_n \notin \mathrm{Fr}(\varphi)$, niin lemman 3.4 nojalla $\mathcal{M} \vDash_{X'} \varphi$.

Valitaan mielivaltainen $j \in \{1, \ldots, n\}$ ja $r \in X'$. Tällöin on olemassa $s \in \delta[X]$ ja $a \in F'(s)$, siten että $r = s[a/x]$. Koska $a \in \bigcap_{i=1}^n \delta[X](u_i)$, niin erityisesti $a \in \delta[X](u_j)$. Siis on olemassa $s' \in \delta[X]$, siten että $s'(u_j) = a$. Koska $F'(s') \neq \emptyset$, niin on olemassa $a' \in F'(s')$. Nyt $r' := s'[a'/x] \in X'$. Koska x ja u_j ovat eri muuttujia, niin $r'(u_j) = s'(u_j)$. On osoitettu siis, että

$$r(x) = s[a/x](x) = a = s'(u_j) = r'(u_j).$$

Koska $r \in X'$ oli mielivaltaisesti valittu, niin $\mathcal{M} \vDash_{X'} x \subseteq u_j$. Ja koska j oli mielivaltaisesti valittu, niin $\mathcal{M} \vDash_{X'} \bigwedge_{i=1}^n x \subseteq u_j$. Täten $\mathcal{M} \vDash_{X'} \bigwedge_{i=1}^n x \subseteq u_i \wedge \varphi$, joten $\mathcal{M} \vDash_{\delta[X]} \exists^{\mathrm{s}} x\, (\bigwedge_{i=1}^n x \subseteq u_i \wedge \varphi)$. Lemman 3.2 nojalla pätee, että

$$\mathcal{M} \vDash_X \delta\left[\exists^{\mathrm{s}} x \left(\bigwedge_{i=1}^n x \subseteq u_i \wedge \varphi\right)\right], \text{ eli } \mathcal{M} \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq \bigcap_{i=1}^n t_i)\, \varphi.$$

□

Esimerkki 3.7. Olkoon $f_0 \in L$, siten että $\#_L(f_0) = 1$, $t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{T}_L$ ja x sekä y eri muuttujia siten, että $x \notin \mathrm{Vr}(t_1, \ldots, t_n)$. Tällöin pätee, että

$$\mathcal{M} \vDash_X \forall x\, (\exists^{\mathrm{s}} y \subseteq \bigcap_{i=1}^n t_i)(f_0 x = y), \quad \text{joss} \quad \mathrm{im}(f_0^{\mathcal{M}}) \subseteq \bigcap_{i=1}^n X(t_i).$$

Oletetaan sitten, että $\psi \in \mathrm{INF}_L$ ja $f_1, \ldots, f_n \in L$, siten että $\#_L(f_i) = 1$ jokaisella $i \in \{1, \ldots, n\}$. Mikäli $x \notin \mathrm{Fr}(\psi)$, niin on voimassa:

$$\mathcal{M} \vDash_X \forall x\, (\exists^{\mathrm{s}} y \subseteq \bigcap_{i=1}^n f_i x)\, \psi,$$

$$\text{joss on olemassa } F : X \to \bigcap_{i=1}^n \mathrm{im}(f_i^{\mathcal{M}}), \text{ s.e. } \mathcal{M} \vDash_{X[F/y]} \psi.$$

3.1.4 INF-logiikan ominaisuuksia

Kuten inkluusiologiikka, INF-logiikkakaan ei ole alaspäin suljettu. Sillä jos esimerkiksi $X = \{\{(x,0),(y,0)\},\{(x,0),(y,1)\}\}$ ja $Y = \{\{(x,0),(y,1)\}\}$, niin selvästi $Y \subseteq X$ ja $\mathcal{M} \vDash_X x \subseteq y$, mutta $\mathcal{M} \nvDash_Y x \subseteq y$. Voidaan kuitenkin todistaa, että INF-logiikka on inkluusiologiikan tapaan suljettu yhdisteiden suhteen:

Lause 3.6. *Oletetaan, että $\varphi \in \mathrm{INF}_L$ ja X_i $(i \in I)$ ovat tiimejä. Nyt on voimassa:*

$$\textit{Jos } \mathcal{M} \vDash_{X_i} \varphi \textit{ jokaisella } i \in I, \textit{ niin } \mathcal{M} \vDash_{\bigcup_{i\in I} X_i} \varphi.$$

Todistus. Todistetaan väite induktiolla kaavan φ rakenteen suhteen:

- Mikäli φ on literaali, niin $\varphi \in \mathrm{FO}_L$, jolloin väite pätee lemman 2.3 nojalla.

- Tapaukset $\varphi = \psi \wedge \theta$, $\varphi = \psi \vee \theta$, $\varphi = \exists^{\mathrm{s}} x\, \psi$ ja $\varphi = \forall x\, \psi$ voidaan todistetaa samalla tavalla kuin Gallianin vastaavassa tuloksessa inkluusiologiikalle [5, s. 74-75].

- Olkoon $\varphi = (\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)\, \psi$.

  Oletetaan, että $\mathcal{M} \vDash_{X_i} (\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)\, \psi$ jokaisella $i \in I$. Siis jokaisella $i \in I$ olemassa kuvaus $F_i : X \to \mathcal{P}^*(X_i(t))$, siten että $\mathcal{M} \vDash_{X_i[F_i/x]} \psi$. Määritellään kuvaus:

  $$F : \bigcup_{i \in I} X_i \to \mathcal{P}^*(M), \text{ s.e. } s \mapsto \{a \in F_i(s) \mid i \in I \text{ ja } s \in X_i\}.$$

  Kuvauksen F määritelmän nojalla pätee selvästi, että

  $$\bigcup_{i \in I} (X_i[F_i/x]) = \Big(\bigcup_{i \in I} X_i\Big)[F/x].$$

  Täten induktio-oletuksen nojalla $\mathcal{M} \vDash_{(\bigcup_{i \in I} X_i)[F/x]} \psi$. Riittää siis osoittaa, että $\mathrm{im}(F) \subseteq \mathcal{P}((\bigcup_{i \in I} X_i)(t))$: Valitaan mielivaltainen $B \in \mathrm{im}(F)$ ja $b \in B$. Nyt on olemassa $s \in \bigcup_{i \in I} X_i$, siten että $B = F(s)$.

  Tällöin kuvauksen F määritelmän nojalla $b \in F_i(s)$ jollain $i \in I$. Koska $\mathrm{im}(F_i) \subseteq \mathcal{P}(X_i(t))$ ja $X_i(t) \subseteq \bigcup_{i \in I} X_i(t) = (\bigcup_{i \in I} X_i)(t)$, niin $b \in (\bigcup_{i \in I} X_i)(t)$. On osoitettu siis, että $\mathrm{im}(F) \subseteq \mathcal{P}^*((\bigcup_{i \in I} X_i)(t))$, ja näin ollen $\mathcal{M} \vDash_{\bigcup_{i \in I} X_i} (\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)\, \psi$.

□

Huomautus. Lauseen 3.6 erikoistapauksena saamme lemman 2.3 ekvivalenssin toisen suunnan INF_L-kaavoille φ:

$$\text{Jos } \mathcal{M} \vDash_s \varphi \text{ jokaisella } s \in X, \text{ niin } \mathcal{M} \vDash_X \varphi.$$

Käänteinen väite ei kuitenkaan päde yleisesti saman vastaesimerkin nojalla jolla perustelimme, että INF-logiikka ei ole alaspäin suljettu.

Seuraava Gallianin ja Hellan [7, s. 8] esittämä esimerkki osoittaa, että inkluusio-operaation avulla voidaan ilmaista lauseita, joita ensimmäisen kertaluvun logiikka ei kykene ilmaisemaan. Esitämme tässä kyseisen esimerkin käyttäen inkluusioatomin sijasta inkluusiokvanttoria:

Esimerkki 3.8. Olkoon $\mathcal{G} = (V, E^{\mathcal{G}})$ äärellinen suunnattu graafi. Muodostetaan kaava φ seuraavasti:

$$\varphi := \exists^{\mathrm{s}} x\, (\exists^{\mathrm{s}} y \subseteq x) Exy, \qquad \text{missä } x \text{ ja } y \text{ ovat eri muuttujia.}$$

Nyt $\mathcal{G} \vDash \varphi$, jos ja vain jos graafissa $\mathcal{G}$ on ainakin yksi sykli.

Todistus. Oletetaan ensin, että $\mathcal{G} \vDash \varphi$ ja tehdään vastaoletus, että $\mathcal{G}$ on sykliton. Koska $\mathcal{G} \vDash \exists^{\mathrm{s}} x\, (\exists^{\mathrm{s}} y \subseteq x) Exy$, niin on olemassa $F_1 : \{\emptyset\} \to \mathcal{P}^*(V)$, siten että $\mathcal{G} \vDash_{X'} (\exists^{\mathrm{s}} y \subseteq x) Exy$, missä $X' = \{\emptyset\}[F_1/x]$. Edelleen on olemassa $F_2 : X' \to \mathcal{P}^*(X'(x))$, siten että $\mathcal{G} \vDash_{X'[F_2/y]} Exy$.

Osoitetaan induktiolla joukon $X'(x)$ solmujen lukumäärän n suhteen että $X'(x)$:n virittämässä $\mathcal{G}$:n aligraafissa on polku $(a_1, a_2), \dots, (a_{n-1}, a_n) \in E^{\mathcal{G}}$, missä $a_1, \dots, a_n \in X'(x)$ ovat eri solmuja. Tapaus $|X'(x)| = 1$ on triviaali, sillä tällöin polussa ei ole särmiä. Oletetaan sitten, että $X'(x) = \{a_1, \dots, a_n\}$. Nyt induktio-oletuksen nojalla solmujoukon $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ virittämässä graafin $\mathcal{G}$ aligraafissa on polku $(a_1, a_2), \dots, (a_{n-2}, a_{n-1}) \in E^{\mathcal{G}}$.

Koska $a_{n-1} \in X'(x)$, niin on olemassa $s \in X'$, siten että $s(x) = a_{n-1}$. Valitaan jokin alkio $b \in F_2(s)$ ja merkitään $r := s[b/y]$. Tällöin $r \in X'[F_2/y]$, $r(x) = a_{n-1}$ ja $r(y) = b$. Lisäksi $\mathcal{G} \vDash_{X'[F_2/y]} Exy$, joten $(a_{n-1}, b) \in E^{\mathcal{G}}$. Koska $\mathrm{im}(F_2) \subseteq \mathcal{P}(X'(x))$, niin erityisesti $b \in X'(x)$. Mikäli pätisi, että $b \in \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$, niin tällöin $X'(x)$:n virittämässä aligraafissa olisi sykli. Täytyy siis olla, että $b = a_n$, jolloin $(a_{n-1}, a_n) \in E^{\mathcal{G}}$.

Voimme toistaa induktiossa alkiolle a_{n-1} tehdyn päättelyn samalla tavalla alkiolle a_n, jolloin päädymme ristiriitaan, että $b \notin \{a_1, \dots a_n\} = X'(x)$. Näin ollen graafissa $\mathcal{G}$ täytyy olla ainakin yksi sykli.

Oletetaan sitten että $\mathcal{G}$:ssä on sykli $(a_1, a_2), \dots (a_{n-1}, a_n), (a_n, a_1) \in E^{\mathcal{G}}$. Määritellään nyt kuvaukset:

$$\begin{cases} F_1 : \{\emptyset\} \to \mathcal{P}^*(V), \text{ s.e. } \emptyset \mapsto \{a_1, \dots, a_n\} \\ F_2 : \{\emptyset\}[F_1/x] \to \mathcal{P}^*(V), \text{ s.e. } s \mapsto \{a_i\}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{missä } i \in \{1, \dots, n\} \text{ s.e. } (s(x), a_i) \in E^{\mathcal{G}}. \end{cases}$$

Kuvausten F_1 ja F_2 määritelmien nojalla selvästi $\mathrm{im}(F_2) \subseteq \mathcal{P}^*(\{\emptyset\}[F_1/x](x))$ ja $\mathcal{G} \vDash_{\{\emptyset\}[F_1/x, F_2/y]} Exy$. Näin ollen pätee, että $\mathcal{G} \vDash_{\{\emptyset\}[F_1/x]} (\exists^{\mathrm{s}} y \subseteq x) Exy$ ja edelleen $\mathcal{G} \vDash_{\{\emptyset\}} \exists^{\mathrm{s}} x\, (\exists^{\mathrm{s}} y \subseteq x) Exy$, eli $\mathcal{G} \vDash \varphi$. □

Saamme tämän esimerkin nojalla esitettyä ensimmäisen tuloksen INF-logiikan ilmaisuvoimasta:

Lause 3.7. INF-*logiikka on ilmaisuvoimaltaan aidosti vahvempi kuin ensimmäisen kertaluvun logiikka sekä kaavojen että lauseiden tasolla.*

Todistus. Olkoon ominaisuus $(*)$: äärellisessä suunnatussa graafissa on sykli. Voimme osoittaa Ehrenfeucht-Fraïssé -pelin (katso esimerkiksi [2, s. 13-20]) avulla, että ominaisuus $(*)$ ei ole määriteltävissä millään ensimmäisen kertaluvun logiikan lauseella. Esimerkin 3.8 nojalla tämä voidaan kuitenkin tehdä INF-logiikassa. Näin ollen INF-logiikka on lauseiden tasolla ilmaisuvoimaltaan aidosti vahvempi kuin ensimmäisen kertaluvun logiikka. Koska lauseet ovat kaavoja, niin sama pätee myös kaavoille. □

Käsittelemme INF-logiikan ilmaisuvoimaa suhteessa muihin logiikoihin tarkemmin kappaleissa 4.3 sekä 4.4.

3.2 EXF-logiikka

Tässä kappaleessa määrittelemme EXF-logiikan, joka saadaan laajentamalla ensimmäisen kertaluvun logiikkaa ns. ekskluusiokvanttoreilla. Määrittelemme sille syntaksin sekä semantiikan, ja todistamme joitain sitä koskevia tuloksia. Kappaleen lopussa esitämme lisäksi useita graafiteoreettisia esimerkkejä EXF-logiikan ilmaisuvoimasta.

3.2.1 EXF-logiikan syntaksi ja semantiikka

Esitellään ensin Gallianin ekskluusiologiikka [5, s. 81-84], jota kutsumme myös EXC-logiikaksi:

Määritelmä 3.7. Määritellään kieli EXC_L seuraavasti:

- Jos $\varphi \in \mathrm{FO}_L$, niin $\varphi \in \mathrm{EXC}_L$.
- Jos $t_1, \dots, t_n, t'_1, \dots, t'_n \in \mathrm{T}_L$, niin $t_1 \dots t_n \mid t'_1 \dots t'_n \in \mathrm{EXC}_L$.
- Jos $\varphi, \psi \in \mathrm{EXC}_L$, niin $(\varphi \wedge \psi) \in \mathrm{EXC}_L$ ja $(\varphi \vee \psi) \in \mathrm{EXC}_L$.
- Jos $\varphi \in \mathrm{EXC}_L$ ja x on muuttuja, niin $\exists^{\mathrm{s}} x\, \varphi \in \mathrm{EXC}_L$ ja $\forall x\, \varphi \in \mathrm{EXC}_L$.

Jos $\varphi \in \mathrm{EXC}_L$, niin sanotaan että φ on EXC_L*-kaava*. Laajennetaan $\mathrm{Fr}(\varphi)$:n ja $\mathrm{Sf}(\varphi)$:n määritelmiä seuraavasti:

$$\begin{aligned}\mathrm{Vr}(t_1 \dots t_n \mid t'_1 \dots t'_n) &= \mathrm{Vr}(t_1, \dots, t_n, t'_1, \dots, t'_n)\\ \mathrm{Sf}(t_1 \dots t_n \mid t'_1 \dots t'_n) &= \{t_1 \dots t_n \mid t'_1 \dots t'_n\}\end{aligned}$$

Samaan tapaan kuin inkluusiologiikka, ekskluusiologiikkakin on ensimmäisen kertaluvun logiikka, jonka aakkostoa on laajennettu atomikaavoilla $t_1 \dots t_n \mid t'_1 \dots t'_n$, joita nimitämme ($n$-paikkaisiksi) *ekskluusioatomeiksi*. Niille käytetään seuraavaa totuusmääritelmää:

Määritelmä 3.8. Oletetaan, että $t_1, \dots, t_n, t'_1, \dots, t'_n \in \mathrm{T}_L$ ja X on tiimi, siten että $\mathrm{Vr}(t_1, \dots, t_n, t'_1, \dots, t'_n) \subseteq \mathrm{dom}(X)$. Määritellään:

$$\mathcal{M} \vDash_X t_1 \dots t_n \mid t'_1 \dots t'_n, \quad \text{joss kaikilla } s, s' \in X \text{ pätee, että } (s(t_1), \dots, s(t_n)) \neq (s'(t'_1)), \dots, s'(t'_n)).$$

Tämä totuusmääritelmä siis tarkoittaa, että termijonot $t_1 \dots t_n$ ja $t'_1 \dots t'_n$ eivät saa samoja arvoja tiimissä X. Yksipaikkaisen ekskluusioatomin $t \mid t'$ tapauksessa tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $X(t) \cap X(t') = \emptyset$[3]. Näin ollen sen kutsuminen ekskluusioatomiksi on mielekästä.

[3] n-paikkaisen ekskluusioatomin $t_1 \dots t_n \mid t'_1 \dots t'_n$ tapauksessa totuusmääritelmä on ekvivalentti sen kanssa, että $\{(s(t_1), \dots, s(t_n)) \mid s \in X\} \cap \{(s(t'_1), \dots, s(t'_n)) \mid s \in X\} = \emptyset$.

Huomaa, että inkluusio ja ekskluusio eivät ole joukko-opillisesti toistensa negaatioita, ja vastaavasti ekskluusioatomikaan ei ole inkluusioatomin negaatio. Lisäksi ekskluusio on symmetrinen toisin kuin inkluusio.

Käytämme vastaavia merkintöjä kuin inkluusiologiikalle, mikäli haluamme tarkastella ekskluusiologiikkaa, jonka kaavoissa esiintyy paikkaluvultaan ainoastaan rajatun pituisia ekskluusioatomeita. Merkitsemme $\varphi \in \mathrm{EXC}_L[k]$, jos $\varphi \in \mathrm{EXC}_L$ ja kaikilla ekskluusioatomeilla $t_1 \dots t_n \mid t'_1 \dots t'_n \in \mathrm{Sf}(\varphi)$ pätee, että $n \leq k$. Kutsumme näin saatua logiikkaa k-paikkaiseksi ekskluusiologiikaksi tai $\mathrm{EXC}[k]$-logiikaksi.

Galliani on osoittanut [5][4], että päinvastaisesti kuin inkluusiologiikalle, ekskluusiologiikalle pätee, että se on suljettu alaspäin, mutta että se ei ole suljettu yhdisteiden suhteen. Esittelemme muita ekskluusiologiikan ilmaisuvoimaa koskevia tuloksia kappaleessa 4.1. Määritellään seuraavaksi EXF-logiikan syntaksi:

Määritelmä 3.9. Määritellään kieli EXF_L seuraavasti:

- Jos $\varphi \in \mathrm{FO}_L$, niin $\varphi \in \mathrm{EXF}_L$.
- Jos $\varphi, \psi \in \mathrm{EXF}_L$, niin $(\varphi \wedge \psi) \in \mathrm{EXF}_L$ ja $(\varphi \vee \psi) \in \mathrm{EXF}_L$.
- Jos $\varphi \in \mathrm{EXF}_L$ ja x on muuttuja, niin $\exists^{\mathrm{s}} x\, \varphi \in \mathrm{EXF}_L$ ja $\forall x\, \varphi \in \mathrm{EXF}_L$.
- Jos $\varphi \in \mathrm{EXF}_L$, x on muuttuja ja $t \in \mathrm{T}_L$, niin $(\exists^{\mathrm{s}} x \mid t)\, \varphi \in \mathrm{EXF}_L$.

Jos $\varphi \in \mathrm{EXF}_L$, niin sanotaan että φ on EXF_L-*kaava*. Laajennetaan $\mathrm{Fr}(\varphi)$:n ja $\mathrm{Sf}(\varphi)$:n määritelmiä seuraavasti:

$$\mathrm{Fr}((\exists^{\mathrm{s}} x \mid t)\, \varphi) = (\mathrm{Fr}(\varphi) \setminus \{x\}) \cup \mathrm{Vr}(t)$$
$$\mathrm{Sf}((\exists^{\mathrm{s}} x \mid t)\, \varphi) = \{(\exists^{\mathrm{s}} x \mid t)\, \varphi\} \cup \mathrm{Sf}(\varphi)$$

Käytämme *ekskluusiokvanttorille* $(\exists^{\mathrm{s}} x \mid t)$ seuraavaa totuusmääritelmää:

Määritelmä 3.10. Oletetaan, että $\varphi \in \mathrm{EXF}_L$, $t \in \mathrm{T}_L$ ja X on tiimi, siten että $(\mathrm{Fr}(\varphi) \setminus \{x\}) \cup \mathrm{Vr}(t) \subseteq \mathrm{dom}(X)$. Määritellään:

$$\mathcal{M} \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}} x \mid t)\, \varphi, \text{ joss on olemassa } F : X \to \mathcal{P}^*\left(\overline{X(t)}\right), \text{ s.e. } \mathcal{M} \vDash_{X[F/x]} \varphi.$$

Kuten inkluusiokvanttorin totuusmääritelmä, tämäkin muistuttaa paljon eksistenssikvanttorin $\exists^{\mathrm{s}} x$ totuusmääritelmää. Erona on tällä kertaa, että valintafunktion F maalijoukkoa rajoitetaan nyt termin t saamien arvojen joukon komplementtiin tiimissä X.

Kuten inkluusio-operaatioiden tapauksessa, yksipaikkainen ekskluusioatomi on ilmaistavissa käytten määritelemäämme ekskluusiokvanttoria. Todistamme tämän seuraavassa lauseessa.

[4]Galliani osoittaa tämän todistamalla ekskluusiologiikan ekvivalentiksi riippuvuuslogiikan kanssa [5, s. 81-84]. Riippuvuuslogiikalle väite pätee Väänäsen tulosten nojalla [17].

Lause 3.8. *Oletetaan, että* $\varphi \in \mathrm{EXF}_L$, $t_1, t_2 \in \mathrm{T}_L$ *ja* $x \notin \mathrm{Vr}(t_1)$. *Nyt on voimassa:*

$$\mathcal{M} \vDash_X t_1 \mid t_2, \text{ joss } \mathcal{M} \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}} x \mid t_2)(x = t_1).$$

Todistus. Oletetaan ensin, että $\mathcal{M} \vDash_X t_1 \mid t_2$. Määritellään $F : X \to \mathcal{P}^*(M)$, siten että $s \mapsto \{s(t_1)\}$. Valitaan mielivaltainen $r \in X[F/x]$. Nyt on olemassa $s \in X$ ja $a \in F(s)$, siten että $r = s[a/x]$. Koska $F(s) = \{s(t_1)\}$, niin $a = s(t_1)$. Lisäksi koska $x \notin \mathrm{Vr}(t_1)$, niin $s(t_1) = r(t_1)$. On osoitettu siis, että:

$$r(x) = s[a/x](x) = a = s(t_1) = r(t_1).$$

Näin ollen $\mathcal{M} \vDash_{X[F/x]} x = t_1$.

Osoitetaan sitten, että $\mathrm{im}(F) \subseteq \mathcal{P}(\overline{X(t_2)})$: Tehdään vastaoletus, että on olemassa $B \in \mathrm{im}(F)$ ja $a \in B$, siten että $a \in X(t_2)$. Kuvauksen F määritelmän nojalla $B = \{s(t_1)\}$ jollain $s \in X$. Näin ollen täytyy olla, että $a = s(t_1)$. Koska $a \in X(t_2)$, niin on olemassa $s' \in X$, siten että $s'(t_2) = a$. Oletuksen nojalla $\mathcal{M} \vDash_X t_1 \mid t_2$, joten erityisesti $s(t_1) \neq s'(t_2)$. Tällöin

$$a = s(t_1) \neq s'(t_2) = a.$$

Tämä on ristiriita, joten jokaisella $B \in \mathrm{im}(F)$ ja $a \in B$ pätee $a \in \overline{X(t_2)}$. Näin ollen $\mathrm{im}(F) \subseteq \mathcal{P}(\overline{X(t_2)})$. On osoitettu siis, että on olemassa kuvaus $F : X \to \mathcal{P}^*(\overline{X(t_2)})$, siten että $\mathcal{M} \vDash_{X[F/x]} x = t_1$, eli $\mathcal{M} \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}} x \mid t_2)(x = t_1)$.

Oletetaan sitten, että $\mathcal{M} \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}} x \mid t_2)(x = t_1)$. Valitaan mielivaltaiset tulkintafunktiot $s, s' \in X$. Oletuksen nojalla on olemassa $F : X \to \mathcal{P}^*(\overline{X(t_2)})$, siten että $\mathcal{M} \vDash_{X[F/x]} x = t_1$. Valitaan jokin $a \in F(s)$ ja merkitään $r := s[a/x]$. Oletuksen nojalla $x \notin \mathrm{Vr}(t_1)$, joten $s(t_1) = r(t_1)$. Koska $r \in X[F/x]$ ja $\mathcal{M} \vDash_{X[F/x]} x = t_1$, niin $r(x) = r(t_1)$. Koska $F(s) \subseteq \overline{X(t_2)}$, niin $a \notin X(t_2)$, joten erityisesti $a \neq s'(t_2)$. On osoitettu siis, että

$$s(t_1) = r(t_1) = r(x) = s[a/x](x) = a \neq s'(t_2).$$

Koska $s, s' \in X$ olivat mielivaltaisesti valittuja, niin $\mathcal{M} \vDash_X t_1 \mid t_2$. □

Lauseen 3.8 nojalla voimme jatkossa käyttää kaavoissa ekskluusioatomeita $t_1 \mid t_2$ lyhennysmerkintöinä kaavoille $(\exists^{\mathrm{s}} x \mid t_2)(x = t_1)$, missä $x \notin \mathrm{Vr}(t_1)$. Näille atomikaavoille voidaan käyttää yhtäpitävää totuusmääritelmää:

$$\mathcal{M} \vDash_X t_1 \mid t_2, \text{ joss jokaisella } s, s' \in X : s(t_1) \neq s'(t_2).$$

Esimerkki 3.9. Mikäli tiimi $X \neq \emptyset$, niin voimme esittää ekskluusioatomin $t_1 \mid t_2$ negaation helposti INF_L-kaavalla:

$$\varphi := (\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t_1)(\exists^{\mathrm{s}} y \subseteq t_2)(x = y), \text{ missä } x \notin \mathrm{Vr}(t_2).$$

3.2.2 Ekskluusiokvantifiointi termijoukolle

Lemmassa 3.3 todistimme INF-logiikalle, että kaavan toteutumiselle annetulla tiimillä on olennaista ainoastaan tiimin rajoittuma kaavassa esiintyviin vapaisiin muuttujiin. Vastaava tulos pätee myös EXF-logiikalle. Todistus voidaan tehdä samalla tavalla kaavan $\varphi \in \mathrm{EXF}_L$ rakenteen suhteen kuten lemmassa 3.3. Meidän riittää käsitellä siitä ainoastaan ekskluusiokvanttorin tapaus:

- Olkoon $\varphi = (\exists^{\mathrm{s}} x \mid t)\, \psi$.

  Oletetaan ensin, että $\mathcal{M} \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}} x \mid t)\, \psi$. Näin ollen on olemassa kuvaus $F : X \to \mathcal{P}^*(\overline{X(t)})$, siten että $\mathcal{M} \vDash_{X[F/x]} \psi$. Määritellään kuvaus:

  $$F' : X' \to \mathcal{P}^*(M), \quad \text{s.e. } s' \mapsto \bigcup_{s \in X_{s'}} F(s) \text{ jokaisella } s' \in X',$$
  $$\text{missä } X_{s'} := \{s \in X \mid s \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi) = s' \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi)\}.$$

  Koska $\mathrm{Fr}(\psi) \subseteq \mathrm{Fr}(\varphi) \cup \{x\}$ ja $X \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi) = X' \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi)$, niin kuvauksen F' määritelmän nojalla selvästi:

  $$X[F/x] \upharpoonright \mathrm{Fr}(\psi) = X'[F'/x] \upharpoonright \mathrm{Fr}(\psi).$$

  Näin ollen induktio-oletuksen nojalla $\mathcal{M} \vDash_{X'[F'/x]} \psi$. Riittää siis osoittaa, että $\mathrm{im}(F') \subseteq \mathcal{P}(\overline{X'(t)})$: Tehdään vastaoletus, että on olemassa $B \in \mathrm{im}(F')$ ja $b \in B$, siten että $b \in X'(t)$. Nyt on olemassa $s' \in X'$, siten että $B = F'(s')$. Kuvauksen F' määritelmän nojalla on olemassa $s \in X$, siten että $b \in F(s)$.

  Koska $b \in X'(t)$, niin on olemassa $r' \in X'$, siten että $r'(t) = b$. Oletuksen nojalla $X \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi) = X' \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi)$, joten on olemassa $r \in X$, siten että $r \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi) = r' \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi)$. Koska määritelmän 3.9 nojalla $\mathrm{Vr}(t) \subseteq \mathrm{Fr}(\varphi)$, niin

  $$b = r'(t) = (r' \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi))(t) = (r \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi))(t) = r(t).$$

  Näin ollen $b \in X(t)$. Koska $b \in F(s)$, niin tämä on ristiriita sen kanssa, että $\mathrm{im}(F) \subseteq \mathcal{P}(\overline{X(t)})$. On osoitettu siis, että $\mathrm{im}(F') \subseteq \mathcal{P}^*(\overline{X'(t)})$ ja $\mathcal{M} \vDash_{X'[F'/x]} \psi$, joten $\mathcal{M} \vDash_{X'} (\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)\, \psi$. Ekvivalenssin toinen suunta voidaan todistaa symmetrisesti.

Huomautus. Jatkossa kun viittaamme lemmaan 3.3 EXF-logiikan yhteydessä, niin oletamme sen todistetuksi EXF_L-kaavoille. Voimme lisäksi esittää tallennuskaavan $\delta[\varphi]$ määritelmän täsmälleen vastaavalla tavalla, kun φ on EXF_L-kaava. Samoin EXF_L-kaavoille voidaan todistaa lemmat 3.2 ja 3.4. Kun viittaamme näihin lemmoihin jatkossa EXF_L-kaavojen yhteydessä, oletamme ne todistetuiksi EXF-logiikalle.

Pohditaan seuraavaksi ekskluusiokvantifiointia joukon $\{t_1, \ldots, t_n\} \subseteq \mathrm{T}_L$ suhteen samaan tapaan kuin inkluusion tapauksessa määritelmässä 3.6. Korvaamalla tässä määritelmässä inkluusioatomit ekskluusioatomeilla saamme mielekkään uuden kvanttorin EXF-logiikalle. Se rajoittaa nyt muuttujan x arvojen valinnan joukon $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} X(t_i)}$ komplementtiin, joten sille on mielekästä käyttää merkintää $(\exists^{\mathrm{s}} x \mid \overline{\bigcup_{i=1}^{n} t_i})$.

Määritelmä 3.11. Oletetaan, että $\varphi \in \mathrm{EXF}_L$, $t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{T}_L$ ja $u_1, \ldots, u_n$ ovat eri muuttujia, siten että $u_1, \ldots, u_n \notin \mathrm{Vr}(t_1, \ldots, t_n) \cup \mathrm{Fr}(\varphi) \cup \{x\}$. Käytetään seuraavaa lyhennysmerkintää:

$$(\exists^{\mathrm{s}} x \mid \overline{\bigcup_{i=1}^{n} t_i})\varphi := \delta^{u_1 \ldots u_n}_{t_1 \ldots t_n} \left[\exists^{\mathrm{s}} x \left(\bigwedge_{i=1}^{n} x \mid u_i \wedge \varphi \right) \right]$$

Seuraava lause osoittaa, että tämän kvanttorin totuusehto on todella sellainen mitä siitä edellä totesimme.

Lause 3.9. *Oletetaan, että $\varphi \in \mathrm{EXF}_L$, $t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{T}_L$ ja $u_1, \ldots, u_n$ ovat eri muuttujia, siten että $u_1, \ldots, u_n \notin \mathrm{Vr}(t_1, \ldots, t_n) \cup \mathrm{Fr}(\varphi) \cup \{x\}$. Tällöin on voimassa:*

$$\mathcal{M} \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}} x \mid \overline{\bigcup_{i=1}^{n} t_i})\, \varphi,$$
$$\text{joss on olemassa } F : X \to \mathcal{P}^* \left(\overline{\bigcup_{i=1}^{n} X(t_i)} \right), \text{ s.e. } \mathcal{M} \vDash_{X[F/x]} \varphi.$$

Todistus. Todistetaan vastaavalla tavalla kuin lause 3.5 sillä lisähuomiolla, että kaikille tulkintafunktioille r on voimassa:

$$\begin{aligned} & r(x) \notin \delta[X](u_i), \text{ millään } i \in \{1, \ldots, n\} \\ & \Leftrightarrow r(x) \in \overline{\delta[X](u_i)}, \text{ kaikilla } i \in \{1, \ldots, n\} \\ & \Leftrightarrow r(x) \in \bigcap_{i=1}^{n} \overline{\delta[X](u_i)} \Leftrightarrow r(x) \in \overline{\bigcup_{i=1}^{n} \delta[X](u_i)}. \end{aligned}$$

□

Tämän kappaleen lopussa esimerkissä 3.11 näemme miten edellä määriteltyä kvanttoria $(\exists^{\mathrm{s}} x \mid \overline{\bigcup_{i=1}^{n} t_i})$ voidaan käyttää tehokkaasti EXF-logiikassa.

3.2.3 EXF-logiikan ominaisuuksia

Kuten ekskluusiologiikka, EXF-logiikkakaan ei ole suljettu yhdisteiden suhteen. Sillä jos esimerkiksi $X = \{\{(x, 0), (y, 1)\}\}$ ja $Y = \{\{(x, 1), (y, 0)\}\}$, niin selvästi $\mathcal{M} \vDash_X x \mid y$ ja $\mathcal{M} \vDash_Y x \mid y$, mutta $\mathcal{M} \nvDash_{X \cup Y} x \mid y$. EXF-logiikka on kuitenkin ekskluusiologiikan tapaan alaspäin suljettu, minkä osoitamme seuraavassa lauseessa.

Lause 3.10. *Olkoon* $\varphi \in \mathrm{EXF}_L$ *ja* X *sekä* Y *tiimejä, siten että* $Y \subseteq X$*. Nyt on voimassa:*

$$\textit{Jos } \mathcal{M} \vDash_X \varphi, \ \textit{niin } \mathcal{M} \vDash_Y \varphi.$$

Todistus. Todistetaan väite induktiolla kaavan $\varphi \in \mathrm{EXF}_L$ rakenteen suhteen:

- Mikäli φ on literaali, niin $\varphi \in \mathrm{FO}_L$, jolloin väite pätee lemman 2.3 nojalla.

- Tapaukset $\varphi = \psi \wedge \theta$, $\varphi = \psi \vee \theta$, $\varphi = \exists^{\mathrm{s}} x\, \psi$ ja $\varphi = \forall x\, \psi$ ovat suoraviivaisia todistaa.

- Olkoon $\varphi = (\exists^{\mathrm{s}} x \mid t)\, \psi$.

  Oletetaan, että $\mathcal{M} \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}} x \mid t)\, \psi$, eli on olemassa $F : X \to \mathcal{P}^*(\overline{X(t)})$, siten että $\mathcal{M} \vDash_{X[F/x]} \psi$. Määritellään kuvaus $F' := F \restriction Y$. Koska oletuksen nojalla $Y \subseteq X$, niin selvästi nyt $Y[F'/x] \subseteq X[F/x]$. Näin ollen induktio-oletuksen nojalla $\mathcal{M} \vDash_{Y[F'/x]} \psi$. Riittää siis osoittaa, että $\mathrm{im}(F') \subseteq \mathcal{P}^*(\overline{Y(t)})$.

  Valitaan mielivaltaiset $B \in \mathrm{im}(F')$ ja $b \in B$. Näin ollen on olemassa $s \in Y$, siten että $B = F'(s)$. Koska $Y \subseteq X$ ja $F' = F \restriction Y$, niin $s \in X$ ja $F(s) = F'(s)$. Koska $\mathrm{im}(F) \subseteq \mathcal{P}^*(\overline{X(t)})$, niin $b \in \overline{X(t)}$. Oletuksen nojalla $Y \subseteq X$, joten $Y(t) \subseteq X(t)$, jolloin $\overline{X(t)} \subseteq \overline{Y(t)}$. Näin ollen $b \in \overline{Y(t)}$. Siis $\mathrm{im}(F') \subseteq \mathcal{P}^*(\overline{Y(t)})$, ja täten $\mathcal{M} \vDash_Y (\exists^{\mathrm{s}} x \mid t)\, \psi$.

□

Huomautus. Lauseen 3.10 erikoistapauksena saamme lemman 2.3 ekvivalenssin toisen suunnan EXF_L-kaavoille φ:

$$\text{Jos } \mathcal{M} \vDash_X \varphi, \ \text{niin } \mathcal{M} \vDash_s \varphi \text{ jokaisella } s \in X.$$

Käänteinen väite ei kuitenkaan päde yleisesti saman vastaesimerkin nojalla jolla perustelimme, että EXF-logiikka ei ole suljettu yhdisteiden suhteen.

Voidaan todistaa, että kaikille alaspäin suljetuille logiikoille eksistenssikvanttoreiden $\exists$ ja $\exists^{\mathrm{s}}$ semantiikat ovat ekvivalentit [6, s. 7]. Näin ollen voisimme käyttää EXF-logiikalle yhtä hyvin kvanttoria $\exists$.

Määritellään seuraavaksi *vakioatomi* $=\!(t)$, missä $t \in \mathrm{T}_L$. Tämä on itse asiassa riippuvuuslogiikan yksipaikkainen riippuvuusatomi. Määrittelemme riippuvuuslogiikan yleisesti kappaleessa 4.1, mutta tässä vaiheessa meidän riittää tietää ainoastaan vakioatomin totuusmääritelmä:

$$\mathcal{M} \vDash_X =\!(t), \ \text{joss } s(t) = s'(t) \text{ kaikilla } s, s' \in X.$$

Mikäli $X \neq \emptyset$, niin tämä on edelleen yhtäpitävää sen kanssa että $|X(t)| = 1$. Osoitetaan seuraavassa lauseessa, että vakioatomin $=\!(t)$ ilmaisema tiimin ominaisuus on määriteltävissä EXF-logiikalla. Tämä lause on todistettu samaan tapaan kuin erikoistapaus Gallianin yleisemmästä tuloksesta, joka on tässä tutkielmassa esitetty lauseena 4.1.

Lause 3.11. *Oletetaan, että $t \in \mathrm{T}_L$. Olkoon x muuttuja, siten että $x \notin \mathrm{Vr}(t)$. Nyt on voimassa:*

$$\mathcal{M} \vDash_X =\!(t), \text{ joss } \mathcal{M} \vDash_X \forall x\, (x = t \vee x \mid t).$$

Todistus. Oletetaan ensin, että $\mathcal{M} \vDash_X =\!(t)$. Määritellään:

$$\begin{cases} Y = \{s \in X[M/x] \mid s(x) = s(t)\} \\ Y' = \{s \in X[M/x] \mid s(x) \neq s(t)\} \end{cases}$$

Näiden määritelmien nojalla pätee, että $Y \cup Y' = X[M/x]$ ja $\mathcal{M} \vDash_Y x = t$. Tehdään vastaoletus, että on olemassa $r, r' \in Y'$, siten että $r(x) = r'(t)$. Täten on olemassa $s, s' \in X$ ja $a, a' \in M$, siten että $r = s[a/x]$ ja $r' = s[a'/x]$. Oletuksen nojalla $\mathcal{M} \vDash_X =\!(t)$, joten $s(t) = s'(t)$. Koska $x \notin \mathrm{Vr}(t)$, niin pätee, että $r(t) = s(t)$ ja $r'(t) = s'(t)$. Koska $r \in Y'$, niin $r(x) \neq r(t)$. Näin ollen

$$r(x) = r'(t) = s'(t) = s(t) = r(t) \neq r(x).$$

Tämä on ristiriita, joten $\mathcal{M} \vDash_{Y'} x \mid t$. Näin ollen $\mathcal{M} \vDash_{X[M/x]} x = t \vee x \mid t$ ja edelleen $\mathcal{M} \vDash_X \forall x\, (x = t \vee x \mid t)$.

Oletetaan sitten, että $\mathcal{M} \vDash_X \forall x\, (x = t \vee x \mid t)$. Siis $\mathcal{M} \vDash_{X[M/x]} x = t \vee x \mid t$, joten on olemassa $Y, Y' \subseteq X[M/x]$, siten että $Y \cup Y' = X[M/x]$, $\mathcal{M} \vDash_Y x = t$ ja $\mathcal{M} \vDash_{Y'} x \mid t$. Tehdään vastaoletus, että on olemassa $s, s' \in X$, siten että $s(t) \neq s'(t)$. Olkoot $r := s[s'(t)/x]$ ja $r' := s'[s(t)/x]$. Oletuksen nojalla $x \notin \mathrm{Vr}(t)$, joten $r(t) = s(t)$ ja $r'(t) = s'(t)$. Nyt pätee, että

$$\begin{cases} r(x) = s[s'(t)/x](x) = s'(t) \neq s(t) = r(t) \\ r'(x) = s'[s(t)/x](x) = s(t) \neq s'(t) = r'(t) \end{cases}$$

Näin ollen $\mathcal{M} \nvDash_r x = t$ ja $\mathcal{M} \nvDash_{r'} x = t$, joten $r, r' \notin Y$. Täytyy siis olla, että $r, r' \in Y'$. Kuitenkin on voimassa, että

$$r(x) = s[s'(t)/x](x) = s'(t) = r'(t).$$

Tämä on ristiriita, sillä $\mathcal{M} \vDash_{Y'} x \mid t$. Näin ollen $\mathcal{M} \vDash_X =\!(t)$. □

Huomautus. Lauseen 3.11 nojalla voimme käyttää jatkossa vakioatomia $=\!(t)$ lyhennysmerkintänä kaavalle $\forall x\, (x = t \vee x \mid t)$, missä $x \notin \mathrm{Vr}(t)$. Koska selvästi vakioatomin ilmaisemaa tiimin ominaisuutta ei voi ilmaista ensimmäisen kertaluvun logiikalla, niin lauseesta 3.11 seuraa, että EXF-logiikka on kaavojen tasolla ilmaisuvoimaltaan vahvempi kuin ensimmäisen kertaluvun logiikka. Saamme kuitenkin tämän kappaleen lopussa todistettua EXF-logiikalle vahvemmankin tuloksen.

3.2.4 Hyödyllisiä operaattoreita EXF-logiikalle

Galliani on esitellyt väitöskirjassaan *riippuvaisen disjunktion* $\sqcup_{t_1 \dots t_n}$, missä $\{t_1, \dots, t_n\} \subseteq \mathrm{T}_L$ [5, s. 17]. Esitämme siitä erikoistapauksen $\sqcup_\emptyset$, jolle käytämme merkintää $\sqcup$. Sille antamassamme määritelmässä on huomioitu myös se erikoistapaus, että $|M| = 1$.

Määritelmä 3.12. Oletetaan, että $\varphi, \psi \in \mathrm{EXF}_L$ ja z_1 sekä z_2 ovat muuttujia, siten että $z_1, z_2 \notin \mathrm{Fr}(\varphi) \cup \mathrm{Fr}(\psi)$. Käytetään seuraavaa lyhennysmerkintää:

$$\begin{aligned}\varphi \sqcup \psi := {} & \Big(\forall z_1 \forall z_2\, (z_1 = z_2) \wedge (\varphi \vee \psi)\Big) \\ & \vee \exists^{\mathrm{s}} z_1 \exists^{\mathrm{s}} z_2 \Big({=}(z_1) \wedge {=}(z_2) \wedge ((z_1 = z_2 \wedge \varphi) \vee (z_1 \neq z_2 \wedge \psi))\Big)\end{aligned}$$

Konnektiivia $\sqcup$ nimitämme *intuitionistiseksi disjunktioksi*[5].

Seuraavassa lauseessa todistamme intuitionistisen disjunktion totuusehdon. Huomaa, että se muistuttaa Tarskin totuusmääritelmää disjunktiolle sovellettuna tiimeihin. Näin ollen sitä kutsutaan joskus myös klassiseksi disjunktioksi tiimisemantiikalle.

Lause 3.12. *Oletetaan, että $\varphi, \psi \in \mathrm{EXF}_L$ ja z_1 sekä z_2 ovat muuttujia, siten että $z_1, z_2 \notin \mathrm{Fr}(\varphi) \cup \mathrm{Fr}(\psi)$. Nyt on voimassa:*

$$\mathcal{M} \vDash_X \varphi \sqcup \psi, \text{ joss } \mathcal{M} \vDash_X \varphi \text{ tai } \mathcal{M} \vDash_X \psi.$$

Todistus. Ekvivalenssi pätee triviaalisti jos $X = \emptyset$, joten voidaan olettaa, että $X \neq \emptyset$. Merkitään:

$$\theta := \quad {=}(z_1) \wedge {=}(z_2) \wedge ((z_1 = z_2 \wedge \varphi) \vee (z_1 \neq z_2 \wedge \psi))$$

Oletetaan ensin, että pätee $\mathcal{M} \vDash_X \varphi \sqcup \psi$. Näin ollen on olemassa osatiimit $Y, Y' \subseteq X$, siten että $Y \cup Y' = X$, $\mathcal{M} \vDash_Y \forall z_1 \forall z_2\, (z_1 = z_2) \wedge (\varphi \vee \psi)$ ja $\mathcal{M} \vDash_{Y'} \exists^{\mathrm{s}} z_1 \exists^{\mathrm{s}} z_2\, ({=}(z_1) \wedge {=}(z_2) \wedge ((z_1 = z_2 \wedge \varphi) \vee (z_1 \neq z_2 \wedge \psi)))$.

Oletetaan ensin, että $Y \neq \emptyset$. Koska nyt $\mathcal{M} \vDash_Y \forall z_1 \forall z_2\, (z_1 = z_2)$, niin täytyy olla että $|M| = 1$. Koska lisäksi $X \neq \emptyset$, niin lemman 2.1 nojalla $|X| = 1$, eli $X = \{s\}$ jollain tulkintafunktiolla s. Koska $Y \neq \emptyset$, niin täytyy olla, että $Y = \{s\}$. Tällöin $\mathcal{M} \vDash_{\{s\}} \varphi \vee \psi$, joten $\mathcal{M} \vDash_{\{s\}} \varphi$ tai $\mathcal{M} \vDash_{\{s\}} \psi$. Siis $\mathcal{M} \vDash_X \varphi$ tai $\mathcal{M} \vDash_X \psi$.

Oletetaan sitten, että $Y = \emptyset$, jolloin täytyy olla, että $Y' = X$. Tällöin $\mathcal{M} \vDash_X \exists^{\mathrm{s}} z_1 \exists^{\mathrm{s}} z_2\, \theta$, joten on olemassa kuvaukset:

$$\begin{cases} F_1 : X \to \mathcal{P}^*(M), \text{ s.e. } \mathcal{M} \vDash_{X[F_1/z_1]} \exists^{\mathrm{s}} z_2\, \theta \\ F_2 : X[F_1/z_1] \to \mathcal{P}^*(M), \text{ s.e. } \mathcal{M} \vDash_{X[F_1/z_1, F_1/z_2]} \theta \end{cases}$$

[5]Tämä nimitys tulee siitä, että kyseisen disjunktion totuusmääritelmä vastaa disjunktion totuusmääritelmää intuitionistisessa tiimilogiikassa [1].

Merkitään $X' := X[F_1/z_1, F_1/z_2]$. Nyt $\mathcal{M} \vDash_{X'} (z_1 = z_2 \wedge \varphi) \vee (z_1 \neq z_2 \wedge \psi)$, joten on olemassa $Z, Z' \subseteq X'$, siten että $Z \cup Z' = X'$, $\mathcal{M} \vDash_Z z_1 = z_2 \wedge \varphi$ ja $\mathcal{M} \vDash_{Z'} z_1 \neq z_2 \wedge \psi$. Koska $\mathcal{M} \vDash_{X'} {=}(z_1)$, $\mathcal{M} \vDash_{X'} {=}(z_2)$ ja $X \neq \emptyset$, niin $|X'(z_1)| = 1$ ja $|X'(z_2)| = 1$. Siis on olemassa alkiot $a, b \in M$, siten että $X'(z_1) = \{a\}$ ja $X'(z_2) = \{b\}$.

Mikäli $a = b$, niin $s(z_1) = s(z_2)$ kaikilla $s \in X'$. Tällöin täytyy olla, että $Z' = \emptyset$, jolloin $Z = X'$ ja edelleen $\mathcal{M} \vDash_{X'} \varphi$. Mikäli taas $a \neq b$, niin $s(z_1) \neq s(z_2)$ kaikilla $s \in X'$. Tällöin täytyy olla, että $Z = \emptyset$, jolloin $Z' = X'$ ja edelleen $\mathcal{M} \vDash_{X'} \psi$. Näin ollen joka tapauksessa $\mathcal{M} \vDash_{X'} \varphi$ tai $\mathcal{M} \vDash_{X'} \psi$.

