TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Pekka Peltola

Projektiiviset, injektiiviset ja laakeat modulit

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matematiikka
Maaliskuu 2014

Sisältö

Tiivistelmä

Tässä tutkielmassa esitetään määritelmät projektiiviselle, injektiiviselle ja laakealle modulille. Alussa johdatetaan aiheeseen esittämällä tuloksia moduleista, tekijämoduleista, modulien suorista summista ja modulien tensorituloista. Suoriin summiin ja tensorituloihin keskitytään enemmän, koska ne ovat erityisen tärkeitä tutkielman aiheelle. Lisäksi esitetään Zornin lemma lyhyesti.

Toisessa luvussa tutkitaan eksakteja jonoja; erityisesti lohkeavia eksakteja jonoja. Lohkeaviin eksakteihin jonoihin liittyen esitetään tärkeä yhteys modulien suoraan summaan. Eksaktien jonojen ominaisuuksia havainnollistetaan esimerkein ja Lausein.

Kolmannen luvun kaksi ensimmäistä lukua toimivat sellaisenaan itsenäisenä asiana. Kategorioita tarvitaan, jotta voidaan määritellä eksaktit funktorit, jotka ovat tärkeitä projektiivisiin, injektiivisiin ja laakeisiin moduleihin liittyen. Kategoria on mielenkiintoinen ja hyödyllinen tapa esittää matemaattisia luokkia ja niiden välisiä suhteita. Koska kategoria on hyvin abstrakti ja vaikeasti sisäistettävä asia, annetaan lukijalle paljon esimerkkejä havainnollistamaan asian sisältöä. Funktoreista esitetään tutkielmalle oleelliset hom-funktorit ja tensorifunktorit. Osoitetaan, että hom-funktorit ovat vasemmalta eksakteja ja tensorifunktorit oikealta eksakteja. Myöskin erityistapauksia eksakteista funktoreista esitetään.

Viimeisessä luvussa päästään itse tutkielman aiheeseen eli projektiivisiin, injektiivisiin ja laakeisiin moduleihin. Oleellista luvussa on projektiivisten ja injektiivisten modulien yhteys lohkeaviin eksakteihin jonoihin ja hom-funktoreihin. Laakeat modulit määritellään tensorifunktorin eksaktiuden avulla. Osoitetaan, että vapaat modulit ovat projektiivisia ja edelleen projektiiviset laakeita. Injektiiviset modulit ovat aina divisiibelejä ja tietyin ehdoin myös divisiibelit modulit ovat injektiivisiä. Tärkeimpiä tuloksia ovat Baerin kriteeri, upotuslause, projektiivinen kanta ja surjektiivisen homomorfismin olemassaolo projektiivisen modulin ja mielivaltaisen modulin välillä. Erilaisista moduleista annetaan konkreettisia esimerkkejä.

Johdanto

Tutkielman ensimmäisessä luvussa käydään lyhyesti läpi asioita moduleista. Suurin osa tämän luvun asioista oletaan tunnetuksi entuudestaan. Tiedot perustuvat lähinnä Eero Hyryn Tampereen yliopistossa keväällä 2012 pitämään Lineaarialgebra 2 -kurssiin, mutta tutkielmalle oleellisia asioita on lisätty. Edellä mainitulla kurssilla käytyjä lauseita ei todisteta. Luvun lopussa esitetään lyhyesti Zornin lemma, jota käytetään Baerin kriteeriä todistettaessa.

Toisessa luvussa esitetään eksaktin jonon käsite. Erityisesti mielenkiinnon kohteena ovat lyhyet eksaktit jonot ja niiden lohkeavuus. Tässä luvussa tärkeänä tuloksena on lohkeavan eksaktin jonon ja suoran summan yhteys. Lopuksi esitetään vielä mielenkiintoinen 5-lemma, jossa päästään tutkimaan hieman tavallista isompaa kaaviota.

Tutkielman kolmannessa luvussa määritellään kategoria ja kategorioiden välinen kuvaus eli funktori. Kategorioita ja funktoreita havainnollistetaan esimerkein. Tutkielmalle oleellista tässä luvussa ovat tietyt eksaktit funktorit, jotka liittyvät projektiivisiin, injektiivisiin ja laakeisiin moduleihin.

Viimeisessä luvussa määritellään projektiivinen, injektiivinen ja laakea moduli. Esitetään yhteys näiden modulien ja lohkeavien eksaktien jonojen sekä tiettyjen eksaktien funktoreiden välillä. Luvussa ilmenee, että vapaat modulit ovat aina projektiivisia ja edelleen projektiiviset modulit ovat aina laakeita. Injektiivisiin moduleihin liittyen määritellään divisiibelit modulit ja osoitetaan, että injektiiviset modulit ovat aina divisiibelejä. Tässä luvussa tärkeitä tuloksia ovat projektiivinen kanta, Baerin kriteeri, upotuslause, ja että jokainen moduli on projektiivisen modulin homomorfinen kuva. Esimerkein havainnollistetaan, milloin moduli on laakea ei-projektiivinen ja projektiivinen ei-vapaa.

Renkaat tutkielmassa oletetaan aina kommutatiivisiksi ja epätyhjiksi. Jos modulissa M on vain yksi alkio eli $M = \{0\}$, niin merkitään $M = 0$. Kaavioiden kommutointi on tutkielmassa oleellista ja sillä tarkoitetaan, että kaaviossa päästään mitä tahansa reittiä pitkin samaan lopputulokseen. Kaavion kommutointi oletetaan tunnetuksi eikä sitä pohjusteta tämän tarkemmin.

Perusasiat algebrasta ja lineaarialgebrasta oletetaan tunnetuksi. Kategorioista annetaan esimerkkejä myös topologiaan liittyen, mutta topologian tuntemus ei ole tutkielmalle oleellista. Lähteinä tutkielmassa on käytetty toista painosta Joseph J. Rotmanin teoksesta An Introduction to Homological Algebra vuodelta 2009, ensimmäistä painosta M. Scott Osbornen teoksesta Basic Homological Algebra vuodelta 2000 ja ensimmäistä painosta L. R. Vermanin teoksesta An Elementary Approach to Homological Algebra vuodelta 2003. Lisäksi lohkeaviin jonoihin liittyen yhden esimerkin todistuksessa on käytetty Alex Youcisin blogi-kirjoitusta vuodelta 2011 blogista Abstract Nonsense otsikolla The Splitting Lemma (for Modules).

1 Kertausta ja täydennystä

Suurin osa tämän luvun asioista oletetaan tunnetuksi entuudestaan eikä niille tuloksille esitetä todistuksia sen vuoksi. Tarkoituksena on virkistää lukijan muistia ja esittää jatkossa tarvittavia asioita. Renkaat tässä tutkielmassa oletetaan kommutatiivisiksi.

Tavallisesti annetaan määritelmät vasemmalle - ja oikealle R-modulille. Jos rengas on kommutatiivinen, niin M on vasen R-moduli täsmälleen silloin, kun se on oikea R-moduli. Sanotaan, että M on R-moduli.

Modulien summat ja tensoritulot ovat oleellisia jatkossa, minkä vuoksi näitä käydään läpi tarkemmin. Jos nämä asiat ovat hyvin hallussa, kannattaa siirtyä suoraan toiseen lukuun ja palata tarvittaessa.

Luvun lopussa omana alalukunaan käydään läpi Zornin lemma.

Lause 1.1. Jos M ja M' ovat R-moduleita, niin

$$Hom_R(M, M') := \{R\text{-homomorfismit } M \to M'\}$$

on R-moduli.

Lause 1.2. Jos R ja M ovat Abelin ryhmiä, niin

$$Hom_{\mathbb{Z}}(R, M)$$

on R-moduli.

Todistus. Merkitään $Hom_{\mathbb{Z}}(R, M) = Hom(R, M)$. Määritellään

$$(sf)(r) = f(rs)$$

kaikilla $f \in Hom(R, M)$ ja $r, s \in R$. Lauseen 1.1 mukaan $Hom(R, M)$ on $\mathbb{Z}$-moduli eli Abelin ryhmä. Olkoot $r_0, r, s \in R$ ja $f, g \in Hom(R, M)$. Nyt

(i) $(r(f+g))(r_0) = (f+g)(rr_0) = f(rr_0) + g(rr_0)$
$= (rf)(r_0) + (rg)(r_0) = (rf + rg)(r_0)$,

(ii) $((r+s)f)(r_0) = f((r+s)r_0) = f(rr_0)0f(sr_0) =$
$= (rf)(r_0) + (sf)(r_0) = (rf + sf)(r_0)$,

(iii) $(r(sf))(r_0) = (sf)(rr_0) = f(s(rr_0)) = f((sr)r_0) = ((sr)f)(r_0)$,

(iv) $(1f)(r_0) = f(1r_0) = r(r_0)$.

□

Lause 1.3. Jos $f : M \to M'$ on R-homomorfismi, niin

$$ker(f) := \{x \in M \mid f(x) = 0\} \text{ ja}$$
$$im(f) := \{f(x) \in M' \mid x \in M\}$$

ovat alimoduleita.

Lause 1.4. Olkoon M R-moduli ja $\varnothing \neq I$ joukko. Jos $(N_i)_{i\in I}$ on perhe modulin M alimoduleita, niin

$$\bigcap_{i\in I} N_i$$

on modulin M alimoduli.

Määritelmä 1.1. Olkoon M R-moduli ja I joukko. Perhe $(x_i)_{i\in I}$ modulin M alkioita on *finiittinen*, jos on olemassa äärellinen joukko $I_0 \subseteq I$ siten, että $x_i = 0$ kaikilla $i \in I - I_0$. Määritellään *modulin M heikko potenssi*

$$M^{(I)} = \{(x_i)_{i\in I} \in M^I \mid (x_i)_{i\in I} \text{ finiittinen}\}.$$

Lause 1.5. Jos M on R-moduli, niin $M^{(I)}$ on R-moduli kaikilla epätyhjillä joukoilla I.

Määritelmä 1.2. Olkoon M R-moduli. Sanotaan, että perhe $(x_i)_{i\in I} \in M^I$ on *vapaa*, jos pätee ehto

$$\text{jos } \sum_{i\in I} c_i x_i = 0, \text{ niin } c_i = 0 \text{ kaikilla } i \in I,$$

missä $(c_i)_{i\in I} \in R^{(I)}$. Jos perhe ei ole vapaa, se on *sidottu*. Joukko $S \subseteq M$ on vapaa (tai sidottu), jos perhe $(x)_{x\in S}$ on vapaa (tai sidottu).

Lause 1.6. Olkoon M R-moduli. Perhe $(x_i)_{i\in I} \in M^I$ on modulin M kanta, jos ja vain jos jokainen $x \in M$ voidaan esittää yksikäsitteisellä tavalla muodossa

$$x = \sum_{i\in I} a_i x_i,$$

missä $(a_i)_{i\in I} \in R^{(I)}$.

Lause 1.7. Olkoon M R-moduli. Jos $(x_i)_{i\in I}$ on modulin M kanta, niin kaikilla R-moduleilla N ja perheillä $(y_i)_{i\in I} \in N^I$ on olemassa yksikäsitteinen R-homomorfismi $f : M \to N$ siten, että $f(x_i) = y_i$ kaikilla $i \in I$. Toisin sanoen on olemassa yksikäsitteinen R-homomorfismi $f : M \to N$ siten, että kaavio

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, dashed, "f"] & \\
\{x_i \mid i \in I\} \arrow[u, "x_i \mapsto x_i"] \arrow[r, "x_i \mapsto y_i"'] & N
\end{tikzcd}$$

kommutoi. Erityisesti on olemassa yksikäsitteinen R-isomorfismi $g : R^{(I)} \to M$ siten, että $g(e_i) = x_i$ kaikilla $i \in I$.

Määritelmä 1.3. Olkoon M R-moduli. Sanotaan, että M on *vapaa*, jos sillä on kanta.

Lause 1.8. Olkoon R pääideaalirengas ja F vapaa R-moduli. Jos $F_0 \subseteq F$ on R-alimoduli, niin F_0 on vapaa.

Lause 1.9. (ks. [3, s. 8]) Olkoon M R-moduli. Tällöin M on vapaan R-modulin homomorfinen kuva.

Todistus. Olkoon F vapaa kantana $(x_m)_{m \in M}$. Lauseen 1.7 mukaan on olemassa yksikäsitteinen R-homomorfismi $f : F \to M$ siten, että $f(x_m) = m$ kaikilla $m \in M$. Selvästi $im(f) = M$. $\square$

Lause 1.10. Jos $(M_i)_{i \in I}$ on perhe R-moduleita, niin

$$\prod_{i \in I} M_i = \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \in M_i \text{ kaikilla } i \in I\}$$

on R-moduli.

Huomautus:
Olkoon $(M_i)_{i \in I}$ perhe R-moduleita. *Projektiot* eli kuvaukset

$$\pi_j : \prod_{i \in I} M_i \to M_j, \ (x_i)_{i \in I} \mapsto x_j,$$

missä $i \in J$, ovat surjektiivisia R-homomorfismeja. Kuvaukset

$$\rho_j : M_j \to \prod_{i \in I} M_i, \ x \mapsto (y_i)_{i \in I}, \text{ missä } y_i = \begin{cases} 0 & \text{jos } i \neq j, \\ x & \text{jos } i = j, \end{cases}$$

missä $i \in J$, ovat injektiivisiä R-homomorfismeja.

Lause 1.11. Olkoon $(M_i)_{i \in I}$ perhe R-moduleita. Jos N on R-moduli ja $f_i : N \to M_i$, missä $i \in I$, ovat R-homomorfismeja, niin on olemassa yksikäsitteinen R-homomorfismi $f : N \to \prod_{i \in I} M_i$ siten, että $\pi_j f = f_j$ kaikilla $j \in I$. Toisin sanoen on olemassa R-homomorfismi $f : N \to \prod_{i \in I} M_i$ siten, että kaavio

$$\begin{tikzcd} N \arrow[d, "f_j"'] \arrow[dr, dashed, "f"] & \\ M_j & \prod_{i \in I} M_i \arrow[l, "\pi_j"] \end{tikzcd}$$

kommutoi kaikilla $j \in I$. Tässä π_j, missä $j \in I$, on projektio.

Määritelmä 1.4. Olkoon $(M_i)_{i \in I}$ perhe R-moduleita. Sanotaan, että alkioperhe $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i$ on *finiittinen*, jos on olemassa äärellinen $I_0 \subseteq I$ siten, että $x_i = 0$ kaikilla $i \in I - I_0$.

Määritelmä 1.5. Olkoon $(M_i)_{i \in I}$ perhe R-moduleita. Modulien M_i, missä $i \in I$, *suora summa* on

$$\bigoplus_{i \in I} M_i := \{(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i \mid (x_i)_{i \in I} \text{ finiittinen}\}.$$

Huomautus:
$\bigoplus_{i \in I} M_i$ on modulin $\prod_{i \in I} M_i$ alimoduli. Jos $M_i = M$ kaikilla $i \in I$, niin

$$\bigoplus_{i \in I} M_i = M^{(I)}.$$

Vastaavasti tällöin

$$\prod_{i \in I} M_i = M^I.$$

Lause 1.12. Olkoon $(M_i)_{i \in I}$ perhe R-moduleita. Jos N on R-moduli ja $f_i : M_i \to N$ ovat R-homomorfismeja, niin on olemassa yksikäsitteinen R-homomorfismi $f : \bigoplus_{i \in I} M_i \to N$ siten, että $f\rho_j = f_j$ kaikilla $j \in I$. Toisin sanoen on olemassa yksikäsitteinen R-homomorfismi $f : \bigoplus_{i \in I} M_i \to N$ siten, että kaavio

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i \in I} M_i \arrow[dr, dashed, "f"] & \\
M_j \arrow[u, "\rho_j"] \arrow[r, "f_j"'] & N
\end{tikzcd}$$

kommutoi kaikilla $j \in I$. Tässä ρ_j, missä $j \in I$, on kuten huomautuksessa sivulla 5.

Lause 1.13. (ks. [1, s. 48]) Olkoot M, S ja T R-moduleita. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

(i) $S \bigoplus T \cong M$,

(ii) on olemassa injektiiviset R-homomorfismit $i : S \to M$ ja $j : T \to M$ siten, että
$$M = im(i) + im(j) \text{ ja } im(i) \cap im(j) = 0,$$

(iii) on olemassa sellaiset R-homomorfismit $i : S \to M$ ja $j : T \to M$, että jokaista $m \in M$ kohti on olemassa yksikäsitteiset $s \in S$ ja $t \in T$, joilla $m = i(s) + j(t)$,

(iv) on olemassa sellaiset R-homomorfismit $i : S \to M$ ja $j : T \to M$ sekä $p : M \to S$ ja $q : M \to T$, että

$$pi = 1_S,\ qj = 1_T,\ pj = 0,\ qi = 0 \text{ ja } ip + jq = 1_M,$$

(v) kuvaus $\psi : M \to S \bigoplus T$, $m \mapsto (pm, qm)$, on isomorfismi.

Todistus.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Olkoon $\varphi : S \bigoplus T \to M$ isomorfismi. Määritellään kuvaukset $\sigma : S \to S \bigoplus T,\ s \mapsto (s, 0)$ ja $\tau : T \to S \bigoplus T,\ t \mapsto (0, t)$. Tässä σ ja τ ovat injektiivisiä R-homomorfismeja, jolloin myös yhdisteet $i := \varphi\sigma : S \to M$ ja $j := \varphi\tau : T \to M$ ovat injektioita.

Modulit $im(i)$ ja $im(j)$ ovat modulin M alimoduleita, joten $im(i) + im(j) \subseteq M$. Jos $m \in M$, niin kuvauksen φ surjektiivisuuden nojalla on olemassa sellaiset alkiot $s \in S$ ja $t \in T$, että

$$\begin{aligned} m &= \varphi(s, t) = \varphi(s, 0) + \varphi(0, t) = \varphi(\sigma(s)) + \varphi(\tau(t)) \\ &= i(s) + j(t) \in im(i) + im(j). \end{aligned}$$

Siis $M = im(i) + im(j)$.

Jos $x \in im(i) \cap im(j)$, niin

$$x = i(s) = \varphi(\sigma(s)) = \varphi(s, 0) \text{ ja } x = j(t) = \varphi(\tau(t)) = \varphi(0, t)$$

joillain $s \in S$ ja $t \in T$. Koska φ on injektiivinen, niin $(s, 0) = (0, t)$, jolloin $s = t = 0$ ja

$$x = \varphi(s, 0) = \varphi(0, t) = \varphi(0, 0) = 0.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Olkoon $m \in M$. Koska $M = im(i) + im(j)$, niin on olemassa sellaiset alkiot $s \in S$ ja $t \in T$, että $m = i(s) + j(t)$. Oletetaan, että lisäksi $m = i(s') + j(t')$, missä $s' \in S$ ja $t' \in T$. Nyt

$$\begin{aligned} i(s) + j(t) &= i(s') + j(t') \\ i(s) - i(s') &= j(t') - j(t) \\ i(s - s') &= j(t' - t) \in im(i) \cap im(j) = \{0\}. \end{aligned}$$

Koska i ja j ovat injektioita, niin $s - s' = 0$, $t' - t = 0$ ja edelleen $s = s'$, $t' = t$. Siis esitys on yksikäsitteinen.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Jos $m \in M$, niin se voidaan esittää yksikäsitteisesti muodossa $m = i(s) + j(t)$, missä $s \in S$ ja $t \in T$. Määritellään kuvaukset $p : M \to S$ ja $q : M \to T$ asettamalla $p(m) = s$ ja $q(m) = t$. Kuvaukset ovat mielekkäitä, koska esitys $m = i(s) + j(t)$ on yksikäsitteinen. Nyt p (ja vastaavasti q) on R-homomorfismi, koska

$$\begin{aligned}
p(am + a'm') &= p(a(i(s) + j(t)) + a'(i(s') + j(t'))) \\
&= p(i(as + a's') + j(at + a't')) \\
&= as + a's' = ap(m) + a'p(m')
\end{aligned}$$

kaikilla $m, m' \in M$ ja $a, a' \in R$, missä $m = i(s) + j(t)$ ja $m' = i(s') + j(t')$.

Olkoon $s \in S$, $t \in T$ ja $m \in M$. Nyt $m = i(s') + j(t')$ joillakin $s' \in S$ ja $t' \in T$ ja

$$\begin{aligned}
&(pi)(s) = p(i(s)) = p(i(s) + j(0)) = s, \\
&(qj)(t) = q(j(t)) = q(i(0) + j(t)) = t, \\
&(pj)(t) = p(j(t)) = p(i(0) + j(t)) = 0, \\
&(qi)(s) = q(i(s)) = q(i(s) + j(0)) = 0, \\
&(ip + jq)(m) = i(p(m)) + j(q(m)) \\
&\ = i(p(i(s') + j(t'))) + j(q(i(s') + j(t'))) \\
&\ = i(s') + j(t') = m.
\end{aligned}$$

(iv) $\Rightarrow$ (v). Oletetaan, että $\psi(m) = 0$, missä $m \in M$. Siis $(p(m), q(m)) = (0, 0)$ ja edelleen $p(m) = 0$ ja $q(m) = 0$. Oletuksen mukaan $ip + jq = 1_M$, joten

$$m = i(p(m)) + j(q(m)) = i(0) + j(0) = 0.$$

Siis ψ on injektio.

Olkoon $(s, t) \in S \bigoplus T$. Havaitaan, että $(s, t) = \psi(i(s) + j(t))$. Nimittäin

$$\begin{aligned}
\psi(i(s) + j(t)) &= (p(i(s) + j(t)), q(i(s) + j(t))) \\
&= (p(i(s)) + p(j(t)), q(i(s)) + q(j(t))) \\
&= (p(i(s)) + 0, 0 + q(j(t))) = (s, t).
\end{aligned}$$

Siis ψ on surjektio.

Kuvauksen ψ R-homomorfisuus seuraa kuvausten p ja q R-homomorfisuudesta.

(v) $\Rightarrow$ (i). Selvä.

$\square$

Määritelmä 1.6. Olkoon M R-moduli. Jos $(M_i)_{i \in I}$ on perhe modulin M alimoduleita, niin niiden *summa* on

$$\sum_{i \in I} M_i := \{\sum_{i \in I} x_i \mid (x_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} M_i\}.$$

Summa on *suora*, jos esitys

$$x = \sum_{i \in I} x_i, \text{ missä } (x_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} M_i$$

on yksikäsitteinen kaikilla $x \in \sum_{i \in I} M_i$.

