TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Elina Väänänen

Kirjallinen kielentäminen ja kämmentietokoneet lukion pitkässä matematiikassa

Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka
Huhtikuu 2014

Haluan kiittää Sammon keskuslukion lehtori Timo Ojansivua.
Tukesi on ollut korvaamatonta.
Kiitos että lainasit minulle opiskelijoitasi.
Lisäksi haluan kiittää siitä, että uskoit tutkimukseeni koko ajan,
jaoit omat näkemyksesi kanssani sekä inspiroit minua.

Haluan myös kiittää kihlattuani Antti Peltomaata.
Kärsivällisyytesi tutkielmaani kohtaan oli uskomatonta.

Tampereen yliopisto

Informaatiotieteiden yksikkö

VÄÄNÄNEN, ELINA: Kirjallinen kielentäminen ja kämmentietokoneet lukion pitkässä matematiikassa

Pro gradu -tutkielma, 56 s., 14 liites.

Matematiikka

Huhtikuu 2014

Tiivistelmä

Tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää, millä tavalla kämmentietokoneiden ja matematiikan kielentämisen avulla voidaan tukea pitkän matematiikan oppimista ja tiedonrakentumista. Lisäksi tutkimuksen tarkoituksena oli kehittää design-tutkimuksen mukaisesti kämmentietokoneiden ja matematiikan kielentämisen avulla tuettua yhteisöllisen oppimisen pedagogista mallia.

Tutkimuksen teoreettinen viitekehys jakautuu kahteen suureen päälinjaan: matematiikan kielentämisen merkitykseen ja teknologian hyödyntämiseen matematiikan opiskelussa. Matematiikan kielentämisen pedagogisena pohjana on multisemioottinen lähestymistapa, eli matematiikan opetusta lähestytään monipuolisesti eri kielien käytön kautta. Viitekehys tuo esille tutkijan valinnat ja näkökulmat, joiden pohjalta on suunniteltu tutkimusaineistoon kuuluvat tehtävät ja kurssin opetus.

Empiirinen aineisto muodostui vuonna 2014 tammikuussa tehdyn opetuskokeilun tuotoksesta. Kenttäkokeilu toteutettiin Sammon keskuslukiossa Tampereella yhdelle pitkän matematiikan ryhmälle (n=21) yhdessä lehtori Timo Ojansivun kanssa. Aihealueena oli trigonometristen funktioiden osuus pitkän matematiikan kurssista Trigonometriset funktiot ja lukujonot. Kenttäkokeilussa tutkittiin pedagogista mallia, joka kehitettiin matematiikan kielentämisen ja kämmentietokoneiden hyödyntämisen pohjalta. Näin ollen tutkimusmetodiksi valikoitui laadullinen design-tutkimus. Pedagogisen mallin ideana oli luoda oppitunnille kaksi erilaista oppimisympäristöä, jotka tukevat opiskelijan tiedon muodostumista uudella tavalla.

Tutkimuksen metodologia perustuu kvalitatiiviseen tutkimukseen. Kenttäkokeilussa kerättiin tutkimusaineisto, joka koostuu kurssille osallistuneiden opiskelijoiden koti- ja viikkotehtävistä, loppukokeesta, loppukyselystä, viikoittaisista vastauksista mielipidekyselyyn sekä kurssin pääopettajan lehtori Ojansivun haastattelusta. Tärkeimpänä analyysimenetelmänä oli teorialähtöinen sisällönanalyysi, jolla analysoitiin opiskelijoiden koti- ja viikkotehtäviä, mielipidekyselyjen vastauksia sekä loppukoetta.

Tutkimustulokset olivat linjassa edellisten tutkimusten kanssa. Opiskelijat kokivat matematiikan kielentämisen auttavan heitä matematiikan opiske-

lussa. Lisäksi heidän mielestään oli hyvä, että kurssin oppitunneilla käytettiin aikaa kämmentietokoneiden käyttötaidon opettamiseen. Opiskelijat kokivat kämmentietokoneen myös auttavan hahmottamaan tehtäviä.

Asiasanat: matematiikan kielentäminen, kämmentietokone, design-tutkimus

Sisältö

Luku 1

Johdanto

> *Kenen tahansa kuka käyttää matematiikkaa, tulisi aina ilmaista tavallisella kielellä sekä käyttämänsä oletukset että saatujen tulosten merkitys. Mitä abstraktimpi teoria, sitä tärkeämpää on tämä vaatimus. [1, Allais]*

1.1 Tutkimuksen lähtökohtia

Kevään 2012 ylioppilaskirjoituksissa sallittiin ensimmäistä kertaa kaikkien laskinten käyttö. Tämä mahdollisti kämmentietokoneiden eli symbolisten laskinten käytön kirjoituksissa. Laskinuudistus on herättänyt selkeitä kannanottoja sekä puolesta että vastaan. Esimerkiksi Lappi ja Lappi pohtivat muun muassa sitä, kuinka suuressa määrin laskinuudistuksen myötä siirrytään oppimaan jonkin tietyn ohjelmiston tai laskimen toimintalogiikkaa ja näppäinsarjoja itse matematiikan sijasta. [2] Toisaalta esimerkiksi Haapasalon mukaan laskinuudistus mahdollistaa uusien tehtävätyyppien luomisen. [3]

Lukion pitkän matematiikan ylioppilaskirjoitusten laatijat joutuvat pohtimaan uudistuksen myötä matematiikan opiskelun tavoitteita ja sisältöjä. Esimerkiksi Lohjan yhteiskoulun lehtorit Lehtonen ym. ovat tutkielmassaan ratkaisseet vuoden 2013 kevään pitkän matematiikan ylioppilaskirjoituksen kämmentietokoneen avulla. [4] Tutkimuksen johtopäätöksen mukaan 9 tehtävää 15:sta pystytään ratkaisemaan kämmentietokoneen avulla ilman, että laskija joutuu tekemään juurikaan omia johtopäätöksiä. Tulevaisuudessa matematiikan ylioppilaskirjoitusten tehtävien olisi siis muututtava, jotta koe mittaisi selkeämmin opiskelijoiden matemaattista osaamista eikä laskimen käytön hallintaa. Johdannon alkuun poimittu Allaisin sitaatti sisältää yhden mahdollisen kehityssuunnan. Matematiikan ylioppilaskirjoituksissa Ylioppilastutkintolautakunta ohjeistaa kokelaita, että ratkaisussa tulisi esiintyä ainakin muutaman sanan mittainen selitys tai perustelu sekä piirros ja näihin perustuvat huomautukset. [5] Tulevaisuudessa yksi mahdollinen ratkaisu on painottaa yhä enemmän edellä mainittua Ylioppilastutkintolautakunnan vaatimusta ja kehittää sellaisia tehtäviä, joissa kokelaan matemaattinen ajattelu tulee ilmi objektiivisesti mitattavalla tavalla. Tässä tutkimuksessa esitellään kahdenlaisia tehtävätyyppejä. Osa tehtävistä soveltuu kämmentietokoneen avulla ratkaistavaksi, mutta ratkaisuun vaaditaan matemaattista ajattelua. Toisessa tehtävätyypissä hyödynnetään luonnollista kieltä matematiikan tehtävien ratkaisussa.

Ylioppilastutkintolautakunta teki 20.9.2013 päätöksen matematiikan ylioppilaskirjoitusten uudistuksesta. Keväästä 2016 lähtien kokelaat tekevät matematiikan kokeen, johon kuuluu osa, jossa laskimen käyttö on kielletty. Toisessa osassa kämmentietokone on sallittuna apuvälineenä. Tästä muutoksesta johtuen matematiikan opetuksen lukioissa on huomioitava nämä kaksi erilaista oppimisympäristöä ja löydettävä tapa opettaa opiskelijoita hallitsemaan molemmat osuudet. Tutkimukseni lähtökohtana oli luoda pedagoginen malli, jossa opiskelijoille opetettaisiin kämmentietokoneen käyttöä ja matematiikan kielentämistä.

1.2 Katsaus aikaisempiin tutkimuksiin

1.2.1 Kämmentietokoneet opetuksessa

Lukio-opintojen tulee antaa riittävät valmiudet lukion oppimäärään perustuviin jatko-opintoihin. Teknologia on kasvattanut asemaansa yhteiskunnassa, kuten myös korkeakouluopinnoissa. Näin ollen kouluissa olevalle sukupolvelle on yhä tutumpaa käyttää tietoteknisiä laitteita. Sekä kämmentietokoneiden että erilaisten ohjelmien, kuten GeoGebran, vaikutusta matematiikan opiskeluun on tutkittu. Suomessa esimerkiksi Kivelä on luonut sähköisiä materiaaleja kämmentietokoneille ja GeoGebralle. [6]

Yksi tärkeä tutkimuksissa esille noussut kysymys on kämmentietokoneiden käytön opettelemisen viemä aika kontaktiopetuksessa. Oldknow ja Taylor pitävät symbolisten laskinten käyttöönottoa kouluissa etuna, sillä symbolisten laskinten käyttö säästää aikaa, ja ylijäävän ajan voi käyttää oppilaiden matemaattisen ymmärryksen laajentamiseen. [7]

Kendal, Stacey ja Pierce perehtyivät tutkimuksessaan kolmen eri opettajan kenttäkokeiluun, jossa ideana oli toimia kämmentietokoneiden kanssa luokassa yhden kurssin ajan. [8] Tutkimuksessa nähdään yhtenä kämmentietokoneiden hyötynä uusien tehtävätyyppien kehittelemisen mahdollisuus. Tehtävätyypit, jotka olivat ennen mahdollisia vain teoriassa, ovat nyt mahdollisia myös käytännössä. Lisäksi uudet tehtävätyypit avaavat mahdollisuuden käyttää uusia opetusmenetelmiä. Tutkimuksessa kaksi opettajista opetti samoja oppilaita samassa koulussa ja suunnitteli tunnitkin vielä yhdessä, mutta lopulta tunnit, joita he pitivät, olivat hyvin erilaisia. Tästä johtuen, vaikka luokka saavutti yleisesti saman lopputuloksen, oppivat he erilaista matematiikkaa eri opettajan opetuksessa. Tutkimuksen yhteenvedossa tutkijat toteavat, että kämmentietokoneiden avulla on mahdollista parantaa opiskelijoiden ongelmanratkaisutaitoja, käsitteellistä ymmärrystä, korkeampaa ajattelua ja ymmärrystä siitä, miten vahvistaa ratkaisuja ja tulkita niitä kriittisesti.

Lagrange toteaa tutkimuksessaan, että uudet työkalut voivat muodostaa sillan tehtävien ja teorian välille. [9] Lisäksi kyseisessä tutkimuksessa käy ilmi uuden teknologian käyttöönotosta, että myös opettajan täytyy muuttaa merkittävästi opetustaan ja opetustyyliään. Tämän vuoksi opettajat saattavat kokea muutokset työläinä.

Weigand tutki kahtena lukuvuonna, vuosina 2003–2004 ja 2004–2005, Saksassa kämmentietokoneiden vaikutusta oppilaisiin. [10] Hän tutki, miten perusmatematiikan taidot muuttuvat kämmentietokoneavusteisessa opetuksessa, kuinka tehtävien asettelu muuttuu kurssikokeessa käytettäessä kämmentietokonetta, miten oppilaat arvioivat uuden työkalun käytön sekä kuinka opetustyylit ja metodit muuttuivat matematiikan tunneilla. Tutkimuksessa huomattiin, että luokka, joka oli saanut käyttää uusia apuvälineitä oppimisessa, saavutti suuremman parannuksen esimerkiksi työskentelyssä funktioiden kuvaajien kanssa kuin kontrolliluokka. Toisaalta muutosta ei havaittu esimerkiksi taulukoiden ja muuttujien kanssa työskennellessä. Lisäksi tutkimuksessa havaittiin, että hyvät oppilaat eivät hyötyneet uusista työkaluista yhtä paljon kuin heikommat opiskelijat. Todennäköisesti tämä johtui siitä, että hyville oppilaille annettiin liian vähän haasteita tutkimuksen aikana. Kuitenkin tutkimuksen perusteella voidaan aiheellisesti olettaa, että kämmentietokone auttaa tämän tutkimuksen kenttäkokeilussa opiskelijoita teorian ja tehtävän hahmottamisessa.

Suomessa kämmentietokoneiden käytöstä opetuksessa on tehty suhteellisen vähän tutkimuksia. Oinonen on tutkinut pro gradu -tutkielmassaan matematiikan ylioppilaskokeita apuvälinein. [11] Tutkimuksessaan hän toteaa, että laskimet helpottavat merkittävästi ylioppilaskokeita, koska koetehtävät korostavat yksittäisiä ratkaisumenetelmiä. Hiltunen arvioi omassa pro gradu -tutkielmassaan, että kämmentietokoneet auttavat vain parhaita oppilaita merkittävästi. [12] Tämä on ristiriitainen tulos Weigandin tutkimuksen kanssa. Toisaalta taas Tofferi on tutkinut omassa pro gradu -tutkielmassaan erilaisia näkemyksiä, jotka liittyvät laskimien opetuskäyttöön. [13]

Suomessa mielenkiintoisen pro gradu -tutkielman tulevaisuudesta on tehnyt Lakervi. [14] Hän on perehtynyt matemaattisten aineiden opetusharjoittelijoiden asenteisiin ja tietotaitoihin kämmentietokoneiden käytöstä. Tutkimuksessaan hän toteaa, että suurin osa opetusharjoittelijoista vastasi pyrkivänsä käyttämään kämmentietokonetta tulevaisuudessa työkaluna säännöllisesti opetuksessa. Esiin nousi myös opetusharjoittelijoiden pelko, että kämmentietokoneet vieraannuttaisivat opiskelijat pois itse matematiikasta. Hälyttävää tutkimuksessa on se, että Lakervin tutkimat opetusharjoittelijat kokivat saaneensa opettajankoulutuksesta vajavaiset tietotaidot kämmentietokoneiden käytöstä. Suurin osa koki tarvitsevansa lisäkoulutusta. Ongelmana on, että myös opettajat kokevat tarvitsevansa lisäkoulutusta ennen kuin he voivat ottaa kämmentietokoneen osaksi opetusta. [15] Kämmentietokoneiden tuloa luokkahuoneisiin on omalla tavallaan tukenut esimerkiksi lukion lehtorit Heiskanen, Kytömäki ja Setälä, jotka ovat perustaneet Facebook-ryhmän, jossa opettajat pystyvät jakamaan kokemuksia ja tehtäviä toistensa kanssa. [16] Ryhmän avulla opettajat saavat esimerkiksi tukea kämmentietokoneen käyttöönottoon lukio-opetuksessa.

1.2.2 Matematiikan kielentäminen

Lukion opetussuunnitelman perusteissa pitkän matematiikan opetuksen tavoitteina on, että opiskelijan tulisi ymmärtää ja osata käyttää matematiikan kieltä, pystyä keskustelemaan matematiikasta sekä oppia arvostamaan perustelujen selkeyttä. [17] Nykyisellä matematiikan ylioppilaskokeella tai lukioiden kurssikokeilla näiden ominaisuuksien mittaaminen on ollut hankalaa. Ylioppilastutkinto-lautakunnan puheenjohtaja Lahtinen on useasti tuonut esiin huolensa lukiolaisten argumentaation vähyydestä ja suppeudesta. [18]

Joutsenlahti on tarjonnut suppeaan argumentaatioon ratkaisua matematiikan kielentämisestä. Hän määrittelee termin matematiikan kielentäminen matemaattisen ajattelun ilmaisemisena kielen avulla pääsääntöisesti suullisesti tai kirjallisesti. [19] Matematiikan kieltä hän lähestyy multisemioottisesta lähtökohdasta. Tämä tarkoittaa, että matematiikan kieli rakentuu kolmesta eri kielestä: matematiikan symbolikielestä, kuviokielestä ja luonnollisesta kielestä. Joutsenlahden tutkimukset alkoivat lukion matematiikan tutkimuksella ja ovat myöhemmin laajentuneet käsittelemään myös yliopiston ja peruskoulun alaluokkien matematiikkaa. Tutkimuksissaan hän on saanut tuloksia, joiden mukaan matemaattinen kielentäminen tukee oppilaan matemaattisen ajattelun kehittymistä ja helpottaa matematiikan oppimista. [19] Yliopistoon keskittyvässä tutkimuksessa yli kolme neljäsosaa piti kirjallista kielentämistä apukeinona, jolla pystyy paremmin ymmärtämään tehtäviä. [20] Joutsenlahden tutkimustuloksissa matematiikan kielentäminen on auttanut erityisesti opiskelijoilta, jotka ovat aikaisemmin suoriutuneet hyvin tai tyydyttävästi matematiikasta. Lukiossa kielentämistä on tutkinut Joutsenlahden ohella esimerkiksi Kari, joka keskittyi omassa pro gradu -tutkielmassaan derivaatan opettamiseen lukiolaisille. [21] Myös esimerkiksi Sairanen on pro gradu -tutkielmassaan laatinut pitkän matematiikan syventävän kurssin, jonka keskeisenä lähtökohtana on matematiikan kielentäminen. [22] Erityisesti hänen suunnittelemissa harjoitustehtävissä konkretisoituu kielentäminen.

Kaikkien näiden matematiikan kielentämistä käsittelevien tutkimusten pohjalta voidaan tehdä oletuksia myös tämän tutkimuksen tuloksista. Erityisesti niille opiskelijoille, jotka ovat aikaisemmin suoriutuneet pitkästä matematiikasta arvosanoin tyydyttävä tai hyvä, voidaan aiheellisesti olettaa matematiikan kielentämisen muodostuvan tueksi matematiikan oppimisessa. Näin ollen tyydyttävää ja hyvää paremmin tai huonommin suoriutuneet opiskelijat eivät välttämättä hyödy yhtä paljon kenttäkokeilusta. Vaikka opiskelija ei itse hyötyisi matematiikan kielentämisestä, hän kuitenkin kokee, että kielentämisestä saattaa olla hyötyä muille opiskelijoille. (vrt. esim. [23])

Luku 2

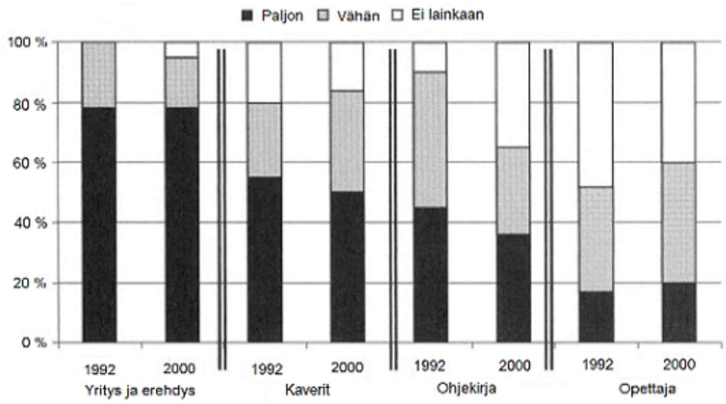
Kämmentietokoneet luokkahuoneessa

2.1 Oppilaat ja kämmentietokone

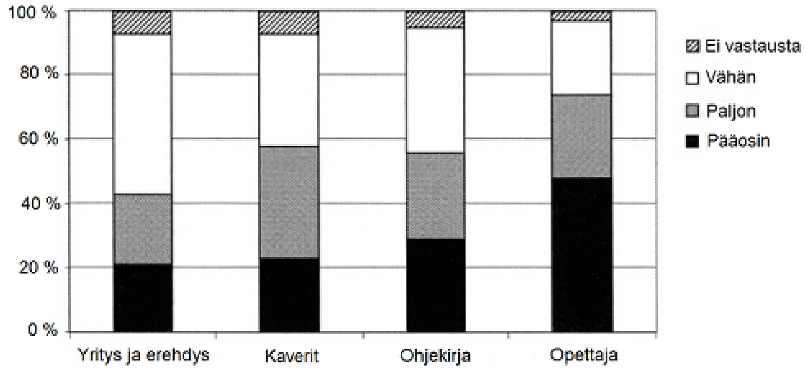
Faure ja Goarin ovat tutkineet oppilaiden mielipiteitä laskimista sekä siitä, miten oppilaat oppivat käyttämään laskimiaan. [24] Heidän tutkimukseensa osallistui 527 16–17 vuotiaista luonnontiedepainotteisten luokkien oppilasta. Oppilaista 84 % omisti graafisen laskimen, 8 % tätä yksinkertaisemman laskimen ja 8 % kämmentietokoneen eli symbolisen laskimen. Tämän tutkimuksen mukaan laskinten käyttö opitaan yleensä luokkahuoneen ulkopuolella. Kuvasta 2.1 nähdään, että oppilaat vastasivat oppivansa suurimman osan laskimen käytöstään yrityksen ja erehdyksen kautta. Vaikka teknologia on kehittynyt vuosikymmenessä huomattavasti, laskimen käytön oppimismetodit ja niiden keskinäiset suhteet ovat pysyneet samoina. Vuonna 2000 niiden oppilaiden määrä, jotka oppivat ohjekirjan avulla, on selkeästi pienempi kuin vuonna 1992. Opettajan rooli laskimen käytön neuvojana ei ole tässä tutkimuksessa kuvan 2.1 mukaan merkittävä. Tämä piirre voisi selittyä sillä, etteivät kyseisessä tutkimuksessa mukana olleiden oppilaiden opettajat käytä luokassa aikaa laskimen käytön opetteluun, vaan jättävät sen oppilaiden omalle ajalle.