Oletuksen nojalla $z_1, z_2 \notin \mathrm{Fr}(\varphi) \cup \mathrm{Fr}(\psi)$ ja $\mathrm{dom}(X') = \mathrm{dom}(X) \cup \{z_1, z_2\}$, joten selvästi $X \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi) = X' \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi)$ ja $X \upharpoonright \mathrm{Fr}(\psi) = X' \upharpoonright \mathrm{Fr}(\psi)$. Näin ollen lemman 3.3 nojalla pätee, että $\mathcal{M} \vDash_X \varphi$ tai $\mathcal{M} \vDash_X \psi$.

Oletetaan sitten, että $\mathcal{M} \vDash_X \varphi$ tai $\mathcal{M} \vDash_X \psi$. Mikäli pätee, että $|M| = 1$, niin $\mathcal{M} \vDash_X \forall z_1 \forall z_2 \, (z_1 = z_2)$. Nyt selvästi myös $\mathcal{M} \vDash_X \varphi \vee \psi$, joten $\mathcal{M} \vDash_X \varphi \sqcup \psi$. Oletetaan sitten, että $|M| \geq 2$. Tällöin on olemassa alkiot $a, b \in M$, siten että $a \neq b$. Oletetaan ensin, että $\mathcal{M} \vDash_X \varphi$. Määritellään kuvaukset:

$$\begin{cases} F_1 : X \to \mathcal{P}^*(M), \text{ s.e. } s \mapsto \{a\} \text{ jokaisella } s \in X \\ F_2 : X[F_1/z_1] \to \mathcal{P}^*(M), \text{ s.e. } s \mapsto \{a\} \text{ jokaisella } s \in X[F_1/z_1] \end{cases}$$

Merkitään $X' := X[F_1/z_1, F_1/z_2]$. Kuvausten F_1 ja F_2 määritelmien nojalla selvästi $\mathcal{M} \vDash_{X'} {=}(z_1)$, $\mathcal{M} \vDash_{X'} {=}(z_2)$ ja $\mathcal{M} \vDash_{X'} z_1 = z_2$. Oletuksen nojalla $z_1, z_2 \notin \mathrm{Fr}(\varphi) \cup \mathrm{Fr}(\psi)$ ja lisäksi $\mathrm{dom}(X') = \mathrm{dom}(X) \cup \{z_1, z_2\}$, joten $X \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi) = X' \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi)$. Täten lemman 3.3 nojalla pätee, että $\mathcal{M} \vDash_{X'} \varphi$. Näin ollen $\mathcal{M} \vDash_{X'} z_1 = z_2 \wedge \varphi$ ja edelleen $\mathcal{M} \vDash_X \exists^{\mathrm{s}} z_1 \exists^{\mathrm{s}} z_2 \, \theta$.

Oletetaan sitten, että $\mathcal{M} \vDash_X \psi$. Määritellään nyt kuvaukset:

$$\begin{cases} F_1 : X \to \mathcal{P}^*(M), \text{ s.e. } s \mapsto \{a\} \text{ jokaisella } s \in X \\ F_2 : X[F_1/z_1] \to \mathcal{P}^*(M), \text{ s.e. } s \mapsto \{b\} \text{ jokaisella } s \in X[F_1/z_1] \end{cases}$$

Merkitään $X' := X[F_1/z_1, F_1/z_2]$. Kuvausten F_1 ja F_2 määritelmien nojalla selvästi $\mathcal{M} \vDash_{X'} {=}(z_1)$, $\mathcal{M} \vDash_{X'} {=}(z_2)$ ja $\mathcal{M} \vDash_{X'} z_1 \neq z_2$. Vastaavin perustein kuin edellä nyt pätee, että $\mathcal{M} \vDash_{X'} \psi$. Näin ollen $\mathcal{M} \vDash_{X'} z_1 \neq z_2 \wedge \psi$ ja edelleen $\mathcal{M} \vDash_X \exists^{\mathrm{s}} z_1 \exists^{\mathrm{s}} z_2 \, \theta$. On siis osoitettu, että joka tapauksessa pätee, että $\mathcal{M} \vDash_X \exists^{\mathrm{s}} z_1 \exists^{\mathrm{s}} z_2 \, \theta$. Näin ollen $\mathcal{M} \vDash_X \varphi \sqcup \psi$. □

Intuitionistisen disjunktion avulla voimme määritellä uuden hyödyllisen kvanttorin EXF-logiikalle. Kutsumme sitä *universaali-inkluusiokvanttoriksi* EXF-*logiikalle* ja käytämme sille merkintää $(\forall x \subseteq^{\mathrm{e}} t)$. Yläindeksi e tulee sanasta ekskluusio huomiona sille, että näin määriteltynä tämä kvanttori ei toimi mielekkäällä tavalla yhdistetylle INF- ja EXF-logiikalle, jota käsittelemme seuraavassa kappaleessa.

Määritelmä 3.13. Olkoot $\varphi \in \mathrm{EXF}_L$, $t \in \mathrm{T}_L$ ja u, y ovat eri muuttujia, siten että $u, y \notin \mathrm{Vr}(t) \cup \mathrm{Fr}(\varphi) \cup \{x\}$. Käytetään seuraavaa lyhennysmerkintää:

$$(\forall\, x \subseteq^{\mathrm{e}} t)\, \varphi := \delta^u_t\Big[\forall\, x\, \varphi \sqcup \forall\, x\, (\exists^{\mathrm{s}}\, y \mid u)(x = y \vee \varphi)\Big]$$

Tämän määrittelemämme kvanttorin totuusehtojen todistamisessa tarvitsemme seuraavaa lemmaa. Se muistuttaa läheisesti lemmaa 3.4 ja voidaankin todistaa sen erikoistapauksena:

Lemma 3.13. *Oletetaan, että* $A \subseteq M$*,* $\psi \in \mathrm{EXF}_L$*,* $t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{T}_L$ *ja* $u_1, \ldots, u_n$ *ovat eri muuttujia, siten että* $u_1, \ldots, u_n \notin \mathrm{Vr}(t_1, \ldots, t_n) \cup \mathrm{Fr}(\psi)$*. Merkitään* $\delta := \delta^{u_1 \ldots u_n}_{t_1 \ldots t_n}$*. Tällöin on voimassa:*

$$\mathcal{M} \vDash_{X[A/x]} \psi, \text{ joss } \mathcal{M} \vDash_{(\delta[X])[A/x]} \psi.$$

Todistus. Mikäli $A = \emptyset$, niin väite pätee triviaalisti, joten voidaan olettaa, että $A \neq \emptyset$. Määritellään kuvaukset $F : X \to \mathcal{P}^*(M)$ ja $F' : \delta[X] \to \mathcal{P}^*(M)$, siten että $s \mapsto A$ kaikilla $s \in X$ ja $s \in \delta[X]$. Nyt $X[F/x] = X[A/x]$, $(\delta[X])[F'/x] = (\delta[X])[A/x]$ ja $F(s) = F'(\delta[s])$ jokaisella $s \in X$. Näin ollen väite seuraa lemmasta 3.4. □

Nyt voimme todistaa totuusehdon kvanttorille $(\forall\, x \subseteq^{\mathrm{e}} t)$. Huomaa, että todistuksessa pitää vedota siihen, että EXF-logiikka on alaspäin suljettu.

Lause 3.14. *Olkoot* $\varphi \in \mathrm{EXF}_L$*,* $t \in \mathrm{T}_L$ *ja* u, y *ovat eri muuttujia, siten että* $u, y \notin \mathrm{Vr}(t) \cup \mathrm{Fr}(\varphi) \cup \{x\}$*. Tällöin on voimassa:*

$$\mathcal{M} \vDash_X (\forall\, x \subseteq^e t)\, \varphi, \text{ joss } \mathcal{M} \vDash_{X'} \varphi, \text{ missä } X' = X\Big[X(t)/x\Big].$$

Todistus. Oletetaan ensin, että pätee $\mathcal{M} \vDash_X (\forall\, x \subseteq^{\mathrm{e}} t)\, \varphi$, eli määritelmän 3.13 nojalla $\mathcal{M} \vDash_X \delta[\forall\, x\, \varphi \sqcup \forall\, x\, (\exists^{\mathrm{s}}\, y \mid u)(x = y \vee \varphi)]$. Edelleen lemman 3.2 nojalla $\mathcal{M} \vDash_{\delta[X]} \forall\, x\, \varphi \sqcup \forall\, x\, (\exists^{\mathrm{s}}\, y \mid u)(x = y \vee \varphi)$. Tällöin lauseen 3.12 nojalla $\mathcal{M} \vDash_{\delta[X]} \forall\, x\, \varphi$ tai $\mathcal{M} \vDash_{\delta[X]} \forall\, x\, (\exists^{\mathrm{s}}\, y \mid u)(x = y \vee \varphi)$.

Mikäli pätee, että $\mathcal{M} \vDash_{\delta[X]} \forall\, x\, \varphi$, niin $\mathcal{M} \vDash_{(\delta[X])[M/x]} \varphi$. Koska selvästi pätee, että $(\delta[X])[\delta[X](u)/x] \subseteq (\delta[X])[M/x]$, niin tällöin lauseen 3.10 nojalla $\mathcal{M} \vDash_{(\delta[X])[\delta[X](u)/x]} \varphi$. Koska lemman 3.2 nojalla $\delta[X](u) = X(t)$, niin pätee, että $\mathcal{M} \vDash_{(\delta[X])[X(t)/x]} \varphi$. Oletuksen nojalla muuttuja $u \notin \mathrm{Vr}(t) \cup \mathrm{Fr}(\varphi)$, joten lemman 3.13 nojalla $\mathcal{M} \vDash_{X[X(t)/x]} \varphi$.

Oletetaan sitten, että pätee $\mathcal{M} \vDash_{\delta[X]} \forall\, x\, (\exists^{\mathrm{s}}\, y \mid u)(x = y \vee \varphi)$. Näin ollen $\mathcal{M} \vDash_{X_1} (\exists^{\mathrm{s}}\, y \mid u)(x = y \vee \varphi)$, missä $X_1 := (\delta[X])[M/x]$. Siis on olemassa $F : X_1 \to \mathcal{P}^*(\overline{X_1(u)})$, siten että $\mathcal{M} \vDash_{X_2} x = y \vee \varphi$, missä $X_2 = X_1[F/y]$. Näin ollen on olemassa osatiimit $Z, Z' \subseteq X_2$, siten että $Z \cup Z' = X_2$, $\mathcal{M} \vDash_Z x = y$ ja $\mathcal{M} \vDash_{Z'} \varphi$.

Osoitetaan, että $(\delta[X])[\delta[X](u)/x] \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi) \subseteq Z' \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi)$: Valitaan mielivaltainen tulkintafunktio $r^* \in (\delta[X])[\delta[X](u)/x] \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi)$. Näin ollen on olemassa $r \in (\delta[X])[\delta[X](u)/x]$, siten että $r^* = r \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi)$.

Edelleen on olemassa $s \in \delta[X]$ ja $a \in \delta[X](u)$, siten että $r = s[a/x]$. Koska $a \in \delta[X](u)$, niin on olemassa $s' \in \delta[X]$, siten että $s'(u) = a$. Merkitään nyt $r' := s'[a/x]$, jolloin $r' \in X_1$. Koska x ja u ovat eri muuttujia, niin $r'(u) = s'(u)$. Näin ollen siis $a = r'(u)$, joten $a \in X_1(u)$.

Valitaan jokin $b \in F(r)$ ja merkitään $q := r[b/y]$. Koska $F(r) \subseteq \overline{X_1(u)}$, niin $b \notin X_1(u)$, jolloin erityisesti $b \neq a$. Koska x ja y ovat eri muuttujia, niin $q(x) = r(x)$. Näin ollen

$$q(x) = r(x) = s[a/x](x) = a \neq b = r[b/y](y) = q(y).$$

Täten $\mathcal{M} \nvDash_q x = y$, joten $q \notin Z$. Täytyy siis olla, että $q \in Z'$. Koska tulkintafunktiot r ja q voivat erota toisistaan ainoastaan muuttujan y tulkinnan osalta ja $y \notin \mathrm{Fr}(\varphi)$, niin $q \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi) = r \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi) = r^*$. Täten $r^* \in Z' \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi)$. On osoitettu siis, että $(\delta[X])[\delta[X](u)/x] \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi) \subseteq Z' \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi)$.

Koska $\mathcal{M} \vDash_{Z'} \varphi$, niin lemman 3.3 seurauksena $\mathcal{M} \vDash_{Z' \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi)} \varphi$. Koska lisäksi $(\delta[X])[\delta[X](u)/x] \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi) \subseteq Z' \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi)$, niin lauseen 3.10 nojalla $\mathcal{M} \vDash_{(\delta[X])[\delta[X](u)/x] \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi)} \varphi$. Edelleen lemman 3.3 nojalla $\mathcal{M} \vDash_{(\delta[X])[\delta[X](u)/x]} \varphi$. Koska lemman 3.2 nojalla $\delta[X](u) = X(t)$, niin pätee, että $\mathcal{M} \vDash_{(\delta[X])[X(t)/x]} \varphi$. Oletuksen nojalla muuttuja $u \notin \mathrm{Vr}(t) \cup \mathrm{Fr}(\varphi)$, joten lemman 3.13 nojalla $\mathcal{M} \vDash_{X[X(t)/x]} \varphi$.

Oletetaan sitten, että $\mathcal{M} \vDash_{X[X(t)/x]} \varphi$. Mikäli $X(t) = M$, niin $\mathcal{M} \vDash_{X[M/x]} \varphi$. Koska $u \notin \mathrm{Vr}(t) \cup \mathrm{Fr}(\varphi)$, niin lemman 3.13 nojalla pätee, että $\mathcal{M} \vDash_{(\delta[X])[M/x]} \varphi$, eli $\mathcal{M} \vDash_{\delta[X]} \forall x\, \varphi$. Tällöin $\mathcal{M} \vDash_{\delta[X]} \forall x\, \varphi \sqcup \forall x\, (\exists^{\mathrm{s}} y \mid u)(x = y \vee \varphi)$, ja edelleen lemman 3.2 nojalla $\mathcal{M} \vDash_X (\forall x \subseteq^{\mathrm{e}} t)\, \varphi$.

Oletetaan sitten, että $X(t) \neq M$, jolloin on olemassa alkio $c \in \overline{X(t)}$. Koska lemman 3.2 nojalla $X(t) = \delta[X](u)$, niin $c \notin \delta[X](u)$. Merkitään nyt $X_1 = (\delta[X])[M/x]$. Koska x ja u ovat eri muuttujia, niin $c \notin X_1(u)$. Määritellään kuvaus:

$$F : X_1 \to \mathcal{P}^*(M), \text{ s.e. } \begin{cases} s \mapsto \{s(x)\}, \text{ jos } s(x) \in \overline{X_1(u)} \\ s \mapsto \{c\}, \text{ muuten} \end{cases}$$

Merkitään $X_2 := X_1[F/y]$. Määritellään joukot $Z = \{s \in X_2 \mid s(x) \notin X_1(u)\}$ ja $Z' = \{s \in X_2 \mid s(x) \in X_1(u)\}$. Nyt selvästi $Z \cup Z' = X_2$.

Valitaan mielivaltainen $r \in Z$, jolloin $r(x) \notin X_1(u)$. Koska $Z \subseteq X_1[F/y]$, niin on olemassa $s \in X_1$ ja $a \in F(s)$, siten että $r = s[a/y]$. Koska x ja y ovat eri muuttujia, niin pätee, että $s(x) = r(x)$. Näin ollen $s(x) \notin X_1(u)$, eli $s(x) \in \overline{X_1(u)}$. Kuvauksen F määritelmän nojalla täytyy olla, että $a = s(x)$. Tällöin pätee, että

$$r(x) = s(x) = a = s[a/y](y) = r(y).$$

Näin ollen $\mathcal{M} \vDash_r x = y$, ja koska $r \in Z$ oli mielivaltaisesti valittu, niin on voimassa, että $\mathcal{M} \vDash_Z x = y$.

Osoitetaan, sitten että $Z' \restriction \mathrm{Fr}(\varphi) \subseteq (\delta[X])[\delta[X](u)/x] \restriction \mathrm{Fr}(\varphi)$: Valitaan mielivaltainen $r^* \in Z' \restriction \mathrm{Fr}(\varphi)$. Näin ollen on olemassa $r \in Z'$, siten että $r^* = r \restriction \mathrm{Fr}(\varphi)$. Koska $Z' \subseteq X_2 = X_1[F/y]$, niin on olemassa $s \in X_1$ ja $a \in F(s)$, siten että $r = s[a/y]$. Tiimin Z' määritelmän nojalla $r(x) \in X_1(u)$. Koska x ja u ovat eri muuttujia, niin $\delta[X](u) = X_1(u)$ ja koska x ja y ovat eri muuttujia, niin $s(x) = r(x)$. Näin ollen $s(x) \in \delta[X](u)$.

Koska $s \in (\delta[X])[M/x]$ ja $s(x) \in \delta[X](u)$, niin $s \in (\delta[X])[\delta[X](u)/x]$. Tulkintafunktiot s ja r voivat erota ainoastaan muuttujan y tulkinnan osalta, joten $s \restriction \mathrm{Fr}(\varphi) = r \restriction \mathrm{Fr}(\varphi) = r^*$. Näin ollen $r^* \in (\delta[X])[\delta[X](u)/x] \restriction \mathrm{Fr}(\varphi)$. On osoitettu siis, että $Z' \restriction \mathrm{Fr}(\varphi) \subseteq (\delta[X])[\delta[X](u)/x] \restriction \mathrm{Fr}(\varphi)$. Osajoukkous pätee itse asiassa myös toiseen suuntaan, mutta sitä ei ole tarpeen osoittaa.

Oletuksen nojalla $\mathcal{M} \vDash_{X[X(t)/x]} \varphi$ ja $u \notin \mathrm{Vr}(t) \cup \mathrm{Fr}(\varphi)$, joten lemman 3.13 nojalla $\mathcal{M} \vDash_{(\delta[X])[X(t)/x]} \varphi$. Lisäksi lemman 3.2 nojalla $X(t) = \delta[X](u)$, joten $\mathcal{M} \vDash_{(\delta[X])[\delta[X](u)/x]} \varphi$, ja edelleen lemman 3.3 nojalla $\mathcal{M} \vDash_{(\delta[X])[\delta[X](u)/x] \restriction \mathrm{Fr}(\varphi)} \varphi$. Osoitimme, että $Z' \restriction \mathrm{Fr}(\varphi) \subseteq (\delta[X])[\delta[X](u)/x] \restriction \mathrm{Fr}(\varphi)$, joten lauseen 3.10 nojalla $\mathcal{M} \vDash_{Z' \restriction \mathrm{Fr}(\varphi)} \varphi$. Edelleen lemman 3.3 nojalla $\mathcal{M} \vDash_{Z'} \varphi$.

On osoitettu siis, että $\mathcal{M} \vDash_{X_2} x = y \vee \varphi$. Kuvauksen F määritelmän nojalla selvästi $\mathrm{im}(F) \subseteq \mathcal{P}^*(\overline{X_1(u)})$, joten $\mathcal{M} \vDash_{X_1} (\exists^{\mathrm{s}} y \mid u)(x = y \vee \varphi)$. Näin ollen on voimassa, että $\mathcal{M} \vDash_{\delta[X]} \forall x\, (\exists^{\mathrm{s}} y \mid u)(x = y \vee \varphi)$ ja edelleen pätee, että $\mathcal{M} \vDash_{\delta[X]} \forall x\, \varphi \sqcup \forall x\, (\exists^{\mathrm{s}} y \mid u)(x = y \vee \varphi)$. Tällöin lemman 3.2 nojalla $\mathcal{M} \vDash_X (\forall x \subseteq^{\mathrm{e}} t)\, \varphi$. □

Tuntuisi luontevalta, että voisimme määritellä INF-logiikalle symmetrisesti kvanttorin $(\forall x \mid^{\mathrm{i}} t)$ sille luonnollisella totuusmääritelmällä. Tämä ei kuitenkaan onnistu samalla menetelmällä, sillä inkluusiologiikka ei ole alaspäin suljettu. Sekä kvanttori $(\forall x \mid t)$ että kvanttori $(\forall x \subseteq t)$ on kuitenkin mahdollista määritellä yleisesti käyttämällä sekä inkluusio- että ekskluusiokvanttoreita. Palaamme tähän aiheeseen kappaleessa 3.4.

3.2.5 Esimerkkejä EXF-logiikan ilmaisukyvystä

Seuraavassa esimerkissä nähdään miten kvanttoria $(\forall x \subseteq^{\mathrm{e}} t)$ voidaan käyttää tehokkaasti EXF-logiikassa. Se on samalla myös esimerkki EXF_L-lauseesta, jota ei voi ilmaista ensimmäisen kertaluvun logiikalla.

Esimerkki 3.10. Oletetaan, että $\mathcal{G} = (V, E)$ on suuntaamaton graafi ja x, y_1, y_2, z_1, z_2 ovat eri muuttujia. Graafi $\mathcal{G}$ on kaksijakoinen[6], jos ja vain jos

$$\mathcal{G} \vDash \forall x\, \exists^{\mathrm{s}} y_1 (\exists^{\mathrm{s}} y_2 \mid y_1)\Big((x = y_1 \vee x = y_2) \wedge (\forall z_1 \subseteq^{\mathrm{e}} y_1)(\forall z_2 \subseteq^{\mathrm{e}} y_1)\neg E z_1 z_2 \\ \wedge (\forall z_1 \subseteq^{\mathrm{e}} y_2)(\forall z_2 \subseteq^{\mathrm{e}} y_2)\neg E z_1 z_2\Big).$$

[6]Tämän määritelmän mukaan graafi pitää pystyä jakamaan kahteen erilliseen epätyhjään osajoukkoon, joiden välillä ei ole särmiä. Mikäli haluaisimme määritellä myös yhden solmun graafin kaksijakoiseksi, se voidaisiin käsitellä omana erikoistapauksenaan.

Todistus. Merkitään

$$\begin{cases} \psi_1 := (\forall\, z_1 \subseteq^{\mathrm{e}} y_1)(\forall\, z_2 \subseteq^{\mathrm{e}} y_1)\neg E z_1 z_2 \\ \psi_2 := (\forall\, z_1 \subseteq^{\mathrm{e}} y_2)(\forall\, z_2 \subseteq^{\mathrm{e}} y_2)\neg E z_1 z_2 \end{cases}$$

Oletetaan ensin, että $\mathcal{G} \vDash \forall\, x\, \exists^{\mathrm{s}}\, y_1(\exists^{\mathrm{s}}\, y_2 \mid y_1)((x = y_1 \vee x = y_2) \wedge \psi_1 \wedge \psi_2)$. Näin ollen pätee $\mathcal{G} \vDash_X \exists^{\mathrm{s}}\, y_1(\exists^{\mathrm{s}}\, y_2 \mid y_1)((x = y_1 \vee x = y_2) \wedge \psi_1 \wedge \psi_2)$, missä $X = \{\emptyset\}[V/x]$. Siis on olemassa kuvaukset:

$$\begin{cases} F_1 : X \to \mathcal{P}^*(V), \text{ s.e. } \mathcal{G} \vDash_{X_1} (\exists^{\mathrm{s}}\, y_2 \mid y_1)((x = y_1 \vee x = y_2) \wedge \psi_1 \wedge \psi_2), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{missä } X_1 := X[F_1/y_1]. \\ F_2 : X_1 \to \mathcal{P}^*(\overline{X_1(y_1)}), \text{ s.e. } \mathcal{G} \vDash_{X_2} (x = y_1 \vee x = y_2) \wedge \psi_1 \wedge \psi_2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{missä } X_2 := X[F_2/y_2]. \end{cases}$$

Merkitään $A := X_2(y_1)$ ja $B := X_2(y_2)$. Nyt selvästi $A, B \neq \emptyset$.

Osoitetaan ensin, että $A \cup B = V$: Valitaan mielivaltainen $a \in V$. Tällöin $s := \{(x, a)\} \in X$. Valitaan jokin $b_1 \in F_1(s)$ sekä $b_2 \in F_2(s)$ ja merkitään $r := s[b_1/y_1]$ sekä $q := r[b_2/y_2]$. Tällöin selvästi $r \in X_1$ ja $q \in X_2$. Koska $\mathcal{G} \vDash_{X_2} x = y_1 \vee x = y_2$, niin on olemassa $Y, Y' \subseteq X_2$, siten että $Y \cup Y' = X_2$, $\mathcal{G} \vDash_Y x = y_1$ ja $\mathcal{G} \vDash_{Y'} x = y_2$. Nyt $q \in Y$ tai $q \in Y'$. Mikäli $q \in Y$, niin $q(x) = q(y_1)$. Tällöin

$$a = s(x) = q(x) = q(y_1) = b_1.$$

Koska $b_1 = r(y_1)$, niin $a \in X_1(y_1) = X_2(y_1) = A$. Vastaavanlaisin perusteluin jos $q \in Y'$, niin $a \in B$. Näin ollen $V \subseteq A \cup B$. Koska selvästi $A \cup B \subseteq V$, niin $A \cup B = V$.

Osoitetaan, sitten että $A \cap B = \emptyset$: Tehdään vastaoletus, että on olemassa $a \in A \cap B$. Siis on olemassa $r, r' \in X_2$, siten että $r_1(y_1) = a$ ja $r_2(y_2) = a$. Edelleen on olemassa $s_1, s_2 \in X_1$ ja $\underline{a' \in F}(s_1)$, siten että $r_1 = s_1[a'/y_2]$ ja $r_2 = s_2[a/y_2]$. Nyt koska $F_2(s_2) \subseteq \overline{X_1(y_1)}$, niin $a \notin X_1(y_1)$. Mutta koska $s_1(y_1) = r_1(y_1)$, niin $a \in X_1(y_1)$. Tämä on ristiriita, joten $A \cap B = \emptyset$.

Osoitetaan sitten, että jos $a, b \in A$, niin a:n ja b:n välillä ei ole särmää: Koska $\mathcal{G} \vDash_{X_2} \psi_1$, niin lauseen 3.14 nojalla

$$\mathcal{G} \vDash_{X_2[X_2(y_1)/z_1]} (\forall\, z_2 \subseteq^{\mathrm{e}} y_1)\neg E z_1 z_2.$$

Käyttämällä lausetta 3.14 toistamiseen saadaan, että $\mathcal{G} \vDash_{X'} \neg E z_1 z_2$, missä $X' := X_2[X_2(y_1)/z_1, X_2(y_1)/z_2] = X_2[A/z_1, A/z_2]$. Valitaan jokin tulkintafunktio $s \in X_2$ ($\neq \emptyset$). Nyt kaikilla $a, b \in A$ pätee, että $s[a/z_1, b/z_2] \in X'$, jolloin $\mathcal{G} \vDash_{s[a/z_1, b/z_2]} \neg E z_1 z_2$, eli $(a, b) \notin E^{\mathcal{G}}$.

Vastaavasti voidaan päätellä, että koska $\mathcal{G} \vDash_{X_2} \psi_2$, niin kaikilla $a, b \in B$ pätee, että $(a, b) \notin E^{\mathcal{G}}$. On osoitettu siis, että epätyhjät joukot $A, B \subseteq V$, muodostavat solmujoukon V erillisen yhdisteen ja että niiden sisältämien solmujen välillä ei kulje yhtään särmää. Täten $\mathcal{G}$ on kaksijakoinen.

Oletetaan sitten, että $\mathcal{G}$ on kaksijakoinen. Siis on olemassa joukot $A, B \subseteq V$, siten että $A, B \neq \emptyset$, $A \cup B = V$, $A \cap B = \emptyset$ ja A:n B:n sisältämien solmujen välillä ei ole särmiä. Merkitään $X := \{\emptyset\}[V/x]$. Koska $A, B \neq \emptyset$, niin on olemassa alkiot $a_0 \in A$ ja $b_0 \in B$. Määritellään kuvaukset:

$$\begin{cases} F_1 : X \to \mathcal{P}^*(V), \text{ s.e. } \begin{cases} s \mapsto \{s(x)\}, \text{ jos } s(x) \in A \\ s \mapsto \{a_0\}, \text{ muuten} \end{cases} \\ F_2 : X[F_1/y_1] \to \mathcal{P}^*(V), \text{ s.e. } \begin{cases} s \mapsto \{s(x)\}, \text{ jos } s(x) \in B \\ s \mapsto \{b_0\}, \text{ muuten} \end{cases} \end{cases}$$

Merkitään $X_1 := X[F_1/y_1]$ ja $X_2 := X_1[F_2/y_2]$. Määritellään sitten tiimit $Y := \{s \in X_2 \mid s(x) = s(y_1)\}$ ja $Y' := \{s \in X_2 \mid s(x) = s(y_2)\}$. Osoitetaan, että $Y \cup Y' = X_2$: Tehdään vastaoletus, että on olemassa $q \in X_2$, siten että $q \notin Y$ ja $q \notin Y'$. Näin ollen $q(x) \neq q(y_1)$ ja $q(x) \neq q(y_2)$.

Tällöin on olemassa $r \in X_1$ ja $b \in F_2(r)$, siten että $q = r[b/y_2]$. Edelleen on olemassa $s \in X$ ja $a \in F_1(s)$, siten että $r = s[a/y_1]$. Koska x, y_1 ja y_2 ovat eri muuttujia, niin $s(x) = r(x) = q(x)$ ja $r(y_1) = q(y_1)$. Tällöin

$$s(x) = r(x) = q(x) \neq q(y_1) = r(y_1) = a.$$

Täten F_1:n määritelmän nojalla täytyy olla, että $s(x) \notin A$. Lisäksi

$$s(x) = r(x) = q(x) \neq q(y_2) = b.$$

Näin ollen F_2:n määritelmän nojalla täytyy olla, että $s(x) \notin B$. Tällöin siis $s(x) \notin A \cup B = V$, mikä on ristiriita. Täytyy siis olla, että $Y \cup Y' = X_2$. Lisäksi selvästi $\mathcal{G} \vDash_Y x = y_1$ ja $\mathcal{G} \vDash_{Y'} x = y_2$, joten $\mathcal{G} \vDash_{X_2} x = y_1 \vee x = y_2$.

Osoitetaan sitten, että $A = X_2(y_1)$: Jos $a \in A$, niin $s := \{(x, a)\} \in X$ ja F_1:n määritelmän nojalla tällöin $F_1(s) = \{a\}$, jolloin $r := s[a/y_1] \in X_1$. Koska y_1 ja y_2 ovat eri muuttujia, niin $X_1(y_1) = X_2(y_1)$. Täten $A \subseteq X_2(t_1)$. Toisaalta F_1:n määritemän nojalla $\mathrm{im}(F_1) \subseteq \mathcal{P}(A)$, joten $X_1(y_1) \subseteq A$. Koska lisäksi $X_1(y_1) = X_2(y_1)$, niin $X_2(y_1) \subseteq A$. Näin ollen $A = X_2(y_1)$. Vastaavin perustein $B = X_2(y_2)$.

Koska kaikilla $a, b \in A$ pätee $(a, b) \notin E^{\mathcal{G}}$, niin kaikilla $a, b \in X_2(y_1)$ ja $s \in X_2$ pätee $\mathcal{G} \vDash_{s[a/z_1, b/z_2]} \neg E z_1 z_2$. Näin ollen pätee, että $\mathcal{G} \vDash_{X'} \neg E z_1 z_2$, missä $X' := X_2[X_2(y_1)/z_1, X_2(y_1)/z_2]$. Täten lauseen 3.14 nojalla

$$\mathcal{G} \vDash_{X_2[X_2(y_1)/z_1]} (\forall\, z_2 \subseteq^{\mathrm{e}} y_1) \neg E z_1 z_2.$$

Edelleen lauseen 3.14 nojalla $\mathcal{G} \vDash_{X_2} \psi_1$. Samoin minkään solmujen $a, b \in B$ välillä ei ole särmää, joten voidaan päätellä vastaavasti, että $\mathcal{G} \vDash_{X_2} \psi_2$. On osoitettu siis, että

$$\mathcal{G} \vDash_{X_2} (x = y_1 \vee x = y_2) \wedge \psi_1 \wedge \psi_2.$$

Kuvauksen F_2 määritelmän nojalla pätee selvästi, että $\mathrm{im}(F_2) \subseteq \mathcal{P}^*(B)$. Koska oletuksen nojalla $A \cap B = \emptyset$, niin $\mathrm{im}(F_2) \subseteq \mathcal{P}^*(\overline{A}) = \mathcal{P}^*(\overline{X_1(y_1)})$. Täten $\mathcal{G} \vDash_{X_1} (\exists^{\mathrm{s}} y_2 \mid y_1)((x = y_1 \vee x = y_2) \wedge \psi_1 \wedge \psi_2)$ ja edelleen on voimassa, että $\mathcal{G} \vDash_X \exists^{\mathrm{s}} y_1 (\exists^{\mathrm{s}} y_2 \mid y_1)((x = y_1 \vee x = y_2) \wedge \psi_1 \wedge \psi_2)$. Näin ollen

$$\mathcal{G} \vDash \forall x \, \exists^{\mathrm{s}} y_1 (\exists^{\mathrm{s}} y_2 \mid y_1)\Big((x = y_1 \vee x = y_2) \wedge \psi_1 \wedge \psi_2\Big).$$

□

Edellistä esimerkkiä voidaan helposti yleistää myös k-jakoisille graafeille, käyttämällä apuna ekskluusiokvantifiointia termijoukon suhteen:

Esimerkki 3.11. Graafi $\mathcal{G} = (V, E)$ on k-jakoinen[7], jos ja vain jos

$$\begin{aligned}\mathcal{G} \vDash \forall x \, \exists^{\mathrm{s}} y_1 (\exists^{\mathrm{s}} y_2 \mid y_1)(\exists^{\mathrm{s}} y_3 \mid y_1 \cup y_2) \dots (\exists^{\mathrm{s}} y_k \mid y_1 \cup \dots \cup y_{k-1}) \\ \Big(\bigvee_{i=1}^{k} x = y_i \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} (\forall z_1 \subseteq^{\mathrm{e}} y_i)(\forall z_2 \subseteq^{\mathrm{e}} y_i) \neg E z_1 z_2\Big).\end{aligned}$$

Samaan tapaan kuin esimerkissä 3.10, tämä lause ilmaisee että graafi $\mathcal{G}$ voidaan jakaa erillisiin epätyhjiin osajoukkoihin, joita on nyt k kappaletta. Näiden osajoukkojen erillisyys taataan käyttämällä ekskluusiokvantifiointia termijoukon suhteen. Lisäksi kaavan loppuosa sanoo kuten esimerkissä 3.10, että minkään osajoukon sisäisten solmujen välillä ei ole särmiä.

Esimerkkiin 3.11 liittyen voidaan tehdä eräs mielenkiintoinen huomio. Graafin k-jakoisuus on sama ominaisuus kuin graafin solmujen k-värittyvyys. Kun $k = 3$, niin tämä on NP-täydellinen ongelma [15]. Täten EXF-logiikalla voidaan siis ilmaista NP-täydellisiä ongelmia.

Muokkaamalla hieman esimerkkiä 3.10 voimme ilmaista EXF-logiikalla myös graafien epäyhtenäisyyden:

Esimerkki 3.12. Graafi $\mathcal{G} = (V, E)$ epäyhtenäinen, jos ja vain jos

$$\mathcal{G} \vDash \forall x \, \exists^{\mathrm{s}} y_1 (\exists^{\mathrm{s}} y_2 \mid y_1)\Big((x = y_1 \vee x = y_2) \wedge (\forall z_1 \subseteq^{\mathrm{e}} y_1)(\forall z_2 \subseteq^{\mathrm{e}} y_2) \neg E z_1 z_2\Big).$$

Vastaavasti kuin esimerkissä 3.10, tämä lause ilmaisee että graafin $\mathcal{G}$ solmujoukko voidaan jakaa kahdeen erilliseen epätyhjään osajoukkoon. Kaavan loppuosa sanoo lisäksi, että näiden osajoukkojen solmujen välillä ei ole särmiä. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että graafi $\mathcal{G}$ on epäyhtenäinen.

Edellä mainituissa esimerkeissä olleet graafin ominaisuudet ovat kaikki sellaisia, että niitä ei ole mahdollista ilmaista ensimmäisen kertaluvun logiikalla. Tämä voidaan helposti perustella Ehrenfeucht-Fraïssé -pelin avulla (samaan tapaan kuin esimerkit lähteessä [15, s. 37-39]). Saamme näin ollen seurauksena seuraavan lauseen.

[7]Kuten kaksijakoisen graafin tapauksessa tässä määritelmässä vaaditaan, että graafi pitää pystyä jakamaan erillisiin epätyhjiin osajoukkoihin, joita on k kappaletta. Mikäli myös graafit, joissa on alle k solmua haluttaisiin määritellä k-jakoisiksi, ne voitaisiin käsitellä omana erikoistapauksenaan.

Lause 3.15. EXF*-logiikka on ilmaisuvoimaltaan aidosti vahvempi kuin ensimmäisen kertaluvun logiikka sekä kaavojen että lauseiden tasolla.*

Todistus. Graafin kaksijakoisuus ei ole määriteltävissä ensimmäisen kertaluvun logiikan lauseella, mutta esimerkin 3.10 nojalla tämä voidaan tehdä EXF-logiikassa. Näin ollen EXF-logiikka on lauseiden tasolla ilmaisuvoimaltaan aidosti vahvempi kuin ensimmäisen kertaluvun logiikka. Koska lauseet ovat kaavoja, niin sama pätee myös kaavoille. □

Esimerkin 3.11 yhteydessä totesimme, että EXF-logiikalla voidaan lisäksi ilmaista NP-täydellisiä ongelmia. Tämä ei kuitenkaan päde kaikille logiikoille, jotka ovat aidosti vahvempia kuin ensimmäisen kertaluvun logiikka. Käsittelemme EXF-logiikan ilmaisuvoimaa suhteessa muihin logiikoihin tarkemmin kappaleissa 4.2 sekä 4.4.

3.3 IEF-logiikka

Tässä kappaleessa esittelemme IEF-logiikan ('Inclusion-Exclusion Friendly Logic'), joka saadaan yhdistämällä INF- ja EXF- logiikat. Tällä logiikalla voidaan ilmaista kaikki se mitä INF- ja EXF-logiikoillakin, ja lisäksi monia muita hyödyllisiä operaatioita, joita käsittelemme tässä sekä seuraavassa kappaleessa. IEF-logiikan ilmaisuvoimaa tutkimme lisää kappaleessa 4.5.

3.3.1 IEF-logiikan syntaksi ja semantiikka

Yhdistämällä Gallianin inkluusio- ja ekskluusiologiikat saadaan *inkluusio-ekskluusiologiikka*, jota kutsumme myös INEX-logiikaksi. Sen syntaksi määritellään seuraavasti:

Määritelmä 3.14. Määritellään kieli INEX_L seuraavasti:

- Jos $\varphi \in \mathrm{INC}_L$ tai $\varphi \in \mathrm{EXC}_L$, niin $\varphi \in \mathrm{INEX}_L$.
- Jos $\varphi, \psi \in \mathrm{INEX}_L$, niin $(\varphi \wedge \psi) \in \mathrm{INEX}_L$ ja $(\varphi \vee \psi) \in \mathrm{INEX}_L$.
- Jos $\varphi \in \mathrm{INEX}_L$ ja x on muuttuja,
  niin $\exists^{\mathrm{s}} x\, \varphi \in \mathrm{INEX}_L$ ja $\forall x\, \varphi \in \mathrm{INEX}_L$.

Määrittelemme alikaavojen joukon sekä vapaiden muuttujien joukon vastaavasti kuin inkluusio- ja ekskluusiologiikoille.

Inkluusio- ja ekskluusioatomeille käytetään inkluusio-ekskluusiologiikassa samoja totuusmääritelmiä kuin inkluusio- ja ekskluusiologiikoissa. Käytämme merkintää INEX[k] inkluusio-ekskluusiologiikalle, jossa esiintyy korkeintaan k-paikkaisia inkluusio- ja ekskluusioatomeja. Määritellään seuraavaksi IEF-logiikan syntaksi, jossa sallitaan sekä inkluusio- että ekskluusiokvanttorien käyttö.

Määritelmä 3.15. Määritellään kieli IEF_L seuraavasti:

- Jos $\varphi \in \mathrm{INF}_L \cup \mathrm{EXF}_L$, niin $\varphi \in \mathrm{IEF}_L$.
- Jos $\varphi, \psi \in \mathrm{IEF}_L$, niin $(\varphi \wedge \psi) \in \mathrm{IEF}_L$ ja $(\varphi \vee \psi) \in \mathrm{IEF}_L$.
- Jos $\varphi \in \mathrm{IEF}_L$ ja x on muuttuja, niin $\exists^{\mathrm{s}} x\, \varphi \in \mathrm{IEF}_L$ ja $\forall x\, \varphi \in \mathrm{IEF}_L$.
- Jos $\varphi \in \mathrm{IEF}_L$, x on muuttuja ja $t \in \mathrm{T}_L$,
  niin $(\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)\, \varphi \in \mathrm{IEF}_L$ ja $(\exists^{\mathrm{s}} x \mid t)\, \varphi \in \mathrm{IEF}_L$.

Jos $\varphi \in \mathrm{IEF}_L$, niin sanotaan että φ on IEF_L*-kaava*. Määrittelemme alikaavojen joukon, vapaiden muuttujien joukon sekä semantiikan vastaavasti kuin INF- ja EXF-logiikoille.

Lauseessa 3.1 totesimme, että yksipaikkaiset inkluusioatomit voidaan ilmaista käyttämällä INF-logiikkaa. Vastaavasti lauseen 3.8 nojalla yksipaikkaiset ekskluusioatomit voidaan ilmaista EXF-logiikalla. Yhdistämällä nämä lauseet saamme, että IEF-logiikka on ilmaisuvoimaltaan vähintään yhtä vahva kuin INEX[1]-logiikka, ja voimme käyttää yksipaikkaisia inkluusio- ja ekskluusioatomeita lyhennysmerkintöinä IEF-logiikassa.

Esimerkki 3.13. Mikäli $X \neq \emptyset$, niin yksipaikkaisen inkluusioatomin $t_1 \subseteq t_2$ negaatio voidaan esittää helposti IEF_L-kaavalla:

$$\varphi := (\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t_1)(\exists^{\mathrm{s}} y \mid t_2)(x = y), \text{ missä } x \notin \mathrm{Vr}(t_2).$$

Voimme esittää tallennuskaavan $\delta[\varphi]$ määritelmän samalla tavalla, kun φ on IEF_L-kaava. Lisäksi IEF_L-kaavoille voidaan todistaa vastaavalla tavalla tallennuskaavoihin liittyvät lemmat 3.2, 3.4 ja 3.13. IEF-logiikassa voimme käyttää inkluusio- ja ekskluusiokvanttoreja myös termijoukoille lauseiden 3.5 ja 3.9 antamien totuusehtojen mukaisesti. Lisäksi voimme käyttää lyhennysmerkintöinä intuitionistista disjunktiota $\sqcup$ sekä vakioatomeita $=\!(t)$ kuten EXF-logiikassa.

Olemme aiemmin todenneet, että INF-logiikka ei ole alaspäin suljettu ja että EXF-logiikka ei ole suljettu yhdisteiden suhteen. Koska ne molemmat sisältyvät IEF-logiikkaan, niin IEF-logiikka ei ole alaspäin suljettu, eikä suljettu yhdisteiden suhteen. Samasta syystä lemman 2.3 ekvivalenssi ei päde kumpaankaan suuntaan IEF_L-kaavoille.

3.3.2 Inkluusio-ekskluusiokvantifiointi

Pohditaan seuraavaksi tilannetta, jossa haluaisimme vaatia kvantifioitavalta muuttujalta x, että sen arvot pitää valita jonkin termin t_1 arvojen joukosta ja lisäksi jonkun toisen termin t_2 arvojen ulkopuolelta.

Tarvitsemme tähän uuden kvanttorin, jolle on mielekästä käyttää merkintää $(\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t_1 : x \mid t_2)$ ja jolle on voimassa seuraava totuusehto:

$$\mathcal{M} \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t_1 : x \mid t_2)\, \varphi, \quad \text{joss on olemassa kuvaus}$$
$$F : X \to \mathcal{P}^*\Big(X(t_1) \setminus X(t_2)\Big), \text{ s.e. } \mathcal{M} \vDash_{X[F/x]} \varphi.$$

Tällainen kvanttori on hyödyllinen IEF-logiikassa. Meidän ei kuitenkaan tarvitse laajentaa kieltä IEF_L, sillä kyseinen kvanttori voidaan helposti määritellä inkluusio- ja ekskluusiokvanttorien avulla seuraavasti:

Määritelmä 3.16. Oletetaan, että $\varphi \in \mathrm{IEF}_L$, $t \in \mathrm{T}_L$ ja u_1, u_2, y, y' ovat eri muuttujia, siten että $u_1, u_2, y, y' \notin \mathrm{Vr}(t_1, t_2) \cup \mathrm{Fr}(\varphi) \cup \{x\}$. Merkitään:

$$(\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t_1 : x \mid t_2)\, \varphi :=$$
$$\delta^{u_1 u_2}_{t_1 t_2}\Big[\exists^{\mathrm{s}} x\Big((\exists^{\mathrm{s}} y \subseteq u_1)(x = y) \wedge (\exists^{\mathrm{s}} y' \mid u_2)(x = y') \wedge \varphi\Big)\Big]$$

Ennen kuin osoitamme, että inkluusio-ekskluusiokvanttori toimii näin määriteltynä halutulla tavalla, todistamme seuraavan lemman:

Lemma 3.16. *Oletetaan, että $F : X \to \mathcal{P}^*(M)$, $A_1, A_2 \subseteq M$ ja x, y sekä y' ovat eri muuttujia. Tällöin $\mathrm{im}(F) \subseteq \mathcal{P}^*(A_1 \setminus A_2)$, jos ja vain jos on olemassa seuraavanlaiset kuvaukset:*

$$\begin{cases} F_1 : X[F/x] \to \mathcal{P}^*(A_1), \text{ s.e. } \mathcal{M} \vDash_{X[F/x, F_1/y]} (x = y) \\ F_2 : X[F/x] \to \mathcal{P}^*(\overline{A_2}), \text{ s.e. } \mathcal{M} \vDash_{X[F/x, F_2/y']} (x = y') \end{cases}$$

Todistus. Oletetaan ensin, että $\mathrm{im}(F) \subseteq \mathcal{P}^*(A_1 \setminus A_2)$. Määritellään tällöin kuvaukset:

$$\begin{cases} F_1 : X[F/x] \to \mathcal{P}^*(M), \text{ s.e. } s \mapsto \{s(x)\} \\ F_2 : X[F/x] \to \mathcal{P}^*(M), \text{ s.e. } s \mapsto \{s(x)\} \end{cases}$$

Kuvausten F_1 ja F_2 määritelmien perusteella selvästi $\mathcal{M} \vDash_{X[F/x, F_1/y]} (x = y)$ ja $\mathcal{M} \vDash_{X[F/x, F_2/y']} (x = y')$.

Olkoon $r \in X[F/x]$. Tällöin on olemassa $s \in X$ ja $a \in F(s)$, siten että $r = s[a/x]$. Koska $\mathrm{im}(F) \subseteq \mathcal{P}^*(A_1 \setminus A_2)$, niin $a \in A_1 \setminus A_2$. Näin ollen $r(x) \in A_1$ ja $r(x) \in \overline{A_2}$. Koska $r \in X[F/x]$ oli mielivaltaisesti valittu, niin tästä seuraa, että $\mathrm{im}(F_1) \subseteq \mathcal{P}^*(A_1)$ ja $\mathrm{im}(F_2) \subseteq \mathcal{P}^*(\overline{A_2})$.

Oletetaan, sitten että kuvaukset F_1 ja F_2 ovat olemassa. Valitaan mielivaltaiset $B \in \mathrm{im}(F)$ ja $a \in B$. Tällöin $B = F(s)$ jollain $s \in X$. Merkitään $r := s[a/x]$. Nyt $r \in X[F/x]$ ja $F_1(r), F_2(r) \neq \emptyset$, joten on olemassa $a_1 \in F_1(r)$ sekä $a_2 \in F_2(r)$. Merkitään $q_1 = r[a_1/y]$ ja $q_2 := r[a_2/y']$.

Koska $q_1 \in X[F/x, F_1/y]$ ja $\mathcal{M} \vDash_{X[F/x, F_1/y]} (x = y)$, niin $q_1(x) = q_1(y)$. Koska x ja y ovat eri muuttujia, niin $q_1(x) = r(x)$. Näin ollen

$$a_1 = r[a_1/y](y) = q_1(y) = q_1(x) = r(x) = s[a/x](x) = a.$$

Vastaavin perusteluin täytyy olla, että myös $a_2 = a$.