Lause 1.14. Olkoon $(M_i)_{i \in I}$ perhe R-modulin M alimoduleita. Summa $\sum_{i \in I} M_i$ on suora, jos ja vain jos R-homomorfismi

$$f : \bigoplus_{i \in I} M_i \to \sum_{i \in I} M_i, \; (x_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} x_i$$

on isomorfismi.

Huomautus:
Olkoon $(M_i)_{i \in I}$ perhe R-modulin M alimoduleita. Jos $\sum_{i \in I} M_i$ on suora, niin merkitään

$$\sum_{i \in I} M_i = \bigoplus_{i \in I} M_i \; (\textit{sisäinen suora summa}).$$

Tällöin merkintä $\bigoplus_{i \in I} M_i$ voi olla

(i) $\{(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i \mid (x_i)_{i \in I} \text{ finiittinen}\}$ (*ulkoinen suora summa*),

(ii) $\sum_{i \in I} M_i$.

Määritelmä 1.7. R-modulin M alimoduli S on (modulin M) *suora tekijä*, jos on olemassa modulin M alimoduli T siten, että $M = S \bigoplus T$. Alimodulia T sanotaan (modulin S) *komplementiksi*.

Huomautus:
Modulin M suoran tekijän S komplementti ei ole yksikäsitteinen.

Lause 1.15. Olkoon M R-moduli ja $(M_i)_{i \in I}$ perhe modulin M alimoduleita. Summa $\sum_{i \in I} M_i$ on suora, jos ja vain jos

$$M_j \cap \sum_{i \neq j} M_i = \{0\} \text{ kaikilla } j \in I.$$

Esimerkki 1.1. Olkoon $(M_i)_{i \in I}$ perhe R-moduleita. Jos N on R-moduli, niin on olemassa R-isomorfismi

$$Hom_R(\bigoplus_{i \in I} M_i, N) \to \prod_{i \in I} Hom_R(M_i, N).$$

Määritelmä 1.8. R-modulin M alimoduli S on (modulin M) *retraktio*, jos on olemassa sellainen R-homomorfismi $\rho : M \to S$, että $\rho(s) = s$ kaikilla $s \in S$. Myös homomorfismia ρ kutsutaan *retraktioksi*.

Lause 1.16. (ks. [1, s. 50]) R-modulin M alimoduli S on suora tekijä, jos ja vain jos on olemassa retraktio $\rho : M \to S$.

Todistus. Olkoon M R-moduli ja S sen alimoduli. Oletetaan ensin, että $M = S \bigoplus T$ jollakin alimodulilla T. Tällöin jokainen $m \in M$ voidaan esittää yksikäsitteisellä tavalla muodossa $m = s + t$, missä $s \in S$ ja $t \in T$. Määritellään kuvaus $\rho : M \to S$, $s + t \mapsto s$. Kuvaus on mielekäs, koska esitys $s + t$ on yksikäsitteinen. Tietenkin $\rho(s) = s$ kaikilla $s \in S$ ja

$$\begin{aligned}\rho(am_1 + bm_2) &= \rho(a(s_1 + t_1) + b(s_2 + t_2)) \\ &= \rho((as_1 + bs_2) + (at_1 + bt_2)) \\ &= as_1 + bs_2 \\ &= a\rho(s_1 + t_1) + b\rho(s_2 + t_2) \\ &= a\rho(m_1) + b\rho(m_2)\end{aligned}$$

kaikilla $a, b \in R$ ja $m_1, m_2 \in M$, missä $m_1 = s_1 + t_1$ ja $m_2 = s_2 + t_2$. Siis ρ on retraktio.

Oletetaan sitten, että on olemassa retraktio $\rho : M \to S$. Osoitetaan, että $M = S \bigoplus ker(\rho)$. Tässä $\rho(s) = s$ kaikilla $s \in S$, joten $S \cap ker(\rho) = \{0\}$. Lauseen 1.15 perusteella summa $S + ker(\rho)$ on tällöin suora. Jos $m \in M$, niin

$$m = (m - \rho(m)) + \rho(m),$$

missä $\rho(m) \in im(\rho) = S$ ja $m - \rho(m) \in ker(\rho)$. Nimittäin $\rho(m) \in S$ ja $\rho(s) = s$ kaikilla $s \in S$, joten

$$\rho(m - \rho(m)) = \rho(m) - \rho(\rho(m)) = \rho(m) - \rho(m) = 0.$$

Siis $M = S \bigoplus ker(\rho)$. □

Lause 1.17. (ks. [1, s. 51])

(i) Jos $M = S \bigoplus T$ ja $S \subseteq N \subseteq M$, niin $N = S \bigoplus (N \cap T)$.

(ii) Jos $M = S \bigoplus T$ ja $S' \subseteq S$, niin $M/S' = S/S' \bigoplus (T + S')/S'$.

Todistus.

(i) Olkoon $\rho : M \to S$ retraktio $s + t \mapsto s$ (, kuten lauseessa 1.16). Koska $S \subseteq N$, niin rajoittuma $\rho_{|N} : N \to S$ on retraktio, jolla $ker(\rho_{|N}) = N \cap T$.

(ii) Kuvaus $\overline{\rho} : M/S' \to S/S'$ on retraktio, jolla $ker(\overline{\rho}) = (T + S')/S'$.

□

Esimerkki 1.2. (ks. [1, s. 68])

(i) Olkoon $(f_j : U_j \to V_j)_{j\in J}$ perhe R-homomorfismeja. Tällöin

$$\varphi : \bigoplus_{j\in J} U_j \to \bigoplus_{j\in J} V_j \ , \ (u_j)_{j\in J} \mapsto (f_j(u_j))_{j\in J}$$

on R-homomorfismi.

(ii) φ on injektio, jos ja vain jos f_j on injektio kaikilla $j \in J$.

Ratkaisu.

(i) Olkoot $(a_j)_{j\in J}, (b_j)_{j\in J} \in \bigoplus_{j\in J} U_j$ ja $r', r'' \in R$. Nyt

$$\begin{aligned}\varphi(r'(a_j)_{j\in J} + r''(b_j)_{j\in J}) &= \varphi((r'a_j + r''b_j)_{j\in J})\\ &= (f_j(r'a_j + r''b_j))_{j\in J}\\ &= r'(f_j(a_j))_{j\in J} + r''(f_j(b_j))_{j\in J}\\ &= r'\varphi((a_j)_{j\in J}) + r'\varphi((a_j)_{j\in J}).\end{aligned}$$

Siis φ on R-homomorfismi.

(ii) Oletetaan ensin, että φ on injektio. Olkoon $j \in J$ ja oletetaan, että $f_j(u_j) = 0$, missä $u_j \in U_j$. Nyt

$$0 = \rho_j^V(f_j(u_j)) \in \bigoplus_{j\in J} V_j,$$

missä ρ_j^V on, kuten kappaleen alussa. Toisaalta

$$0 = \rho_j^V(f_j(u_j)) = \varphi(\rho_j^U(u_j)).$$

Koska φ on injektio, niin $\rho_j^U(u_j) = 0 \in \bigoplus_{j\in J} U_j$, jolloin

$$u_j = \pi_j^U(\rho_j^U(u_j)) = 0,$$

missä π_j^U on projektio.

Oletetaan sitten, että f_j on injektio kaikilla $j \in J$. Oletetaan, että $\varphi((u_j)_{j\in J}) = 0$, missä $(u_j)_{j\in J} \in \bigoplus_{j\in J} U_j$. Nyt

$$0 = \pi_i^V(\varphi((u_j)_{j\in J})) = \pi_i^V((f_j(u_j))_{j\in J}) = f_i(u_i)$$

kaikilla $i \in J$. Koska f_j on injektio kaikilla $j \in J$, niin $u_j = 0$ kaikilla $j \in J$. Tällöin $(u_j)_{j\in J} = 0$, joten φ on injektio.

□

Lause 1.18. Olkoon M R-moduli ja $N \subseteq M$ alimoduli. Tekijäryhmä M/N on R-moduli. Kanoninen surjektio

$$\pi : M \to M/N, \ x \mapsto x + N$$

on R-homomorfismi.

Lause 1.19. Olkoon $f : A \to B$ R-homomorfismi. Jos $C \subseteq ker(f) \subseteq A$ on alimoduli, niin

$$\hat{f} : A/C \to B \ , \ a + C \mapsto f(a)$$

on R-homomorfismi.

Todistus. Oletetaan, että $a + C = a' + C$, missä $a, a' \in A$. Nyt $a - a' \in C \subseteq ker(f)$, joten $f(a - a') = f(a) - f(a') = 0$. Tällöin $f(a) = f(a')$ ja edelleen $\hat{f}(a + C) = f(a) = f(a') = \hat{f}(a' + C)$. Siis kuvaus $\hat{f}$ on mielekäs.

Olkoot $a + C, a' + C \in A/C$ ja $r, r' \in R$. Nyt

$$\begin{aligned}\hat{f}(r(a + C) + r'(a' + C)) &= \hat{f}(ra + r'a') + C)\\ &= f(ra + r'a') = rf(a) + r'f(a')\\ &= r\hat{f}(a + C) + r'\hat{f}(a' + C),\end{aligned}$$

koska f on R-homomorfismi. □

Lause 1.20. Jos $P \subseteq N \subseteq M$ on R-alimodulien torni, niin

$$f : M/P \to M/N, \ m + P \mapsto m + N$$

on surjektiivinen R-homomorfismi ja $ker(f) = N/P$.

Todistus. Oletetaan, että $m+P = n+P$, missä $m, n \in M$. Tällöin $m-n \in P$ ja edelleen $m - n \in N$. Tämä tarkoittaa vastaavasti, että $m + N = n + N$. Siis f on mielekäs kuvaus, koska

$$f(m + P) = m + N = n + N = f(n + P).$$

Jos $a, b \in R$ ja $m + P, n + P \in M/P$, niin

$$\begin{aligned}f(a(m + P) + b(n + P)) &= f((am + bn) + P)\\ &= (am + bn) + N\\ &= a(m + N) + b(n + N)\\ &= af(m + P) + bf(n + P).\end{aligned}$$

Siis f on R-homomorfismi. Lisäksi f on selvästi surjektio.

Oletetaan, että $f(m + P) = 0$, missä $m \in M$. Siis $m + N = 0$ eli $m \in N$. Saadaan

$$\begin{aligned}ker(f) &= \{m + P \in M/P \mid f(m + P) = 0\}\\ &= \{m + P \in M/P \mid m \in N\}\\ &= N/P.\end{aligned}$$

□

Lause 1.21 (1. isomorfialause)**.** Olkoot M ja M' R-moduleita. Jos $f : M \to M'$ on R-homomorfismi, niin on olemassa yksikäsitteinen R-isomorfismi

$$\overline{f} : M/ker(f) \to im(f)$$

siten, että $\overline{f}(x + ker(f)) = f(x)$ kaikilla $x \in M$.

Lause 1.22. Olkoot V ja V' äärellisulotteisia k-vektoriavaruuksia. Jos $f : V \to V'$ on lineaarikuvaus, niin $dim(ker(f)) + dim(im(f)) = dim(V)$.

Lause 1.23 (2. isomorfialause)**.** Olkoon M R-moduli. Jos $N, P \subseteq M$ ovat alimoduleita, niin $(N + P)/P \cong N/N \cap P$. Isomorfismina tässä on

$$\overline{f} : N/N \cap P \to (N + P)/P, \ x + N \cap P \mapsto x + P.$$

Lause 1.24 (3. isomorfialause)**.** Olkoon M R-moduli. Jos $N, P \subseteq M$ ovat alimoduleita siten, että $P \subseteq N$, niin $N/P \subseteq M/P$ on alimoduli ja $(M/P)/(N/P) \cong M/N$. Isomorfismina tässä on

$$\overline{f} : M/N \to (M/P)/(N/P), \ x + N \mapsto (x + P) + (N/P).$$

Määritelmä 1.9. Olkoot M, N ja P R-moduleita. Sanotaan, että kuvaus $f : M \times N \to P$ on *R-bilineaarinen*, jos kaikilla $a, b \in R$, $x, x_1, x_2 \in M$ ja $y, y_1, y_2 \in N$

(i) $f(ax_1 + bx_2, y) = af(x_1, y) + bf(x_2, y)$,

(ii) $f(x, ay_1 + by_2) = af(x, y_1) + bf(x, y_2)$.

Jos $P = R$, niin sanotaan, että f on *muoto.*

Määritelmä 1.10. Olkoot M ja N R-moduleita. Oletetaan, että T on R-moduli ja $\varphi : M \times N \to T$ R-bilineaarinen kuvaus. Sanotaan, että T on modulien M ja N *tensoritulo*, jos parilla (T, φ) on seuraava ominaisuus: *Jos P on R-moduli ja $f : M \times N \to P$ R-bilineaarinen kuvaus, niin on olemassa yksikäsitteinen R-homomorfismi $g : T \to P$ siten, että $g\varphi = f$ eli kaavio*

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, dashed, "g"] & P \\ M \times N \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

kommutoi.

Lause 1.25. Olkoot M ja N R-moduleita. Jos T ja T' ovat modulien M ja N tensorituloja, niin on olemassa R-isomorfismi $f : T \to T'$.

Jos T on R-modulien M ja N tensoritulo, niin merkitään $T = M \bigotimes_R N$. Jos φ on tensorituloon T liittyvä R-bilineaarinen kuvaus, niin merkitään kaikilla $x \in M$ ja $y \in N$ $x \otimes y = \varphi(x, y)$.

Lause 1.26. Jos M ja N ovat R-moduleita, niin $M \bigotimes_R N$ on olemassa.

Lause 1.27. Olkoot M ja N R-moduleita. Jos $w \in M \bigotimes_R N$, niin on olemassa alkiot $x_1, \dots, x_n \in M$ ja $y_1, \dots, y_n \in N$ siten, että

$$w = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i.$$

Lause 1.28. Olkoot M ja N R-moduleita. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen R-isomorfismi $f : M \bigotimes_R N \to N \bigotimes_R M$ siten, että $f(x \otimes y) = y \otimes x$ kaikilla $x \in M$ ja $y \in N$.

Lause 1.29. Jos M, N ja P ovat R-moduleita, niin on olemassa yksikäsitteinen R-isomorfismi $f : (M \bigotimes_R N) \bigotimes_R P \to M \bigotimes_R (N \bigotimes_R P)$ siten, että $f((x \otimes y) \otimes z) = x \otimes (y \otimes z)$ kaikilla $x \in M$, $y \in N$ ja $z \in P$.

Jos $f : M \to M'$ ja $g : N \to N'$ ovat R-homomorfismeja, niin kuvaus

$$M \times N \to M' \otimes_R N', \ (x, y) \mapsto f(x) \otimes g(y)$$

on R-bilineaarinen. On siis olemassa yksikäsitteinen R-homomorfismi $h : M \bigotimes_R N \to M' \bigotimes_R N'$ siten, että $h(x \otimes y) = f(x) \otimes g(y)$.

Määritelmä 1.11. Olkoot M, N, M' ja N' R-moduleita ja $f : M \to M'$ ja $g : N \to N'$ R-homomorfismeja. Kuvausta $h : M \bigotimes_R N \to M' \bigotimes_R N'$, jolla $h(x \otimes y) = f(x) \otimes g(y)$ kaikilla $(x, y) \in M \times N$, sanotaan R-homomorfismien f ja g *tensorituloksi*. Merkitään $h = f \otimes h$.

Lause 1.30. Olkoot M, M', M'', N, N' ja N'' R-homomorfismeja. Jos $f : M \to M'$, $g : N \to N'$, $f' : M' \to M''$ ja $g' : N' \to N''$ ovat R-homomorfismeja, niin

$$(f' \otimes g')(f \otimes g) = (f'f) \otimes (g'g).$$

Lause 1.31. Jos $f : M \to M'$ ja $g : N \to N'$ ovat R-isomorfismeja, niin samoin on $f \otimes g : M \bigotimes_R N \to M' \bigotimes_R N'$.

Lause 1.32. (ks. [1, s. 133]) Olkoon $i : A \to B$ injektiivinen R-homomorfismi ja M R-moduli. Jos $u \in ker(1_M \otimes i)$, niin on olemassa äärellisesti viritetty alimoduli $N \subseteq M$ ja alkio $u' \in N \otimes_R A$ siten, että

(i) $u' \in ker(1_N \otimes i)$,

(ii) $u = (\phi \otimes 1_A)(u')$, missä $\phi : N \to M$ on inkluusio.

Esimerkki 1.3. Olkoon M R-moduli. Tällöin

$$\varphi : M \to R \otimes_R M \;,\; m \mapsto 1 \otimes m$$

on R-isomorfismi ja käänteiskuvaus on

$$\varphi^{-1} : R \otimes_R M \to M \;,\; r \otimes m \mapsto rm.$$

Esimerkki 1.4. Olkoot M, N ja P R-moduleita. Tällöin

$$\varphi : Hom_R(M \otimes_R N, P) \to Hom_R(M, Hom_R(N, P)),$$

$\rho \mapsto (x \mapsto (y \mapsto \rho(x \otimes y)))$ on R-isomorfismi ja käänteiskuvaus on

$$\varphi^{-1} : Hom_R(M, Hom_R(N, P)) \to Hom_R(M \otimes_R N, P),$$

$\tau \mapsto (x \otimes y \mapsto \tau(x)(y))$.

Edellisestä esimerkistä voidaan muokata seuraavanlainen esimerkki:

Esimerkki 1.5. Olkoot M, N ja P R-moduleita. Tällöin

$$\varphi : Hom_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N, P) \to Hom_R(M, Hom_{\mathbb{Z}}(N, P)),$$

$\rho \mapsto (x \mapsto (y \mapsto \rho(x \otimes y)))$ on R-isomorfismi ja käänteiskuvaus on

$$\varphi^{-1} : Hom_R(M, Hom_{\mathbb{Z}}(N, P)) \to Hom_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N, P),$$

$\tau \mapsto (x \otimes y \mapsto \tau(x)(y))$.

Lause 1.33. (ks. [1, s. 86]) Olkoon A R-moduli ja $(B_i)_{i \in I}$ perhe R-moduleita. Tällöin

$$\tau : A \otimes_R \bigoplus_{i \in I} B_i \to \bigoplus_{i \in I} (A \otimes_R B_i),$$

$a \otimes (b_I)_{i \in I} \mapsto (a \otimes b_i)_{i \in I}$ on R-isomorfismi.

Todistus. Määritellään kuvaus

$$f : A \times \bigoplus_{i \in I} B_i \to \bigoplus_{i \in I} (A \otimes_R B_i)$$

asettamalla $f(a, (b_i)_{i \in I}) = (a \otimes b_i)_{i \in I}$ kaikilla $a \in A$ ja $(b_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} B_i$. Tässä f on R-bilineaarinen, koska $\otimes$ on R-bilineaarinen. Tällöin on olemassa R-homomorfismi

$$\tau : A \otimes_R \bigoplus_{i \in I} B_i \to \bigoplus_{i \in I} (A \otimes_R B_i),$$

$a \otimes (b_I)_{i\in I} \mapsto (a \otimes b_i)_{i\in I}$.

Etsitään tälle käänteiskuvaus. Meillä on R-homomorfismit

$$1_A \otimes \rho_j : A \otimes_R B_i \to A \otimes_R \bigoplus_{i\in I} B_i$$

kaikilla $j \in I$, missä

$$\rho_j : B_j \to \bigoplus_{i\in I} B_i,\ x \mapsto (y_i)_{i\in I},\ \text{missä } y_i = \begin{cases} 0 & \text{jos } i \neq j, \\ x & \text{jos } i = j. \end{cases}$$

Määritellään kuvaus

$$\phi : \bigoplus_{i\in I}(A \otimes_R B_i) \to A \otimes_R \bigoplus_{i\in I} B_i$$

asettamalla $\phi((a\otimes b_i)_{i\in I}) = a\otimes\sum_{i\in I}\rho_i(b_i)$ kaikilla $a \in A$ ja $(b_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} B_i$. Tässä ϕ on R-homomorfismi, koska $1_A\otimes\rho_i$ on R-homomorfismi kaikilla $i \in I$.

ϕ on R-isomorfismi, koska

$$\phi(\tau(a \otimes (b_i)_{i\in I})) = \phi((a \otimes b_i)_{i\in I}) = a \otimes \sum_{i\in I} \rho_i(b_i) = a \otimes (b_i)_{i\in I}$$

ja

$$\tau(\phi((a \otimes b_i)_{i\in I})) = \tau(a \otimes \sum_{i\in I} \rho_i(b_i)) = \tau(a \otimes (b_i)_{i\in I}) = (a \otimes b_i)_{i\in I}.$$

□

1.1 Zornin lemma

Tässä alaluvussa käydään lyhyesti läpi Zornin lemma ja siihen liittyvät määritelmät. Nimestään huolimatta Zornin lemma ei ole lause vaan aksiooma. Se on yhtäpitävä muun muassa valinta-aksiooman kanssa.

Zornin lemmaa käytetään Lauseessa 4.11.

Määritelmä 1.12. Paria $(S, \leq)$ sanotaan *osittain järjestetyksi joukoksi*, jos S on epätyhjä joukko, $\leq$ relaatio joukossa S ja kaikilla $x, y, z \in S$

(i) $x \leq x$,

(ii) jos $x \leq y$ ja $y \leq x$, niin $x = y$,

(iii) jos $x \leq y$ ja $y \leq z$, niin $x \leq z$.

Jos $(S, \leq)$ on osittain järjestetty joukko, niin sanotaan myös, että S on osittain järjestetty joukko. Relaatiota $\leq$ sanotaan *osittaiseksi järjestykseksi*.

Määritelmä 1.13. Olkoon S osittain järjestetty joukko ja $S_0 \subseteq S$. Sanotaan, että alkio $x \in S$ on osajoukon S_0 *yläraja*, jos kaikilla $y \in S_0$

$$y \leq x.$$

Määritelmä 1.14. Olkoon S osittain järjestetty joukko ja $S_0 \subseteq S$. Sanotaan, että alkio $x \in S_0$ on *maksimaalinen alkio*, jos pätee seuraava:

$$\text{jos } x \leq y, \text{ niin } x = y \ (y \in S_0).$$

Alkio on siis maksimaalinen, jos se ei edellä mitään muuta alkiota kuin itseään.