Toisaalta samassa tutkimuksessa on tehty kysely siitä, miten oppilaat haluaisivat oppia käyttämään laskimiaan. Kuvasta 2.2 huomataan, että laskimen käyttö olisi mieluisinta oppia opettajan opastamana. Kuvia 2.1 ja 2.2 vertaamalla huomataan, että todellisuus ja oppilaiden haluama tilanne ovat täysin vastakohtaiset.

Kolmantena tutkimuksessa kysyttiin, mihin oppilas käyttää laskinta koulussa ja kotona. Tilasto on esitetty kuvassa 2.3. Eniten laskinta käytettiin tehtävien tekemiseen sekä koulussa että kotona. Kuvasta 2.1 tehtyä päätelmää opettajien oppituntien ajankäytöstä laskinten käytön opetteluun tukee myös kuva 2.3, sillä tunneilla oppilaat eivät käytä laskimia seuratakseen ope-



Kuva 2.1: Kahden mielipidekyselyn tulokset vuosilta 1992 ja 2000. Kysymyksenä kuinka oppilas oppii käyttämään laskinta. [24]

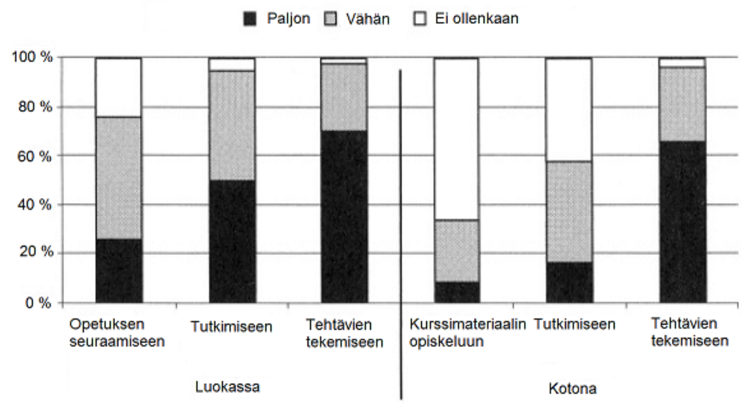


Kuva 2.2: Jos sinun tarvitsisi opetella uudestaan kaikki, miten haluaisit mieluiten oppia käyttämään laskintasi? [24]

tusta. Ilahduttavaa on kuitenkin huomata, että oppilaat käyttävät laskinta tehtävien tutkimiseen suhteellisen paljon.

Kun tämän tutkimuksen kurssille alettiin miettiä tehtävätyyppejä, haluttiin huomioida kyseisen tutkimuksen tuloksia. Tärkeänä tavoitteena oli vastata oppilaiden toiveisiin, mutta myös huomioida, että todellisuudessa oppilaat oppivat parhaiten yrityksen ja erehdyksen kautta. Näin ollen kurssille on suunniteltu tehtäviä, joita tekemällä oppii käyttämään kämmentietokonetta. Osa tehtävistä on rakennettu siten, että matemaattisia ongelmia lähestytään pohtimalla kämmentietokoneen antamia vastauksia. Lisäksi kurssin opetuksessa on otettu huomioon oppilaiden toive oppia kämmentietokoneen käyttö opettajalta. Näin ollen kurssin aikana käytettiin oppitunneilla aikaa kämmentietokoneen käytön opettelemiseen.

Oppilaiden taitotaso vaikuttaa siihen, kuinka hyvin oppilaat käyttävät kämmentietokonetta oppimisen tukena. Monaghan, Sun ja Tall huomasivat



Kuva 2.3: Mihin käytät laskinta kotona ja koulussa? [24]

tutkimuksessaan, että osalle oppilaista kämmentietokoneen käyttö on enemmänkin näppäinten painelua, joka ei edesauta syvällisen ymmärryksen kehittymistä. [25] Hunter, Marshall, Monaghan, Roper ja Wain huomasivat, että osa oppilaista tuli jopa riippuvaiseksi kämmentietokoneista, jolloin heidän tuloksensa laskivat merkittävästi, kun kämmentietokonetta ei annettu käyttää. [26] Hong, Thomas ja Kiernan pääsivät samankaltaiseen tulokseen. [27] Heidän mukaansa heikommat oppilaat turvautuvat kämmentietokoneeseen ongelmanratkaisussa.

2.2 Opettaja ja kämmentietokone

Itse laskinmuutos ei vielä muuta opetustapoja. Millaista pitäisi olla opettajan osaaminen kämmentietokoneiden käytöstä, jotta opiskelijat saisivat mahdollisimman suuren hyödyn opettajasta ja oppitunneista?

Tutkittaessa kynnystä, joka muodostuu opettajien opetuksen ja kämmentietokoneen väliin, kriittiseksi kysymykseksi nousee Doerrin ja Zangorin mielestä opettajan kyky ymmärtää laskimien rajoitteisuus. [28] Vain opettaja, joka ymmärtää rajoitukset ja on valmis työskentelemään näiden rajoitusten kanssa, pystyy hyödyntämään omassa opetuksessaan laskimia. Toiseksi tärkeäksi asiaksi Doerr ja Zangor nostavat luokkahuoneen vuorovaikutuksen. Ilman vuorovaikutusta, oppilas ei välttämättä pysty yhdistämään matemaattisia käsitteitä laskimen antamiin vastauksiin. Ongelmaksi kuitenkin voi muodostua opettajan tietotaidot. Opettajat käyttävät teknologiaa tarkoituksenmukaisesti ja tehokkaasti matematiikan opetuksessa, mikäli teknologia on heille tuttua ja heillä on aikaisempaa kokemusta teknologiasta oppimisympäristöissä. [29]

Tähän ongelmaan ovat paneutuneet esimerkiksi Carpenter ja Fennema. He ovat kehittäneet CGI-mallin (Cognitively Guided Instruction), jonka pyrkimyksenä on edistää opettajan omaa tietotaitoa samanaikaisesti opiskelijoiden oppiessa. [30] Esimerkiksi Tirosh on tutkinut, että virheitä ja väärinkäsityksiä kartoittamalla, opettaja pystyy parantamaan luokkahuoneessa tapahtuvaa opetusta. [31] Omassa tutkimuksessani on tarkoitus hyödyntää Tiroshin tutkimustuloksia siten, että kerättävien viikkotehtävien avulla saadaan kokonaiskuvaa oppilaiden sen hetkisestä taitotasosta. Näin pystytään nopeammin ja paremmin reagoimaan mahdollisiin ongelmiin ja virheisiin.

Elbaz-Vincent vetoaa tutkimuksessaan siihen, että opettajilla tulisi olla riittävä tietotaito kämmentietokoneiden ominaisuuksista ja käyttäytymisestä, jotta he ymmärtäisivät tulokset. [32] Kun opettaja ymmärtää itse tulokset, hän voi selittää nämä oppilaille. Koska oppilaat kehittävät oman tapansa ratkaista kämmentietokoneen avulla tehtäviä, opettajalla tulee olla riittävät tiedot improvisoida tällaisessa tilanteessa ja selittää oppilaille heidän toimintatapojensa toimivuus.

Samassa Elbaz-Vincentin tutkimuksessa on huomattu, että opettajat ovat yleisesti hyväksyneet ideoita kämmentietokoneista ja niiden kanssa työskentelystä luokkahuoneissa. Nämä ideat voivat helposti kääntyä opettajia vastaan. Yksi esimerkki tällaisista on opettajien uskomus, että kämmentietokoneiden kanssa työskenteleminen tarkoittaa samaa asiaa kuin laskemaan oppiminen. Valitettavasti tutkimuksen mukaan näin ei ole, sillä oppilaat tarvitsevat käytännön kokemusta laskemisesta. Vasta saatuaan käytännön kokemusta oppilas voi laajentaa käsitystään oppimastaan asiasta.

2.3 Erilaisia opetustilanteita kämmentietokoneen avulla

Özgün Koca on tutkinut turkkilaisten opettajaopiskelijoiden näkemyksiä kämmentietokoneiden käytöstä opetuksessa. [33] Hän luokittelee opetustilanteet, joissa käytetään kämmentietokonetta, kolmeen eri kategoriaan: "Black Box", "White Box"ja "Symbolic mathematic guide (SMG)". Symbolic mathematic guide on sovellus, joka on mahdollista hankkia tiettyihin Texas Instrumentsin laskinmalleihin. Black Box -laskimen käyttö rajoittuu esimerkkien luomiseen sekä tulosten löytämiseen abstrakteissa ongelmissa. Tähän menetelmään kuuluu oleellisena osana kämmentietokoneen valmiiden komentojen käyttö eli ongelman ratkaiseminen suoraan. White Boxin käyttö on rinnastettavissa paperilla ratkaisuun, sillä tähän kategoriaan luokitellussa opetustilanteessa kämmentietokoneella ratkaistaan ongelmia vaiheittain. Symbolic mathematic guide on hyvin samantapainen opetusmenetelmä kuin White Box, mutta lisäksi kämmentietokone ehdottaa erilaisia toimintoja, joista opiskelija voi valita parhaaksi katsomansa.

Özgun Kocan tutkimuksen ideana oli esitellä 27 opiskelijalle nämä kolme eri kategoriaa kämmentietokoneen käytöstä. Tutkimuksessa kerättiin kaksivaiheinen kysely, jota täydennettiin haastatteluilla. Ensimmäisessä vaiheessa opiskelijoille ei esitelty erilaisia tapoja käyttää kämmentietokonetta. Opiskelijoilla ei ollut merkittävää kokemusta kämmentietokoneiden käytöstä ensimmäisen kyselyn aikana. Toisen kyselyn ideana oli esittelyn jälkeen kartoittaa opiskelijoiden asenteet ja näkemykset kämmentietokoneen käytöstä. Tutkimuksen tuloksista ilmenee, että 48 % opiskelijoista vaihtoi mielipidettä ensimmäisen kyselyn jälkeen. Ensimmäisessä kyselyssä 59 % piti kämmentietokonetta hyödyttömänä ja 33 % näki kämmentietokoneen hyödyn olevan erityisesti sen graafisissa ominaisuuksissa. Tutkimuksessa käy selkeästi ilmi, että toisella kyselykerralla osa opiskelijoista ei innostunut kämmentietokoneen käytöstä opetuksessa. Tutkija itse määrittelee osasyyksi opiskelijoiden epävarmuuden uuden teknologian käyttämisessä. Tämän mielipiteen tutkija perustaa siihen, että ensimmäisessä kyselyssä opiskelijoilla ei ollut käsitystä siitä, miten kämmentietokonetta voitaisiin käyttää hyödyksi algebran opetuksessa.

Luku 3

Matematiikan kielentäminen

Kieli voidaan ymmärtää puhuttuna, kirjoitettuna, piirroksina, ilmeinä, eleinä tai esimerkiksi symbolikielenä kuten matematiikka. Matematiikan kielentämisen tavoitteena on auttaa oppijaa jäsentämään ajatteluaan sekä tuoda omaa ajatteluaan esille muille oppijoille sekä opettajalle. Meaney kuvaa matematiikan kieltä luonnollisen kielen ilmaisuiksi, joilla on oma merkitys matematiikassa, kuten matemaattisilla symboleilla sekä lausekkeilla. [34] Joutsenlahti on kuitenkin lisännyt Meaneyn määritelmään kuviokielen, jolla on keskeinen merkitys esimerkiksi juuri trigonometristen ongelmien havainnollistamisessa. [35]

3.1 Multisemioottinen lähestymistapa

Käsite rekisteri on sosiosemioottisen kieliteorian peruskäsite, jolla tarkoitetaan kielen vaihtelemista riippuen kielen käyttötilanteesta. [36] Esimerkiksi Hallidayn mukaan rekisteri riippuu kolmesta lähtökohdasta: tilanteesta, osapuolista ja kielen roolista. [37] Rekisterit ovat tapoja ilmaista asioita ja poikkeavat sisällöltänsä. Joutsenlahti ja Kulju ovat esittäneet, että matemaattisen ongelman ratkaisussa voi esiintyä kolmea eri kieltä: kuviokieltä, luonnollista kieltä ja matematiikan symbolista kieltä. [38] Kuvasta 3.1 nähdään näiden kolmen eri kielen välinen yhteys. Lisäksi kuvasta 3.1 huomataan, että multisemioottisessa mallissa jokaisella kielellä on myös yhteisiä osuuksia toisen kielen kanssa. Esimerkiksi luonnollisen kielen sanoilla ja ilmaisuilla saattaa olla erilaisia merkityksiä riippuen niiden kontekstista. Matematiikan ja luonnollisen kielen yhteisellä alueella on ne matematiikan käsitteet, joilla on täsmällinen merkitys (esimerkiksi trigonometriset funktiot). Näin voidaankin puhua matematiikkaan liittyvästä luonnollisesta kielestä (MLK). Matematiikan kielen ja kuviokielen alueella on matematiikan kannalta merkitykselliset kuviot, kuten yksikköympyrä (MKK). Tutkimukseni tavoitteena oli saada opiskelijat käyttämään kaikkia kolmea kieltä mahdollisimman yhtenäisesti. Lisäksi tarkoituksena oli saada opiskelijat lisäämään tehtävien

Kuva 3.1: Matemaattisen ongelman ratkaisussa esiintyvät eri kielet. [39]

ratkaisuun luonnollista kieltä ja kuviokieltä sekä perustelemaan niiden avulla ratkaisuvaiheitaan.

3.2 Erilaisia tehtävien ratkaisumalleja

Joutsenlahti on esitellyt sanallisille tehtäville neljä eri ratkaisumallia. [35] Näitä ratkaisumalleja voidaan käyttää myös lukion tehtävien ratkaisussa matematiikan symbolikielen (MSK) rinnalla. Ensimmäinen ratkaisumalli standardimalli on esitelty kuvassa 3.3. Tällainen on lukiolaisille tyypillinen malli, jossa omia ajatuksia ja yhtälöitä ei perustella, vaan tehtävät ainoastaan ratkaistaan. Kuvassa 3.3 on esitetty myös toinen malli, kertomusmalli. Mallissa ratkaisun perustelut ja eteneminen kuvataan luonnollisella kielellä tai kuvioilla. Mallille ominaista on kuvata esimerkiksi väliotsikoin, mitä tehdään tai mitä on tehty. Tarkoitus tässä mallissa on tuoda mahdollisimman selkeästi esille omat ajatukset ratkaisuprosessin aikana ja tehdä ratkaisusta vaivattomasti seurattava. Tätä mallia noudattavat muun muassa oppikirjan esimerkit, joihin lisätään matematiikan symbolikielen rinnalle luonnollista kieltä (kuva 3.2. Tätä mallia käytettäessä lukija voi vakuuttua ratkaisijan ymmärtäneen kaiken tekemänsä tai toisaalta lukijan on myös helppo huomata, missä kohtaa tehtävää ratkaisija on tehnyt virheen.

Kolmannen mallin, tiekartan, ideana on, että ratkaisuprosessi kuvataan ratkaisun alussa kokonaan luonnollisella kielellä, jonka tukena on mahdol-

ESIMERKKI 3

Määritä kulman α kosinin tarkka arvo, kun tiedetään, että $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$ ja että α on välillä $[-180°, -90°]$.

Ratkaisu

Trigonometristen funktioiden Pythagoraan lauseen mukaan $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, joten

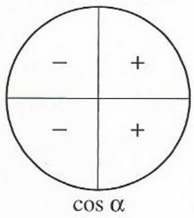
$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(-\frac{5}{13}\right)^2 = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}.$$

Siis

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13} \quad \text{tai} \quad \cos\alpha = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}.$$

Kulma α on välillä $[-180°, -90°]$ eli III neljänneksessä, joten kulman α kosini on negatiivinen. Siis

$$\cos\alpha = -\frac{12}{13}.$$



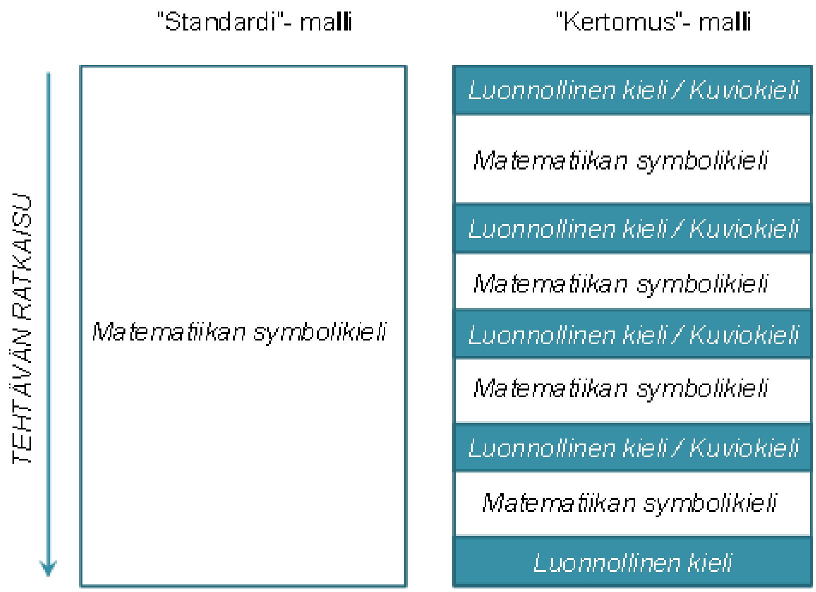
Vastaus

$-\frac{12}{13}$

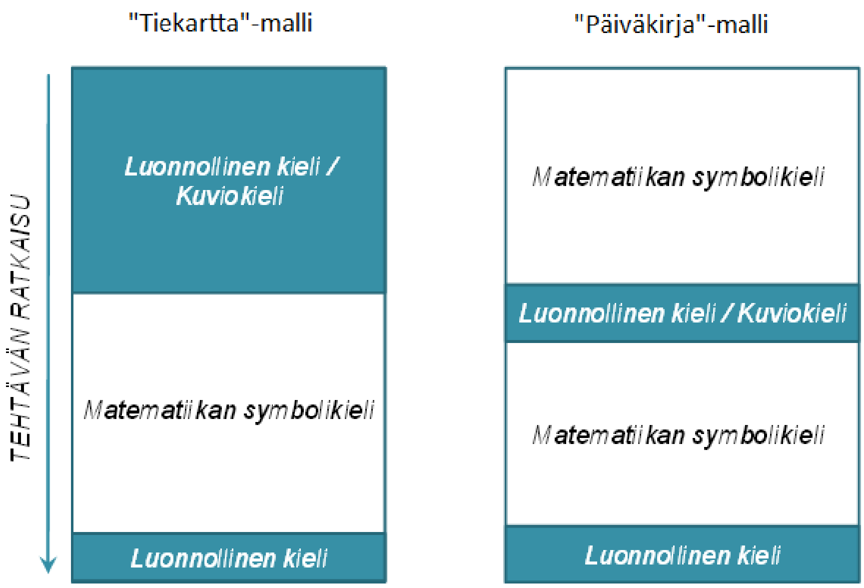
Kuva 3.2: Esimerkki oppikirjasta, jota tämän tutkimuksen opiskelijat käyttävät. [40]

lisesti kuviokieli. Tällöin matematiikan symbolikielen lukeminen helpottuu, kun lukija on nähnyt jo ratkaisun idean. Tätä mallia on kuvattu kuvassa 3.4. Tiekarttamallin voidaan ajatella rakentuvan siten, että standardimallin ratkaisun alkuun on lisätty luonnollisella kielellä toteutettu ratkaisua kuvaava kuvaus. Neljäs Joutsenlahden esittelemä malli on päiväkirjamalli (kuva 3.4. Tässä mallissa ideana on, että ratkaisun esittämiseen käytetään luonnollista kieltä tai kuviokieltä silloin, kun ratkaisija joutuu ongelman eteen. Näin ratkaisija selkeyttää ja jäsentää omaa ajatteluaan kirjoittamalla ja piirtämällä päästäkseen ratkaisussa eteenpäin. Voidaan ajatella, että päiväkirjamallissa ratkaisija on vuorovaikutuksessa oman tekstinsä kanssa.

Sekä kuvan 3.3 että 3.4 malleissa viimeisenä on kuvattu luonnollinen kieli.



Kuva 3.3: Standardi- ja kertomusmalli, joissa kuvataan erilaisia tapoja ilmaista oma ratkaisu matematiikan tehtävään. [35]



Kuva 3.4: Tiekartta- ja päiväkirjamalli, joissa kuvataan erilaisia tapoja ilmaista oma ratkaisu matematiikan tehtävään. [35]

Tämä kuvastaa ratkaisun viimeistä riviä eli vastausta. Joutsenlahti on luonut nämä ratkaisumallit peruskoulun sanallisiin tehtäviin, joissa tärkeänä osana on antaa lopullinen vastaus kokonaisena virkkeenä. Joissakin tapauksissa tämä soveltuu hyvin myös lukioon, mutta ei ole otettavissa aivan sellaisenaan kaikkiin tehtäviin käyttöön.

Tutkiessaan matematiikan kielentämistä lukiolaisten kanssa, Joutsenlahti löysi vielä yhden mallin, kommenttimallin. [39] Kuvassa 3.5 on esitettynä tämä malli. Mallin ideana on, että paperin vasemmalle palstalle opiskelija ratkaisee hyvin standardimallin kaltaisesti matematiikan symbolikielen avulla tehtävän. Paperin oikealle palstalle taas opiskelija tekee täysin luonnollisen kielen avulla kuvatun selostuksen vasemman palstan symbolikielestä.