Koska $\mathrm{im}(F_1) \subseteq \mathcal{P}^*(A_1)$ ja $\mathrm{im}(F_2) \subseteq \mathcal{P}^*(\overline{A_2})$, niin $a_1 \in A_1$ ja $a_2 \notin A_2$. Näin ollen $a \in A_1 \setminus A_2$. On osoitettu siis, että $\mathrm{im}(F) \subseteq \mathcal{P}^*(A_1 \setminus A_2)$. $\square$

Olemme nyt valmiita todistamaan, että inkluusio-ekskluusiokvanttorin totuusehdot ovat sellaiset kuin niiltä toivoimme:

Lause 3.17. *Oletetaan, että $\varphi \in \mathrm{IEF}_L$, $t \in \mathrm{T}_L$ ja u_1, u_2, y, y' ovat eri muuttujia, siten että $u_1, u_2, y, y' \notin \mathrm{Vr}(t_1, t_2) \cup \mathrm{Fr}(\varphi) \cup \{x\}$. Nyt on voimassa:*

$$\mathcal{M} \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t_1 : x \mid t_2)\, \varphi, \quad \textit{joss on olemassa kuvaus}$$
$$F : X \to \mathcal{P}^*\Big(X(t_1) \setminus X(t_2)\Big), \ \textit{s.e.}\ \mathcal{M} \vDash_{X[F/x]} \varphi.$$

Todistus. Oletetaan ensin, että $\mathcal{M} \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t_1 : x \mid t_2)\, \varphi$. Siis määritelmän 3.16 nojalla $\mathcal{M} \vDash_X \delta[\exists^{\mathrm{s}} x((\exists^{\mathrm{s}} y \subseteq u_1)(x = y) \wedge (\exists^{\mathrm{s}} y' \mid u_2)(x = y') \wedge \varphi)]$. Lemman 3.2 nojalla $\mathcal{M} \vDash_{\delta[X]} \exists^{\mathrm{s}} x((\exists^{\mathrm{s}} y \subseteq u_1)(x = y) \wedge (\exists^{\mathrm{s}} y' \mid u_2)(x = y') \wedge \varphi)$. Siis on olemassa kuvaus $F' : \delta[X] \to \mathcal{P}^*(M)$, siten että

$$\mathcal{M} \vDash_{(\delta[X])[F'/x]} (\exists^{\mathrm{s}} y \subseteq u_1)(x = y) \wedge (\exists^{\mathrm{s}} y' \mid u_2)(x = y') \wedge \varphi.$$

Näin ollen $\mathcal{M} \vDash_{(\delta[X])[F'/x]} \varphi$ ja on olemassa kuvaukset:

$$\begin{cases} F_1 : (\delta[X])[F'/x] \to \mathcal{P}^*(X(u_1)), \ \text{s.e. } \mathcal{M} \vDash_{(\delta[X])[F'/x, F_1/y]} (x = y) \\ F_2 : (\delta[X])[F'/x] \to \mathcal{P}^*(\overline{X(u_2)}), \ \text{s.e. } \mathcal{M} \vDash_{(\delta[X])[F'/x, F_2/y']} (x = y') \end{cases}$$

Täten lemman 3.16 nojalla $\mathrm{im}(F') \subseteq \mathcal{P}^*(X(u_1) \setminus X(u_2))$.

Määritellään $F : X \to \mathcal{P}^*(M)$, $s \mapsto F'(\delta[s])$. Nyt selvästi $F(s) = F'(\delta[s])$ jokaisella $s \in X$. Koska lisäksi $\mathcal{M} \vDash_{(\delta[X])[F'/x]} \varphi$ ja $u_1, u_2 \notin \mathrm{Fr}(\varphi)$, niin lemman 3.4 nojalla $\mathcal{M} \vDash_{X[F/s]} \varphi$. Edelleen koska $\mathrm{im}(F') \subseteq \mathcal{P}^*(X(u_1) \setminus X(u_2))$ ja lemman 3.2 nojalla $X(t_1) = \delta[X](u_1)$ ja $X(t_2) = \delta[X](u_2)$, niin täytyy olla että $\mathrm{im}(F) \subseteq \mathcal{P}^*(X(t_1) \setminus X(t_2))$.

Oletetaan sitten, että on olemassa kuvaus $F : X \to \mathcal{P}^*(X(t_1) \setminus X(t_2))$, siten että $\mathcal{M} \vDash_{X[F/x]} \varphi$. Määritellään $F' : \delta[X] \to \mathcal{P}^*(M)$, $\delta[s] \mapsto F(s)$. Koska $F(s) = F'(\delta[s])$ jokaisella $s \in X$ ja $u_1, u_2 \notin \mathrm{Fr}(\varphi)$, niin lemman 3.4 nojalla $\mathcal{M} \vDash_{(\delta[X])[F'/x]} \varphi$.

Koska $\mathrm{im}(F) \subseteq \mathcal{P}(X(t_1) \setminus X(t_2))$ ja lemman 3.2 nojalla $X(t_1) = \delta[X](u_1)$ ja $X(t_2) = \delta[X](u_2)$, niin $\mathrm{im}(F') \subseteq \mathcal{P}^*(X(u_1) \setminus X(u_2))$. Näin ollen Lemman 3.16 nojalla on olemassa kuvaukset:

$$\begin{cases} F_1 : (\delta[X])[F'/x] \to \mathcal{P}^*(X(u_1)), \ \text{s.e. } \mathcal{M} \vDash_{(\delta[X])[F'/x, F_1/y]} (x = y) \\ F_2 : (\delta[X])[F'/x] \to \mathcal{P}^*(\overline{X(u_2)}), \ \text{s.e. } \mathcal{M} \vDash_{(\delta[X])[F'/x, F_2/y']} (x = y') \end{cases}$$

Täten $\mathcal{M} \vDash_{(\delta[X])[F'/x]} (\exists^{\mathrm{s}} y \subseteq u_1)(x = y)$ ja $\mathcal{M} \vDash_{(\delta[X])[F'/x]} (\exists^{\mathrm{s}} y' \mid u_2)(x = y')$. Näin ollen $\mathcal{M} \vDash_{\delta[X]} \exists^{\mathrm{s}} x((\exists^{\mathrm{s}} y \subseteq u_1)(x = y) \wedge (\exists^{\mathrm{s}} y' \mid u_2)(x = y') \wedge \varphi)$ ja lemman 3.2 nojalla $\mathcal{M} \vDash_X \delta[\exists^{\mathrm{s}} x((\exists^{\mathrm{s}} y \subseteq u_1)(x = y) \wedge (\exists^{\mathrm{s}} y' \mid u_2)(x = y') \wedge \varphi)]$. Siis on voimassa $\mathcal{M} \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t_1 : x \mid t_2)\, \varphi$. $\square$

Voimme yleistää inkluusio-ekskluusiokvanttorin myös termijoukoille määritelmien 3.6 ja 3.11 tapaan seuraavasti:

Määritelmä 3.17. Oletetaan, että $\varphi \in \mathrm{IEF}_L$, $t_1, \ldots, t_n, t'_1, \ldots, t'_m \in \mathrm{T}_L$ ja $u_1, \ldots, u_n, u'_1, \ldots, u'_m, y, y'$ ovat eri muuttujia, siten että ne eivät ole joukossa $\mathrm{Vr}(t_1, \ldots, t_n, t'_1, \ldots, t'_m) \cup \mathrm{Fr}(\varphi) \cup \{x\}$. Merkitään:

$$\begin{aligned}
&(\exists^{\mathrm{s}}\, x \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} t_i : x \mid \bigcup_{i=1}^{m} t'_i)\, \varphi := \\
&\delta^{u_1\ldots u_n u'_1\ldots u'_m}_{t_1\ldots t_n t'_1\ldots t'_m}\left[\exists^{\mathrm{s}}\, x\left((\exists^{\mathrm{s}}\, y \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} u_i)(x = y) \wedge (\exists^{\mathrm{s}}\, y' \mid \bigcup_{i=1}^{m} u'_i)(x = y') \wedge \varphi\right)\right]
\end{aligned}$$

Lause 3.18. *Oletetaan että kaava* $\varphi \in \mathrm{IEF}_L$, $t_1, \ldots, t_n, t'_1, \ldots, t'_m \in \mathrm{T}_L$ *ja* $u_1, \ldots, u_n, u'_1, \ldots, u'_m, y, y'$ *ovat eri muuttujia, siten että ne eivät ole joukossa* $\mathrm{Vr}(t_1, \ldots, t_n, t'_1, \ldots, t'_m) \cup \mathrm{Fr}(\varphi) \cup \{x\}$. *Nyt on voimassa:*

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M} \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}}\, x \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} t_i : x \mid \bigcup_{i=1}^{m} t'_i)\, \varphi, \\
&\textit{joss on olemassa } F : X \to \mathcal{P}^*\left(\bigcap_{i=1}^{n} X(t_i) \setminus \bigcup_{i=1}^{m} X(t'_i)\right), \ \textit{s.e. } \mathcal{M} \vDash_{X[F/x]} \varphi.
\end{aligned}$$

Todistus. Todistetaan täsmälleen samalla tavalla kuin lause 3.17 käyttäen apuna lauseita 3.5 ja 3.9. □

Huomautus. Olisimme voineet määritellä kvanttorin $(\exists^{\mathrm{s}}\, x \subseteq t_1 : x \mid t_2)$ myös yksinkertaisemmin seuraavalla yhtäpitävällä tavalla:

$$(\exists^{\mathrm{s}}\, x \subseteq t_1 : x \mid t_2)\, \varphi := \delta^{u_1 u_2}_{t_1 t_2}\left[\exists^{\mathrm{s}}\, x\, (x \subseteq u_1 \wedge x \mid u_2 \wedge \varphi)\right]$$

Käyttämässämme määritelmässä on kuitenkin se etu, että se on helposti yleistettävissä myös termijoukoille, niin että voimme käyttää hyödyksi niille jo todistamiamme lauseiden 3.5 ja 3.9 tuloksia.

3.3.3 Termijoukon arvot säilyttävä disjunktio

Koska disjunktio jakaa tiimin X osatiimeihin Y ja Y', termin t saamien arvojen joukko tiimeissä Y ja Y' voi olla pienempi kuin tiimissä X. Usein haluamme disjunktion avulla juuri jakaa termien saamien arvojen joukkoja asettamillamme ehdoilla. Mutta joissain tilanteissa haluamme, että tiettyjen termien saamat arvot säilyvät samoina disjunktion ottamisen jälkeenkin.

Tätä varten tarvitsemme uuden disjunktion $\vee_{t_1\ldots t_n}$, joka toimii muuten kuin tavanomainen disjunktio, mutta vaatii lisäksi termien $t_1, \ldots, t_n$ arvojen säilymisen. Voimme määritellä tämän disjunktion IEF-logiikan avulla seuraavalla tavalla.

Määritelmä 3.18. Oletetaan, että $\varphi, \psi \in \mathrm{IEF}_L$ ja $t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{T}_L$. Olkoot x, y_1, y_2, z, u, w_1 ja w_2 eri muuttujia, siten että ne eivät esiinny joukossa $\mathrm{Vr}(t_1, \ldots, t_n) \cup \mathrm{Fr}(\varphi) \cup \mathrm{Fr}(\psi)$. Merkitään:

$$\begin{aligned}
&\varphi \vee_{t_1 \ldots t_n} \psi := \\
&\qquad (\varphi \sqcup \psi) \sqcup \exists^{\mathrm{s}} y_1 \, \exists^{\mathrm{s}} y_2 \Big({=}(y_1) \wedge {=}(y_2) \wedge y_1 \neq y_2 \\
&\qquad\qquad \wedge \exists^{\mathrm{s}} x \Big(\bigwedge_{i=1}^{n} (\theta_i \sqcup \theta_i') \wedge \Big((x = y_1 \wedge \varphi) \vee (x = y_2 \wedge \psi) \Big) \Big) \Big),
\end{aligned}$$

missä

$$\begin{aligned}
\theta_i &:= (x = y_1 \wedge \forall z \, (z \subseteq t_i)) \vee (x = y_2 \wedge \forall z \, (z \subseteq t_i)) \\
\theta_i' &:= (\exists^{\mathrm{s}} u \mid t_i) \, \exists^{\mathrm{s}} w_1 \, \exists^{\mathrm{s}} w_2 \Big(\Big((x = y_1 \wedge w_1 = t_i \wedge w_2 = u) \\
&\qquad \vee (x = y_2 \wedge w_1 = u \wedge w_2 = t_i) \Big) \wedge t_i \subseteq w_1 \wedge t_i \subseteq w_2 \Big)
\end{aligned}$$

Lause 3.19. *Oletetaan, että $\varphi, \psi \in \mathrm{IEF}_L$ ja $t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{T}_L$. Olkoot x, y_1, y_2, z, u, w_1 ja w_2 eri muuttujia, siten että ne eivät esiinny joukossa $\mathrm{Vr}(t_1, \ldots, t_n) \cup \mathrm{Fr}(\varphi) \cup \mathrm{Fr}(\psi)$. Nyt on voimassa:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} \vDash_X \varphi \vee_{t_1 \ldots t_n} \psi, \quad & \textit{joss on olemassa } Y, Y' \subseteq X \textit{ s.e. } Y \cup Y' = X, \\
& \mathcal{M} \vDash_Y \varphi \textit{ sekä } \mathcal{M} \vDash_{Y'} \psi, \textit{ ja jos } Y, Y' \neq \emptyset, \textit{ niin} \\
& Y(t_i) = Y'(t_i) = X(t_i) \textit{kaikilla } i \in \{1, \ldots, n\}.
\end{aligned}$$

Todistus. Mikäli olisi, että $X = \emptyset$, niin väite pätisi triviaalisti. Näin ollen voidaan siis olettaa, että $X \neq \emptyset$. Koska oletuksen nojalla erityisesti $y_1, y_2, x \notin \mathrm{Fr}(\varphi) \cup \mathrm{Fr}(\psi) \cup \mathrm{Vr}(t_1, \ldots, t_n)$, niin lemman 3.3 nojalla voidaan yleisyyttä rajoittamatta olettaa, että $y_1, y_2, x \notin \mathrm{dom}(X)$.

Oletetaan ensin, että $\mathcal{M} \vDash_X \varphi \vee_{t_1 \ldots t_n} \psi$. Näin ollen $\mathcal{M} \vDash_X \varphi \sqcup \psi$ tai

$$\begin{aligned}
(*) \quad & \mathcal{M} \vDash_X \exists^{\mathrm{s}} y_1 \, \exists^{\mathrm{s}} y_2 \Big({=}(y_1) \wedge {=}(y_2) \wedge y_1 \neq y_2 \\
&\qquad \wedge \exists^{\mathrm{s}} x \Big(\bigwedge_{i=1}^{n} (\theta_i \sqcup \theta_i') \wedge \Big((x = y_1 \wedge \varphi) \vee (x = y_2 \wedge \psi) \Big) \Big) \Big).
\end{aligned}$$

Oletetaan ensin, että $\mathcal{M} \vDash_X \varphi \sqcup \psi$, jolloin $\mathcal{M} \vDash_X \varphi$ tai $\mathcal{M} \vDash_X \psi$. Jos $\mathcal{M} \vDash_X \varphi$, niin voidaan valita $Y := X$ ja $Y' := \emptyset$, jolloin väite pätee selvästi. Vastaavasti jos $\mathcal{M} \vDash_X \psi$, niin voidaan valita $Y := \emptyset$ ja $Y' := X$.

Oletetaan sitten, että $(*)$ on voimassa. Tällöin on olemassa kuvaukset $F_1 : X \to \mathcal{P}^*(M)$ ja $F_2 : X[F_1/y_1] \to \mathcal{P}^*(M)$, siten että

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} \vDash_{X_1} & {=}(y_1) \wedge {=}(y_2) \wedge y_1 \neq y_2 \\
& \wedge \exists^{\mathrm{s}} x \Big(\bigwedge_{i=1}^{n} (\theta_i \sqcup \theta_i') \wedge \Big((x = y_1 \wedge \varphi) \vee (x = y_2 \wedge \psi) \Big) \Big), \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad \text{missä } X_1 := X[F_1/y_1, F_2/y_2].
\end{aligned}$$

Tällöin $\mathcal{M} \vDash_{X_1} =(y_1)$, $\mathcal{M} \vDash_{X_1} =(y_2)$ ja $\mathcal{M} \vDash_{X_1} y_1 \neq y_2$, joten koska $X \neq \emptyset$, niin on olemassa alkiot $a, b \in M$, siten että $X_1(y_1) = \{a\}$, $X_1(y_2) = \{b\}$ ja $a \neq b$. Lisäksi on olemassa kuvaus $F_3 : X_1 \to \mathcal{P}^*(M)$, siten että

$$\mathcal{M} \vDash_{X_2} \bigwedge_{i=1}^{n} (\theta_i \sqcup \theta_i') \wedge ((x = y_1 \wedge \varphi) \vee (x = y_2 \wedge \psi)), \text{ missä } X_2 := X_1[F_3/x].$$

Nyt $\mathcal{M} \vDash_{X_2} (x = y_1 \wedge \varphi) \vee (x = y_2 \wedge \psi)$, joten on olemassa $Z_1, Z_1' \subseteq X_2$, siten että $Z_1 \cup Z_1' = X_2$, $\mathcal{M} \vDash_{Z_1} x = y_1 \wedge \varphi$ ja $\mathcal{M} \vDash_{Z_2'} x = y_2 \wedge \psi$. Tällöin kaikilla $s \in Z_1$ pätee $s(x) = s(y_1)$, ja kaikilla $s \in Z_1'$ pätee $s(x) = s(y_2)$. Koska lisäksi $X_2(y_1) = X_1(y_1) = \{a\}$, $X_2(y_2) = X_1(y_2) = \{b\}$ ja $a \neq b$, niin kaikilla $s \in X_2$ pätee:

$$s \in Z_1, \text{ joss } s(x) = a \quad \text{ja} \quad s \in Z_1', \text{ joss } s(x) = b.$$

Lisäksi $\mathcal{M} \vDash_{Z_1} \varphi$ ja $\mathcal{M} \vDash_{Z_1'} \psi$. Merkitään nyt

$$Y := Z_1 \upharpoonright \mathrm{dom}(X) \quad \text{ja} \quad Y' := Z_1' \upharpoonright \mathrm{dom}(X).$$

Oletuksen nojalla $y_1, y_2, x \notin \mathrm{Fr}(\varphi) \cup \mathrm{Fr}(\psi)$, joten $Y \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi) = Z_1 \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi)$ ja $Y' \upharpoonright \mathrm{Fr}(\psi) = Z_1' \upharpoonright \mathrm{Fr}(\psi)$. Näin ollen lemman 3.3 nojalla $\mathcal{M} \vDash_Y \varphi$ ja $\mathcal{M} \vDash_{Y'} \psi$. Koska $Z_1 \cup Z_1' = X_2$ ja tekemämme oletuksen nojalla $y_1, y_2, x \notin \mathrm{dom}(X)$, niin selvästi myös $Y \cup Y' = X$.

Olkoon $i \in \{1, \ldots, n\}$. Nyt pätee, että $\mathcal{M} \vDash_{X_2} \theta_i \sqcup \theta_i'$, eli $\mathcal{M} \vDash_{X_2} \theta_i$ tai $\mathcal{M} \vDash_{X_2} \theta_i'$. Oletetaan ensin, että pätee $\mathcal{M} \vDash_{X_2} \theta_i$. Koska tällöin on voimassa $\mathcal{M} \vDash_{X_2} (x = y_1 \wedge \forall z\, (z \subseteq t_i)) \vee (x = y_2 \wedge \forall z\, (z \subseteq t_i))$, niin täytyy olla, että $\mathcal{M} \vDash_{Z_1} \forall z\, (z \subseteq t_i)$ ja $\mathcal{M} \vDash_{Z_1'} \forall z\, (z \subseteq t_i)$. Näin ollen täytyy olla, että $Z_1(t_i) = M$ ja $Z_1'(t_i) = M$. Edelleen $Y(t_i) = M$ ja $Y'(t_i) = M$. Koska lisäksi $Y(t_i), Y'(t_i) \subseteq X(t_i) \subseteq M$, niin täytyy olla, että $Y(t_i) = Y'(t_i) = X(t_i)$.

Oletetaan sitten, että $\mathcal{M} \vDash_{X_2} \theta_i'$. Siis on olemassa $F_4 : X_2 \to \mathcal{P}^*(\overline{X_2(t_i)})$, $F_5 : X_2[F_4/u] \to \mathcal{P}^*(M)$ ja $F_6 : X_2[F_4/u, F_5/w_1] \to \mathcal{P}^*(M)$, siten että

$$\begin{aligned}\mathcal{M} \vDash_{X_3} \Big((x = y_1 \wedge w_1 = t_i \wedge w_2 = u) \\ \vee (x = y_2 \wedge w_1 = u \wedge w_2 = t_i)\Big) \wedge t_i \subseteq w_1 \wedge t_i \subseteq w_2, \\ \text{missä } X_3 = X_2[F_4/u, F_5/w_1, F_6/w_2].\end{aligned}$$

Koska $\mathcal{M} \vDash_{X_3} (x = y_1 \wedge w_1 = t_i \wedge w_2 = u) \vee (x = y_2 \wedge w_1 = u \wedge w_2 = t_i)$, niin on olemassa $Z_2, Z_2' \subseteq X_3$, joille $Z_2 \cup Z_2' = X_3$, $\mathcal{M} \vDash_{Z_2} x = y_1 \wedge w_1 = t_i \wedge w_2 = u$ ja $\mathcal{M} \vDash_{Z_2'} x = y_2 \wedge w_1 = u \wedge w_2 = t_i$. Lisäksi $\mathcal{M} \vDash_{X_3} t_i \subseteq w_1$ ja $\mathcal{M} \vDash_{X_3} t_i \subseteq w_2$.

Olkoon $c \in X(t_i)$. Siis on olemassa $s \in X$, siten että $s(t_i) = c$. Nyt on olemassa $r \in X_3$, siten että $r(t_i) = s(t_i)$. Koska $\mathcal{M} \vDash_{X_3} t_i \subseteq w_1$, niin on olemassa $r' \in X_3$, siten että $r'(w_1) = r(t_i)$. Näin ollen $r'(w_1) \in X_3(t_i)$ ja edelleen $r'(w_1) \in X_2(t_i)$.

Kuvauksen F_4 määritelmän nojalla $r'(u) \in \overline{X_2(t_i)}$, joten erityisesti ei voi olla, että $r'(w_1) = r'(u)$. Näin ollen $r' \notin Z_2'$, joten täytyy olla, että $r' \in Z_2$.

Täten $r'(w_1) = r'(t_i)$ ja edelleen että $r'(x) = r'(y_1) = a$. Näin ollen on olemassa $s' \in Y$, siten että $s'(t_i) = r'(t_i)$. On osoitettu siis, että

$$c = s(t_i) = r(t_i) = r'(w_1) = r'(t_i) = s'(t_i) \in Y(t_i).$$

Näin ollen $c \in Y(t_i)$. On osoitettu siis, että $X(t_i) \subseteq Y(t_i)$. Selvästi pätee, että $Y(t_i) \subseteq X(t_i)$, joten $Y(t_i) = X(t_i)$. Vastaavasti voidaan osoittaa, että $Y'(t_i) = X(t_i)$, joten on voimassa, että $Y(t_i) = Y'(t_i) = X(t_i)$.

Oletetaan sitten, että on olemassa $Y, Y' \subseteq X$ siten, että $Y \cup Y' = X$, $\mathcal{M} \vDash_Y \varphi$ sekä $\mathcal{M} \vDash_{Y'} \psi$, ja mikäli $Y, Y' \neq \emptyset$, niin $Y(t_i) = Y'(t_i) = X(t_i)$ kaikilla $i \in \{1, \dots, n\}$. Mikäli $Y = \emptyset$, niin $Y' = X$, jolloin $\mathcal{M} \vDash_X \psi$. Tällöin $\mathcal{M} \vDash_X \varphi \sqcup \psi$ ja edelleen $\mathcal{M} \vDash_X \varphi \vee_{t_1 \dots t_n} \psi$. Vastaavasti, jos $Y' = \emptyset$, niin $\mathcal{M} \vDash_X \varphi$ ja edelleen $\mathcal{M} \vDash_X \varphi \vee_{t_1 \dots t_n} \psi$. Voidaan siis olettaa, että $Y, Y' \neq \emptyset$, jolloin $Y(t_i) = Y'(t_i) = X(t_i)$ kaikilla $i \in \{1, \dots, n\}$.

Oletetaan ensin, että $|M| = 1$. Koska $X \neq \emptyset$, niin lemman 2.1 nojalla $X = \{s\}$ jollain tulkintafunktiolla s. Näin ollen täytyy olla, että $Y = X$ ja $Y' = X$, jolloin selvästi $\mathcal{M} \vDash_X \varphi \sqcup \psi$ ja edelleen $\mathcal{M} \vDash_X \varphi \vee_{t_1 \dots t_n} \psi$.

Oletetaan sitten, että $|M| \geq 2$, jolloin on olemassa $a, b \in M$, siten että $a \neq b$. Määritellään kuvaukset:

$$\begin{cases} F_1 : X \to \mathcal{P}^*(M), \quad s \mapsto \{a\} \\ F_2 : X[F_1/y_1] \to \mathcal{P}^*(M), \quad s \mapsto \{b\} \end{cases}$$

Merkitään $X_1 := X[F_1/y_1, F_2/y_2]$. Kuvausten F_1 ja F_2 määritelmien nojalla pätee selvästi, että $\mathcal{M} \vDash_{X_1} {=}(y_1)$, $\mathcal{M} \vDash_{X_1} {=}(y_2)$ ja $\mathcal{M} \vDash_{X_1} y_1 \neq y_2$. Määritellään sitten kuvaus:

$$F_3 : X_1 \to \mathcal{P}^*(M), \text{ s.e.}$$
$$\begin{cases} s \mapsto \{a\}, \text{ jos on olemassa } s' \in Y \setminus Y', \text{ s.e. } s = s'[a/y_1, b/y_2] \\ s \mapsto \{b\}, \text{ jos on olemassa } s' \in Y' \setminus Y, \text{ s.e. } s = s'[a/y_1, b/y_2] \\ s \mapsto \{a, b\}, \text{ jos on olemassa } s' \in Y \cap Y', \text{ s.e. } s = s'[a/y_1, b/y_2] \end{cases}$$

Selvästi täsmälleen yksi edellisistä ehdoista on voimassa jokaisella $s \in X_1$. Merkitään $X_2 := X_1[F_3/x]$. Määritellään tiimit $Z_1 := \{s \in X_3 \mid s(x) = a\}$ ja $Z_1' := \{s \in X_3 \mid s(x) = b\}$. Nyt pätee selvästi, että $Z_1 \cup Z_1' = X_2$, $\mathcal{M} \vDash_{Z_1} x = y_1$ ja $\mathcal{M} \vDash_{Z_1'} x = y_2$. Lisäksi kuvauksen F_3 määritelmän nojalla $Y \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi) = Z_1 \upharpoonright \mathrm{Fr}(\varphi)$ ja $Y' \upharpoonright \mathrm{Fr}(\psi) = Z_1' \upharpoonright \mathrm{Fr}(\psi)$. Täten lemman 3.3 nojalla $\mathcal{M} \vDash_{Z_1} \varphi$ ja $\mathcal{M} \vDash_{Z_1'} \psi$. Näin ollen $\mathcal{M} \vDash_{X_2} (x = y_1 \wedge \varphi) \vee (x = y_2 \wedge \psi)$.

Olkoon $i \in \{1, \dots, n\}$. Oletetaan ensin, että $X(t_i) = M$. Tällöin myös $Y(t_i) = M = Y'(t_i)$, ja koska oletuksen nojalla $y_1, y_2, x \notin \mathrm{Vr}(t_i)$, niin edelleen $Z_1(t_i) = M = Z_1'(t_i)$. Täten $\mathcal{M} \vDash_{Z_1} \forall z\, (z \subseteq t_i)$ ja $\mathcal{M} \vDash_{Z_1'} \forall z\, (z \subseteq t_i)$. Näin ollen $\mathcal{M} \vDash_{X_2} \theta_i$ ja edelleen $\mathcal{M} \vDash_{X_2} \theta_i \sqcup \theta_i'$.

Oletetaan sitten, että $X(t_i) \neq M$. Tällöin on olemassa $c \in \overline{X(t_i)}$. Määritellään kuvaukset:

$$\begin{cases} F_4 : X_2 \to \mathcal{P}^*(M), \text{ s.e. } s \mapsto \{c\} \\ F_5 : X_2[F_4/u] \to \mathcal{P}^*(M), \text{ s.e. } \begin{cases} s \mapsto \{s(t_i)\}, & \text{jos } s(x) = a \\ s \mapsto \{c\}, & \text{jos } s(x) = b \end{cases} \\ F_6 : X_2[F_4/u, F_5/w_1] \to \mathcal{P}^*(M), \text{ s.e. } \begin{cases} s \mapsto \{c\}, & \text{jos } s(x) = a \\ s \mapsto \{s(t_i)\}, & \text{jos } s(x) = b \end{cases} \end{cases}$$

Merkitään $X_3 := X_2[F_4/u, F_5/w_1, F_6/w_2]$, $Z_2 := \{s \in X_3 \mid s(x) = a\}$ ja $Z_2' := \{s \in X_3 \mid s(x) = b\}$. Nyt $Z_2 \cup Z_2' = X_3$ ja kuvausten F_4, F_5 ja F_6 määritelmien nojalla pätee selvästi, että $\mathcal{M} \vDash_{Z_2} x = y_1 \wedge w_1 = t_i \wedge w_2 = u$ ja $\mathcal{M} \vDash_{Z_2'} x = y_2 \wedge w_1 = u \wedge w_2 = t_i$.

Olkoon $r \in X_3$. Nyt on olemassa $s \in X$, siten että $r(t_i) = s(t_i)$. Koska $s(t_i) \in X(t_i) = Y(t_i)$, niin on olemassa $s' \in Y$, siten että $s'(t_i) = s(t_i)$. Olkoon $r' := s'[a/y_1, b/y_2, a/x, c/u, s'(t_i)/w_1, c/w_2]$. Nyt $r' \in X_3$ ja lisäksi:

$$r(t_i) = s(t_i) = s'(t_i) = r'(w_1).$$

On osoitettu siis, että $\mathcal{M} \vDash_{X_3} t_i \subseteq w_1$. Vastaavasti voidaan osoittaa, että $\mathcal{M} \vDash_{X_3} t_i \subseteq w_2$. Näin ollen

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \vDash_{X_3} \Big(& (x = y_1 \wedge w_1 = t_i \wedge w_2 = u) \\ & \vee (x = y_2 \wedge w_1 = u \wedge w_2 = t_i) \Big) \wedge t_i \subseteq w_1 \wedge t_i \subseteq w_2. \end{aligned}$$

Näin ollen $\mathcal{M} \vDash_{X_2} \theta_i'$ ja edelleen pätee, että $\mathcal{M} \vDash_{X_2} \theta_i \sqcup \theta_i'$. On osoitettu siis, että $\mathcal{M} \vDash_{X_2} \bigwedge_{i=1}^{n} (\theta_i \sqcup \theta_i')$. Aiemmin pääteltyjen kohtien nojalla

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \vDash_X \exists^{\mathrm{s}} y_1 \, \exists^{\mathrm{s}} y_2 \Big(& =(y_1) \wedge =(y_2) \wedge y_1 \neq y_2 \\ & \wedge \exists^{\mathrm{s}} x \Big(\bigwedge_{i=1}^{n} (\theta_i \sqcup \theta_i') \wedge \big((x = y_1 \wedge \varphi) \vee (x = y_2 \wedge \psi) \big) \Big) \Big). \end{aligned}$$

Näin ollen $\mathcal{M} \vDash_X \varphi \vee_{t_1 \ldots t_n} \psi$. $\square$

Seuraavan kappaleen lopussa esimerkissä 3.15 näemme miten disjunktiota $\vee_{t_1 \ldots t_n}$ voidaan käyttää tiimin termien arvoja koskevan informaation säilyttämiseen tiimin jakamisen yhteydessä. Tällä disjunktiolla on myös tärkeä rooli IEF-logiikan ilmaisuvoimaa koskevassa tuloksessa kappaleessa 4.5.

3.4 Universaalikvantifiointi

Seuraavaksi tutkimme inkluusio- ja ekskluusio-operaatioita universaalikvantifioinnin yhteydessä. Määrittelemme niin sanotut universaali-inkluusio- ja universaaliekskluusiokvanttorit $(\forall x \subseteq t)$ ja $(\forall x \mid t)$ IEF-logiikalle. Tämän kappaleen lopussa pohdimme lisäksi muuttujan arvojen yhtenäistämistä tiimissä kvanttorin $(\forall x \subseteq x)$ avulla.

3.4.1 Universaali-inkluusio ja -ekskluusio

Määritelmässä 3.13 esitimme EXF-logiikalle kvanttorin $(\forall x \subseteq^{\mathrm{e}} t)$, jota kutsuimme universaali-inkluusiokvanttoriksi EXF-logiikalle. Sen totuusehtojen todistamisessa tarvittiin EXF-logiikan alaspäin suljettuvuutta, joten emme voi käyttää sitä yleisesti IEF_L-kaavoille.

Pyrimme seuraavaksi määrittelemään IEF-logiikalle yleisesti kvanttorin $(\forall x \subseteq t)$, jota kutsumme *universaali-inkluusiokvanttoriksi.* Samaan tapaan IEF-logiikalle on mielekästä määritellä kvanttori $(\forall x \mid t)$, jota kutsumme *universaaliekskluusiokvanttoriksi.*

Kuten EXF-logiikassa, haluamme että $(\forall x \subseteq t)$ kvantifioi x:n yli kaikkien termin t arvojen tiimissä X. Vastaavasti haluamme kvanttorin $(\forall x \mid t)$ kvantifioivan x:n yli kaikkien niiden arvojen, jotka eivät ole termin t arvoja tiimissä X. Pyrimme siis seuraaviin totuusehtoihin:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \vDash_X (\forall x \subseteq t)\, \varphi, &\quad \text{joss } \mathcal{M} \vDash_{X[A/x]} \varphi, \text{ missä } A = X(t). \\ \mathcal{M} \vDash_X (\forall x \mid t)\, \varphi, &\quad \text{joss } \mathcal{M} \vDash_{X[A/x]} \varphi, \text{ missä } A = \overline{X(t)}. \end{aligned}$$

Meidän ei tarvitse laajentaa kieltä IEF_L, sillä voimme määritellä molemmat näistä kvanttoreista käyttäen apuna inkluusio- sekä ekskluusiokvanttoreita seuraavalla tavalla:

Määritelmä 3.19. Oletetaan, että $\varphi \in \mathrm{IEF}_L$, $t \in \mathrm{T}_L$ ja u, y, z ovat eri muuttujia, siten että $u, y, z \notin \mathrm{Vr}(t) \cup \mathrm{Fr}(\varphi) \cup \{x\}$. Käytetään seuraavia lyhennysmerkintöjä:

$$\begin{aligned} (\forall x \subseteq t)\, \varphi := \delta_t^u\Big[&\forall x\, (x \subseteq u \wedge \varphi) \\ &\sqcup \forall x\, (\exists^{\mathrm{s}} y \subseteq u)(\exists^{\mathrm{s}} z \mid u)\Big((x = y \wedge \varphi) \vee x = z\Big)\Big]. \\ (\forall x \mid t)\, \varphi := \delta_t^u\Big[&\forall x\, (x \subseteq u) \\ &\sqcup \forall x (\exists^{\mathrm{s}} y \subseteq u)(\exists^{\mathrm{s}} z \mid u)\Big(x = y \vee (x = z \wedge \varphi)\Big)\Big]. \end{aligned}$$

Huomautus. Universaali-inkluusiokvantifikaation määritelmän idea on, että kaikille M:n alkiolle pätee joko, että ne ovat $X(t)$:n arvojen ulkopuolella tai sitten ne totetuttavat kaavan φ. Tällä intuitiolla olisi houkuttelevaa määritellä se yksinkertaisesti: $(\forall x \subseteq t)\, \varphi := \delta_t^u[\forall x\, (x \mid u \vee \varphi)]$.

Tällainen määritelmä ei kuitenkaan toimi halutulla tavalla, sillä tällöin disjunktio jakaa tiimin $X[M/x]$ ennen ekluusioatomin totuuden tarkistusta. Näin ollen ekskluusiota ei tule tarkistettua välttämättä kaikkien termin t arvojen suhteen tiimissä X. Vastaavin perustein emme voi määritellä universaaliekskluusiokvanttoria yksinkertaisesti: $(\forall x \mid t)\, \varphi := \delta_t^u[\forall x\, (x \subseteq u \vee \varphi)]$.

Kvanttorien $(\forall x \subseteq t)$ ja $(\forall x \mid t)$ totuusehtojen todistamissa tarvitsemme seuraavaa lemmaa.

Lemma 3.20. *Oletetaan, että* $\varphi, \psi \in \mathrm{IEF}_L$, $t \in \mathrm{T}_L$ *ja* y *sekä* z *ovat eri muuttujia, siten että* $y, z \notin \mathrm{Vr}(t) \cup \mathrm{Fr}(\psi) \cup \mathrm{Fr}(\theta) \cup \{x\}$. *Oletetaan lisäksi, että* $x \notin \mathrm{Vr}(t)$ *ja* $X(t) \neq M$. *Nyt on voimassa:*

$$\mathcal{M} \vDash_X \forall x\, (\exists^{\mathrm{s}} y \subseteq t)(\exists^{\mathrm{s}} z \mid t)\Big((x = y \wedge \psi) \vee (x = z \wedge \theta)\Big),$$
$$\textit{joss } \mathcal{M} \vDash_{X[X(t)/x]} \psi \textit{ ja } \mathcal{M} \vDash_{X[\overline{X(t)}/x]} \theta.$$

Todistus. Oletetaan ensin, että

$$\mathcal{M} \vDash_X \forall x\, (\exists^{\mathrm{s}} y \subseteq t)(\exists^{\mathrm{s}} z \mid t)\Big((x = y \wedge \psi) \vee (x = z \wedge \theta)\Big).$$

Siis on olemassa $F_1 : X_1 \to \mathcal{P}^*(X_1(t))$ ja $F_2 : X_2 \to \mathcal{P}^*(\overline{X_2(t)})$, siten että $\mathcal{M} \vDash_{X_3} (x = y \wedge \psi) \vee (x = z \wedge \theta)$, missä $X_1 := X[M/x]$, $X_2 := X_1[F_1/y]$ ja $X_3 := X_2[F_2/z]$. Edelleen on olemassa $Y, Y' \subseteq X_3$, siten että $Y \cup Y' = X_3$, $\mathcal{M} \vDash_Y x = y \wedge \psi$ ja $\mathcal{M} \vDash_{Y'} x = z \wedge \theta$. Koska erityisesti $\mathcal{M} \vDash_Y \psi$ ja $\mathcal{M} \vDash_{Y'} \theta$, niin lemman 3.3 nojalla riittää osoittaa, että:

$$\begin{cases} Y \upharpoonright \mathrm{Fr}(\psi) = X[X(t)/x] \upharpoonright \mathrm{Fr}(\psi) \\ Y' \upharpoonright \mathrm{Fr}(\theta) = X[\overline{X(t)}/x] \upharpoonright \mathrm{Fr}(\theta) \end{cases}$$

Olkoon $r' \in Y \upharpoonright \mathrm{Fr}(\psi)$. Siis on olemassa $r \in Y$, siten että $r' = r \upharpoonright \mathrm{Fr}(\psi)$. Edelleen on olemassa $s \in X$, siten että $r = s[a/x, b/y, c/z]$ joillain $a \in M$, $b \in F_1(s[a/x])$ ja $c \in F_2(s[a/x, b/y])$.

Koska $\mathcal{M} \vDash_Y x = y$, niin $a = b$. Tiedetään, että $\mathrm{im}(F_1) \subseteq \mathcal{P}^*(X_1(t))$, joten täytyy olla, että $b \in X_1(t)$. Koska $X_1(t) = X(t)$ ja $a = b$, niin $a \in X(t)$. Koska $s[a/x] \in X[M/x]$ ja $a \in X(t)$, niin $s[a/x] \in X[X(t)/x]$. Selvästi $r \upharpoonright \mathrm{Fr}(\psi) = s[a/x] \upharpoonright \mathrm{Fr}(\psi)$, joten $r' \in X[X(t)/x] \upharpoonright \mathrm{Fr}(\psi)$. On osoitettu siis, että $Y \upharpoonright \mathrm{Fr}(\psi) \subseteq X[X(t)/x] \upharpoonright \mathrm{Fr}(\psi)$.

Olkoon sitten $s' \in X[X(t)/x] \upharpoonright \mathrm{Fr}(\psi)$. Siis on olemassa $s \in X[X(t)/x]$, siten että $s' = s \upharpoonright \mathrm{Fr}(\psi)$. Edelleen on olemassa $b \in F_1(s)$ ja $c \in F_2(s[b/y])$, siten että $r := s[b/y, c/y] \in X_3$.

Mikäli olisi, että $r \in Y'$, niin täytyisi olla, että $r(x) = r(z)$, jolloin pätisi, että $s(x) = c$. Koska $\mathrm{im}(F_2) \subseteq \mathcal{P}^*(\overline{X_2(t)})$, niin täytyy olla, että $c \notin X_2(t)$. Tämä on ristiriita, sillä $X_2(t) = X(t)$ ja $c = s(x) \in X(t)$. Näin ollen $r \notin Y'$, joten $r \in Y$. Selvästi $s \upharpoonright \mathrm{Fr}(\psi) = r \upharpoonright \mathrm{Fr}(\psi)$, joten $s' \in Y \upharpoonright \mathrm{Fr}(\psi)$. Näin ollen $X[X(t)/x] \upharpoonright \mathrm{Fr}(\psi) \subseteq Y \upharpoonright \mathrm{Fr}(\psi)$.

On osoitettu siis, että $Y \upharpoonright \mathrm{Fr}(\psi) = X[X(t)/x] \upharpoonright \mathrm{Fr}(\psi)$. Vastaavanlaisella päättelyllä voidaan osoittaa, että $Y' \upharpoonright \mathrm{Fr}(\theta) = X[\overline{X(t)}/x] \upharpoonright \mathrm{Fr}(\theta)$. Näin ollen lemman 3.3 nojalla $\mathcal{M} \vDash_{X[X(t)/x]} \psi$ ja $\mathcal{M} \vDash_{X[\overline{X(t)}/x]} \theta$.

Oletetaan sitten, että $\mathcal{M} \vDash_{X[X(t)/x]} \psi$ ja $\mathcal{M} \vDash_{X[\overline{X(t)}/x]} \theta$. Koska $X(t) \neq \emptyset$ ja oletuksen nojalla myös $X(t) \neq M$, niin on olemassa $b^* \in X(t)$ ja $c^* \in \overline{X(t)}$.

Merkitään $X_1 := X[M/x]$ ja määritellään:

$$\begin{cases} F_1 : X_1 \to \mathcal{P}^*(M), \text{ s.e. } \begin{cases} s \mapsto \{s(x)\}, \text{ jos } s(x) \in X_1(t) \\ s \mapsto \{b^*\}, \text{ muuten} \end{cases} \\ \qquad X_2 := X_1[F_1/y] \\ F_2 : X_2 \to \mathcal{P}^*(M), \text{ s.e. } \begin{cases} s \mapsto \{s(x)\}, \text{ jos } s(x) \in \overline{X_2(t)} \\ s \mapsto \{c^*\}, \text{ muuten} \end{cases} \\ \qquad X_3 := X_2[F_2/z] \end{cases}$$

Kuvausten F_1 ja F_2 määritelmien nojalla selvästi $\mathrm{im}(F_1) \subseteq \mathcal{P}^*(X_1(t))$ ja $\mathrm{im}(F_2) \subseteq \mathcal{P}^*(\overline{X_2(t)})$. Määritelllään osatiimit $Y := \{s \in X_3 \mid s(x) \in X_3(t)\}$ ja $Y' := \{s \in X_3 \mid s(x) \in \overline{X_3(t)}\}$. Nyt selvästi $Y \cup Y' = X_3$. Koska $X_3(t) = X_2(t) = X_1(t)$, niin kuvausten F_1 ja F_2 määritelmien nojalla selvästi $\mathcal{M} \vDash_Y x = y$ ja $\mathcal{M} \vDash_{Y'} x = z$. Osoitetaan sitten, että:

$$\begin{cases} Y \upharpoonright \mathrm{Fr}(\psi) = X[X(t)/x] \upharpoonright \mathrm{Fr}(\psi) \\ Y' \upharpoonright \mathrm{Fr}(\theta) = X[\overline{X(t)}/x] \upharpoonright \mathrm{Fr}(\theta) \end{cases}$$

Olkoon $r' \in Y \upharpoonright \mathrm{Fr}(\psi)$. Siis on olemassa $r \in Y$, siten että $r' = r \upharpoonright \mathrm{Fr}(\psi)$. Edelleen on olemassa $s \in X$, siten että $r = s[a/x, b/y, c/z]$ joillain alkioilla $a \in M$, $b \in F_1(s[a/x])$ ja $c \in F_2(s[a/x, b/y])$. Tiedetään, että $r \in Y$, joten $r(x) \in X_3(t)$. Koska $r(x) = a$ ja $X(t) = X_3(t)$, niin $a \in X(t)$. Näin ollen $s[a/x] \in X[X(t)/x]$. Selvästi $r \upharpoonright \mathrm{Fr}(\psi) = s[a/x] \upharpoonright \mathrm{Fr}(\psi)$, joten $r' \in X[X(t)/x] \upharpoonright \mathrm{Fr}(\psi)$. Täten $Y \upharpoonright \mathrm{Fr}(\psi) \subseteq X[X(t)/x] \upharpoonright \mathrm{Fr}(\psi)$.

Olkoon sitten $s' \in X[X(t)/x] \upharpoonright \mathrm{Fr}(\psi)$. Siis on olemassa $s \in X[X(t)/x]$, siten että $s' = s \upharpoonright \mathrm{Fr}(\psi)$. Merkitään $r := s[s(x)/y, c^*/z]$. Kuvausten F_1 ja F_2 määritelmien nojalla $r \in X_3$. Lisäksi $r(x) = r(y)$, joten $r \in Y$. Nyt selvästi $s \upharpoonright \mathrm{Fr}(\psi) = r \upharpoonright \mathrm{Fr}(\psi)$, joten $s' \in Y \upharpoonright \mathrm{Fr}(\psi)$. On osoitettu siis, että $X[X(t)/x] \upharpoonright \mathrm{Fr}(\psi) \subseteq Y \upharpoonright \mathrm{Fr}(\psi)$.

Näin ollen $Y \upharpoonright \mathrm{Fr}(\psi) = X[X(t)/x] \upharpoonright \mathrm{Fr}(\psi)$. Vastaavanlaisella päättelyllä voidaan osoittaa, että $Y' \upharpoonright \mathrm{Fr}(\theta) = X[\overline{X(t)}/x] \upharpoonright \mathrm{Fr}(\theta)$. Näin ollen lemman 3.3 nojalla $\mathcal{M} \vDash_Y \psi$ ja $\mathcal{M} \vDash_{Y'} \theta$. Täten $\mathcal{M} \vDash_{X_4} (x = y \wedge \psi) \vee (x = z \wedge \theta)$ ja edelleen $\mathcal{M} \vDash_X \forall x\, (\exists^{\mathrm{s}} y \subseteq t)(\exists^{\mathrm{s}} z \mid t)\big((x = y \wedge \psi) \vee (x = z \wedge \theta)\big)$. □

Nyt olemme valmiita todistamaan totuusehdot universaalikvanttoreille $(\forall x \subseteq t)$ ja $(\forall x \mid t)$:

Lause 3.21. *Oletetaan, että $\varphi \in \mathrm{IEF}_L$, $t \in \mathrm{T}_L$ ja u, y ovat eri muuttujia, siten että $u, y \notin \mathrm{Vr}(t) \cup \mathrm{Fr}(\varphi) \cup \{x\}$. Tällöin on voimassa:*

a) $\mathcal{M} \vDash_X (\forall x \subseteq t)\, \varphi$, *joss* $\mathcal{M} \vDash_{X[A/x]} \varphi$, *missä* $A = X(t)$.

b) $\mathcal{M} \vDash_X (\forall x \mid t)\, \varphi$, *joss* $\mathcal{M} \vDash_{X[A/x]} \varphi$, *missä* $A = \overline{X(t)}$.

Todistus. a) Oletetaan ensin, että $\mathcal{M} \vDash_X (\forall x \subseteq t)\, \varphi$. Siis

$$\mathcal{M} \vDash_X \delta\Big[\forall x\,(x \subseteq u \wedge \varphi) \sqcup \forall x\,(\exists^{\mathrm{s}} y \subseteq u)(\exists^{\mathrm{s}} z \mid u)\Big((x = y \wedge \varphi) \vee x = z\Big)\Big].$$

Edelleen lemman 3.2 nojalla pätee, että

$$\mathcal{M} \vDash_{\delta[X]} \forall x\,(x \subseteq u \wedge \varphi) \sqcup \forall x\,(\exists^{\mathrm{s}} y \subseteq u)(\exists^{\mathrm{s}} z \mid u)\Big((x = y \wedge \varphi) \vee x = z\Big).$$

Oletetaan ensin, että $\mathcal{M} \vDash_{\delta[X]} \forall x\,(x \subseteq u \wedge \varphi)$. Täten $\mathcal{M} \vDash_{(\delta[X])[M/x]} x \subseteq u \wedge \varphi$. Koska $\mathcal{M} \vDash_{(\delta[X])[M/x]} x \subseteq u$, niin selvästi täytyy olla, että $\delta[X](u) = M$. Näin ollen $\mathcal{M} \vDash_{(\delta[X])[\delta[X](u)/x]} \varphi$.