Määritelmä 1.15. Olkoon S osittain järjestetty joukko ja $S_0 \subseteq S$. Sanotaan, että S_0 on *ketju* (joukossa S), jos kaikilla $x, y \in S_0$

$$\text{joko } x \leq y \text{ tai } y \leq x.$$

Zornin lemma:
Olkoon S osittain järjestetty joukko. Oletetaan, että jokaisella ketjulla joukossa S on yläraja. Tällöin joukolla S on ainakin yksi maksimaalinen alkio.

2 Eksaktit ja lohkeavat jonot

Eksakti jono on kätevä tapa esittää moduleita ja niiden välisiä homomorfismeja. Etenkin lyhyt eksakti jono ja sen lohkeavuus ovat tärkeitä tutkittaessa projektiivisia, injektiivisiä ja laakeita moduleita.

Määritelmä 2.1. Äärellistä tai ääretöntä jonoa R-homomorfismeja ja R-moduleita

$$\cdots \to M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \to \cdots$$

sanotaan *eksaktiksi jonoksi*, jos $im(f_{n+1}) = ker(f_n)$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$.

Huomautus:
Nuolia $0 \xrightarrow{f} A$ ja $B \xrightarrow{f} 0$ ei tarvitse nimetä, koska molemmissa tapauksissa morfismi on yksikäsitteinen: $f : 0 \mapsto 0$ ja $g : b \mapsto 0$.

Seuraavaksi esitetään tietynlaisten eksaktien jonojen ominaisuuksia. Etenkin kohdat (i) ja (ii) ovat jatkossa isossa käytössä.

Lause 2.1. (ks. [1, s. 46], [3, s. 10])

(i) Jono $0 \to A \xrightarrow{f} B$ on eksakti, jos ja vain jos f on injektiivinen.

(ii) Jono $B \xrightarrow{g} C \to 0$ on eksakti, jos ja vain jos g on surjektiivinen.

(iii) Jono $0 \to A \xrightarrow{h} B \to 0$ on eksakti, jos ja vain jos h on isomorfismi.

Todistus.

(i) R-homomorfismin $0 \to A$ kuva on $\{0\}$. Jos jono on eksakti, niin $Ker(f) = \{0\}$. Siis f on injektiivinen.

Jos $f : A \to B$ on R-homomorfismi, niin on olemassa eksakti jono $ker(f) \xrightarrow{i} A \xrightarrow{f} B$, missä i on inkluusio. Jos f on injektiivinen, niin $ker(f) = \{0\}$.

(ii) R-homomorfismin $C \to 0$ ydin on C. Jos jono on eksakti, niin $im(g) = C$, jolloin g on surjektiivinen.

Jos $g : B \to C$ on R-homomorfismi, niin on olemassa eksakti jono $B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{\pi} C/im(g)$, missä π on luonnollinen kuvaus. Jos g on surjektiivinen, niin $im(g) = C$ ja $C/im(g) = \{0\}$.

(iii) Kohdan (i) mukaan h on injektiivinen, jos ja vain jos jono $0 \to A \xrightarrow{h} B$ on eksakti. Kohdan (ii) mukaan h on surjektiivinen, jos ja vain jos jono $A \xrightarrow{h} B \to 0$ on eksakti. Siis h on isomorfismi, jos ja vain jos jono $0 \to A \xrightarrow{h} B \to 0$ on eksakti.

$\square$

Huomautus:
Lauseen 2.1 kohtien (i) ja (ii) mukaan, jos jono

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

on eksakti, niin f on injektio ja g surjektio. Päinvastainen ei päde. Esimerkiksi

$$0 \to A \xrightarrow{1_A} A \xrightarrow{1_A} A \to 0$$

ei ole eksakti, vaikka 1_A on sekä injektio, että surjektio.

Määritelmä 2.2. *Lyhyt eksakti jono* on muotoa

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$$

oleva eksakti jono. Tätä lyhyttä eksaktia jonoa kutsutaan myös modulin A *laajennukseksi* modulilla C.

Määritelmää edeltävässä huomautuksessa mainittiin, että lyhyessä eksaktissa jonossa homomorfismi i on injektio ja p surjektio. Lisäksi $im(i) = ker(p)$. Näillä ominaisuuksilla tätä muotoa oleva jono on eksakti.

Lause 2.2. (ks. [1, s. 47])

(i) Jos $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$ on lyhyt eksakti jono, niin

$$A \cong im(i) \text{ ja } B/im(i) \cong C.$$

(ii) Jos $T \subseteq S \subseteq M$ on alimodulien torni, niin on olemassa eksakti jono

$$0 \to S/T \to M/T \to M/S \to 0.$$

Todistus.

(i) Lauseen 2.1 nojalla i on injektio ja p surjektio. Tällöin $A \cong im(i)$ ja $im(p) = C$. Ensimmäisen isomorfialauseen (ks. lause 1.21) mukaan $B/ker(p) \cong im(p)$. Koska jono on eksakti, niin $ker(p) = im(i)$, joten $B/im(i) \cong C$.

(ii) Olkoon $i : S/T \to M/T$ inkluusio ja $p : M/T \to M/S, m+T \mapsto m+S$. Inkluusiona i on injektiivinen ja $im(i) = S/T$. Lauseen 1.20 mukaan p on surjektiivinen R-homomorfismi ja $ker(p) = S/T$. Lauseen 2.1 nojalla jono

$$0 \to S/T \xrightarrow{i} M/T \xrightarrow{p} M/S \to 0$$

on eksakti.

$\square$

Esimerkki 2.1. (ks. [1, s. 65]) Jos

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0,$$

missä A, B ja C ovat R-moduleita, on eksakti jono ja M on R-moduli, niin on olemassa eksaktit jonot

$$0 \to A \oplus M \xrightarrow{i'} B \oplus M \xrightarrow{p'} C \to 0$$

ja

$$0 \to A \xrightarrow{i''} B \oplus M \xrightarrow{p''} C \oplus M \to 0.$$

Ratkaisu. Määritellään kuvaukset $i' : A \bigoplus M \to B \bigoplus M$, $(a, m) \mapsto (i(a), m)$ ja $p' : B \bigoplus M \to C$, $(b, m) \mapsto p(b)$. Tässä i' ja p' ovat R-homomorfismeja, koska i, 1_M ja p ovat R-homomorfismeja. Lisäksi i' on injektio, koska i ja 1_M ovat injektioita, ja vastaavasti p' on surjektio, koska p on surjektio.

Jos $(a, m) \in A \bigoplus M$, niin

$$(p'i')((a, m)) = p'(i'((a, m))) = p'((i(a), m)) = p(i(a)) = 0$$

eli $im(i') \subseteq ker(p')$.

Jos $(b, m) \in ker(p')$, niin $p'((b, m)) = p(b) = 0$. Koska $ker(p) = im(i)$, niin $b = i(a)$ jollakin $a \in A$. Nyt $i'((a, m)) = (i(a), m) = (b, m)$, joten $im(i') = ker(p')$. Siis jono on eksakti.

Toisen jonon eksaktius osoitetaan vastaavalla tavalla määrittelemällä kuvaukset $i'' : A \to B \bigoplus M$, $a \mapsto (i(a), 0)$ ja $p'' : B \bigoplus M \to C \bigoplus M$, $(b, m) \mapsto (p(b), m)$. $\square$

Eksakteja jonoja voi yhdistää ja hajottaa osiin, kuten seuraavasta esimerkistä huomataan.

Esimerkki 2.2. (ks. [1, s. 65])

(i) Olkoon

$$\cdots \to A_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1} \to \cdots$$

eksakti jono. Tällöin jono

$$0 \to ker(d_n) \xrightarrow{i_n} A_n \xrightarrow{d'_n} im(d_n) \to 0,$$

missä $i_n : ker(d_n) \to A_n$ on inkluusio ja $d'_n : A_n \to im(d_n)$, $a \mapsto d_n(a)$, on eksakti kaikilla $n \in \mathbb{Z}$.

(ii) Olkoot

$$\cdots \to A_1 \xrightarrow{f_1} A_0 \xrightarrow{f_0} K \to 0$$

ja

$$0 \to K \xrightarrow{g_0} B_0 \xrightarrow{g_1} B_1 \to \cdots$$

eksakteja jonoja. Tällöin jono

$$\cdots \to A_1 \xrightarrow{f_1} A_0 \xrightarrow{g_0 f_0} B_0 \xrightarrow{g_1} B_1 \to \cdots$$

on myös eksakti.

Ratkaisu.

(i) Tietenkin i_n on injektio ja d'_n surjektio. Pitää vielä osoittaa, että $im(i_n) = ker(d'_n)$. Koska i_n on inkluusio, niin $im(i_n) = ker(d_n)$, ja edelleen $ker(d_n) = ker(d'_n)$, koska d'_n on saatu homomorfismista d_n muuttamalla maalijoukkoa (, mikä ei vaikuta ytimeen).

(ii) Pitää osoittaa, että $im(f_1) = ker(g_0 f_0)$ ja $im(g_0 f_0) = ker(g_1)$. Lauseen 2.1 mukaan f_0 on surjektio ja g_0 injektio.

Koska g_0 on injektio (eli $ker(g) = 0$), niin $ker(g_0 f_0) = ker(f_0)$, ja toisaalta oletuksen mukaan $ker(f_0) = im(f_1)$. Siis $im(f_1) = ker(g_0 f_0)$.

Koska f_0 on surjektio, niin $im(g_0 f_0) = im(g_0)$. Toisaalta oletuksen mukaan $im(g_0) = ker(g_1)$, joten $im(g_0 f_0) = ker(g_1)$. Siis jono on eksakti.

□

Määritelmä 2.3. Lyhyt eksakti jono

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$$

on *lohkeava*, jos on olemassa sellainen kuvaus $j : C \to B$, että $pj = 1_C$. Sanotaan myös, että jono *lohkeaa*.

Huomautus:
Nähdään, että ehdosta $pj = 1_C$ seuraa kuvauksen p surjektiivisuus ja kuvauksen j injektiivisyys.

Nimittäin, jos $c \in C$, niin $j(c) \in B$ ja edelleen

$$p(j(c)) = c.$$

Jos $j(c) = 0$, missä $c \in C$, niin

$$0 = p(j(c)) = c.$$

Jos lyhyt eksakti jono

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$$

on lohkeava, niin $B \cong A \oplus C$. Tämä osoitetaan Lauseessa 2.3. Sitä ennen kaksi esimerkkiä lohkeavista eksakteista jonoista.

Esimerkki 2.3. (ks. [1, s. 65], [4]) Olkoot A, B ja C R-moduleita ja

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$$

lyhyt eksakti jono. Tällöin on olemassa sellainen kuvaus $j : C \to B$, että $pj = 1_C$, jos ja vain jos on olemassa sellainen kuvaus $q : B \to A$, että $qi = 1_A$.

Ratkaisu.

”$\Rightarrow$”

Olkoon $b \in B$. Huomataan, että

$$\begin{aligned} &p(b - j(p(b))) = p(b) - p(j(p(b))) = p(b) - (pj)(p(b)) \\ &= p(b) - p(b) = 0, \end{aligned}$$

joten $b - j(p(b)) \in ker(p)$. Mutta $ker(p) = im(i)$ eksaktiuden vuoksi, joten on olemassa $a \in A$ siten, että $i(a) = b - j(p(b))$. Alkio a on yksikäsitteinen, koska lauseen 2.1 mukaan i on injektio. Määritellään kuvaus $q : B \to A$ asettamalla $q(b) = a$, missä $i(a) = b - j(p(b))$.

Olkoot $r_1, r_2 \in R$ ja $b, b' \in B$. Havaitaan, että

$$\begin{aligned} &i(r_1 a + r_2 a') = r_1 i(a) + r_2 i(a') \\ &= r_1(b - j(p(b))) + r_2(b' - j(p(b'))) = r_1 b + r_2 b' - (j(p(r_1 b + r_2 b'))), \end{aligned}$$

missä $q(b) = a$ ja $q(b') = a'$. Siis

$$q(r_1 b + r_2 b') = r_1 a + r_2 a' = r_1 q(b) + r_2 q(b').$$

Täten q on R-homomorfismi.

Jos $a \in A$, niin selvästi $q(i(a)) = a$.

”$\Leftarrow$”

Koska p on surjektio lauseen 2.1 mukaan, niin jokaista $c \in C$ kohti on olemassa vähintään yksi sellainen $b \in B$, että $c = p(b)$. Määritellään kuvaus $j : C \to B$ asettamalla $j(c) = b - i(q(b))$, missä $c = p(b)$.

Osoitetaan ensin, että on mielekästä määritellä kuvaus näin. Oletetaan, että $p(b) = p(b')$ joillakin $b, b' \in B$. Tällöin

$$0 = p(b) - p(b') = p(b - b'),$$

joten $b-b' \in ker(p)$. Eksaktiuden vuoksi $im(i) = ker(p)$, joten $i(q(b-b')) = b-b'$. Nyt

$$\begin{aligned} & b - i(q(b)) - (b' - i(q(b'))) = b - b' - (i(q(b)) - i(q(b'))) \\ & = b - b' - (i(q(b-b'))) = b - b' - (b - b') = 0 \end{aligned}$$

eli määritelmä on mielekäs.

j on R-homomorfismi, koska kaikilla $r_1, r_2 \in R$ ja $c, c' \in C$

$$\begin{aligned} & j(r_1 c + r_2 c') = j(r_1 p(b) + r_2 p(b)) = j(p(r_1 b + r_2 b')) \\ & = r_1 b + r_2 b' - i(q(r_1 b + r_2 b)) = r_1(b - i(q(b))) + r_2(b' - i(q(b'))) \\ & = r_1 j(c) + r_2 j(c'), \end{aligned}$$

missä $c = p(b)$ ja $c' = p(b')$, joillakin $b, b' \in B$.

Jos $c \in C$, niin

$$pj(c) = p(b - i(q(b))) = p(b) - p(i(q(b))) = c - 0 = c.$$

$\square$

Esimerkki 2.4. Jono

$$0 \to A \xrightarrow{i} A \oplus C \xrightarrow{p} C \to 0,$$

missä $i : A \to A \bigoplus C$, $a \mapsto (a, 0)$ ja $p : A \bigoplus C \to C$, $(a, c) \mapsto c$, on lohkeava eksakti jono. Koska i on injektio ja p surjektio, niin lauseen 2.1 mukaan jono on eksakti. Määritellään kuvaus $j : C \to A \bigoplus C$, $c \mapsto (0, c)$. Jos $c \in C$, niin

$$(pj)(c) = p(j(c)) = p((0, c)) = c.$$

Siis $pj = 1_C$ ja jono on lohkeava.

Lause 2.3. (ks. [1, s. 52]) Jos jono

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$$

on lohkeava, niin $B \cong A \bigoplus C$.

Todistus. Käytetään apuna lauseen 1.13 kohtia (i) ja (ii). Pitää siis osoittaa, että i ja j ovat injektiivisiä, $B = im(i) + im(j)$ ja $im(i) \cap im(j) = 0$.

i on injektio lauseen 2.1 mukaan.

Oletetaan, että $j(c) = j(c')$, missä $c, c' \in C$. Koska p on lauseen 2.1 mukaan surjektio, niin on olemassa sellaiset $b, b' \in B$, että $c = p(b)$ ja $c' = p(b')$. Nyt

$$c = pj(c) = p(j(c)) = p(j(c')) = pj(c') = c'.$$

Siis j on injektio.

Olkoon $b \in im(i) \cap im(j)$. Koska $b \in im(j)$, niin $b = j(c)$, jollain $c \in C$. Koska $b \in im(i)$, niin eksaktiuden vuoksi $b \in ker(p)$ eli $p(b) = 0$. Nyt

$$0 = p(b) = p(j(c)) = c$$

ja edelleen

$$b = j(c) = j(0) = 0.$$

Siis $im(i) \cap im(j) = 0$.

Esimerkissä 2.3 todettiin, että jokaista $b \in B$ kohti on olemassa yksikäsitteinen $a \in A$ siten, että $i(a) = b - j(p(b))$. Siis $b = i(a) + j(p(b)) \in im(i) \cap im(j)$, joten $B = im(i) + im(j)$.

Täten lauseen 1.13 mukaan $B \cong A \bigoplus C$. □

Edellisessä Lauseessa päinvastainen ei kuitenkaan päde. Esimerkki tästä löytyy esimerkiksi Rotmanin kirjasta (ks. [1, s. 54]).

Tässä tutkielmassa ei eksakteihin jonoihin liittyen erityisen isoja kaavioita tutkita. Tämän kappaleen lopuksi esitetään kuitenkin 5-lemma, johon törmää välttämättä eksaktien jonojen kanssa.

Lause 2.4 (5-lemma)**.** (ks. [2, s. 23]) Olkoon

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\varphi_1"] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\varphi_2"] & A_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\varphi_3"] & A_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "\varphi_4"] & A_5 \arrow[d, "\varphi_5"] \\
B_1 \arrow[r, "g_1"'] & B_2 \arrow[r, "g_2"'] & B_3 \arrow[r, "g_3"'] & B_4 \arrow[r, "g_4"'] & B_5
\end{tikzcd}$$

kommutoiva kaavio eksaktein rivein. Oletetaan, että φ_2 ja φ_4 ovat isomorfismeja, φ_1 on surjektio ja φ_5 on injektio. Tällöin φ_3 on isomorfismi.

Todistus.

· φ_3 on surjektio

Osoitetaan ensin, että $im(g_2) \subseteq im(\varphi_3)$. Olkoon $b' \in B_2$. Koska φ_2 on surjektio, niin on olemassa sellainen $a'' \in A_2$, että $b' = \varphi_2(a'')$. Kommutatiivisuuden takia $g_2\varphi_2 = \varphi_3 f_2$, joten

$$g_2(b') = g_2(\varphi_2(a'')) = \varphi_3(f_2(a'')) \in im(\varphi_3).$$

Siis $im(g_2) \subseteq im(\varphi_3)$.

Olkoon $b \in B_3$. Koska φ_4 on surjektio, niin $B_4 = im(\varphi_4)$. Tällöin $g_3(b) \in B_4 = im(\varphi_4)$, joten on olemassa sellainen $a \in A_4$, että $g_3(b) = \varphi_4(a)$.

Alemman rivin eksaktiuden takia $im(g_3) = ker(g_4)$ ja kommutatiivisuuden takia $g_4\varphi_4 = \varphi_5 f_4$, joten

$$0 = g_4(g_3(b)) = g_4(\varphi_4(a)) = \varphi_5(f_4(a)).$$

Koska φ_5 on injektio, niin $f_4(a) = 0$ ja $a \in ker(f_4)$. Ylemmän rivin eksaktiuden vuoksi $im(f_3) = ker(f_4)$, joten on olemassa sellainen $a' \in A_3$, että $a = f_3(a')$. Kommutatiivisuuden takia $\varphi_4 f_3 = g_3\varphi_3$, joten

$$g_3(b) = \varphi_4(a) = \varphi_4(f_3(a')) = g_3(\varphi_3(a'))$$

ja edelleen

$$0 = g_3(b) - g_3(\varphi_3(a')) = g_3(b - \varphi_3(a')).$$

Siis $b - \varphi_3(a') \in ker(g_3)$. Alemman rivin eksaktiuden vuoksi $ker(g_3) = im(g_2)$ ja edellä osoitettiin, että $im(g_2) \subseteq im(\varphi_3)$, joten $b - \varphi_3(a') \in im(\varphi_3)$. Tällöin $b - \varphi_3(a') = \varphi_3(a'')$ jollakin $a'' \in A_2$, ja edelleen

$$b = \varphi_3(a' + a'').$$

Siis φ_3 on surjektio.

· φ_3 on injektio

Oletetaan, että $\varphi_3(a) = 0$, missä $a \in A_3$. Kommutatiivisuuden vuoksi $g_3\varphi_3 = \varphi_4 f_3$, joten

$$0 = g_3(\varphi_3(a)) = \varphi_4(f_3(a)).$$

Koska φ_4 on injektio, niin $f_3(a) = 0$. Siispä on olemassa sellainen $a' \in A_2$, että $a = f_2(a')$, koska ylemmän rivin eksaktiuden takia $im(f_2) = ker(f_3)$. Kommutatiivisuuden takia $\varphi_3 f_2 = g_2\varphi_2$, joten

$$0 = \varphi_3(a) = \varphi_3(f_2(a')) = g_2(\varphi_2(a'))$$

ja siis $\varphi_2(a') \in ker(g_2)$. Alemman rivin eksaktiuden vuoksi $ker(g_2) = im(g_1)$, joten on olemassa sellainen $b' \in B_1$, että $\varphi_2(a') = g_1(b')$. Koska φ_1 on surjektio, niin on olemassa sellainen $a'' \in A_1$, että $b' = \varphi_1(a'')$. Kommutatiivisuudesta seuraa, että $g_1\varphi_1 = \varphi_2 f_1$, joten

$$\varphi_2(a') = g_1(b') = g_1(\varphi_1(a'')) = \varphi_2(f_1(a'')).$$

Koska φ_2 on injektio, niin $a' = f_1(a'')$. Ylemmän rivin eksaktiuden takia $im(f_1) = ker(f_2)$, joten tällöin

$$a = f_2(a') = f_2(f_1(a'')) = 0.$$

Siis on osoitettu, että φ_3 on injektio.

□

3 Kategoriat ja funktorit

Määritelmä 3.1. *Kategoria* $\mathcal{C}$ koostuu kolmesta osasta: *objektien* luokasta $obj(\mathcal{C})$, *morfismien* joukoista $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ jokaista luokan $obj(\mathcal{C})$ alkioparia (A,B) kohti sekä *morfismien yhdistämisestä* eli funktiosta

$$Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \times Hom_{\mathcal{C}}(B,C) \to Hom_{\mathcal{C}}(A,C), \quad (f,g) \mapsto gf,$$

missä $A,B,C \in obj(\mathcal{C})$. Sanotaan, että gf on (morfismien g ja f) *yhdistetty morfismi* tai (morfismien g ja f) *yhdiste*. Nämä osat toteuttavat seuraavat kolme ehtoa:

(i) morfismien joukot ovat *pareittain erilliset*. Toisin sanoen,

$$\text{jos } Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \cap Hom_{\mathcal{C}}(C,D) \neq \varnothing, \text{niin } A = C \text{ ja } B = C,$$

(ii) jokaista objektia A kohti on olemassa sellainen *identiteettimorfismi* $1_A \in Hom_{\mathcal{C}}(A,A)$, että

$$f1_A = f \text{ ja } 1_B f = f \text{ kaikilla } f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B),$$

(iii) morfismien yhdistäminen on liitännäinen eli kaikilla $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$, $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B,C)$ ja $h \in Hom_{\mathcal{C}}(C,D)$

$$h(gf) = (hg)f.$$

Sanotaan, että kategoria on

- *diskreetti*, jos sen kaikki morfismit ovat identiteettimorfismeja,
- *pieni*, jos $obj(\mathcal{C})$ on joukko.