Kuva 3.5: Viimeisimpänä löydetty kommenttimalli, jossa kuvataan erilainen tapa ilmaista oma ratkaisu matematiikan tehtävään.

Tiekartta-, kertomus- ja kommenttimalli ovat esittämiseen painottuvia malleja, eli ratkaisun rakenne auttaa opettajaa tai muuta tehtävän lukijaa ymmärtämään ratkaisua paremmin. Päiväkirjamalli sen sijaan tukee enemmänkin ratkaisijaa itseään ja auttaa häntä prosessoimaan ratkaisua, jolloin ulkopuolinen lukija ei välttämättä ymmärrä tehtävän ratkaisua paremmin kuin mitä hän ymmärtäisi standardimallin ratkaisua. Näin ollen lukiolaisen olisi parempi kehittää ratkaisuansa kohti presentaatiomalleja, koska tällöin hän pystyy näyttämään osaamisensa paremmin. Tämä taito tulee hyödylliseksi, jos opettaja ei ole varma siitä, onko ratkaisu opiskelijan itse ymmärtämä vai kämmentietokoneesta suoraan kopioitu tulos.

Joutsenlahti ym. esittivät ensimmäisen kerran neljä erilaista kielentämistehtävämallia yliopiston matematiikan tutkimuksessaan. [20] Ensimmäinen tehtävätyyppi on koodinvaihtotehtävä. Tehtävätyypin ideana on tehdä matematiikan symbolikielellä esitetyn ratkaisun rinnalle kuvaus luonnollisella kielellä. Toinen tehtävätyyppi on täydennystehtävä, eli ratkaisusta puuttuvia osia täydennetään jollakin kolmesta kielestä. Virheen etsintä -tehtävätyypissä annetussa ratkaisussa on virhe, joka pitää löytää ja korjata. Neljäs tehtävätyyppi on ratkaisusta tehtävä, jossa tehtävän ratkaisijan tulee laatia annettuun ratkaisuun tehtävänanto.

Luku 4

Tutkimusongelmat ja -tehtävä

Tässä tutkimuksessa pyritään selvittämään, millä tavalla matematiikan kielentäminen tukee pitkän matematiikan oppimista ja tiedonrakentumista. (vrt. [19]) Toisena tavoitteena on tutkia kämmentietokoneen vaikutusta luokkaympäristössä ja matemaattisen ajattelun kehittymistä. (vrt. [8]) Tarkoituksena on kehittää kämmentietokoneiden ja matematiikan kielentämisen avulla yhteisöllisen oppimisen pedagogista mallia. Pyrkimyksenä on saada kokonaiskuva siitä, miten kaksi hyvin erilaista oppimisympäristöä toimivat käytännössä. Tutkimuksen motiivi oli kehittää nykyisille hyvin yksipuolisille lukion pitkän matematiikan tehtäville vaihtoehtoisia tehtävätyyppejä. Näin ollen yhtenä tutkimusongelmana voidaan pitää kurssin materiaalin laadintaa kenttäkokeilua varten. Koska tutkimus toteutettiin design-tutkimuksena, tutkimuksen tarkoituksena oli kehittää sekä teoriaa että käytäntöä. Tämän tutkimuksen tutkimustehtävä on design-ongelma, joka toimii design-tutkimuksen lähtökohtana. Laadullinen tutkimus antaa metodologisen lähtökohdan ongelman tutkimiseen ja teoreettiseen tarkasteluun.

Tutkimusongelmiksi kurssin materiaalin tuottamisen lisäksi asetetaan seuraavat viisi kysymystä:

1 Kuinka hyvin lukiolaiset osaavat luonnollisen kielen avulla kuvata matemaattista ajatteluaan?

2 Oppivatko opiskelijat paremmin, kun he joutuvat tekemään kielentämistehtäviä oppikirjan tehtävien ohella?

3 Mitä mieltä tutkimukseen osallistuneet lukiolaiset ovat kielentämisen hyödyllisyydestä heille itselleen ja muille opiskelijoille?

4 Kuinka kämmentietokoneiden käyttö vaikuttaa opiskelijoiden matemaattiseen ajatteluun?

5 Kokevatko lukiolaiset kämmentietokoneen käytön harjoittelemisen luokassa oppitunnilla tarpeelliseksi?

Luku 5

Tutkimuksen toteutus

5.1 Tutkimusstrategia

Tutkimuskohteena oli pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattisen ajattelun kehittyminen. Tutkimuksessa pyrittiin selvittämään, miten matemaattinen ajattelu kehittyi tutkimuksen aikana uusissa oppimisympäristöissä. Toisaalta tarkoituksena oli myös tutkia opiskelijoiden omaa käsitystä oppimisesta erilaisten tehtävien avulla. Opiskelijoille uutena oppimisympäristöinä esitettiin matematiikan kielentäminen ja kämmentietokoneiden avustuksella tapahtuva oppiminen. Oppimisympäristöt luotiin luokkahuoneeseen oppituntien ajaksi. Lisäksi opiskelijoille annettiin heille uusia ja erilaisia tehtäviä. Osassa tehtävistä heidän tuli käyttää kielentämistä apunaan, ja osassa kämmentietokone oli tärkeässä roolissa tehtävän ratkaisemisessa. Tutkimus on aikasidonnainen, koska tutkimushetkellä opiskelijoilla oli hyvät perustaidot kämmentietokoneiden käytöstä. Kaikki olivat käyttäneet ennen tutkimusta kämmentietokonetta, suurin osa jo puolitoista vuotta, eli koko lukio-opintojensa ajan.

Tutkimusstrategiaksi valikoitui design-tutkimus tai kehittämistutkimus (engl. design research, design-based research), sillä tutkimuksen tarkoituksena oli kehittää sekä teoriaa että käytäntöä. Design-tutkimus ei määrittele tutkimuksen metodologiaa, vaan se on tutkimusstrategia. [41] Kyseinen strategia on 1990-luvulta alkaen yleistynyt esimerkiksi juuri kasvatustieteiden tutkimuksissa. [42] Tällaiselle tutkimukselle yleistä on suuren empiirisen aineiston, kuten oppijoiden tuotosten, kerääminen. Analyysin tarkoituksena on pohtia tuloksia, joita kenttäkokeilu saa aikaiseksi. [43] Strategian heikkous on, ettei design-tutkimuksen pohjalta pystytä selvittämään kenttäkokeilussa tapahtuvan oppimisen syy-seuraussuhteita yksiselitteisesti. Koska kenttäkokeilu tapahtuu autenttisessa ympäristössä, oppijoiden oppimistilanteeseen vaikuttaa lukuisia toisiinsa liittyviä muuttujia, joiden vaikutusten selvittäminen on haastavaa. [41]

Design-tutkimuksessa ideana on yhteistyössä opiskelijoiden, opettajien ja muiden tutkijoiden kanssa suunnitella uusia oppimisympäristöjä sekä tutkia oppimista empiirisesti. [43] Design-tutkimukselle tyypillistä on se, että tutkimuksen tuloksia voidaan sellaisenaan siirtää käytäntöön. Tutkimukseeni tämä metodologia sopii hyvin, sillä oppiminen on kontekstiin sidottua eli sen tutkiminen on hyvä tehdä aidossa oppimisympäristössä. Design-tutkimuksen avulla on tarkoitus suunnitella pedagoginen malli, testata se käytännössä ja raportoida tulokset mallin testistä. Mallin ideana on luoda design-ongelma tai design-tehtävä, johon pyritään löytämään ratkaisu tutkimuksessa. Tässä tapauksessa design-ongelmana voidaan pitää kahden erilaisen oppimisympäristön luomista luokkahuoneeseen ja näiden oppimisympäristöjen toimivuuden tutkimista yhdessä ja erikseen.

Tutkimuksessa tehtiin matka autenttiseen oppimisympäristöön suunnittelemalla ja toteuttamalla kenttäkokeilu, jossa luotiin kaksi erilaista oppimisympäristöä luokkahuoneeseen. Tutkimuksessa kerättiin useantyyppisiä aineistoja. Opiskelijoiden omaa käsitystä oppimisestaan kartoitettiin loppukyselyn avulla. Kyselylomakkeessa oli sekä suljettuja että avoimia kysymyksiä. Pääosin kysely koostui kysymyksistä, joihin tuli vastata viidestä vaihtoehdosta parhaiten omaa oppimista kuvaava vaihtoehto. Viikoittaiset mielipidekyselyt koostuivat ainoastaan avoimista kysymyksistä. Matemaattisen ajattelun kehittymistä tutkittiin opiskelijoiden koti- ja viikkotehtävien avulla sekä kurssin lopussa järjestetyn loppukokeen avulla. Koska nämä muodostavat suurimman tutkimusaineiston, tutkimus sijoittuu epistemologisilta lähtökohdiltaan kvalitatiiviseen tutkimusperiaatteeseen.

5.2 Tehtävien laatiminen

Kokeilun ajan opiskelijat saivat kotitehtäväksi kirjan tehtävien lisäksi vähintään joko yhden kielentämistehtävän tai yhden tehtävän, jossa tarvitsi käyttää kämmentietokonetta ratkaisun apuna. Lisäksi kurssilla oli kaksi vapaaehtoista projektitehtävää, joita tekemällä opiskelijoilla oli mahdollisuus saada kokeeseen hyvitystä. Toinen projektitehtävistä laadittiin siten, että jokaisella opiskelijalla oli taitotasostaan riippumatta mahdollisuus saada se ratkeamaan. Toinen puolestaan laadittiin ennemminkin opiskelijoille, joilla on kyky omaksua uutta asiaa ja soveltaa sitä käytännössä ilman opettajan apua. Kaikki kurssin aikana käsitellyt tai tehdyt tehtävät pyrittiin laatimaan siten, että opiskelijoiden matemaattinen ajattelu kehittyisi joko kielentämisen tai kämmentietokoneen avulla.

Kämmentietokoneen avulla ratkaistavat tehtävät pyrittiin luomaan siten, että opiskelija huomasi kämmentietokoneen antavan jonkinlaisen vastauksen tai kuvaajan, josta opiskelijan tuli päätellä teoria ratkaisun taustalla. Tarkoitus oli myös näyttää tietyissä tehtävissä, ettei kämmentietokoneen antamaan ratkaisuun tule aina luottaa, koska kämmentietokone voi näyttää vastauksen esimerkiksi erilaisessa muodossa kuin opiskelijalta vaaditaan. Osassa tehtävistä kämmentietokoneen rooli oli nopeuttaa tehtävän ratkaisua, eli esimerkiksi välivaiheen pystyi katsomaan suoraan kämmentietokoneesta.

Kielentämistehtävissä pyrittiin oppilaita rohkaisemaan käyttämään jotakin neljästä kielentämisen mallista, eli kertomus-, tiekartta-, kommentti- tai päiväkirjamallia. Opiskelijat saivat itse valita itselleen luontevimman tavan selostaa ratkaisuidensa rakennetta eikä niinkään harjoitella jokaista näistä neljästä mallista. Tavoitteena oli kehittää opiskelijoiden perusteluja kohti täsmällisempiä muotoja sekä saada opiskelijat ymmärtämään syvällisemmin omia ratkaisujansa. Itse tehtävät laadittiin kuitenkin joko kommentti- tai kertomusmallin mukaisesti. Koska opiskelijat olivat tottuneet jo aikaisempien kurssien aikana kirjan esimerkin ratkaisumalleihin, tuntui luontevimmalta näyttää luokkatilassa juuri heille tuttua kertomusmallia. Näin ollen myös kirjan esimerkit tukivat kielentämisen harjoittelua. Toisaalta kurssin vastuuopettaja piti paljon kommenttimallin esitystavasta, minkä vuoksi osa tehtävistä esitettiin tämän mallin avulla. Osassa kielentämistehtävistä painottui kuvan piirtämisen tärkeys, osassa ideana oli selostaa ratkaisun vaiheet.

Kielentämistehtävät ideoitiin Joutsenlahden kielentämistehtävän mallien pohjalta. (ks. [39]) Opiskelijoille tuli kurssin aikana ainakin yksi tehtävä jokaisesta eri tehtävämallista. Itse tehtävämalleja ei esitelty opiskelijoille, eikä tehtävämallien pohjalta tehdä vertailua mallien toimivuudesta tai toimimattomuudesta, vaan tarkoitus oli ainoastaan monipuolistaa kielentämistehtäviä.

Projektitehtävien ideana oli saada oppilaat kirjoittamaan tutkimusraportti, jossa he kuvaavat ratkaisunsa vaiheet yksityiskohtaisesti. Projektitehtävät laadittiin siten, että niiden ratkaiseminen ilman kämmentietokonetta olisi haastavaa, eli esimerkiksi kuvaajat olisi täytynyt piirtää hyvin tarkasti tai hahmottaa vaikeitakin funktioita ilman konkreettista apua. Lisäksi kämmentietokoneiden hyödyntämistä suosittiin esimerkiksi siten, että osatessaan kämmentietokoneen käytön, tietyt vastaukset sai lukea suoraan kämmentietokoneen piirtämästä kuvaajasta.

Oppitunnit rakennettiin siten, että opiskelijat joutuivat suullisesti kielentämään mahdollisimman paljon. Esimerkiksi opiskelija, jonka kotitehtävän ratkaisua tutkittiin, joutui sanoin selittämään miten hän on tehtävän ratkaissut ja miten hän on keksinyt käyttää tiettyjä ratkaisumalleja. Lisäksi esimerkit, joita kurssin aikana käytettiin oppitunneilla, kielennettiin mahdollisimman tarkasti ja näin ollen pyrittiin antamaan eräänlainen kielentämismalli opiskelijoille. Erityisesti kuvien piirtämisen tärkeyttä haluttiin korostaa. Esimerkeissä hyödynnettiin myös mahdollisimman paljon kämmentietokonetta eli osa esimerkeistä rakentui samalla idealla kuin kotitehtävät, joissa tarkoituksena oli käyttää kämmentietokonetta apuna. Lisäksi osalla oppitunneista opeteltiin konkreettisesti käyttämään kämmentietokonetta eli kämmentietokoneen opettelua ei jätetty opiskelijoille ainoastaan kotitehtäväksi. (vrt. [24])

Loppukyselyn kysymykset pyrittiin yhtenäistämään siten, että ne olisivat mahdollisimman hyvin verrattavissa esimerkiksi Joutsenlahden (vrt. [20]) sekä Fauren ja Goarinin (vrt. [24]) tutkimustuloksiin. Näin ollen osa kysymyksistä on identtisiä näiden tutkimusten kanssa. Kysely on rakennettu niin, että aluksi on helppoja monivalintakysymyksiä, joihin jokainen on osannut vastata. Aihealueeltaan samankaltaiset kysymykset on laitettu peräkkäin. Avoimet kysymykset on mietitty siten, että tulosten käsittelyvaiheessa vastaukset on helppo koodata myönteisiksi tai kielteisiksi vastauksiksi. Lisäksi loppukyselyä muodostettaessa on mietitty hyvän kyselylomakkeen piirteitä. Esimerkiksi samaa asiaa on saatettu kysyä useammassa kohdassa ainoastaan eri tavalla muotoiltuna.

Koska vähintään yksi tehtävä saatiin jokaisella oppitunnilla opiskelijoilta, tutkimuksessa pysyttiin hyvin perillä heidän taitotasostansa. Tästä syystä kesken kurssin jouduttiin poikkeamaan alkuperäisestä kurssisuunnitelmasta, koska opiskelijoille tuli antaa sisäistämisaikaa tietyissä asioissa. Tämä sopi myös hyvin design-tutkimukselle tyypilliseen syklisyyteen, jossa tarkoitus on edellistä tutkimusvaihetta analysoimalla laatia uusi, tarkempi tutkimuskierros.

5.3 Aineiston kerääminen

Tutkimus toteutettiin Tampereella Sammon keskuslukiossa yhden kurssin opiskelijoilla. Tutkimuksen toteutuksessa oli mukana 21 opiskelijaa. Opiskelijoista 9 oli tyttöjä ja 12 poikia. Aineisto kerättiin 7.1–27.1.2014 välisenä aikana. Tutkimus tehtiin pitkän matematiikan Trigonometriset funktiot ja lukujonot -kurssilla. Aihealueeksi rajautui trigonometristen funktioiden osuus. Opiskelijat valikoituivat tutkimukseen sen perusteella, että kurssi sopi heidän lukujärjestykseensä. He eivät siis tienneet etukäteen tutkimuksesta eli opiskelijoiden valinta oli sattumanvarainen. Ennen tutkimusta opiskelijoille ja heidän vanhemmilleen selitettiin tutkimuksen anonyymi käsittely. Kurssin aikana opiskelijoille selitettiin matematiikan kielentämisen käsite.

Tutkimuksessa pyrittiin huomioimaan erilaiset kämmentietokoneen käyttötaidot ja tuntemus. Kenttäkokeilussa jokaisella opiskelijalla oli käytettävissään Texas Instruments TI-nspire CX CAS-laskin, joka on kämmentietokone, johon pedagoginen malli on suunniteltu. Oppilaat, jotka eivät omistaneet kämmentietokonetta itse, saivat koululta tutkimuksen ajaksi lainaksi sellaisen. Vaikka tämä malli on suunniteltu Texas Instruments -kämmentietokoneelle, tehtävät soveltuvat myös muilla kämmentietokoneilla ratkaistaviksi. Pedagoginen malli ei siis ole sidottu ainoastaan yhteen laitteeseen.

Kotitehtävien palauttamatta jättäminen vaikutti kurssin aikana aktiivisuuteen ja sitä kautta arvosanaan, mitä osa opiskelijoista ei kokenut tarpeeksi motivoivana. Näin ollen jokaisesta annetusta tehtävästä ei saatu kaikilta 21 oppilaalta ratkaisua. Projektitehtävät olivat niinikään vapaaehtoisia, mutta tekemällä niitä opiskelijoilla oli mahdollisuus saada loppukokeeseen pisteitä.

Ensimmäisen projektitehtävän palautti 14 opiskelijaa ja toisen projektitehtävän palautti 9 opiskelijaa. Jokaiselta opiskelijalta saatiin kurssin lopussa esitetty loppukysely kerättyä.

Lehtori Ojansivun haastattelu toteutettiin sähköpostin välityksellä kurssin päättymisen jälkeen. Ojansivua täyttää asiantuntijan kriteerit, koska hän tunsi opiskelijoita ennestään sekä oli pitänyt tämän kurssin lukuisia kertoja aikaisemmin. Näin ollen haastattelu suoritettiin asiantuntijahaastatteluna. Ennen varsinaisen kenttäkokeilun alkua kävin itse tutustumassa sekä opiskelijaryhmään että vastuuopettajan opetustyyliin. Seuraamistani tunneista kirjoitin muistiinpanot, joita käytin tukenani analysoidessani Ojansivun haastattelua.

Luku 6

Tutkimustulokset

Tutkimustuloksissa arvioidaan koko ryhmän tuloksia ja lisäksi nostetaan esille muutama opiskelija erikseen. Luvuissa 6.1 ja 6.2 tutkimustulokset keskittyvät opiskelijaryhmään. Tarkoituksena on vertailla tuloksia edellisten tutkimusten havaintoihin. Koko ryhmää koskevat tutkimustulokset on saatu tilastollisin menetelmin, kun taas yksittäistä opiskelijaa koskevat tulokset on saatu sisällönanalyysilla.

Aineiston opiskelijaryhmän jäsenet on koodattu siten, että tytöt ja pojat on jaettu erikseen. Tämän jälkeen kukin opiskelija on numeroitu siten, että koodinimeksi on saatu T tai P sukupuolen mukaan ja jokaiselle opiskelijalle on annettu numero, joka ilmoitetaan kirjaimen perässä (esim. Tyttö T5).

6.1 Loppukysely

Loppukysely saatiin kerättyä jokaiselta opiskelijaryhmän jäseneltä. Loppukysely on liitetty tutkimukseen liitteenä 1. Ennen loppukyselyn täyttämistä opiskelijoille kerrottiin monivalintakysymysten vaihtoehdot, kerrattiin käsite matematiikan kielentäminen ja heitä kehotettiin lukemaan vastaamisohjeet loppukyselyn alusta. Lisäksi painotettiin, että loppukyselyn sanalla kurssi tarkoitetaan ainoastaan kurssin trigonometristen funktioiden osuutta eikä koko Trigonometriset funktiot ja lukujonot -kurssia. Opiskelijoita rohkaistiin vastaamaan kyselyyn mahdollisimman totuudenmukaisesti ja heille kerrottiin, että vastaukset eivät tule vaikuttamaan kurssin arvosanaan. Osa opiskelijoista täytti loppukyselyn heti kokeen jälkeen, osa halusi pohtia vastauksia rauhassa ja palautti kyselyn vasta kokeenpalautuksen yhteydessä. Kuitenkin kaikki palauttivat loppukyselyn ennen kuin saivat tietää kurssiarvosanansa ja kokeensa tuloksen.