Oletetaan sitten, että $\mathcal{M} \vDash_{\delta[X]} \forall x\,(\exists^{\mathrm{s}} y \subseteq u)(\exists^{\mathrm{s}} z \mid u)((x = y \wedge \varphi) \vee x = z)$. Koska muuttujan z kvantifiointi on mahdollista tehdä muuttujan u arvojen ulkopuolelta, niin täytyy olla, että $\delta[X](u) \neq M$. Tällöin voimme käyttää lemmaa 3.20 kaavoihin $\psi := \varphi$ ja $\theta := (x = x)$, jolloin saamme erityisesti, että $\mathcal{M} \vDash_{(\delta[X])[\delta[X](u)/x]} \varphi$.

Osoitettu siis, että joka tapauksessa $\mathcal{M} \vDash_{(\delta[X])[\delta[X](u)/x]} \varphi$. Lemman 3.2 nojalla $\delta[X](u) = X(t)$, joten $\mathcal{M} \vDash_{(\delta[X])[X(t)/x]} \varphi$. Oletuksen nojalla muuttuja $u \notin \mathrm{Vr}(t) \cup \mathrm{Fr}(\varphi)$, joten lemman 3.13 nojalla $\mathcal{M} \vDash_{X[X(t)/x]} \varphi$.

Oletetaan sitten, että $\mathcal{M} \vDash_{X[X(t)/x]} \varphi$. Lemman 3.13 nojalla $\mathcal{M} \vDash_{(\delta[X])[X(t)/x]} \varphi$. Lemman 3.2 nojalla $\delta[X](u) = X(t)$, joten $\mathcal{M} \vDash_{(\delta[X])[\delta[X](u)/x]} \varphi$.

Oletetaan ensin, että $\delta[X](u) = M$. Tällöin pätee, että $\mathcal{M} \vDash_{(\delta[X])[M/x]} \varphi$. Lisäksi selvästi $\mathcal{M} \vDash_{(\delta[X])[M/x]} x \subseteq u$, joten $\mathcal{M} \vDash_{\delta[X]} \forall x\,(x \subseteq u \wedge \varphi)$. Oletetaan sitten, että $\delta[X](u) \neq M$. Koska lisäksi $\mathcal{M} \vDash_{(\delta[X])[\delta[X](u)/x]} \varphi$, niin voimme käyttää lemmaa 3.20 kaavoihin $\psi := \varphi$ ja $\theta := (x = x)$, jolloin saamme, että $\mathcal{M} \vDash_{\delta[X]} \forall x\,(\exists^{\mathrm{s}} y \subseteq u)(\exists^{\mathrm{s}} z \mid u)((x = y \wedge \varphi) \vee x = z)$. On osoitettu siis, että joka tapauksessa

$$\mathcal{M} \vDash_{\delta[X]} \forall x\,(x \subseteq u \wedge \varphi) \sqcup \forall x\,(\exists^{\mathrm{s}} y \subseteq u)(\exists^{\mathrm{s}} z \mid u)\Big((x = y \wedge \varphi) \vee x = z\Big).$$

Täten lemman 3.2 nojalla $\mathcal{M} \vDash_X (\forall x \subseteq t)\, \varphi$.

b) Oletetaan ensin, että $\mathcal{M} \vDash_X (\forall x \mid t)\, \varphi$. Siis

$$\mathcal{M} \vDash_X \delta\Big[\forall x\,(x \subseteq u) \sqcup \forall x\,(\exists^{\mathrm{s}} y \subseteq u)(\exists^{\mathrm{s}} z \mid u)\Big(x = y \vee (x = z \wedge \varphi)\Big)\Big].$$

Edelleen lemman 3.2 nojalla pätee, että

$$\mathcal{M} \vDash_{\delta[X]} \forall x\,(x \subseteq u) \sqcup \forall x\,(\exists^{\mathrm{s}} y \subseteq u)(\exists^{\mathrm{s}} z \mid u)\Big(x = y \vee (x = z \wedge \varphi)\Big).$$

Oletetaan ensin, että $\mathcal{M} \vDash_{\delta[X]} \forall x\,(x \subseteq u)$. Siis $\mathcal{M} \vDash_{(\delta[X])[M/x]} x \subseteq u$, joten selvästi täytyy olla, että $\delta[X](u) = M$. Näin ollen $\overline{\delta[X](u)} = \emptyset$, jolloin pätee triviaalisti, että $\mathcal{M} \vDash_{(\delta[X])[\overline{\delta[X](u)}/x]} \varphi$.

Oletetaan sitten, että $\mathcal{M} \vDash_{\delta[X]} \forall x\,(\exists^{\mathrm{s}} y \subseteq u)(\exists^{\mathrm{s}} z \mid u)(x = y \vee (x = z \wedge \varphi))$. Koska muuttujan z kvantifiointi on mahdollista tehdä muuttujan u arvojen ulkopuolelta, niin täytyy olla, että $\delta[X](u) \neq M$. Tällöin voimme käyttää lemmaa 3.20 kaavoihin $\psi := (x = x)$ ja $\theta := \varphi$, jolloin saamme erityisesti, että $\mathcal{M} \vDash_{(\delta[X])[\overline{\delta[X](u)}/x]} \varphi$.

Osoitettu siis, että joka tapauksessa $\mathcal{M} \vDash_{(\delta[X])[\overline{\delta[X](u)}/x]} \varphi$. Lemman 3.2 nojalla $\delta[X](u) = X(t)$, joten $\mathcal{M} \vDash_{(\delta[X])[\overline{X(t)}/x]} \varphi$. Oletuksen nojalla muuttuja $u \notin \mathrm{Vr}(t) \cup \mathrm{Fr}(\varphi)$, joten lemman 3.13 nojalla $\mathcal{M} \vDash_{X[\overline{X(t)}/x]} \varphi$.

Oletetaan sitten, että $\mathcal{M} \vDash_{X[\overline{X(t)}/x]} \varphi$. Lemman 3.13 nojalla $\mathcal{M} \vDash_{(\delta[X])[\overline{X(t)}/x]} \varphi$. Lemman 3.2 nojalla $\delta[X](u) = X(t)$, joten $\mathcal{M} \vDash_{(\delta[X])[\overline{\delta[X](u)}/x]} \varphi$.

Mikäli $\delta[X](u) = M$, niin selvästi $\mathcal{M} \vDash_{\delta[X]} \forall x\, (x \subseteq u)$. Oletetaan sitten, että $\delta[X](u) \neq M$. Koska lisäksi $\mathcal{M} \vDash_{(\delta[X])[\overline{\delta[X](u)}/x]} \varphi$, niin voimme käyttää lemmaa 3.20 kaavoihin $\psi := (x = x)$ ja $\theta := \varphi$, jolloin saamme, että $\mathcal{M} \vDash_{\delta[X]} \forall x\, (\exists^{\mathrm{s}} y \subseteq u)(\exists^{\mathrm{s}} z \mid u)(x = y \vee (x = z \wedge \varphi))$. On osoitettu siis, että joka tapauksessa

$$\mathcal{M} \vDash_{\delta[X]} \forall x\, (x \subseteq u \wedge \varphi) \sqcup \forall x\, (\exists^{\mathrm{s}} y \subseteq u)(\exists^{\mathrm{s}} z \mid u)\Big((x = y \wedge \varphi) \vee x = z\Big).$$

Täten lemman 3.2 nojalla $\mathcal{M} \vDash_X (\forall x \mid t)\, \varphi$. $\square$

Seuraavaksi olisi mielekästä tutkia voidaanko määritelmä 3.19 yleistää myös universaalikvantioinnille termijoukon arvojen yhdisteen tai leikkauksen sekä niiden komplementtien suhteen. Toinen luonteva jatkokysymys on, että voisimmeko määritellä IEF-logiikalla myös kvanttorin $(\forall x \subseteq t_1 : x \mid t_2)\, \varphi$, jolla olisi seuraava totuusehto:

$$\mathcal{M} \vDash_X (\forall x \subseteq t_1 : x \mid t_2)\, \varphi, \quad \text{joss } \mathcal{M} \vDash_{X[A/x]} \varphi, \text{ missä } A = X(t_1) \setminus X(t_2).$$

Edelleen voisimme miettiä voidaanko tätä kvanttoria yleistää termijoukon arvojen leikkauksen ja yhdisteen suhteen. Emme kuitenkaan paneudu näihin kysymyksiin tarkemmin tässä tutkielmassa.

3.4.2 Muuttujan arvojen yhtenäistäminen

Tutkitaan seuraavaksi hieman erikoisen näköistä kvanttoria $(\forall x \subseteq x)$. Jos φ on IEF_L-kaava ja $x \in \mathrm{dom}(X)$, niin kaavalle $(\forall x \subseteq x)\, \varphi$ pätee seuraava totuusehto:

$$\mathcal{M} \vDash_X (\forall x \subseteq x)\, \varphi, \text{ joss } \mathcal{M} \vDash_{X[X(x)/x]} \varphi.$$

Muuttuja x siis kvantifioidaan uudelleen sen perusteella mitkä sen aikaisemmat arvot olivat tiimissä X. Tiimi $X[X(x)/x]$ poikkeaa tiimistä X siten, että tiimin X kaikki arvot muuttujalle x esiintyvät nyt liitettyinä kaikkiin tiimin X tulkintafunktioihin.

Huomautus. Koska EXF-logiikalle määritelty kvanttori $(\forall x \subseteq^{\mathrm{e}} x)$ toimii vastaavalla tavalla kuin kvanttori $(\forall x \subseteq x)$ IEF-logiikalle, niin muuttujan arvojen yhtenäistämistä voidaan käyttää vastaavalla tavalla EXF-logiikassa.

Mikäli muuttuja x on aiemmin kvantifioitu jollain eksistenssikvanttorilla, niin kvanttori $(\forall\, x \subseteq x)$ pakottaa kaikki kvantifioidut arvot liitetyiksi kaikkiin tulkintafunktioihin. Saamme näin määritellyksi seuraavat uudenlaiset eksistenssikvanttorit:

Määritelmä 3.20. Oletetaan, että $\varphi \in \mathrm{IEF}_L$, $t \in \mathrm{T}_L$ ja x on muuttuja. Käytetään seuraavia lyhennysmerkintöjä:

$$\exists^{\mathrm{s}}_{\mathrm{u}}\, x\, \varphi := \exists^{\mathrm{s}}\, x\, (\forall\, x \subseteq x)\, \varphi$$
$$(\exists^{\mathrm{s}}_{\mathrm{u}}\, x \subseteq t)\, \varphi := (\exists^{\mathrm{s}}\, x \subseteq t)(\forall\, x \subseteq x)\, \varphi$$
$$(\exists^{\mathrm{s}}_{\mathrm{u}}\, x \mid t)\, \varphi := (\exists^{\mathrm{s}}\, x \mid t)(\forall\, x \subseteq x)\, \varphi$$

Alaindeksi u tulee sanasta 'uniform' sen merkkinä, että arvot pitää kvantifioida yhtenäisellä tavalla. Näille uusille kvanttoreille on voimassa seuraavat totuusehdot:

Lause 3.22. *Oletetaan, että $\varphi \in \mathrm{IEF}_L$, $t \in \mathrm{T}_L$ ja x on muuttuja. Nyt on voimassa:*

a) $\mathcal{M} \vDash_X \exists^{\mathrm{s}}_{\mathrm{u}}\, x\, \varphi$, *joss on olemassa $A \subseteq M$, s.e. $\mathcal{M} \vDash_{X[A/x]} \varphi$.*

b) $\mathcal{M} \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}}_{\mathrm{u}}\, x \subseteq t)\, \varphi$, *joss on olemassa $A \subseteq X(t)$, s.e. $\mathcal{M} \vDash_{X[A/x]} \varphi$.*

c) $\mathcal{M} \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}}_{\mathrm{u}}\, x \mid t)\, \varphi$, *joss on olemassa $A \subseteq \overline{X(t)}$, s.e. $\mathcal{M} \vDash_{X[A/x]} \varphi$.*

Todistus. Todistamme näistä ainoastaan kohdan b). Muut kohdat voidaan todistaa täsmälleen samalla tavalla.

Oletetaan ensin, että $\mathcal{M} \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}}_{\mathrm{u}}\, x \subseteq t)\, \varphi$, eli $\mathcal{M} \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}}\, x \subseteq t)(\forall\, x \subseteq x)\, \varphi$. Siis on olemassa kuvaus $F : X \to \mathcal{P}^*(X(t))$, siten että $\mathcal{M} \vDash_{X'} (\forall\, x \subseteq x)\, \varphi$, missä $X' := X[F/x]$. Näin ollen siis $\mathcal{M} \vDash_{X'[X'(x)/x]} \varphi$. Merkitään

$$A := \{a \in F(s) \mid s \in \mathrm{dom}(F)\}$$

Koska nyt $X'(x) = X[F/x](x) = A$ ja $X'[A/x] = (X[F/x])[A/x] = X[A/x]$, niin $\mathcal{M} \vDash_{X[A/x]} \varphi$. Lisäksi koska $\mathrm{im}(F) \subseteq \mathcal{P}^*(X(t))$, niin selvästi $A \subseteq X(t)$.

Oletetaan sitten, että on olemassa sellainen $A \subseteq X(t)$, että $\mathcal{M} \vDash_{X[A/x]} \varphi$. Määritellään kuvaus:

$$F : X \to \mathcal{P}^*(M), \quad \text{s.e. } s \mapsto A \ \text{ jokaisella } s \in X.$$

Merkitään $X' := X[F/x]$. Nyt pätee, että $X'(x) = X[F/x](x) = A$ ja edelleen

$$X'[X'(x)/x] = X'[A/x] = (X[F/x])[A/x] = X[A/x].$$

Näin ollen $\mathcal{M} \vDash_{X'[X'(x)/x]} \varphi$, eli $\mathcal{M} \vDash_{X'} (\forall\, x \subseteq x)\, \varphi$. Edelleen on voimassa, että $\mathcal{M} \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}}\, x \subseteq t)(\forall\, x \subseteq x)\, \varphi$, eli $\mathcal{M} \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}}_{\mathrm{u}}\, x \subseteq t)\, \varphi$. □

Huomautus. Edellä määriteltyjen kvanttorien totuusmääritelmästä ei näy suoraan, että kyse on tosiaan eksistenssikvantifioinnista, kuten merkintä antaa ymmärtää. Mikäli haluttaisiin korostaa, on olemassa valintafunktio, joka asettaa arvot muuttujalle x yhtenäisellä tavalla, niin totuusmääritelmä voitaisiin esittää toisenlaisessa yhtäpitävässä muodossa. Esimerkiksi kvanttorille $(\exists^{\mathrm{s}}_{\mathrm{u}}\, x \subseteq t)$ on voimassa, että

$$\begin{aligned}\mathcal{M} \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}}_{\mathrm{u}}\, x \subseteq t)\, \varphi, \text{ joss on olemassa } F : X \to \mathcal{P}^*(X(t)) \text{ ja } A \subseteq M,\\ \text{s.e. } \mathcal{M} \vDash_{X[F/x]} \varphi \text{ ja } F(s) = A \text{ jokaisella } s \in X.\end{aligned}$$

Huomaa, että koska kunkin tulkintafunktion $s \in X$ kuva pitää valita yhtenäisellä tavalla, niin kuvaus F määräytyy yksikäsitteisesti joukon A valinnan perusteella.

Vastaavalla tavalla kuin lauseessa 3.22 voisimme määritellä yhtenäisen version myös termijoukon suhteen tehtävästä inkluusio- ja ekskluusiokvantifioinnista sekä niiden yhdistelmästä. Seuraavassa esimerkissä näemme millaisia lisäehtoja voimme asettaa yhtenäiselle eksistenssikvantifioinnille.

Esimerkki 3.14. Voimme helposti vaatia kvanttorin $\exists^{\mathrm{s}}_{\mathrm{u}}\, x$ totuusmääritelmässä esiintyvästä joukosta A, että se sisältää jonkun termin $t \in \mathrm{T}_L$ arvot:

$$\begin{aligned}\mathcal{M} \vDash_X \delta^w_t \Big[\exists^{\mathrm{s}}_{\mathrm{u}}\, x\, (w \subseteq x \wedge \varphi)\Big], \quad &\text{joss on olemassa } A \subseteq M,\\ &\text{s.e. } X(t) \subseteq A \text{ ja } \mathcal{M} \vDash_{X[F/x]} \varphi.\end{aligned}$$

Vastaavalla tavalla käyttäen ekskluusioatomia voisimme vaatia joukolta A, että se on valittava jonkin termin $t \in \mathrm{T}_L$ saamien arvojen ulkopuolelta, eli että $X(t) \cap A = \emptyset$.

Seuraavassa esimerkissä esittelemme uudenlaiset tallennuskaavat käyttäen apuna muuttujan arvojen yhtenäistämistä. Osoitamme lisäksi miten niiden sekä termijoukon arvot säilyttävän disjunktion avulla voidaan estää informaation häviäminen tiimin jakautuessa disjunktion kohdalla.

Esimerkki 3.15. Määritelmässä 3.5 määrittelimme kaavan φ tallennuskaavan $\delta^{u_1\ldots u_n}_{t_1\ldots t_n}[\varphi]$ niin, että se kvantifioi jokaiseen tiimin X tulkintafunktioon s muuttujan u_i arvoksi arvon $s(t_i)$ jokaisella $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Käyttäen muuttujan arvojen yhtenäistämistä voimme vaatia jokaiseen tulkintafunktioon liitettäväksi kaikki termin t_i arvot tiimissä X jokaisella $i \in \{1, \ldots, n\}$. Tällä tavalla saamme määritellyksi vaihtoehtoisen tallennuskaavan $\gamma^{u_1\ldots u_n}_{t_1\ldots t_n}[\varphi]$:

$$\begin{aligned}\gamma^{u_1\ldots u_n}_{t_1\ldots t_n}[\varphi] := \exists^{\mathrm{s}}\, u_1 \ldots \exists^{\mathrm{s}}\, u_n \left(\bigwedge_{i=1}^{n} u_i = t_i \wedge (\forall\, u_1 \subseteq u_1) \ldots (\forall\, u_n \subseteq u_n)\, \varphi \right),\\ \text{missä } u_1, \ldots, u_n \text{ ovat eri muuttujia, s.e. } u_1, \ldots, u_n \notin \mathrm{Vr}(t_1, \ldots, t_n).\end{aligned}$$

Tämäkin kaava säilyttää termien $t_1, \ldots, t_n$ arvot tiimissä tallentamalla ne muuttujiin $u_1, \ldots, u_n$, kuten tallennuskaava $\delta[\varphi]$. Erona on, että koska nyt jokaiseen tulkintafunktioon on liitetty kaikki termin t_i arvot, niin termien alkuperäiset arvot voidaan säilyttää myös disjunktion tapauksessa käyttäen apuna muuttujien $u_1, \ldots, u_n$ arvot säilyttävää disjunktiota $\vee_{u_1 \ldots u_n}$.

Edellisen menetelmän avulla voimme esittää lisäehtoja sille, miten tiimi pitää jakaa disjunktiossa. Esimerkiksi jos $\psi, \theta \in \mathrm{IEF}_L$ ja $t, t' \in \mathrm{T}_L$, siten että $u \notin \mathrm{Fr}(\psi) \cup \mathrm{Fr}(\theta) \cup \mathrm{Vr}(t, t')$, niin voidaan osoittaa, että

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M} \vDash_X \gamma_t^u \Big[(u \subseteq t' \wedge \psi) \vee_u (u \subseteq t' \wedge \theta)\Big],\\
&\qquad \text{joss on olemassa } Y, Y' \subseteq X, \text{ s.e. } Y \cup Y' = X,\ \mathcal{M} \vDash_Y \psi \text{ ja } \mathcal{M} \vDash_{Y'} \theta\\
&\qquad\qquad \text{sekä lisäksi } X(t) \subseteq Y(t'),\ \text{jos } Y \neq \emptyset \text{ ja } X(t) \subseteq Y'(t'),\ \text{jos } Y' \neq \emptyset.
\end{aligned}$$

Näin esitetty kaava siis sanoo saman kuin kaava $\psi \vee \theta$, sillä lisäyksellä, että tiimin X jako pitää tehdä niin, että termin t arvot ennen jakoa sisältyvät termin t' arvoihin jaon jälkeen molemmissa osatiimeissä (olettaen, että osatiimit ovat epätyhjiä). Tällainen vaatimus on tietenkin mielekäs ainoastaan silloin, kun alkuperäiselle tiimille X pätee, että $X(t) \subseteq X(t')$.

Näin määritelty vaihtoehtoinen tallennuskaava ei tosin säilytä tietoa siitä mikä termin t_i arvo liittyi mihinkin tulkintafunktioon. Voimme myös yhdistää nämä tallennuskaavat kaavaksi $\delta^{u_1 \ldots u_n}_{t_1 \ldots t_n}[\gamma^{w_1 \ldots w_n}_{t_1 \ldots t_n}[\varphi]]$, jolloin saamme säilytettyä kutakin tiimin X tulkintafunktiota kohti tiedon siihen liittyvästä termin t_i arvosta muuttujan u_i arvona, sekä myös tiedon tiimin X kaikista termin t_i arvoista muuttujan w_i arvoissa.

Luku 4

INF- ja EXF-logiikoiden ilmaisuvoima

Tässä luvussa tutkimme INF-, EXF- ja IEF-logiikoiden ilmaisuvoimaa sekä kaavojen että lauseiden tasolla. Vertaamme niitä eri logiikoihin kuten inkluusio- ja ekskluusiologiikoihin, riippuvuuslogiikkaan, sekä toisen kertaluvun logiikkaan. Pyrimme selvittämään tutkimiemme logiikoiden ilmaisuvoimallisen aseman suhteessa muiden tunnettujen logiikoiden muodostamaan hierarkiaan.

4.1 DEP- ja NDEP-logiikoiden ilmaisuvoima

Tässä kappaleessa määrittelemme Väänäsen [17] kehittämän riippuvuuslogiikan ('dependence logic', DEP-logiikka) sekä siihen liittyvän Gallianin [5] esittelemän ns. epäriippuvuuslogiikan ('nondependence logic', NDEP-logiikka). Esitämme myös Gallianin tekemät todistukset näiden logiikoiden suhteesta inkluusio- ja ekskluusiologiikoihin.

Esittelemme lisäksi DEP- ja NDEP-logiikoiden yksipaikkaiset fragmentit: vakiologiikan ('constancy logic', CON-logiikka) ja ns. vakiottomuuslogiikan ('inconstancy-logic', INCON-logiikka). Lopuksi esittelemme vielä Väänäsen ja Grädelin [8] kehittämän riippumattomuuslogiikan ('independence logic', INDEP-logiikka), joka täydentää tässä kappaleessa määrittelemiemme logiikoiden välisen suhdehierarkian.

4.1.1 EXC- ja DEP-logiikoiden välinen suhde

Määrittelemme Riippuvuuslogiikan (DEP-logiikka) syntaksin ja semantiikan samaan tapaan kuin Väänänen [17, s. 18-21]. Teemme tosin eron siinä, että emme salli syntaksissa negaation esiintyvän riippuvuusatomien edessä. Mutta Väänänen määrittelee riippuvuusatomin negaation olevan tosi ainoastaan tyhjällä tiimillä, joten tämä ero ei muuta saadun logiikan ilmaisuvoimaa.

Määritelmä 4.1. Määritellään kieli DEP_L seuraavasti:

- Jos $\varphi \in \mathrm{FO}_L$, niin $\varphi \in \mathrm{DEP}_L$.
- Jos $t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{T}_L$, niin $=(t_1, \ldots, t_n) \in \mathrm{DEP}_L$.
- Jos $\varphi, \psi \in \mathrm{DEP}_L$, niin $(\varphi \wedge \psi) \in \mathrm{DEP}_L$ ja $(\varphi \vee \psi) \in \mathrm{DEP}_L$.
- Jos $\varphi \in \mathrm{DEP}_L$ ja x on muuttuja, niin $\exists^{\mathrm{s}} x\, \varphi \in \mathrm{DEP}_L$ ja $\forall x\, \varphi \in \mathrm{DEP}_L$.

Jos $\varphi \in \mathrm{DEP}_L$, niin sanotaan että φ on DEP_L*-kaava*. Laajennetaan $\mathrm{Fr}(\varphi)$:n ja $\mathrm{Sf}(\varphi)$:n määritelmiä seuraavasti:

$$\begin{aligned}\mathrm{Fr}(=(t_1, \ldots, t_n)) &= \mathrm{Vr}(t_1, \ldots, t_n)\\ \mathrm{Sf}(=(t_1, \ldots, t_n)) &= \{=(t_1, \ldots, t_n)\}\end{aligned}$$

Riippuvuusatomeilla $=(t_1, \ldots, t_n)$ on seuraavanlainen totuusmääritelmä:

Määritelmä 4.2. Olkoon $\mathcal{M}$ malli, X tiimi ja $t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{T}_L$, siten että $\mathrm{Vr}(t_1, \ldots, t_n) \subseteq \mathrm{dom}(X)$. Määritellään

$$\begin{aligned}\mathcal{M} \vDash_X =(t_1, \ldots, t_n), \text{ joss } & s(t_n) = s'(t_n) \text{ kaikilla } s, s' \in X,\\ & \text{joilla pätee } (s(t_1), \ldots, s(t_{n-1})) = (s'(t_1), \ldots, s'(t_{n-1})).\end{aligned}$$

Siis $\mathcal{M} \vDash_X =(t_1, \ldots, t_n)$, jos ja vain jos kaikki tiimin X tulkintafunktiot, jotka kuvaavat termit $t_1, \ldots, t_{n-1}$ samalla tavalla, kuvaavat myös termin t_n samalla tavalla. Riippuvuusatomin $=(t_1, \ldots, t_n)$ merkitys voidaan tulkita, että termin t_n arvo riippuu korkeintaan termeistä $t_1, \ldots, t_{n-1}$.

Riippuvuuslogiikka on hyvin läheisessä suhteessa ekskluusiologiikkaan, vaikka se näyttääkin semantiikkansa puolesta varsin erilaiselta. Galliani on esittänyt väitöskirjassaan käännökset EXC_L-kaavojen ja DEP_L-kaavojen välille [5, s. 81-84]. Saamme näin ollen seuraavan lauseen:

Lause 4.1. EXC*-logiikka on sekä kaavojen että lauseiden tasolla ilmaisuvoimaltaan yhtä vahva kuin* DEP*-logiikka.*

Tämän lauseen perusteella voisi ajatella, että ekskluusiologiikka on vain riippuvuuslogiikka vaihtoehtoisella syntaksilla esitettynä. Niiden välinen suhde ei kuitenkaan ole niin yksinkertainen kuin miltä alkuun näyttää. Edellinen lause nimittäin pätee vain kun ekskluusio- ja riippuvuusatomien paikkalukuja ei rajoiteta. Mikäli tutkimme mitä näillä logiikoilla voi ilmaista sallimalla paikkaluvultaan vain tietyn kokoisia atomeja, logiikoiden ilmaisuvoimat eivät ole enää ekvivalentteja. Palaamme tähän tarkemmin kappaleessa 4.2, kun tutkimme EXF-logiikan ilmaisuvoimaa.

Merkitsemme $\varphi \in \mathrm{DEP}_L[k]$, jos $\varphi \in \mathrm{DEP}_L$ ja kaikille riippuvuusatomeille $=(t_1, \ldots, t_n) \in \mathrm{Sf}(\varphi)$ on voimassa, että $n \leq k$. Kutsumme näin saatua logiikkaa k-paikkaiseksi riippuvuuslogiikaksi tai $\mathrm{DEP}[k]$-logiikaksi.

Tapauksessa $k = 1$ voimme merkitä myös $\mathrm{CON}_L = \mathrm{DEP}_L[1]$. Kutsumme näin saatua logiikkaa CON-logiikaksi ja nimitämme yksipaikkaisia riippuvuusatomeita *vakioatomeiksi*. Vakioatomit esittelimme jo pykälässä 3.2.

Vakioatomin $=(t)$ ilmaisema tiimin ominaisuus ei selvästi ole ilmaistavissa ensimmäisen kertaluvun logiikalla. Galliani on osoittanut [5, s. 60-63], että kuitenkaan lauseiden tasolla vakioatomit eivät lisää ensimmäisen kertaluvun logiikan ilmaisuvoimaa:

Lause 4.2. CON-*logiikka on lauseiden tasolla ilmaisuvoimaltaan ekvivalentti ensimmäisen kertaluvun logiikan kanssa.*

Esitämme vielä seuraavan lauseen CON- ja DEP-logiikan sekä inkluusiologiikan välisistä suhteista kaavojen tasolla:

Lause 4.3. INC-*logiikka ei sisälly* DEP- *eikä* CON-*logiikkaan, eivätkä ne sisälly* INC-*logiikkaan.*

Todistus. Galliani on osoittanut, että inkluusio-logiikka on suljettu yhdisteiden suhteen [5, s. 74-75]. Vakioatomi ei ole suljettu yhdisteiden suhteen, sillä jos $X = \{(x, 0)\}$ ja $Y = \{(x, 1)\}$, niin $\mathcal{M} \vDash_X =(x)$ $\mathcal{M} \vDash_Y =(x)$, mutta $\mathcal{M} \nvDash_{X \cup Y} =(x)$. Täten vakioatomia ei voi ilmaista inkluusiologiikan avulla. Näin ollen CON-logiikka ei sisälly inkluusiologiikkaan, jolloin ei tietysti myöskään DEP-logiikka sisälly siihen.

Väänänen on osoittanut [17, s. 24] että DEP-logiikka on alaspäin suljettu. Totesimme pykälässä 3.1.4, että inkluusioatomi $t \subseteq t'$ ei ole alaspäin suljettu, joten sitä ei voi ilmaista DEP-logiikalla. Näin ollen inkluusiologiikka ei sisälly DEP-logiikkaan, jolloin se ei tietysti myöskään sisälly CON-logiikkaan. □

4.1.2 INC- ja NDEP-logiikoiden välinen suhde

Määrittelemme seuraavaksi NDEP-logiikan lisäämällä ensimmäisen kertaluvun logiikan aakkostoon $\neq(t_1, \ldots, t_n)$-atomit, missä $t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{T}_L$. Galliani määrittelee tämän atomin ensin yksipaikkaisena [5, s. 99] ja johtaa siitä monipaikkaisen käyttämiensä ilmoitus-operaattorien ('announcement-operator') avulla. Määrittelemme kuitenkin tämän atomikaavan suoraan n-paikkaisena:

Määritelmä 4.3. Määritellään kieli NDEP_L seuraavasti:

- Jos $\varphi \in \mathrm{FO}_L$, niin $\varphi \in \mathrm{NDEP}_L$.
- Jos $t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{T}_L$, niin $\neq(t_1, \ldots, t_n) \in \mathrm{NDEP}_L$.
- Jos $\varphi, \psi \in \mathrm{NDEP}_L$, niin $(\varphi \wedge \psi) \in \mathrm{NDEP}_L$ ja $(\varphi \vee \psi) \in \mathrm{NDEP}_L$.
- Jos $\varphi \in \mathrm{NDEP}_L$ ja x on muuttuja,
  niin $\exists^{\mathrm{s}} x\, \varphi \in \mathrm{NDEP}_L$ ja $\forall x\, \varphi \in \mathrm{NDEP}_L$.

Jos $\varphi \in \mathrm{NDEP}_L$, niin sanotaan että φ on NDEP$_L$-*kaava*. Laajennetaan Fr(φ):n ja Sf(φ):n määritelmiä seuraavasti:

$$\mathrm{Fr}(\neq(t_1,\ldots,t_n)) = \mathrm{Vr}(t_1,\ldots,t_n)$$
$$\mathrm{Sf}(\neq(t_1,\ldots,t_n)) = \{\neq(t_1,\ldots,t_n)\}$$

NDEP-*atomeilla* $\neq(t_1,\ldots,t_n)$ on seuraavanlainen totuusmääritelmä:

Määritelmä 4.4. Olkoon $\mathcal{M}$ malli, X tiimi ja $t_1,\ldots,t_n \in \mathrm{T}_L$, siten että $\mathrm{Vr}(t_1,\ldots,t_n) \subseteq \mathrm{dom}(X)$. Määritellään

$$\begin{aligned}\mathcal{M} \vDash_X \neq(t_1,\ldots,t_n), \text{ joss kaikilla } s \in X \text{ on olemassa } s' \in X,&\\ \text{s.e. } (s(t_1),\ldots,s(t_{n-1})) = (s'(t_1),\ldots,s'(t_{n-1})),&\\ \text{mutta } s(t_n) \neq s'(t_n).&\end{aligned}$$

Siis $\mathcal{M} \vDash_X \neq(t_1,\ldots,t_n)$, jos ja vain jos jokaista tiimin X tulkintafunktiota s vastaa tulkintafunktio s', joka kuvaa termit $t_1,\ldots,t_{n-1}$ samalla tavalla, mutta termin t_n eri tavalla. Huomaa, että tämä ei ole kuitenkaan riippuvuusatomin $=(t_1,\ldots,t_n)$ negaatio – merkinnästään huolimatta.[1]

NDEP-logiikka on puolestaan läheisessä suhteessa inkluusiologiikkaan, vaikka se ei semantiikasta heti ilmenekään. Gallianin on esittänyt käännöksen myös INC$_L$-kaavojen ja NDEP$_L$-kaavojen välille [5, s. 80-81, 100-102]. Saamme näin ollen seuraavan lauseen:

Lause 4.4. INC-*logiikka on sekä kaavojen että lauseiden tasolla ilmaisuvoimaltaan yhtä vahva kuin* NDEP-*logiikka.*

Vastaavasti kuin ekskluusiologiikan ja riippuvuuslogiikan tapauksessa, edellinen lause pätee vain, mikäli sallimme paikkaluvultaan kaikensuuruiset atomit. Jos rajoitamme atomien paikkalukuja tulemme huomaamaan näiden logiikoiden väliset ilmaisuvoimaerot. Palaamme tähän aiheeseen tarkemmin kappaleessa 4.3, kun tutkimme INF-logiikan ilmaisuvoimaa.

Merkitsemme $\varphi \in \mathrm{NDEP}_L[k]$, jos $\varphi \in \mathrm{NDEP}_L$ ja kaikilla atomikaavoilla $\neq(t_1,\ldots,t_n) \in \mathrm{Sf}(\varphi)$ pätee $n \leq k$. Kutsumme näin saatua logiikkaa NDEP[k]-logiikaksi. Jos $k = 1$ voimme merkitä myös $\mathrm{INCON}_L = \mathrm{DEP}_L[1]$ ja kutsua näin saatua logiikkaa INCON-logiikaksi. Yksipaikkaisen NDEP-atomin tapauksessa totuusmääritelmä yksinkertaistuu muotoon:

$$\mathcal{M} \vDash_X \neq(t), \text{ joss kaikilla } s \in X \text{ on olemassa } s' \in X, \text{ s.e. } s(t) \neq s'(t).$$

Mikäli tiimi X on epätyhjä, niin tämä on edelleen selvästi yhtäpitävää sen kanssa että $|X(t)| \geq 2$. Esitämme tämän vielä seuraavana lemmana.

[1] Galliani käyttää lähteessä [4, s. 98] samaa nimeä ja merkintää atomille, joka määritellään kuitenkin eri tavalla. Tässä lähteessä määritelty atomikaava on itse asiassa juuri riippuvuusatomin negaatio, eikä se lisää FO-logiikan ilmaisuvoimaa lauseiden tasolla.

Lemma 4.5. *Olkoon $t \in \mathrm{T}_L$, $\mathcal{M}$ malli ja $X \neq \emptyset$ tiimi. Nyt on voimassa:*

$$\mathcal{M} \vDash_X \neq\!(t), \text{ joss } |X(t)| \geq 2.$$

Tämäkään ominaisuus ei selvästi ole ilmaistavissa ensimmäisen kertaluvun logiikalla, sillä ensimmäisen kertaluvun logiikka on alaspäin suljettu. Mutta Gallianin tuloksista [4, s. 98-101] seuraa, että lauseiden tasolla nämä atomit eivät lisää ensimmäisen kertaluvun logiikan ilmaisuvoimaa:

Lause 4.6. INCON-*logiikka on lauseiden tasolla ilmaisuvoimaltaan ekvivalentti ensimmäisen kertaluvun logiikan kanssa.*

Esitämme vielä lausetta 4.3 muistuttavan tuloksen NDEP- ja INCON-logiikoiden sekä ekskluusiologiikan välisistä suhteista:

Lause 4.7. EXC-*logiikka ei sisälly* NDEP- *eikä* INCON-*logiikkaan, eivätkä ne sisälly* EXC-*logiikkaan.*

Todistus. DEP-logiikka on alaspäin suljettu Väänäsen tulosten nojalla [17]. EXC-logiikka on lauseen 4.1 nojalla ekvivalentti DEP-logiikan kanssa, joten ekskluusiologiikkakin on alaspäin suljettu. Atomikaava $\neq\!(x)$ ei ole alaspäin suljettu, sillä jos esim. $X = \{(x, 0), (x, 1)\}$ ja $Y = \{(x, 0)\}$, niin $Y \subseteq X$ ja $\mathcal{M} \vDash_X \neq\!(x)$, mutta $\mathcal{M} \nvDash_Y \neq\!(x)$. Näin ollen atomikaavaa $\neq\!(x)$ ei voi ilmaista ekskluusiologiikalla. Täten INCON-logiikka ei sisälly ekskluusiologiikkaan, jolloin myöskään NDEP-logiikka ei sisälly ekskluusiologiikkaan.

NDEP-logiikka on lauseen 4.4 nojalla ekvivalentti inkluusiologiikan kanssa ja inkluusiologiikka on suljettu yhdisteiden suhteen, joten myös NDEP-logiikka on yhdisteiden suhteen suljettu. Riippuvuusatomit eivät ole suljettuja yhdisteiden suhteen, joten niitä ei voi ilmaista NDEP-logiikalla. Näin ollen DEP-logiikka ei sisälly NDEP-logiikkaan, jolloin lauseen 4.1 nojalla myöskään ekskluusiologiikka ei sisälly NDEP-logiikkaan. Tietysti tällöin ekskluusiologiikka ei sisälly myöskään INCON-logiikkaan. □

4.1.3 INEX- ja INDEP-logiikoiden välinen suhde

Esittelemme vielä INDEP-logiikan, joka täydentää hierarkian esittelemiemme logiikoiden välisistä suhteista. Se saadaan lisäämällä FO-logiikan aakkostoon *riippumattomuusatomit* ('independence atoms'):

$$t_1 \dots t_m \perp_{u_1 \dots u_k} t'_1 \dots t'_n, \quad \text{missä } t_i, t'_i, u_i \in \mathrm{T}_L \text{ jokaisella } i.$$

Niille annetaan seuraava totuusmääritelmä:

$\mathcal{M} \vDash_X t_1 \dots t_m \perp_{u_1 \dots u_k} t'_1 \dots t'_n$, joss
kaikilla $s, s' \in X$, joille $(s(u_1), \dots, s(u_k)) = (s'(u_1), \dots, s'(u_k))$
on olemassa $r \in X$, s.e.

$$\begin{cases} (s(u_1), \dots, s(u_k), s(t_1), \dots, s(t_m)) = (r(u_1), \dots, r(u_k), r(t_1), \dots, r(t_m)) \\ (s'(u_1), \dots, s'(u_k), s'(t'_1), \dots, s'(t'_n)) = (r(u_1), \dots, r(u_k), r(t'_1), \dots, r(t'_n)) \end{cases}$$

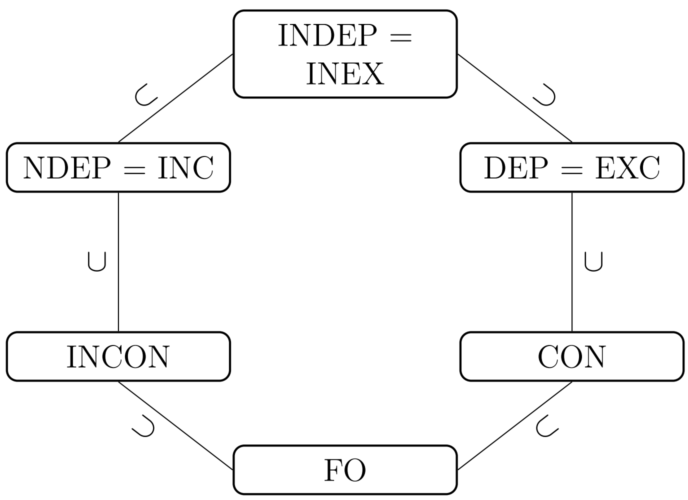
Emme paneudu tämän logiikan ominaisuuksiin tässä tutkielmassa sen tarkemmin. Esitämme ainoastaan seuraavan kokonaisuuden kannalta tärkeän tuloksen:

Lause 4.8. *Sekä* INC- *että* EXC-*logiikka sisältyvät kaavojen tasolla aidosti* INDEP-*logiikkaan. Lisäksi* INEX-*logiikka on ekvivalentti* INDEP-*logiikan kanssa sekä kaavojen että lauseiden tasolla.*

Todistus. Väänänen ja Grädel ovat esittäneet [8] riippuvuusatomin käännöksen INDEP-logiikkaan. Täten lauseen 4.1 nojalla siis ekskluusiologiikka sisältyy INDEP-logiikkaan. Galliani puolestaan on esittänyt INC_L-kaavojen käännöksen INDEP-logiikkaan [5, s. 75-78]. Näin ollen inkluusiologiikka sisältyy INDEP-logiikkaan.

Galliani on lisäksi esittänyt [5, s. 85-88,] riippumattomuusatomin ekvivalentissa muodossa käyttäen apuna inkluusio- ja ekskluusioatomeja. Tästä seuraa, että INEX-logiikka on ekvivalentti INDEP-logiikan kanssa. Koska INDEP-logiikka ei näin ollen voi olla suljettu alaspäin eikä suljettu yhdisteiden suhteen, niin inkluusio- ja ekskluusio-logiikka sisältyvät siihen aidosti kaavojen tasolla. □

Saamme tämän kappaleen tuloksista kokonaisuutena seuraavan kaavion esiteltyjen logiikoiden välisistä suhteista kaavojen tasolla:



Seuraavssa kappaleissa alamme tutkia INF-, EXF- sekä IEF-logiikoiden ilmaisuvoimaa ja selvittää miten ne sijoittuvat suhteessa yllä olevaan kaavioon.

4.2 EXF-logiikan ilmaisuvoima

Tässä kappaleessa tutkimme EXF-logiikan ilmaisuvoimaa suhteessa edellisessä kappaleessa esiteltyihin logiikoihin. Todistamme EXF-logiikkaa koskevat tulokset ennen INF-logiikan tuloksia siitä syystä, että EXF-logiikan puolella vastaavat tulokset ovat lyhempiä ja suoraviivaisempia todistaa. Vertaamme tässä kappaleessa EXF-logiikkaa ensin ekskluusiologiikkaan ja sitten DEP- sekä CON-logiikoihin.

4.2.1 EXF-logiikan suhde ekskluusiologiikkaan

Osoitimme kappaleessa 3.2, että yksipaikkaiset ekskluusioatomit $t_1 \mid t_2$ voidaan ilmaista ekskluusiokvanttorin $(\exists^{\mathrm{s}} x \mid t)$ avulla. Seuraavassa lauseessa osoitamme, että myös käänteinen väite pätee. Huomaa, että meidän pitää käyttää tässä käännöksessä apuna tallennuskaavaa, sillä ekskluusiokvanttorille sallitaan myös, että $x \in \mathrm{Vr}(t)$.

Lause 4.9. *Oletetaan, että* $\varphi \in \mathrm{EXF}_L$, $t \in \mathrm{T}_L$ *ja* u *on muuttuja, siten että* $u \notin \mathrm{Vr}(t) \cup \mathrm{Fr}(\varphi) \cup \{x\}$. *Nyt on voimassa:*

$$\mathcal{M} \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}} x \mid t)\, \varphi, \text{ joss } \mathcal{M} \vDash_X \delta^u_t\Big[\exists^{\mathrm{s}} x\, (x \mid u \wedge \varphi)\Big].$$

Todistus. Oletetaan ensin, että $\mathcal{M} \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}} x \mid t)\, \varphi$. Siis on olemassa kuvaus $F : X \to \mathcal{P}^*(\overline{X(t)})$, siten että $\mathcal{M} \vDash_{X[F/x]} \varphi$. Määritellään $F' : \delta[X] \to \mathcal{P}^*(M)$, siten että $\delta[s] \mapsto F(s)$. Olkoon $X' := (\delta[X])[F'/x]$. Koska $\mathrm{im}(F) \subseteq \mathcal{P}(\overline{X(t)})$ ja lemman 3.2 nojalla $X(t) = \delta[X](u)$, niin $\mathrm{im}(F') \subseteq \mathcal{P}(\overline{\delta[X](u)})$. Koska $F(s) = F'(\delta[s])$ jokaisella $s \in X$ ja oletuksen nojalla $u \notin \mathrm{Fr}(\varphi)$, niin lemman 3.4 nojalla $\mathcal{M} \vDash_{X'} \varphi$.

Olkoot $r, r' \in X'$. Tällöin on olemassa $s, s' \in \delta[X]$ sekä $a \in F(s)$ ja $a' \in F(s')$, siten että $r = s[a/x]$ ja $r' = s'[a'/x]$. Koska $a \in \overline{\delta[X](u)}$, eli $a \notin \delta[X](u)$, niin erityisesti $s'(u) \neq a$. Oletuksen nojalla u ja x ovat eri muuttujia, joten $r'(u) = s'(u)$. On osoitettu siis, että

$$r(x) = s[a/x](x) = a \neq s'(u) = r'(u).$$

Koska $r, r' \in X'$ olivat mielivaltaisesti valittuja, niin $\mathcal{M} \vDash_{X'} x \mid u$. Näin ollen pätee, että $\mathcal{M} \vDash_{X'} x \mid u \wedge \varphi$ ja edelleen $\mathcal{M} \vDash_{\delta[X]} \exists^{\mathrm{s}} x\, (x \mid u \wedge \varphi)$. Lemman 3.2 nojalla pätee, että $\mathcal{M} \vDash_X \delta[\exists^{\mathrm{s}} x\, (x \mid u \wedge \varphi)]$.

Oletetaan sitten, että $\mathcal{M} \vDash_X \delta[\exists^{\mathrm{s}} x\, (x \mid u \wedge \varphi)]$. Nyt lemman 3.2 nojalla pätee, että $\mathcal{M} \vDash_{\delta[X]} \exists^{\mathrm{s}} x\, (x \mid u \wedge \varphi)$. Siis on olemassa $F' : X \to \mathcal{P}(M)$, siten että $\mathcal{M} \vDash_{X'} x \mid u \wedge \varphi$, missä $X' := (\delta[X])[F'/x]$.

Osoitetaan seuraavaksi, että $\mathrm{im}(F') \subseteq \mathcal{P}(\overline{\delta[X](u)})$: Valitaan mielivaltaiset $B \in \mathrm{im}(F')$ ja $a \in B$. Tällöin on olemassa $s \in \delta[X]$, siten että $B = F'(s)$. Merkitään $r := s[a/x]$.

Tehdään vastaoletus, että $a \in \delta[X](u)$. Siis on olemassa $r' \in X'$, siten että $r'(u) = a$. Tällöin on olemassa $s' \in \delta[X]$ ja $a' \in F'(s')$, siten että $r' = s'[a'/x]$. Oletuksen nojalla x ja u ovat eri muuttujia, joten $s'(u) = r'(u)$. On osoitettu siis, että

$$r(x) = s[a/x](x) = a = s'(u) = r'(u).$$

Tämä on ristiriita, sillä $\mathcal{M} \vDash_{X'} x \mid u$. Näin ollen vastaoletus on väärä, joten $a \in \overline{\delta[X](u)}$. Ollaan osoitettu siis, että $\mathrm{im}(F') \subseteq \mathcal{P}(\overline{\delta[X](u)})$.

Määritellään $F : X \to \mathcal{P}^*(M)$, $s \mapsto F'(\delta[s])$. Nyt selvästi $F(s) = F'(\delta[s])$ jokaisella $s \in X$. Koska lisäksi $\mathcal{M} \vDash_{X'} \varphi$ ja oletuksen nojalla $u \notin \mathrm{Fr}(\varphi)$, niin lemman 3.4 nojalla $\mathcal{M} \vDash_{X[F/s]} \varphi$. Koska $\mathrm{im}(F') \subseteq \mathcal{P}(\overline{\delta[X](u)})$ ja lemman 3.2 nojalla $X(t) = \delta[X](u)$, niin $\mathrm{im}(F) \subseteq \mathcal{P}^*(\overline{X(t)})$. Täten $\mathcal{M} \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}} x \mid t)\, \varphi$. □

Korollaari 4.10. EXF*-logiikka on ilmaisuvoimaltaan täsmälleen yhtä vahva kuin* EXC[1]*-logiikka.*

Todistus. Tulos seuraa suoraan lauseista 3.8 ja 4.9 □

Tämä tulos ei vielä kuitenkaan vastaa tyhjentävästi kysymykseen EXF-logiikan ilmaisuvoimasta. Vaikka tiedetään lauseen 4.1 nojalla, että atomien paikkalukuja rajoittamatta ekskluusiologiikka ja DEP-logiikka ovat kaavojen tasolla ekvivalentit, niin tämä ei kerro meille mikä on EXF- ja DEP-logiikan välinen tarkka suhde.