Huomautus:
Jos sekaannuksen vaaraa ei ole, voidaan merkitä

$$Hom_{\mathcal{C}}(A,B) = Hom(A,B).$$

Lisäksi merkinnän $f \in Hom(A,B)$ sijasta voidaan käyttää merkintöjä $f : A \to B$ tai $A \xrightarrow{f} B$.

Huomautus:
Jos kategoriaehdokkaan $\mathcal{C}$ morfismien joukot eivät ole pareittain erilliset, voidaan ne pakottaa erillisiksi määrittelemällä kaikilla $A,B \in obj(\mathcal{C})$ ja $f \in Hom(A,B)$

$$Hom(A,B) = \{A\} \times Hom(A,B) \times \{B\} \text{ ja } f = (A,f,B).$$

Osoitetaan, että identiteettimorfismit ovat yksikäsitteisiä.

Esimerkki 3.1. (ks. [1, s. 33], [3, s. 41-42]) Olkoon $\mathcal{C}$ kategoria. Identiteettimorfismi 1_A on yksikäsitteinen kaikilla $A \in obj(\mathcal{C})$.

Ratkaisu. Olkoon myös $1'_A$ objektiin A liittyvä identiteettimorfismi. Koska 1_A on identiteettimorfismi, niin $1_A 1'_A = 1'_A$. Koska $1'_A$ on identiteettimorfismi, niin $1_A 1'_A = 1_A$. Siis $1_A = 1'_A$, joten identiteettimorfismi on yksikäsitteinen. □

Edellinen esimerkki osoittaa, että on olemassa bijektio kategorian objektien ja identiteettimorfismien välillä. Kategorian voi siis ajatella koostuvan pelkästään morfismeista.

Kategorioita voi olla aluksi hankala sisäistää pelkän määritelmän avulla. Väistämättä morfismeja pitää funktioina, jo merkintöjenkin takia, vaikka näin ei suinkaan aina ole. Seuraavaksi annetaan esimerkkejä konkreettisista kategorioista. Kategoriaehdokkaan todistamisessa kategoriaksi pitää osoittaa, että morfismien luokat ovat joukkoja, morfismien yhdistäminen on mielekäs ja että määritelmän kolme ehtoa toteutuvat. Seuraavassa esimerkissä osa todistuksista jätetään lukijan vastuulle. Huomaa, että tietylle luokalle objekteja ei ole olemassa yksikäsitteistä kategoriaa.

Esimerkki 3.2. (ks. [1, s. 9-16], [2, s. 3-4], [3, s. 42])

(i) **Joukot**. Tässä kategoriassa objekteina ovat joukot, morfismeina funktiot ja morfismien yhdistämisenä funktioiden yhdistäminen.

Joukko-opin aksiooman mukaan, jos A ja B ovat joukkoja, niin luokka $Hom(A, B)$, eli kaikki funktiot joukosta A joukkoon B, on myös joukko. Kaksi funktiota ovat määritelmän mukaan samat, jos lähtö- ja maalijoukot ovat samat (ja lisäksi alkiot kuvautuvat samalla tavalla). Siis morfismien joukot ovat pareittain erilliset. Identiteettimorfismina on identiteettifunktio ja funktioiden yhdistäminen on tunnetusti liitännäinen.

(ii) **Ryhmät**. Tässä kategoriassa objekteina ovat ryhmät, morfismeina homomorfismit ja morfismien yhdistämisenä funktioiden yhdistäminen.

Kuten edellä, luokat $Hom(A, B)$ ovat joukkoja (, koska homomorfismit ovat funktioita ja ryhmät joukkoja). Muut kohdat seuraavat ryhmäteoriasta.

(iii) **Osittain järjestetty joukko** X. Tässä kategoriassa objekteina ovat joukon X alkiot, kaikilla $x, y \in X$

$$Hom(x, y) := \begin{cases} \varnothing & \text{jos } x \not\preceq y, \\ \{i^x_y\} & \text{jos } x \preceq y \end{cases}$$

ja kaikilla $x, y, z \in X$, missä $x \preceq y$ ja $y \preceq z$,

$$i_z^y i_y^x := i_z^x.$$

Symbolilla i_y^x tarkoitetaan yksikäsitteistä joukon $Hom(x, y)$ alkioita, kun $x \preceq y$.

Refleksiivisyyden takia identiteettimorfismi i_x^x on olemassa kaikilla $x \in X$ ja transitiivisuuden takia morfismien yhdistäminen on mielekäs. Tietenkin morfismien joukot ovat pareittain erilliset ja kaikilla $a, b, c, d \in X$, missä $a \preceq b$, $b \preceq c$ ja $c \preceq d$,

$$i_d^c(i_c^b i_b^a) = i_d^c i_c^a = i_d^a = i_d^b i_b^a = (i_d^c i_c^b) i_b^a.$$

(iv) **Topologia $\mathcal{U}$**. Olkoon X topologinen avaruus ja $\mathcal{U}$ sen topologia. Tällöin $\mathcal{U}$ on osittain järjestetty joukko relaationa osajoukkous $\subseteq$, joten se on erikoistapaus kohdasta (iii). Morfismit i_V^U, missä $U \subseteq V$, voi sisäistää inkluusioiksi $i : U \to V$.

(v) **Luonnollinen luku n**. Olkoon $n \geq 1$ luonnollinen luku. Tutkitaan joukkoa $n := \{0, 1, \ldots, n-1\}$ osittain järjestettynä joukkona relaationa $\leq$. Saadaan kategoria $\mathbf{n}$ kohdan (iii) mukaisesti.

(vi) **Top**. Tässä kategoriassa objekteina ovat topologiset avaruudet, morfismeina jatkuvat funktiot ja morfismien yhdistämisenä funktioiden yhdistäminen.

(vii) **Sets$_*$**. Tässä kategoriassa objekteina ovat *kantapisteelliset joukot* eli järjestetyt parit (X, x_0), missä X on epätyhjä joukko ja piste $x_0 \in X$, ja sitä kutsutaan *kantapisteeksi*. Morfismeina ovat *kantapisteellisten joukkojen väliset kuvaukset* $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ eli kuvaukset $f : X \to Y$, missä $f(x_0) = y_0$. Morfismien yhdistämisenä on funktioiden yhdistäminen.

Vastaavasti määritellään kategoria **Top$_*$**.

(viii) **Ab**. Tässä kategoriassa objekteina ovat Abelin ryhmät, morfismeina homomorfismit ja morfismien yhdistämisenä funktioiden yhdistäminen.

(ix) **Renkaat**. Tässä kategoriassa objekteina ovat renkaat, morfismeina rengashomomorfismit ja morfismien yhdistämisenä funktioiden yhdistäminen.

(x) **Mod^R**. Olkoon R rengas. Tässä kategoriassa objekteina ovat R-modulit, morfismeina R-homomorfismit ja morfismien yhdistämisenä funktioiden yhdistäminen.

Määritelmä 3.2. Morfismi $f : A \to B$ kategoriassa $\mathcal{C}$ on *isomorfismi*, jos on olemassa sellainen morfismi $g : B \to A$ kategoriassa $\mathcal{C}$, että

$$gf = 1_A \text{ ja } fg = 1_B.$$

Morfismia g kutsutaan (morfismin f) *käänteismorfismiksi* ja merkitään $g = f^{-1}$.

Esimerkki 3.3. (ks. [1, s. 33], [2, s. 4], [3, s. 43]) Jos $f : A \to B$ on isomorfismi kategoriassa $\mathcal{C}$, niin sen käänteismorfismi on yksikäsitteinen.

Ratkaisu. Olkoot g ja h morfismin f käänteismorfismeja. Tällöin $gf = 1_A$ ja $fh = 1_B$. Koska morfismien yhdistäminen on liitännäinen, niin

$$g = g1_B = g(fh) = (gf)h = 1_A h = h.$$

□

Määritelmä 3.3. Sanotaan, että $\mathcal{S}$ on kategorian $\mathcal{C}$ *alikategoria*, jos

(i) $obj(\mathcal{S}) \subseteq obj(\mathcal{C})$,

(ii) $Hom_{\mathcal{S}}(A, B) \subseteq Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ kaikilla $A, B \in obj(\mathcal{S})$,

(iii) jos $f \in Hom_{\mathcal{S}}(A, B)$ ja $g \in Hom_{\mathcal{S}}(B, C)$, niin yhdiste $gf \in Hom_{\mathcal{S}}(A, C)$ on sama morfismi kuin yhdiste $gf \in Hom_{\mathcal{C}}(A, C)$,

(iv) jos $A \in obj(\mathcal{S})$, niin identiteettimorfismi $1_A \in Hom_{\mathcal{S}}(A, A)$ on sama morfismi kuin identiteettimorfismi $1_A \in Hom_{\mathcal{C}}(A, A)$.

Sanotaan, että alikategoria on ja *täysi*, jos $Hom_{\mathcal{S}}(A, B) = Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ kaikilla $A, B \in obj(\mathcal{S})$.

Esimerkki 3.4. (ks. [1, s. 16])

(i) Kategoria **Ab** on kategorian **Ryhmät** täysi alikategoria.

(ii) Jos $\mathcal{S}$ on sellainen diskreetti kategoria, että $obj(\mathcal{S}) = obj(\textbf{Joukot})$, niin $\mathcal{S}$ on kategorian **Joukot** alikategoria, joka ei ole täysi.

(iii) Kategoria **Htp** ei ole kategorian **Top** alikategoria, vaikka $obj(\textbf{Htp}) = obj(\textbf{Top})$, koska morfismit kategoriassa **Htp** eivät ole jatkuvia funktioita.

Määritelmä 3.4. Olkoon $\mathcal{C}$ kategoria ja $S \subseteq obj(\mathcal{C})$. Kategorian $\mathcal{C}$ alikategoriaa $\mathcal{S}$, jolla $obj(\mathcal{S}) = S$ ja $Hom_{\mathcal{S}}(A, B) = Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ kaikilla $A, B \in obj(\mathcal{S})$, sanotaan (kategorian $\mathcal{C}$) *luokan S generoimaksi täydeksi alikategoriaksi.*

Kategorioissa morfismit voi ajatella nuoliksi objektilta toiselle (ks. huomautus sivulla 26). Seuraavaksi määritellään kategoria, jossa nuolet osoittavat vastakkaiseen suuntaan kuin alkuperäisessä kategoriassa.

Määritelmä 3.5. Olkoon $\mathcal{C}$ kategoria. Määritellään sen *vastakkainen kategoria* $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ asettamalla

(i) $obj(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) = obj(\mathcal{C})$,

(ii) $Hom_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(A, B) = Hom_{\mathcal{C}}(B, A)$ (jos f on morfismi kategoriassa $\mathcal{C}$, niin käytetään merkintää f^{op} vastaavalle morfismille kategoriassa $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$),

(iii) kaikilla $A, B, C \in obj(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$, $f^{\mathrm{op}} \in Hom_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(B, C)$ ja $g^{\mathrm{op}} \in Hom_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(A, B)$

$$f^{\mathrm{op}} g^{\mathrm{op}} = (gf)^{\mathrm{op}}.$$

Kuten homomorfismit vertailevat ryhmiä tai rengashomomorfismit renkaita, on kategorioiden vertailemiseen omat funktionsa, *funktorit*.

Määritelmä 3.6. Olkoot $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{D}$ kategorioita. *Kovariantti funktori* $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ on funktio, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

(i) jos $A \in obj(\mathcal{C})$, niin $T(A) \in obj(\mathcal{D})$,

(ii) jos $f : A \to A'$ kategoriassa $\mathcal{C}$, niin $T(f) : T(A) \to T(A')$ kategoriassa $\mathcal{D}$,

(iii) jos $A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{g} A''$ kategoriassa $\mathcal{C}$, niin $T(A) \xrightarrow{T(f)} T(A') \xrightarrow{T(g)} T(A'')$ kategoriassa $\mathcal{D}$ ja
$$T(gf) = T(g)T(f),$$

(iv) $T(1_A) = 1_{T(A)}$ kaikilla $A \in obj(\mathcal{C})$.

Määritelmä 3.7. Olkoot $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{D}$ kategorioita. *Kontravariantti funktori* $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ on funktio, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

(i) jos $A \in obj(\mathcal{C})$, niin $T(A) \in obj(\mathcal{D})$,

(ii) jos $f : A \to A'$ kategoriassa $\mathcal{C}$, niin $T(f) : T(A') \to T(A)$ kategoriassa $\mathcal{D}$,

(iii) jos $A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{g} A''$ kategoriassa $\mathcal{C}$, niin $T(A'') \xrightarrow{T(g)} T(A') \xrightarrow{T(f)} T(A)$ kategoriassa $\mathcal{D}$ ja
$$T(gf) = T(f)T(g),$$

(iv) $T(1_A) = 1_{T(A)}$ kaikilla $A \in obj(\mathcal{C})$.

Määritelmä 3.8. Olkoon $\mathcal{C}$ kategoria. Sanotaan, että kovariantti funktori $D : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ on *kaavio* (kategoriassa $\mathcal{C}$), jos $\mathcal{D}$ on pieni kategoria.

Käänteiskaavio $D^{\mathrm{op}} : \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ on vastaava kuin kaavio D, mutta nuolien suunnat on käännetty.

Huomautus:
Aiemmin todettiin (ks. esimerkki 3.1), että kategorian objektien ja identiteettimorfismien välillä on olemassa bijektio, joten kategorian voi ajatella koostuvan vain morfismeista. Tämän takia funktorin kutsuminen funktioksi on mielekästä. Funktoreita voi siis yhdistää, kuten funktioitakin.

Jos $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $F' : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ ovat kovariantteja - ja $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $G' : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ kontravariantteja funktoreita (, missä $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ ja $\mathcal{C}$ ovat kategorioita), niin on helppo osoittaa, että $F'F, G'G : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ ovat kovariantteja - ja $F'G, G'F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ kontravariantteja funktoreita.

Jos kaksi funktoria ovat kovariantteja (tai kontravariantteja), sanotaan, että näillä funktoreilla on sama *varianssi*. Vastaavasti, jos toinen funktori on kovariantti ja toinen kontravariantti, sanotaan, että niillä on eri varianssi.

Huomataan, että kovariantti funktori pitää morfismien suunnan samana, kun taas kontravariantti kääntää suunnat päinvastaiseksi. Seuraavaksi osoitetaan, että kontravariantti funktori $T : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ on sama asia kuin kovariantti funktori $S : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$.

Esimerkki 3.5. (ks. [1, s. 33]) Olkoon $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ funktori. Määritellään $T^{\mathrm{op}} : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{B}$ asettamalla $T^{\mathrm{op}}(A) = T(A)$ kaikilla $A \in obj(\mathcal{A})$ ja $T^{\mathrm{op}}(f^{\mathrm{op}}) = T(f)$ kaikilla kategorian $\mathcal{A}$ morfismeilla. Jos T on kovariantti funktori, niin T^{op} on kontravariantti funktori ja päin vastoin.

Ratkaisu. Oletetaan ensin, että T on kovariantti funktori. Osoitetaan, että T^{op} toteuttaa määritelmän 3.7 kohdat (i)-(iv):

(i) Oletetaan, että $A \in obj(\mathcal{A}^{\mathrm{op}})$. Koska $obj(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}) = obj(\mathcal{A})$ ja T on kovariantti funktori, niin $T(A) \in obj(\mathcal{B})$. Siis $T^{\mathrm{op}}(A) \in obj(\mathcal{B})$, koska $T^{\mathrm{op}}(A) = T(A)$.

(ii) Oletetaan, että $f^{\mathrm{op}} : A \to A'$ kategoriassa $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$. Tällöin $f : A' \to A$ kategoriassa $\mathcal{A}$. Koska T on kovariantti funktori, niin $T(f) : T(A') \to T(A)$ kategoriassa $\mathcal{B}$. Koska $T^{\mathrm{op}}(f^{\mathrm{op}}) = T(f)$, niin $T^{\mathrm{op}}(f^{\mathrm{op}}) : T^{\mathrm{op}}(A') \to T^{\mathrm{op}}(A)$ kategoriassa $\mathcal{B}$.

(iii) Oletetaan, että $A \xrightarrow{f^{\mathrm{op}}} A' \xrightarrow{g^{\mathrm{op}}} A''$ kategoriassa $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$. Tällöin $A'' \xrightarrow{g} A' \xrightarrow{f} A$ kategoriassa $\mathcal{A}$. Koska T on kovariantti funktori, niin $T(A'') \xrightarrow{T(g)} T(A)' \xrightarrow{T(f)} T(A)$ kategoriassa $\mathcal{B}$. Nyt $T^{\mathrm{op}}(A'') \xrightarrow{T^{\mathrm{op}}(g^{\mathrm{op}})} T^{\mathrm{op}}(A') \xrightarrow{T^{\mathrm{op}}(f^{\mathrm{op}})} T^{\mathrm{op}}(A)$ kategoriassa $\mathcal{B}$. Lisäksi

$$T^{\mathrm{op}}(g^{\mathrm{op}} f^{\mathrm{op}}) = T^{\mathrm{op}}((fg)^{\mathrm{op}}) = T(fg) = T(f)T(g) = T^{\mathrm{op}}(f^{\mathrm{op}})T^{\mathrm{op}}(g^{\mathrm{op}}).$$

(iv) Olkoon $A \in obj(\mathcal{A}^{\text{op}})$. Tällöin $A \in obj(\mathcal{A})$ ja $T(1_A) = 1_{T(A)}$, koska T on kovariantti funktori. Koska $T^{\text{op}}(A) = T(A)$, niin $T\text{op}(1_A) = 1_{T^{\text{op}}(A)}$.

Vastaavasti osoitetaan, että T^{op} on kovariantti, jos T on kontravariantti. $\square$

Edellisen esimerkin funktoria T^{op} sanotaan (funktorin T) *käänteisfunktoriksi*. Seuraavaksi annetaan konkreettisia esimerkkejä funktoreista.

Esimerkki 3.6. (ks. [1, s. 17-18, 20-21])

(i) Jos $\mathcal{S}$ on kategorian $\mathcal{C}$ alikategoria, niin alikategorian määritelmän voi muotoilla uudelleen: Jos inkluusio $I : \mathcal{S} \to \mathcal{C}$ on kovariantti funktori, niin $\mathcal{S}$ on kategorian $\mathcal{C}$ alikategoria.

(ii) Jos $\mathcal{C}$ on kategoria, niin *identiteettifunktori* $1_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ määritellään asettamalla $1_{\mathcal{C}}(A) = A$ kaikilla $A \in obj\mathcal{C}$ ja $1_{\mathcal{C}}(f) = f$ kaikilla morfismeilla f kategoriassa $\mathcal{C}$.

(iii) Olkoon $\mathcal{C}$ kategoria ja $A \in obj(\mathcal{C})$. Määritellään (kovariantti) *Hom-funktori* $T_A : \mathcal{C} \to$ **Joukot** (usein tästä funktorista käytetään merkintää $Hom(A, \square)$) asettamalla

$$T_A(B) = Hom(A, B) \text{ kaikilla } B \in obj(\mathcal{C}),$$

ja jos $f : B \to B'$ kategoriassa $\mathcal{C}$, niin

$$T_A(f) : Hom(A, B) \to Hom(A, B'), h \mapsto fh.$$

Kuvaa $T_A(f) = Hom(A, f)$ kutsutaan *indusoiduksi kuvaukseksi* ja siitä käytetään merkintää f_*. Osoitetaan, että $Hom(A, \square)$ todella on kovariantti funktori.

Ratkaisu. Pitää osoittaa, että $Hom(A, \square)$ toteuttaa määritelmän 3.6 ehdot (i)-(iv).

(iii.i) Jos $B \in obj(\mathcal{C})$, niin $Hom(A, B)$ on kategorian määritelmän mukaisesti joukko.

(iii.ii) Oletetaan, että $f : B \to B'$ kategoriassa $\mathcal{C}$. Kuvaus f_* (, joka joukkojen välisenä kuvauksena kuuluu kategoriaan **Joukot**) on mielekäs:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[rr, bend left, "fh"] & B \arrow[r, "f"] & B' \end{tikzcd}$$

(iii.iii) Oletetaan, että $B \xrightarrow{f} B' \xrightarrow{g} B''$ kategoriassa $\mathcal{C}$. Tutkitaan funktioita $(gf)_*, g_*f_* : Hom(A, B) \to Hom(A, B'')$. Jos $h \in Hom(A, B)$, niin

$$(gf)_*(h) = (gf)h = g(fh) = g_*(fh) = g_*(f_*(h)).$$

Siis $(gf)_* = g_* f_*$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[rrr, bend left, "gfh"] & B \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "gf"] & B' \arrow[r, "g"] & B'' \end{tikzcd}$$

(iii.iv) Olkoon $B \in obj(\mathcal{C})$ ja $h \in Hom(A, B)$. Nyt

$$(1_B)_*(h) = 1_B h = h,$$

joten $(1_B)_* = 1_{Hom(A,B)}$.

$\square$

(iv) Olkoon $\mathcal{C}$ kategoria ja $B \in obj(\mathcal{C})$. Määritellään (kontravariantti) *Hom-funktori* $T^B : \mathcal{C} \to$ **Joukot** (usein tästä funktorista käytetään merkintää $Hom(\Box, B)$) asettamalla

$$T^B(C) = Hom(C, B) \textit{ kaikilla } B \in obj(\mathcal{C}),$$

ja jos $f : C \to C'$ kategoriassa $\mathcal{C}$, niin

$$T^B(f) : Hom(C', B) \to Hom(C, B'), h \mapsto hf.$$

Kuvaa $T^B(f) = Hom(f, B)$ kutsutaan *indusoiduksi kuvaukseksi* ja siitä käytetään merkintää f^*. Osoitetaan, että $Hom(\Box, B)$ todella on kontravariantti funktori. Todistukset muistuttavat edellistä kohtaa eikä niitä sen vuoksi osoiteta niin yksityiskohtaisesti.