Taulukossa 6.1 on esitelty opiskelijoiden suhtautumista oppiaineeseen sekä opiskelijoiden käsitys kielentämisestä. Vastaukset on tulkittu niin, että opiskelija on hyväksynyt väitteen, jos hän on valinnut vaihtoehdon "väite pitää silloin tällöin paikkansa"(3), "väite pitää pääsääntöisesti paikkansa"(4) tai "väite pitää paikkansa"(5). Vastaavasti opiskelija on hylännyt väitteen vastaamalla "väite ei pidä paikkansa"(1) tai "väite ei pidä pääsääntöisesti paikkansa"(2). Suluissa olevat luvut kertovat, miten loppukyselyn väitteet on muutettu pisteiksi. Pisteiden avulla on pystytty laskemaan opiskelijoiden vastauksista keskiarvo ja keskihajonta. Näin ollen pystytään tulkitsemaan keskiarvon perusteella, onko väite pääsääntöisesti hyväksytty vai hylätty. Vastaavasti avoimet kysymykset on myös avattu taulukkoon 6.1 ja 6.2 siten, että vastaukset on luettu tarkasti, ja vastaus on tulkittu joko hyväksytyksi tai hylätyksi. Taulukossa oleva prosenttiosuus kertoo kuinka suuri osa opiskelijoista on hyväksynyt väitteen, kun taas suluissa oleva prosenttiluku kertoo väitteen hylänneiden osuuden. Prosenttiosuudet on laskettu erikseen pojille, tytöille ja koko ryhmälle. Prosenttilukujen yhteenlaskettu summa ei välttämättä ole 100 %, sillä osa opiskelijoista on jättänyt joihinkin kysymyksiin vastaamatta tai kirjoittanut, ettei osaa sanoa.

6.1.1 Opiskelijoiden suhtautuminen oppiaineeseen ja kirjalliseen kielentämiseen

Koska osa opiskelijoista vastasi heti kokeen jälkeen loppukyselyyn, on väitteeseen "koitko trigonometriset funktiot haastavaksi"saattanut vaikuttaa se, miltä opiskelijasta tuntui loppukoe. Kuitenkin tulos on merkittävä, sillä kaikista opiskelijoista 81 % pitää kurssia haastavampana kuin pitkä matematiikka yleensä. Mielenkiintoinen huomio on, että tytöt pitivät kurssia selvästi helpompana kuin pojat. Tytöistä yksikään ei vastannut, että väite pitää pääsääntöisesti paikkansa tai väite pitää paikkansa, kun taas pojista tämän mielipiteen jakoi 50 %. Koko opiskelijaryhmän keskiarvo tässä väitteessä oli 3,05 ja keskihajonta 1,12. Keskiarvon perusteella väite on siis hyväksytty.

Noin kolme neljästä hyväksyi väitteen "Pidän itseäni hyvänä matematiikassa". Tulos on linjassa aikaisempien tutkimusten kanssa. (vrt. esim. [21]) Tyttöjen ja poikien välille ei muodostunut suuria eroja. Tytöistä kukaan ei hyväksynyt väitettä täysin, mutta pojista 25 % vastasi väitteen pitävän paikkansa. Keskiarvo väitteelle oli 3,25 ja keskihajonta 1,16. Näin ollen väite on siis hyväksytty.

Tutkimuksessa ilmeni, että tutkimusryhmän pojat pitävät enemmän matematiikan opiskelusta kuin tytöt. Kolme neljästä vastasi pitävänsä matematiikan opiskelusta. Tämä ei ole kovin yllättävä tulos, koska kyseessä oli kuitenkin opiskelijaryhmä, joka on valinnut pitkän matematiikan ja lukenut sitä jo seitsemän kurssia. Tämä väite tuli hyväksytyksi keskiarvolla 3,52, ja keskihajonnaksi saatiin 1,08. Näin ollen tutkittava opiskelijaryhmä suhtautui myönteisesti matematiikan opiskeluun muutamaa poikkeusta lukuun ottamatta.

Tutkimusryhmän opiskelijat eivät pidä matematiikan opetusta yksipuolisena. Vain yksi opiskelija vastasi väitteen pitävän pääsääntöisesti paikkansa.

Taulukko 6.1: Opiskelijoiden suhtautuminen oppiaineeseen sekä näkemys kirjallisesta kielentämisestä. Prosenttiosuudet kertovat, kuinka moni opiskelijoista hyväksyi väitteen (V) tai avoimen kysymyksen (A).

	Tytöt	Pojat	Yhteensä
SUHTAUTUMINEN OPPIAINEESEEN	n=9	n=12	n=21
V: Trigonometristen funktioiden osuus oli minusta hankalampaa kuin muu pitkä matematiikka tähän mennessä.	66,7 % (33,3 %)	91,7 % (8,3 %)	81,0 % (19,0 %)
V: Pidän itseäni hyvänä matematiikassa.	77,8 % (22,2 %)	75,0 % (16,7 %)	76,2 % (19,0 %)
V: Pidän matematiikan opiskelusta.	66,7 % (33,3 %)	83,3 % (16,7 %)	76,2 % (23,8 %)
V: Matematiikan opetus on yksipuolista.	33,3 % (66,7 %)	50,0 % (50,0 %)	42,9 % (57,1 %)
A: Haluaisitko, että lukion matematiikka olisi monipuolisempaa?	22,2 % (55,6 %)	16,7 % (75,0 %)	19,0 % (66,7 %)
KIRJALLINEN KIELENTÄMINEN			
V: Kielentämistehtävät auttavat minua oppimaan matematiikkaa paremmin.	77,8 % (22,2 %)	66,7 % (33,3 %)	71,4 % (28,6 %)
V: Kielentämistehtävät auttavat muita oppimaan matematiikkaa paremmin.	100,0 % (0 %)	66,7 % (16,7 %)	81,0 % (9,5 %)
A: Ovatko kielentämistehtävät työläämpiä kuin tavalliset tehtävät?	66,7 % (22,2 %)	58,3 % (41,2 %)	61,9 % (33,3 %)
A: Aiotko käyttää jatkossa kielentämistä apuna tehtävien ratkaisuiden jäsentämisessä?	77,8 % (11,1 %)	66,7 % (22,2 %)	71,4 % (23,8 %)

Loput opiskelijoista eivät hyväksyneet väitettä ollenkaan tai vastasivat väitteen pitävän silloin tällöin paikkansa. Väitteen vastausten keskiarvo oli 2,43 ja keskihajonta oli suhteellisen pieni 0,68. Väite on siis keskiarvon perusteella hylätty. Ne muutamatkin, jotka pitivät matematiikan opiskelua yksipuolisena, eivät haluaisi monipuolistaa sitä. Vain 19,0 % vastaajista oli sitä mieltä, että lukion matematiikan opetusta tulisi monipuolistaa. Ideoiksi ehdotettiin esimerkiksi soveltuvuuden lisäämistä, kuten Poika P1: "matikassa voisi soveltaa jotakin asioita niin, että ei olisi koko ajan peruslaskemista". Osa opiskelijoista saattoi kokea lukion matematiikan monipuolistamisen siten, että matematiikka muuttuisi hankalammaksi. Esimerkiksi kommentit "Miten se voisi olla? Ihan tarpeeksi opiskeltavaa."(Poika P3) ja "Riippuu miten monipuolisempaa"(Poika P8) tukevat tätä huomiota. Opiskelijat siis mahdollisesti haluaisivat hiukan monipuolistaa matematiikkaa, mutta eivät haluaisi tehdä siitä enää yhtään työläämpää tai hankalampaa.

Tytöistä 77,8 % ja pojista 66,7 % vastasi, että kielentäminen auttaa heitä matematiikan oppimisessa ainakin osittain. Suurin osa kuitenkin vastasi väitteen pitävän silloin tällöin paikkansa. Väitteen vastauksen keskiarvo koko ryhmässä oli 3,05 ja keskihajonta 0,97. Keskiarvon perusteella opiskelijat ovat hyväksyneet väitteen. Tytöistä ainoastaan 2, eli 22,2 %, sanoi kielentämisen auttavan heitä ainakin pääsääntöisesti. Täsmälleen saman verran tytöistä vastasi, että väite ei pidä pääsääntöisesti paikkansa. Pojista taas 42 % vastasi väitteen pitävän pääsääntöisesti paikkansa. Ongelmana osassa vastauksista on selkeä käsitteen väärinymmärrys. Osa opiskelijoista on ymmärtänyt käsitteen matematiikan kielentäminen tarkoittavan ainoastaan luonnollista kieltä. Näin ollen he eivät ole ymmärtäneet, että yksi matematiikan kielentämisen tapa on matematiikan symbolikieli. Opiskelijoille selitettiin kielentämisen käsite, mutta selvästi asian olisi voinut tehdä vielä selkeämmäksi. Esimerkiksi Tyttö T4 vastasi, että kielentäminen ei pääsääntöisesti auta häntä ja perusteluksi hän kirjoitti: "jos on tarpeeksi välivaiheita laskussa, en näe tarpeellisena kirjoittaa sanoilla viereen mitä on tehty". Näin ollen tätä tutkimuksen tulosta voidaan pitää suuntaa antavana, mutta ei täysin luotettavana. Osa opiskelijoista koki, etteivät kielentämistehtävät auta heitä, koska esimerkiksi "jotkut asiat on vaikea kirjoittaa sanallisesti"(Poika P2). Näin ollen he kokivat, etteivät osanneet kurssin aikana tehtyjä kielentämistehtäviä eli kielentäminen ei auttanut heitä.

Väite "kielentämistehtävät auttavat muita oppimaan matematiikkaa paremmin"oli osalle opiskelijoista haastava. 57,1 % vastasi täsmälleen saman vastauksen kuin väitteeseen, sopiiko kielentämistehtävät heille itsellensä. Toisaalta 9,5 % jätti väitteeseen vastaamatta. Lisäksi vastaustilanteissa osa opiskelijoista kysyi, mistä he voivat tietää, mikä auttaa muita oppimaan. Osa vastasi taas, että kielentäminen auttaa heitä pääsääntöisesti oppimaan matematiikkaa paremmin, mutta vastasi, että muita se auttaa ainoastaan silloin tällöin. Näin ollen kysymyksen asettelu ei ollut välttämättä paras mahdollinen, tai sitten opiskelijat eivät aidosti pystyneet tietämään, mikä auttaa muita oppimaan ja mikä ei. Kaikki tytöt vastasivat kielentämistehtävien auttavan ainakin osittain muitakin, kun taas pojista 66,7 % oli tätä mieltä. Väitteen vastausten keskiarvo koko opiskelijaryhmällä oli 3,42 ja keskihajonta 0,77. Koska keskiarvon perusteella väite on hyväksytty, opiskelijoiden mielestä kielentäminen voi hyödyttää muita, vaikka itse he eivät koe hahmottavansa tehtäviä paremmin kielentämisen avulla.

Suurin osa opiskelijoista koki, että kielentämistehtävät ovat työläämpiä kuin tavalliset tehtävät. Tyttöjen ja poikien välisissä vastauksissa ei ollut suuria eroja. Tehtävät olivat työläämpiä, koska esimerkiksi osan opiskelijoista ajatus katkeaa, kun joutuu kirjoittamaan laskemisen sijasta. Toisena työtaakkaa selittävänä tekijänä mainittiin se, että sanallisen perustelun miettimiseen kuluu kauemmin aikaa kuin symbolisen kielen kirjoittamiseen.

Opiskelijoista 71,4 % vastasi käyttävänsä mahdollisesti kielentämistä jatkossa tehtäviä ratkaistessaan. Prosenttiluku on täsmälleen sama kuin väitteessä "kielentämistehtävät auttavat minua oppimaan matematiikkaa paremmin". Näin ollen opiskelijat vastasivat kahteen samankaltaiseen kysymykseen samalla tavalla, joten voidaan päätellä opiskelijoiden vastanneen kysymyksiin harkiten. Myös tyttöjen ja poikien väitteen hyväksymisprosentit molemmissa väitteissä ovat täsmälleen samat.

6.1.2 Opiskelijoiden käsitys kämmentietokoneista ja heistä sen käyttäjänä

Taulukossa 6.2 esitellään loppukyselyn ne tulokset, joiden aihealueena oli kämmentietokone. Itse kyselylomakkeessa käytettiin sanaa laskin puhuttaessa kämmentietokoneesta, mutta opiskelijat ovat tienneet kyselyyn vastatessaan, että kysymys on kurssin aikana käytetystä symbolisesta laskimesta eli kämmentietokoneesta. Kuitenkin taulukossa 6.2 on muunnettu tutkielman yhtenäisen linjan vuoksi sana laskin kämmentietokoneeksi.

Opiskelijat pitävät itseään tutkimuksen mukaan hyvinä laskimen käyttäjinä. Opiskelijoista 95,2 % hyväksyi väitteen ainakin osittain. Keskiarvo oli korkea 3,71 ja keskihajonta 0,78. Keskiarvon perusteella väite hyväksyttiin. Tytöistä yhtä lukuun ottamatta kaikki ja pojista kaikki hyväksyivät tämän väitteen ainakin osittain. Tämä tukee sitä, että suurimalla osalla on oma kämmentietokone ja he ovat käyttäneet sitä jo usean kurssin ajan, eli perustaidot ovat varmasti suurimmalla osalla hallinnassa. Toisaalta kenellekään kurssin opiskelijalle kämmentietokone ei ollut vieras, eli jokainen oli käyttänyt sitä jo aikaisemmin.

Lähes jokaisella oppitunnilla katsottiin ohjatusti kämmentietokoneen jonkinlainen ominaisuus. Myös kotona opiskelijoiden tuli tutkia kämmentietokoneiden ominaisuuksia. Näin ollen oli odotettavaa, että opiskelijoiden kämmentietokoneen käyttötaidot kehittyivät kokeilun aikana. Näin myös vastasi 76,2 % opiskelijoista. Kyselyn mukaan poikien käyttötaidot eivät kehitty-

Taulukko 6.2: Opiskelijoiden käsitys kämmentietokoneista sekä heistä sen käyttäjänä. Prosenttiosuuden kertovat, kuinka moni opiskelijoista hyväksyi väitteen (V) tai avoimen kysymyksen (A).

KÄMMENTIETOKONE	Tytöt n=9	Pojat n=12	Yhteensä n=21
V: Osaan käyttää hyvin kämmentietokonetta.	88,9 % (11,1 %)	100,0 % (0 %)	95,2 % (4,8 %)
V: Kämmentietokoneen käyttötaitoni kehittyivät tämän kolmen viikon aikana.	88,9 % (11,1 %)	66,7 % (33,3 %)	76,2 % (23,8 %)
V: Kämmentietokone auttaa minua hahmottamaan tehtäviä.	100,0 % (0 %)	75,0 % (25,0 %)	85,7 % (14,3 %)
V: Tehtävät, joissa saa käyttää kämmentietokonetta apuna, ovat minulle helpompia kuin tehtävät, joissa kämmentietokoneiden käyttö on kiellettyä.	88,9 % (11,1 %)	83,3 % (16,7 %)	85,7 % (14,3 %)
V: Kämmentietokone on vain työkalu, jolla säästyy päässälaskuvaivailta.	11,1 % (88,9 %)	50,0 % (50,0 %)	33,3 % (66,7 %)
A: Onko laskinten käyttöä liikaa matematiikan tunneilla yleensä?	11,1 % (77,8 %)	16,7 % (83,3 %)	14,3 % (81,0 %)
A: Oliko tällä kurssilla liikaa laskinten käyttöä matematiikan tunneilla?	11,1 % (77,8 %)	25,0 % (75,0 %)	19,0 % (76,2 %)

neet yhtä paljon kuin tyttöjen. Tämän osittain selittää esimerkiksi se, että osa pojista koki osaavansa jo kurssilla käytävät kämmentietokoneen ominaisuudet tai he kokivat pystyvänsä oppimaan ne itsenäisesti kotona. Hajonta kysymyksessä oli 1,17 ja keskiarvo korkea 3,48, eli väite hyväksyttiin.

Opiskelijoista 85,7 % vastasi, että kämmentietokoneen avulla he hahmottavat tehtäviä paremmin. Kaikki tytöt ja pojista kolme neljästä hyväksyi väitteen. Osa oli lisännyt vastaukseensa, että heidän mielestään kämmentietokone auttaa erityisesti kuvaajien hahmottamisessa. Vastausten keskiarvo oli 3,71 ja keskihajonta 1,10. Keskiarvon perusteella opiskelijat siis hyväksyivät väitteen.

Opiskelijat kokivat ilman kämmentietokoneen apua ratkaistavat tehtävät vaikeammaksi kuin tehtävät, joissa kyseisen apuvälineen käyttö oli sallittua. Koko opiskelijaryhmästä 85,7 % vastasi tehtävien, joissa saa käyttää kämmentietokonetta, olevan helpompia kuin ne, joissa sen käyttö on kiellettyä. Kuitenkin keskihajonta oli suhteellisen suuri, 1,15, ja keskiarvoksi saatiin 3,67. Väite siis hyväksyttiin. Tämä on mielenkiintoinen tulos siinä suhteessa, että yleensä tehtävät, joissa kämmentietokone on sallittu, ovat soveltavampia kuin tehtävät, joissa kämmentietokoneen käyttö on kielletty. Opiskelijat mahdollisesti tuntevat olonsa turvallisemmaksi saadessaan käyttää apuvälinettä, koska sen avulla he pystyvät esimerkiksi tarkastamaan laskunsa oikeiksi, kun taas ilman kämmentietokonetta he eivät välttämättä huomaa esimerkiksi huolimattomuusvirheitä yhtä herkästi. (vrt. [26])

Tyttöjen ja poikien mielipide jakautui selvästi erilailla väitteessä, jonka tarkoituksena oli pohtia kämmentietokonetta ainoastaan työkaluna, jonka avulla säästyy päässälaskuvaivalta. Puolet pojista oli sitä mieltä, että heillä kämmentietokone on ainoastaan tätä varten. Tytöistä taas 88,9 % hylkäsi väitteen ja näin ollen heille kämmentietokone merkitsee muutakin. Hajonta tämän väitteen vastauksissa oli 0,85 ja keskiarvo 2,29. Keskiarvon perusteella opiskelijat siis hylkäsivät väitteen.

Ainoastaan 14,3 % vastasi, että aikaisemmilla matematiikan kursseilla on ollut liikaa kämmentietokoneiden käyttöä. Opiskelijoiden osuus kasvoi hieman, kun kysyttiin, käytettiinkö tämän tutkimuksen aikana liikaa aikaa kämmentietokoneen käytön opetteluun. Opiskelijoista 19,0 % oli sitä mieltä, että vähempikin aika olisi riittänyt. Osa opiskelijoista perusteli tätä näkökantaansa esimerkiksi sillä, että heistä kämmentietokonetta ei ole vaikea käyttää, eli he pystyisivät opiskelemaan kyseiset asiat myös kotona. Toisaalta osa opiskelijoista sanoi osaavansa asiat jo, jolloin tunneilla toistetaan asiat, jotka he jo osaavat. Osa koki tylsänä myös sen, että kämmentietokoneen opettelussa väkisinkin tulee asioita toistettua, eli jo kerran koulussa opiskeltu asia toistetaan uudestaan. Kuitenkin suurin osa opiskelijoista oli ehdottomasti sitä mieltä, että oli hyvä, että tunneilla opiskeltiin kämmentietokoneen käyttöä, ja he kokivat hyötyneensä sen osalta kokeilun kolmesta viikosta.

6.2 Loppukoe

Loppukokeen analysointiin valittiin kaksi mielenkiintoista tehtävää, joiden erilaisia vastauksia analysoitiin. Ensimmäisen tehtävän tekee mielenkiintoiseksi se, että se oli loppukokeen ainoa tehtävä, jossa kämmentietokonetta ei saanut käyttää apuvälineenä. Toisaalta loppukokeen tehtävä numero 3 on mielenkiintoinen siksi, että tehtävänannossa on pyydetty avaamaan sanallisesti ratkaisun välivaiheita auki. Loppukokeen tarkoitus oli testata kurssin lopussa opiskelijoiden trigonometristen funktioiden osaaminen. Loppukoe on liitetty tutkimukseen liitteeksi 2. Vaikka kurssiin kuului myös lukujonojen osuus, opiskelijoille pidettiin lukujonojen osuuden jälkeen tätä aihealuetta käsittelevä koe, minkä vuoksi tämä kurssin lopussa järjestetty loppukoe ei sisältänyt lainkaan lukujonoja. Kuitenkin lopullisessa kurssiarvosanassa huomioitiin myös lukujonojen osuus. Lopullinen arvosana saatiin laskemalla ensimmäisen osuuden ja loppukokeen pisteet yhteen. Koska lukujonojen osuudessa oli ollut jo yksi erittäin haastava tehtävä, tähän kokeeseen ei tarvinnut sellaista enää tehdä. Näin arvosteluasteikko pysyi kohtuullisena koko kurssin näkökulmasta. Loppukokeen keskiarvo oli 17,1 ja maksimipistemäärä 30. Keskihajonta kokeessa oli 8,2. Loppukokeen pistemäärään lisättiin mahdollisesti hyvin tehdyistä projektitehtävistä 0-5 pistettä. Itse loppukoe oli kaksiosainen, eli ensimmäinen tehtävä oli pakollinen ja se ratkaistiin ilman kämmentietokonetta, minkä jälkeen loput neljä tehtävää viidestä ratkaistiin siten, että apuvälineenä sai olla myös kämmentietokone. Taulukkokirja sai olla koko kokeen ajan opiskelijoilla apuvälineenä. Jokainen tehtävä arvosteltiin pistein 0-6.