4.2.2 EXF-logiikan suhde riippuvuuslogiikkaan

Pyrimme osoittamaan, että EXF-logiikka sijoittuu ilmaisuvoimaltaan aidosti CON- ja DEP[2]- logiikoiden väliin, eli että pätee:

$$\mathrm{CON} \subset \mathrm{EXF} \subset \mathrm{DEP}[2].$$

Huomaa, että koska CON-logiikka on DEP[1]-logiikka, niin tästä tuloksesta seuraa, että EXF-logiikka ei vastaa DEP-logiikkaa rajoitettuna mihinkään tiettyyn paikkalukuun.

Olemme osoittaneet jo lauseessa 3.11, että vakioatomit voidaan ilmaista EXF-logiikan avulla. Saamme näin seuraavan korollaarin:

Korollaari 4.11. EXF*-logiikka on ilmaisuvoimaltaan aidosti vahvempi kuin* CON*-logiikka.*

Todistus. Lauseen 3.11 nojalla CON-logiika sisältyy EXF-logiikkaan. Toisaalta lauseen 4.2 nojalla CON-logiikka on lauseiden tasolla ekvivalentti ensimmäisen kertaluvun logiikan kanssa. Mutta lauseen 3.15 nojalla EXF-logiikka on lauseiden tasolla ilmaisuvoimaltaan vahvempi kuin ensimmäisen kertaluvun logiikka. Näin ollen EXF-logiikka on ilmaisuvoimaltaan aidosti vahvempi kuin CON-logiikka. □

Osoitetaan seuraavaksi, että ekskluusiokvanttori voidaan ilmaista kaksipaikkaisen (ja yksipaikkaisen) riippuvuusatomin avulla. Tämä todistus on tehty samaan tapaan kuin Gallianin käännös EXC-logiikasta DEP-logiikkaan (tässä tutkielmassa lause 4.1). Erona on tosin, että yksipaikkaisen ekskluusioatomin sijasta tässä ilmaistaan ekskluusiokvanttori tallennuskaavaa apuna käyttäen:

Lause 4.12. *Oletetaan, että $t \in \mathrm{T}_L$ ja u, y, w_1, w_2 ovat eri muuttujia, siten että $u, y, w_1, w_2 \notin \mathrm{Vr}(t) \cup \mathrm{Fr}(\varphi) \cup \{x\}$. Nyt on voimassa:*

$$\mathcal{M} \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}} x \mid t)\, \varphi,$$

$$\textit{joss} \quad \mathcal{M} \vDash_X \delta^u_t \Big[\exists^{\mathrm{s}} x \,\Big(\forall y\, \exists^{\mathrm{s}} w_1\, \exists^{\mathrm{s}} w_2 \,\Big(=\!(w_1) \wedge =\!(y, w_2) \wedge ((w_1 = w_2 \wedge y \neq x) \vee (w_1 \neq w_2 \wedge y \neq u))\Big) \wedge \varphi\Big)\Big].$$

Todistus. Merkitään

$$\psi := \quad =\!(w_1) \wedge =\!(y, w_2) \wedge ((w_1 = w_2 \wedge y \neq x) \vee (w_1 \neq w_2 \wedge y \neq u)).$$

Oletetaan ensin, että $\mathcal{M} \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}} x \mid t)\, \varphi$. Siis on olemassa $F : X \to \mathcal{P}^*(\overline{X(t)})$, siten että $\mathcal{M} \vDash_{X[F/x]} \varphi$. Määritellään kuvaus $F' : \delta[X] \to \mathcal{P}^*(M)$, siten että $\delta[s] \mapsto F(s)$, ja merkitään $X' := (\delta[X])[F'/x]$. Koska $\mathrm{im}(F) \subseteq \mathcal{P}(\overline{X(t)})$ ja lemman 3.2 nojalla $X(t) = \delta[X](u)$, niin $\mathrm{im}(F') \subseteq \mathcal{P}(\overline{\delta[X](u)})$. Koska $F(s) = F'(\delta[s])$ jokaisella $s \in X$, ja oletuksen nojalla $u \notin \mathrm{Fr}(\varphi)$, niin lemman 3.4 nojalla $\mathcal{M} \vDash_{X'} \varphi$.

Merkitään $X_1 := X'[M/y]$. Tutkitaan ensin tapaus, että mallin $\mathcal{M}$ universumille olisi voimassa, että $|M| = 1$. Mutta tällöin $X(t) = M$, joten ei ole olemassa mitään kuvausta $F : X \to \mathcal{P}^*(\overline{X(t)})$. Näin ollen siis täytyy olla, että $\mathcal{M} \nvDash_X (\exists^{\mathrm{s}} x \mid t)\, \varphi$, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa.

Voidaan siis olettaa, että $|M| \geq 2$, jolloin on olemassa $a, b \in M$, siten että $a \neq b$. Määritellään:

$$\begin{cases} F_1 : X_1 \to \mathcal{P}^*(M), \text{ s.e. } s \mapsto \{a\} \text{ jokaisella } s \in X_1 \\ \qquad X_2 := X_1[F_1/w_1] \\ F_2 : X_2 \to \mathcal{P}^*(M), \text{ s.e. } \begin{cases} s \mapsto \{a\}, \text{ jos } s(y) \in X_2(u) \\ s \mapsto \{b\}, \text{ muuten} \end{cases} \\ \qquad X_3 := X_2[F_2/w_2] \end{cases}$$

Olkoot $s, s' \in X_3$. Kuvauksen F_1 määritelmän nojalla $s(w_1) = a = s'(w_1)$. Näin ollen siis $\mathcal{M} \vDash_{X_3} =\!(w_1)$. Olkoot sitten $s, s' \in X_3$, siten että $s(y) = s'(y)$. Jos $s(y) \in X_2(u)$, niin kuvauksen F_2 määritelmän nojalla $s(w_2) = a = s'(w_2)$. Mikäli taas $s(y) \notin X_2(u)$, niin tällöin kuvauksen F_2 määritelmän nojalla $s(w_2) = b = s'(w_2)$. Näin ollen siis $\mathcal{M} \vDash_{X_3} =\!(y, w_2)$.

Määritellään $Y := \{s \in X_3 \mid s(w_2) = a\}$ ja $Y' := \{s \in X_3 \mid s(w_2) = b\}$. Kuvauksen F_2 määritelmän nojalla selvästi $X_3 = Y \cup Y'$.

a) Kuvausten F_1 ja F_2 määritelmien nojalla jokaisella $s \in Y$ pätee, että $s(w_1) = a = s(w_2)$, joten $\mathcal{M} \vDash_Y w_1 = w_2$. Tehdään vastaoletus, että on olemassa $r \in Y$, siten että $r(y) = r(x)$. Nyt on olemassa $s \in X_2$, siten että $r = s[a/w_2]$. Koska $F_2(s) = \{a\}$, niin $s(y) \in X_2(u) = \delta[X](u)$. Näin ollen pätee, että

$$r(x) = r(y) = s(y) \in \delta[X](u).$$

Tämä on ristiriita, sillä täytyy olla, että $r(x) \in B$ jollain $B \in \mathrm{im}(F')$, ja aiemmin on todettu, että $\mathrm{im}(F') \subseteq \mathcal{P}(\overline{\delta[X](u)})$. Siis vastaoletus on väärä, joten $\mathcal{M} \vDash_Y y \neq x$. Edelleen pätee, että $\mathcal{M} \vDash_Y w_1 = w_2 \wedge y \neq x$.

b) Kuvausten F_1 ja F_2 määritelmien nojalla jokaisella $s \in Y$ pätee, että $s(w_1) = a \neq b = s(w_2)$, joten $\mathcal{M} \vDash_Y w_1 \neq w_2$. Tehdään vastaoletus, että on olemassa $r \in Y$, siten että $r(y) = r(u)$. Nyt on olemassa $s \in X_2$, siten että $r = s[b/w_2]$. Koska $F_2(s) = \{b\}$, niin $s(y) \notin X_2(u) = X_3(u)$. Kuitenkin $s(y) = r(y) = r(u)$, joten $s(y) \in X_3(u)$, mikä on ristiriita. Siis vastaoletus on väärä, joten $\mathcal{M} \vDash_{Y'} y \neq u$. Täten $\mathcal{M} \vDash_{Y'} w_1 \neq w_2 \wedge y \neq u$.

Kohtien a) ja b) nojalla $\mathcal{M} \vDash_{X_3} (w_1 = w_2 \wedge y \neq x) \vee (w_1 \neq w_2 \wedge y \neq u)$. On osoitettu siis, että $\mathcal{M} \vDash_{X_3} \psi$. Edelleen pätee, että $\mathcal{M} \vDash_{X'} \forall y\, \exists^{\mathrm{s}} w_1\, \exists^{\mathrm{s}} w_2\, \psi$. Koska lisäksi $\mathcal{M} \vDash_{X'} \varphi$, niin $\mathcal{M} \vDash_{X'} (\forall y\, \exists^{\mathrm{s}} w_1\, \exists^{\mathrm{s}} w_2\, \psi) \wedge \varphi$ ja edelleen

$$\mathcal{M} \vDash_{\delta[X]} \exists^{\mathrm{s}} x\, ((\forall y\, \exists^{\mathrm{s}} w_1\, \exists^{\mathrm{s}} w_2\, \psi) \wedge \varphi).$$

Tällöin lemman 3.2 nojalla pätee, että $\mathcal{M} \vDash_X \delta[\exists^{\mathrm{s}} x\, ((\forall y\, \exists^{\mathrm{s}} w_1\, \exists^{\mathrm{s}} w_2\, \psi) \wedge \varphi)]$.

Oletetaan sitten, että $\mathcal{M} \vDash_X \delta[\exists^{\mathrm{s}} x\, ((\forall y\, \exists^{\mathrm{s}} w_1\, \exists^{\mathrm{s}} w_2\, \psi) \wedge \varphi)]$. Lemman 3.2 nojalla pätee, että $\mathcal{M} \vDash_{\delta[X]} \exists^{\mathrm{s}} x\, ((\forall y\, \exists^{\mathrm{s}} w_1\, \exists^{\mathrm{s}} w_2\, \psi) \wedge \varphi)$. Näin ollen on olemassa kuvaus $F' : \delta[X] \to \mathcal{P}^*(M)$, siten että $\mathcal{M} \vDash_{X'} (\forall y\, \exists^{\mathrm{s}} w_1\, \exists^{\mathrm{s}} w_2\, \psi) \wedge \varphi$, missä $X' = (\delta[X])[F'/x]$. Erityisesti nyt pätee, että $\mathcal{M} \vDash_{X'} \varphi$.

Osoitetaan että $\mathrm{im}(F') \subseteq \mathcal{P}(\overline{\delta[X](u)})$: Tehdään vastaoletus, että on olemassa $s \in \delta[X]$ ja $a \in F'(s)$, siten että $a \in \delta[X](u)$. Siis on olemassa $s' \in \delta[X]$, siten että $s'(u) = a$. Valitaan jokin $a' \in F'(s')$, ja merkitään $r := s[a/x]$ sekä $r' := s'[a'/x]$, jolloin $r, r' \in X'$.

Merkitään $X_1 := X'[M/y]$. Koska $\mathcal{M} \vDash_{X'} \forall y\, \exists^{\mathrm{s}} w_1\, \exists^{\mathrm{s}} w_2\, \psi$, niin pätee $\mathcal{M} \vDash_{X_1} \exists^{\mathrm{s}} w_1\, \exists^{\mathrm{s}} w_2\, \psi$. Näin ollen on olemassa kuvaus $F_1 : X_1 \to \mathcal{P}^*(M)$, siten että $\mathcal{M} \vDash_{X_2} \exists^{\mathrm{s}} w_2\, \psi$, missä $X_2 := X_1[F_1/w_1]$. Edelleen on olemassa kuvaus $F_2 : X_2 \to \mathcal{P}^*(M)$, siten että $\mathcal{M} \vDash_{X_3} \psi$, missä $X_3 := X_2[F_2/w_2]$.

Koska $r[a/y] \in X_1$ ja $r'[a/y] \in X_1$, niin on olemassa $b \in F_1(r[a/y])$ ja $b' \in F_1(r'[a/y])$, siten että $r[a/y, b/w_1] \in X_2$ ja $r'[a/y, b'/w_1] \in X_2$. Edelleen on olemassa alkiot $c \in F_2(r[a/y, b/w_1])$ ja $c' \in F_2(r'[a/y, b'/w_1])$, siten että $r[a/y, b/w_1, c/w_2] \in X_3$ ja $r'[a/y, b'/w_1, c'/w_2] \in X_3$. Merkitään $q := r[a/y, b/w_1, c/w_2]$ ja $q' := r'[a/y, b'/w_1, c'/w_2]$.

Koska $\mathcal{M} \vDash_{X_3} {=}(w_1)$, niin täytyy olla että $q(w_1) = q'(w_1)$ eli $b = b'$. Koska lisäksi $\mathcal{M} \vDash_{X_3} {=}(y, w_2)$ ja $q(y) = q'(y)$, niin täytyy olla myös, että $q(w_2) = q'(w_2)$ eli $c = c'$.

a) Oletetaan että $a = b$. Koska $\mathcal{M} \models_{X_3} (w_1 = w_2 \wedge y \neq x) \wedge (w_1 \neq w_2 \wedge y \neq u)$ ja $\mathcal{M} \not\models_q w_1 \neq w_2$, niin täytyy olla että $\mathcal{M} \models_q w_1 = w_2 \wedge y \neq x$. Kuitenkin

$$q(x) = r(x) = s[a/x](x) = a = q(y).$$

Näin ollen $\mathcal{M} \not\models_q y \neq x$, mikä on ristiriita.

b) Oletetaan että $a \neq b$. Koska $\mathcal{M} \models_{X_3} (w_1 = w_2 \wedge y \neq x) \wedge (w_1 \neq w_2 \wedge y \neq u)$ ja $\mathcal{M} \not\models_{q'} w_1 = w_2$, niin täytyy olla, että $\mathcal{M} \models_{q'} w_1 \neq w_2 \wedge y \neq u$. Kuitenkin

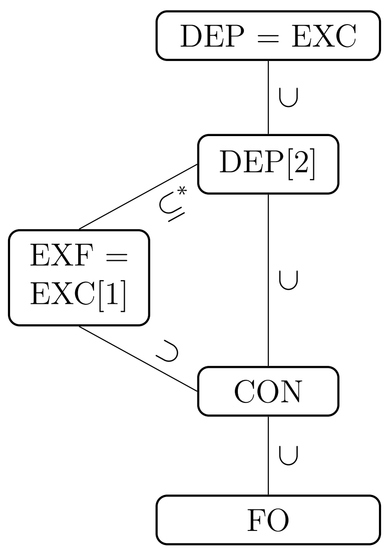
$$q'(y) = a = s'(u) = q'(u).$$

Näin ollen $\mathcal{M} \not\models_q y \neq u$, mikä on ristiriita.

Koska molemmissa tapauksissa päädytään ristiriitaan, niin vastaoletuksen täytyy olla väärä. Näin ollen jokaisella $s \in X$ pätee, että $F'(s) \subseteq \overline{\delta[X](u)}$, eli $\mathrm{im}(F') \subseteq \mathcal{P}(\overline{\delta[X](u)})$.

Määritellään $F : X \to \mathcal{P}^*(M)$, $s \mapsto F'(\delta[s])$. Nyt selvästi $F(s) = F'(\delta[s])$ jokaisella $s \in X$. Koska lisäksi $\mathcal{M} \models_{X'} \varphi$ ja oletuksen nojalla $u \notin \mathrm{Fr}(\varphi)$, niin lemman 3.4 nojalla $\mathcal{M} \models_{X[F/s]} \varphi$. Koska $\mathrm{im}(F') \subseteq \mathcal{P}(\overline{\delta[X](u)})$ ja lemman 3.2 nojalla $X(t) = \delta[X](u)$, niin $\mathrm{im}(F) \subseteq \mathcal{P}(\overline{[X](t)})$. Täten $\mathcal{M} \models_X (\exists^{\mathrm{s}} x \mid t)\, \varphi$. $\square$

Lauseen 4.12 nojalla pätee siis, että EXF $\subseteq$ DEP[2]. Saamme tämän kappaleen tuloksista seuraavan kaavion EXF-logiikan ilmaisuvoimasta kaavojen tasolla suhteessa muihin esittelemiimme logiikoihin:



Yllä olevassa kaaviossa aito osajoukkous DEP[2]- ja DEP-logiikoiden välillä seuraa Durandin ja Kontisen tuloksista [3] koskien riippuvuuslogiikan paikkalukuhierarkiaa. Tähdellä varustetun sisältymisen EXF-logiikan ja DEP[2]-logiikan välillä osoitamme myös aidoksi sisältymiseksi kappaleessa 4.4.

4.3 INF-logiikan ilmaisuvoima

Tässä kappaleessa tutkimme INF-logiikan ilmaisuvoimaa. Vertaamme sitä ensin inkluusiologiikkaan ja sitten NDEP- sekä INCON-logiikoihin. Tulemme päätymään hyvin samankaltaisiin tuloksiin kuin EXF-logiikan tapauksessa edellisessä kappaleessa.

4.3.1 INF-logiikan suhde inkluusiologiikkaan

Osoitimme kappaleessa 3.1, että yksipaikkaiset inkluusioatomit $t_1 \subseteq t_2$ voidaan ilmaista inkluusiokvanttorin $(\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)$ avulla. Kuten EXF-logiikan tapauksessa, myös käänteinen väite pätee, ja käännös voidaan tehdä vastaavalla tavalla kuin EXF-logiikalle lauseessa 4.9. Tälläkin kertaa tarvitaan tallennuskaavan käyttöä, sillä voi olla, että $x \in \mathrm{Vr}(t)$.

Lause 4.13. *Oletetaan, että $\varphi \in \mathrm{IEF}_L$, $t \in \mathrm{T}_L$ ja u on muuttuja, siten että $u \notin \mathrm{Vr}(t) \cup \mathrm{Fr}(\varphi) \cup \{x\}$. Nyt on voimassa:*

$$\mathcal{M} \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)\, \varphi, \text{ joss } \mathcal{M} \vDash_X \delta_t^u \Big[\exists^{\mathrm{s}} x\, (x \subseteq u \wedge \varphi)\Big].$$

Todistus. Oletetaan ensin, että $\mathcal{M} \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)\, \varphi$. Siis on olemassa kuvaus $F : X \to \mathcal{P}^*(X(t))$, siten että $\mathcal{M} \vDash_{X[F/x]} \varphi$. Määritellään $F' : \delta[X] \to \mathcal{P}^*(M)$, siten että $\delta[s] \mapsto F(s)$. Olkoon $X' := (\delta[X])[F'/x]$. Koska $\mathrm{im}(F) \subseteq \mathcal{P}(X(t))$ ja lemman 3.2 nojalla $X(t) = \delta[X](u)$, niin $\mathrm{im}(F') \subseteq \mathcal{P}(\delta[X](u))$. Koska $F(s) = F'(\delta[s])$ jokaisella $s \in X$, ja oletuksen nojalla $u \notin \mathrm{Fr}(\varphi)$, niin lemman 3.4 nojalla $\mathcal{M} \vDash_{X'} \varphi$.

Valitaan mielivaltainen $r \in X'$. Tällöin on olemassa $s \in \delta[X]$ ja $a \in F(s)$, siten että $r = s[a/x]$. Koska $a \in \delta[X](u)$, niin on olemassa $s' \in \delta[X]$, siten että $s'(u) = a$. Valitaan jokin $a' \in F(s')$ ja merkitään $r' := s'[a'/x]$. Nyt $r' \in X'$, ja koska x ja u ovat eri muuttujia, niin $r'(u) = s'(u)$. Täten

$$r(x) = s[a/x](x) = a = s'(u) = r'(u).$$

On osoitettu siis, että $\mathcal{M} \vDash_{X'} x \subseteq u$. Edelleen $\mathcal{M} \vDash_{X'} x \subseteq u \wedge \varphi$ ja täten $\mathcal{M} \vDash_{\delta[X]} \exists^{\mathrm{s}} x\, (x \subseteq u \wedge \varphi)$. Lemman 3.2 nojalla $\mathcal{M} \vDash_X \delta\Big[\exists^{\mathrm{s}} x\, (x \subseteq u \wedge \varphi)\Big]$.

Oletetaan sitten, että $\mathcal{M} \vDash_X \delta[\exists^{\mathrm{s}} x\, (x \subseteq u \wedge \varphi)]$. Lemman 3.2 nojalla pätee, että $\mathcal{M} \vDash_{\delta[X]} \exists^{\mathrm{s}} x\, (x \subseteq u \wedge \varphi)$. Siis on olemassa kuvaus $F' : X \to \mathcal{P}(M)$, siten että $\mathcal{M} \vDash_{X'} x \subseteq u \wedge \varphi$, missä $X' := (\delta[X])[F'/x]$.

Osoitetaan seuraavaksi, että $\mathrm{im}(F') \subseteq \mathcal{P}(\delta[X](u))$: Valitaan mielivaltaiset $B \in \mathrm{im}(F')$ ja $a \in B$. Tällöin on olemassa $s \in \delta[X]$, siten että $B = F'(s)$. Merkitään $r := s[a/x]$. Koska $\mathcal{M} \vDash_{X'} x \subseteq u$ ja $r \in X'$, niin on olemassa $r' \in X'$, siten että $r(x) = r'(u)$. Tällöin on olemassa $s' \in \delta[X]$ ja $a' \in F'(s')$, siten että $r' = s'[a'/x]$. Oletuksen nojalla x ja u ovat eri muuttujia, joten $s'(u) = r'(u)$. On osoitettu siis, että

$$a = s[a/x](x) = r(x) = r'(u) = s'(u).$$

Näin ollen $a \in \delta[X](u)$, ja edelleen $\mathrm{im}(F') \subseteq \mathcal{P}(\delta[X](u))$.

Määritellään $F : X \to \mathcal{P}^*(M)$, $s \mapsto F'(\delta[s])$. Nyt selvästi $F(s) = F'(\delta[s])$ jokaisella $s \in X$. Koska lisäksi $\mathcal{M} \vDash_{X'} \varphi$ ja oletuksen nojalla $u \notin \mathrm{Fr}(\varphi)$, niin lemman 3.4 nojalla $\mathcal{M} \vDash_{X[F/s]} \varphi$. Koska $\mathrm{im}(F') \subseteq \mathcal{P}(\delta[X](u))$ ja lemman 3.2 nojalla $X(t) = \delta[X](u)$, niin $\mathrm{im}(F) \subseteq \mathcal{P}^*(X(t))$. Täten $\mathcal{M} \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}}\, x \subseteq t)\, \varphi$.

□

Korollaari 4.14. INF*-logiikka on ilmaisuvoimaltaan täsmälleen yhtä vahva kuin kuin* INC[1]*-logiikka.*

Todistus. Tulos seuraa suoraan lauseista 3.1 ja 4.13 □

Vaikka edellinen lause kiinnittääkin INF-logiikan ilmaisuvoiman tarkasti suhteessa inkluusiologiikkaan, emme kuitenkaan tiedä vielä kaikkea INF-logiikan ilmaisuvoimasta. Sillä vaikka tiedetäänkin lauseen 4.4 nojalla, että atomien paikkalukuja rajoittamatta inkluusiologiikka ja NDEP-logiikka ovat kaavojen tasolla ekvivalentit, niin tämä ei vielä kerro meille mikä on INF- ja NDEP-logiikan välinen tarkka suhde.

4.3.2 INF-logiikan suhde NDEP-logiikkaan

Pyrimme seuraavaksi osoittamaan vastaavaan tapaan kuin EXF-logiikan ja DEP-logiikan tapauksessa, että INF-logiikalle ja NDEP-logiikalle pätee:

$$\mathrm{INCON} \subset \mathrm{INF} \subset \mathrm{NDEP}[2].$$

Osoitetaan ensin, että $\neq(t)$-atomit voidaan ilmaista INF-logiikalla. Tämä tulos on todistettu samaan tapaan kuin erikoistapaus Gallianin käännöksestä NDEP-logiikasta INC-logiikkaan (tässä tutkielmassa lause 4.4). Tässä lauseessa tosin ilmaisemme $\neq(t)$-atomin yksipaikkaisen inkluusioatomin sijasta inkluusiokvanttorilla.

Lause 4.15. *Oletetaan, että $t \in \mathrm{T}_L$. Olkoon x muuttuja, siten että $x \notin \mathrm{Vr}(t)$. Nyt on voimassa:*

$$\mathcal{M} \vDash_X \neq(t), \text{ joss } \mathcal{M} \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}}\, x \subseteq t)(x \neq t).$$

Todistus. Oletetaan ensin, että $\mathcal{M} \vDash_X \neq(t)$. Määritellään $F : X \to \mathcal{P}(M)$, siten että $s \mapsto X(t) \setminus \{s(t)\}$. Olkoon $s \in X$. Koska $\mathcal{M} \vDash_X \neq(t)$, niin on olemassa $s' \in X$, siten että $s(t) \neq s'(t)$. Näin ollen $s'(t) \in F(s)$, joten $F(s) \neq \emptyset$. Koska lisäksi $F(s) \subseteq X(t)$, niin $\mathrm{im}(F) \subseteq \mathcal{P}^*(X(t))$.

Olkoon $r \in X[F/x]$. Nyt on olemassa $s \in X$ ja $a \in F(s)$, siten että $r = s[a/x]$. Kuvauksen F määritelmän nojalla $s(t) \notin F(s)$, joten $a \neq s(t)$. Oletuksen nojalla $x \notin \mathrm{Vr}(t)$, joten $r(t) = s(t)$. On osoitettu siis, että

$$r(x) = s[a/x](x) = a \neq s(t) = r(t).$$

Täten pätee, että $\mathcal{M} \vDash_r x \neq t$. Koska $r \in X[F/x]$ oli mielivaltaisesti valittu, niin $\mathcal{M} \vDash_{X[F/x]} x \neq t$. Näin ollen $\mathcal{M} \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)(x \neq t)$.

Oletetaan sitten, että $\mathcal{M} \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)(x \neq t)$. Näin ollen on olemassa kuvaus $F : X \to \mathcal{P}^*(X(t))$, siten että $\mathcal{M} \vDash_{X[F/x]} x \neq t$. Olkoon $s \in X$. Valitaan jokin $a \in F(s)$ ja merkitään $r := s[a/x]$. Koska $F(s) \subseteq X(t)$, niin on olemassa $s' \in X$, siten että $s'(t) = a$. Koska $r \in X[F/x]$ ja $\mathcal{M} \vDash_{X[F/x]} x \neq t$, niin $r(x) \neq r(t)$. Oletuksen nojalla $x \notin \mathrm{Vr}(t)$, joten $r(t) = s(t)$. On osoitettu siis, että

$$s(t) = r(t) \neq r(x) = a = s'(t).$$

Koska $s \in X$ oli mielivaltaisesti valittu, niin $\mathcal{M} \vDash_X \neq(t)$. □

Korollaari 4.16. INF-*logiikka on ilmaisuvoimaltaan aidosti vahvempi kuin* INCON-*logiikka.*

Todistus. Lauseen 4.15 nojalla INCON-logiikka sisältyy INF-logiikkaan. Toisaalta lauseen 4.6 nojalla INCON-logiikka on lauseiden tasolla ekvivalentti ensimmäisen kertaluvun logiikan kanssa. Lauseen 3.7 nojalla INF-logiikka on lauseiden tasolla ilmaisuvoimaltaan vahvempi kuin ensimmäisen kertaluvun logiikka. Näin ollen INF-logiikka on ilmaisuvoimaltaan aidosti vahvempi kuin INCON-logiikka. □

Käyttämällä Gallianin käännöstä INC-logiikasta NDEP-logiikkaan (tässä tutkielmassa lause 4.4), saamme osoitettua että yksipaikkainen inkluusioatomi on ilmaistavissa käyttäen 4-paikkaista NDEP-atomia. Tämän perusteella korollaarin 4.14 nojalla myös inkluusiokvanttori on ilmaistavissa käyttäen 4-paikkaista NDEP-atomia. Muokkaamalla Gallianin todistusta jonkin verran pystymme osoittamaan, että inkluusiokvanttori on ilmaistavissa käyttäen pelkästään kaksipaikkaista (sekä yksipaikkaista) NDEP-atomia:

Lause 4.17. *Oletetaan, että x on muuttuja, $t \in \mathrm{T}_L$ ja $\varphi \in \mathrm{INF}_L$. Nyt on voimassa:*

$$\mathcal{M} \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)\, \varphi, \text{ joss } \mathcal{M} \vDash_X \psi_1 \vee \psi_2,$$

missä

$$\psi_1 := \exists^{\mathrm{s}} y_1 \exists^{\mathrm{s}} y_2 \forall z\, (z = y_1 \vee z = y_2) \wedge \delta_t^u[\exists^{\mathrm{s}} x\, ((x = u \vee \neq(u)) \wedge \varphi)]$$

$$\begin{aligned}\psi_2 := {} & \exists^{\mathrm{s}} y_1 \exists^{\mathrm{s}} y_2 \exists^{\mathrm{s}} y_3\, (y_1 \neq y_2 \wedge y_1 \neq y_3 \wedge y_2 \neq y_3) \\ & \wedge \delta_t^u\Big[\exists^{\mathrm{s}} x\, \Big(\forall w_1 \forall w_2 \exists^{\mathrm{s}} y \exists^{\mathrm{s}} z\, \Big(((w_1 = w_2 \wedge y = x \wedge z = y) \\ & \qquad \vee (w_1 \neq w_2 \wedge y = u \wedge z \neq y)) \wedge \neq(y, z)\Big) \wedge \varphi\Big)\Big],\end{aligned}$$

siten että $y_1, y_2, y_3, w_1, w_2, y$ ja z ovat eri muuttujia,
ja eivät ole joukossa $\mathrm{Vr}(t) \cup \mathrm{Fr}(\varphi) \cup \{x\}$.

Todistus. Merkitään:

$$\theta := ((w_1 = w_2 \wedge y = x \wedge z = y) \vee (w_1 \neq w_2 \wedge y = u \wedge z \neq y)) \wedge \neq\!(y, z).$$

Oletetaan ensin, että $\mathcal{M} \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)\, \varphi$. Siis on olemassa $F : X \to \mathcal{P}^*(X(t))$, siten että $\mathcal{M} \vDash_{X[F/x]} \varphi$. Määritellään $F' : \delta[X] \to \mathcal{P}^*(M)$, $\delta[s] \mapsto F(s)$ ja merkitään $X' = (\delta[X])[F'/x]$. Koska $\mathrm{im}(F) \subseteq \mathcal{P}(X(t))$ ja lemman 3.2 nojalla $X(t) = \delta[X](u)$, niin $\mathrm{im}(F') \subseteq \mathcal{P}(\delta[X](u))$. Koska lisäksi $F(s) = F'(\delta[s])$ jokaisella $s \in X$ ja oletuksen nojalla $u \notin \mathrm{Fr}(\varphi)$, niin lemman 3.4 nojalla $\mathcal{M} \vDash_{X'} \varphi$.

Oletetaan ensin, että on voimassa $|M| \leq 2$. Tällöin pätee selvästi, että $\mathcal{M} \vDash_X \exists^{\mathrm{s}} y_1 \exists^{\mathrm{s}} y_2 \forall z\, (z = y_1 \vee z = y_2)$. Jos $|X'(u)| = 2$, niin lemman 4.5 nojalla $\mathcal{M} \vDash_{X'} \neq\!(u)$, jolloin edelleen $\mathcal{M} \vDash_{X'} x = u \vee \neq\!(u)$. Mikäli taas $|X'(u)| = 1$, niin täytyy olla, että on olemassa $a \in M$, siten että $F'(s) = \{a\}$ jokaisella $s \in \delta[X]$. Näin ollen selvästi $\mathcal{M} \vDash_{X'} x = u$ ja edelleen $\mathcal{M} \vDash_{X'} x = u \vee \neq\!(u)$.

Siis joka tapauksessa pätee, että $\mathcal{M} \vDash_{X'} \neq\!(u) \vee x = u$. Lisäksi $\mathcal{M} \vDash_{X'} \varphi$, joten $\mathcal{M} \vDash_{X'} (x = u \vee \neq\!(u)) \wedge \varphi$. Siis $\mathcal{M} \vDash_{\delta[X]} \exists^{\mathrm{s}} x\, ((x = u \vee \neq\!(u)) \wedge \varphi)$ ja edelleen lemman 3.2 nojalla $\mathcal{M} \vDash_X \delta[\exists^{\mathrm{s}} x\, ((x = u \vee \neq\!(u)) \wedge \varphi)]$. Näin ollen $\mathcal{M} \vDash_X \psi_1$ ja edelleen $\mathcal{M} \vDash_X \psi_1 \vee \psi_2$.

Oletetaan sitten, että on voimassa, että $|M| \geq 3$. Tällöin pätee selvästi, että $\mathcal{M} \vDash_X \exists^{\mathrm{s}} y_1 \exists^{\mathrm{s}} y_2 \exists^{\mathrm{s}} y_3\, (y_1 \neq y_2 \wedge y_1 \neq y_3 \wedge y_2 \neq y_3)$. Merkitään nyt $X_1 := X'[M/w_1]$ sekä $X_2 := X_1[M/w_2]$, ja määritellään:

$$\begin{cases} F_1 : X_2 \to \mathcal{P}^*(M), \text{ s.e. } \begin{cases} s \mapsto \{s(x)\}, \text{ jos } s(w_1) = s(w_2) \\ s \mapsto \{s(u)\}, \text{ muuten} \end{cases} \\ \qquad X_3 := X_2[F_1/y] \\ F_2 : X_3 \to \mathcal{P}^*(M), \text{ s.e. } \begin{cases} s \mapsto \{s(y)\}, \text{ jos } s(w_1) = s(w_2) \\ s \mapsto \{s(w_1)\}, \text{ jos } s(w_1) \neq s(w_2) \text{ ja } s(w_1) \neq s(y) \\ s \mapsto \{s(w_2)\}, \text{ muuten} \end{cases} \\ \qquad X_4 := X_3[F_2/z] \end{cases}$$

Olkoot $Y := \{s \in X_4 \mid s(w_1) = s(w_2)\}$ ja $Y' := \{s \in X_4 \mid s(w_1) \neq s(w_2)\}$. Nyt selvästi $X_4 = Y \cup Y'$.

Valitaan mielivaltainen $s \in Y$. Nyt täytyy olla, että $s(w_1) = s(w_2)$, joten $\mathcal{M} \vDash_s w_1 = w_2$. Koska x, y ja z ovat eri muuttujia, niin kuvausten F_1 ja F_2 määritelmien nojalla täytyy olla, että $s(x) = s(y) = s(z)$. Näin ollen pätee, että $\mathcal{M} \vDash_s y = x$ ja $\mathcal{M} \vDash_s z = y$. Koska $s \in Y$ oli mielivaltaisesti valittu, niin pätee, että $\mathcal{M} \vDash_Y w_1 = w_2 \wedge y = x \wedge z = y$.

Olkoon sitten $s \in Y'$. Nyt $s(w_1) \neq s(w_2)$, joten $\mathcal{M} \vDash_s w_1 \neq w_2$. Koska y ja u ovat eri muuttujia, niin kuvauksen F_1 määritelmän nojalla $s(y) = s(u)$, jolloin $\mathcal{M} \vDash_s y = u$. Mikäli $s(w_1) \neq s(y)$, niin koska w_1, y ja z ovat eri muuttujia, niin kuvauksen F_2 määritelmän nojalla $s(z) = s(w_1) \neq s(y)$, jolloin $\mathcal{M} \vDash_s z \neq y$.

Mikäli taas $s(w_1) = s(y)$, niin koska w_1, w_2, y ja z ovat eri muuttujia, niin F_2:n määritelmän nojalla $s(z) = s(w_2) \neq s(w_1) = s(y)$, jolloin $\mathcal{M} \vDash_s z \neq y$. Näin ollen joka tapauksessa $\mathcal{M} \vDash_{Y'} w_1 \neq w_2 \wedge y = u \wedge z \neq y$.

Koska $Y \cup Y' = X_4$, niin olemme osoittaneet, että

$$\mathcal{M} \vDash_{X_4} (w_1 = w_2 \wedge y = x \wedge z = y) \vee (w_1 \neq w_2 \wedge y = u \wedge z \neq y).$$

Valitaan mielivaltainen $r \in X_4$. Koska $X_4 = X'[M/w_1, M/w_2, F_1/y, F_2/z]$, niin on olemassa $s \in X'$ sekä alkiot $a, b \in M$, $c \in F_1(s[a/w_1, b/w_2])$ ja $d \in F_2(s[a/w_1, b/w_2, c/y])$, siten että $r = s[a/w_1, b/w_2, c/y, d/z]$.

a) Oletetaan ensin, että $a = b$. Tällöin kuvausten F_1 ja F_2 määritelmien nojalla täytyy olla, että $r(y) = r(x)$ ja $r(z) = r(y)$. Koska $X' = (\delta[X])[F'/x]$, niin on olemassa $q \in \delta[X]$ ja $e \in F'(q)$, siten että $s = q[e/x]$. On osoitettu, että $\mathrm{im}(F') \subseteq \mathcal{P}(\delta[X](u))$, joten on olemassa $q' \in \delta[X]$, siten että $q'(u) = e$. Valitaan jokin $e' \in F'(q')$ ja merkitään $s' := q'[e'/x]$. Tällöin selvästi $s' \in X'$.

   Koska $|M| \geq 2$, niin on olemassa alkio $b' \in M$, siten että $b' \neq a$. Koska nyt $s'[a/w_1, b'/w_2] \in X_2$, niin on olemassa alkiot $c' \in F_1(s'[a/w_1, b'/w_2])$ ja $d' \in F_2(s'[a/w_1, b'/w_2, c'/y])$ sekä tulkintafunktio $r' \in X_4$, siten että $r' = s'[a/w_1, b'/w_2, c'/y, d'/z]$.

   Koska $r'(w_1) \neq r'(w_2)$, niin $r' \in Y'$. Aiemmin todettiin, että $\mathcal{M} \vDash_{Y'} y = u$ ja $\mathcal{M} \vDash_{Y'} y \neq z$, joten $r'(y) = r'(u)$ ja $r'(z) \neq r'(y)$. Nyt pätee, että

$$r(y) = r(x) = s(x) = q[e/x](x) = e = q'(u) = r'(u) = r'(y).$$

   Edelleen on voimassa, että

$$r(z) = r(y) = r'(y) \neq r'(z).$$

   Siis $r(y) = r'(y)$, mutta $r(z) \neq r'(z)$. Näin ollen $\mathcal{M} \vDash_{X_4} \neq\!(y, z)$.

b) Oletetaan sitten että $a \neq b$. Tällöin F_1:n määritelmän nojalla täytyy olla, että $r(y) = r(u)$. Koska $|M| \geq 3$, niin on olemassa sellainen $a' \in M$, että $a' \neq a$ ja $a' \neq b$. Nyt $s[a'/w_1, b/w_2] \in X_2$, joten on olemassa $c' \in F_1(s[a'/w_1, b/w_2])$ ja $d' \in F_2(s[a'/w_1, b/w_2, c'/y])$ ja $r' \in X_4$, siten että $r' = s[a'/w_1, b/w_2, c'/y, d'/z]$. Koska $r'(w_1) \neq r'(w_2)$, niin F_1:n määritelmän nojalla $r'(y) = r'(u)$. Edelleen koska $r'(u) = s(u) = r(u)$, niin

$$r(y) = r(u) = r'(u) = r'(y).$$

   i) Mikäli $r(w_1) \neq r(y)$, niin F_2:n määritelmän nojalla $r(z) = r(w_1)$. Edelleen F_2 määritelmän nojalla $r'(z) = r'(w_1)$ tai $r'(z) = r'(w_2)$, eli $r'(z) \in \{a', b\}$. Koska nyt $r(z) = r(w_1) = a$ ja $a \notin \{a', b\}$, niin täytyy olla, että $r(z) \neq r'(z)$.

ii) Mikäli taas $r(w_1) = r(y)$, niin F_2:n määritelmän nojalla $r(z) = r(w_2)$. Tällöin $r'(w_1) = a' \neq a = r(w_1) = r(y) = r'(y)$, joten F_2:n määritelmän nojalla $r'(z) = r'(w_1)$. Näin ollen pätee, että

$$r(z) = r(w_2) = b \neq a' = r'(w_1) = r'(z).$$

Siis joka tapauksessa $r(y) = r'(y)$, mutta $r(z) \neq r'(z)$. Siis $\mathcal{M} \vDash_{X_4} \neq(y, z)$.

On osoitettu siis, että joka tapauksessa $\mathcal{M} \vDash_{X_4} \neq(y, z)$, jolloin on voimassa $\mathcal{M} \vDash_{X_4} \theta$. Näin ollen pätee, että $\mathcal{M} \vDash_{X'} \forall w_1 \forall w_2 \exists^{\mathrm{s}} y \exists^{\mathrm{s}} z \, \theta \wedge \varphi$ ja edelleen on voimassa $\mathcal{M} \vDash_{\delta[X]} \exists^{\mathrm{s}} x \, (\forall w_1 \forall w_2 \exists^{\mathrm{s}} y \exists^{\mathrm{s}} z \, \theta \wedge \varphi)$. Tällöin lemman 3.2 nojalla pätee, että

$$\mathcal{M} \vDash_X \delta[\exists^{\mathrm{s}} x \, (\forall w_1 \forall w_2 \exists^{\mathrm{s}} y \exists^{\mathrm{s}} z \, \theta \wedge \varphi)].$$

Näin ollen $\mathcal{M} \vDash_X \psi_2$ ja edelleen $\mathcal{M} \vDash_X \psi_1 \vee \psi_2$.

Oletetaan sitten, että $\mathcal{M} \vDash_X \psi_1 \vee \psi_2$. Siis on olemassa $Y, Y' \subseteq X$, siten että $Y \cup Y' = X$, $\mathcal{M} \vDash_Y \psi_1$ ja $\mathcal{M} \vDash_{Y'} \psi_2$. Lauseet $\exists^{\mathrm{s}} y_1 \exists^{\mathrm{s}} y_2 \forall z \, (z = y_1 \vee z = y_2)$ ja $\exists^{\mathrm{s}} y_1 \exists^{\mathrm{s}} y_2 \exists^{\mathrm{s}} y_3 \, (y_1 \neq y_2 \wedge y_1 \neq y_3 \wedge y_2 \neq y_3)$ eivät selvästi voi toteutua samassa mallissa, joten täytyy olla, että $Y = \emptyset$ tai $Y' = \emptyset$.

Oletetaan ensin, että $Y' = \emptyset$. Nyt täytyy olla että $Y = X$, jolloin pätee, että $\mathcal{M} \vDash_X \psi_1$. Koska tällöin $\mathcal{M} \vDash_X \exists^{\mathrm{s}} y_1 \exists^{\mathrm{s}} y_2 \forall z \, (z = y_1 \vee z = y_2)$, niin täytyy olla, että $|M| \leq 2$. Nyt $\mathcal{M} \vDash_X \delta[\exists^{\mathrm{s}} x \, ((x = u \vee \neq(u)) \wedge \varphi)]$, joten lemman 3.2 nojalla on voimassa $\mathcal{M} \vDash_{\delta[X]} \exists^{\mathrm{s}} x \, ((x = u \vee \neq(u)) \wedge \varphi)$. Siis on olemassa kuvaus $F' : \delta[X] \to \mathcal{P}^*(M)$, siten että $\mathcal{M} \vDash_{X'} (x = u \vee \neq(u)) \wedge \varphi$, missä $X' = (\delta[X])[F'/x]$. Nyt erityisesti $\mathcal{M} \vDash_{X'} \varphi$.

Osoitetaan, että $\mathrm{im}(F') \subseteq \mathcal{P}(\delta[X](u))$: Olkoon $B \in \mathrm{im}(F')$ ja $a \in B$. Nyt $B = F'(s)$ jollain $s \in \delta[X]$, joten $s[a/x] \in X'$. Koska $\mathcal{M} \vDash_{X'} x = u \vee \neq(u)$, niin on olemassa $Z, Z' \subseteq X'$, siten että $Z \cup Z' = X'$, $\mathcal{M} \vDash_Z x = u$ ja $\mathcal{M} \vDash_{Z'} \neq(u)$. Mikäli $Z' \neq \emptyset$, niin lemman 4.5 nojalla pätee, että $|Z'(u)| \geq 2$ ja edelleen $|X'(u)| \geq 2$. Koska u ja x ovat eri muuttujia, niin myös $|\delta[X](u)| \geq 2$. Mutta koska $|M| \leq 2$, niin tällöin $\delta[X](u) = M$, jolloin triviaalisti pätee, että $\mathrm{im}(F') \subseteq \mathcal{P}(\delta[X](u))$.

Mikäli taas $Z' = \emptyset$, niin täytyy olla, että $Z = X'$, jolloin $s[a/x] \in Z$. Näin ollen $\mathcal{M} \vDash_{s[a/x]} x = u$, eli $s[a/x](x) = s[a/x](u)$. Koska $s[a/x](x) = a$ ja $s[a/x](u) = s(u)$, niin $s(u) = a$, jolloin erityisesti $a \in \delta[X](u)$. On osoitettu siis, että $\mathrm{im}(F') \subseteq \mathcal{P}(\delta[X](u))$.

Määritellään $F : X \to \mathcal{P}^*(M)$, $s \mapsto F'(\delta[s])$. Nyt selvästi $F(s) = F'(\delta[s])$ jokaisella $s \in X$. Koska lisäksi $\mathcal{M} \vDash_{X'} \varphi$ ja oletuksen nojalla $u \notin \mathrm{Fr}(\varphi)$, niin lemman 3.4 nojalla $\mathcal{M} \vDash_{X[F/s]} \varphi$. Koska $\mathrm{im}(F') \subseteq \mathcal{P}(\delta[X](u))$ ja lemman 3.2 nojalla $X(t) = \delta[X](u)$, niin $\mathrm{im}(F) \subseteq \mathcal{P}([X](t))$. Täten $\mathcal{M} \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t) \, \varphi$.

Oletetaan sitten, että $Y = \emptyset$, jolloin $Y' = X$ ja $\mathcal{M} \vDash_X \psi_2$. Näin ollen pätee, että $\mathcal{M} \vDash_X \delta[\exists^{\mathrm{s}} x \, (\forall w_1 \forall w_2 \exists^{\mathrm{s}} y \exists^{\mathrm{s}} z \, \theta \wedge \varphi)]$. Lemman 3.2 nojalla $\mathcal{M} \vDash_{\delta[X]} \exists^{\mathrm{s}} x \, (\forall w_1 \forall w_2 \exists^{\mathrm{s}} y \exists^{\mathrm{s}} z \, \theta \wedge \varphi)$, joten on olemassa $F' : \delta[X] \to \mathcal{P}^*(M)$, siten että $\mathcal{M} \vDash_{X'} \forall w_1 \forall w_2 \exists^{\mathrm{s}} y \exists^{\mathrm{s}} z \, \theta \wedge \varphi$, missä $X' = (\delta[X])[F'/x]$. Nyt erityisesti pätee, että $\mathcal{M} \vDash_{X'} \varphi$.

Osoitetaan seuraavaksi, että $\mathrm{im}(F') \subseteq \mathcal{P}(\delta[X](u))$: Olkoon $B \in \mathrm{im}(F')$ ja $a \in B$. Nyt $B = F'(s)$ jollain $s \in \delta[X]$, joten $s[a/x] \in X'$. Merkitään nyt $X_1 := X'[M/w_1]$ ja $X_2 := X_1[M/w_2]$. Koska $\mathcal{M} \vDash_{X_2} \exists^{\mathrm{s}} y \exists^{\mathrm{s}} z\, \theta$, niin on olemassa kuvaukset $F_1 : X_2 \to \mathcal{P}^*(M)$ ja $F_2 : X_3 \to \mathcal{P}^*(M)$, siten että $\mathcal{M} \vDash_{X_4} \theta$, missä $X_3 := X_2[F_1/y]$ ja $X_4 := X_3[F_2/z]$.

Koska $s[a/x, a/w_1, a/w_2] \in X_2$, on olemassa $c \in F_1(s[a/x, a/w_1, a/w_2])$ ja $d \in F_2(s[a/x, a/w_1, a/w_2, c/y])$. Merkitään $r := s[a/x, a/w_1, a/w_2, c/y, d/z]$. Nyt selvästi $r \in X_4$. Koska $\mathcal{M} \vDash_{X_4} \theta$, niin erityisesti on olemassa tiimit $Z, Z' \subseteq X_4$, siten että $Z \cup Z' = X_4$, $\mathcal{M} \vDash_Z w_1 = w_2 \wedge y = x \wedge z = y$ ja $\mathcal{M} \vDash_{Z'} w_1 \neq w_2 \wedge y = u \wedge z \neq y$. Koska $r(w_1) = r(w_2)$, niin täytyy olla, että $r \in Z$. Näin ollen $r(y) = r(x)$ ja $r(z) = r(y)$.