Ratkaisu. Pitää osoittaa, että $Hom(\Box, B)$ toteuttaa määritelmän 3.7 ehdot (i)-(iv).

(iv.i) Jos $C \in obj(\mathcal{C})$, niin $Hom(C, B)$ on kategorian määritelmän mukaisesti joukko.

(iv.ii) Kuvaus f_* on mielekäs:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "hf"] & C' \arrow[r, "h"] & B \end{tikzcd}$$

(iv.iii) Jos $C \xrightarrow{f} C' \xrightarrow{g} C''$ kategoriassa $\mathcal{C}$ ja $h \in Hom(C'', B)$, niin

$$(gf)^*(h) = h(gf) = (hg)f = f^*(hg) = f^*(g^*(h)).$$

Siis $(gf)^* = f^* g^*$.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "gf"] \arrow[rrr, bend left, "hgf"] & C \arrow[r, "g"] & C' \arrow[r, "h"] & B \end{tikzcd}$$

(iv.iv) Olkoon $C \in obj(\mathcal{C})$ ja $h \in Hom(C, B)$. Nyt

$$(1_C)^*(h) = h1_C = h,$$

joten $(1_C)^* = 1_{Hom(C,B)}$.

$\square$

(v) Funktori $T : \mathbb{Z} \to \mathcal{C}$, missä $\mathbb{Z}$ on esimerkin 3.2 kohdan (iii) mukainen kategoria relaationa $\geq$, on jono

$$\cdots \to C_{n+1} \to C_n \to C_{n-1} \cdots .$$

(vi) Määritellään *unohdusfunktori* U : **Ryhmät** $\to$ **Joukot** asettamalla $U(G, \mu) = G$ kaikilla ryhmillä (G, μ), missä G on joukko ja μ ryhmän binäärioperaatio, ja $U(f)$ on homomorfismi f ajateltuna kuvauksena. Funktori U siis "unohtaa" operaation ja tutkii ryhmää joukkona. Vastaavasti voidaan määritellä funktorit U' : **Renkaat** $\to$ **Ab** ja U'' : **Renkaat** $\to$ **Joukot** asettamalla $U'(R, \alpha, \mu) = (R, \alpha)$ ja $U''(R, \alpha, \mu) = R$, missä R on joukko, α yhteenlasku- ja μ kertolaskuoperaatio.

(vii) Esimerkki kontravariantista Hom-funktorista on *duaaliavaruusfunktori* $Hom_k(\square, k)$: $\mathbf{Mod}^k \to \mathbf{Mod}^k$. Tässä k on kunta ja $\mathbf{Mod}^k$ on kategoria, jossa objekteina ovat kaikki k-vektoriavaruudet ja morfismeina lineaarikuvaukset. Jos V on vektoriavaruus, niin $Hom_k(V, k) = V^*$ eli vektoriavaruuden V *duaaliavaruus*. Jos määritellään *skalaaritulo* $af : V \to k$, missä $f \in V^*$ ja $a \in k$, asettamalla $af : v \mapsto a[f(v)]$, saadaan k-vektoriavaruus V^*. Jos $f : V \to W$ on lineaarikuvaus, niin indusoitu kuvaus $f^* : W^* \to V^*, h \mapsto hf$ on myös lineaarikuvaus.

(viii) Olkoot X ja Y esimerkin 3.2 kohdan (iii) mukaisia kategorioita. Jos $T : X \to Y$ on kovariantti funktori, niin $T(i^x_{x'}) = i^{T(x)}_{T(x')}$ eli $T(x) \preceq T(x)'$ kategoriassa Y. Kovariantti funktori on siis *järjestyksen säilyttävä*. Vastaavasti, jos $T : X \to Y$ on kontravariantti funktori, niin se on *järjestyksen kääntävä*: jos $x \preceq x'$, niin $T(x') \preceq T(x)$.

(ix) Sanotaan, että funktori $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ on *uskollinen*, jos kaikilla $A, B \in obj(\mathcal{C})$ funktiot $Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \to Hom_{\mathcal{D}}(T(A), T(B)), f \mapsto T(f)$ ovat injektioita. Kategoria $\mathcal{C}$ on *konkreettinen*, jos on olemassa uskollinen funktori $U : \mathcal{C} \to$ **Joukot**. Konkreettisen kategorian morfismeja voi pitää funktioina.

Määritelmä 3.9. Sanotaan, että funktori $T : \mathbf{Mod}^R \to \mathbf{Ab}$ on *additiivinen*, jos kaikilla $f, g : A \to B$, missä A ja B ovat R-moduleita,

$$T(f + g) = T(f) + T(g).$$

Lause 3.1. (ks. [1, s. 74]) Olkoon A R-moduli. Tällöin $F_A : \mathbf{Mod}^R \to \mathbf{Ab}$ on additiivinen (kovariantti) funktori, kun määritellään

$$F_A(B) = A \otimes_R B \text{ ja } F_A(f) = 1_A \otimes f,$$

missä $f : B \to C$ on R-homomorfismi ja B, C R-moduleita. Merkitään $F_A = A \otimes_R \square$. Vastaavasti voidaan määritellä additiivinen (kovariantti) funktori $\square \otimes_R A$.

Todistus. Funktorin F_A määritelmän perusteella $F_A(B) \in \mathbf{Ab}$ kaikilla R-moduleilla B ja $F_A(f)$ on ryhmähomomorfismi $A \otimes_R C \to A \otimes D$ kaikilla $f \in Hom(C, D)$.

Olkoot $f : B \to C$ ja $g : C \to D$ R-homomorfismeja. Tällöin Lauseen 1.30 mukaan

$$F_A(gf) = 1_A \otimes gf = (1_A \otimes g)(1_A \otimes f) = F_A(g)F_A(f).$$

Olkoon B R-moduli. Tällöin

$$F_A(1_B) = 1_A \otimes 1_B$$

ja kaikilla $a \otimes b \in A \otimes_R B$

$$(1_A \otimes 1_B)(a \otimes b) = 1_A(a) \otimes 1_B(b) = a \otimes b.$$

Siis $F_A(1_B) = 1_{A \otimes_R B}$.

Osoitetaan vielä, että F_A on additiivinen. Olkoot $f, g : B \to C$ R-homomorfismeja. Nyt

$$F_A(f + g) = 1_A \otimes (f + g)$$

ja kaikilla $a \otimes b \in A \otimes_R B$

$$\begin{aligned}
(1_A \otimes (f + g))(a \otimes b) &= 1_A(a) \otimes ((f + g)(b)) \\
&= a \otimes (f(b) + g(b)) \\
&= (a \otimes f(b)) + (a \otimes g(b)) \\
&= (1_A(a) \otimes f(b)) + (1_A(a) \otimes g(b)) \\
&= (1_A \otimes f)(a \otimes b) + (1_A \otimes g)(a \otimes b) \\
&= ((1_A \otimes f) + (1_A \otimes g))(a \otimes b),
\end{aligned}$$

koska $\otimes$ on bilineaarinen. Siis

$$F_A(f + g) = 1_A \otimes (f + g) = 1_A \otimes f + 1_A \otimes g = F_A(f) + F_A(g).$$

$\square$

3.1 Luonnollinen transformaatio

Aiemmin todettiin, että funktorit vertailevat kategorioita. Edelleen on *luonnollinen transformaatio* funktoreiden vertailemiseen.

Määritelmä 3.10. Olkoot $S, T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ kovariantteja funktoreita. *Luonnollinen transformaatio* $\tau : S \to T$ on yksiparametrinen perhe morfismeja kategoriassa $\mathcal{B}$,

$$\tau = (\tau_A : S(A) \to T(A))_{A \in obj(\mathcal{A})},$$

siten, että kaavio

$$\begin{tikzcd} S(A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "S(f)"'] & T(A) \arrow[d, "T(f)"] \\ S(A') \arrow[r, "\tau_{A'}"'] & T(A') \end{tikzcd}$$

kommutoi kaikilla $f : A \to A'$ kategoriassa $\mathcal{A}$. Luonnollinen transformaatio määritellään vastaavasti kontravarianteille funktoreille (, mutta vertikaalit nuolet kulkevat vastakkaiseen suuntaan).

Luonnollinen isomorfismi on luonnollinen transformaatio τ, jolla jokainen τ_A on isomorfismi.

Jos $S : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ on funktori, niin määritellään *luonnollinen identiteettitransformaatio* $\omega_S : S \to S$ asettamalla

$$(\omega_S)_A = 1_{S(A)} : S(A) \to S(A).$$

Voidaan osoittaa, että luonnollinen transformaatio $\tau : S \to T$ on luonnollinen isomorfismi, jos ja vain jos on olemassa luonnollinen transformaatio $\sigma : T \to S$ siten, että $\sigma\tau = \omega_S$ ja $\tau\sigma = \omega_T$ (ks. esimerkki 3.7 (iii)).

Luonnollisia transformaatioita voi yhdistää kahdella tavalla. Koska todistukset kovarianteille - ja kontravarianteille funktoreille ovat samankaltaisia, todistetaan seuraavat tulokset vain kovarianteille funktoreille.

Esimerkki 3.7. (ks. [1, s. 23, 35]) Olkoot $F, G, H : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ja $F', G' : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ funktoreita, joilla on sama varianssi, ja $\tau : F \to G$, $\tau' : F' \to G'$ ja $\sigma : G \to H$ luonnollisia transformaatioita.

(i) Yhdiste $\sigma\tau : F \to H$ on luonnollinen transformaatio, kun määritellään kaikilla $A \in obj(\mathcal{A})$

$$(\sigma\tau)_A = \sigma_A \tau_A.$$

Ratkaisu. Olkoon $f : A \to A'$ kategoriassa $\mathcal{A}$. Koska τ ja σ ovat luonnollisia transformaatioita, niin kaaviot

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(A') \arrow[r, "\tau_{A'}"'] & G(A') \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G(A) \arrow[r, "\sigma_A"] \arrow[d, "G(f)"'] & H(A) \arrow[d, "H(f)"] \\ G(A') \arrow[r, "\sigma_{A'}"'] & H(A') \end{tikzcd}$$

kommutoivat eli $G(f)\tau_A = \tau_{A'}F(f)$ ja $H(f)\sigma_A = \sigma_{A'}G(f)$. Nyt

$$\begin{aligned} H(f)(\sigma\tau)_A &= H(f)(\sigma_A\tau_A) = (H(f)\sigma_A)\tau_A = (\sigma_{A'}G(f))\tau_A \\ &= \sigma_{A'}(G(f)\tau_A) = \sigma_{A'}(\tau_{A'}F(f)) = (\sigma_{A'}\tau_{A'})F(f) = (\sigma\tau)_{A'}F(f) \end{aligned}$$

eli kaavio

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\sigma_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & H(A) \arrow[d, "H(f)"] \\ F(A') \arrow[r, "\sigma_{A'}"'] & H(A') \end{tikzcd}$$

kommutoi. Siis $\sigma\tau$ on luonnollinen transformaatio. $\square$

(ii) Yhdiste $\tau'\tau$ on luonnollinen transformaatio $F'F \to G'G$, kun määritellään kaikilla $A \in obj(\mathcal{A})$

$$(\tau'\tau)_A = G'(\tau_A)\tau'_{F(A)} = \tau'_{G(A)}F'(\tau_A) : (F'F)(A) \to (G'G)(A).$$

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[d, "\tau_A"'] \\ G(A) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F'(F(A)) \arrow[r, "\tau'_{F(A)}"] \arrow[d, "F'(\tau_A)"'] \arrow[dr, dashed, "(\tau'\tau)_A"] & G'(F(A)) \arrow[d, "G'(\tau_A)"] \\ F'(G(A)) \arrow[r, "\tau'_{G(A)}"'] & G'(G(A)) \end{tikzcd}$$

Yllä olevasta kaaviosta nähdään, että määrittely

$$(\tau'\tau)_A = G'(\tau_A)\tau'_{F(A)} = \tau'_{G(A)}F'(\tau_A)$$

on mielekäs.

Ratkaisu. Pitää siis osoittaa, että kaavio

$$\begin{tikzcd} (F'F)(A) \arrow[r, "(\tau'\tau)_A"] \arrow[d, "(F'F)(f)"'] & (G'G)(A) \arrow[d, "(G'G)(f)"] \\ (F'F)(A') \arrow[r, "(\tau'\tau)_{A'}"'] & (G'G)(A') \end{tikzcd}$$

kommutoi kaikilla $f : A \to A'$ kategoriassa $\mathcal{A}$ eli

$$(G'G)(f)(\tau'\tau)_A = (\tau'\tau)_{A'}(F'F)(f).$$

Olkoon $f : A \to A'$ kategoriassa $\mathcal{A}$. Koska τ on luonnollinen transformaatio, niin kaavio

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "F(f)"'] \arrow[dr, dashed, "\phi"] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(A') \arrow[r, "\tau_{A'}"'] & G(A') \end{tikzcd}$$

kommutoi eli $G(f)\tau_A = \tau_{A'}F(f) =: \phi$. Koska τ' on luonnollinen transformaatio ja $\phi : F(A) \to G(A')$ kategoriassa $\mathcal{B}$, niin kaavio

$$\begin{tikzcd} F'(F(A)) \arrow[r, "\tau'_{F(A)}"] \arrow[d, "F'(\phi)"'] & G('F(A)) \arrow[d, "G'(\phi)"] \\ F'(G(A')) \arrow[r, "\tau'_{G(A')}"'] & G'(G(A')) \end{tikzcd}$$

kommutoi eli $G'(\phi)\tau'_{F(A)} = \tau'_{G(A')}F'(\phi)$. Nyt

$$\begin{aligned} G'(\phi)\tau'_{F(A)} &= G'(G(f)\tau_A)\tau'_{F(A)} = G'(G(f))G'(\tau_A)\tau'_{F(A)} \\ &= (G'G)(f)(\tau'\tau)_A \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} \tau'_{G(A')}F'(\phi) &= \tau'_{G(A')}F'(\tau_{A'}F(f)) = \tau'_{G(A')}F'(\tau_{A'})F'(F(f)) \\ &= (\tau'\tau)_{A'}(F'F)(f). \end{aligned}$$

□

(iii) Jos $\tau : F \to G$ on luonnollinen isomorfismi, niin määritellään $\sigma_A : F(A) \to G(A)$ kaikilla $A \in obj(\mathcal{A})$ asettamalla $\sigma_A = \tau_A^{-1}$. Tällöin σ on luonnollinen transformaatio $G \to F$.

Ratkaisu. Olkoon $f : A \to A'$ kategoriassa $\mathcal{A}$. Pitää osoittaa, että kaavio

$$\begin{tikzcd} G(A) \arrow[r, "\sigma_A"] \arrow[d, "G(f)"'] & F(A) \arrow[d, "F(f)"] \\ G(A') \arrow[r, "\sigma_{A'}"'] & F(A') \end{tikzcd}$$

kommutoi eli $F(f)\sigma_A = \sigma_{A'}G(f)$. Koska τ on luonnollinen transformaatio, niin kaavio

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\tau_A} & G(A) \\ {\scriptstyle F(f)}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(A') & \xrightarrow[\tau_{A'}]{} & G(A') \end{array}$$

kommutoi eli $G(f)\tau_A = \tau_{A'}F(f)$. Nyt

$$\begin{aligned} F(f)\sigma_A &= 1_{F(A')}(F(f)\sigma_A) = (\sigma_{A'}\tau_{A'})(F(f)\sigma_A) = ((\sigma_{A'}\tau_{A'})F(f))\sigma_A \\ &= (\sigma_{A'}(\tau_{A'}F(f)))\sigma_A = (\sigma_{A'}(G(f)\tau_A))\sigma_A = ((\sigma_{A'}G(f))\tau_A)\sigma_A \\ &= (\sigma_{A'}G(f))(\tau_A\sigma_A) = (\sigma_{A'}G(f))1_{G(A)} = \sigma_{A'}G(f). \end{aligned}$$

$\square$

3.2 Eksaktit funktorit

Aikaisemmin määriteltiin funktorin käsite ja annettiin esimerkkeinä kovariantit funktorit $Hom(M, \square)$ ja $M \otimes_R \square$ sekä kontravariantti funktori $Hom(\square, M)$. Mitä nämä funktorit tekevät eksakteille jonoille? Tässä luvussa annetaan määritelmä eksaktille funktorille.

Näiden funktoreiden eksaktius liittyy projektiiviseen ja injektiiviseen moduliin. Laakea moduli määritellään suoraan funktorin $M \otimes_R \square$ eksaktiuden mukaan. Itse asiassa Osbornen kirjassa myös projektiivinen ja injektiivinen moduli määritellään funktorin avulla (ks. [2, s. 28]).

Määritelmä 3.11. Sanotaan, että kovariantti funktori $T : \mathbf{Mod}^R \to \mathbf{Ab}$ on *vasemmalta eksakti*, jos jonon

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C$$

eksaktiudesta seuraa jonon

$$0 \to T(A) \xrightarrow{T(i)} T(B) \xrightarrow{T(p)} T(C)$$

eksaktius. Vastaavasti sanotaan, että kontravariantti funktori $T : \mathbf{Mod}^R \to \mathbf{Ab}$ on *vasemmalta eksakti*, jos jonon

$$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$$

eksaktiudesta seuraa jonon

$$0 \to T(C) \xrightarrow{T(p)} T(B) \xrightarrow{T(i)} T(A)$$

eksaktius.

Lause 3.2. (ks. [3, s. 63]) Olkoon M R-moduli. Sekä $Hom(M, \Box)$ että $Hom(\Box, M)$ ovat vasemmalta eksakteja.

Todistus. Osoitetaan ensin, että (kovariantti funktori) $Hom(M, \Box)$ on vasemmalta eksakti. Olkoon

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C$$

eksakti. Pitää osoittaa, että

$$0 \to Hom(M, A) \xrightarrow{i^*} Hom(M, B) \xrightarrow{p^*} Hom(M, C)$$

on eksakti.

Jos $f \in Hom(M, A)$, niin

$$(p^* i^*)(f) = p^*(i^*(f)) = p^*(if) = p(if) = (pi)f = 0,$$

koska $im(i) = ker(p)$. Siis $im(i^*) \subseteq ker(p^*)$.

Oletetaan, että $p^*(g) = pg = 0$, missä $g \in Hom(M, B)$. Tällöin $(pg)(m) = p(g(m)) = 0$ kaikilla $m \in M$ eli $g(m) \in ker(p) = im(i)$. Koska i on (lauseen 2.1 mukaan) injektio, niin on olemassa yksikäsitteinen $a \in A$ siten, että $i(a) = g(m)$. Määritellään kuvaus $\phi : M \to A$ asettamalla $\phi(m) = a$, missä $a \in A$ on edellä esitetty yksikäsitteinen alkio, jolla $g(m) = i(a)$. Koska a on yksikäsitteinen, niin kuvaus on mielekäs. Onko se R-homomorfismi?

Olkoot $m', m'' \in M$ ja $r', r'' \in R$. Koska g ja i ovat R-homomorfismeja, niin

$$g(r'm' + r''m'') = r'g(m') + r''g(m'') = r'i(a') + r''i(a'') = i(r'a' + r''a''),$$

joten

$$\phi(r'm' + r''m'') = r'a' + r''a'' = r'\phi(m') + r''\phi(m'')$$

eli ϕ on R-homomorfismi. Edelleen, jos $m \in M$, niin $i^*(\phi)(m) = (i\phi)(m) = i(\phi(m)) = i(a) = g(m)$. Siis $g \in im(i^*)$, joten $ker(p^*) \subseteq im(i^*)$.

Lopuksi pitää vielä osoittaa, että i^* on injektio, minkä jälkeen on osoitettu, että

$$0 \to Hom(M, A) \xrightarrow{i^*} Hom(M, B) \xrightarrow{p^*} Hom(M, C)$$

on eksakti. Oletetaan, että $i^*(f) = if = 0$, missä $f \in Hom(M, A)$. Tällöin $i(f(m)) = 0$ kaikilla $m \in M$. Koska i on injektio, niin $f(m) = 0$ kaikilla $m \in M$. Siis $f = 0$ ja i^* injektio.

Osoitetaan sitten, että (kontravariantti funktori) $Hom(\Box, M)$ on vasemmalta eksakti. Olkoon

$$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$$

eksakti. Pitää osoittaa, että

$$0 \to Hom(C, M) \xrightarrow{p^*} Hom(B, M) \xrightarrow{i^*} Hom(A, M)$$

on eksakti.

Oletetaan, että $p^*(h) = hp = 0$, missä $h \in Hom(C, M)$. Olkoon $c \in C$. Koska p on surjektio, niin on olemassa sellainen $b \in B$, että $p(b) = c$. Nyt $h(c) = h(p(b)) = 0$, koska oletuksen mukaan $hp = 0$. Siis $h(c) = 0$ kaikilla $c \in C$ ja p^* on täten injektio.

Olkoon $h \in Hom(C, M)$. Nyt

$$(i^*p^*)(h) = i^*(p^*(h)) = i^*(hp) = (hp)i = h(pi) = 0,$$

koska $im(i) = ker(p)$ ja tällöin $(pi)(a) = 0$ kaikilla $a \in A$. Siis $im(p^*) \subseteq ker(i^*)$.

Pitää vielä osoittaa, että $ker(i^*) \subseteq im(p^*)$. Oletetaan, että $i^*(g) = gi = 0$, missä $g \in Hom(B, M)$. Tällöin $g(b) = 0$ kaikilla $b \in im(i) = ker(p)$. Koska p on surjektio, niin jokaista $c \in C$ kohti on olemassa sellainen $b \in B$, että $p(b) = c$. Määritellään kuvaus $\phi : C \to M$ asettamalla $\phi(c) = g(b)$, missä $p(b) = c$. Onko kuvaus mielekäs? Jos $p(b') = p(b'') = c$, onko $g(b')$ yhtä kuin $g(b'')$?

Oletetaan, että $p(b') = p(b'') = c$ joillakin $b', b'' \in B$. Tällöin $p(b' - b'') = 0$ eli $b' - b'' \in ker(p)$. Aiemmin todettiin, että $g(b) = 0$ kaikilla $b \in ker(p)$, joten $g(b' - b'') = 0$ ja edelleen $g(b') = g(b'')$. Siis kuvaus on mielekäs. Onko se R-homomorfismi?