Loppukokeen alussa opiskelijat kielensivät enemmän kuin lopussa. Loppukoe oli opiskelijoiden mielestä pitkä, mikä voi osaltaan vaikuttaa siihen, että ajan lähestyessä loppua, myös välivaiheet ja luonnollinen kieli jäi helposti pois. Toisaalta ennen kokeen alkua opiskelijoita kannustettiin perustelemaan mahdollisimman selkeästi ratkaisunsa, joten voi myös olla, että ensimmäisissä tehtävissä tämä oli vielä hyvin muistissa. Toisaalta voi myös olla, että tehtävien mennessä vaikeammiksi, myös perusteluiden kirjoittaminen muuttui hankalammaksi.

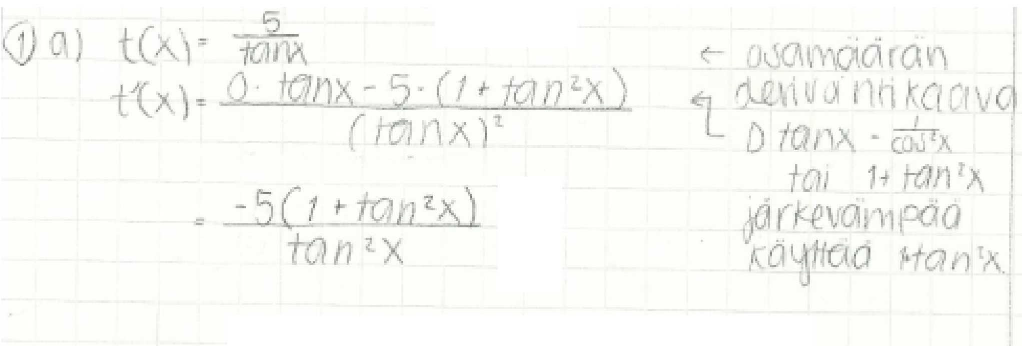
Ensimmäinen tehtävä kuvassa 6.1 tuli tehdä ilman kämmentietokonetta. Kurssin aikana ei tehty erillisiä tehtäviä, joissa olisi kielletty kämmentietokoneen käyttö. Opiskelijoille on kuitenkin ollut jo aikaisemmilta kursseilta tuttua, että kurssikoe rakentuu tehtävistä, joissa kämmentietokonetta voi käyttää ja tehtävistä, joissa ainoastaan taulukkokirja on sallittu. Ensimmäisen tehtävän keskiarvo oli 4,3 ja keskihajonta 1,2. Tulosta voidaan pitää pienoisena pettymyksenä, koska tehtävän ensimmäiset kaksi kohtaa olivat pelkkää derivointia. Kolmas kohta oli yksinkertainen, koska taulukkokirja oli opiskelijoilla käytössä koko ajan. Viimeisessä kohdassa ei haluttu derivoinnilla ratkaisua, mikä sai osan opiskelijoista hämilleen. Kuitenkin tämänkaltaisia tehtäviä oli harjoiteltu tunnilla ahkerasti. Opiskelijat olivat hyvin yksimieli-

1. a) Derivoi funktio $t(x) = \frac{5}{\tan x}$. (1p)
   b) Derivoi funktio $y(x) = 3\cos^3(2x)$. (2p)
   c) Laske funktion arvo, kun $\alpha = 45°$ ja $g(\alpha) = \sin(2\alpha) + \cos^2\alpha$. (1p)
   d) Vuorovettä voidaan mallintaa käyttäen funktiota $s(t) = 4\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) + 18$, missä s(t) kertoo hetkellä t meren etäisyyden loma-asunnostasi. Mikä on funktion suurin ja pienin arvo? Kuinka suuri meren liikettä kuvaavan funktion jakso on? Päättele ilman derivaattaa. (2p)

Kuva 6.1: Loppukokeen tehtävä numero 1.

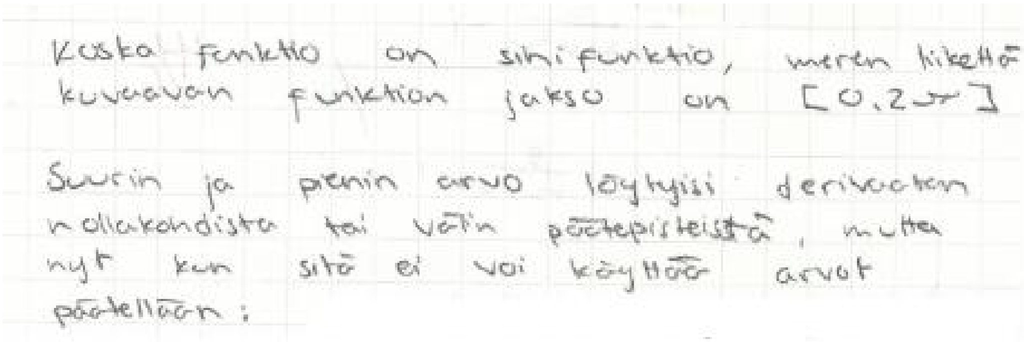
siä siitä, että tehtävät, joissa kämmentietokoneen käyttö on rajoitettua, ovat haastavampia kuin tehtävät, joissa kämmentietokoneen käyttö on vapaata. Ensimmäinen tehtävä ei poikennut siitä, mihin opiskelijat olivat aikaisemmilla kursseilla tottuneet tehtävissä, joissa kämmentietokonetta ei saa käyttää. Vaikka opiskelijat kokivat tämän tehtävän mahdollisesti haastavampana kuin osa kokeen muista tehtävistä, pistekeskiarvo oli kokeen tehtävistä suurin.

Ensimmäisessä tehtävässä opiskelijoille tuli paljon huolimattomuusvirheitä. Ainoastaan kaksi opiskelijaa onnistui saamaan täydet kuusi pistettä. Alhaisimmillaan tehtävästä saatiin kaksi pistettä (kolme opiskelijaa). Opiskelijat tekivät ensimmäisen tehtävän käyttäen paljon välivaiheita ja moni selosti luonnollisen kielen avulla tehtävän ratkaisua. Eniten opiskelijat käyttivät kommenttimallia ratkaisuissa, sillä sitä oli käyttänyt 12 opiskelijaa. Tästä esimerkkinä kuva 6.2, jossa Tyttö T7 on kirjoittanut ratkaisunsa välivaiheet sekä matematiikan symbolikielellä että luonnollisella kielellä symbolikielen viereen.



Kuva 6.2: Tyttö T7:n ensimmäisen tehtävän a-kohdan ratkaisu, joka noudattaa kommenttimallia.

Myös muitakin malleja käytettiin tasaisesti. Ainoa malli, jota opiskelijat eivät käyttäneet kokeessa, oli päiväkirjamalli. Tämä on toisaalta odotettavaa, koska koevastauksen rakenne on tarkkaan harkittu eikä niinkään


Koska funktio on sinifunktio, meren liikettä kuvaavan funktion jakso on $[0, 2\pi]$

Suurin ja pienin arvo löytyisi derivaatan nollakohdista tai välin päätepisteistä, mutta nyt kun sitä ei voi käyttää arvot päätellään:

Kuva 6.3: Tyttö T4:n ensimmäisen tehtävän d-kohdan ratkaisu, jossa alussa selostetaan luonnollisen kielen avulla tehtävän ratkaisu, jos apukeinona olisi saanut käyttää derivointia.

tajunnanvirtaa. Loppukyselyn ja loppukokeen kielentämisen välille löytyi yhteys. Opiskelijat, jotka vastasivat, etteivät hyödy kielentämisestä, eivät myöskään todennäköisemmin kielentäneet loppukokeessa. Heidän mallinsa noudatti standardimallia, mutta osassa matematiikan symbolikieli oli myös riisuttu minimiin. Kuitenkin tästä oli myös poikkeuksia. Osa opiskelijoista, jotka vastasivat, ettei kielentäminen auta heitä ja he eivät tulevaisuudessa tule käyttämään kielentämistä apuna tehtävien ratkaisussa, kielensi ensimmäisessä tehtävässä hyvin tarkasti myös luonnollista kieltä apuna käyttäen. Koska kohdassa d oli tehtävänantona ratkaista tehtävä ilman derivaattaa, osa opiskelijoista kirjoitti luonnollisen kielen avulla, miten he olisivat ratkaisseet derivaatan avulla tehtävän. Kuitenkin tehtävää oli yritetty tämän jälkeen ratkaista myös ilman derivaattaa, mutta vaihtelevalla menestyksellä. Kuvassa 6.3 Tyttö T4:n d kohdan tehtävän alku. Opiskelijat ovat näin tehdessään selkeästi ajatelleet, että ratkaisuksi ei kävisi matematiikan symbolikielellä derivoiminen, mutta ovat kokeilleet, onnistuisiko lisäpisteiden saaminen kirjoittamalla luonnollisella kielellä toisen ratkaisun malli.

Loppukokeen tehtävä numero 3 on esitetty kuvassa 6.4. Tehtävään oli teh-

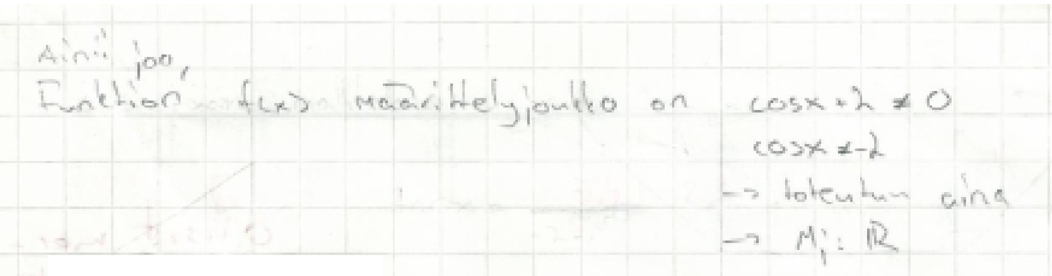
3. Määritä funktion $f(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos x + 2}$ suurin ja pienin arvo, kun $0 \leq x \leq \pi$. Kirjoita välivaiheita myös sanallisesti auki. Likiarvoista saa 5 pistettä ja tarkoista arvoista 6 pistettä.

Kuva 6.4: Loppukokeen tehtävä numero 3.

ty kompastumisen paikka, sillä tarkoista arvoista oli jaossa kuusi pistettä ja likiarvoista ainoastaan viisi pistettä. Pelkästään kämmentietokonetta käyttämällä päätyi helposti likiarvoon, sillä tehtävässä on monta välivaihetta. Ainoastaan kaksi opiskelijaa teki kuuden pisteen suorituksen tässä tehtävässä.

Tehtävän pistekeskiarvo oli 3,1 ja keskihajonta 1,8. Vaihteluväli oli 0-6 pistettä. Tehtävänannossa pyydettiin erikseen kirjoittamaan myös sanallisesti välivaiheita auki. Kuitenkaan arvostelussa ei vähennetty pisteitä, jos pyyntöä ei ollut noudatettu. Toisaalta hyvistä ja selkeistä ajatuksista, jotka oli kirjoitettu paperille, saattoi saada pisteitä. Tehtävän vastauksen saa suoraan kämmentietokoneen avulla, mutta pelkkä ratkaisun antaminen ei riittänyt täysien pisteiden saamiseen.

Tehtävä itsessään oli melko pitkä ratkaista, jos kirjoitti paljon välivaiheita näkyviin. Osittain varmasti tämä ajoi myös minimaaliseen luonnollisen kielen käyttöön, koska matematiikan symbolista kieltä tuli käyttää tehtävässä paljon. Tämän tehtävän ratkaisuissa suosittiin standardi-, kertomus- ja kommenttimallia. Kun ensimmäisessä tehtävässä suurin osa opiskelijoista käytti kommenttimallia, nyt erityisesti kertomusmalli oli suosiossa. Tehtävä kolme oli ensimmäinen tehtävä, jossa alkoi näkyä kurssin opettajan kielentämisen vaikutus erityisen selkeäsi. Oppituntien esimerkeissä opettaja käytti paljon myös tunteita kuvaavia ilmauksia tehtävän ratkaisun viereen kuten "jipii, yksi ratkaisu löytyi"tai "hmm, mitkä näistä ratkaisuista kelpaavat tähän tehtävään". Ilmauksia voitaisiin pitää päiväkirjamalliin sopivana, mutta muuten tehtävä ei noudattanut päiväkirjamallille tyypillistä runkoa. Esimerkiksi Poika P12 unohti tehtävän alusta määrittelyjoukon, joten hän lisäsi sen tehtävän puoleen väliin, kuten kuvassa 6.5 huomataan. Kyseinen opiskeli-



Kuva 6.5: Poika P12:sta tehtävän kolme ratkaisun osa, jossa hän määrittää tehtävän alusta unohtuneen määrittelyjoukon.

ja vastasi kysymykseen kielentämisen käytöstä jatkossa jyrkällä mielipiteellä "en varmasti". Kuitenkin tehtävän ratkaisusta näkee, että kielentäminen tulee melko luonnostaan opiskelijalta tietyissä tilanteissa.

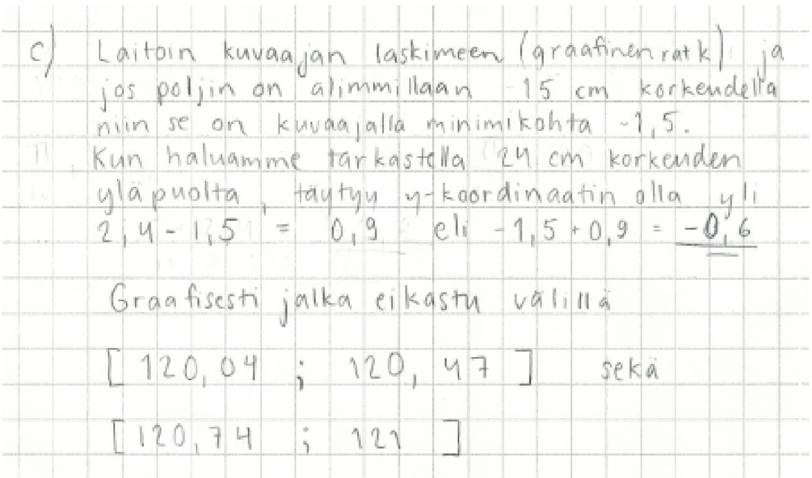
6.3 Opiskelijoiden kirjallinen kielentäminen

Osalla opiskelijoista oli suuria vaikeuksia tuoda ratkaisuun mukaan myös luonnollista kieltä. He toivat sen esille itse kirjoittamalla, että kielentäminen tuntuu vaikealta. Toisaalta hankaluus myös näkyi opiskelijoiden tuotoksista. Osa ei kurssin aikana käyttänyt luonnollista kieltä muuten kuin puhtaissa kielentämistehtävissä. He eivät esimerkiksi projektitehtävissään kuvanneet tehtävänannonmukaisesti tarkasti eri ratkaisun vaiheitaan, vaan noudattivat enemmänkin standardimallia. Nämä opiskelijat kokivat kielentämisen heille hyödyttömäksi ja osalle saattoi jäädä epäselväksi jopa käsite matematiikan kielentäminen.

Toisaalta osalle opiskelijoista kirjallinen kielentäminen ei tuottanut minkäänlaista haastetta, vaan heille oli hyvin luontaista ja helppoa kuvata matematiikan symbolikieltä myös kahdella muulla kielellä. Heidän perustelunsa sekä matematiikan symbolikielellä että luonnollisella kielellä ovat hyvin tarkkoja ja luonnollisessa kielessä on käytetty oikeita matematiikan termejä.

Kun opiskelijat joutuivat käyttämään itse tutusta symbolikielestä poikkeavaa kieltä, myös heidän ajatusten ja käsitteiden virheellisyys tuli paremmin esille. Esimerkiksi käsitteitä arvojoukko ja määrittelyjoukko käytettiin monissa opiskelijoiden ratkaisuissa siten, että voitiin olettaa opiskelijan luulleen sanojen tarkoittavan samaa asiaa. Kurssin aikana oli kotitehtäviä, joissa kämmentietokone antoi jonkinlaisen vastauksen ja opiskelijoiden tuli pohtia, mistä tämä ratkaisu tulee. Näissä tehtävissä opiskelijoiden selityksistä näki, kuinka opiskelija saattaa muodostaa teorian asiasta, joka on enemmänkin havainto.

Kun opiskelijoiden tuli selittää, mitä tehtävässä tulee tapahtumaan seuraavaksi tai mitä ratkaisussa on tapahtunut, he käyttivät verbien passiivimuotoa. Kuitenkin tehtävän ratkaisun luonnollisessa kielessä saattoi ilmestyä jossain vaiheessa tekijä "minä". Mitä vapaammat kädet opiskelijoille antoi selityksen suhteen, sitä enemmän he alkoivat käyttää tekijää ratkaisussa. Kuvassa 6.6 tehtävän ratkaisija on käyttänyt alusta asti tekijänä itseänsä. Toinen mielenkiintoinen huomio on puhekielen käyttö ratkaisuissa. Opiskeli-


c) Laitoin kuvaajan laskimeen (graafinen ratk) ja
jos poljin on alimmillaan 15 cm korkeudella
niin se on kuvaajalla minimikohta -1,5.
Kun haluamme tarkastella 24 cm korkeuden
yläpuolta, täytyy y-koordinaatin olla yli
2,4 - 1,5 = 0,9 eli -1,5 + 0,9 = -0,6
Graafisesti jalka ei kastu välillä
[120,04 ; 120,47] sekä
[120,74 ; 121]

Kuva 6.6: Tyttö 5:n projektitehtävä ykkösen c-kohdan ratkaisu.

jat eivät pyri kirjoittamaan äidinkielellisesti oikein, vaan ennemminkin pyrkivät kirjoittamaan juuri niin kuin ajattelevat asian ratkaistessaan tehtävää.

6.4 Kurssin opettajan haastattelu

Kurssin vastuuopettajana toimi Timo Ojansivu. Hänen haastattelunsa toteutettiin sähköpostin välityksellä. Haastattelun tarkoitus oli saada vastuuopettajan näkemys kenttäkokeilusta sekä kysyä hänen mielipidettään siitä, miten opiskelijat suhtautuivat kielentämisen harjoitteluun. Ainoastaan neljä tämän tutkimukseen osallistuneista ei ollut osallistunut aiemmin hänen kursseilleen. Noin puolet tutkimukseen osallistuneista opiskelijoista oli ollut jo aikaisemmin Ojansivun kursseilla useammin kuin kerran, eli opettaja tunsi heidät jo kurssin alussa varsin hyvin. Koska kurssilla käsiteltiin lukujonot ennen tätä tutkimusta, oli opettaja ehtinyt jo rauhassa tutustumaan opiskelijoihin usean viikon ajan ennen itse kenttäkokeilua. Näin ollen hän oli saanut jo jonkinasteisen kuvani heidän työskentelystään ja motivaatiostaan.

Kenttäkokeilun ja tutkimukseen osallistumisen Ojansivu koki miellyttävänä ja innostavana. Hän ei kokenut työlääksi toteuttaa minun suunnitelmiani. Hän koki tutkimuksen aiheen helposti myöhemmin opetuksessa hyödynnettäväksi. Kenttäkokeilun myötä syntynyttä materiaalia Ojansivu aikoo käyttää myöhemmin opetuksessaan hyödyksi. Lisäksi hän koki antoisana tutkimuksen myötä käydyt keskustelut esimerkiksi käytännön toteutuksista. Kämmentietokoneen käytön suunnittelua hän piti myös opettavaisena. Ojansivu ei itse ole nähnyt opiskelijoiden vastauksia kenttäkokeilusta, mutta hänen mielestään noin puolet innostui kokeilusta, minkä johdosta he olivat valmiita tekemään enemmän töitä kuin normaalisti toteutetun kurssin aikana. Osasyyksi siihen, että kaikki eivät innostuneet kokeilusta, hän tarjoaa esimerkiksi sen, että kenttäkokeilu vaati opiskelijoilta paljon ylimääräistä työtä.

Ojansivun mukaan hän ei ollut ennen tutkimukseeni osallistumista tarkasti perillä käsitteestä matematiikan kielentäminen. Kuitenkin hän on kielentänyt ainakin jonkin verran omasta mielestään aikaisemmin opetuksessaan. Tätä tukee myös kenttäkokeilusta saadut tutkimustulokset. Esimerkiksi itse huomasin seuratessani tunteja kurssin lukujonojen osuudessa, jossa tämä kenttäkokeilu ei ollut vielä alkanut, Ojansivun käyttävän kommenttimallille tyypillistä rakennetta tuntiesimerkkien läpikäynnissä. Lisäksi hän on käyttänyt itse lanseeraamaansa matematiikan sisäistä kielentämistä. Tällä hän tarkoittaa matemaattisten ratkaisumallien vertaamista keskenään, mitkä sinänsä eivät liity toisiinsa matemaattisesti, mutta joiden vertaaminen saattaa auttaa osaa opiskelijoista hahmottamaan uutta asiaa paremmin. Esimerkkinä tällaisesta vertaamisesta Ojansivu nostaa yhtälöt $sin(2x+1) = sin0,35$ ja $4^{2x+1} = 4^{0,35}$. Hän haluaa käyttää myös jatkossa matematiikan kielentämistä hyödyksi opetuksessaan. Osittain tähän voi vaikuttaa se, että hänelle matematiikan kielentäminen oli jo jossain määrin tuttua ennen tutkimusta. Tulevaisuudessa Ojansivu aikookin käyttää kielentämistä opetuksessaan myös tietoisesti eikä ainoastaan vaistonvaraisesti, kuten hän on aikaisemmin kokenut käyttäneensä.