Koska $\mathcal{M} \vDash_{X_4} \neq(y, z)$, niin on olemassa $r' \in X_4$, siten että $r'(y) = r(y)$, mutta $r'(z) \neq r(z)$. Nyt $r'(z) \neq r(z) = r(y) = r'(y)$, joten täytyy olla, että $r' \in Z_2$. Näin ollen pätee erityisesti, että $r'(y) = r'(u)$.

Koska $r' \in X_4$, missä $X_4 = (\delta[X])[F'/x, M/w_1, M/w_2, F_1/y, F_2/z]$ ja u, x, w_1, w_2, y sekä z ovat eri muuttujia, niin on olemassa $s' \in \delta[X]$, siten että $s'(u) = r'(u)$. On osoitettu siis, että

$$a = r(x) = r(y) = r'(y) = r'(u) = s'(u).$$

Näin ollen $a \in \delta[X](u)$ ja täten $\mathrm{im}(F') \subseteq \mathcal{P}(\delta[X](u))$.

Määritellään $F : X \to \mathcal{P}^*(M)$, $s \mapsto F'(\delta[s])$. Nyt selvästi $F(s) = F'(\delta[s])$ jokaisella $s \in X$. Koska lisäksi $\mathcal{M} \vDash_{X'} \varphi$ ja oletuksen nojalla $u \notin \mathrm{Fr}(\varphi)$, niin lemman 3.4 nojalla $\mathcal{M} \vDash_{X[F/s]} \varphi$. Koska $\mathrm{im}(F') \subseteq \mathcal{P}(\delta[X](u))$ ja lemman 3.2 nojalla $X(t) = \delta[X](u)$, niin $\mathrm{im}(F) \subseteq \mathcal{P}([X](t))$. Täten $\mathcal{M} \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)\, \varphi$.

□

Lauseen 4.17 nojalla INF-logiikka sisältyy NDEP[2]-logiikkaan. Voimme osoittaa, että käänteinen väite ei päde, eli sisältyminen on aitoa. Käytämme tähän Ehrenfeucht-Fraïssé -peliä, jonka Galliani ja Hella [7] ovat esittäneet inkluusiologiikalle.

4.3.3 Ehrenfeucht-Fraïssé -peli INC[1]-logiikalle

Esitämme seuraavaksi Ehrenfeucht-Fraïssé -pelin määritelmän samalla tavalla kuin Galliani ja Hella [7, s. 18 - 20], sillä erotuksella että inkluusiologiikan sijasta rajoitumme INC[1]-logiikkaan. Tämä rajoitus ei kuitenkaan muuta pelin eikä siihen liittyvien tulosten kannalta mitään olennaista.

Määritelmä 4.5. Olkoot $\mathcal{M} = (M, \mathcal{I})$ ja $\mathcal{M}' = (M', \mathcal{I}')$ malleja, siten että niiden tulkinnat $\mathcal{I}$ ja $\mathcal{I}'$ ovat määriteltyjä samassa aakkostossa L. Olkoot X ja Y tiimejä, siten että $\mathrm{dom}(X) = \mathrm{dom}(Y)$, $\mathrm{ran}(s) = M$ jokaisella $s \in X$ ja $\mathrm{ran}(s) = M'$ jokaisella $s \in Y$. Olkoon lisäksi $n \in \mathbb{N}$. Kahden pelaajan peli $G_n(\mathcal{M}, X, \mathcal{M}', Y)$ määritellään seuraavasti:

i) Pelissä on kaksi pelaajaa: *haastaja* ('spoiler') ja *jäljittelijä* ('duplicator').

ii) Pelin *tilanne* $p_i = (X_i, Y_i)$, missä X_i, Y_i ovat tiimejä ja $i \in \{0, \dots, n\}$.

iii) Pelin *alkutilanne* $p_0 = (X_0, Y_0) = (X, Y)$.

iv) Olkoon pelin tilanne $p_{i-1} = (X_{i-1}, Y_{i-1})$, missä $i \in \{1, \dots, n\}$. Nyt haastaja saa valita jonkin seuraavista kolmesta siirrosta:

   a) **Jakaminen**: Haastaja saa valita tiimit X', X'', joille on voimassa $X' \cup X'' = X_{i-1}$. Sitten jäljittelijä saa valita tiimit Y', Y'', siten että $Y' \cup Y'' = Y_{i-1}$. Nyt haastaja saa valita onko pelin seuraava tilanne p_i tilanne (X', Y') vai (X'', Y'').

   b) **Korvaaminen**: Haastaja saa valita jonkin muuttujan x ja jonkin kuvauksen $F : X_{i-1} \to \mathcal{P}^*(M)$. Sitten jäljittelijä saa puolestaan valita kuvauksen $F' : Y_{i-1} \to \mathcal{P}^*(M')$. Pelin seuraava tilanne p_i on $(X_{i-1}[F/x], Y_{i-1}[F'/x])$.

   c) **Monistaminen**: Haastaja saa valita muuttujan x. Pelin seuraava tilanne p_i on $(X_{i-1}[M/x], Y_{i-1}[M'/x])$.

v) Pelin *lopputilanne* $p_n = (X_n, Y_n)$ on *voittotilanne* haastajalle, jos ja vain jos on olemassa $\varphi \in \mathrm{INC}_L[1]$, siten että φ on literaali tai yksipaikkainen inkluusioatomi ja $\mathcal{M} \vDash_{X_n} \varphi$, mutta $\mathcal{M}' \nvDash_{Y_n} \varphi$. Muussa tapauksessa p_n on voittotilanne jäljittelijälle.

Sanomme, että pelaajalla (haastaja tai jäljittelijä) on *voittostrategia* pelissä $G_n(\mathcal{M}, X, \mathcal{M}', Y)$, jos pelaaja voi pelata niin, että riippumatta vastapelaajan siirroista päädytään aina kyseisen pelaajan voittotilanteeseen.

Täsmällisesti ottaen voittostrategia pitäisi esittää funktiona pelin tilanteiden joukolta siirtojen joukolle, mutta tyydymme tässä tutkielmassa yksinkertaisuuden vuoksi tähän intuitiiviseen määritelmään. Määritellään seuraavaksi kaavan aste, jota tarvitsemme seuraavassa lauseessa.

Määritelmä 4.6. Olkoon $\varphi \in \mathrm{INC}_L[1]$. Määritellään kaavan φ *aste* $\mathrm{rank}(\varphi)$ rekursiivisesti seuraavasti:

$$\begin{aligned}
\mathrm{rank}(\varphi) &= 0, \text{ jos } \varphi \text{ on literaali tai atomikaava} \\
\mathrm{rank}(\varphi \wedge \psi) &= \max(\mathrm{rank}(\varphi), \mathrm{rank}(\psi)) \\
\mathrm{rank}(\varphi \vee \psi) &= \max(\mathrm{rank}(\varphi), \mathrm{rank}(\psi)) + 1 \\
\mathrm{rank}(\exists^{\mathrm{s}} x\, \varphi) &= \mathrm{rank}(\varphi) + 1 \\
\mathrm{rank}(\forall x\, \varphi) &= \mathrm{rank}(\varphi) + 1
\end{aligned}$$

Seuraava tärkeä lause kertoo kaavan asteen sekä sitä vastaavan pituisten Ehrenfeucht-Fraïssé -pelien välisen yhteyden.

Lause 4.18. *Olkoot $\mathcal{M}, \mathcal{M}', X$ ja Y kuten määritelmässä 4.5. Tällöin jäljittelijällä on voittostrategia pelissä $G_n(\mathcal{M}, X, \mathcal{M}', Y)$, jos ja vain jos kaikille kaavoille φ joille* $\mathrm{rank}(\varphi) \leq n$ *pätee:*

$$\textit{Jos } \mathcal{M} \vDash_X \varphi, \ \textit{niin } \mathcal{M}' \vDash_Y \varphi.$$

Todistus. Voidaan todistaa täsmälleen samalla tavalla kuten vastaava tulos inkluusiologiikan Ehrenfeucht-Fraïssé -peleille [7]. □

Esitämme seuraavaksi esimerkin eräästä INC[1]-logiikan yksinkertaisesta Ehrenfeucht-Fraïssé -pelistä, jossa jäljittelijällä on voittostrategia:

Esimerkki 4.1. Olkoon $L = \emptyset$ ja $\mathcal{M} = (M, \mathcal{I})$ L-malli, siten että $M = \{0, 1\}$ ja $\mathcal{I} = \emptyset$. Olkoot $X = \{s_1, s_2\}$ ja $Y = \{s_1, s_2, s_3\}$, missä

$$\begin{cases} s_1 = \{(v_0, 0), (v_1, 0)\} \\ s_2 = \{(v_0, 0), (v_1, 1)\} \\ s_3 = \{(v_0, 1), (v_1, 1)\} \end{cases}$$

Osoitetaan, että nyt jäljittelijällä on voittostrategia pelissä $G_n(\mathcal{M}, X, \mathcal{M}, Y)$, kaikilla $n \in \mathbb{N}$:

Todistus. Määritellään strategia niin, että jäljittelijä pyrkii säilyttämään seuraavan ehdon pelin jokaisessa tilanteessa $p_i = (X_i, Y_i)$, $i \in \{0, \dots n\}$:

$$(*) \qquad X_i \subseteq Y_i \text{ ja jokaisella } s \in Y_i \setminus X_i \text{ on olemassa } s' \in X_i, \\ \text{s.e. } s(x) \neq s'(x) \text{ jokaisella } x \in \mathrm{dom}(X_i).$$

Osoitetaan induktiolla luvun i suhteen, että jäljittelijä pystyy säilyttämään ehdon $(*)$ tilanteessa p_i. Pelin alkutilanteessa $X \subseteq Y$ ja $s_3(v_0) \neq s_1(v_0)$ sekä $s_3(v_1) \neq s_1(v_1)$, joten ehto $(*)$ on selvästi voimassa.

Tehdään sitten induktio-oletus, että ehto $(*)$ on voimassa tilanteessa $p_{i-1} = (X_{i-1}, Y_{i-1})$. Siis $X_i \subseteq Y_i$ ja jokaisella $s \in Y_{i-1} \setminus X_{i-1}$ on olemassa $s' \in X_{i-1}$, siten että $s(x) \neq s'(x)$ jokaisella $x \in \mathrm{dom}(X_{i-1})$. Jatkossa jos $s \in Y_{i-1} \setminus X_{i-1}$, niin merkitsemme $\overline{s} := s'$, missä $s' \in X_{i-1}$ on edellisen ehdon toteuttava tulkintafunktio. Huomaa, että tulkintafunktio $\overline{s}$ on olemassa jokaisella $s \in Y_{i-1} \setminus X_{i-1}$, ja koska $|M| = 2$, niin se on lisäksi yksikäsitteinen.

a) Oletetaan, että haastaja valitsee tiimit X', X'', siten että $X' \cup X'' = X_{i-1}$. Määritellään tiimit:

$$\begin{cases} Y' := X' \cup \{s \in Y_{i-1} \setminus X_{i-1} \mid \overline{s} \in X'\} \\ Y'' := X'' \cup \{s \in Y_{i-1} \setminus X_{i-1} \mid \overline{s} \in X''\} \end{cases}$$

Koska $\mathrm{dom}(X') = \mathrm{dom}(X'') = \mathrm{dom}(X_{i-1})$, niin tiimien Y' ja Y'' määritelmien nojalla ehto $(*)$ pätee selvästi tilanteille (X', Y') ja (X'', Y''). Näin ollen ehto $(*)$ pätee joka tapauksessa tilanteelle p_i.

b) Oletetaan sitten, että haastaja valitsee jonkin muuttujan x sekä kuvauksen $F : X_{i-1} \to \mathcal{P}^*(M)$. Määritellään kuvaus:

$$F' : Y_{i-1} \to \mathcal{P}^*(M), \begin{cases} s \mapsto F(s), \text{ jos } s \in X_{i-1} \\ s \mapsto \{0\}, \text{ jos } s \in Y_{i-1} \setminus X_{i-1} \text{ ja } F(\overline{s}) = \{1\} \\ s \mapsto \{1\}, \text{ jos } s \in Y_{i-1} \setminus X_{i-1} \text{ ja } F(\overline{s}) = \{0\} \\ s \mapsto \{0,1\}, \text{ jos } s \in Y_{i-1} \setminus X_{i-1} \text{ ja } F(\overline{s}) = \{0,1\} \end{cases}$$

Koska $\mathrm{dom}(X_{i-1}[F/x]) = \mathrm{dom}(X_{i-1}) \cup \{x\}$, niin kuvauksen F' määritelmän nojalla ehto $(*)$ pätee selvästi tilanteelle $(X_{i-1}[F/x], Y_{i-1}[F'/x]) = p_i$.

c) Oletetaan sitten, että haastaja valitsee jonkin muuttujan x. Koska tällöin $\mathrm{dom}(X_{i-1}[\{0,1\}/x]) = \mathrm{dom}(X_{i-1}) \cup \{x\}$, niin ehto $(*)$ pätee selvästi tilanteelle $(X_{i-1}[\{0,1\}/x], Y_{i-1}[\{0,1\}/x]) = p_i$.

Näin ollen erityisesti ehto $(*)$ pätee lopputilanteelle $p_n = (X_n, Y_n)$. Olkoon $\varphi \in \mathrm{INC}_L[1]$ literaali tai yksipaikkainen inkluusioatomi, siten että $\mathcal{M} \vDash_{X_n} \varphi$.

Oletetaan ensin, että φ on literaali. Koska $L = \emptyset$, niin täytyy olla, että φ on muotoa $z_1 = z_2$ tai $z_1 \neq z_2$, joillain muuttujilla $z_1, z_2 \in \mathrm{dom}(X_n)$. Koska $\mathcal{M} \vDash_{X_n} \varphi$, $X_n \subseteq Y_n$ ja $\varphi \in \mathrm{FO}_L$, niin lemman 2.3 nojalla riittää osoittaa, että $\mathcal{M} \vDash_s \varphi$ jokaisella $s \in Y_n \setminus X_n$.

Olkoon $s \in Y_n \setminus X_n$. Nyt on olemassa $s' \in X_n$, siten että $s(x) \neq s'(x)$ jokaisella $x \in \mathrm{dom}(X_n)$. Erityisesti nyt $s(z_1) \neq s'(z_1)$ ja $s(z_2) \neq s'(z_2)$. Koska $|M| = 2$, niin täytyy olla, että $s(z_1) = s(z_2)$, jos ja vain jos $s'(z_1) = s'(z_2)$. Koska oletuksen nojalla $\mathcal{M} \vDash_{s'} \varphi$, niin myös $\mathcal{M} \vDash_s \varphi$.

Oletetaan, sitten että φ on yksipaikkainen inkluusioatomi. Koska $L = \emptyset$, niin $\varphi = z_1 \subseteq z_2$ joillain muuttujilla $z_1, z_2 \in \mathrm{dom}(X_n)$. Mikäli $X_n = Y_n$, niin oletuksen nojalla $\mathcal{M} \vDash_{Y_n} \varphi$. Oletetaan sitten, että on olemassa tulkintafunktio $s \in Y_n \setminus X_n$. Tällöin on olemassa $s' \in X_n$, siten että $s(x) \neq s'(x)$ jokaisella $x \in \mathrm{dom}(X_n)$. Erityisesti nyt $s(z_2) \neq s'(z_2)$, jolloin $\{s(z_2), s'(z_2)\} = \{0,1\}$. Näin ollen $X_n(z_2) = M$, jolloin triviaalisti $\mathcal{M} \vDash_{Y_n} \varphi$.

Olemme siis osoittaneet, että jäljittelijä pystyy pitämään ehdon $(*)$ voimassa pelin jokaisessa tilanteessa ja että se johtaa jäljittelijän voittoon. Täten jäljittelijällä on voittostrategia pelissä $G_n(\mathcal{M}, X, \mathcal{M}, Y)$. □

Saamme esimerkin 4.1 avulla todistettua seuraavan lauseen:

Lause 4.19. *On olemassa* $\mathrm{NDEP}_L[2]$*-kaava, joka ei ole loogisesti ekvivalentti minkään* INF_L*-kaavan kanssa.*

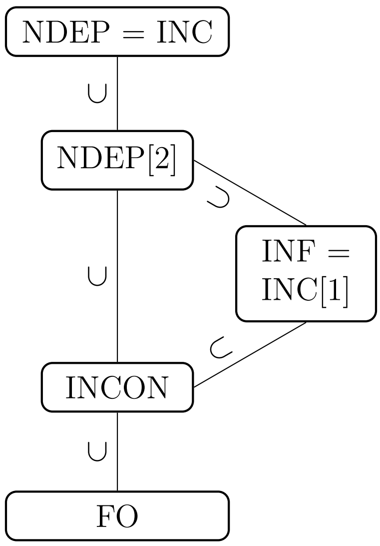
Todistus. Tehdään vastaoletus, että jokaista $\mathrm{NDEP}_L[2]$-kaavaa vastaa sen kanssa loogisesti ekvivalentti INF_L-kaava. Näin ollen erityisesti on olemassa $\varphi \in \mathrm{INF}_L$, joka on loogisesti ekvivalentti kaavan $\neq\!(v_0, v_1)$ kanssa. Lauseen 4.14 nojalla on olemassa kaava $\psi \in \mathrm{INC}_L[1]$, siten että φ ja ψ ovat loogisesti ekvivalentteja. Näin ollen ψ ja $\neq\!(v_0, v_1)$ ovat loogisesti ekvivalentteja.

Olkoot L, $\mathcal{M}$, X ja Y kuten esimerkissä 4.1. Nyt selvästi $\mathcal{M} \models_X \neq(v_0, v_1)$, mutta $\mathcal{M} \not\models_Y \neq(v_0, v_1)$. Näin ollen myös $\mathcal{M} \models_X \psi$, mutta $\mathcal{M} \not\models_Y \psi$. Koska kaava ψ on äärellisen pituinen, niin $\mathrm{rank}(\psi) = n$, jollain $n \in \mathbb{N}$. Esimerkin 4.1 nojalla jäljittelijällä on voittostrategia pelissä $G_n(\mathcal{M}, X, \mathcal{M}, Y)$. Näin ollen lauseen 4.18 nojalla pätee $\mathcal{M} \models_Y \psi$, mikä on ristiriita. $\square$

Korollaari 4.20. INF*-logiikka sisältyy aidosti* NDEP[2]*-logiikkaan.*

Todistus. INF-logiikka sisältyy NDEP[2]-logiikkaan lauseen 4.17 perusteella. Lauseen 4.19 nojalla taas NDEP[2]-logiikka ei sisälly INF-logiikkaan. $\square$

Avoimeksi kysymykseksi INF ja NDEP[2]-logiikoiden suhteesta jää, että ovatko ne kuitenkin lauseiden tasolla ekvivalentit. Saamme tämän kappaleen tuloksista seuraavan kaavion INF-logiikan ilmaisuvoimasta kaavojen tasolla:



Yllä olevassa kaaviossa aito oleva sisältyminen NDEP[2]- ja NDEP-logiikan välillä voidaan todistaa yhdistämällä Hannulan tulokset [9] inkluusiologiikan paikkalukuhierarkiasta ja Gallianin käännös inkluusiologiikan sekä NDEP-logiikan välillä. Emme kuitenkaan käsittele tätä todistusta yksityiskohtaisesti tässä tutkielmassa.

Koska INCON = NDEP[1] ja INF = INC[1], niin INC[1]-logiikka sijoittuu siis aidosti NDEP[1]- ja NDEP[2]-logiikoiden väliin. Tämä on mielenkiintoista, sillä paikkalukuja rajoittamatta INC- ja NDEP-logiikat ovat kuitenkin lauseen 4.4 nojalla ekvivalentit. Tästä herää luontevasti jatkokysymys, että päteekö yleisesti:

$$\mathrm{NDEP}[k] \subset \mathrm{INC}[k] \subset \mathrm{NDEP}[k+1] \quad \text{jokaisella } k \geq 1.$$

Emme kuitenkaan tutki tätä kysymystä tässä tutkielmassa sen enempää.

4.4 INF- sekä EXF-logiikat suhteessa toisen kertaluvun logiikkaan

Tässä kappaleessa esittelemme toisen kertaluvun logiikan erään yksinkertaisen, mutta tärkeän fragmentin, jota kutsumme EMSO-logiikaksi. Koska käsittelemme tässä tutkielmassa ainoastaan tätä fragmenttia, niin emme määrittele toisen kertaluvun logiikkaa yleisellä tasolla.

Sitten tutkimme lauseiden tasolla tämän fragmentin suhdetta INF- ja EXF-logiikoihin, ja päädymme jälleen samankaltaisiin tuloksiin molempien logiikoiden tapauksessa. Esittelemme taas EXF-logiikkaa koskevat tulokset ensin, koska ne ovat tälläkin kertaa samankaltaisia mutta lyhempiä ja suoraviivaisempia todistaa kuin INF-logiikalle.

4.4.1 EMSO-logiikan määritelmä

Määritellään *eksistentiaalinen monadinen toisen kertaluvun logiikka* EMSO, jota kutsutaan myös *monadiseksi* $\sum_1^1$*-logiikaksi.*

Määritelmä 4.7. Määritellään kieli EMSO_L seuraavasti:

- Jos $\varphi \in \mathrm{FO}_L$, niin $\varphi \in \mathrm{EMSO}_L$.
- Jos $\varphi \in \mathrm{EMSO}_L$ ja R_i on yksipaikkainen predikaattisymboli, niin $\exists\, R_i\, \varphi \in \mathrm{EMSO}_L$.

Kvanttoreita $\exists\, R_i$ sanotaan (monadisiksi) *toisen kertaluvun kvanttoreiksi.* Jos $\varphi \in \mathrm{EMSO}_L$, niin sanotaan että φ on EMSO_L*-kaava.* Laajennetaan $\mathrm{Fr}(\varphi)$:n ja $\mathrm{Sf}(\varphi)$:n määritelmiä seuraavasti:

$$\begin{aligned}\mathrm{Fr}(\exists\, R_i\varphi) &= \mathrm{Fr}(\varphi)\\ \mathrm{Sf}(\exists\, R_i\varphi) &= \{\exists\, R_i\varphi\} \cup \mathrm{Sf}(\varphi)\end{aligned}$$

Huomautus. Predikaattisymbolilta R_i ei vaadita, että se kuuluu aakkostoon L. Mikäli $R_i \notin L$, niin se tulkitaan yksipaikkaiseksi predikaattisymboliksi aakkostossa $L \cup \{R_i\}$. Huomaa myös, että määritelmän mukaan kaikki toisen kertaluvun kvanttorit $\exists\, R_i$ esiintyvät aina kaavan alussa.

Vaihtoehtoinen tapa määritellä kieli EMSO_L olisi määritellä erikseen yksipaikkaisten *predikaattimuuttujien joukko* $\{V_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Tällöin atomikaavojen joukkoa laajennettaisiin kaavoilla $V_i t$ ja $\neg V_i t$ ($t \in \mathrm{T}_L$) ja predikaattimuuttujat olisivat ainoita, jotka saavat esiintyä toisen kertaluvun kvanttoreissa.

Määritelmä 4.8. Olkoon $\mathcal{M} = (M, \mathcal{I})$ malli ja R_i on yksipaikkainen predikaattisymboli. *Muunnettu tulkinta* $\mathcal{I}[A/R_i]$ on aakkostossa $L \cup \{R_i\}$ määritelty sellainen funktio, että:

$$\mathcal{I}[A/R_i](R_j) = \begin{cases} A, & \text{jos } j = i\\ \mathcal{I}(R_j), & \text{jos } j \neq i\end{cases}$$

Muunnettu tulkinta $\mathcal{I}[A/R_i]$ tulkitsee vakio- ja funktiosymbolit samalla tavalla kuin tulkinta $\mathcal{I}$. Merkitään lisäksi:

$$\mathcal{M}[A/R_i] := (M, \mathcal{I}[A/R_i])$$
$$\mathcal{M}[A_1/R_1, \ldots, A_n/R_n] := (M, \mathcal{I}[A_1/R_1] \ldots [A_n/R_n])$$

Huomaa, että jos $R_i \notin L$, niin tulkinta $\mathcal{I}[A/R_i]$ laajentaa tulkintaa $\mathcal{I}$ kuvaamalla predikaattisymbolin R_i jollekin M:n osajoukolle. Jos taas $R_i \in L$ ja $A \neq R_i^{\mathcal{M}}$, niin $\mathcal{I}[A/R_i]$ muuttaa tulkintaa $\mathcal{I}$ kuvaamalla R_i:n eri joukolle. Ja tietenkin jos $R_i \in L$ ja $A = R_i^{\mathcal{M}}$, niin $\mathcal{I}[A/R_i] = \mathcal{I}$.

Määritellään monadisten toisen kertaluvun kvanttorien semantiikka seuraavalla tavalla:

Määritelmä 4.9. Oletetaan, että $\varphi \in \mathrm{EMSO}_L$, R_i on yksipaikkainen predikaattisymboli ja s on tulkintafunktio, jolle $\mathrm{Fr}(\varphi) \subseteq \mathrm{dom}(s)$. Määritellään:

$$\mathcal{M} \vDash_s \exists R_i \varphi, \text{ joss on olemassa } A \subseteq M \text{ s.e. } \mathcal{M}[A/R_i] \vDash_s \varphi.$$

Huomautus. Määrittelemme totuuden ainoastaan annetulla tulkintafunktiolla s, eli yhden alkion tiimillä $\{s\}$. Teemme näin siksi että totuuden määrittely useamman alkion tiimillä voitaisiin tehdä kahdella mielekkäällä eri tavalla. Joko niin, että kuhunkin tiimin alkioon pitää liittää samat joukot $A_1, \ldots, A_n$ tai sitten, että kuhunkin alkioon voidaan liittää eri joukot.

Nämä määritelmät ovat kuitenkin ekvivalentit yhden alkion tiimin tapauksessa ja erityisesti tiimillä $\{\emptyset\}$. Tässä tutkielmassa tarkastelemme ainoastaan EMSO_L-lauseita, joten meidän ei tarvitse ottaa kantaa siihen miten totuus useamman alkion tiimillä määriteltäisiin.

EMSO-logiikka on varsin yksinkertainen, mutta luonteva ensimmäisen kertaluvun logiikan laajennos. EMSO-lause $\exists P_1 \ldots \exists P_n \varphi$ (missä $\varphi \in \mathrm{FO}_L$) yksinkertaisesti sanoo, että on olemassa mallin $\mathcal{M}$ universumin M osajoukot $A_1, \ldots, A_n$, siten että kaava φ pätee, kun predikaattisymbolit $P_1, \ldots, P_n$ tulkintaan näiksi osajoukoiksi. EMSO-logiikasta sekä sen ilmaisuvoimasta tiedetään ennestään paljon, joten vertaamalla INF- ja EXF-logiikoita siihen saamme paljon tietoa näiden logiikoiden ilmaisuvoimasta lauseiden tasolla.

4.4.2 EXF_L-lauseen ilmaiseminen EMSO_L-lauseella

Pyrimme tässä pykälässä todistamaan, että EXF-logiikka sisältyy lauseiden tasolla EMSO-logiikkaan. Teemme tämän osoittamalla, että kaikki EXF_L-lauseet voidaan ilmaista ekvivalentilla EMSO_L-lauseella. Todistuksen idea on, että EMSO_L-lauseessa kvantifioidaan kutakin EXF_L-lauseen ekskluusiokvanttoria kohden joukko, joka asettaa rajat kvanttoria vastaavan valintafunktion F poimimille arvoille.

Lause 4.21. *Olkoon* φ EXF_L*-lause. Tällöin on olemassa* EMSO_L*-lause* ξ*, jolle pätee:*

$$\mathcal{M} \vDash \varphi, \text{ joss } \mathcal{M} \vDash \xi.$$

Todistus. EXF_L-lauseessa φ esiintyy äärellinen määrä $(\exists^{\mathrm{s}} x \mid t)$-kvanttoreita. Indeksöidään ne $(\exists^{\mathrm{s}} x \mid t)_i$, missä x on muuttuja, $t \in \mathrm{T}_L$ ja $i \in \{1, \ldots, n\}$. Tämä indeksöinti tehdään niin, että kutakin ekskluusiokvanttorin esiintymää vastaa oma indeksinsä riippumatta muuttujasta x ja termistä t.

Olkoot $P_1, \ldots, P_n$ eri predikaattisymboleita, jotka eivät esiinny lauseessa φ ja olkoon $\psi \in \mathrm{Sf}(\varphi)$. Määritellään kaava ψ' rekursiivisesti seuraavasti:

$$\begin{aligned}
(\psi)' &= \psi, \text{ jos } \psi \text{ on literaali} \\
(\psi \wedge \theta)' &= \psi' \wedge \theta' \\
(\psi \vee \theta)' &= \psi' \vee \theta' \\
(\exists^{\mathrm{s}} x\, \psi)' &= \exists^{\mathrm{s}} x\, \psi' \\
(\forall x\, \psi)' &= \forall x\, \psi' \\
((\exists^{\mathrm{s}} x \mid t)_i \psi)' &= \neg P_i t \wedge \exists^{\mathrm{s}} x\, (P_i x \wedge \psi') \text{ jokaisella } i \in \{1, \ldots, n\}
\end{aligned}$$

Määritellään nyt kaava ξ seuraavasti:

$$\xi := \exists P_1 \ldots \exists P_n \varphi'.$$

Kaavan ψ' määritelmän nojalla φ' on FO_L-lause, ja täten ξ on EMSO_L-lause. Oletetaan, että $\mu \in \mathrm{Sf}(\varphi)$ ja X on tiimi. Osoitetaan, että

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M} \vDash_X \mu, \text{ joss on olemassa } A_1, \ldots, A_n \subseteq M, \\
&\qquad \text{s.e. } \mathcal{M}' \vDash_X \mu', \text{ missä } \mathcal{M}' = \mathcal{M}[A_1/P_1, \ldots, A_n/P_n].
\end{aligned}$$

- Jos μ on literaali, niin asetetaan $A_i := M$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$. Nyt väite pätee triviaalisti, sillä $\mu' = \mu$ ja P_i ei esiinny kaavassa μ millään i.

- Olkoon $\mu = \psi \wedge \theta$.

  Oletetaan ensin, että $\mathcal{M} \vDash_X \psi \wedge \theta$. Näin ollen siis $\mathcal{M} \vDash_X \psi$ ja $\mathcal{M} \vDash_X \theta$. Induktio-oletuksen nojalla on olemassa $A_1, \ldots, A_n \subseteq M$, siten että $\mathcal{M}[A_1/P_1, \ldots, A_n/P_n] \vDash_X \psi'$, ja on olemassa $A_1', \ldots, A_n' \subseteq M$, siten että $\mathcal{M}[A_1'/P_1, \ldots, A_n'/P_n] \vDash_X \theta'$. Määritellään nyt:

  $$\begin{aligned}
  A_i'' &:= \begin{cases} A_i, \text{ jos } P_i \text{ esiintyy kaavassa } \psi' \\ A_i', \text{ jos } P_i \text{ ei esiinny kaavassa } \psi' \end{cases} \qquad (i \in \{1, \ldots, n\}) \\
  \mathcal{M}' &:= \mathcal{M}[A_1''/P_1, \ldots, A_n''/P_n]
  \end{aligned}$$

  Koska kukin predikaattisymboleista P_i voi esiintyä korkeintaan toisessa kaavoista ψ' ja θ', niin selvästi $\mathcal{M}' \vDash_X \psi'$ ja $\mathcal{M}' \vDash_X \theta'$. Näin ollen $\mathcal{M}' \vDash_X \psi' \wedge \theta'$, eli $\mathcal{M}' \vDash_X (\psi \wedge \theta)'$.

Oletetaan sitten, että on olemassa osajoukot $A_1, \ldots, A_n \subseteq M$, siten että $\mathcal{M}' \vDash_X (\psi \wedge \theta)'$. Näin ollen $\mathcal{M}' \vDash_X \psi' \wedge \theta'$, eli $\mathcal{M}' \vDash_X \psi'$ ja $\mathcal{M}' \vDash_X \theta'$. Induktio-oletuksen nojalla $\mathcal{M} \vDash_X \psi$ ja $\mathcal{M} \vDash_X \theta$, eli $\mathcal{M} \vDash_X \psi \wedge \theta$.

- Olkoon $\mu = \psi \vee \theta$.

  Oletetaan ensin, että $\mathcal{M} \vDash_X \psi \vee \theta$. Siis on olemassa $Y, Y' \subseteq X$, siten että $Y \cup Y' = X$, $\mathcal{M} \vDash_Y \psi$ ja $\mathcal{M} \vDash_{Y'} \theta$. Induktio-oletuksen nojalla on olemassa $A_1, \ldots, A_n \subseteq M$, siten että $\mathcal{M}[A_1/P_1, \ldots, A_n/P_n] \vDash_Y \psi'$, ja on olemassa $A'_1, \ldots, A'_n \subseteq M$, siten että $\mathcal{M}[A'_1/P_1, \ldots, A'_n/P_n] \vDash_{Y'} \theta'$. Määritellään nyt:

  $$A''_i := \begin{cases} A_i, \text{ jos } P_i \text{ esiintyy kaavassa } \psi' \\ A'_i, \text{ jos } P_i \text{ ei esiinny kaavassa } \psi' \end{cases} \qquad (i \in \{1, \ldots, n\})$$
  $$\mathcal{M}' := \mathcal{M}[A''_1/P_1, \ldots, A''_n/P_n]$$

  Koska kukin predikaattisymboleista P_i voi esiintyä korkeintaan toisessa kaavoista ψ' ja θ', niin selvästi $\mathcal{M}' \vDash_Y \psi'$ ja $\mathcal{M}' \vDash_{Y'} \theta'$. Näin ollen $\mathcal{M}' \vDash_X \psi' \vee \theta'$, eli $\mathcal{M}' \vDash_X (\psi \vee \theta)'$.

  Oletetaan sitten, että on olemassa osajoukot $A_1, \ldots, A_n \subseteq M$, siten että $\mathcal{M}' \vDash_X (\psi \vee \theta)'$. Näin ollen $\mathcal{M}' \vDash_X \psi' \vee \theta'$, eli on olemassa $Y, Y' \subseteq X$, siten että $Y \cup Y' = X$, $\mathcal{M}' \vDash_Y \psi'$ ja $\mathcal{M}' \vDash_{Y'} \theta'$. Induktio-oletuksen nojalla $\mathcal{M} \vDash_Y \psi$ ja $\mathcal{M} \vDash_{Y'} \theta$, eli $\mathcal{M} \vDash_X \psi \vee \theta$.

- Olkoon $\mu = \exists^{\mathrm{s}} x\, \psi$. Nyt on voimassa:

  $$\begin{aligned} & \mathcal{M} \vDash_X \exists^{\mathrm{s}} x\, \psi \\ \Leftrightarrow\ & \text{On olemassa } F : X \to \mathcal{P}^*(M), \text{ s.e } \mathcal{M} \vDash_{X[F/x]} \psi \\ \overset{\text{IO}}{\Leftrightarrow}\ & \text{On olemassa } F : X \to \mathcal{P}^*(M) \\ & \quad \text{ja } A_1, \ldots, A_n \subseteq M \text{ s.e. } \mathcal{M}' \vDash_{X[F/x]} \psi' \\ \Leftrightarrow\ & \text{On olemassa } A_1, \ldots, A_n \subseteq M \text{ s.e. } \mathcal{M}' \vDash_X \exists^{\mathrm{s}} x\, \psi' \\ \Leftrightarrow\ & \text{On olemassa } A_1, \ldots, A_n \subseteq M \text{ s.e. } \mathcal{M}' \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}} x\, \psi)', \end{aligned}$$

  missä $\mathcal{M}' := \mathcal{M}[A_1/P_1, \ldots, A_n/P_n]$.

- Olkoon $\mu = \forall x\, \psi$. Nyt on voimassa:

  $$\begin{aligned} & \mathcal{M} \vDash_X \forall x\, \psi \\ \Leftrightarrow\ & \mathcal{M} \vDash_{X[M/x]} \psi \\ \overset{\text{IO}}{\Leftrightarrow}\ & \text{On olemassa } A_1, \ldots, A_n \subseteq M \text{ s.e. } \mathcal{M}' \vDash_{X[M/x]} \psi' \\ \Leftrightarrow\ & \text{On olemassa } A_1, \ldots, A_n \subseteq M \text{ s.e. } \mathcal{M}' \vDash_X \forall x\, \psi' \\ \Leftrightarrow\ & \text{On olemassa } A_1, \ldots, A_n \subseteq M \text{ s.e. } \mathcal{M}' \vDash_X (\forall x\, \psi)', \end{aligned}$$

  missä $\mathcal{M}' := \mathcal{M}[A_1/P_1, \ldots, A_n/P_n]$.

- Olkoon $\mu = (\exists^{\mathrm{s}} x \mid t)_j\, \psi$, jollain $j \in \{1, \dots, n\}$:

  Oletetaan ensin, että $\mathcal{M} \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}} x \mid t)_j\, \psi$. Näin ollen on olemassa kuvaus $F : X \to \mathcal{P}^*(\overline{X(t)})$, siten että $\mathcal{M} \vDash_{X[F/x]} \psi$. Induktio-oletuksen nojalla on olemassa $A_1, \dots, A_n \subseteq M$, joille $\mathcal{M}[A_1/P_1, \dots, A_n/P_n] \vDash_{X[F/x]} \psi'$. Merkitään:

  $$\mathrm{val}(F) := \{a \in F(s) \mid s \in \mathrm{dom}(F)\}$$

  Määritellään nyt

  $$A_i' := \begin{cases} \mathrm{val}(F), \text{ jos } i = j \\ A_i, \text{ jos } i \neq j \end{cases} \qquad (i \in \{1, \dots, n\})$$
  $$\mathcal{M}' := \mathcal{M}[A_1'/P_1, \dots, A_n'/P_n]$$

  Koska predikaattisymboli P_j ei esiinny kaavassa ψ', niin $\mathcal{M}' \vDash_{X[F/x]} \psi'$. Lisäksi koska $\mathrm{val}(F) = A_j' = P_j^{\mathcal{M}'}$, niin $\mathcal{M}' \vDash_{X[F/x]} P_j x$. Täten pätee, että $\mathcal{M}' \vDash_{X[F/x]} P_j x \wedge \psi'$ ja edelleen $\mathcal{M}' \vDash_X \exists^{\mathrm{s}} x(P_j x \wedge \psi')$. Koska $P_j^{\mathcal{M}'} = \mathrm{val}(F) \subseteq \overline{X(t)}$, niin selvästi $\mathcal{M}' \vDash_X \neg P_j t$. Näin ollen pätee, että $\mathcal{M}' \vDash_X \neg P_j t \wedge \exists^{\mathrm{s}} x(P_j x \wedge \psi')$, eli $\mathcal{M}' \vDash_X ((\exists^{\mathrm{s}} x \mid t)_j\, \psi)'$.

  Oletetaan sitten, että on olemassa joukot $A_1, \dots, A_n \subseteq M$, siten että $\mathcal{M}' \vDash_X ((\exists^{\mathrm{s}} x \mid t)_j\, \psi)'$. Näin ollen $\mathcal{M}' \vDash_X \neg P_j t$ ja $\mathcal{M}' \vDash_X \exists^{\mathrm{s}} x(P_j x \wedge \psi')$. Siis on olemassa $F : X \to \mathcal{P}^*(M)$, siten että $\mathcal{M}' \vDash_{X[F/x]} P_j x \wedge \psi'$. Erityisesti $\mathcal{M}' \vDash_{X[F/x]} \psi'$, joten induktio-oletuksen nojalla $\mathcal{M} \vDash_{X[F/x]} \psi$. Riittää siis osoittaa, että $\mathrm{im}(F) \subseteq \mathcal{P}(\overline{X(t)})$.

  Tehdään vastaoletus, että on olemassa $B \in \mathrm{im}(F)$ ja $a \in B$, siten että $a \in X(t)$. Tällöin $B = F(s)$ jollain $s \in X$. Koska $a \in X(t)$, niin on olemassa $s' \in X$, siten että $s'(t) = a$. Koska $s' \in X$ ja $\mathcal{M}' \vDash_X \neg P_j t$, niin $\mathcal{M}' \vDash_{s'} \neg P_j t$, eli $s'(t) = a \notin P_j^{\mathcal{M}}$. Koska $s[a/x] \in X[F/x]$ ja $\mathcal{M}' \vDash_{X[F/x]} P_j x$, niin $\mathcal{M}' \vDash_{s[a/x]} P_j x$. Täten $s[a/x](x) = a \in P_j^{\mathcal{M}}$, mikä on ristiriita.

Edellisen tuloksen nojalla pätee erityisesti, että

$$\mathcal{M} \vDash_{\{\emptyset\}} \varphi, \text{ joss on olemassa } A_1, \dots, A_n \subseteq M,$$
$$\text{s.e. } \mathcal{M}' \vDash_{\{\emptyset\}} \varphi', \text{ missä } \mathcal{M}' = \mathcal{M}[A_1/P_1, \dots, A_n/P_n].$$

Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$\mathcal{M} \vDash \varphi, \text{ joss } \mathcal{M} \vDash \exists P_i \dots \exists P_n \varphi'.$$

Näin ollen $\mathcal{M} \vDash \varphi$, jos ja vain jos $\mathcal{M} \vDash \xi$. □

Korollaari 4.22. EXF-*logiikka sisältyy* EMSO-*logiikkaan lauseiden tasolla.*

Todistus. Väite seuraa suoraan lauseesta 4.21. □

Huomautus. Lauseen 4.21 todistuksessa määriteltiin induktion ekskluusiokvanttorin tapauksessa, että $A_i' := \mathrm{val}(F)$, kun $i = j$. Mutta yhtä hyvin voitaisiin valita, että $A_i' := \overline{X(t)}$, kun $i = j$. Itse asiassa tähän kävisi myös mikä tahansa muu joukko B, jolle on voimassa, että

$$\mathrm{val}(F) \subseteq B \subseteq \overline{X(t)}.$$

Nyt voimme palata kysymykseen EXF- ja DEP[2]-logiikoiden välisestä suhteesta, jota pohdimme kappaleessa 4.2. Esitetään ensin seuraava tunnettu tulos EMSO- ja DEP[2]-logiikoiden välisestä suhteesta:

Lause 4.23. DEP[2]*-logiikka ei sisälly* EMSO*-logiikkaan lauseiden tasolla.*

Todistus. Väänänen on osoittanut [17, s. 48 - 51], että NDEP[2]-logiikalla voidaan ilmaista mallin universumin äärettömyys ja parillisuus. Kumpikaan näistä ominaisuuksista ei ole määriteltävissä EMSO-logiikan avulla [15]. Näin ollen DEP[2]-logiikka ei sisälly EMSO-logiikkaan lauseiden tasolla. □

Saamme tämän avulla seuraavan korollaarin, joka täydentää sivun 77 kaavion muuttamalla EXF- ja DEP[2]-logiikoiden välisen suhteen aidoksi sisältymiseksi:

Korollaari 4.24. EXF*-logiikka sisältyy aidosti* DEP[2]*-logiikkaan.*

Todistus. EXF-logiikka sisältyy DEP[2]-logiikkaan lauseen 4.12 nojalla. Kuitenkin korollaarin 4.22 nojalla EXF-logiikka sisältyy lauseiden tasolla EMSO-logiikkaan, ja lauseen 4.23 nojalla DEP[2]-logiikka ei sisälly lauseiden tasolla EMSO-logiikkaan. Näin ollen EXF-logiikka ja DEP[2]-logiikka eivät voi olla ilmaisuvoimaltaan samat, joten EXF-logiikka sisältyy siis aidosti DEP[2]-logiikkaan. □

Huomautus. Kuten edellisestä todistuksesta ilmenee, niin osoitimme itse asiassa hieman vahvemman tuloksen. Korollaari 4.24 voitaisiin nimittäin esittää muodossa, että EXF-logiikka sisältyy lauseiden tasolla aidosti DEP[2]-logiikkaan. Tämä on vahvempi tulos kuin se minkä saimme INF- ja NDEP[2]-logiikoille korollaarissa 4.20, jossa osoitimme aidon sisältymisen ainoastaan kaavojen tasolla.

4.4.3 INF$_L$-lauseen ilmaiseminen EMSO$_L$-lauseella

Kuten edellisessä pykälässä, osoitamme seuraavaksi, että myös INF$_L$-lauseet voidaan ilmaista ekvivalentilla EMSO$_L$-lauseella. Todistus on samantyylinen, mutta monimutkaisempi kuin EXF-logiikan tapauksessa. Meidän pitää tässä todistuksessa ensin todistaa useita aputuloksia ennen kuin voimme todistaa varsinaisen väitteen.

Lause 4.25. *Olkoon* φ INF_L*-lause. Tällöin on olemassa* EMSO_L*-lause* ξ*, jolle pätee:*

$$\mathcal{M} \vDash \varphi, \text{ joss } \mathcal{M} \vDash \xi.$$

Todistus. Lauseessa φ esiintyy äärellinen määrä $(\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)$-kvanttoreita. Indeksöidään ne $(\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)_i$, missä x on muuttuja, $t \in \mathrm{T}_L$ ja $i \in \{1, \dots, n\}$. Indeksöinti tehdään niin, että kutakin inkluusio-kvanttorin esiintymää vastaa oma indeksinsä riippumatta muuttujasta x ja termistä t.

Olkoon u muuttuja, siten että $u \notin \mathrm{Vr}(\varphi)$ ja olkoot $P_1, \dots, P_n$ eri predikaattisymboleita, jotka eivät esiinny lauseessa φ, ja olkoon $\psi \in \mathrm{Sf}(\varphi)$. Määritellään kaavat ψ' ja ψ'_i $(i \in \{1, \dots, n\})$ rekursiivisesti seuraavasti:

$$\begin{aligned}
(\psi)' &= \psi, \text{ jos } \psi \text{ on literaali} \\
(\psi \wedge \theta)' &= \psi' \wedge \theta' \\
(\psi \vee \theta)' &= \psi' \vee \theta' \\
(\exists^{\mathrm{s}} x\, \psi)' &= \exists^{\mathrm{s}} x\, \psi' \\
(\forall x\, \psi)' &= \forall x\, \psi' \\
((\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)_i\, \psi)' &= \exists^{\mathrm{s}} x\, (P_i x \wedge \psi') \text{ jokaisella } i \in \{1, \dots, n\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\psi)'_i &= \psi, \text{ jos } \psi \text{ on literaali} \\
(\psi \wedge \theta)'_i &= \psi'_i \wedge \theta'_i \\
(\psi \vee \theta)'_i &= \begin{cases} \psi'_i, & \text{jos } (\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)_i \text{ esiintyy kaavassa } \psi \\ \theta'_i, & \text{jos } (\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)_i \text{ esiintyy kaavassa } \theta \\ \psi'_i \vee \theta'_i, & \text{jos } (\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)_i \text{ ei esiinny kaavassa } \psi \vee \theta \end{cases} \\
(\exists^{\mathrm{s}} x\, \psi)'_i &= \exists^{\mathrm{s}} x\, \psi'_i \\
(\forall x\, \psi)'_i &= \exists^{\mathrm{s}} x\, \psi'_i \wedge \forall x\, \psi' \\
((\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)_j\, \psi)'_i &= \exists^{\mathrm{s}} x\, (P_j x \wedge \psi'_i), \text{ jos } j \neq i \\
((\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)_i\, \psi)'_i &= (u = t) \wedge \exists^{\mathrm{s}} x\, (P_i x \wedge \psi'_i)
\end{aligned}$$

Huomataan, että $\psi', \psi'_i \in \mathrm{FO}_L$ jokaisella $\psi \in \mathrm{Sf}(\varphi)$ ja $i \in \{1, \dots, n\}$. Lisäksi φ'_i sisältää vapaan muuttujan u jokaisella $i \in \{1, \dots, n\}$. Määritellään nyt kaava ξ seuraavasti:

$$\xi := \exists P_1 \dots \exists P_n \Big(\varphi' \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \forall u\, (\neg P_i u \vee \varphi'_i(u)) \Big).$$

Kaavojen ψ' ja ψ'_i määritelmien nojalla $\varphi', \varphi'_i \in \mathrm{FO}_L$ jokaisella $i \in \{1, \dots, n\}$, joten ξ on selvästi EMSO_L-lause. Todistetaan seuraavat aputulokset:

Aputulos. Oletetaan, että kaava $\mu \in \mathrm{Sf}(\varphi)$ ja X on tiimi. Oletetaan lisäksi, että $i \in \{1, \dots, n\}$ on sellainen indeksi, että kvanttori $(\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)_i$ ei esiinny kaavassa μ. Tällöin on voimassa:

(AT1) $\mathcal{M} \vDash_X \mu'$, joss $\mathcal{M} \vDash_X \mu'_i$, joss $\mathcal{M} \vDash_{s[a/u]} \mu'_i$ kaikilla $a \in M$ ja $s \in X$.