Olkoot $c', c'' \in C$ ja $r', r'' \in R$. Nyt

$$r'c' + r''c'' = r'p(b') + r''p(b'') = p(r'b' + r''b''),$$

koska p on R-homomorfismi. Tällöin

$$\phi(r'c' + r''c'') = g(r'b' + r''b'') = r'g(b') + r''g(b''),$$

koska g on R-homomorfismi. Siis ϕ on R-homomorfismi.

Kuvauksen ϕ määritelmästä huomataan selvästi, että $p^*(\phi) = \phi p = g$. Siis $ker(i^*) \subseteq im(p^*)$. $\square$

Määritelmä 3.12. Sanotaan, että kovariantti funktori $T : \mathbf{Mod}^R \to \mathbf{Ab}$ on *oikealta eksakti*, jos jonon

$$B' \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} B'' \to 0$$

eksaktiudesta seuraa jonon

$$T(B') \xrightarrow{T(i)} T(B) \xrightarrow{T(p)} T(B'') \to 0$$

eksaktius. Vastaavasti sanotaan, että kontravariantti funktori $T : \mathbf{Mod}^R \to \mathbf{Ab}$ on *oikealta eksakti*, jos jonon

$$0 \to B' \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} B''.$$

eksaktiudesta seuraa jonon

$$T(B'') \xrightarrow{T(p)} T(B) \xrightarrow{T(i)} T(B') \to 0$$

eksaktius.

Lause 3.3. (ks. [3, s. 65]) Olkoon A R-moduli. Tällöin $A \otimes_R \square$ on oikealta eksakti funktori.

Todistus. Oletetaan, että

$$B \xrightarrow{i} C \xrightarrow{p} D \to 0$$

on eksakti jono. Pitää osoittaa, että

$$A \otimes_R B \xrightarrow{1_A \otimes i} A \otimes_R C \xrightarrow{1_A \otimes p} A \otimes_R D \to 0$$

on eksakti. Merkitään $1 = 1_A$.

Olkoon $a \in A$ ja $d \in D$. Koska p on surjektio, niin on olemassa sellainen $c \in C$, että $p(c) = d$. Tällöin

$$a \otimes d = a \otimes p(c) = (1 \otimes p)(a \otimes c)$$

ja siis $1 \otimes p$ on surjektio.

Olkoon $a \in A$ ja $b \in B$. Nyt

$$(1 \otimes p)(1 \otimes i)(a \otimes b) = (1 \otimes p)(a \otimes i(b)) = a \otimes p(i(b)) = a \otimes 0 = 0_{A \otimes_R D},$$

koska $im(i) = ker(p)$. Siis $im(1 \otimes i) \subseteq ker(1 \otimes p)$.

Merkitään $M = im(1 \otimes i)$. Koska $M \subseteq ker(1 \otimes p)$, kuten edellä todistettiin, niin $1 \otimes p$ indusoi Lauseen 1.19 mukaisesti R-homomorfismin

$$\hat{p} : (A \otimes_R C)/M \to A \otimes_R D \ , \ (a \otimes c) + M \mapsto (1 \otimes p)(a \otimes c) = a \otimes p(c).$$

Jos $d \in D$, niin on olemassa sellainen $c \in C$, että $p(c) = d$, koska p on surjektio. Määritellään kuvaus

$$h : A \times D \to (A \otimes_R C)/M$$

asettamalla $h(a, d) = (a \otimes c) + M$, missä $d = p(c)$. Onko kuvaus mielekäs?

Oletetaan, että $p(c) = p(c') = d$. Nyt $p(c) - p(c') = p(c - c') = 0$ eli $c - c' \in ker(p) = im(i)$. On siis olemassa sellainen $b \in B$, että $i(b) = c - c'$ ja edelleen $c = i(b) + c'$. Tällöin

$$\begin{aligned}(a \otimes c) + M &= (a \otimes (i(b) + c')) + M \\ &= (a \otimes i(b) + a \otimes c') + M \\ &= ((1 \otimes i)(a \otimes b) + a \otimes c') + M \\ &= (a \otimes c') + M,\end{aligned}$$

koska $(1 \otimes i)(a \otimes b) \in im(1 \otimes i) = M$. Siis kuvaus h on mielekäs. Onko se R-bilineaarinen?

Olkoot $a, a', a'' \in A$, $d, d', d'' \in D$ ja $r, s \in R$. On olemassa sellaiset $c, c', c'' \in C$, että $d = p(c), d' = p(c')$ ja $d'' = p(c'')$. Tällöin

$$p(rc' + sc'') = rp(c') + sp(c'') = rd' + sd'',$$

koska p on R-homomorfismi. Nyt

$$\begin{aligned} h(ra' + sa'', d) &= (ra' + sa'' \otimes c) + M \\ &= r((a' \otimes c) + M) + s((a'' \otimes c) + M) \\ &= rh(a', d) + sh(a'', d) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} h(a, rd' + sd'') &= (a \otimes rc' + sc'') + M \\ &= r((a \otimes c') + M) + s((a \otimes c'') + M) \\ &= rh(a, d') + sh(a, d''). \end{aligned}$$

Siis h on R-bilineaarinen.

Tensoritulon määritelmän mukaisesti on olemassa yksikäsitteinen R-homomorfismi

$$f : A \otimes_R D \to (A \otimes_R C)/M$$

siten, että $f(a \otimes d) = h(a, d)$ kaikilla $a \in A$ ja $d \in D$. Olkoot $a, a' \in A$, $c \in C$ ja $d \in D$. On olemassa sellainen $e \in C$, että $p(e) = d$. Nyt

$$(f\hat{p})((a \otimes c) + M) = f(a \otimes p(c)) = h(a, p(c)) = (a \otimes c) + M$$

ja

$$(\hat{p}f)(a \otimes d) = \hat{p}(h(a, d)) = \hat{p}((a \otimes e) + M) = a \otimes p(e) = a \otimes d.$$

Siis $\hat{p}$ on R-isomorfismi.

Olkoon $\pi : A \otimes_R C \to A \otimes_R C/M$ kanoninen surjektio. Nyt $\hat{p}\pi = 1 \otimes p$, jolloin

$$ker(1 \otimes p) = ker(\hat{p}\pi) = ker(\pi) = M = im(1 \otimes i).$$

Edellä $ker(\hat{p}\pi) = ker(\pi)$, koska $\hat{p}$ on injektio.

On siis osoitettu, että

$$A \otimes_R B \xrightarrow{1_A \otimes i} A \otimes_R C \xrightarrow{1_A \otimes p} A \otimes_R D \to 0$$

on eksakti. $\square$

Voidaan osoittaa (vastaavalla tavalla), että myös funktori $\square \otimes_R A$ on oikealta eksakti.

Määritelmä 3.13. Sanotaan, että kovariantti funktori $T : \mathbf{Mod}^R \to \mathbf{Ab}$ on *eksakti funktori*, jos jono

$$0 \to T(A) \xrightarrow{T(i)} T(B) \xrightarrow{T(p)} T(C) \to 0$$

on eksakti jokaisella eksaktilla jonolla

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0.$$

Vastaavasti kontravariantti funktori $T : \mathbf{Mod}^R \to \mathbf{Ab}$ on *eksakti funktori*, jos

$$0 \to T(C) \xrightarrow{T(p)} T(B) \xrightarrow{T(i)} T(A) \to 0$$

on eksakti.

Lause 3.4. (ks. [3, s. 65]) Olkoon F vapaa R-moduli. Tällöin $Hom(F, \square)$ on eksakti funktori.

Todistus. Lauseessa 3.2 osoitettiin, että $Hom(F, \square)$ on vasemmalta eksakti eli riittää osoittaa, että jonon

$$B \xrightarrow{p} C \to 0$$

eksaktiudesta seuraa jonon

$$Hom(F, B) \xrightarrow{p^*} Hom(F, C) \to 0$$

eksaktius.

Olkoon $(x_i)_{i \in I}$ modulin F kanta ja $f \in Hom(F, C)$. Koska p on surjektio, niin jokaista $c \in C$ kohti on olemassa $b \in B$, jolla $p(b) = c$. Edelleen kaikilla $x_i \in F$ $f(x_i) \in C$ ja on olemassa sellainen $b_i \in B$, että $p(b_i) = f(x_i)$. Lauseen 1.7 mukaan on olemassa yksikäsitteinen R-homomorfismi

$$g : F \to B$$

siten, että $g(x_i) = b_i$ kaikilla $i \in I$. Nyt kaikilla x_i

$$p^*(g)(x_i) = (pg)(x_i) = p(g(x_i)) = p(b_i) = f(x_i).$$

Siis $p^*(g) = f$ ja p^* on surjektio. $\square$

Jos F on vapaa R-moduli, niin $Hom(\square, F)$ ei välttämättä ole eksakti funktori, kuten myöhemmin huomataan.

Lause 3.5. (ks. [3, s. 67]) Olkoon

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$$

lohkeava eksakti jono ja M R-moduli. Tällöin myös jonot

(i) $0 \to Hom(M, A) \xrightarrow{i^*} Hom(M, B) \xrightarrow{p^*} Hom(M, C) \to 0$,

(ii) $0 \to Hom(C, M) \xrightarrow{p^*} Hom(B, M) \xrightarrow{i^*} Hom(A, M) \to 0$ ja

(iii) $0 \to M \otimes_R A \xrightarrow{1 \otimes i} M \otimes_R B \xrightarrow{1 \otimes p} M \otimes_R C \to 0$

ovat lohkeavia eksakteja jonoja.

Todistus.

(i) Lauseessa 3.2 osoitettiin, että $Hom(M, \Box)$ on vasemmalta eksakti. Eksaktiuden osoittamiseksi riittää siis osoittaa, että p^* on surjektio.

Koska
$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$$
on lohkeava, niin on olemassa $j : C \to B$ siten, että $pj = 1_C$. Tällöin, jos $j^* : Hom(M, C) \to Hom(M, B)$ on homomorfismin j transpoosi ja $f \in Hom(C, M)$, niin
$$(p^* j^*)(f) = p^*(jf) = p(jf) = (pj)f = 1_C f = f.$$
Siis $p^* j^* = 1_{Hom(M,C)}$. Tämä osoittaa sekä R-homomorfismin p^* surjektiivisuuden että jonon
$$0 \to Hom(M, A) \xrightarrow{i^*} Hom(M, B) \xrightarrow{p^*} Hom(M, C) \to 0$$
lohkeavuuden.

(ii) Lauseessa 3.2 osoitettiin, että $Hom(\Box, M)$ on vasemmalta eksakti. Eksaktiuden osoittamiseksi riittää siis osoittaa, että i^* on surjektio.

Esimerkin 2.3 mukaan on olemassa $q : B \to A$ siten, että $qi = 1_A$. Tällöin, jos $q^* : Hom(A, M) \to Hom(B, M)$ on homomorfismin q transpoosi ja $f \in Hom(A, M)$, niin
$$(i^* q^*)(f) = i^*(fq) = (fq)i = f(qi) = f 1_A = f.$$
Kuten edellä, tämä osoittaa, että i^* on surjektio ja haluttu jono on lohkeava.

(iii) Lauseessa 3.3 osoitettiin, että $M \otimes_R \Box$ on oikealta eksakti. Eksaktiuden osoittamiseksi riittää siis osoittaa, että $1 \otimes i$ on injektio.

Olkoon q, kuten edellä. Tällöin
$$(1 \otimes q)(1 \otimes i) = (1 \otimes qi) = (1 \otimes 1_A) = 1_{M \otimes_R A},$$
mistä seuraa R-homomorfismin $1 \otimes i$ injektiivisyys ja samalla jonon
$$0 \to M \otimes_R A \xrightarrow{1 \otimes i} M \otimes_R B \xrightarrow{1 \otimes p} M \otimes_R C \to 0$$
eksaktius.

$\Box$

4 Projektiiviset, injektiiviset ja laakeat modulit

4.1 Projektiiviset modulit

Tässä luvussa osoitetaan, että kaikki vapaat modulit ovat projektiivisia. Annetaan myös esimerkki projektiivisesta modulista, joka ei ole vapaa. Projektiivisilla moduleilla on paljon samoja ominaisuuksia kuin vapailla moduleilla ja tietyillä ehdoilla moduli on projektiivinen täsmälleen silloin kuin se on vapaa. Luvun lopussa esitetään ominaisuus, jota kutsutaan modulin projektiiviseksi kannaksi.

Määritelmä 4.1. Olkoon $p : A \to A''$ surjektiivinen R-homomorfismi ja $h : P \to A''$ R-homomorfismi. Sanotaan, että P on *projektiivinen* (R-moduli), jos on olemassa R-homomorfismi g siten, että kaavio

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "h"] & \\ A \arrow[r, "p"'] & A'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

kommutoi.

Huomautus:
Projektiivisen modulin määritelmässä rivi

$$A \xrightarrow{p} A'' \to 0$$

on eksakti, koska p on surjektio.

Lause 4.1. (ks. [3, s. 76]) R-moduli P on projektiivinen, jos ja vain jos $Hom(P, \square)$ on eksakti funktori.

Todistus.

"$\Leftarrow$"

Oletetaan, että $Hom(P, \square)$ on eksakti funktori. Olkoon $p : A \to A''$ surjektiivinen R-homomorfismi ja $h : P \to A''$ R-homomorfismi. Käytetään funktoria $Hom(P, \square)$ jonoon

$$0 \to ker(p) \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A'' \to 0,$$

missä i on inkluusio $ker(p) \to A$. Tietenkin i on injektiivinen ja $im(i) = ker(p)$, joten jono on eksakti. Tällöin myös jono

$$0 \to Hom(P, ker(p)) \xrightarrow{i^*} Hom(P, A) \xrightarrow{p^*} Hom(P, A'') \to 0,$$

missä $p^* : g \mapsto pg$, on eksakti. Lauseen 2.1 mukaan p^* on surjektiivinen. On siis olemassa $g \in Hom(P, A)$, jolla $p^*(g) = h$. Siis kaavio

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "h"] & \\ A \arrow[r, "p"'] & A'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

kommutoi ja täten P on projektiivinen.

"$\Rightarrow$"

Oletetaan, että P on projektiivinen R-moduli. Koska Lauseen 3.2 mukaan $Hom(P, \square)$ on vasemmalta eksakti, riittää todistaa, että jonon

$$B \xrightarrow{p} C \to 0$$

eksaktiudesta seuraa jonon

$$Hom(P, B) \xrightarrow{p^*} Hom(P, C) \to 0$$

eksaktius eli p^* on surjektio.

Olkoon $h \in Hom(P, C)$. Koska P on projektiivinen, niin kaavio

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "h"] & \\ B \arrow[r, "p"'] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

kommutoi eli $pg = h$. Tällöin $p^*(g) = pg = h$. Siis p^* on surjektio.

$\square$

Huomautus:
Olkoon P R-moduli. Koska $Hom(P, \square)$ on Lauseen 3.2 mukaan vasemmalta eksakti, niin Lauseen 4.1 mukaan P on projektiivinen, jos ja vain jos jonon

$$B \xrightarrow{p} C \to 0$$

eksaktiudesta seuraa jonon

$$Hom(P, B) \xrightarrow{p^*} Hom(P, C) \to 0$$

Esimerkki 4.1. (ks. [3, s. 74]) Jos F on vapaa moduli, niin F on projektiivinen moduli. Lauseen 3.4 mukaan $Hom(M, \square)$ on eksakti funktori, jos M on vapaa moduli. Lauseen 4.1 mukaan M on projektiivinen, jos $Hom(M, \square)$ on eksakti funktori.

Lauseen 1.9 mukaan jokainen R-moduli on vapaan R-modulin homomorfinen kuva. Siispä jokainen R-moduli on projektiivisen modulin homomorfinen kuva. Kirjoitetaan tämä lauseeksi.

Lause 4.2. (ks. [3, s. 77]) Olkoon M R-moduli. Tällöin M on projektiivisen R-modulin homomorfinen kuva.

Lause 4.3. (ks. [3, s. 75]) Olkoot P_i R-moduleita, missä $i \in I$. Tällöin $\bigoplus_{i \in I} P_i$ on projektiivinen, jos ja vain jos P_i on projektiivinen kaikilla $i \in I$.

Todistus.

”$\Leftarrow$”

Oletetaan, että P_i, missä $i \in I$, ovat projektiivisia. Olkoon $h : \bigoplus_{i \in I} P_i \to A''$ R-homomorfismi ja $p : A \to A''$ surjektio. Pitää löytää sellainen g, että kaavio

$$\begin{tikzcd} & \bigoplus_{i \in I} P_i \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "h"] & \\ A \arrow[r, "p"'] & A'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

kommutoi. Kaikilla $i \in I$ $h\rho_i : P_i \to B$ on R-homomorfismi. Tässä

$$\rho_j : P_j \to \bigoplus_{i \in I} P_i, \;\; x \mapsto (y_i)_{i \in I}, \;\; \text{missä } y_i = \begin{cases} 0 & \text{jos } i \neq j, \\ x & \text{jos } i = j. \end{cases}$$

Koska P_i, missä $i \in I$, ovat projektiivisia, niin kaavio

$$\begin{tikzcd} & P_i \arrow[dl, dashed, "g_i"'] \arrow[d, "h\rho_i"] & \\ A \arrow[r, "p"'] & A'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

kommutoi kaikilla $i \in I$. Määritellään kuvaus $g : \bigoplus_{i \in I} P_i \to A$ asettamalla

$$g(x) = \sum_{i \in I} g_i(\pi_i(x))$$

kaikilla $x \in \bigoplus_{i \in I} P_i$, missä $\pi_j : \bigoplus_{i \in I} P_i \to P_j$ ovat projektioita kaikilla $j \in I$. Tässä g on R-homomorfismi, koska g_i ja π_i ovat R-homomorfismeja kaikilla $i \in I$. Jos $x \in P$, niin

$$\begin{aligned}(pg)(x) = p(g(x)) = p(\sum_{i \in I} g_i(\pi_i(x))) &= \sum_{i \in I}(pg_i)(\pi_i(x)) \\ = \sum_{i \in I}(h\rho_i)(\pi_i(x)) &= h(\sum_{i \in I}(\rho_i \pi_i)(x)) = h(x),\end{aligned}$$

koska $\sum_{i \in I}(\rho_i \pi_i)(x) = x$. Siis $\bigoplus_{i \in I} P_i$ on projektiivinen.

”$\Rightarrow$”

Oletetaan, että $\bigoplus_{i \in I} P_i$ on projektiivinen. Olkoon $i \in I$, $h : P_i \to A''$ R-homomorfismi ja $p : A \to A''$ surjektio. Pitää löytää sellainen g, että kaavio

$$\begin{tikzcd} & P_i \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "h"] & \\ A \arrow[r, "p"'] & A'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

kommutoi.

$h\pi_i : \bigoplus_{i \in I} P_i \to A''$, missä π_i on projektio, on R-homomorfismi. Tällöin, koska P on projektiivinen, kaavio

$$\begin{tikzcd} & \bigoplus_{i \in I} P_i \arrow[dl, dashed, "g'"'] \arrow[d, "h\pi_i"] & \\ A \arrow[r, "p"'] & A'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

kommutoi. Määritellään kuvaus $g : P_i \to A$ asettamalla

$$g(x) = g'(\rho_i(x))$$

kaikilla $x \in P_i$, missä ρ on edellä esitetty kuvaus. Tässä g on R-homomorfismi, koska g' ja ρ ovat R-homomorfismeja. Jos $x \in P_i$, niin

$$(pg)(x) = p(g'(\rho_i(x))) = (pg')(\rho_i(x)) = (h\pi_i)(\rho_i(x)) = h(\pi_i \rho_i(x)) = h(x),$$

koska $\pi_i \rho_i(x) = x$. Siis P_i on projektiivinen.

$\square$

Lause 4.4. (ks. [3, s. 77]) R-moduli P on projektiivinen, jos ja vain jos jokainen lyhyt eksakti jono

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} P \to 0$$

on lohkeava.

Todistus. ”$\Leftarrow$”

Olkoon P R-moduli. Oletetaan, että jokainen lyhyt eksakti jono

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} P \to 0$$

on lohkeava. Lauseen 4.2 mukaan P on projektiivisen R-modulin P' homomorfinen kuva. Olkoon $f : P' \to P$ tuo homomorfismi. Tällöin

$$0 \to ker(f) \xrightarrow{i} P' \xrightarrow{f} P \to 0,$$

missä i on inkluusio, on eksakti ja oletuksen mukaan lohkeava. Lauseen 2.3 mukaan $P' \cong ker(f) \bigoplus P$ ja edelleen Lauseen 4.3 mukaan P on projektiivinen.

”$\Rightarrow$”

Oletetaan, että P on projektiivinen R-moduli. Olkoon

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} P \to 0$$

eksakti. Projektiivisuuden määritelmän mukaan kaavio

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "1_P"] & \\
B \arrow[r, "p"'] & P \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

kommutoi eli $gp = 1_P$. Siis jono

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} P \to 0$$

on lohkeava.

□

Projektiivisten ja vapaiden modulien välillä on yhteys:

Lause 4.5. (ks. [1, s. 101]) Olkoon P R-moduli. Tällöin P on projektiivinen, jos ja vain jos se on vapaan R-modulin F suora tekijä.

Todistus.

"$\Rightarrow$"

Oletetaan, että P on projektiivinen. Jokainen R-moduli on isomorfinen vapaan modulin tekijämodulin kanssa. Siis $P \cong F/M$, missä F on vapaa R-moduli. Tällöin on olemassa surjektiivinen R-homomorfismi $f : F \to P$. Tällöin jono

$$0 \to ker(f) \xrightarrow{i} F \xrightarrow{f} P \to 0$$

on eksakti. Lauseen 4.4 mukaan jono on lohkeava. Tällöin Lauseen 2.3 mukaan $F \cong ker(f) \oplus P$. Siis P on vapaan modulin suora tekijä.

"$\Leftarrow$"

Oletetaan, että $F = P \oplus M$, missä M on R-moduli ja F vapaa R-moduli. Tällöin Lauseen 1.13 mukaan on olemassa R-homomorfismit $q : F \to P$ ja $j : P \to F$ siten, että

$$qj = 1_P.$$

Olkoon $f : P \to C$ R-homomorfismi ja $p : B \to C$ surjektiivinen R-homomorfismi. Pitää osoittaa, että on olemassa sellainen g, että kaavio

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "f"] & \\
B \arrow[r, "p"'] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

kommutoi. Koska F vapaana modulina on projektiivinen, niin on olemassa sellainen $h : F \to B$, että kaavio

$$\begin{tikzcd}
 & F \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "fq"] & \\
B \arrow[r, "p"'] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

kommutoi. Olkoon $g = hj$. Tällöin

$$pg = p(hj) = (ph)j = (fq)j = f(qj) = f.$$

Siis P on projektiivinen.