Kämmentietokoneiden käyttöä Ojansivu sanoo opettaneensa melko paljon. Sammon keskuslukiolaisista lähes jokaisella pitkän matematiikan opiskelijalla on kämmentietokone ja lopuille on mahdollista tarjota tuntitilanteita varten harjoitteluun kyseinen laite. Tämän vuoksi hän kokee osittain myös velvollisuudekseen opettaa niiden käyttöä, koska miksi muuten opiskelijat olisivat hommanneet kalliin laskimen, josta myös ylioppilaskirjoituksissa on suuri etu. Kenttäkokeilussa hän kuitenkin koki pohtineensa minun kanssani enemmän kuin tavallisella kurssilla kämmentietokoneen käytön niveltämistä muuhun opetukseen. Tulevaisuudesta kämmentietokoneiden käytön suhteen Ojansivu ei ole täysin varma, sillä esimerkiksi uudistuvat ylioppilaskirjoitukset ja uusi opetussuunnitelma tulevat lopullisesti vasta määräämään kämmentietokoneen roolin lukio-opetuksessa. Kuitenkin hän suhtautuu maltillisesti kämmentietokoneiden käyttöön, sillä hänen mielestään sille ei saa antaa hallitsevaa asemaa vaan sen pitää ennemminkin tukea matemaattista ajattelun kehittymistä ja elävöittää opetusta. Toisaalta Ojansivu sanoo kämmentietokoneiden käytön opettelun lisääntyneen hänen oppitunneillaan koko ajan ja kenttäkokeilun vain vahvistaneen tätä kehitystä.

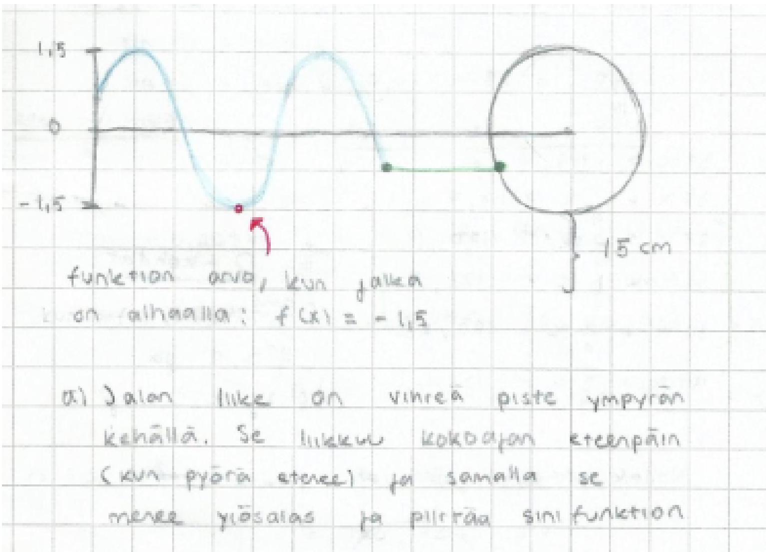
6.5 Kolme erilaista opiskelijaa

Seuraavaksi tarkastelussa on kolmen opiskelijan suoritukset. Tarkoitus ei ollut luoda ryhmiä, johon jokainen luokan opiskelija kuuluisi, vaan eritellä erilaisia yksilöitä ja heidän suorituksiaan ja kokemuksiaan matematiikan kielentämisestä. Opiskelijoiksi valikoitui aktiivisia opiskelijoita, koska vain heiltä saatiin analysoitavaa aineistoa.

6.5.1 Tyttö T8

Tyttö T8 on aikaisemmilla kursseilla saanut arvosanoja hyvästä erinomaiseen. Tämän kurssin lopullinen arvosana oli 10 eli erinomainen. Kurssin aikana kerätyistä kotitehtävistä laskettuna tytön aktiivisuusprosentti oli 82,6 %. Hän palautti molemmat projektitehtävät, joista hän saikin neljä pistettä lisää hänen koepistemääräänsä, joka oli 29,5 pistettä. Tällöin hänen kokonaispisteensä nousi 33,5 pisteeseen, joka oli enemmän kuin trigonometrisen funktioiden loppukokeen maksimipisteet. Tyttö T8 vastasikin, että trigonometriset funktiot eivät olleet hankalia hänelle. Tyttö T8 pitää itseään hyvänä matematiikassa ja nauttii matematiikan opiskelusta. Oppitunneilla hän ei ollut erityisen aktiivinen, mutta seurasi opetusta.

Ristiriitaisuus syntyy kuitenkin tyttö T8:n vastauksista kielentämiseen liittyviin kysymyksiin. Hän on vastannut, että kielentämistehtävät eivät auta häntä pääsääntöisesti oppimaan matematiikkaa paremmin, koska hän ei opi kirjoittamalla ja ajatus katkeaa, kun hän kirjoittaa. Hän kuitenkin pitää piirtämisestä, koska lähes jokaiseen tehtävään hän on käyttänyt kuviokieltä, jos se vain mitenkään sopii tehtävänantoon. Esimerkiksi kuvassa 6.7 hän on piirtänyt projektitehtävä 1:n (liite 3) a-kohtaan tilannetta selkeyttävän kuvan, jossa hän käyttää värejä apuna havainnollistuksena. Tyttö T8 käyt-



Kuva 6.7: Tyttö T8:n projektitehtävä ykkösen ratkaisun osa, jossa hän käyttää kuviokieltä selkeyttääkseen ratkaisuansa.

tää kuviokieltä, vaikka sitä ei olisi erikseen tehtävässä pyydetty (projektitehtävässä voidaan pitää tehtävänantoon kuuluvana selventää mahdollisimman hyvin ajatuksiansa). Hän on selkeästi opiskelija, joka ei niinkään opi kielentämistehtävien luonnollisen kielen osuudesta, mutta joka oppii kuviokielellä. Näin ollen hänen ratkaisuissaan on multisemiotiikkaa kuviokielen kautta (vrt. 3.1) Hän itse kirjoittaa, ettei pidä kirjoittamisesta ja on hidas siinä, joka saa tuntumaan kielentämistehtävät työläämmiltä kuin tavalliset tehtävät. Tehtävien ratkaisussa tämä näkyykin siten, että matematiikan symbolikieltä tai kuviokieltä ei ole säästelty, mutta luonnollista kieltä löytyy minimaalisen vähän.

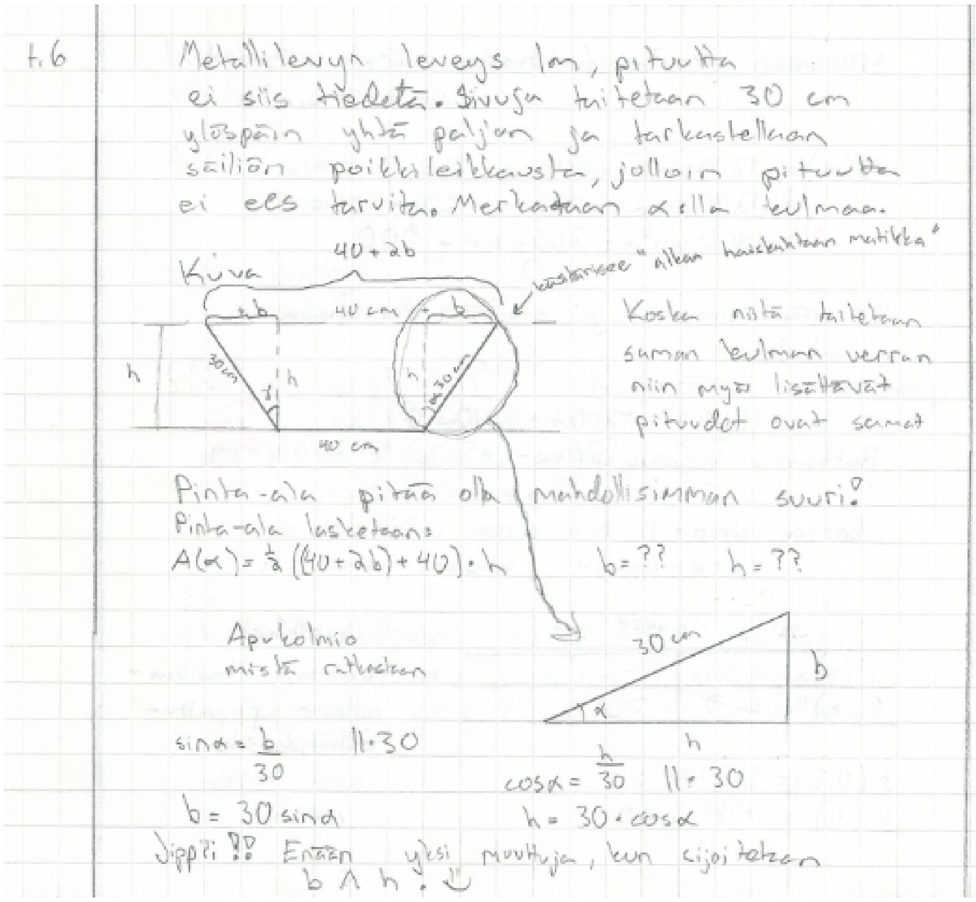
Tyttö T8 vastasi kämmentietokonetta käsitteleviin kysymyksiin ja väitteisiin samalla tavoin kun moni tutkimukseen osallistunut poika. Hän koki osaavansa käyttää kämmentietokonetta hyvin, ei kokenut käyttötaitojensa parantuneen kolmen viikon aikana ja hänestä kämmentietokonetta käytettiin ehkä jopa liikaa, koska "ei laskin ole niin vaikea". Hän oppii hahmottamaan kämmentietokoneen avulla tehtäviä, mikä sopii esimerkiksi siihen, että kuviokieli tukee hänen matematiikan oppimistaan. Kämmentietokoneen avulla hän pystyy piirtämään ja hahmottelemaan kuvia, joiden piirtäminen käsin voisi tuottaa vaikeuksia. Tyttö T8 on siis opiskelija, jolle on hyötyä kämmentietokoneen käytöstä.

6.5.2 Poika P8

Poika P8 on kiinnostunut matematiikasta ja hän on aktiivinen tunneilla. Viimeisestä viidestä kurssista hän on saanut arvosanaksi 10. Loppukokeesta hän sai 26,5 pistettä, mutta molemmista projektitehtävistä saadut viisi pistettä auttoi hänet kokonaispisteisiin 31,5, joka oli enemmän kuin maksimipistemäärä. Hänen kotitehtävien aktiivisuusprosenttinsa oli täysi 100 %. Hän piti trigonometristen funktioiden osuutta silloin tällöin hankalampana kuin aikaisempi hänen opiskelemansa pitkä matematiikka. Hän pitää itseänsä hyvänä matematiikassa ja pitää sen opiskelusta. Silti hän näkee matematiikan opetuksen silloin tällöin yksipuolisena.

Poika P8 kuului selkeästi niihin opiskelijoihin, jotka sisäistivät erittäin hyvin, mitä matematiikan kielentäminen on. Hänelle ei tapahtunut kehitystä kielentämisessä, sillä jo ensimmäisistä kerätyistä kotitehtävistä lähtien ratkaisuissa on käytetty hyvin paljon sekä matematiikan symbolikieltä, kuviokieltä että luonnollista kieltä. Hänen ratkaisuistaan näkyy, että hän lähestyy jokaista tehtävää multisemioottisesti eli käyttäen kaikkia kolmea kieltä monipuolisesti. Hänen mielestään luonnollisen kielen käyttö tehtävissä on helppoa. Hän kertoo käyttäneensä haastavissa tehtävissä jo ennen tätä tutkimusta kielentämistä tehtävän ratkaisuissa. Tämä ilmeni myös kokeilun aikana, sillä mitä hankalampi tehtävä oli, sitä enemmän Poika P8 käytti luonnollista kieltä ja kuviokieltä symbolikielen tukena. Hän ei koe kielentämistehtäviä työläämmiksi kuin muut tehtävät. Hän käytti loppukokeessa jokaisessa tehtävässä paljon luonnollista kieltä ratkaisun symbolisen kielen ohella. Sekä kommenttimalli että kertomusmalli esiintyvät hänen ratkaisuissansa. Toisaalta hän esittää kaikki mallit päiväkirjamallin tyylisesti kirjoitettuna, eli hän käyttää runsaasti puhekieltä ja lisää tehtävään kuulumattomia huomautuksia. Toisaalta päiväkirjamallissa kuviokieltä ja luonnollista kieltä käytetään ratkaisijan joutuessa ongelman eteen. Poika P8 ei kuitenkaan yleensä käytä luonnollista kieltä sellaisissa kohdissa, joissa voitaisiin ajatella hänen joutuneen ongelman eteen, vaan hän esimerkiksi kommenttimallin tyyliin selostaa symbolisen kielen viereen ratkaisua luonnollisella kielellä. Hän selkeästi nautti saadessaan kirjoittaa paperille ajatuksensa ja ratkaisunsa. Kuvassa 6.8 on loppukokeen tehtävän 6 alkupäätelmä, jossa poika P8 muodostaa itsellensä pinta-alan funktion. Kuvasta 6.8 voi nähdä hänelle tyypillistä huumorin käyttöä tehtävän ratkaisussa, kuten opettajalta lainattu lausahdus "alkaa haiskahtaan matikka". Myös tunnetilaa kuvaava ilmaisu löytyy muodossa "Jippii!!".

Tutkimuksessa ilmeni, että poika P8 pitää omia kämmentietokonetaitojansa hyvinä, mutta lukion alussa kyseinen apuväline ei helpottanut hänen oppimistansa. Hän kertoo, että nykyään kämmentietokone tukee hänen oppimistansa ja auttaa silloin tällöin hahmottamaan tehtäviä, mutta aluksi näin ei ollut. Hän teki kämmentietokoneen saatuaan virheen laskemalla kaiken sen avulla, jolloin perussäännöt unohtuivat. Hänen mielestänsä kurssilla ei käy-



Kuva 6.8: Poika P8:n loppukokeen tehtävä 6:n ratkaisun osa, jossa hän muodostaa kysytyn pinta-alan funktion.

tetty liikaa aikaa kämmentietokoneen käytön opettelemiseen ja hän kokee kämmentietokoneen käyttötaitojensa kehittyneen tutkimuksen aikana.

6.5.3 Tyttö T5

Tyttö T5 on aikaisemmista matematiikan kursseista saanut suurimmasta osasta tyydyttävän tai hyvän arvosanan. Hän osallistui aktiivisesti tuntikeskusteluihin ja tämän kurssin tehtävistä hän palautti 82,6 %. Loppukokeesta tyttö T5 sai 18,5 pistettä. Projektitehtävistä hän sai neljä pistettä eli kokonaispistemäärä oli 22,5 pistettä 30:stä. Näin ollen hänen lopullinen kokonaisarvosananansa on kiitettävä, eli hän onnistui parantamaan suoritustansa aiemmista kursseista. Tyttö T5:n mielestä trigonometristen funktioiden osuus oli silloin tällöin haastavampaa kuin muut matematiikan kurssit ja hän pitää itseään pääsääntöisesti hyvänä matematiikassa ja nauttii siitä pääsääntöisesti.

Kielentämistehtävät auttoivat Tyttö T5:a huomaamaan, että luonnollisen kielen selityksen avulla hän oppii ja ymmärtää asiat paremmin. Hänen mielestään kielentäminen auttaa häntä paljon ja hän kokee, että siitä voisi olla myös muille apua. Tyttö T5 ei koe kielentämistehtäviä työläämmiksi kuin tavalliset tehtävät. Hän harjoitteli kurssin aikana paljon kielentämistä ja teki paljon harjoitustehtäviä siihen liittyen. Aluksi hänen ongelmanaan luonnollisen kielen kanssa oli se, että hän ei tiennyt mikä "kelpaa"selitykseksi tehtäviin. Yksi syy hyvään kurssimenestykseen on se, että kielentämistehtävät auttoivat häntä ymmärtämään asian paremmin ja hän oppi itselleen sopivan tavan opiskella matematiikkaa. Luonnollista kieltä hän käytti eniten kommenttimallin mukaisesti eli symbolisen kielen sivussa. Malli tyttö T5:n kielentämisestä on kuvassa 6.6

Kämmentietokonetaitojaan Tyttö T5 ei pidä kovin hyvinä, mutta koki, että tämän kurssin kaltaisesta opetuksesta oli hänelle paljon hyötyä. Hän koki kurssilla hyväksi sen, että kämmentietokonetta opeteltiin myös oppitunneilla, koska kämmentietokoneen käytöstä on hyvä saada ohjeita, jotta siitä saa kaiken mahdollisen hyödyn irti. Kämmentietokone auttaa häntä hahmottamaan tehtäviä. Lisäksi hän kokee, että tehtävät, joissa kämmentietokone on sallittu apuväline, ovat helpompia kuin tehtävät, joissa kämmentietokone ei ole sallittu.

Luku 7

Pohdinta ja johtopäätökset

7.1 Johtopäätökset

Kokeilun aikataulu oli tiukka ja itse kenttäkokeilu oli aikajaksoltaan lyhyt. Opetuskokeilun opiskelijajoukko oli pieni (n=21). Tuloksia ei voi suoran yleistää tutkittavan joukon pienestä lukumäärästä johtuen, mutta tulokset ovat sopusoinnussa aikaisempien tutkimusten kanssa (muun muassa [24], [20], [23]). Näin ollen tuloksia voidaan pitää suuntaa antavina. Kaikkia opiskelijoita luonnollisen kielen tuki ei auta oppimaan matematiikkaa paremmin. Kuitenkin myös tässä tutkimuksessa löytyy yksilöitä, jotka näkevät eri kielten avulla matematiikan helpompana ja oppivat ymmärtämään matematiikkaa eri tavalla.

Joutsenlahti sai tutkimuksessaan yliopisto-opiskelijoiden kanssa tuloksen, jossa opiskelijat pitivät kielentämisestä enemmän ja kokivat sen hyödyllisemmäksi kuin tämän tutkimuksen opiskelijat. [20] Tutkimuksia ei voida suoraan kuitenkaan verrata, koska esimerkiksi tutkittavat poikkeavat iältään ja koulutusasteeltaan. Aihealueet, joita opiskellaan, saattavat erota toisistaan paljon. Opiskelijat, jotka tässä tutkimuksessa olivat mukana, näkivät jo ennen kokeilua kielentämistä oppikirjoissa ja aikaisemmilla oppitunneilla. Tätä tukee esimerkiksi lehtori Ojansivun haastattelu sekä se, että Poika P8 oli löytänyt luonnollisesta kielestä hänelle sopivan oppimistavan jo ennen kokeilun alkua. Näin ollen opiskelijoilla ei välttämättä ollut käsitystä, miltä näyttäisi ratkaisu, jossa käytetään minimaalisesti matematiikan kielentämistä. Kuitenkin suurin osa opiskelijoista on sitä mieltä, että kielentäminen on hyödyllistä ja auttaa sekä heitä itseään että muita. Tutkimuksen alussa oletuksena oli, että matematiikan kielentäminen auttaisi erityisesti aikaisemmin arvosanalla hyvä tai tyydyttävä suoriutuneita opiskelijoita pitkän matematiikan oppimisessa. Tutkimuksessa kuitenkin ilmeni, että siitä on apua myös kiitettävästi tai erinomaisesti suoriutuneille opiskelijoille, mutta myös välttävästi tai sitä huonommin suoriutuneille. Näin ollen toiseen tutkimusongelmaan "oppivatko opiskelijat paremmin, kun he joutuvat tekemään kielentämistehtäviä niin sanottujen tavallisten tehtävien ohella?"saatiin vastaukseksi että kyllä osittain. Tutkimuksessa nousi esille yksilöitä, jotka kokivat oppivansa kielentämistehtävien avulla paremmin ja suoriutuivat kurssista aikaisempia kursseja paremmalla arvosanalla. Toisaalta kenttäkokeiluun osallistuneista opiskelijoista löytyi myös niitä, jotka eivät pystyneet parantamaan suoritustansa kielentämistehtävien avulla.

Toisaalta lukioon kohdistuvassa Joutsenlahden tutkimuksessa 93 % vastaajista havaitsi, että vaikka kielentämistehtävä ei välttämättä auta itseä, muita se voi auttaa. [23] Tämän tutkimuksen vastaava prosentti oli 81,0 %. Opiskelijoilla oli vaikeuksia hahmottaa tätä kysymystä tai sitä, mistä he voisivat päätellä mikä muita auttaa oppimaan. Tähän voi vaikuttaa muun muassa se, että tässä tutkimuksessa käytettävä koulu on suuri lukio. Vaikka opettaja tunsikin opiskelijat ennen kurssin alkua, opiskelijat eivät välttämättä tunteneet toisiaan. Näin ollen opiskelijoille ei välttämättä muodostu kuvaa siitä, miten joku oman kaveripiirin ulkopuolelta voi oppia matematiikkaa, koska jokaisella kurssilla on eri opiskelijat. Vaikka tunneilla oli erittäin hyvä vuorovaikutus, yksi kurssi on ajallisesti kuitenkin melko lyhyt, jotta opiskelijalle jäisi kuva kaikista muista 20 opiskelijasta ja heidän oppimistyyleistänsä. Olisiko lukiolaisen kuitenkin hyödyllistä tietää, että matematiikassa on erilaisia oppimistapoja aivan kuten muissakin aineissa? Näin ollen jokainen voisi löytää itsellensä toimivan ja mielekkään tavan opiskella matematiikkaa.