Ensimmäinen ekvivalenssi todistetaan triviaalilla induktiolla kaavan μ rakenteen suhteen: μ':n ja μ_i':n määritelmät eroavat toisistaan ainoastaan silloin kun $\mu = \forall x\, \psi$. Koska tällöin induktio-oletuksen nojalla ψ' ja ψ_i' ovat loogisesti ekvivalentteja, niin selvästi myös $\forall x\, \psi'$ ja $\exists^{\mathrm{s}} x\, \psi_i' \wedge \forall x\, \psi'$ ovat loogisesti ekvivalentteja.

Toisen ekvivalenssin todistusta varten huomataan, että koska $(\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)_i$ ei esiinny kaavassa μ, niin muuttuja u ei esiinny kaavassa μ_i'. Näin ollen $\mathcal{M} \vDash_s \mu_i'$, jos ja vain jos $\mathcal{M} \vDash_{s[a/u]} \mu_i'$, missä $a \in M$. Koska lisäksi $\mu_i' \in \mathrm{FO}_L$, niin toinen ekvivalenssi seuraa suoraan lemmasta 2.3.

Aputulos. Oletetaan, että $\mu \in \mathrm{Sf}(\varphi)$ ja X_1, X_2 ovat tiimejä, joille on voimassa $\mathrm{dom}(X_2) = \mathrm{dom}(X_1) \cup \{u\}$. Olkoon $X_2^* := X_2 \upharpoonright \mathrm{dom}(X_1)$. Tällöin kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$ pätee:

(AT2) Jos $\mathcal{M} \vDash_{X_1} \mu'$ ja $\mathcal{M} \vDash_{X_2} \mu_i'$, niin $\mathcal{M} \vDash_{X_1 \cup X_2^*} \mu'$.

Todistetaan tämä induktiolla kaavan μ rakenteen suhteen:

- Olkoon μ literaali. Oletetaan, että $\mathcal{M} \vDash_{X_1} \mu'$ ja $\mathcal{M} \vDash_{X_2} \mu_i'$. Koska nyt $u \notin \mathrm{Vr}(\mu_i')$, niin lemman 3.3 nojalla $\mathcal{M} \vDash_{X_2^*} \mu_i'$. Lisäksi $\mu' = \mu_i' = \mu$, joten lemman 2.3 nojalla kaikilla $s \in X_1$ pätee $\mathcal{M} \vDash_s \mu$, ja kaikilla $s \in X_2^*$ pätee $\mathcal{M} \vDash_s \mu$. Näin ollen kaikilla $s \in X_1 \cup X_2^*$ pätee $\mathcal{M} \vDash_s \mu$, jolloin lemman 2.3 nojalla $\mathcal{M} \vDash_{X_1 \cup X_2^*} \mu$, eli $\mathcal{M} \vDash_{X_1 \cup X_2^*} \mu'$

- Olkoon $\mu = \psi \wedge \theta$. Oletetaan, että $\mathcal{M} \vDash_{X_1} (\psi \wedge \theta)'$ ja $\mathcal{M} \vDash_{X_2} (\psi \wedge \theta)_i'$, eli $\mathcal{M} \vDash_{X_1} \psi' \wedge \theta'$ ja $\mathcal{M} \vDash_{X_2} \psi_i' \wedge \theta_i'$. Näin ollen $\mathcal{M} \vDash_{X_1} \psi'$, $\mathcal{M} \vDash_{X_1} \theta'$, $\mathcal{M} \vDash_{X_2} \psi_i'$ ja $\mathcal{M} \vDash_{X_2} \theta_i'$. Induktio-oletuksen nojalla pätee $\mathcal{M} \vDash_{X_1 \cup X_2^*} \psi'$ ja $\mathcal{M} \vDash_{X_1 \cup X_2^*} \theta'$. Siis $\mathcal{M} \vDash_{X_1 \cup X_2^*} \psi' \wedge \theta'$, eli $\mathcal{M} \vDash_{X_1 \cup X_2^*} (\psi \wedge \theta)'$.

- Olkoon $\mu = \psi \vee \theta$. Oletetaan, että $\mathcal{M} \vDash_{X_1} (\psi \vee \theta)'$ ja $\mathcal{M} \vDash_{X_2} (\psi \vee \theta)_i'$. Tällöin $\mathcal{M} \vDash_{X_1} \psi' \vee \theta'$, eli on olemassa $Y_1, Y_1' \subseteq X_1$, siten että pätee $Y_1 \cup Y_1' = X$, $\mathcal{M} \vDash_{Y_1} \psi'$ ja $\mathcal{M} \vDash_{Y_1'} \theta'$.

  Oletetaan ensin, että kvanttori $(\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)_i$ esiintyy kaavassa ψ. Tällöin $\mathcal{M} \vDash_{X_2} \psi_i'$, joten induktio-oletuksen nojalla $\mathcal{M} \vDash_{Y_1 \cup X_2^*} \psi'$. Tällöin

  $$(Y_1 \cup X_2^*) \cup Y_1' = (Y_1 \cup Y_1') \cup X_2^* = X_1 \cup X_2^*.$$

  Täten $\mathcal{M} \vDash_{X_1 \cup X_2^*} \psi' \vee \theta'$, eli $\mathcal{M} \vDash_{X_1 \cup X_2^*} (\psi \vee \theta)'$. Tapaus jossa kvanttori $(\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)_i$ esiintyy kaavassa θ todistetaan vastaavalla tavalla.

  Oletetaan sitten, että kvanttori $(\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)_i$ ei esiinny kaavassa $\psi \vee \theta$. Tällöin pätee $\mathcal{M} \vDash_{X_2} \psi_i' \vee \theta_i'$, eli on olemassa tiimit $Y_2, Y_2' \subseteq X_2$, siten että $Y_2 \cup Y_2' = X_2$, $\mathcal{M} \vDash_{Y_2} \psi_i'$ ja $\mathcal{M} \vDash_{Y_2'} \theta_i'$. Induktio-oletuksen nojalla $\mathcal{M} \vDash_{Y_1 \cup Y_2^*} \psi'$ ja $\mathcal{M} \vDash_{Y_1' \cup Y_2'^*} \theta'$. Nyt

  $$\begin{aligned}(Y_1 \cup Y_2^*) \cup (Y_1' \cup Y_2'^*) &= (Y_1 \cup Y_1') \cup (Y_2^* \cup Y_2'^*) \\ &= (Y_1 \cup Y_1') \cup (Y_2 \cup Y_2')^* = X_1 \cup X_2^*.\end{aligned}$$

  Näin ollen $\mathcal{M} \vDash_{X_1 \cup X_2^*} \psi' \vee \theta'$, eli $\mathcal{M} \vDash_{X_1 \cup X_2^*} (\psi \vee \theta)'$.

- Olkoon $\mu = \exists^{\mathrm{s}} x\, \psi$. Oletetaan, että $\mathcal{M} \vDash_{X_1} (\exists^{\mathrm{s}} x\, \psi)'$ ja $\mathcal{M} \vDash_{X_2} (\exists^{\mathrm{s}} x\, \psi)'_i$, eli $\mathcal{M} \vDash_{X_1} \exists^{\mathrm{s}} x\, \psi'$ ja $\mathcal{M} \vDash_{X_2} \exists^{\mathrm{s}} x\, \psi'_i$. Näin ollen on olemassa kuvaukset $F_1 : X_1 \to \mathcal{P}^*(M)$ ja $F_2 : X_2 \to \mathcal{P}^*(M)$, siten että $\mathcal{M} \vDash_{X_1[F_1/x]} \psi'$ ja $\mathcal{M} \vDash_{X_2[F_2/x]} \psi'_i$. Induktio-oletuksen nojalla $\mathcal{M} \vDash_{X_1[F_1/x] \cup (X_2[F_2/x])^*} \psi'$. Määritellään kuvaukset:

$$F_2^* : X_2^* \to \mathcal{P}^*(M), \text{ s.e. } s \mapsto \{b \in F_2(s[a/u]) \mid s[a/u] \in X_2,\, a \in M\}$$

$$F : X_1 \cup X_2^* \to \mathcal{P}^*(M), \text{ s.e. } \begin{cases} s \mapsto F_1(s), \text{ jos } s \in X_1 \setminus X_2^* \\ s \mapsto F_2^*(s), \text{ jos } s \in X_2^* \setminus X_1 \\ s \mapsto F_1(s) \cup F_2^*(s), \text{ jos } s \in X_1 \cap X_2^* \end{cases}$$

  Nyt kuvausten F_2^* ja F määritelmien nojalla pätee selvästi, että

$$X_1[F_1/x] \cup (X_2[F_2/x])^* = X_1[F_1/x] \cup X_2^*[F_2^*/x] = (X_1 \cup X_2^*)[F/x].$$

  Näin ollen $\mathcal{M} \vDash_{X_1 \cup X_2^*} \exists^{\mathrm{s}} x\, \psi'$, eli $\mathcal{M} \vDash_{X_1 \cup X_2^*} (\exists^{\mathrm{s}} x\, \psi)'$.

- Olkoon $\mu = \forall x\, \psi$. Oletetaan, että $\mathcal{M} \vDash_{X_1} (\forall x\, \psi)'$ ja $\mathcal{M} \vDash_{X_2} (\forall x\, \psi)'_i$. Näin ollen $\mathcal{M} \vDash_{X_1} \forall x\, \psi'$ ja $\mathcal{M} \vDash_{X_2} \exists^{\mathrm{s}} x\, \psi'_i \wedge \forall x\, \psi'$. Koska $u \notin \mathrm{Vr}(\psi')$ ja $\mathcal{M} \vDash_{X_2} \forall x\, \psi'$, niin lemman 3.3 nojalla $\mathcal{M} \vDash_{X_2^*} \forall x\, \psi'$. Koska nyt pätee, että $\mathcal{M} \vDash_{X_1} \forall x\, \psi'$, $\mathcal{M} \vDash_{X_2^*} \forall x\, \psi'$ ja $\psi' \in \mathrm{FO}_L$, niin lemman 2.3 nojalla $\mathcal{M} \vDash_{X_1 \cup X_2^*} \forall x\, \psi'$, eli $\mathcal{M} \vDash_{X_1 \cup X_2^*} (\forall x\, \psi)'$.

- Olkoon $\mu = (\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)_j\, \psi$ jollain $j \in \{1, \ldots, n\}$. Oletetaan, että pätee $\mathcal{M} \vDash_{X_1} (\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)_j\, \psi)'$ ja $\mathcal{M} \vDash_{X_2} ((\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)_j\, \psi)'_i$. Nyt on voimassa $\mathcal{M} \vDash_{X_1} \exists^{\mathrm{s}} x\, (P_j x \wedge \psi')$. Mikäli $j \neq i$, niin $\mathcal{M} \vDash_{X_2} \exists^{\mathrm{s}} x\, (P_j x \wedge \psi'_i)$. Jos taas $j = i$, niin $\mathcal{M} \vDash_{X_2} (u = t) \wedge \exists^{\mathrm{s}} x\, (P_j x \wedge \psi'_i)$, jolloin erityisesti $\mathcal{M} \vDash_{X_2} \exists^{\mathrm{s}} x\, (P_j x \wedge \psi'_i)$. Siis joka tapauksessa $\mathcal{M} \vDash_{X_2} \exists^{\mathrm{s}} x\, (P_j x \wedge \psi'_i)$.

  Näin ollen on olemassa $F_1 : X_1 \to \mathcal{P}^*(M)$ ja $F_2 : X_2 \to \mathcal{P}^*(M)$, siten että $\mathcal{M} \vDash_{X_1[F_1/x]} P_j x \wedge \psi'$ ja $\mathcal{M} \vDash_{X_2[F_2/x]} P_j x \wedge \psi'_i$. Erityisesti nyt pätee $\mathcal{M} \vDash_{X_1[F_1/x]} \psi'$ ja $\mathcal{M} \vDash_{X_2[F_2/x]} \psi'_i$. Täten induktio-oletuksen nojalla $\mathcal{M} \vDash_{X_1[F_1/x] \cup (X_2[F_2/x])^*} \psi'$. Koska $\mathcal{M} \vDash_{X_1[F_1/x]} P_j x$ ja $\mathcal{M} \vDash_{X_2[F_2/x]} P_j x$, niin lemman 2.3 nojalla selvästi myös $\mathcal{M} \vDash_{X_1[F_1/x] \cup (X_2[F_2/x])^*} P_j x$. Näin ollen siis $\mathcal{M} \vDash_{X_1[F_1/x] \cup (X_2[F_2/x])^*} P_j x \wedge \psi'$. Määritellään kuvaukset:

$$F_2^* : X_2^* \to \mathcal{P}^*(M), \text{ s.e. } s \mapsto \{b \in F_2(s[a/u]) \mid s[a/u] \in X_2,\, a \in M\}$$

$$F : X_1 \cup X_2^* \to \mathcal{P}^*(M), \text{ s.e. } \begin{cases} s \mapsto F_1(s), \text{ jos } s \in X_1 \setminus X_2^* \\ s \mapsto F_2^*(s), \text{ jos } s \in X_2^* \setminus X_1 \\ s \mapsto F_1(s) \cup F_2^*(s), \text{ jos } s \in X_1 \cap X_2^* \end{cases}$$

  Nyt kuvausten F_2^* ja F määritelmien nojalla pätee selvästi, että

$$X_1[F_1/x] \cup (X_2[F_2/x])^* = X_1[F_1/x] \cup X_2^*[F_2^*/x] = (X_1 \cup X_2^*)[F/x].$$

  Näin ollen $\mathcal{M} \vDash_{X_1 \cup X_2^*} \exists^{\mathrm{s}} x\, (P_j x \wedge \psi')$, eli $\mathcal{M} \vDash_{X_1 \cup X_2^*} (\exists^{\mathrm{s}} x\, \psi)'$.

Aputulos. Oletetaan, että $\mu \in \mathrm{Sf}(\varphi)$ ja X on tiimi, jolle $\mathrm{dom}(X) = \mathrm{Fr}(\mu)$. Tällöin on voimassa:

(AT3) $\mathcal{M} \vDash_X \mu$, joss on olemassa $A_1, \ldots, A_n \subseteq M$, s.e. $\mathcal{M}' \vDash_X \mu'$ ja kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$ sekä $a \in A_i$ on olemassa $s \in X$ s.e. $\mathcal{M}' \vDash_{s[a/u]} \mu_i'$, missä $\mathcal{M}' = \mathcal{M}[A_1/P_1, \ldots, A_n/P_n]$.

Tarkastelemme ensin tapauksen $X = \emptyset$: Oletetaan, että $\mathcal{M} \vDash_X \mu$. Valitaan nyt $A_1 = \cdots = A_n = \emptyset$ ja merkitään $\mathcal{M}' = \mathcal{M}[A_1/P_1, \ldots, A_n/P_n]$. Nyt koska $X = \emptyset$, niin $\mathcal{M}' \vDash_X \mu'$. Lisäksi koska $A_i = \emptyset$ jokaisella $i \in \{1, \ldots, n\}$, niin väitteen loppuosa pätee triviaalisti. Ekvivalenssin toinen suunta on triviaali, sillä $\mathcal{M} \vDash_\emptyset \mu$ pätee aina. Oletetaan sitten, että $X \neq \emptyset$. Todistetaan väite induktiolla kaavan μ suhteen[2]:

- Mikäli μ on literaali, niin voidaan valita $A_1 = \cdots = A_n = \emptyset$. Tällöin väite pätee triviaalisti, sillä $\mu' = \mu$ ja lisäksi P_i ei esiinny kaavassa μ millään $i \in \{1, \ldots, n\}$.

- Olkoon $\mu = \psi \wedge \theta$.

  Oletetaan ensin, että $\mathcal{M} \vDash_X \psi \wedge \theta$. Siis $\mathcal{M} \vDash_X \psi$ ja $\mathcal{M} \vDash_X \theta$. Induktio-oletuksen nojalla on olemassa $A_1, \ldots, A_n \subseteq M$ ja $A_1', \ldots, A_n' \subseteq M$, siten että $\mathcal{M}[A_1/P_1, \ldots, A_n/P_n] \vDash_X \psi'$ ja $\mathcal{M}[A_1'/P_1, \ldots, A_n'/P_n] \vDash_X \theta'$. Lisäksi jokaisella $i \in \{1, \ldots, n\}$ sekä $a \in A_i$ ja $a' \in A_i'$ on olemassa $s \in X$, siten että $\mathcal{M}[A_1/P_1, \ldots, A_n/P_n] \vDash_{s[a/u]} \psi_i'$ ja $s' \in X$, siten että $\mathcal{M}[A_1'/P_1, \ldots, A_n'/P_n] \vDash_{s'[a'/u]} \theta_i'$. Määritellään nyt:

  $$A_i'' := \begin{cases} A_i, & \text{jos } P_i \text{ esiintyy kaavassa } \psi' \\ A_i', & \text{jos } P_i \text{ ei esiinny kaavassa } \psi' \end{cases} \qquad (i \in \{1, \ldots, n\})$$
  $$\mathcal{M}' := \mathcal{M}[A_1''/P_1, \ldots, A_n''/P_n]$$

  Koska kukin predikaattisymboleista P_i voi esiintyä korkeintaan toisessa kaavoista ψ' ja θ', niin selvästi $\mathcal{M}' \vDash_X \psi'$ ja $\mathcal{M}' \vDash_X \theta'$. Näin ollen $\mathcal{M}' \vDash_X \psi' \wedge \theta'$, eli $\mathcal{M}' \vDash_X (\psi \wedge \theta)'$.

  Valitaan mielivaltainen $i \in \{1, \ldots, n\}$ ja $a \in A_i''$. Mikäli P_i esiintyy kaavassa ψ', niin $a \in A_i'' = A_i$, jolloin on olemassa $s \in X$, siten että $\mathcal{M}[A_1/P_1, \ldots, A_n/P_n] \vDash_{s[a/u]} \psi_i'$. Kaavassa ψ' esiintymättömät predikaattisymbolit eivät esiinny myöskään kaavassa ψ_i', joten $\mathcal{M}' \vDash_{s[a/u]} \psi_i'$. Koska kvanttori $(\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)_i$ ei esiinny kaavassa θ ja $\mathcal{M}' \vDash_X \theta'$, niin aputuloksen (AT1) nojalla $\mathcal{M}' \vDash_{s[a/u]} \theta_i'$. Näin ollen $\mathcal{M}' \vDash_{s[a/u]} \psi_i' \wedge \theta_i'$, eli $\mathcal{M}' \vDash_{s[a/u]} (\psi \wedge \theta)_i'$.

  Mikäli P_i esiintyy kaavassa θ', niin se ei voi esiintyä kaavassa ψ'. Tällöin voimme päätellä kuten edellä, että on olemassa $s \in X$, siten että

[2] Huomaa, että tarvitsemme tapausta $X = \emptyset$, jotta voimme käyttää induktio-oletusta yleisesti disjunktion tapauksessa.

$\mathcal{M}' \vDash_{s[a/u]} (\psi \wedge \theta)'_i$. Mikäli P_i ei esiinny kummassakaan kaavoista ψ' tai θ', niin voimme valita minkä tahansa $s \in X (\neq \emptyset)$, jolloin aputuloksen (AT1) nojalla pätee $\mathcal{M}' \vDash_{s[a/u]} \psi'_i$ ja $\mathcal{M}' \vDash_{s[a/u]} \theta'_i$, eli $\mathcal{M}' \vDash_{s[a/u]} (\psi \wedge \theta)'_i$.

Oletetaan, sitten että on olemassa $A_1, \ldots, A_n \subseteq M$, siten että pätee $\mathcal{M}' \vDash_X (\psi \wedge \theta)'$, ja jokaisella $i \in \{1, \ldots, n\}$ sekä $a \in A_i$ on olemassa $s \in X$, siten että $\mathcal{M}' \vDash_{s[a/u]} (\psi \wedge \theta)'_i$. Nyt pätee, että $\mathcal{M}' \vDash_X \psi' \wedge \theta'$, eli $\mathcal{M}' \vDash_X \psi'$ ja $\mathcal{M}' \vDash_X \theta'$.

Koska $(\psi \wedge \theta)'_i = \psi'_i \wedge \theta'_i$, niin kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$ ja $a \in A_i$ on olemassa $s \in X$, siten että $\mathcal{M}' \vDash_{s[a/u]} \psi'_i$. Koska lisäksi $\mathcal{M}' \vDash_X \psi'$, niin induktio-oletuksen nojalla $\mathcal{M} \vDash_X \psi$. Vastaavin perusteluin on voimassa $\mathcal{M} \vDash_X \theta$, joten näin ollen $\mathcal{M} \vDash_X \psi \wedge \theta$.

- Olkoon $\mu = \psi \vee \theta$.

  Oletetaan ensin, että $\mathcal{M} \vDash_X \psi \vee \theta$. Siis on olemassa $Y, Y' \subseteq X$, siten että $Y \cup Y' = X$, $\mathcal{M} \vDash_Y \psi$ ja $\mathcal{M} \vDash_{Y'} \theta$. Induktio-oletuksen nojalla tällöin on olemassa $A_1, \ldots, A_n \subseteq M$ ja $A'_1, \ldots, A'_n \subseteq M$, siten että $\mathcal{M}[A_1/P_1, \ldots, A_n/P_n] \vDash_Y \psi'$ ja $\mathcal{M}[A'_1/P_1, \ldots, A'_n/P_n] \vDash_{Y'} \theta'$. Lisäksi jokaisella $i \in \{1, \ldots, n\}$ sekä $a \in A_i$ ja $a' \in A'_i$ on olemassa $s \in Y$, siten että $\mathcal{M}[A_1/P_1, \ldots, A_n/P_n] \vDash_{s[a/u]} \psi'_i$ ja on olemassa $s' \in Y'$, siten että $\mathcal{M}[A'_1/P_1, \ldots, A'_n/P_n] \vDash_{s'[a'/u]} \theta'_i$. Määritellään nyt:

$$A''_i := \begin{cases} A_i, & \text{jos } P_i \text{ esiintyy kaavassa } \psi' \\ A'_i, & \text{jos } P_i \text{ ei esiinny kaavassa } \psi' \end{cases} \qquad (i \in \{1, \ldots, n\})$$
$$\mathcal{M}' := \mathcal{M}[A''_1/P_1, \ldots, A''_n/P_n]$$

  Koska kukin predikaattisymboleista P_i voi esiintyä korkeintaan toisessa kaavoista ψ' ja θ', niin selvästi $\mathcal{M}' \vDash_Y \psi'$ ja $\mathcal{M}' \vDash_{Y'} \theta'$. Näin ollen $\mathcal{M}' \vDash_X \psi' \vee \theta'$, eli $\mathcal{M}' \vDash_X (\psi \vee \theta)'$.

  Valitaan mielivaltainen $i \in \{1, \ldots, n\}$ ja $a \in A''_i$. Oletetaan ensin, että kvanttori $(\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)_i$ esiintyy kaavassa ψ. Tällöin $A''_i = A_i$, jolloin on olemassa $s \in Y$, siten että $\mathcal{M}[A_1/P_1, \ldots, A_n/P_n] \vDash_{s[a/u]} \psi'_i$. Kaavassa ψ' esiintymättömät predikaattisymbolit eivät esiinny myöskään kaavassa ψ'_i, joten $\mathcal{M}' \vDash_{s[a/u]} \psi'_i$, eli $\mathcal{M}' \vDash_{s[a/u]} (\psi \vee \theta)'_i$. Jos taas kvanttori $(\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)_i$ esiintyy kaavassa θ, niin voidaan vastaavasti päätellä, että $\mathcal{M}' \vDash_{s[a/u]} (\psi \vee \theta)'_i$.

  Oletetaan sitten, että kvanttori $(\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)_i$ ei esiinny kaavassa $\psi \vee \theta$. Koska $\mathcal{M}' \vDash_X (\psi \vee \theta)'$, niin aputuloksen (AT1) nojalla $\mathcal{M}' \vDash_X (\psi \vee \theta)'_i$. Oletuksen nojalla $X \neq \emptyset$, joten voidaan valita mikä tahansa $s \in X$, jolloin aputuloksen (AT1) nojalla $\mathcal{M}' \vDash_{s[a/u]} (\psi \vee \theta)'_i$.

  Oletetaan sitten, että on olemassa $A_1, \ldots, A_n \subseteq M$, siten että pätee

$\mathcal{M}' \vDash_X (\psi \vee \theta)'$, ja jokaisella $i \in \{1, \dots, n\}$ sekä $a \in A_i$ on olemassa $s \in X$, siten että $\mathcal{M}' \vDash_{s[a/u]} (\psi \vee \theta)'_i$. Nyt pätee $\mathcal{M}' \vDash_X \psi' \vee \theta'$, eli on olemassa $Y, Y' \subseteq X$, siten että $Y \cup Y' = X$, $\mathcal{M}' \vDash_Y \psi'$ ja $\mathcal{M}' \vDash_{Y'} \theta'$.

Valitaan mielivaltainen $i \in \{1, \dots, n\}$ ja $a \in A_i$. Tarkastellaan ensin tapaus, jossa kvanttori $(\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)_i$ ei esiinny kaavassa $\psi \vee \theta$. Tällöin aputuloksen (AT1) nojalla $\mathcal{M}' \vDash_Y \psi'_i$ ja $\mathcal{M}' \vDash_{Y'} \theta'_i$. Mikäli nyt $Y = \emptyset$, niin triviaalisti $\mathcal{M} \vDash_Y \psi$. Jos taas $Y \neq \emptyset$, niin voidaan valita mikä tahansa $s \in Y$, jolloin aputuloksen (AT1) nojalla $\mathcal{M}' \vDash_{s[a/u]} \psi'_i$. Näin ollen induktio-oletuksen nojalla $\mathcal{M} \vDash_Y \psi$. Vastaavalla tavalla voidaan päätellä, että $\mathcal{M} \vDash_{Y'} \theta$, joten $\mathcal{M} \vDash_X \psi \vee \theta$.

Oletetaan sitten, että kvanttori $(\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)_i$ esiintyy kaavassa ψ. Koska nyt kvanttori $(\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)_i$ ei esiinny kaavassa θ, niin voidaan päätellä kuten edellä, että $\mathcal{M} \vDash_{Y'} \theta$. Koska nyt $(\psi \vee \theta)'_i = \psi'_i$, niin oletuksen nojalla on olemassa $s \in X$, siten että $\mathcal{M}' \vDash_{s[a/u]} \psi'_i$. Soveltamalla sitten aputulosta (AT2) tiimeihin Y ja $\{s[a/u]\}$, saadaan että $\mathcal{M}' \vDash_{Y \cup \{s\}} \psi'$. Nyt voidaan käyttää induktio-oletusta tiimiin $Y \cup \{s\}$, jolloin saadaan että $\mathcal{M} \vDash_{Y \cup \{s\}} \psi$. Koska $(Y \cup \{s\}) \cup Y' = X$, niin $\mathcal{M} \vDash_X \psi \vee \theta$. Päättely on vastaavanlainen, jos kvanttori $(\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)_i$ esiintyy kaavassa θ.

- Olkoon $\mu = \exists^{\mathrm{s}} x\, \psi$.

  Oletetaan ensin, että $\mathcal{M} \vDash_X \exists^{\mathrm{s}} x\, \psi$. Siis on olemassa $F : X \to \mathcal{P}^*(M)$, siten että $\mathcal{M} \vDash_{X[F/x]} \psi$. Induktio-oletuksen nojalla on olemassa joukot $A_1, \dots, A_n \subseteq M$, siten että $\mathcal{M}' \vDash_{X[F/x]} \psi'$ ja kaikilla $i \in \{1, \dots, n\}$ sekä $a \in A_i$ on olemassa $r \in X[F/x]$, siten että $\mathcal{M}' \vDash_{r[a/u]} \psi'_i$, missä $\mathcal{M}' := \mathcal{M}[A_1/P_1, \dots, A_n/P_n]$.

  Koska $\mathcal{M}' \vDash_{X[F/x]} \psi'$, niin $\mathcal{M}' \vDash_X \exists^{\mathrm{s}} x\, \psi'$, eli $\mathcal{M}' \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}} x\, \psi)'$. Valitaan mielivaltainen $i \in \{1, \dots, n\}$ ja $a \in A_i$. Nyt on olemassa $r \in X[F/x]$, siten että $\mathcal{M}' \vDash_{r[a/u]} \psi'_i$. Koska $r \in X[F/x]$, niin on olemassa $s \in X$ ja $m \in F(s)$, siten että $r = s[m/x]$. Määritellään nyt:

  $$F' : \{s[a/u]\} \to \mathcal{P}^*(M), \text{ s.e. } s[a/u] \mapsto \{m\}.$$

  Nyt selvästi $\{s[a/u]\}[F'/x] = \{r[a/u]\}$, joten $\mathcal{M}' \vDash_{s[a/u]} \exists^{\mathrm{s}} x\, \psi'_i$. Näin ollen siis $\mathcal{M}' \vDash_{s[a/u]} (\exists^{\mathrm{s}} x\, \psi)'_i$.

  Oletetaan sitten, että on olemassa $A_1, \dots, A_n \subseteq M$, siten että pätee $\mathcal{M}' \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}} x\, \psi)'$, ja jokaisella $i \in \{1, \dots, n\}$ sekä $a \in A_i$ on olemassa $s \in X$, siten että $\mathcal{M}' \vDash_{s[a/u]} (\exists^{\mathrm{s}} x\, \psi)'_i$.

  Nyt $\mathcal{M}' \vDash_X \exists^{\mathrm{s}} x\, \psi'$, joten on olemassa kuvaus $F : X \to \mathcal{P}^*(M)$, siten että $\mathcal{M} \vDash_{X[F/x]} \psi'$. Lisäksi jokaisella $i \in \{1, \dots, n\}$ ja $a \in A_i$ on olemassa $s \in X$, siten että $\mathcal{M}' \vDash_{s[a/u]} \exists^{\mathrm{s}} x\, \psi'_i$, eli on olemassa kuvaukset

$F_{i,a} : \{s[a/u]\} \to \mathcal{P}^*(M)$, siten että $\mathcal{M}' \vDash_{\{s[a/u]\}[F_{i,a}/x]} \psi_i'$. Määritellään:

$$F' : X \to \mathcal{P}^*(M), \text{ s.e.}$$
$$s \mapsto F(s) \cup \{b \in F_{i,a}(s[a/u]) \mid i \in \{1,\dots,n\}, a \in A_i, s[a/u] \in \mathrm{dom}(F_{i,a})\}$$
$$X' := \bigcup \Big\{\{s[a/u]\}[F_{i,a}/x] \mid i \in \{1,\dots,n\}, a \in A_i, s \in \mathrm{dom}(F_{i,a})\Big\}$$

Kuvauksen F' ja tiimin X' määritelmien nojalla pätee selvästi, että

$$X[F/x] \cup (X' \restriction \mathrm{dom}(X[F/x])) = X[F'/x].$$

Näin ollen aputuloksesta (AT2) seuraa, että $\mathcal{M}' \vDash_{X[F'/x]} \psi'$. Lisäksi nyt jokaisella $i \in \{1,\dots,n\}$ sekä $a \in A_i$ on olemassa $r \in X[F'/x]$, siten että $\mathcal{M}' \vDash_{r[a/u]} \psi_i'$. Näin ollen induktio-oletuksen nojalla $\mathcal{M} \vDash_{X[F'/x]} \psi$, eli $\mathcal{M} \vDash_X \exists^{\mathrm{s}} x\, \psi$.

- Olkoon $\mu = \forall x\, \psi$.

  Oletetaan ensin, että $\mathcal{M} \vDash_X \forall x\, \psi$. Siis $\mathcal{M} \vDash_{X[M/x]} \psi$, jolloin induktio-oletuksen nojalla on olemassa $A_1,\dots,A_n \subseteq M$, siten että $\mathcal{M}' \vDash_{X[M/x]} \psi'$ ja jokaisella $i \in \{1,\dots,n\}$ sekä $a \in A_i$ on olemassa $r \in X[M/x]$, siten että $\mathcal{M}' \vDash_{r[a/u]} \psi_i'$. Tällöin $\mathcal{M}' \vDash_X \forall x\, \psi'$, eli $\mathcal{M}' \vDash_X (\forall x\, \psi)'$.

  Valitaan sitten mielivaltaiset $i \in \{1,\dots,n\}$ ja $a \in A_i$. Nyt on olemassa $r \in X[M/x]$, siten että $\mathcal{M}' \vDash_{r[a/u]} \psi_i'$. Tällöin on olemassa $s \in X$ ja $m \in M$, siten että $r = s[m/x]$. Määritellään

  $$F : \{s[a/u]\} \to \mathcal{P}^*(M), \text{ s.e. } s[a/u] \mapsto \{m\}.$$

  Nyt $\{s[a/u]\}[F'/x] = \{r[a/u]\}$, joten $\mathcal{M}' \vDash_{s[a/u]} \exists^{\mathrm{s}} x\, \psi_i'$. Koska $s \in X$, $\mathcal{M}' \vDash_X \forall x\, \psi'$ ja $\psi' \in \mathrm{FO}_L$, niin lemman 2.3 nojalla $\mathcal{M}' \vDash_s \forall x\, \psi'$. Koska muuttuja u ei esiinny kaavassa ψ', niin niin lemman 3.3 nojalla $\mathcal{M}' \vDash_{s[a/u]} \forall x\, \psi'$. Täten $\mathcal{M}' \vDash_{s[a/u]} \exists^{\mathrm{s}} x\, \psi_i' \wedge \forall x\, \psi'$, eli $\mathcal{M}' \vDash_{s[a/u]} (\forall x\, \psi)_i'$.

  Oletetaan sitten, että on olemassa $A_1,\dots,A_n \subseteq M$, siten että pätee $\mathcal{M}' \vDash_X (\forall x\, \psi)'$, ja jokaisella $i \in \{1,\dots,n\}$ sekä $a \in A_i$ on olemassa $s \in X$, siten että $\mathcal{M}' \vDash_{s[a/u]} (\forall x\, \psi)_i'$. Nyt $\mathcal{M}' \vDash_X \forall x\, \psi'$, eli $\mathcal{M}' \vDash_{X[M/x]} \psi'$.

  Valitaan mielivaltaiset $i \in \{1,\dots,n\}$ ja $a \in A_i$. Nyt on olemassa $s \in X$, siten että $\mathcal{M}' \vDash_{s[a/u]} \exists^{\mathrm{s}} x\, \psi_i' \wedge \forall x\, \psi'$. Siis erityisesti on olemassa kuvaus $F : \{s[a/u]\} \to \mathcal{P}^*(M)$, siten että $\mathcal{M}' \vDash_{\{s[a/u]\}[F/x]} \psi_i'$. Nyt on olemassa alkio $m \in M$, siten että $s[a/u, m/x] \in \{s[a/u]\}[F/x]$. Koska lisäksi $\psi_i' \in \mathrm{FO}_L$, niin lemman 2.3 nojalla $\mathcal{M}' \vDash_{s[a/u,m/x]} \psi_i'$. Lisäksi selvästi $s[m/x] \in X[M/x]$, joten induktio-oletuksen nojalla $\mathcal{M} \vDash_{X[M/x]} \psi$, eli $\mathcal{M} \vDash_X \forall x\, \psi$.

- Olkoon $\mu = (\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)_j \psi$, jollain $j \in \{1, \ldots, n\}$.

  Oletetaan ensin, että pätee $\mathcal{M} \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)_j \psi$. Näin ollen on olemassa kuvaus $F : X \to \mathcal{P}^*(X(t))$, siten että $\mathcal{M} \vDash_{X[F/x]} \psi$. Induktio-oletuksen nojalla on olemassa osajoukot $A_1, \ldots, A_n \subseteq M$, siten että $\mathcal{M}[A_1/P_1, \ldots, A_n/P_n] \vDash_{X[F/x]} \psi'$, ja jokaisella $i \in \{1, \ldots, n\}$ sekä $a \in A_i$ on olemassa $r \in X[F/x]$, siten että $\mathcal{M}[A_1/P_1, \ldots, A_n/P_n] \vDash_{r[a/u]} \psi'_i$. Merkitään:

  $$\mathrm{val}(F) := \{a \in F(s) \mid s \in \mathrm{dom}(F)\}$$

  Määritellään:

  $$A'_i := \begin{cases} \mathrm{val}(F), \text{ jos } i = j \\ A_i, \text{ jos } i \neq j \end{cases} \qquad (i \in \{1, \ldots, n\})$$
  $$\mathcal{M}' := \mathcal{M}[A'_1/P_1, \ldots, A'_n/P_n]$$

  Koska predikaattisymboli P_j ei esiinny kaavassa ψ', niin $\mathcal{M}' \vDash_{X[F/x]} \psi'$. Lisäksi koska $\mathrm{val}(F) = A'_j = P_j^{\mathcal{M}'}$, niin $\mathcal{M}' \vDash_{X[F/x]} P_j x$. Näin ollen $\mathcal{M}' \vDash_X \exists^{\mathrm{s}} x\, (P_j x \wedge \psi')$, eli $\mathcal{M}' \vDash_X ((\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)_j \psi)'$.

  Valitaan ensin mielivaltainen $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j\}$ ja $a \in A_i$. Koska P_j ei esiinny kaavassa ψ'_i, niin on olemassa $r \in X[F/x]$, siten että $\mathcal{M}' \vDash_{r[a/u]} \psi'_i$. Tällöin on olemassa $s \in X$, siten että $r = s[m/x]$, jollain $m \in F(s)$. Lisäksi koska $\mathrm{val}(F) = P_j^{\mathcal{M}'}$, niin $\mathcal{M}' \vDash_{r[a/u]} P_j x$. Määritellään kuvaus:

  $$F' : \{s[a/u]\} \to \mathcal{P}^*(M), \text{ s.e. } s[a/u] \mapsto \{m\}.$$

  Nyt $\{s[a/u]\}[F'/x] = \{r[a/u]\}$ ja $\mathcal{M}' \vDash_{r[a/u]} P_j x \wedge \psi'_i$, joten näin ollen $\mathcal{M}' \vDash_{s[a/u]} \exists^{\mathrm{s}} x\, (P_j x \wedge \psi'_i)$, eli $\mathcal{M} \vDash_{s[a/u]} ((\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)_j \psi)'_i$.

  Olkoon sitten $i = j$ ja $a \in A'_j$. Koska $a \in A'_j = \mathrm{val}(F) \subseteq X(t)$, niin on olemassa $s \in X$, siten että $s(t) = a$. Tällöin

  $$s[a/u](u) = a = s(t) = s[a/u](t).$$

  Näin ollen $\mathcal{M}' \vDash_{s[a/u]} u = t$. Valitaan jokin $m \in F(s)$ ja merkitään $r := s[m/x]$. Määritellään kuvaus:

  $$F_s : \{s[a/u]\} \to \mathcal{P}^*(M), \text{ s.e. } s[a/u] \mapsto \{m\}.$$

  Koska nyt $\mathcal{M}' \vDash_{X[F/x]} \psi'$, $r \in X[F/x]$ ja kvanttori $(\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)_j$ ei esiinny kaavassa ψ, niin aputuloksen (AT1) nojalla $\mathcal{M}' \vDash_{r[a/u]} \psi'_j$. Koska lisäksi $m \in \mathrm{val}(F) = P_j^{\mathcal{M}'}$, niin $\mathcal{M}' \vDash_{r[a/u]} P_j x$. Selvästi pätee, että $\{s[a/u]\}[F'/x] = \{r[a/u]\}$, joten $\mathcal{M}' \vDash_{s[a/u]} \exists^{\mathrm{s}} x\, (P_j x \wedge \psi'_j)$. Edelleen $\mathcal{M}' \vDash_{s[a/u]} u = t \wedge \exists^{\mathrm{s}} x\, (P_j x \wedge \psi'_j)$, eli $\mathcal{M}' \vDash_{s[a/u]} ((\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)_j \psi)'_j$.

Oletetaan sitten, että on olemassa $A_1, \ldots, A_n \subseteq M$, siten että pätee $\mathcal{M}' \vDash_X ((\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)_j \psi)'$, ja jokaisella $i \in \{1, \ldots, n\}$ sekä $a \in A_i$ on olemassa $s \in X$, siten että $\mathcal{M}' \vDash_{s[a/u]} ((\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)_j \psi)'_i$.

Tällöin $\mathcal{M}' \vDash_X \exists^{\mathrm{s}} x\, (P_j x \wedge \psi')$, joten on olemassa $F : X \to \mathcal{P}^*(M)$, siten että $\mathcal{M}' \vDash_{X[F/x]} P_j x \wedge \psi'$. Lisäksi jokaisella $i \in \{1, \ldots, n\}$ ja $a \in A_i$ on olemassa $s \in X$, siten että $\mathcal{M}' \vDash_{s[a/u]} \exists^{\mathrm{s}} x\, (P_j x \wedge \psi'_i)$, eli on olemassa kuvaukset $F_{i,a} : \{s[a/u]\} \to \mathcal{P}^*(M)$, joille $\mathcal{M}' \vDash_{\{s[a/u]\}[F_{i,a}/x]} P_j x \wedge \psi'_i$. Määritellään:

$$\begin{aligned} &F' : X \to \mathcal{P}^*(M), \text{ s.e.} \\ &\qquad s \mapsto F(s) \cup \{b \in F_{i,a}(s[a/u]) \mid i \in \{1, \ldots, n\}, a \in A_i, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad s[a/u] \in \mathrm{dom}(F_{i,a})\} \\ &X' := \bigcup \Big\{ \{s[a/u]\}[F_{i,a}/x] \mid i \in \{1, \ldots, n\}, a \in A_i, s \in \mathrm{dom}(F_{i,a}) \Big\} \end{aligned}$$

Kuvauksen F' ja tiimin X' määritelmien nojalla pätee selvästi, että

$$X[F/x] \cup (X' \upharpoonright \mathrm{dom}(X[F/x])) = X[F'/x].$$

Näin ollen aputuloksesta (AT2) seuraa, että $\mathcal{M}' \vDash_{X[F'/x]} P_j x \wedge \psi'$, jolloin erityisesti $\mathcal{M}' \vDash_{X[F'/x]} \psi'$. Lisäksi nyt jokaisella $i \in \{1, \ldots, n\}$ ja $a \in A_i$ on olemassa $r \in X[F'/x]$, siten että $\mathcal{M}' \vDash_{r[a/u]} P_j x \wedge \psi'_i$, jolloin erityisesti $\mathcal{M}' \vDash_{r[a/u]} \psi'_i$. Täten induktio-oletuksen nojalla $\mathcal{M} \vDash_{X[F'/x]} \psi$. Riittää siis osoittaa, että $\mathrm{im}(F') \subseteq \mathcal{P}(X(t))$.

Valitaan mielivaltainen $B \in \mathrm{im}(F')$ ja $a \in B$. Tällöin $B = F'(s)$ jollain $s \in X$. Koska nyt $s[a/x] \in X[F'/x]$ ja $\mathcal{M}' \vDash_{X[F'/x]} P_j x$, niin $a \in P_j^{\mathcal{M}'} = A_j$. Oletuksen nojalla nyt on olemassa $s' \in X$, jolle pätee $\mathcal{M}' \vDash_{s'[a/u]} ((\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)_j \psi)'_j$. Siis $\mathcal{M}' \vDash_{s'[a/u]} u = t \wedge \exists^{\mathrm{s}} x (P_j x \wedge \psi'_j)$, jolloin erityisesti $\mathcal{M}' \vDash_{s'[a/u]} u = t$, eli $s'[a/u](u) = s'[a/u](t)$. Tällöin

$$a = s'[a/u](u) = s'[a/u](t) = s'(t).$$

Siis $a \in X(t)$, joten $\mathrm{im}(F') \subseteq \mathcal{P}(X(t))$, ja täten $\mathcal{M} \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)_j \psi$.

Olemme nyt valmiita todistamaan alkuperäisen väitteen, eli että

$$\mathcal{M} \vDash \varphi, \text{ joss } \mathcal{M} \vDash \xi,$$

missä

$$\xi := \exists P_1 \ldots \exists P_n \Big(\varphi' \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \forall u\, (\neg P_i u \vee \varphi'_i) \Big).$$

Oletetaan ensin, että $\mathcal{M} \vDash \varphi$. Aputuloksen (AT3) nojalla on olemassa joukot $A_1, \ldots, A_n \subseteq M$, siten että $\mathcal{M}' \vDash \varphi'$ ja kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$ sekä $a \in A_i$ on olemassa $s \in \{\emptyset\}$, siten että $\mathcal{M}' \vDash_{s[a/u]} \varphi'_i$, missä $\mathcal{M}' = \mathcal{M}[A_1/P_1, \ldots, A_n/P_n]$.

Valitaan mielivaltainen $j \in \{1, \dots, n\}$ ja määritellään

$$\begin{cases} Y := \{r \in \{\emptyset\}[M/u] \mid r(u) \notin A_j\} \\ Y' := \{r \in \{\emptyset\}[M/u] \mid r(u) \in A_j\} \end{cases}$$

Nyt selvästi $Y \cup Y' = \{\emptyset\}[M/u]$. Koska $A_j = P_j^{\mathcal{M}'}$, niin tiimin Y määritelmän nojalla $\mathcal{M}' \vDash_Y \neg P_j u$. Valitaan mielivaltainen $r \in Y'$. Nyt $r(u) \in A_j$, joten on olemassa $s \in \{\emptyset\}$ siten, että $\mathcal{M}' \vDash_{s[r(u)/u]} \varphi'_j$. Täytyy olla, että $s = \emptyset$ ja edelleen että $s[r(u)/u] = r$. Näin ollen siis $\mathcal{M}' \vDash_r \varphi'_j$. Koska $\varphi'_j \in \mathrm{FO}_L$ ja $r \in Y'$ oli mielivaltaisesti valittu, niin lauseen 2.3 nojalla $\mathcal{M}' \vDash_{Y'} \varphi'_j$.

Näin ollen $\mathcal{M}' \vDash_{\{\emptyset\}[M/u]} \neg P_j u \vee \varphi'_j$ ja edelleen $\mathcal{M}' \vDash \forall u\, (\neg P_j u \vee \varphi'_j)$. Koska $j \in \{1, \dots, n\}$ oli mielivaltaisesti valittu, niin $\mathcal{M}' \vDash \bigwedge_{i=1}^{n} \forall u\, (\neg P_i u \vee \varphi'_i)$. Näin ollen $\mathcal{M}' \vDash \varphi' \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \forall u\, (\neg P_i u \vee \varphi'_i)$, eli $\mathcal{M} \vDash \xi$.

Oletetaan sitten, että $\mathcal{M} \vDash \xi$. Siis on olemassa sellaiset $A_1, \dots, A_n \subseteq M$, että $\mathcal{M}' \vDash \varphi' \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \forall u\, (\neg P_i u \vee \varphi'_i)$, missä $\mathcal{M}' = \mathcal{M}[A_1/P_1, \dots, A_n/P_n]$. Tällöin erityisesti $\mathcal{M}' \vDash \varphi'$.

Valitaan mielivaltainen $j \in \{1, \dots, n\}$ ja $a \in A_j$. Koska nyt on voimassa, että $\mathcal{M}' \vDash \forall u\, (\neg P_j u \vee \varphi'_j)$, niin $\mathcal{M}' \vDash_{\{\emptyset\}[M/u]} \neg P_j u \vee \varphi'_j$. Siis on olemassa $Y, Y' \subseteq \{\emptyset\}[M/u]$, siten että $Y \cup Y' = \{\emptyset\}[M/u]$, $\mathcal{M}' \vDash_Y \neg P_j u$ ja $\mathcal{M}' \vDash_{Y'} \varphi'_j$.

Määritellään tulkintafunktio $r := \{(u, a)\}$. Nyt $r \in \{\emptyset\}[M/u]$ ja koska $r(u) = a \in A_j = P_j^{\mathcal{M}'}$, niin ei voi olla että $r \in Y$. Täytyy siis olla, että $r \in Y'$. Koska $\mathcal{M}' \vDash_{Y'} \varphi'_j$ ja $\varphi'_j \in \mathrm{FO}_L$, niin lemman 2.3 nojalla $\mathcal{M}' \vDash_r \varphi'_j$. Koska lisäksi $r = \emptyset[a/u]$, niin aputuloksen (AT3) nojalla pätee, että $\mathcal{M} \vDash \varphi$. □

Korollaari 4.26. INF-*logiikka sisältyy* EMSO-*logiikkaan lauseiden tasolla.*

Todistus. Väite seuraa suoraan lauseesta 4.25. □

4.5 IEF-logiikan ilmaisuvoima

Tässä kappaleessa tutkimme IEF-logiikan ilmaisuvoimaa. Tiedämme siitä jo paljon INF- ja EXF-logiikoille todistamiemme tulosten perusteella. Saamme heti seuraavan korollaarin:

Korollaari 4.27. IEF-*logiikka on ilmaisuvoimaltaan täsmälleen yhtä vahva kuin* INEX[1]-*logiikka.*

Todistus. Väite seuraa suoraan korollaareista 4.14 ja 4.10. □

Olemme aiemmin todenneet, että IEF-logiikka ei ole alaspäin suljettu eikä suljettu yhdisteiden suhteen. Näin ollen se ei voi sisältyä kaavojen tasolla DEP- eikä NDEP-logiikkaan. Kuitenkin se sisältyy INEX-logiikkaan ja näin ollen edelleen INDEP-logiikkaan.