$\square$

Lause 4.6. (ks. [3, s. 78]) Olkoon P projektiivinen R-moduli. Tällöin $P \otimes_R \square$ ja $\square \otimes_R P$ ovat eksakteja funktoreita.

Todistus. Osoitetaan, että $P \otimes_R \square$ on eksakti. Funktorin $\square \otimes_R P$ eksaktius osoitetaan vastaavalla tavalla. Lauseen 3.3 mukaan $P \otimes_R \square$ on oikealta eksakti. Riittää siis osoittaa, että jonon

$$0 \to A \xrightarrow{j} B$$

eksaktiudesta seuraa jonon

$$0 \to P \otimes_R A \xrightarrow{1 \otimes j} P \otimes_R B$$

eksaktius.

Todistetaan funktorin $P \otimes_R \square$ eksaktius ensin vapaalle modulille F, jolla on kanta $(x_i)_{i \in I}$. Lauseen 1.7 mukaan $F \cong R^{(I)} = \oplus_{i \in I} R$. Voidaan merkitä $F = \oplus_{i \in I} R$. Lauseen 1.33 mukaan

$$f : \bigoplus_{i \in I} R \otimes_R A \to \bigoplus_{i \in I} (R \otimes_R A),$$

$(r_i)_{i \in I} \otimes a \mapsto (r_i \otimes a)_{i \in I}$ on R-isomorfismi. Edelleen esimerkin 1.3 mukaan

$$g : R \otimes_R A \to A \ , \ r \otimes a \mapsto ra$$

on R-isomorfismi. Saadaan R-isomorfismi

$$h : \bigoplus_{i \in I} (R \otimes_R A) \to \bigoplus_{i \in I} A \ , \ (r_i \otimes a)_{i \in I} \mapsto (r_i a)_{i \in I}$$

ja edelleen yhdistämällä f ja h saadaan R-isomorfismi

$$\phi_A : F \otimes_R A \to \bigoplus_{i \in I} A \ , \ (r_i)_{i \in I} \otimes a \mapsto (r_i a)_{i \in I}.$$

Nyt kaavio

$$\begin{tikzcd} F \otimes_R A \arrow[r, "1 \otimes j"] \arrow[d, "\phi_A"'] & F \otimes_R B \arrow[d, "\phi_B"] \\ \bigoplus_{i \in I} A \arrow[r, "(j)_{i \in I}"'] & \bigoplus_{i \in I} B \end{tikzcd}$$

kommutoi. Nimittäin

$$\begin{aligned} \phi_B((1 \otimes j)((r_i)_{i \in I} \otimes a)) &= \phi_B((r_i)_{i \in I} \otimes j(a)) = (r_i j(a))_{i \in I} \\ &= (j)_{i \in I}((r_i a)_{i \in I}) = (j)_{i \in I}(\phi_A((r_i)_{i \in I} \otimes a)). \end{aligned}$$

Koska j on injektio, niin myös $(j)_{i \in I}$ on injektio. Tällöin myös $1 \otimes j$ on injektio. Siis $F \otimes_R \square$ on eksakti funktori.

Lauseen 1.9 mukaan jokainen R-moduli on vapaan R-modulin homomorfinen kuva. Olkoon F vapaa R-moduli ja $p : F \to P$ surjektiivinen R-homomorfismi. Koska P on projektiivinen, niin on olemassa sellainen $g : P \to F$, että kaavio

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "1_P"] & \\ F \arrow[r, "p"'] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

kommutoi eli $pg = 1_P$. Tällöin g on injektio ja edelleen $g \otimes 1_A$ on injektio, koska

$$(p \otimes 1_A)(g \otimes 1_A) = (pg \otimes 1_A) = 1_P \otimes 1_A = 1_{P \otimes_R A}.$$

Saadaan kommutoiva kaavio

$$\begin{tikzcd} P \otimes_R A \arrow[r, "1_P \otimes j"] \arrow[d, "g \otimes 1_A"'] & P \otimes_R B \arrow[d, "g \otimes 1_B"] \\ F \otimes_R A \arrow[r, "1_F \otimes j"'] & F \otimes_R B, \end{tikzcd}$$

jossa $g \otimes 1_A$, $g \otimes 1_B$ ja $1_F \otimes j$ ovat injektioita, kuten edellä osoitettiin. Onko myös $1_P \otimes j$ injektio?

Oletetaan, että $(1_P \otimes j)(x) = 0$, missä $x \in P \otimes_R A$. Tällöin

$$0 = (g \otimes 1_B)((1_P \otimes j)(x)) = (1_F \otimes j)((g \otimes 1_A)(x)).$$

Koska $1_F \otimes j$ on injektio, niin $(g \otimes 1_A)(x) = 0$. Vastaavasti, koska $g \otimes 1_A$ on injektio, niin $x = 0$. Siis $1_P \otimes j$ on injektio ja täten $F \otimes_R \square$ on eksakti funktori. $\square$

Lause 4.7 (Projektiivinen kanta)**.** (ks. [3, s. 79], [1, s. 105]) R-moduli A on projektiivinen, jos ja vain jos on olemassa alkiot $(a_i \in A)_{i \in I}$ ja R-homomorfismit $(\varphi_i : A \to R)_{i \in I}$ siten, että kaikilla $x \in A$

(i) $\varphi_i(x) = 0$ melkein kaikilla $i \in I$,

(ii) $x = \sum_{i \in I} \varphi_i(x) a_i$.

Lisäksi $A = \langle a_i \mid i \in I \rangle$.

Todistus.

”$\Leftarrow$”

Oletetaan, että tällaiset alkiot $(a_i \in A)_{i \in I}$ ja R-homomorfismit $(\varphi_i : A \to R)_{i \in I}$ ovat olemassa. Olkoon F vapaa kantana $(x_i)_{i \in I}$. Lauseen 1.7 mukaan on olemassa yksikäsitteinen R-homomorfismi $f : F \to A$ siten, että $f(x_i) = a_i$ kaikilla $i \in I$. Jos $x \in A$, niin

$$x = \sum_{i \in I} \varphi_i(x) a_i = \sum_{i \in I} \varphi_i(x) f(x_i) = f(\sum_{i \in I} \varphi_i(x) x_i,)$$

joten f on surjektio. Tällöin jono

$$0 \to ker(f) \xrightarrow{i} F \xrightarrow{f} A \to 0$$

on eksakti. Jos jono on lohkeava, niin Lauseen 2.3 mukaan $F \cong ker(f) \oplus A$. Edelleen Lauseen 4.3 mukaan A on projektiivinen, koska F vapaana modulina on projektiivinen (ja tietenkin $ker(f) \oplus A$ on projektiivinen, koska $F \cong ker(f) \oplus A$). Osoitetaan, että edellä mainittu jono lohkeaa.

Määritellään kuvaus

$$g : A \to F$$

asettamalla $g(x) = \sum_{i \in I} \varphi_i(x) x_i$. Koska $\varphi_i(x) = 0$ melkein kaikilla $i \in I$, niin summa on finiittinen. Tällöin Lauseen 1.6 mukaan $g(x) \in F$ ja siis kuvaus on mielekäs. Tässä g on R-homomorfismi, koska kuvaukset φ_i ovat R-homomorfismeja kaikilla $i \in I$. Jos $x \in A$, niin

$$f(g(x)) = f(\sum_{i \in I} \varphi_i(x) x_i) = \sum_{i \in I} \varphi_i(x) f(x_i) = \sum_{i \in I} \varphi_i(x) a_i = x,$$

joten $fg = 1_A$. Siis jono on lohkeava ja A on projektiivinen.

”$\Rightarrow$”

Oletetaan, että A on projektiivinen. Olkoon F vapaa R-moduli, jolla on kanta $(x_i)_{i \in I}$, ja $p : F \to A$ surjektiivinen R-homomorfismi (, joka on olemassa Lauseen 1.9 mukaan). Koska A on projektiivinen, niin on olemassa $g : A \to F$ siten, että kaavio

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "1_A"] & \\
F \arrow[r, "p"'] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

kommutoi eli $pg = 1_A$.

Olkoon $i \in I$. Määritellään kuvaus

$$\varphi_i : A \to R$$

asettamalla $\varphi_i(x) = r_i$, missä $g(x) = \sum_{i\in I} r_i x_i$. Lauseen 1.6 mukaan esitys $g(x) = \sum_{i\in I} r_i x_i$ on yksikäsitteinen, joten φ_i on mielekäs. Tässä φ_i on R-homomorfismi, koska g on R-homomorfismi. Merkitään $a_i = p(x_i)$ kaikilla $i \in I$. Osoitetaan, että alkiot

$$(a_i \in A)_{i\in I}$$

ja R-homomorfismit

$$(\varphi_i : A \to R)_{i\in I}$$

toteuttavat ehdot (i) ja (ii).

Olkoon $x \in A$. Tällöin

(i) Lauseen 1.6 mukaan $g(x) = \sum_{i\in I} r_i x_i$ on finiittinen, joten $\varphi_i(x) = r_i = 0$ melkein kaikilla $i \in I$,

(ii) $x = p(g(x)) = p(\sum_{i\in I} r_i x_i) = \sum_{i\in I} r_i p(x_i) = \sum_{i\in I} r_i a_i = \sum_{i\in I} \varphi_i(x) x_i$.

□

Esimerkki 4.2. (ks. [3, s. 80]) Olkoon P $\mathbb{Z}$-moduli. Tällöin P on projektiivinen, jos ja vain jos se on vapaa.

Ratkaisu. Vapaat modulit ovat projektiivisia, joten riittää osoittaa, että projektiiviset $\mathbb{Z}$-modulit ovat vapaita. Olkoon P projektiivinen $\mathbb{Z}$-moduli. Lauseen 4.5 mukaan $F \cong P \oplus M$. Siis $P \cong F_0$, missä $F_0 \subseteq F$ on $\mathbb{Z}$-alimoduli. Lauseen 1.8 mukaan F_0 on vapaa, joten myös P on vapaa. □

Edellinen esimerkki on tosi kaikille pääideaalirenkaille R.

Seuraavaksi annetaan esimerkki projektiivisesta modulista, joka ei ole vapaa

Esimerkki 4.3. (ks. [1, s. 102]) Olkoon $R = \mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. Rengas R on aina vapaa R-moduli kantana $\{1\}$. Nyt

$$R = J \oplus I,$$

missä $I = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ ja $J = \{\bar{0}, \bar{3}\}$. Rengas R on vapaana modulina projektiivinen. Tällöin Lauseen 4.3 mukaan sekä I että J ovat projektiivisia. Kumpikaan niistä ei kuitenkaan ole vapaa, koska niissä on vähemmän alkioita kuin renkaassa R.

4.2 Injektiiviset modulit

Injektiivinen moduli on niin sanottu duaalimääritelmä projektiiviselle modulille. Monet Lauseet ovat samankaltaisia kuin projektiivisten modulien tapauksessa, mutta duaalisesti esitettyinä. Huomaa, että moduli voi olla sekä injektiivinen että projektiivinen.

Määritelmä 4.2. Olkoot A, B ja E R-moduleita, $i : A \to B$ injektiivinen R-homomorfismi ja $f : A \to E$ R-homomorfismi. Sanotaan, että E on *injektiivinen* (R-moduli), jos on olemassa sellainen R-homomorfismi g, että kaavio

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & B \arrow[ul, dashed, "g"'] \end{tikzcd}$$

kommutoi.

Projektiivisten modulien tapauksessa $Hom(P, \square)$ oli eksakti. Injektiivisillä moduleilla $Hom(\square, E)$ on eksakti:

Lause 4.8. (ks. [3, s. 82]) R-moduli E on injektiivinen, jos ja vain jos $Hom(\square, E)$ on eksakti funktori.

Todistus.

”$\Leftarrow$”

Oletetaan, että $Hom(\square, E)$ on eksakti funktori. Olkoon $i : A \to B$ injektio ja $f : A \to E$ R-homomorfismi. Pitää löytää sellainen g, että kaavio

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & B \arrow[ul, dashed, "g"'] \end{tikzcd}$$

kommutoi.

Koska $Hom(\square, E)$ on eksakti, niin

$$Hom(B, E) \xrightarrow{i^*} Hom(A, E) \to 0$$

on eksakti eli i^* on surjektio. On siis olemassa sellainen $g \in Hom(B, E)$, että $i^*(g) = gi = f$. Siis E on injektiivinen.

”$\Rightarrow$”

Oletetaan, että E on injektiivinen R-moduli. Koska $Hom(\square, E)$ on vasemmalta eksakti, riittää osoittaa eksaktius oikealta. Olkoon

$$0 \to A \xrightarrow{i} B$$

eksakti. Pitää osoittaa, että

$$Hom(B,E) \xrightarrow{i^*} Hom(A,E) \to 0$$

on eksakti.

Olkoon $f \in Hom(A,E)$. Koska E on injektiivinen, niin on olemassa sellainen $g : B \to E$, että kaavio

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & B \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

kommutoi. Tällöin $i^*(g) = gi = f$. Täten i^* on surjektio ja siis $Hom(\square, E)$ eksakti.

□

Lause 4.9. (ks. [1, s. 116]) Jos R-moduli E on injektiivinen, niin jokainen lyhyt eksakti jono

$$0 \to E \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0.$$

on lohkeava.

Todistus. Koska E on injektiivinen, niin on olemassa sellainen $q : B \to E$, että kaavio

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & E \arrow[u, "1_E"] \arrow[r, "i"'] & B \arrow[ul, "q"'] \end{tikzcd}$$

kommutoi eli $1_E = qi$. Esimerkin 2.3 mukaan

$$0 \to E \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0.$$

on lohkeava. □

Injektiivisten modulien suora tulo on injektiivinen.

Lause 4.10. (ks. [3, s. 81]) Olkoon $(E_i)_{i\in I}$ perhe R-moduleita. Tällöin $\prod_{i\in I} E_i$ on injektiivinen, jos ja vain jos E_i on injektiivinen kaikilla $i \in I$.

Todistus. Olkoot $\pi_j : \prod_{i\in I} E_i \to E_j$ ja $\rho_j : E_j \to \prod_{i\in I} E_i$, kuten Lauseessa 4.3, ja olkoon $k : A \to B$ injektio.

"$\Leftarrow$"

Oletetaan, että modulit E_i ovat injektiviivisiä kaikilla $i \in I$. Olkoon $f : A \to \prod_{i\in I} E_i$ R-homomorfismi. Tällöin $\pi_i f : A \to E_i$ on R-homomorfismi kaikilla $i \in I$. Kaikilla $i \in I$ E_i on injektiivinen, joten on olemassa $g_i : B \to E_i$ siten, että kaavio

$$\begin{tikzcd} & E_i & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "\pi_i f"] \arrow[r, "k"'] & B \arrow[ul, "g_i"'] \end{tikzcd}$$

kommutoi. Määritellään kuvaus $g : B \to \prod_{i\in I} E_i$ asettamalla

$$g(b) = \sum_{i\in I} g_i(b)$$

kaikilla $b \in B$. Tässä g on R-homomorfismi, koska kaikilla $i \in I$ g_i on R-homomorfismi. Jos $a \in A$, niin

$$g(k(a)) = \sum_{i\in I} g_i(k(a)) = \sum_{i\in I} \pi_i(f(a)) = f(a).$$

Siis kaavio

$$\begin{tikzcd} & \prod_{i\in I} E_i & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "k"'] & B \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

kommutoi ja $\prod_{i\in I} E_i$ on injektiivinen.

"$\Rightarrow$"

Oletetaan, että $\prod_{i\in I} E_i$ on injektiivinen. Olkoon $i \in I$ ja $f : A \to E_i$ R-homomorfismi. Tällöin $\rho_i f : A \to \prod_{i\in I} E_i$ on R-homomorfismi. Koska $\prod_{i\in I} E_i$ on injektiivinen, niin on olemassa sellainen $g' : B \to \prod_{i\in I} E_i$, että kaavio

$$\begin{tikzcd} & \prod_{i\in I} E_i & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "\rho_i f"] \arrow[r, "k"'] & B \arrow[ul, "g'"'] \end{tikzcd}$$

kommutoi. Määritellään kuvaus $g : B \to E_i$ asettamalla

$$g(b) = \pi_i(g'(b))$$

kaikilla $b \in B$. Jos $a \in A$, niin

$$g(k(a)) = \pi_i(g'(k(a))) = \pi_i(\rho_i(f(a))) = (\pi_i\rho_i)(f(a)) = f(a).$$

Siis kaavio

$$\begin{tikzcd}
 & E_i & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "k"'] & B \arrow[ul, "g"']
\end{tikzcd}$$

kommutoi eli E_i on injektiivinen.

$\square$

Seuraavaksi esitetään Baerin kriteeri, joka on tärkeä tulos injektiivisille moduleille.

Lause 4.11 (Baerin kriteeri)**.** (ks. [2, s. 30]) Olkoon E R-moduli ja $I \subseteq R$ ideaali. Tällöin E on injektiivinen, jos ja vain jos on olemassa sellainen g, että kaavio

$$\begin{tikzcd}
 & E & \\
0 \arrow[r] & I \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & R \arrow[ul, dashed, "g"']
\end{tikzcd}$$

kommutoi, missä i on inkluusio.

Todistus.

"$\Leftarrow$"

Olkoon $h \to E$ R-homomorfismi ja $j : A \to B$ injektio. Käytetään Zornin lemmaa. Muodostetaan joukko $\mathcal{B}$ pareista (B', g'), missä $B' \subseteq B$ on alimoduli, $j(A) \subseteq B'$ ja $g'j = h$ eli kaavio

$$\begin{tikzcd}
 & E & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[u, "h"] \arrow[r, "j"'] & B \arrow[ul, "g'"']
\end{tikzcd}$$

kommutoi. Huomataan, että $\mathcal{B} \neq \emptyset$, koska $(j(A), hk^{-1}) \in \mathcal{B}$, missä $k : A \to j(A)$, $a \mapsto j(a)$. Muodostetaan relaatio $\leq$ seuraavasti:

$$(B', g') \leq (B'', g''), \text{ jos } B' \subseteq B'' \text{ ja } g''_{|B'} = g'.$$

Osoitetaan, että $(\mathcal{B}, \leq)$ on osittain järjestetty joukko.

- Tietenkin $(B', g') \subseteq (B', g')$. Siis $\leq$ on refleksiivinen.
- Oletetaan, että $(B', g') \subseteq (B'', g'')$ ja $(B'', g'') \subseteq (B', g')$. Koska $B' \subseteq B''$ ja $B'' \subseteq B'$, niin $B' = B''$. Tällöin $g' = g''_{|B'} = g''$. Siis $\leq$ on antisymmetrinen.
- Oletetaan, että $(B', g') \subseteq (B'', g'')$ ja $(B'', g'') \subseteq (B''', g''')$. Koska $B' \subseteq B''$ ja $B'' \subseteq B'''$, niin $B' \subseteq B'''$. Edelleen $g' = g''_{|B'} = (g'''_{|B''})_{|B'} = g'''_{|B'}$, koska $B' \subseteq B''$. Siis $\leq$ on transitiivinen.

Olkoon $\varnothing \neq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ ketju. Osoitetaan, että sen yläraja on (B_0, g_0), missä $B_0 = \bigcup_{(B',g') \in \mathcal{C}} \{B'\}$ ja $g_0(x) = g'(x)$, jos $x \in B'$ ja $(B', g') \in \mathcal{C}$.

- Olkoon $(B'', g'') \in \mathcal{C}$. Tällöin $B'' \subseteq \bigcup_{(B',g') \in \mathcal{C}} \{B'\} = B_0$.
- Onko g_0 mielekäs? Jos $x \in B_0$, niin $x \in B'$ jollakin $(B', g') \in \mathcal{C}$. Siis jokaiselle joukon B_0 alkiolle löytyy kuva. Oletetaan, että $g_0(x) = g'(x)$ ja $g_0(x) = g''(x)$, missä $x \in B' \cap B''$ ja $(B', g'), (B'', g'') \in \mathcal{C}$. Koska $\mathcal{C}$ on ketju, niin joko $(B', g') \leq (B'', g'')$ tai $(B'', g'') \leq (B', g')$. Voidaan olettaa, että $(B', g') \leq (B'', g'')$. Tällöin $g''_{|B'} = g'$. Siis $g'(x) = g''(x)$ ja g_0 on mielekäs.

  Olkoon $(B', g') \in \mathcal{C}$. Tällöin $B' \subseteq B_0$, kuten edellä osoitettiin, ja $g_0(x) = g'(x)$ kaikilla $x \in B'$. Siis $g_{0|B'} = g'$.

Zornin lemman mukaan joukolla $\mathcal{B}$ on maksimaalinen alkio (B_m, g_m). Pitää vielä osoittaa, että $B_m = B$, jolloin on osoitettu, että E on injektiivinen.

Tehdään vastaoletus, että $B_m \neq B$. Olkoon $x \in B - B_m$ ja

$$I = \{r \in R \mid rx \in B_m\} = \{r \in R \mid 0 = rx + B_m \in B/B_m\}.$$

I on ideaali, koska B_m on R-moduli. Määritellään kuvaus $\hat{h} : I \to E$ asettamalla $\hat{h}(r) = g_m(rx)$ kaikilla $r \in I$. Kuvaus on mielekäs ja se on R-homomorfismi, koska g_m on. Oletuksen mukaan on olemassa sellainen $\hat{g}$, että kaavio

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & I \arrow[u, "\hat{h}"] \arrow[r, "i"'] & R \arrow[ul, dashed, "\hat{g}"'] \end{tikzcd}$$

kommutoi, missä i on inkluusio.