Tutkimuksessa osoittautui, että osalle opiskelijoista oli hankalaa kuvata ratkaisutapaansa muuten kuin matematiikan symbolikielellä. He kokevat muiden kielten käytön työläämmäksi ja joskus jopa mahdottomaksi. Perustelut ovat paikoitellen hyvinkin vajavaiset ja heikot. Osassa ratkaisuista voidaan miettiä, osaavatko opiskelijat ratkaista tehtävän ulkoa tietyllä tavalla ja näyttää tämän matematiikan symbolisella kielellä. Kun heidän tarvitsee selittää, miksi he tekevät ratkaisuprosessissa jotakin, perustelu saattaa olla aivan väärillä termeillä kuvailtu tai osittain jopa virheellinen. Pelkkää matematiikan symbolikieltä käytettäessä tämä asia ei ilmene, joten opettajien pitää kehittää opetustaan, jotta he pystyvät havaitsemaan ja korjaamaan opiskelijoiden käsityksiä. Näin ollen ensimmäiseen tutkimusongelmaan saatiin tutkimuksen aikana vastaus, että opiskelijoiden taito kuvata matemaattista ajatteluaan vaihtelee suuresti. Osa lukioikäisistä pystyy kuvaamaan hyvinkin seikkaperäisesti ajatteluaan, mutta osalle ajatuksien ilmaisu kirjallisesti tuottaa vaikeuksia.

Tutkimuksen aikana opiskelijat pitivät hyvänä sitä, että kämmentietokoneen käyttöä opeteltiin tunneilla. Tämä tulos on linjassa Fauren ja Goarinin tekemän tutkimuksen kanssa. [24] Näin oletettiin myös ennen tutkimusta. Tutkimukseen osallistuneiden opiskelijoiden mielestä kämmentietokoneen avulla he hahmottavat tehtäviä paremmin, jolloin myös heidän matematiikan osaamisensa kehittyy. Tämä on tutkimuksen vastaus neljänteen tutkimusongelmaan.

Viidenteen tutkimusongelmaan saatiin vastaukseksi, että lukiolaiset kokevat kämmentietokoneen käytön harjoittelemisen luokkatilanteissa tarpeelliseksi. Tästä syystä kämmentietokoneen käytön opettamista on syytä harkita opetettavaksi myös luokkatilanteissa nykyistä enemmän. Tutkimukseen osallistuneiden opiskelijoiden käsitys tehtävistä, joissa kämmentietokoneen käyttö on rajoitettua, oli varauksellinen. Kuitenkaan tulokset eivät muihin loppukokeen tehtäviin verrattuna heikentyneet tehtävässä, jossa kämmentietokoneen käyttö oli kiellettyä. (vrt. [26])

7.2 Tutkimuksen luotettavuus

Realistisessa luotettavuusnäkemyksessä tutkimuksessa pitää olla sekä sisäinen että ulkoinen validiteetti ja reliabiliteetti. [44] Sisäisellä validiteetilla tarkoitetaan sitä, kuinka hyvin tutkimus on onnistunut mittamaan asioita, joita oli tarkoitus mitata. [45] Ulkoisella validiteetilla tarkoitetaan tutkimuksen tulkintojen ja johtopäätösten sekä tutkimusaineiston välisen suhteen pätevyyttä. [44] Reliabiliteetilla tarkoitetaan tutkimusaineiston ristiriidattomuutta. [44]

Tutkimuksen ulkoista validiteettia heikentää tutkittavan joukon pieni koko. Toisaalta sisäiseltä validiteetiltaan tutkimusta voidaan pitää varsin luotettavana, koska tutkimusaineisto koostui pääsääntöisesti lukiolaisten omista näkemyksistä. Näin ollen asianomaiset itse ovat arvioineet itse omaa tekemistään ja oppimistaan, mitä voidaan pitää luotettavuuden lisääjänä. Yhtenä tutkimusongelmana oli kurssin materiaalin luominen. Tehtyä materiaalia voidaan pitää kurssin opetuksen kannalta hyödyllisenä, koska vastuuopettaja ajatteli käyttää materiaalia ja oppimiansa asioita myös jatkossa. Osaa tutkimusongelmista lähestyttiin triangulaation kautta, eli tutkimustulokset perustuivat vastuuopettajan haastatteluun, tutkijan havainnointiin sekä opiskelijoiden omaan näkemykseen itsestään tai muista opiskelijoista. Tutkimuksen luotettavuus kuitenkin kärsii siinä, että tutkimusaineistosta käy ilmi opiskelijoiden ymmärtämättömyys matematiikan kielentämisen käsitteestä. Näin ollen he eivät ole pystyneet arvioimaan itseään täysin luotettavasti, koska heidän arvio on perustunut väärään käsitykseen oleellisesta käsitteestä.

Tutkimuksen reliabiliteetti on hyvä, sillä kaikki tutkimustulokset ainakin osittain tukevat aikaisempia tutkimuksia. Tämä tarkoittaa, että samat tulokset ovat eri tutkimuksissa toistuneet. Esimerkiksi Joutsenlahden tuoreen yliopisto-opiskelijoille tekemän tutkimuksen tulokset ovat hyvin samankaltaiset kuin tämän tutkimuksen. [20] Näin ollen eri havainnoitsijat ovat saaneet täsmälleen samankaltaisia tuloksia. Tutkimustuloksista on siis löydettävissä toistettavuutta. Tutkimuksen reliabiliteettia on pyritty parantamaan usealla havainnointikerralla. Esimerkiksi loppukyselyssä samaa asiaa kysyttiin eri muodoissa toistona.

7.3 Pohdinta ja jatkotutkimusmahdollisuudet

Lukion matematiikan opetus on pisteessä, jossa sen on väistämättä muokkauduttava vastaamaan muuttuneita ylioppilaskirjoituksia. Kun kaksiosaisuus matematiikan ylioppilaskirjoituksissa astuu voimaan, opettajien on syytä muistaa, että opiskelijat itse kokevat tehtävät, joissa kämmentietokoneen käyttö ei ole sallittua, hankalammiksi kuin tehtävät, joissa kämmentietokonetta saa käyttää. Tämä tukee Hongin, Thomasin ja Kiernan tutkimusta, jonka mukaan varsinkin heikommat oppilaat turvautuvat kämmentietokoneeseen ongelmanratkaisuissa. [27] Jos tehtäviin toisi multisemioottisen näkökulman, kämmentietokoneen tärkeys opiskelijoille voisi vähentyä.

Jatkotutkimusmahdollisuuksia on monia. Koska tästä kenttäkokeilusta saadut tulokset ovat rohkaisevia, voisi kenttäkokeilua laajentaa eli samankaltaisen tutkimuksen voisi tehdä suuremmalle joukolle opiskelijoita. Kämmentietokoneiden käyttöä luokkahuoneessa on Suomessa tutkittu suhteellisen vähän, eli tältä osin tutkimuksia tulisi yhä jatkaa. Opiskelijat olisi hyvä totuttaa matematiikan kielentämiseen peruskoulussa, mutta myös lukiossa heti ensimmäisistä kursseista lähtien. Toisaalta kämmentietokoneiden käytön opetusta tulisi mahdollisesti lisätä, minkä vuoksi myös oppimateriaalien tulisi vastata paremmin opetuksen vaatimuksia. Tutkimuksessa esille nousi opiskelijoiden mielikuva siitä, että tehtävät, joissa kämmentietokoneen käyttö on rajoitettua, ovat hankalampia kuin tehtävät, joissa apuvälineiden käyttö on vapaampaa. Mielenkiintoista olisikin tutkia, onko tämä yleisempi käsitys lukiolaisten keskuudessa. Mistä tällainen näkemys heille syntyy ja mikä merkitys heille itselleen kämmentietokoneella on? Lisäksi yksi jatkotutkimuskohde voisi olla, kuinka kämmentietokoneiden salliminen ylioppilaskirjoituksissa on muuttanut opiskelijoiden jatko-opiskeluvalmiuksia.

Kirjallisuutta

[1] Allais M. (1997) *La formation scientifique, Une communication du Prix Nobel d´économie, Maurice Allais.* Address to the Académie des Sciences Morales et Politiques.

[2] Lappi, E. Lappi, M. (2011) *Symboliset laskimet tulevat - ollaanko valmiita.* Matematiikkalehti Solmu. Saatavissa: `http://solmu.math.helsinki.fi/2011/symbolinen_laskin.pdf`. Katsottu 25.11.2013

[3] Haapasalo, L. (2011) *Laskinpanna poistuu - muuttuuko opetus ja arviointi?* Dimensio, 5/2011, 32-35.

[4] Lehtonen, J. Korte S., Mustonen, E. Nygren, T., Heikinaho, S., Lehtovuori, S., Nurmi, O., Ritvanen, E. (2013) *MAA YO K2013 ja symbolinen laskin* Matematiikkalehti Solmu. Saatavissa: `http://solmu.math.helsinki.fi/2013/laskin.pdf` Katsottu 25.11.2013

[5] Ylioppilastutkintolautakunta. (2006) *Matematiikan kokeen suoritusohjeet.* Saatavissa: `http://www.ylioppilastutkinto.fi/fi/images/sivuston_tiedostot/Hyv_vast_piirt/FI_2014_K/2014_K_M.pdf` Katsottu 24.1.2014

[6] Kivelä, S. K. `http://matta.hut.fi/matta/` Katsottu 24.2.2014

[7] Oldknow, A., Taylor, R., (2000) *Teaching mathematics with ICT.* London ja New York, Continuum. 240-249.

[8] Kendal, M., Stacey, K., Pierce, R., (2005) *The ifluence of a computer algebra environment of teachers' practice* Teoksessa D., Guin, K., Ruthven, L., Trouche. The Didactical Challenge of Symbolic Calculators. Boston. Springer Science. 67-82.

[9] Lagrange, J. (2005) *Using symbolic calculators to study mathematics* Teoksessa D., Guin, K., Ruthven, L., Trouche. The Didactical Challenge of Symbolic Calculators. Boston. Springer Science. 113-116.

[10] Weigand, H. (2006) *Teaching with a Symbolic Calculator in 10th Grade - Evaluation of a One Year Project* Saatavissa: http://www.ma-weigand.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/weigand/M3_Projekt_Materialien/IJTME%202008%20Weigand.pdf Katsottu 27.11.2013

[11] Oinonen, H. (2012) *Matematiikan ylioppilaskokeet apuvälinein.* Pro gradu -tutkielma. Itä-Suomen yliopisto.

[12] Hiltunen, K. (2012) *Taulukkokirjan ja laskimen merkitys lukion pitkän matematiikan opinnoissa.* Pro gradu -tutkielma. Itä-Suomen yliopisto.

[13] Tofferi, J. (2013) *Symboliset laskimet matematiikan opetuskäytössä.* Pro gradu -tutkielma. Oulun yliopisto.

[14] Lakervi, H. (2013) *Tulevien lukion matematiikan opettajien odotukset, asenteet ja intentios CAS-teknologian opetuskäyttöä kohtaan.* Tampereen yliopisto. Pro gradu-tutkielma.

[15] Matemaattisten aineiden opettajien liitto (MAOL). http://ouluma.fi/2012/10/tuloksia-maoln-cas-kyselysta/ Katsottu 24.2.2014

[16] Heiskanen, P., Kytömäki, J., Setälä, M. https://www.facebook.com/groups/CAS.MAOL/. Katsottu 24.2.2014

[17] Opetushallitus. (2003) *Lukion opetussuunnitelman perusteet.* Vammalan kirjapaino OY. 117-128. Saatavissa: http://www.oph.fi/download/47345_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2003.pdf Katsottu 5.2.2014

[18] Lahtinen, A. (1999) *Matematiikan ylioppilaskirjoitus keväällä 1999.* Dimensio 63 (6). 4-22.

[19] Joutsenlahti, J. (2003) *Kielentäminen matematiikan opiskelussa.* Teoksessa A. Virta, O. Marttila. Turun yliopisto. Kasvatustieteiden tiedekunnan julkaisusarja. 188-196.

[20] Joutsenlahti, J., Sarikka, H., Kangas, J., Harjulehto, P. (2013). *Matematiikan kirjallinen kielentäminen yliopiston matematiikan opetuksessa* Teoksessa Hähkiöniemi, M., Leppäaho, H., Nieminen, P., Viiri, J. (eds.) Proceedings of the 2012 Annual Conference of Finnish Matehamtics and Sciece Education Research Association. University of Jyväskylä. 59-70

[21] Kari, A. (2013) *Kielentäminen derivaatan opetuksessa.* Pro gradu -tutkielma. Helsingin yliopisto.

[22] Sairanen, S. (2013) *Havainnollistavaa algebraa lukiolaisille matemaattisen kielentämisen näkökulmasta.* Pro gradu- tutkielma. Turun yliopisto.

[23] Joutsenlahti, J. (1995) *Matemaattisen ajattelun kehittyminen lukiossa.* Tampereen yliopisto. Lisensiaatintutkimus. 2-6.

[24] Faure, C.,Goarin, M. (2001) *Rapport d´enquête sur l´intégration des technologies nouvelles dans l´enseignement des mathématiques en lycée.* IREM, Université Montpellier II.

[25] Monaghan, J., Sun, S., Tall, D. O. (1994) *Proceedings of the 18th international conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* 279-286. University of Lisbon.

[26] Hunter, M. Marshall, P., Monaghan, J., Roper, T., Wain, G. (1993) *Computer algebra systems in hte classroom* 68-82. The University of Leeds

[27] Hong, Y. Y., Thomas, M. O. J., Kiernan, C. (2000) *Mathematics Education Research Journal Special Issue on Technology in Mathematics Learning and Teaching* 321-336. MERGA

[28] Doerr, H., Zangor, R. (1999) *Creating a tool: An analysis od the role of the graphic calculator in a pre-calculus classroom.* O. Zaslavzky. Haida, Israel. Program Committee. 265-272.

[29] Powers, R., Blubaugh, W. (2005) *Technology in mathematic education: Preparing teachers for the future.* Contemporary Issues in Technology and Teacher Education. Online serial. 5(3/4). Saatavissa: `http://www.citejournal.org/vol5/iss3/mathematics/article1.cfm` Katsottu 5.2.2014

[30] Carpenter, T. P., Fennema E. (1992) *Cognitively guided instruction: Building on the knowledge of students and teachers.* International Journal of Education Research. 17, 456-470.

[31] Tirosh, D. (2000) *Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions.* Journal for Research in Mathematics Education. 31(1), 5-25.

[32] Elbaz-Vincent, P. (2005) *A CAS as an assistant to reasoned instrumentation* Teoksessa D., Guin, K., Ruthven, L., Trouche. The Didactical Challenge of Symbolic Calculators. Boston. Springer Science. 41-66.

[33] Özgün Koca, S. (2009) *Prospective teachers' views on the use of calculators with computer algebra system in algebra instuction.* Teoksessa Journal of Mathematics Teacher Education.Springer. 54-77.

[34] Meaney, T. (2005) *Mathematics as text.* Teoksessa Challenging perspectives on mathematics classroom communication. Chronaki, A., Christiansen, I. (toim.) Greenwich, Connecticut : IAP-Information Age. 109-141.

[35] Joutsenlahti, J. (2009) *Matematiikan kielentäminen kirjallisessa työssä.* Teoksessa Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Rovaniemellä 7.-8.11.2008. Kaasila, R. (toim.) Lapin yliopisto. 71-86.

[36] Heikkinen, V., Hiidenmaa, P., Tiililä, U. (2000) *Teksti työnä, virka kielenä.* Helsinki. Gaudeamus.

[37] Halliday, M. A. K. (1975) *"Some aspects of sosiolinguistics", in Interactions between linguistics and mathematical education.* UNESCO. Copenhagen. 64-73.

[38] Joutsenlahti, J., Kulju, P. (2010) *Kieliteoreettinen lähestymistapa koulumatematiikan sanallisiin tehtäviin ja niiden kielennettyihin ratkaisuihin.* Teoksessa Toisensa kohtaavat ainedidaktiikat. Ainedidaktiikan symposiumi Tampereella 13.2.2009. Tampereen yliopiston opettajankoulutuslaitoksen julkaisuja. Ropo, E., Silfverberg, H., Soini, T. (toim.). Tampereen yliopisto. 77-90.

[39] Joutsenlahti, J. (2010) *Matematiikan kirjallinen kielentäminen lukiomatematiikassa.* Teoksessa Ajankohtaista matemaattisten aineiden opetuksen ja oppimisen tutkimuksessa. Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Joensuussa 22.-23.10.2009. University of Eastern Finland. 3-16.

[40] Kangasaho, J., Mäkinen, J., Oikkonen, J., Paasonen, J., Salmela, M., Tahvanainen, J. (2007). *Pitkä matematiikka 9 Trigonometriset funktiot ja lukujonot.* WSOY Oppimateriaalit Oy. Helsinki. 22.

[41] Bereiter, C. (2002). *Design Research for Sustained Innovation.* Cognitive Studies: Bulletin of the Japanese Cognitive Sciece Society,) (3). 321-327 Saatavissa: `http://ikit.org/fulltext/2002Design_Research.pdf` Katsottu 27.3.2014

[42] Collins, A., Joseph, D., Bielaczyc, K. (2004). *Design Research: Theoretical and Methodological Isuues.* Journal of the Learnin Sciences. 13 (1). 15-42. Saatavissa: `http://isites.harvard.edu/fs/docs/icb.topic122288.files/Collins.pdf` Katsottu 27.3.2014

[43] Brown. A, (1992) *Design experiments: Theoretical and Methodological Challenges in Creating Complex Interventions in Classroom Settings.* The Journal of the Learning Sciences, 2 (2), 141-178.

[44] Eskola, J., Suoranta, J. (1998) *Johdatus laadulliseen tutkimukseen.* Vastapaino. Jyväskylä. 209-231.

[45] Nummenmaa, L. (2009) *Käyttäytymistieteiden tilastolliset menetelmät.* Kustannusyhtiö Tammi. Helsinki. 346.

Liite

Liite 1 Loppukysely

Vielä olisi viimeisen kyselyn aika, vastaathan mahdollisimman totuudenmukaisesti. **<u>Väitteet koskevat vain kurssin joulun jälkeistä osaa, eli trigonometristen funktioiden osuutta!</u>**

Valitse numero, joka kuvaa parhaiten tuntemuksiasi tai vastaa kysymyksiin sanallisesti.

1 = väite ei pidä ollenkaan paikkansa 2 = väite ei pidä pääsääntöisesti paikkansa 3 = väite pitää silloin tällöin paikkansa 4 = väite pitää pääsääntöisesti paikkansa 5 = väite pitää paikkansa

1 Trigonometristen funktioiden osuus oli minusta hankalampaa kuin muu pitkä matematiikka tähän mennessä 1 2 3 4 5

2 Pidän itseäni hyvänä matematiikassa
1 2 3 4 5

3 Pidän matematiikan opiskelusta
1 2 3 4 5

4 Kielentämistehtävät auttavat minua oppimaan matematiikkaa paremmin
1 2 3 4 5

5 Kielentämistehtävät auttavat muita oppimaan matematiikkaa paremmin
1 2 3 4 5

6 Osaan käyttää hyvin laskinta
1 2 3 4 5

7 Laskintaitoni kehittyivät tämän kolmen viikon aikana
1 2 3 4 5

8 Laskin auttaa minua hahmottamaan tehtäviä
1 2 3 4 5

9 Tehtävät, joissa saa käyttää laskinta apua, ovat minulle helpompia kuin tehtävät, joissa laskinten käyttö on kiellettyä.
1 2 3 4 5

10 Matematiikan opetus on yksipuolista
1 2 3 4 5

11 Laskin on vain työkalu, jolla säästyy päässälaskuvaivalta

1 2 3 4 5

12 Jos vastasit, että kielentämistehtävä eivät auta sinua matematiikan oppimisessa, minkä koet suurimmaksi syyksi tähän?

13 Ovatko kielentämistehtävät työläämpiä kuin tavalliset tehtävät?

14 Aiotko käyttää jatkossa kielentämistä apuna tehtävien ratkaisuiden jäsentämisessä?

15 Haluaisitko, että lukion matematiikka olisi monipuolisempaa?

16 Onko laskinten käyttöä liikaa yleensä matematiikan tunneilla?

17 Oliko tällä kurssilla liikaa laskinten käyttöä matematiikan tunneilla?

Liite 2 Loppukoe

MAA9 Trigonometristen funktioiden osuus 27.1.2013 TOJ/VÄÄ

Palauta vastauspaperi. Muista kirjoittaa välivaiheet huolella, pelkän laskimen vastaus ei riitä perusteluksi. Kirjoita konseptin alkuun oheinen taulukko. **Vastaa viiteen tehtävään**. Laita taulukkoon raksi siihen tehtävään, jonka haluat jättää arvostelun ulkopuolelle. Ensimmäinen tehtävä tehdään ilman laskinta. Kun olet saanut sen tehtyä, voit palauttaa vastauksesi, jolloin saat ottaa laskimen käyttöösi. Onnea kokeeseen!