Seuraavissa pykälissä tutkimme IEF-logiikan ja EMSO-logiikan välistä suhdetta lauseiden tasolla. Pyrimme osoittamaan, että ne ovat itse asiassa ilmaisuvoimaltaan täsmälleen yhtä vahvat.

4.5.1 IEF_L-lauseen ilmaiseminen EMSO_L-lauseella

Osoitimme lauseissa 4.26 ja 4.22, että INF- ja EXF- logiikka sisältyvät molemmat EMSO-logiikkaan lauseiden tasolla. Sama voidaan todistaa myös IEF-logiikalle käytten apuna vastaavia todistuksia INF- ja EXF-logiikoille:

Lause 4.28. *Olkoon* φ IEF_L*-lause. Tällöin on olemassa* EMSO_L*-lause* ξ*, jolle pätee:*

$$\mathcal{M} \vDash \varphi, \ \textit{joss}\ \mathcal{M} \vDash \xi.$$

Todistus. Määritellään väitteen todistamista varten logiikka $\mathrm{EMSO}_L(\mathrm{INF})$:

- Jos $\varphi \in \mathrm{INF}_L$, niin $\varphi \in \mathrm{EMSO}_L(\mathrm{INF})$.
- Jos $\varphi \in \mathrm{EMSO}_L(\mathrm{INF})$ ja R_i on yksipaikkainen predikaattisymboli, niin $\exists\, R_i\, \varphi \in \mathrm{EMSO}_L(\mathrm{INF})$.

Osoitetaan, että nyt on olemassa $\mathrm{EMSO}_L(\mathrm{INF})$-lause χ, siten että

$$\mathcal{M} \vDash \varphi, \ \text{joss}\ \mathcal{M} \vDash \chi$$

Lause χ voidaan määritellä täsmalleen samalla tavalla kuin lauseen 4.21 todistuksessa määriteltiin lause ξ, lisäämällä kaavan ψ' määrittelyyn kohta:

- $((\exists^{\mathrm{s}}\, x \subseteq t)\, \psi)' = (\exists^{\mathrm{s}}\, x \subseteq t)\, \psi'$

Todistus on muuten täysin samanlainen kuin lauseelle 4.21, paitsi että induktiota pitää täydentää tapauksella $\mu = (\exists^{\mathrm{s}}\, x \subseteq t)\, \psi$. Tämä on kuitenkin ψ':n määritelmästä johtuen suoraviivainen todistaa:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M} \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}}\, x \subseteq t)\, \psi \\
&\Leftrightarrow \ \text{On olemassa } F : X \to \mathcal{P}^*(X(t)),\ \text{s.e } \mathcal{M} \vDash_{X[F/x]} \psi \\
&\overset{\text{IO}}{\Leftrightarrow} \ \text{On olemassa } F : X \to \mathcal{P}^*(X(t)) \\
&\qquad\quad \text{ja } A_1, \ldots, A_n \subseteq M \text{ s.e. } \mathcal{M}' \vDash_{X[F/x]} \psi' \\
&\Leftrightarrow \ \text{On olemassa } A_1, \ldots, A_n \subseteq M \text{ s.e. } \mathcal{M}' \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}}\, x \subseteq t)\, \psi' \\
&\Leftrightarrow \ \text{On olemassa } A_1, \ldots, A_n \subseteq M \text{ s.e. } \mathcal{M}' \vDash_X ((\exists^{\mathrm{s}}\, x \subseteq t)\, \psi)', \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{missä } \mathcal{M}' := \mathcal{M}[A_1/P_1, \ldots, A_n/P_n].
\end{aligned}$$

Koska $\chi \in \mathrm{EMSO}_L(\mathrm{INF})$, niin on olemassa INF_L-lause γ ja predikaattisymbolit $P_1, \ldots, P_n$, siten että $\chi = \exists\, P_1 \ldots \exists\, P_n \gamma$. Sovelletaan nyt lausetta 4.25 INF_L-lauseeseen γ, jolloin saamme EMSO_L-lauseen δ, jolle pätee, että

$$\mathcal{M} \vDash \gamma, \ \text{joss}\ \mathcal{M} \vDash \delta.$$

Määritellään nyt $\xi := \exists P_1 \dots \exists P_n \, \delta$. Tällöin selvästi ξ on EMSO_L-lause, ja lisäksi on voimassa:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} \vDash \varphi &\Leftrightarrow \mathcal{M} \vDash \chi, \\
&\Leftrightarrow \mathcal{M} \vDash \exists P_1 \dots \exists P_n \gamma, \\
&\Leftrightarrow \text{ on olemassa } A_1, \dots A_n \subseteq M, \text{ s.e. } \mathcal{M}[A_1/P_1, \dots, A_n/P_n] \vDash \gamma, \\
&\Leftrightarrow \text{ on olemassa } A_1, \dots A_n \subseteq M, \text{ s.e. } \mathcal{M}[A_1/P_1, \dots, A_n/P_n] \vDash \delta, \\
&\Leftrightarrow \mathcal{M} \vDash \exists P_1 \dots \exists P_n \delta, \\
&\Leftrightarrow \mathcal{M} \vDash \xi.
\end{aligned}$$

□

Korollaari 4.29. IEF*-logiikka sisältyy* EMSO*-logiikkaan lauseiden tasolla.*

Todistus. Väite seuraa suoraan lauseesta 4.28. □

4.5.2 EMSO_L-lauseen ilmaiseminen IEF_L-lauseella

Edellisen pykälän tuloksesta seuraa luontevasti kysymys siitä, sisältyykö IEF-logiikka aidosti EMSO-logiikkaan, eli onko olemassa EMSO_L-lauseita, joita ei voi ilmaista IEF-logiikalla. Vastaus tähän on kielteinen, sillä voidaan todistaa, että myös käänteinen väite pätee.

Tämän käännöksen idea on hyvin yksinkertainen: korvataan EMSO_L-lauseen edessä olevat $\exists P_i$-kvanttorit kvanttoreilla $\exists^{\mathrm{s}} w_i$ missä w_i:t ovat tuoreita muuttujia. Korvataan lisäksi kvantifioituja predikaattisymboleita vastaavat literaalit $P_i t$ inkluusioatomeilla $t \subseteq w_i$ ja literaalit $\neg P_i t$ ekskluusioatomeilla $t \mid w_i$.

Meidän pitää kuitenkin ottaa huomioon pari seikkaa. Ensinnäkin pitää taata, että kaikki muuttujille w_i kvantifioidut arvot säilyvät tiimissä jokaisen alikaavan tapauksessa. Arvoja voi kadota disjunktion kohdalla, kun tiimi jaetaan kahtia. Tämä voidaan välttää korvaamalla disjunktiot määritelmän 3.18 mukaisilla termijoukon arvot säilyttävillä disjunktioilla $\vee_{w_1 \dots w_n}$.

Toiseksi pitää huomioida, että kvantifioitujen predikaattisymbolien P_i tulkinnaksi voidaan antaa tyhjä joukko, kun taas muuttujaan w_i pitää aina liittää epätyhjä joukko. Tämä ongelma voidaan onneksi välttää, sillä jokainen EMSO_L-lause voidaan esittää sen kanssa ekvivalentissa muodossa, jossa predikaattisymbolien tulkinnoiksi täytyy liittää epätyhjiä joukkoja. Todistamme tämän seuraavassa lemmassa:

Lemma 4.30. *Olkoon* $\varphi := \exists P_1 \dots \exists P_n \delta$ EMSO_L*-lause, missä* $\delta \in \mathrm{FO}_L$*. Tällöin on olemassa* $\chi \in \mathrm{FO}_L$*, siten että*

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M} \vDash \varphi, \textit{ joss on olemassa epätyhjät joukot} \\
&\qquad A_1, \dots, A_n \subseteq M \textit{ s.e. } \mathcal{M}[A_1/P_1, \dots, A_n/P_n] \vDash \chi.
\end{aligned}$$

Todistus. Todistetaan väite induktiolla kaavan φ toisen kertaluvun kvanttorien lukumäärän n suhteen. Mikäli $n = 0$, niin $\varphi = \delta$, jolloin voidaan triviaalisti valita $\chi = \varphi$. Tehdään sitten induktio-oletus että väite pätee kaavalle $\exists P_1 \ldots \exists P_{n-1}\delta$. Näin ollen on olemassa kaava $\xi \in \mathrm{FO}_L$, siten että

$$\mathcal{M} \vDash \exists P_1 \ldots \exists P_{n-1}\delta, \text{ joss on olemassa epätyhjät joukot } A_1, \ldots, A_{n-1} \subseteq M \text{ s.e } \mathcal{M}[A_1/P_1, \ldots, A_{n-1}/P_{n-1}] \vDash \xi.$$

Olkoon $\psi \in \mathrm{Sf}(\delta)$. Määritellään kaava ψ' rekursiivisesti seuraavasti:

$$\begin{aligned}
\psi' &= \psi, \text{ jos } \psi \text{ on literaali ja } P_n \text{ ei esiinny kaavassa } \psi \\
(P_n t)' &= (t \neq t) \\
(\neg P_n t)' &= (t = t) \\
(\psi \wedge \theta)' &= \psi' \wedge \theta' \\
(\psi \vee \theta)' &= \psi' \vee \theta' \\
(\exists^{\mathrm{s}} x\, \psi)' &= \exists^{\mathrm{s}} x\, \psi' \\
(\forall x\, \psi)' &= \forall x\, \psi'
\end{aligned}$$

Määritellään tämän perusteella kaava χ seuraavasti:

$$\chi := \xi \vee \xi'.$$

Todistetaan ensin seuraava aputulos:

Aputulos. Oletetaan että $\mu \in \mathrm{Sf}(\chi)$ ja X on tiimi. Tällöin pätee:

(AT1) $$\mathcal{M} \vDash_X \mu', \text{ joss } \mathcal{M}[\emptyset/P_n] \vDash_X \mu.$$

Todistetaan tämä induktiolla kaavan μ rakenteen suhteen:

- Mikäli μ on literaali, siten että P_n ei esiinny kaavassa μ, niin $\mu' = \mu$. Lisäksi koska P_n ei esiinny kaavassa μ, niin $\mathcal{M} \vDash_X \mu$, jos ja vain jos $\mathcal{M}[\emptyset/P_n] \vDash_X \mu$. Täten $\mathcal{M} \vDash_X \mu'$, jos ja vain jos $\mathcal{M}[\emptyset/P_n] \vDash_X \mu$.

- Olkoon $\mu = P_n t$. Nyt $\mathcal{M} \vDash_X t \neq t$ ja $\mathcal{M}[\emptyset/P^n] \vDash_X P_n t$ eivät kumpikaan päde missään mallissa $\mathcal{M}$ millään tiimillä $X \neq \emptyset$. Mikäli taas $X = \emptyset$, niin ekvivalenssin molemmat puolet ovat triviaalisti tosia. Näin ollen $\mathcal{M} \vDash_X (P_n t)'$, jos ja vain jos $\mathcal{M}[\emptyset/P_n] \vDash_X P_n t$.

- Olkoon $\mu = \neg P_n t$. Nyt $\mathcal{M} \vDash_X t = t$ ja $\mathcal{M}[\emptyset/P^n] \vDash_X \neg P_n t$ pätevät molemmat kaikissa malleissa $\mathcal{M}$ kaikilla tiimeillä X. Täten $\mathcal{M} \vDash_X (\neg P_n t)'$, jos ja vain jos $\mathcal{M}[\emptyset/P_n] \vDash_X \neg P_n t$.

- Tapaukset $\mu = \psi \wedge \theta$, $\mu = \psi \vee \theta$, $\mu = \exists^{\mathrm{s}} x\, \psi$ ja $\mu = \forall x\, \psi$ ovat kaikki suoraviivaisia todistaa.

Osoitetaan sitten, että

$$\mathcal{M} \vDash \exists P_1 \dots \exists P_n\delta, \text{ joss on olemassa epätyhjät joukot } A_1, \dots, A_n \subseteq M \text{ s.e } \mathcal{M}[A_1/P_1, \dots, A_n/P_n] \vDash \chi.$$

Oletetaan ensin, että $\mathcal{M} \vDash \exists P_1 \dots \exists P_n\delta$. Siis on olemassa $B_1, \dots, B_n \subseteq M$, siten että $\mathcal{M}[B_1/P_1, \dots, B_n/P_n] \vDash \delta$. Koska nyt $\mathcal{M}[B_n/P_n] \vDash \exists P_1 \dots \exists P_{n-1}\delta$, niin induktio-oletuksen nojalla on olemassa epätyhjät $A_1, \dots, A_{n-1} \subseteq M$, siten että $\mathcal{M}[A_1/P_1, \dots, A_{n-1}/P_{n-1}, B_n/P_n] \vDash \xi$.

Mikäli pätee $B_n \neq \emptyset$, niin voidaan valita $A_n := B_n$, jolloin on voimassa $\mathcal{M}[A_1/P_1, \dots, A_n/P_n] \vDash \xi$ ja edelleen $\mathcal{M}[A_1/P_1, \dots, A_n/P_n] \vDash \chi$. Mikäli taas $B_n = \emptyset$, niin valitaan $A_n := M$ ja merkitään $\mathcal{M}' := \mathcal{M}[A_1/P_1, \dots, A_n/P_n]$. Koska nyt $\mathcal{M}'[\emptyset/P_n] \vDash \xi$, niin aputuloksen (AT1) nojalla pätee, että $\mathcal{M}' \vDash \xi'$. Näin ollen $\mathcal{M}[A_1/P_1, \dots, A_n/P_n] \vDash \chi$.

Oletetaan sitten, että on olemassa epätyhjät $A_1, \dots, A_n \subseteq M$, siten että $\mathcal{M}' \vDash \chi$, missä $\mathcal{M}' := \mathcal{M}[A_1/P_1, \dots, A_n/P_n]$. Näin ollen $\mathcal{M}' \vDash \xi$ tai $\mathcal{M}' \vDash \xi'$.

Jos $\mathcal{M}' \vDash \xi$, niin induktio-oletuksen nojalla $\mathcal{M}[A_n/P_n] \vDash \exists P_1 \dots \exists P_{n-1}\delta$. Näin ollen siis $\mathcal{M} \vDash \exists P_1 \dots \exists P_n\delta$. Jos taas $\mathcal{M}' \vDash \xi'$, niin aputuloksen (AT1) nojalla pätee, että $\mathcal{M}'[\emptyset/P_n] \vDash \xi$. Tällöin induktio-oletuksen nojalla pätee, että $\mathcal{M}[\emptyset/P_n] \vDash \exists P_1 \dots \exists P_{n-1}\delta$. Näin ollen siis $\mathcal{M} \vDash \exists P_1 \dots \exists P_n\delta$. □

Nyt olemme valmiita osoittamaan, että jokaista EMSO_L-lausetta vastaa sen kanssa loogisesti ekvivalentti IEF_L-lause:

Lause 4.31. *Olkoon* φ EMSO_L*-lause. Tällöin on olemassa* IEF_L*-lause* ξ*, jolle pätee:*

$$\mathcal{M} \vDash \varphi, \text{ joss } \mathcal{M} \vDash \xi.$$

Todistus. EMSO_L-lauseen φ edessä esiintyy äärellinen määrä toisen kertaluvun kvanttoreita. Yleisyyttä rajoittamatta voidaan olettaa, että kaikki kvantifioidut predikaattisymbolit ovat eri predikaattisymboleita[3]. Merkitään niitä $P_1, \dots, P_n$, jolloin $\varphi = \exists P_1 \dots \exists P_n\delta$, missä $\delta \in \mathrm{FO}_L$.

Olkoon $\chi \in \mathrm{FO}_L$ lemman 4.30 määräämä kaava. Tällöin on siis voimassa:

$$\mathcal{M} \vDash \varphi, \text{ joss on olemassa epätyhjät joukot } A_1, \dots, A_n \subseteq M \text{ s.e } \mathcal{M}[A_1/P_1, \dots, A_n/P_n] \vDash \chi.$$

Olkoot $w_1, \dots, w_n$ eri muuttujia, jotka eivät esiinny kaavassa χ, ja olkoon $\psi \in \mathrm{Sf}(\chi)$.

[3]Mikäli jokin predikaattisymboli tulisi kvantifioitua useampaa kertaan, niin ainoastaan viimeisimmällä kvantifioinnilla olisi merkitystä. Näin ollen tälläinen EMSO_L-lause olisi loogisesti ekvivalentti sellaisen lauseen kanssa, josta on poistettu kaikki tällaiset moninkertaiset kvantifioinnit.

Määritellään kaava ψ' rekursiivisesti seuraavasti:

$$\begin{aligned}
\psi' &= \psi, \text{ jos } \psi \text{ on literaali ja } P_i \text{ ei esiinny} \\
&\qquad\quad \text{kaavassa } \psi \text{ millään } i \in \{1, \dots, n\} \\
(P_i t)' &= t \subseteq w_i \\
(\neg P_i t)' &= t \mid w_i \\
(\psi \wedge \theta)' &= \psi' \wedge \theta' \\
(\psi \vee \theta)' &= \psi' \vee_{w_1 \dots w_n} \theta' \\
(\exists^{\mathrm{s}} x\, \psi)' &= \exists^{\mathrm{s}} x\, \psi' \\
(\forall x\, \psi)' &= \forall x\, \psi'
\end{aligned}$$

Määritellään nyt kaava ξ seuraavasti:

$$\xi := \exists^{\mathrm{s}} w_1 \dots \exists^{\mathrm{s}} w_n \chi'.$$

Kaavan ψ' määritelmän perusteella ξ on selvästi IEF_L-lause. Ennen varsinaisen väitteen todistusta todistamme ensin seuraavat aputulokset:

Aputulos. Oletetaan, että $\mu \in \mathrm{Sf}(\chi)$, X on tiimi siten että $\mathrm{dom}(X) = \mathrm{Fr}(\mu)$ ja $A_1, \dots, A_n \subseteq M$ ovat epätyhjiä. Määritellään seuraavat kuvaukset:

$$\begin{aligned}
&F_1 : X \to \mathcal{P}^*(M), \quad s \mapsto A_1 \\
&F_2 : X[F_1/w_1] \to \mathcal{P}^*(M), \quad s \mapsto A_2 \\
&\vdots \\
&F_n : X[F_1/w_1, \dots, F_{n-1}/w_{n-1}] \to \mathcal{P}^*(M), \quad s \mapsto A_n
\end{aligned}$$

Merkitään:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}' &:= \mathcal{M}[A_1/P_1, \dots, A_n/P_n] \\
X' &:= X[F_1/w_1, \dots, F_n/w_n]
\end{aligned}$$

Nyt pätee:

(AT1) $\qquad$ Jos $\mathcal{M}' \vDash_X \mu$, niin $\mathcal{M} \vDash_{X'} \mu'$.

Todistetaan väite induktiolla kaavan μ rakenteen suhteen:

- Mikäli μ on literaali, siten että predikaattisymboli P_i ei esiinny kaavassa μ millään $i \in \{1, \dots, n\}$, niin väite pätee triviaalisti, sillä nyt $\mu' = \mu$ ja $w_i \notin \mathrm{Vr}(\mu')$ millään $i \in \{1, \dots, n\}$.
- Olkoon $\mu = P_j t$ jollain $j \in \{1, \dots, n\}$ ja $t \in \mathrm{T}_L$.

  Oletetaan, että $\mathcal{M}' \vDash_X P_j t$. Siis $s(t) \in P_j^{\mathcal{M}'} = A_j$ kaikilla $s \in X$. Valitaan mielivaltainen $r \in X'$. Nyt on olemassa $q \in X$, siten että

$q = r \upharpoonright \mathrm{dom}(X)$. Tällöin erityisesti pätee, että $r(t) = q(t)$. Koska $q(t) \in A_j$ ja kuvauksen F_j määritelmän nojalla $X'(w_j) = A_j$, niin on olemassa $r' \in X'$, siten että $r'(w_j) = q(t)$. Tällöin

$$r(t) = q(t) = r'(w_j).$$

Näin ollen $\mathcal{M} \vDash_{X'} t \subseteq w_j$, eli $\mathcal{M} \vDash_{X'} (P_j t)'$.

- Olkoon $\mu = \neg P_j t$ jollain $j \in \{1, \ldots, n\}$ ja $t \in \mathrm{T}_L$.

  Oletetaan, että $\mathcal{M}' \vDash_X \neg P_j t$. Siis $s(t) \notin P_j^{\mathcal{M}'} = A_j$, kaikilla $s \in X$. Valitaan mielivaltaiset $r, r' \in X'$. Nyt on olemassa $q \in X$, siten että $q = r \upharpoonright \mathrm{dom}(X)$. Tällöin erityisesti pätee, että $r(t) = q(t)$. Koska $q(t) \notin A_j$ ja kuvauksen F_j määritelmän nojalla $X'(w_j) = A_j$, niin erityisesti $q(t) \neq r'(w_j)$. Tällöin

$$r(t) = q(t) \neq r'(w_j).$$

  Näin ollen $\mathcal{M} \vDash_{X'} t \mid w_j$, eli $\mathcal{M} \vDash_{X'} (\neg P_j t)'$.

- Olkoon $\mu = \psi \wedge \theta$.

  Oletetaan, että $\mathcal{M}' \vDash_X \psi \wedge \theta$. Näin ollen $\mathcal{M}' \vDash_X \psi$ ja $\mathcal{M}' \vDash_X \theta$. Tällöin induktio-oletuksen nojalla pätee, että $\mathcal{M} \vDash_{X'} \psi'$ ja $\mathcal{M} \vDash_{X'} \theta'$. Näin ollen $\mathcal{M} \vDash_{X'} \psi' \wedge \theta'$, eli $\mathcal{M} \vDash_{X'} (\psi \wedge \theta)'$.

- Olkoon $\mu = \psi \vee \theta$.

  Oletetaan, että $\mathcal{M}' \vDash_X \psi \vee \theta$. Siis on olemassa tiimit $Y_1, Y_2 \subseteq X$, siten että $Y_1 \cup Y_2 = X$, $\mathcal{M}' \vDash_{Y_1} \psi$ ja $\mathcal{M}' \vDash_{Y_2} \theta$. Määritellään nyt jokaisella $i \in \{1, \ldots, n\}$ kuvaukset:

$$\begin{cases} G_i : Y_1[G_1/w_1, \ldots, G_{i-1}/w_{i-1}] \to \mathcal{P}^*(M), \quad s \mapsto A_i \\ H_i : Y_2[H_1/w_1, \ldots, H_{i-1}/w_{i-1}] \to \mathcal{P}^*(M), \quad s \mapsto A_i \end{cases}$$

  Määritellään lisäksi:

$$\begin{cases} Y_1' := Y_1[G_1/w_1, \ldots, G_n/w_n] \\ Y_2' := Y_2[H_1/w_1, \ldots, H_n/w_n] \end{cases}$$

  Tällöin induktio-oletuksen nojalla pätee, että $\mathcal{M} \vDash_{Y_1'} \psi'$ ja $\mathcal{M} \vDash_{Y_2'} \theta'$.

  Nyt mikäli $Y_1', Y_2' \neq \emptyset$, niin jokaisella $i \in \{1, \ldots, n\}$ on voimassa $Y_1'(w_i) = Y_2'(w_i) = A_i = X'(w_i)$. Lisäksi kuvausten F_i, G_i ja H_i ($i \in \{1, \ldots, n\}$) määritelmien nojalla pätee selvästi, että $X' = Y_1' \cup Y_2'$. Näin ollen $\mathcal{M} \vDash_{X'} \psi' \vee_{w_1 \ldots w_n} \theta'$ (ks. lause 3.19), eli $\mathcal{M} \vDash_{X'} (\psi \vee \theta)'$.

- Olkoon $\mu = \exists^{\mathrm{s}} x\, \psi$.

  Oletetaan, että $\mathcal{M} \vDash_X \exists^{\mathrm{s}} x\, \psi$. Siis on olemassa $G : X \to \mathcal{P}^*(M)$, siten että $\mathcal{M} \vDash_{X[G/x]} \psi$. Määritellään kuvaus:

$$\begin{aligned} G' : X' \to \mathcal{P}^*(M), \quad &\text{s.e. } s' \mapsto G(s), \\ &\text{missä } s \in X \text{ s.e. } s \upharpoonright \mathrm{Fr}(\mu) = s' \upharpoonright \mathrm{Fr}(\mu). \end{aligned}$$

  Huomaa, että koska oletuksen nojalla $\mathrm{dom}(X) = \mathrm{Fr}(\mu)$, niin s on edellisessä kuvauksessa yksikäsitteinen kullekin s'. Määritellään sitten jokaisella $i \in \{1, \dots, n\}$ kuvaus:

$$F'_i : X[G/x][F'_1/w_1, \dots, F'_{i-1}/w_{i-1}] \to \mathcal{P}^*(M), \quad \text{s.e. } s \mapsto A_i.$$

  Merkitään $X^* := X[G/x][F'_1/w_1, \dots, F'_n/w_n]$. Induktio-oletuksen nojalla $\mathcal{M} \vDash_{X^*} \psi'$. Kuvausten G' ja F'_i $(i \in \{1, \dots, n\})$ määritelmien nojalla selvästi $X^* = X'[G'/x]$, joten $\mathcal{M} \vDash_{X'[G'/x]} \psi'$. Näin ollen $\mathcal{M} \vDash_{X'} \exists^{\mathrm{s}} x\, \psi'$, eli $\mathcal{M} \vDash_{X'} (\exists^{\mathrm{s}} x\, \psi)'$.

- Olkoon $\mu = \forall x\, \psi$.

  Oletetaan, että $\mathcal{M} \vDash_X \forall x\, \psi$, eli $\mathcal{M} \vDash_{X[M/x]} \psi$. Määritellään jokaisella $i \in \{1, \dots, n\}$ kuvaus:

$$F'_i : X[M/x][F'_1/w_1, \dots, F'_{i-1}/w_{i-1}] \to \mathcal{P}^*(M), \quad \text{s.e. } s \mapsto A_i.$$

  Merkitään $X^* := X[M/x][F'_1/w_1, \dots, F'_n/w_n]$. Induktio-oletuksen nojalla $\mathcal{M} \vDash_{X^*} \psi'$. Kuvausten F'_i $(i \in \{1, \dots, n\})$ määritelmien nojalla selvästi $X^* = X'[M/x]$, joten $\mathcal{M} \vDash_{X'[M/x]} \psi'$. Näin ollen $\mathcal{M} \vDash_{X'} \forall x\, \psi'$, eli $\mathcal{M} \vDash_{X'} (\forall x\, \psi)'$.

Aputulos. Oletetaan, että $\mu \in \mathrm{Sf}(\chi)$ ja X on tiimi jolle on voimassa, että $\mathrm{dom}(X) = \mathrm{Fr}(\mu) \cup \{w_1, \dots, w_n\}$. Merkitään

$$\begin{aligned} A_i &:= X(w_i), \text{ jokaisella } i \in \{1, \dots, n\} \\ \mathcal{M}' &:= \mathcal{M}[A_1/P_1, \dots, A_n/P_n] \end{aligned}$$

Tällöin on voimassa:

(AT2) $$\text{Jos } \mathcal{M} \vDash_X \mu', \text{ niin } \mathcal{M}' \vDash_X \mu.$$

Todistetaan väite induktiolla kaavan μ rakenteen suhteen:

- Mikäli μ on literaali, siten että predikaattisymboli P_i ei esiinny kaavassa μ millään $i \in \{1, \dots, n\}$, niin väite pätee triviaalisti, sillä $\mu' = \mu$.

- Olkoon $\mu = P_j t$ jollain $j \in \{1, \dots, n\}$ ja $t \in \mathrm{T}_L$.

  Oletetaan, että $\mathcal{M} \vDash_X (P_j t)'$, eli $\mathcal{M} \vDash_X t \subseteq w_j$. Valitaan mielivaltainen $s \in X$. Koska $\mathcal{M} \vDash_X t \subseteq w_j$, niin on olemassa $s' \in X$, siten että $s'(w_j) = s(t)$. Siis on voimassa, että

  $$s(t) \in X(w_j) = A_j = P_j^{\mathcal{M}'}.$$

  Näin ollen $\mathcal{M}' \vDash_X P_j t$.

- Olkoon $\mu = \neg P_j t$ jollain $j \in \{1, \dots, n\}$ ja $t \in \mathrm{T}_L$.

  Oletetaan, että $\mathcal{M} \vDash_X (\neg P_j t)'$, eli $\mathcal{M} \vDash_X t \mid w_j$. Valitaan mielivaltainen $s \in X$. Koska $\mathcal{M} \vDash_X t \mid w_j$, niin jokaisella $s' \in X$, pätee $s'(w_j) \neq s(t)$. Siis on voimassa, että

  $$s(t) \notin X(w_j) = A_j = P_j^{\mathcal{M}'}.$$

  Näin ollen $\mathcal{M}' \vDash_X \neg P_j t$.

- Olkoon $\mu = \psi \wedge \theta$.

  Oletetaan, että $\mathcal{M} \vDash_X (\psi \wedge \theta)'$, eli $\mathcal{M} \vDash_X \psi' \wedge \theta'$. Näin ollen $\mathcal{M} \vDash_X \psi'$ ja $\mathcal{M} \vDash_X \theta'$. Induktio-oletuksen nojalla $\mathcal{M}' \vDash_X \psi$ ja $\mathcal{M}' \vDash_X \theta$, jolloin $\mathcal{M}' \vDash_X \psi \wedge \theta$.

- Olkoon $\mu = \psi \vee \theta$.

  Oletetaan, että $\mathcal{M} \vDash_X (\psi \vee \theta)'$, eli $\mathcal{M} \vDash_X \psi' \vee_{w_1 \dots w_n} \theta'$. Siis on olemassa $Y_1, Y_2 \subseteq X$, siten että $Y_1 \cup Y_2 = X$, $\mathcal{M} \vDash_{Y_1} \psi'$ sekä $\mathcal{M} \vDash_{Y_2} \theta'$, ja jos $Y_1, Y_2 \neq \emptyset$, niin $Y_1(w_i) = Y_2(w_i) = X(w_i)$ jokaisella $i \in \{1, \dots, n\}$.

  Mikäli $Y_1 = \emptyset$, niin $Y_2 = X$, jolloin $\mathcal{M} \vDash_X \theta'$. Tällöin induktio-oletuksen nojalla $\mathcal{M}' \vDash_X \theta$ ja edelleen $\mathcal{M}' \vDash_X \psi \vee \theta$. Vastaavasti jos pätee, että $Y_1 = \emptyset$, niin $\mathcal{M} \vDash_X \psi'$, jolloin induktio-oletuksen nojalla $\mathcal{M} \vDash_X \psi$ ja edelleen $\mathcal{M}' \vDash_X \psi \vee \theta$.

  Oletetaan sitten, että $Y_1, Y_2 \neq \emptyset$. Tällöin induktio-oletuksen nojalla

  $$\begin{cases} \mathcal{M}[Y_1(w_1)/P_1, \dots, Y_1(w_n)/P_n] \vDash_{Y_1} \psi \\ \mathcal{M}[Y_2(w_1)/P_1, \dots, Y_2(w_n)/P_n] \vDash_{Y_2} \theta \end{cases}$$

  Koska nyt $Y_1(w_i) = Y_2(w_i) = X(w_i) = A_i$ jokaisella $i \in \{1, \dots, n\}$, niin $\mathcal{M}' \vDash_{Y_1} \psi$ ja $\mathcal{M}' \vDash_{Y_2} \theta$. Näin ollen $\mathcal{M}' \vDash_X \psi \vee \theta$.

- Olkoon $\mu = \exists^{\mathrm{s}} x\, \psi$.

  Oletetaan, että $\mathcal{M} \vDash_X (\exists^{\mathrm{s}} x\, \psi)'$, eli $\mathcal{M} \vDash_X \exists^{\mathrm{s}} x\, \psi'$. Siis on olemassa kuvaus $F : X \to \mathcal{P}^*(M)$, siten että $\mathcal{M} \vDash_{X[F/x]} \psi'$. Induktio-oletuksen nojalla $\mathcal{M}' \vDash_{X[F/x]} \psi$, joten $\mathcal{M}' \vDash_X \exists^{\mathrm{s}} x\, \psi$.

- Olkoon $\mu = \forall x\, \psi$.

  Oletetaan, että $\mathcal{M} \vDash_X (\forall x\, \psi)'$, eli $\mathcal{M} \vDash_X \forall x\, \psi'$. Näin ollen $\mathcal{M} \vDash_{X[M/x]} \psi'$, jolloin induktio-oletuksen nojalla $\mathcal{M}' \vDash_{X[M/x]} \psi$. Täten $\mathcal{M}' \vDash_X \forall x\, \psi$.

Olemme nyt valmiita todistamaan alkuperäisen väitteen, eli että

$$\mathcal{M} \vDash \varphi, \text{ joss } \mathcal{M} \vDash \xi.$$

Oletetaan ensin, että $\mathcal{M} \vDash \varphi$, eli on olemassa epätyhjät $A_1, \dots, A_n \subseteq M$, siten että $\mathcal{M}' \vDash \chi$, missä $\mathcal{M}' = \mathcal{M}[A_1/P_1, \dots, A_n/P_n]$. Määritellään kuvaukset:

$$\begin{aligned}
&F_1 : \{\emptyset\} \to \mathcal{P}^*(M), \quad s \mapsto A_1 \\
&F_2 : \{\emptyset\}[F_1/w_1] \to \mathcal{P}^*(M), \quad s \mapsto A_2 \\
&\quad \vdots \\
&F_n : \{\emptyset\}[F_1/w_1, \dots, F_{n-1}/w_{n-1}] \to \mathcal{P}^*(M), \quad s \mapsto A_n
\end{aligned}$$

Merkitään $X' := \{\emptyset\}[F_1/w_1, \dots, F_n/w_n]$. Nyt aputuloksen (AT1) nojalla on voimassa, että $\mathcal{M} \vDash_{X'} \chi'$. Näin ollen $\mathcal{M} \vDash \exists^{\mathrm{s}} w_1 \dots \exists^{\mathrm{s}} w_n \chi'$, eli $\mathcal{M} \vDash \xi$.

Oletetaan sitten, että $\mathcal{M} \vDash \xi$, eli $\mathcal{M} \vDash \exists^{\mathrm{s}} w_1 \dots \exists^{\mathrm{s}} w_n \chi'$. Näin ollen on olemassa kuvaukset:

$$\begin{aligned}
&F_1 : \{\emptyset\} \to \mathcal{P}^*(M), \\
&F_2 : \{\emptyset\}[F_1/w_1] \to \mathcal{P}^*(M), \\
&\quad \vdots \\
&F_n : \{\emptyset\}[F_1/w_1, \dots, F_{n-1}/w_{n-1}] \to \mathcal{P}^*(M), \\
&\qquad \text{s.e. } \mathcal{M} \vDash_X \chi', \text{ missä } X := \{\emptyset\}[F_1/w_1, \dots, F_n/w_n].
\end{aligned}$$

Määritellään tämän perusteella:

$$\begin{aligned}
A_i &:= X(w_i) \text{ jokaisella } i \in \{1, \dots, n\} \\
\mathcal{M}' &:= \mathcal{M}[A_1/P_1, \dots, A_n/P_n]
\end{aligned}$$

Tällöin aputuloksen (AT2) nojalla $\mathcal{M}' \vDash_X \chi$. Koska $w_1, \dots, w_n \notin \mathrm{Fr}(\chi)$, niin $X \upharpoonright \mathrm{Fr}(\chi) = \{\emptyset\}$. Näin ollen lemman 3.3 nojalla pätee, että $\mathcal{M}' \vDash \chi$ ja edelleen on voimassa, että $\mathcal{M} \vDash \varphi$. □

Korollaari 4.32. EMSO-*logiikka sisältyy* IEF-*logiikkaan lauseiden tasolla.*

Todistus. Väite seuraa suoraan lauseesta 4.31. □

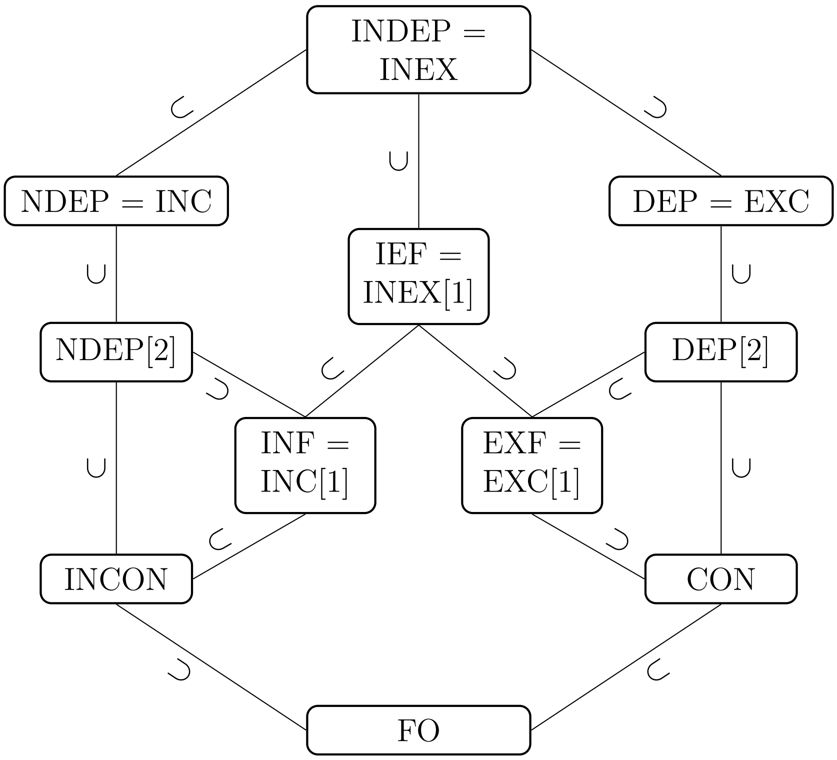
Huomautus. EMSO_L-lauseen käännöksessä IEF_L-lauseeksi on luontevaa ajatella, että kuhunkin tulkintafunktioon liitetään muuttujan w_i arvoiksi koko joukko A_i. Voisimme vaatia tämän määrittelemällä kaavan ξ muodossa $\exists^{\mathrm{s}}_{\mathrm{u}} w_1 \ldots \exists^{\mathrm{s}}_{\mathrm{u}} w_n \chi'$. Tämä ei ole kuitenkaan välttämätöntä, sillä disjunktiot $\vee_{w_1 \ldots w_n}$ takaavat, että muuttujien $w_1, \ldots, w_n$ arvot pitää valita niin, että ehto $X(w_i) = A_i$ voidaan säilyttää.

Olemme siis saaneet osoitettua, että IEF-logiikka on lauseiden tasolla ekvivalentti EMSO-logiikan kanssa:

Korollaari 4.33. IEF*-logiikka on lauseiden tasolla ilmaisuvoimaltaan täsmälleen yhtä vahva kuin* EMSO*-logiikka.*

Todistus. Väite seuraa suoraan korollaareista 4.29 ja 4.32. □

Saamme tämän ja edellisten kappaleiden tuloksista kokonaisuudessaan seuraavan kaavion logiikoidemme ilmaisuvoimasta kaavojen tasolla:



Lisäksi olemme saaneet osoitettua, että IEF-logiikka on lauseiden tasolla ekvivalentti EMSO-logiikan kanssa ja että seuraavat sisältymiset ovat aitoja myös lauseiden tasolla:

$$\mathrm{INCON} \subset \mathrm{INF}$$
$$\mathrm{CON} \subset \mathrm{EXF}$$
$$\mathrm{EXF} \subset \mathrm{DEP}[2]$$

Luku 5

Yhteenveto

Käymme tässä luvussa vielä lyhyesti läpi aiheita, joita olemme käsitelleet tässä tutkielmassa, sekä niiden pohjalta tekemiämme tuloksia. Pohdimme samalla joitain avoimiksi jääneitä kysymyksiä sekä aihepiiriin liittyviä mielenkiintoisia teemoja jatkotutkimusta ajatellen.

Tutkimuskohteenamme ovat olleet inkluusio- sekä ekskluusio-operaatiot kvantifioinnin tasolla. Määrittelimme tätä varten uudet kvanttorit $(\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)$ sekä $(\exists^{\mathrm{s}} x \mid t)$ ja edelleen INF-, EXF- sekä IEF-logiikat. Voidaan kysyä, että onko määrittelemämme semantiikka näille uusille operaatioille ainoa mielekäs lähestymistapa, vai voisiko olla jokin vaihtoehtoinen luonteva tapa määritellä inkluusio- ja ekskluusio-operaatiot kvantifioinnin yhteydessä.

Saimme osoitettua, että $\mathrm{INF} = \mathrm{INC}[1]$ ja $\mathrm{EXF} = \mathrm{EXC}[1]$. Täten esittelemämme inkluusio- ja ekskluusiokvanttorit ovat näin määriteltyinä hyvin tiiviissä suhteessa inkluusio- ja ekskluusioatomeihin; oikeastaan kyseessä on vain erilainen näkökulma samaan aiheeseen. Tätä voi pitää toivottavana, sillä tavoittelimme INF- ja EXF-logiikoilla juuri erilaista lähestymistapaa inkluusio- ja ekskluusiologiikoihin, vastaavaan tapaan kuin IF-logiikka ja riippuvuuslogiikka ovat erilaisia lähestymistapoja samaan aiheeseen.

Näin määriteltyinä INF- ja EXF-logiikat päätyivät kuitenkin olemaan vain pieniä fragmentteja inkluusio- ja ekskluusiologiikoista. Voidaankin miettiä, että olisiko inkluusio- ja ekskluusiokvanttoreita mahdollista yleistää niin, että niiden avulla voitaisiin ilmaista paikkaluvultaan minkä tahansa suuruisia inkluusio- tai ekskluusioatomeita. Tällöin päätyisimme niitä käyttäen samaan ilmaisuvoimaan kuin koko inkluusio- ja ekskluusiologiikka.

Mielestäni hyvä tapa arvioida loogisten operaatioiden luontevuutta on tutkia millainen peliteoreettinen semantiikka niille voidaan esittää. Määrittelemillemme kvanttoreille $(\exists^{\mathrm{s}} x \subseteq t)$ ja $(\exists^{\mathrm{s}} x \mid t)$ voidaan esittää mielestäni hyvin luonnollinen peliteoreettinen semantiikka. Mikäli näitä kvanttoreita haluttaisiin lähteä yleistämään, niin pitäisi myös pohtia miten se vaikuttaa niiden peliteoreettiseen tulkintaan. Näitä aiheita olisi syytä pohtia jatkotutkimuksessa, joka lähestyy tätä aihepiiriä nimenomaan peliteoreettisen semantiikan lähtökohdista.

Osoitimme, että EXF-logiikka on ilmaisuvoimaltaan aidosti yksi- ja kaksipaikkaisten riippuvuuslogiikoiden välissä, ja että vastaavasti INF-logiikka on aidosti yksi- ja kaksipaikkaisten NDEP-logiikoiden välissä. Tiedämme edelleen inkluusio- ja ekskluusiologiikoiden ilmaisuvoimasta, että niille pätee:

$$\mathrm{DEP}[1] \subset \mathrm{EXC}[1] \subset \mathrm{DEP}[2]$$
$$\mathrm{NDEP}[1] \subset \mathrm{INC}[1] \subset \mathrm{NDEP}[2]$$

Tiedämme lisäksi, että kaikki yllä olevista sisältymisistä ovat aitoja myös lauseiden tasolla, paitsi mahdollisesti INC[1] ja NDEP[2]-logiikoiden välinen sisältyminen, jonka osoitimme aidoksi ainoastaan kaavojen tasolla. Yllä olevista sisältymisistä herää kysymys, että voidaanko niitä yleistää k-paikkaisille atomeille, eli pätevätkö alla olevat sisältymiset jokaisella $k \geq 1$.

$$\mathrm{DEP}[k] \subset \mathrm{EXC}[k] \subset \mathrm{DEP}[k+1]$$
$$\mathrm{NDEP}[k] \subset \mathrm{INC}[k] \subset \mathrm{NDEP}[k+1]$$

Mikäli edelliset sisältymiset pätevät kaavojen tasolla, niin voidaan edelleen kysyä, että pätevätkö ne myös lauseiden tasolla. Koska NDEP-logiikkaa ei ole tutkittu juurikaan, niin sen suhteen on myös paljon muita mielenkiintoisia avoimia kysymyksiä. Tämän tutkielman tuloksista ei esimerkiksi vielä selviä, että voidaanko NDEP[2]-logiikalla ilmaista lauseiden tasolla jotain mitä EMSO-logiikalla ei voi ilmaista, vai sisältyykö sekin EMSO-logiikkaan.

Osoitimme lisäksi, että lauseiden tasolla INF- ja EXF-logiikka sisältyvät molemmat EMSO-logiikkaan ja IEF-logiikka on itse asiassa sen kanssa ekvivalentti. Näin ollen edelleen EMSO-logiikka on lauseiden tasolla ekvivalentti yksipaikkaisen inkluusio-ekskluusiologiikan kanssa. Tästä herää kysymys, että päteekö yleisesti, että k-paikkainen inkluusio-ekskluusiologiikka on lauseiden tasolla ekvivalentti k-paikkaisen ESO-logiikan[1] kanssa.

Toinen kysymys mitä voidaan pohtia näiden tulosten pohjalta on, että millaisia EMSO-logiikan fragmentteja ovat INF- ja EXF-logiikat. Edelleen on mielenkiitoinen kysymys, että mikä on sitten INF- ja EXF-logiikoiden välinen suhde lauseiden tasolla. Tiedetään, että riippuvuuslogiikka vastaa lauseiden tasolla ESO-logiikkaa [17] ja edelleen sama pätee myös ekskluusiologiikalle. Lisäksi Gallianin ja Hellan tulosten [7] nojalla inkluusiologiikka vastaa GFP-logiikkaa ('Greatest Fixed Point Logic'). Koska GFP-logiikka sisältyy aidosti ESO-logiikkaan, niin voisi olettaa että näin ollen myös INF-logiikka sisältyisi lauseiden tasolla aidosti EXF-logiikkaan. Mutta tämä tarkoittaisi edelleen, että EXF-logiikka olisi lauseiden tasolla ekvivalentti EMSO-logiikan kanssa.

Tämän tutkielman tulokset ovat nostaneet esiin monia mielenkiintoisia kysymyksiä, jotka ansaitsevat laajempaa jatkotutkimusta. Onkin mielenkiintoista nähdä millaista kehitystä tällä uudella logiikan saralla vielä tapahtuu lähivuosina.

[1] Tarkoitamme k-paikkaisella ESO-logiikalla ('Existential Second Order Logic') ensimmäisen kertaluvun logiikan laajennosta, jossa voidaan eksistenssikvantifioida korkeintaan k-paikkaisia relaatiosymboleita kuten EMSO-logiikassa kvantifioitiin yksipaikkaisia.

Kirjallisuutta

[1] Samson Abramsky ja Jouko Väänänen: *From IF to BI: a tale of dependence and separation.* Synthese, Volume 167, Number 2. March, 2009.

[2] Heinz-Dieter Ebbinghaus ja Jörg Flum: *Finite Model Theory, second edition.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1999.

[3] Arnaud Durand ja Juha Kontinen: *Hierarchies in Dependence Logic.* ACM Trans. Comput. Log. 13(4): 31, 2012.

[4] Pietro Galliani: *Upwards Closed Dependencies in Team Semantics.* GandALF 2013: 93-106.

[5] Pietro Galliani: *The Dynamics of Imperfect Information.* Väitöskirja. Institute for Logic, Language and Computation, Amsterdam, 2012.

[6] Pietro Galliani, Miika Hannula ja Juha Kontinen: *Hierarchies in independence logic.* CSL 2013: 263-280.

[7] Pietro Galliani ja Lauri Hella: *Inclusion Logic and Fixed Point Logic.* CSL 2013: 281-295.

[8] Erich Grädel ja Jouko Väänänen: *Dependence and Independence.* Studia Logica: Volume 101, Issue 2: 233-236, 2013.

[9] Miika Hannula: *Hierarchies in inclusion logic with lax semantics.* CoRR abs/1401.3235, 2014.

[10] Leon Henkin: *Some remarks on infinitely long formulas.* Infinistic Methods, Pergamon Press, s. 167–183, Oxford, 1961.

[11] Jaakko Hintikka ja Gabriel Sandu: *Informational Independence as a Semantical Phenomenon.* Logic, Methodology and Philosophy of Science: 571–589, Amsterdam, 1989.

[12] Jaakko Hintikka ja Gabriel Sandu: *Game-Theoretical Semantics.* Handbook of Logic and Language: 361–410, Amsterdam, 1997.

[13] Wilfrid Hodges: *Compositional semantics for a language of imperfect information.* Logic Journal of the IGPL, 5:539-563, 1997.

[14] Antti Kuusisto: *A Double Team Semantics for Generalized Quantifiers.* CoRR abs/1310.3032, 2013.

[15] Leonid Libkin: *Elements of Finite Model Theory.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2004.

[16] Allen L. Mann, Gabriel Sandu ja Merlijn Sevenster: *Independence-Friendly Logic.* Cambridge University Press, New York, 2011.

[17] Jouko Väänänen: *Dependence Logic.* Cambridge University Press, New York, 2007.