1.	2.	3.	4.	5.	6.	Yhteensä

1. a) Derivoi funktio $t(x) = \frac{5}{\tan x}$. (1p)
   b) Derivoi funktio $y(x) = 3\cos^3(2x)$. (2p)
   c) Laske funktion arvo, kun $\alpha = 45°$ ja $g(\alpha) = \sin(2\alpha) + \cos^2 \alpha$. (1p)
   d) Vuorovettä voidaan mallintaa käyttäen funktiota $s(t) = 4\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) + 18$, missä s(t) kertoo hetkellä t meren etäisyyden loma-asunnostasi. Mikä on funktion suurin ja pienin arvo? Kuinka suuri meren liikettä kuvaavan funktion jakso on? Päättele ilman derivaattaa. (2p)

2. a) Tiedetään, että $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ ja $90° < x < 270°$. Määritä $\tan x$ (tarkka arvo). Perustele mahdollisimman huolella välivaiheet. (2p)
   b) Ratkaise yhtälö $\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$ (2p)
   c) Määritä funktiolle $f(x) = 2\sin x \cos 4x$ kohtaan $x = \frac{\pi}{3}$ kautta kulkevan tangentin kulmakerroin. (2p)

3. Määritä funktion $f(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos x + 2}$ suurin ja pienin arvo, kun $0 \leq x \leq \pi$. Kirjoita välivaiheita myös sanallisesti auki. Likiarvoista saa 5 pistettä ja tarkoista arvoista 6 pistettä.

4. a) Ratkaise yhtälön $\sin \alpha + \sqrt{3}\cos \alpha = 0$ juuret asteina (tarkat arvot). (2p)
   b) Määritä yhtälön $13\sin\frac{x}{6} - 6 = 0$ juurista kaksi pienintä, jotka ovat suurempia kuin 2013. Anna vastaus kolmen desimaalin tarkkuudella. (4p)

5. Valon kohdatessa tason pisteessä A valaistuksen voimakkuus on suoraan verrannollinen tason normaalin ja valon tulosuunnan välisen kulman kosiniin sekä kääntäen verrannollinen valolähteen ja pisteen A välisen etäisyyden neliöön. Kuinka korkealle pyöreän r-säteisen pöydän keskipisteen yläpuolelle on vietävä pistemäinen valolähde, jotta valaistuksen voimakkuus pöydän reunalla olisi mahdollisimman suuri?

6. Säiliön pohja ja sivut tehdään 1,00 metrin levyisestä metallilevystä taivuttamalla levyn sivuilta 30 cm:n levyiset kaistaleet yhtä paljon ylöspäin. Määritä taivutuskulma α asteen tarkkuudella niin, että säiliön poikkileikkauksen (joka on tasakylkinen puolisuunnikas) pinta-ala on mahdollisimman suuri. Tehtävä pitää ratkaista sellaisen funktion avulla, jossa muuttujana on kulma.

Liite 3 Projektitehtävä 1

Trigonometrian kurssi, projektitehtävä 1

Ratkaise tehtävä. Projektitehtävän idea on tehdä ongelman ratkaisusta tutkimusraportti, jossa kuvaat yksityiskohtaisesti jokaisen ratkaisuun johtavan vaiheen.

Polkupyöräilijän jalan liikettä voidaan mallintaa käyrällä

$$f(x) = 1{,}5 \cdot \sin\,(9x).$$

Funktio kuvaa toisen jalan korkeutta (dm) ajan funktiona (s). Voidaan olettaa, että polkupyöräilijä polkee tasaisella liikkeellä koko matkan ajan. Poljin käy alimmillaan 15 cm korkeudella. (siis mikä on funktion arvo tällöin?)

a) Selitä, miksi jalan liikkeeseen voidaan käyttää sinifunktion mallia?
b) Ratkaise funktion kaikki nollakohdat välillä [120,121]. Mitä funktion nollakohta tarkoittaa käytännössä jalan asennossa?
c) Äskeisellä aikavälillä polkupyöräilijä ajaa lätäkköön. Vettä lentää 24 cm korkeuteen. Ratkaise kahden desimaalin tarkkuudella graafisesti välin [120,121] se osaväli, jossa jalka ei kastu.

Liite 4 Projektitehtävä 2

Trigonometrian kurssi, projektitehtävä 2

Tavoitteenamme on määrittää funktio, jolla on ääretön määrä terassikohtia. Terassikohdalla tarkoitetaan sellaista funktion pistettä, jossa funktion derivaatta on hetkellisesti nolla, muttei vaihda merkkiään positiivisesta negatiiviseksi tai päinvastoin. Tällaisesta kohdasta esimerkkinä olkoon x^3 kohdassa x=0 (piirrä kuva!). Funktion derivaatta kohdassa x=0 on hetkellisesti 0, mutta kaikkialla muualla positiivinen. Jos derivaatan merkki vaihtuu nollakohdassa, kyseessä on paikallinen maksimi tai minimi (esim. x^2, kun x=0) (Jälleen, piirrä kuva!).

Aloitetaan pohtimalla sinifunktion ominaisuuksia. Yksinkertainen sinifunktio sin x on jaksollinen funktio, jonka arvojoukko on [-1,1]. Funktio saavuttaa maksimi- ja minimiarvonsa jaksollisesti 2π välein. Eikö olisi mukavaa, jos saataisiin sin x avulla määritettyä funktio, jolla olisi jaksollisesti terassikohtia?

__Tehtävä 1.__ Derivoi sin x ja määritä derivaattafunktion nollakohdat. Mikä on derivaattafunktion arvojoukko? Hahmottele funktion kulkua kulkukaaviolla välillä $[0,2\pi]$ sekä piirrä funktio tälle välille laskimellasi. Ovatko derivaattafunktion nollakohdat tässä tapauksessa terassikohtia?

Minimi- ja maksimikohdissa funktion derivaatta on nolla, mutta derivaattafunktio vaihtaa merkkiään (eli molemmat terassikohdan edellytykset eivät täyty). Pohdintaamme täytyy siis laajentaa, koska sinifunktiosta sin x ei löydy yhtään terassikohtaa (kaikissa derivaattafunktion nollakohdissa derivaattafunktio vaihtaa merkkiään).

Mietitään, mitkä sinifunktion pisteet olisivat potentiaalisia terassikohtia, jos funktioon tekisi pieniä muutoksia. Sinifunktion tapauksessa potentiaalisessa terassikohdassa funktion kaarevuussuunnan tulisi muuttua, jotta derivaatta ei vaihtaisi merkkiään (Miksi?). Tällaista pistettä kutsutaan käännepisteeksi. Käännepisteessä funktion toinen derivaatta f'' on nolla ja vaihtaa merkkiään. Toinen derivaattafunktio f'' saadaan derivoimalla funktion f derivaattafunktio f' uudelleen. Toinen derivaattafunktio kertoo ensimmäisen funktion kasvunopeuden samoin kuin ensimmäinen derivaatta kertoo funktion kasvunopeuden. Toinen derivaatta siis antaa myös epäsuorasti tietoa itse funktiosta, tarkemmin sanottuna funktion kuperuudesta kullakin hetkellä. Kaarevuussuunnasta puhuttaessa puhutaan joko ylöspäin tai alaspäin kuperasta. Kun käyrän tangentti kulkee käyrän alapuolella, on funktio alaspäin kupera. Vastaavasti kun käyrän tangentti kulkee käyrän yläpuolella, kyseessä on ylöspäin kupera funktio.

__Tehtävä 2.__ Määritä sinifunktion käännepisteet ja pohdi piirtämällä laskimella kuvaaja, miten funktion kuvaaja käyttäytyy, kun toinen derivaatta vaihtaa merkkiään negatiivisesta positiiviseksi. Entä kun merkki vaihtuu positiivisesta negatiiviseksi. Piirrä tämän jälkeen uusi kulkukaavio f'' merkeistä sekä f:n kuperuudesta.

Olemme siis todenneet, että sinifunktioon on tehtävä jotain muutoksia, jos haluamme funktiolla olevan äärettömän määrän terassikohtia. Lisäksi hyviä mahdollisia terassikohtia olisi sinifunktion käännepisteet eli funktion toisen derivaatan nollakohdat, joissa toinen derivaatta vaihtaa merkkiään. Terassikohdassa funktion derivaatan on oltava nolla ja koska kaarevuussuunnan on muututtava, myös toisen derivaatan tulee olla nolla ja vaihtaa merkkiään. Huomataan, että funktion sin x käännepisteissä funktion derivaatta on aina joko -1 tai 1 riippuen siitä, tarkastellaanko nousevaa vai laskevaa käyrän osaa.

Tehtävä 3. Tarkastele sinifunktion toisen derivaattafunktion nollakohtia. Tarkastele myös sinifunktion derivaattafunktion arvoja toisen derivaatan nollakohdissa ja päättele millä varsin yksinkertaisella muutoksella funktion käännepisteissä sinifunktion derivaatta olisi nolla eli muodostettaisiin funktio, jolla on ääretön määrä terassikohtia.

Tehtävä 4. Muodosta funktio (muotoa ax+sin(bx)), jolla on ääretön määrä terassikohtia. Yksi terassikohdista on pisteessä ($\frac{\pi}{2}, \pi$).

Ennen tehtävää piirrä esim. 0,5x+sin0,5x

Liite 5 Kotitehtävät ja viikkofiilikset

Kotitehtävä keskiviikolle 8.1.2014

a) Laske kulman 150° sinin ja kosinin arvo laskimella. Tämän jälkeen perustele vastauksesi yksikköympyrän ja suorakulmaisen kolmion avulla.
b) Laske laskimella sin 50°. Minkä tarkan arvon laskin antaa? Miksi? Entä esimerkiksi sin 175°? Kokeile vielä itse keksimilläsi kulmilla.

Kotitehtävä perjantaille 10.1.2014

Määritä sinifunktio, jonka arvojoukko on [5,11]. Perustele omin sanoin huolella vastauksesi.

Kotitehtävät maanantaille 14.1.2014

1. Ratkaise yhtälöt. Perustele vastauksesi yksikköympyrän avulla.
   a) $\sin^2 x - 1 = 0$
   b) $\sin^3 x - \sin x = 0$

2. Vastaa kysymyksiin
   a) Piirrä funktioiden $\sin 2x$ ja $\sin 4x$ kuvaajat laskimellasi samaan koordinaatistoon. Miten funktioiden kuvaajat eroavat toisistaan? Miten kertoimien lisääminen siten, että funktiosta tulee yhdistetty funktio, vaikuttaa funktion jaksoon?

   b) Piirrä funktioiden $2\sin x$ ja $\sin 2x$ kuvaajat samaan koordinaatistoon. Miten funktiot eroavat toisistaan? Miten vakiolla kertominen tai jakaminen vaikuttaa trigonometriseen funktioon?

   c) Piirrä funktioiden $2\sin x$ ja $\sin x + 7$ kuvaajat samaan koordinaatistoon. Miten funktiot eroavat toisistaan? Miten vakion lisääminen tai vähentäminen vaikuttaa funktioon?

3. a) Selitä omin sanoin ratkaisu vaihevaiheelta ratkaisun viereen.

Laske lausekkeen $2\sin\frac{x}{4} - 4\cos\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)$ arvo, kun $x = \pi$

$2\sin\frac{\pi}{4} - 4\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \pi\right)$

$= 2\sin\frac{\pi}{4} - 4\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$= 2\sin\frac{\pi}{4} - 4\cos\frac{\pi}{4}$

$= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \sqrt{2} - 2\sqrt{2}$

$= -\sqrt{2}$

b) Tutki a) kohdan lauseketta. Mikä on lausekkeen arvo, kun $x = \frac{\pi}{2}$?

4. Ratkaise annettu yhtälö ja kirjoita välivaiheiden viereen selitykset siitä, mitä kussakin vaiheessa on tehty. Vastaa kysymyksiin

$4\cos\frac{x}{6} = 2$	Mitä sinun tulee ensimmäiseksi tällaisen yhtälön kanssa ensimmäiseksi tehdä? Kuinka purat kosinin? Mitä jos kosinin tilalla olisi ollut sini? Mikä on n? Miksi yhtälöllä on kaksi vastausta?

5. Kokeile laske sin x = -0,5. Antoiko laskin tarkan arvon x:lle? Jos ei, miten lauseketta muokkaamalla saat tarkan arvon?

Viikkofiilikset:

1. Oliko kirjoittaminen sanallisesti mielestäsi helppoa matematiikan tehtävissä tällä viikolla?
2. Auttaako sinua kirjallinen kommentointi ja väliotsikointi tehtävän ratkaisussa?
3. Pystytkö sisäistämään tehtävän paremmin, jos tehtävään on selitetty luonnollisella kielellä tapahtumaketjua, kuin jos siinä on ainoastaan matematiikan symbolikieltä?
4. Helpottaako laskin oppimistasi?
5. Kuinka arvioisit omat taitosi laskimen käyttäjänä?

Kotitehtävä tunnille 17.1.2014

Ratkaise asteen tarkkuudella $4\cos 2\alpha + 2 = 0$ yhtälö. Mitkä yhtälön juurista ovat välillä [180°, 400°]? Tutki laskimen avulla, kuinka monta juurta yhtälöllä on välillä [360°, 620°] piirtämällä tälle välille rajatun funktion $f(\alpha) = 4\cos 2\alpha + 2$.

Kotitehtävä tunnille 17.1.2014

Täytä välivaiheet ja selosta tehtävän ratkaisu. Miten pystyt tarkistamaan vastauksesi laskimesi kuvaajan perusteella?

a) $\cos(\cos x) = 1$

$\cos x = n \cdot 2\pi$

$x = \frac{\pi}{2} + n\pi$

b) $\sin(\sin x) = 1$

$\sin x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$

Ei ratkaisua

Kotitehtävät tiistaille 21.1.2014

1. Tehtävä on ratkaistu laskimen avulla. Osaatko itse tehdä laskimella kaiken? Ratkaise tehtävä paperilla ratkaisun viereen ja selitä omin sanoin vaihe vaiheelta miksi laskimella on tehty mitäkin.

   Tehtävänanto: Määritä funktion f(x) = sin x cos x - sin x suurin ja pienin arvo. Missä kohdissa funktio f saa suurimman ja pienimmän arvonsa

   Asetetaan define komennolla (:=)

   $f(x) = \sin x \cos x + \cos x$

   $f'(x) = \cos^2 x - \sin x(\sin x + 1)$

   $\cos^2 x - \sin x(\sin x + 1) = 0$

   $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi$

   $f(0) = 1$

   $f(2\pi) = 1$

   $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

   $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{-3\sqrt{3}}{4}$

   $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$

   V: Suurin arvo $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ kohdassa $x = \frac{\pi}{6}$, pienin arvo $\frac{-3\sqrt{3}}{4}$ kohdassa $x = \frac{5\pi}{6}$

2. Funktion sin (2x) kuvaajalle piirretään tangentti ja normaali muuttujan arvon $\frac{\pi}{2}$ kohdalle. Määritä tangentin ja normaalin yhtälöt.

Tarkista vastauksesi laskimella kolmessa vaiheessa: HUOM! KAKSI TAPAA

1) Käytä komentoa Differentiaali ja integraalilaskenta → Tangenttisuora. Syötä funktio, jonka jälkeen pilkulla erotettuna x:n arvo on haluttussa pisteessä. Laskin antaa suoran yhtälön ratkaistussa muodossa siten, että se ei kirjoita y:tä.
2) Käytä komentoa Differentiaali ja integraalilaskenta → Normaalisuora. Funktio ja piste syötetään samoin tavoin kuin kohdassa 1.
3) Piirrä sekä funktio että sen normaali ja tangentti. Näyttääkö kuvaaja oikealta?

3. Ohessa on esitetty ratkaisu. Kehitä tehtävän ratkaisua vastaava tehtävänanto sekä piirrä kuva, jossa selostetaan muuttujien x, h ja α merkitys. Ratkaisua ei ole viety loppuun, se on sinun tehtäväsi.

   Ratkaisu:

   $\cos\alpha = \frac{x}{2{,}0}$ eli $x = 2\cos\alpha$ Vinkki: piirrä kolmio

   $\sin\alpha = \frac{h}{2{,}0}$ eli $h = 2\sin\alpha$ Vinkki: sama kolmio kuin edellä

   Näin ollen pinta-ala on Vinkki: piirrä kappale, jonka pinta-ala saadaan laskettua näin

   $A_1 = 3{,}2 \cdot 2x = 6{,}4x = 6{,}4 \cdot 2\cos\alpha = 12{,}8\cos\alpha$

   Jolloin saadaan kolmion pinta-alaksi

   $A_2 = \frac{2xh}{2} = xh = 2\cos\alpha \cdot 2\sin\alpha = 2\cos\alpha\sin\alpha = 2\sin 2\alpha.$

   Kokonaispinta-alaksi saadaan

   $A_{kok} = A_1 + A_2 = 12{,}8\cos\alpha + 2\sin 2\alpha$, jossa $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

   Derivoidaan alan lauseke

   $A'_{kok}(\alpha) = 12{,}8(-\sin\alpha) + 2\cos 2\alpha \cdot 2 = 4\cos 2\alpha - 12{,}8\sin\alpha.$

   Määritellään derivaatan nollakohdat

   $4\cos 2\alpha - 12{,}8\sin\alpha = 0 \quad |:4$

   $\cos 2\alpha - 3{,}2\sin\alpha = 0$ Vinkki: katso MAOL

   $1 - 2\sin^2\alpha - 3{,}2\sin\alpha = 0$

   $2\sin^2\alpha + 3{,}2\sin\alpha - 1 = 0$

   Yhtälö saadaan ratkaistua käyttämällä apumuuttujaa $\sin\alpha = t$. Yhtälö tulee muotoon

   $2t^2 + 3{,}2t - 1 = 0$

   Ratkaistaan tämä ratkaisukaavalla: Vinkki : tämän jälkeen määritä kulma α. Käykö kulmaksi α kaikki arvot?

Viikkofiilikset:

1. Miten olet tähän mennessä kokenut trigonometriset funktiot?
2. Käsitelläänkö oppituneilla tarpeeksi laskimen käyttöä?
3. Ovatko kielentämistehtävät helpompia kuin muut?

Kotitehtävät keskiviikolle 22.1.2014

1. Etsi laskusta virhe/virheet ja korjaa se/ne tai tarvittaessa laske lasku uudestaan. Selitä välivaiheet ratkaisun viereen

   a) $3\sin\alpha - 5\cos\alpha = 0$

   $$3\sin\alpha = 5\cos\alpha \;|: 5\sin\alpha$$
   $$\frac{3\sin\alpha}{5\sin\alpha} = \frac{5\cos\alpha}{5\sin\alpha}$$
   $$\frac{3}{5} = \tan\alpha$$
   $$\alpha \approx 31{,}0° + n \cdot 180°\text{, n kokonaisluku}$$

   b) $\sin 2x + \cos x = 0$

   $$\sin 2x = -\cos x \;|: -\cos x$$
   $$-\frac{\sin(2x)}{\cos x} = 1$$
   $$-\frac{2\sin x\cos x}{\cos x} = 1$$
   $$-2\sin x = 1$$
   $$\sin x = -\frac{1}{2}$$
   $$x = -\frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \text{ tai } x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi\text{, n kokonaisluku}$$

   Toinen sinin ratkaisu, sin x=sin(pi/6)

2. Anna yksi esimerkki $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$, joka toteuttaa tehtävässä asetetut ehdot. Tehtävästä on jätetty tiettyjä tietoja pois, täydennä ne.

   $$\tan\alpha = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = -\frac{1}{\sqrt{15}}$$

   Koska tangentin merkki on negatiivinen, sinin ja kosinin tulee olla __________________. Tiedetään, että sini on positiivinen. Sini on positiivinen silloin, kun yksikköympyrässä ollaan I tai II neljänneksessä. Näin ollen kosini on _________________, eli yksikköympyrästä pystymme päättelemään, että olemme ____________ tai __________ neljänneksessä. Missä neljänneksissä tangentti on positiivinen? Entä negatiivinen?

3. Piirrä sekä sin x että tan x kuvaajat laskimeesi. Huomaat, että kuvaajat leikkaavat aina säänöllisesti toisensa. Milloin? Miksi juuri tässä kohdassa? Anna mahdollisimman tarkka selitys ilmiölle. Tee tutkinta myös yhtälön ratkaisun kautta.

Liite 6 Kurssin vastuuopettajan haastattelu

1. Oliko sinulle luonnollisen kielen käyttö tehtävien ratkaisussa tuttua jo ennen kokeilun alkua?

2. Kuinka paljon olet aikaisempien kurssien aikana opettanut kämmentietokoneen käyttöä oppituntien aikana?

3. Kuinka suuri osa opiskelijoista oli sinulle tuttuja jo ennen kurssin alkua?

4. Miten koet kokeilun mennen sinun osaltasi?

5. Mitä hyviä puolia näet kokeilussa?

6. Miten koet kokeilun menneen opiskelijoiden osalta?

7. Aiotko jatkossa käyttää esimerkiksi kielentämistehtäviä apunasi opetuksessa?

8. Miten jatkossa ajattelit opettaa kämmentietokoneiden käyttöä oppituntien ajan?

9. Muuttuiko käsityksesi kokeilun aikana joko kämmentietokoneiden käytöstä opetuksessa tai matematiikan kielentämisestä?