Olkoon $B' = B_m + \langle x \rangle$. Määritellään kuvaus $g' : B' \to E$ asettamalla

$$g'(b + rx) = g_m(b) + \hat{g}(r)$$

kaikilla $b \in B_m$ ja $r \in R$. Onko g' mielekäs? Oletetaan, että $b + rx = b' + r'x$, missä $b, b' \in B_m$ ja $r, r' \in R$. Tällöin

$$(r' - r)x = b - b' \in B_m,$$

joten $r' - r \in I$. Nyt

$$g_m(b) - g_m(b') = g_m(b - b') = g_m((r' - r)x) = \hat{h}(r' - r) = \hat{g}(r' - r) = \hat{g}(r') - \hat{g}(r)$$

eli

$$g'(b + rx) = g_m(b) + \hat{g}(r) = g_m(b') + \hat{g}(r') = g'(b' + r'x).$$

Siis g' on mielekäs ja $(B', g') \in \mathcal{B}$. Nyt $(B_m, g_m) \leq (B', g')$, koska $B_m \subseteq B'$ ja $g'_{|B_m} = g_m$. Kuitenkaan $(B', g') \subseteq (B_m, g_m)$ ei päde, koska esimerkiksi $x \in B' - B_m$ eli B' ei ole joukon B_m osajoukko. Tämä on ristiriidassa alkion (B_m, g_m) maksimaalisuuden kanssa. Siis $B_m = B$ ja E on injektiivinen.

"$\Rightarrow$"

Seuraa suoraan siitä, että E on injektiivinen.

$\square$

Projektiiviset modulit ovat ominaisuuksiltaan lähellä vapaita moduleita. Seuraavaksi määritellään moduli, joka liittyy läheisesti injektiivisiin moduleihin.

Määritelmä 4.3. Olkoon R kokonaisalue. Sanotaan, että R-moduli A on *divisiibeli* (R-moduli), jos kaikilla $a \in A$ ja $0 \neq r \in R$ on olemassa $b \in A$ siten, että $a = rb$.

Divisiibelissä modulissa jokainen alkio on jaollinen jollain alkiolla. Tällöin tietenkin $Q(R)$ on divisiibeli. Eritoten $\mathbb{Q}$ on divisiibeli $\mathbb{Z}$-moduli.

Huomautus:
Divisiibelin modulin määritelmän voi muotoilla myös toisella tavalla: A on divisiibeli, jos ja vain jos *homotetia* $\phi_r : A \to A$, $a \mapsto ra$ on surjektio kaikilla $0 \neq r \in R$. Edelleen yhtäpitävää on, että $A = rA$ kaikilla $0 \neq r \in R$.

Esimerkki 4.4. (ks. [3, s. 88]) Olkoon R kokonaisalue ja $(M_i)_{i \in I}$ perhe R-moduleita. Tällöin $\bigoplus_{i \in I} M_i$ on divisiibeli, jos ja vain jos M_i on divisiibeli kaikilla $i \in I$.

Ratkaisu. "$\Rightarrow$"

Oletetaan, että $\bigoplus_{i \in I} M_i$ on divisiibeli. Tällöin jokaista $(a_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} M_i$ ja $r \in R$ kohti on olemassa $(b_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} M_i$ siten, että

$$(a_i)_{i \in I} = r(b_i)_{i \in I} = (rb_i)_{i \in I}.$$

Olkoon $i \in I$, $m \in M_i$ ja $r \in R$. Nyt $\rho_i(m) \in \bigoplus_{j \in I} M_j$ ja

$$m = \pi_i(\rho_i(m)) = \pi_i(r(m_j)_{j \in I}) = \pi_i((rm_j)_{j \in I}) = rm_i,$$

missä $(m_j)_{j \in I} \in \bigoplus_{j \in I} M_j$ ja ρ_i sekä π_i ovat, kuten Lauseessa 4.3. Siis M_i on divisiibeli kaikilla $i \in I$.

"$\Leftarrow$"

Oletetaan, että M_i on divisiibeli kaikilla $i \in I$. Tällöin kaikilla $i \in I$ jokaista $m_i \in M_i$ ja $r \in R$ kohti on olemassa $b_i \in M_i$ siten, että

$$m_i = rb_i.$$

Olkoon $(m_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} M_i$ ja $r \in R$. Nyt

$$(m_i)_{i \in I} = (rb_i)_{i \in I} = r(b_i)_{i \in I}.$$

Siis $\bigoplus_{i \in I} M_i$ on divisiibeli.

□

Esimerkki 4.5. Olkoon D divisiibeli R-moduli ja $E \subseteq D$ alimoduli. Tutkitaan tekijämodulia D/E. Jos $d \in D$ ja $r \in R$, niin $d = rb$ jollakin $b \in D$. Tällöin

$$d + E = (rb) + E = r(b + E).$$

Siis myös D/E on divisiibeli.

Lause 4.12. (ks. [1, s. 120]) Olkoon R kokonaisalue. Tällöin jokainen injektiivinen R-moduli on divisiibeli.

Todistus. Olkoon E injektiivinen R-moduli, $e \in E$ ja $0 \neq r_0 \in R$. Pitää löytää sellainen alkio $x \in E$, että $e = r_0 x$. Määritellään kuvaus $f : Rr_0 \to E$ asettamalla $f(rr_0) = re$ kaikilla $r \in R$. Onko f mielekäs? Oletetaan, että $rr_0 = r'r_0$. Nyt

$$(r - r')r_0 = 0,$$

joten $r - r' = 0$, koska R on kokonaisalue ja $r_0 \neq 0$. Siis $r = r'$ ja kuvaus on mielekäs.

$Rr_0 \subseteq R$ on ideaali ja täten myös R-moduli. Olkoon $i : Rr_0 \to R$ inkluusio. Tällöin on olemassa sellainen g, että kaavio

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & Rr_0 \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & R \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

kommutoi. Nyt

$$e = f(r_0) = g(r_0) = r_0 g(1),$$

joten $x = g(1)$. Siis E on divisiibeli. □

Milloin divisiibeli moduli on injektiivinen? Esitetään tätä varten määritelmä.

Määritelmä 4.4. Olkoon R kokonaisalue. Sanotaan, että R-moduli A on *torsiovapaa*, jos pätee seuraava ehto:

$$\text{jos } ra = 0 \text{ , missä } r \in R \text{ ja } a \in A, \text{ niin } r = 0 \text{ tai } a = 0.$$

Lause 4.13. (ks. [3, s. 87]) Olkoon R kokonaisalue. Tällöin torsiovapaa R-moduli on divisiibeli, jos ja vain jos se on injektiivinen.

Todistus. Lauseessa 4.12 todistettiin, että jokainen injektiivinen R-moduli on divisiibeli. Oletetaan, että E on torsiovapaa divisiibeli R-moduli. Olkoon $I \subseteq R$ ideaali, $f : I \to E$ R-homomorfismi ja $i : I \to R$ inkluusio. Baerin kriteerin (Lause 4.11) perusteella E on injektiivinen, jos on olemassa sellainen g, että kaavio

$$\begin{tikzcd}
 & E & \\
0 \arrow[r] & I \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & R \arrow[ul, dashed, "g"']
\end{tikzcd}$$

kommutoi.

Jos $I = 0$, niin esimerkiksi $g : R \to E$, $r \mapsto 0$ saa kaavion kommutoimaan. Oletetaan, että $I \neq 0$. Olkoon $0 \neq a \in I$. Tällöin $f(a) \in E$. Koska E on divisiibeli, niin on olemassa sellainen $e_a \in E$, että $f(a) = ae_a$. Nyt e_a on yksikäsitteinen, koska E on torsiovapaa. Nimittäin, jos $ae_a = ae'_a$, niin

$$a(e_a - e'_a) = 0$$

ja tällöin $e_a - e'_a = 0$, koska $a \neq 0$.

Osoitetaan seuraavaksi, että $e_a = e_b$ kaikilla $0 \neq a, b \in I$. Olkoot $0 \neq a, b \in I$. Nyt

$$f(ab) = af(b) = abe_b$$

ja toisaalta

$$f(ab) = f(ba) = bf(a) = bae_a = abe_a.$$

Tällöin

$$ab(e_a - e_b) = 0,$$

joten $e_a - e_b = 0$ tai $ab = 0$, koska E on torsiovapaa. Mutta $ab \neq 0$, koska R on kokoaisalue. Siis $e_a = e_b =: e$.

Määritellään kuvaus $g : R \to E$ asettamalla $g(r) = re$ kaikilla $r \in R$. Tässä g on selvästi R-homomorfismi. Jos $a \in I$, niin

$$g(a) = ae = f(a).$$

Siis kaavio

$$\begin{tikzcd}
 & E & \\
0 \arrow[r] & I \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & R \arrow[ul, "g"']
\end{tikzcd}$$

kommutoi ja E on injektiivinen. $\square$

$\mathbb{Q}$ on torsiovapaa divisiibeli $\mathbb{Z}$-moduli. Siis se on edellisen Lauseen mukaan myös injektiivinen. Tämän voi päätellä myös seuraavan Lauseen avulla, koska $\mathbb{Z}$ on pääideaalirengas.

Lause 4.14. (ks. [3, s. 87]) Olkoon R pääideaalirengas. Tällöin R-moduli on divisiibeli, jos ja vain jos se on injektiivinen.

Todistus. Lauseen 4.12 mukaan jokainen injektiivinen R-moduli on divisiibeli. Oletetaan, että E on divisiibeli R-moduli. Olkoon $I \subseteq R$ ideaali. Koska R on pääideaalirengas, niin $I = \langle a \rangle$ jollakin $a \in R$. Käytetään Baerin kriteeriä (Lause 4.11). Olkoon $f : I \to E$ R-homomorfismi ja $i : I \to R$ inkluusio.

Koska E on divisiibeli, niin on olemassa sellainen $e \in E$, että $f(a) = ae$. Määritellään kuvaus $g : R \to E$ asettamalla $g(r) = re$ kaikilla $r \in R$. Nyt g on selvästi R-homomorfismi. Olkoon $b \in I = \langle a \rangle$. Tällöin $b = ra$, jollakin $r \in R$ ja edelleen

$$g(b) = be = rae = rf(a) = f(ra) = f(b).$$

Siis kaavio

$$\begin{tikzcd}
 & E & \\
0 \arrow[r] & I \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & R \arrow[ul, "g"']
\end{tikzcd}$$

kommutoi ja E on injektiivinen. $\square$

Esimerkki 4.6. Rengas $\mathbb{Z}$ ei ole injektiivinen $\mathbb{Z}$-moduli. Se on pääideaalirengas ja se ei selvästikään ole divisiibeli, joten Lauseen 4.14 mukaan se ei ole injektiivinen.

Lopuksi esitetään vielä upotuslause eli tulos, että jokainen moduli voidaan upottaa injektiiviseen moduliin. Tämän todistaminen ei kuitenkaan ole kovinkaan yksinkertaista. Tarvitaan vielä pari Lausetta avuksi.

Lause 4.15. (ks. [3, s. 94]) Olkoon D divisiibeli Abelin ryhmä. Tällöin $Hom_{\mathbb{Z}}(R, D)$ on injektiivinen R-moduli.

Todistus. Lauseen 1.2 mukaan $Hom_{\mathbb{Z}}(R, D)$ on R-moduli. Käytetään injektiivisyyden todistamiseen Lausetta 4.8. Koska $Hom_R(\Box, Hom(R, D))$ on vasemmalta eksakti, riittää todistaa, että jonon

$$0 \to A \xrightarrow{i} B$$

eksaktiudesta seuraa jonon

$$Hom_R(B, Hom_{\mathbb{Z}}(R, D)) \xrightarrow{i^*} Hom_R(A, Hom_{\mathbb{Z}}(R, D)) \to 0$$

eksaktius.

Esimerkin 1.5 mukaan

$$\varphi_A : Hom_R(A, Hom_{\mathbb{Z}}(R, D)) \to Hom_{\mathbb{Z}}(A \otimes_R R, D),$$

$\tau \mapsto (r \otimes a \mapsto \tau(a)(r))$ on R-isomorfismi. Edelleen Lauseen 1.3 mukaan

$$f : A \otimes_R R \to A \ , \ a \otimes r \mapsto ra$$

on R-isomorfismi. Tällöin jokaista $g \in Hom_{\mathbb{Z}}(A \otimes_R R, D)$ kohti on olemassa yksikäsitteinen $h \in Hom_{\mathbb{Z}}(A, D)$ siten, että $g = hf$. Saadaan R-isomorfismi

$$\phi_A : Hom_{\mathbb{Z}}(A \otimes R, D) \to Hom_{\mathbb{Z}}(A, D) \ , \ g \mapsto h$$

missä $g = hf$. Tutkitaan kaaviota

$$\begin{array}{ccc}
Hom_R(B, Hom_{\mathbb{Z}}(R, D)) & \xrightarrow{i^*} & Hom_R(A, Hom_{\mathbb{Z}}(R, D)) \\
\downarrow{\scriptstyle \varphi_B} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_A} \\
Hom_{\mathbb{Z}}(B \otimes_R R, D) & & Hom_{\mathbb{Z}}(A \otimes_R R, D) \\
\downarrow{\scriptstyle \phi_B} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_A} \\
Hom_{\mathbb{Z}}(B, D) & \xrightarrow[i^*]{} & Hom_{\mathbb{Z}}(A, D)
\end{array}$$

Huomaa, että i^* ylimpänä on eri asia kuin i^* alimpana. Koska $\mathbb{Z}$ on pääideaalirengas, niin Lauseen 4.14 mukaan D on injektiivinen $\mathbb{Z}$-moduli. Tällöin Lauseen 4.8 mukaan $Hom_{\mathbb{Z}}(\Box, D)$ on eksakti funktori, joten $i^* : Hom_{\mathbb{Z}}(B, D) \to Hom_{\mathbb{Z}}(A, D)$ on surjektio. Jos edellä esitetty kaavio kommutoi, niin myös

$$i^* : Hom_R(B, Hom_{\mathbb{Z}}(R, D)) \to Hom_R(A, Hom_{\mathbb{Z}}(R, D))$$

on surjektio ja tällöin on osoitettu, että $Hom_{\mathbb{Z}}(R, D)$ on injektiivinen R-moduli. Osoitetaan, että kaavio kommutoi.

Olkoon $\tau \in Hom_R(B, Hom_{\mathbb{Z}}(R, D))$. Pitää osoittaa, että

$$\phi_A(\varphi_A(i^*(\tau)))(a) = i^*(\phi_B(\varphi_B(\tau)))(a)$$

kaikilla $a \in A$. Olkoon $a \in A$. Huomataan, että

$$\phi_A\varphi_A : Hom_R(A, Hom_{\mathbb{Z}}(R, D)) \to Hom_{\mathbb{Z}}(A, D)\ ,\ \tau \mapsto (ra \mapsto \tau(a)(r)).$$

Nyt

$$\phi_A(\varphi_A(i^*(\tau)))(a) = \phi_A(\varphi_A(\tau i))(a) = (\tau i)(a)(1) = \tau(i(a))(1)$$

ja

$$i^*(\phi_B(\varphi_B(\tau)))(a) = \phi_B(\varphi_B(\tau))(i(a)) = \tau(i(a))(1).$$

Siis kaavio kommutoi ja $Hom_{\mathbb{Z}}(R, D)$ on injektiivinen R-moduli. $\square$

Lause 4.16. (ks. [3, s. 95]) Olkoon A Abelin ryhmä. Tällöin on olemassa divisiibeli Abelin ryhmä D ja injektiivinen $\mathbb{Z}$-homomorfismi $f : A \to D$.

Todistus. Olkoon A Abelin ryhmä. Tällöin on olemassa vapaa $\mathbb{Z}$-moduli F, jolla on kanta $(x_i)_{i\in I}$, ja aliryhmä $B \subseteq F$ siten, että $F/B \cong A$. Lauseen 1.7 mukaan $F \cong \mathbb{Z}^{(I)} = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}$. Nyt

$$A \cong F/B \cong (\bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z})/B \subseteq (\bigoplus_{i\in I} \mathbb{Q})/B,$$

joten on olemassa injektiivinen $\mathbb{Z}$-homomorfismi $f : A \to (\bigoplus_{i\in I} \mathbb{Q})/B$. Esimerkin 4.4 mukaan divisiibelien modulien suora summa on divisiibeli ja esimerkin 4.5 mukaan divisiibelin modulin tekijämoduli on divisiibeli, joten $(\bigoplus_{i\in I} \mathbb{Q})/B$ on divisiibeli. $\square$

Aiemmin osoitettiin, että jokainen moduli on projektiivisen modulin homomorfinen kuva. Vastaavasti jokainen moduli voidaan upottaa injektiiviseen moduliin.

Lause 4.17 (Upotuslause)**.** (ks. [3, s. 95]) Olkoon A R-moduli. Tällöin on olemassa injektiivinen R-moduli E ja injektiivinen R-homomorfismi $f : A \to E$.

Todistus. Lauseen 4.16 mukaan on olemassa divisiibeli Abelin ryhmä D ja injektiivinen $\mathbb{Z}$-homomorfismi $g : A \to D$. Jos $a \in A$, niin määritellään

$$f_a : R \to A$$

asettamalla $f_a(r) = ra$ kaikilla $r \in R$. Tässä f_a on selvästi $\mathbb{Z}$-homomorfismi kaikilla $a \in A$. Koska g on injektio, niin $im(g)$ on R-moduli, kun määritellään

$$rg(a) = g(ra)$$

kaikilla $r \in R$ ja $a \in A$. Nimittäin tällöin $A \cong im(g)$. Määritellään kuvaus $f : A \to Hom_{\mathbb{Z}}(R, D)$ asettamalla $f(a) = gf_a$ kaikilla $a \in A$. Onko f R-homomorfismi?

Olkoot $a', a'' \in A$ ja $r', r'', r_0 \in R$. Nyt

$$\begin{aligned} f(r'a' + r''a'')(r_0) &= g(f_{r'a'+r''a''}(r_0)) = g(r_0(r'a' + r''a'')) \\ &= g(r_0r'a' + r_0r''a'') = g(r_0r'a') + g(r_0r''a'') \\ &= g(r'r_0a') + g(r''r_0a'') = r'g(r_0a') + r''g(r_0a'') \\ &= r'g(f_{a'}(r_0)) + r''g(f_{a''}(r_0)) = r'f(a')(r_0) + r''f(a'')(r_0) \\ &= (r'f(a') + r''f(a''))(r_0), \end{aligned}$$

joten f on R-homomorfismi. Jos $f(a) = 0$, niin $f_a(r) = 0$ kaikilla $r \in R$. Erityisesti $f_a(1) = a = 0$. Siis f on injektio.

Lauseen 4.15 mukaan $Hom_{\mathbb{Z}}(R, D)$ on injektiivinen R-moduli. Siis on osoitetettu, että jokainen R-moduli voidaan upottaa injektiiviseen R-moduliin.

$\square$

4.3 Laakeat modulit

Tässä luvussa määritellään laakea moduli ja osoitetaan, että jokainen projektiivinen moduli on laakea. Annetaan myös esimerkki laakeasta modulista, joka ei ole projektiivinen. Injektiivisen ja laakean modulin yhteys on monimutkaisempi eikä siihen tässä tutkielmassa pureuduta.

Määritelmä 4.5. Sanotaan, että R-moduli A on *laakea*, jos $A \otimes_R \square$ on eksakti funktori. Toisin sanoen, jos

$$0 \to B' \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} B'' \to 0$$

on eksakti jono, niin

$$0 \to A \otimes_R B' \xrightarrow{1_A \otimes i} A \otimes_R B \xrightarrow{1_A \otimes p} A \otimes_R B'' \to 0$$

on eksakti.

Huomautus:
Koska $A \otimes_R \square$ on oikealta eksakti Lauseen 3.3 mukaan, niin riittää todistaa, että jonon

$$0 \to B \xrightarrow{i} C$$

eksaktiudesta seuraa jonon

$$0 \to A \otimes_R B \xrightarrow{1_A \otimes i} A \otimes_R C$$

eksaktius. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että R-homomorfismin i injektiivisyydestä seuraa R-homomorfismin $1 \otimes i$ injektiivisyys.

Lause 4.18. (ks. [1, s. 132])

(i) R on laakea R-moduli,

(ii) Olkoot M_j R-moduleita, missä $j \in I$. Suora summa $\bigoplus_{j\in I} M_j$ on laakea, jos ja vain jos M_j on laakea kaikilla $j \in I$,

(iii) Jokainen projektiivinen R-moduli P on laakea.

Todistus.

(i) Olkoon $i : A \to B$ injektiivinen R-homomorfismi. Lauseen 1.3 mukaan $\varphi_A : R \otimes_R A \to A$, $r \otimes a \mapsto ra$ on R-isomorfismi ja sen käänteiskuvaus on $\varphi_A^{-1} : A \to R \otimes_R A$, $a \mapsto 1 \otimes a$. Tällöin kommutoivassa kaaviossa

$$\begin{tikzcd} R \otimes_R A \arrow[r, "\varphi_B^{-1} i \varphi_A"] \arrow[d, "\varphi_A"'] & R \otimes_R B \arrow[d, "\varphi_B"'] \\ A \arrow[r, "i"'] & B \end{tikzcd}$$

$\varphi_B^{-1} i \varphi_A$ on injektio, koska i on injektio. Osoitetaan, että $\varphi_B^{-1} i \varphi_A = 1_R \otimes i$.

Olkoon $r \otimes a \in R \otimes_R A$. Nyt

$$\begin{aligned} \varphi_B^{-1}(i(\varphi_A(r \otimes a))) &= \varphi_B^{-1}(i(ra)) = 1 \otimes i(ra) = 1 \otimes ri(a) \\ &= r(1 \otimes i(a)) = r \otimes i(a) = (1_R \otimes i)(r \otimes a). \end{aligned}$$

(ii) Olkoon

$$0 \to B \xrightarrow{i} C$$

eksakti jono. Pitää osoittaa, että

$$0 \to (\bigoplus_{j\in I} M_j) \otimes_R B \xrightarrow{1_{(\bigoplus_{j\in I} M_j)} \otimes i} (\bigoplus_{j\in I} M_j) \otimes_R C$$

on eksakti, jos ja vain jos

$$0 \to M_j \otimes_R B \xrightarrow{1_{M_j} \otimes i} M_j \otimes_R C$$

on eksakti kaikilla $j \in I$. Toisin sanoen $1_{(\bigoplus_{j\in I} M_j)} \otimes i$ on injektiivinen, jos ja vain jos $1_{M_j} \otimes i$ on injektiivinen kaikilla $j \in I$.

Tutkitaan kaaviota

$$\begin{array}{ccc}
(\bigoplus_{j\in I} M_j)\otimes_R A & \xrightarrow{1_{(\bigoplus_{j\in I} M_j)}\otimes i} & (\bigoplus_{j\in I} M_j)\otimes_R B \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \tau_A} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \tau_B} \\
\bigoplus_{j\in I}(M_j\otimes_R A) & \xrightarrow[\varphi]{} & \bigoplus_{j\in I}(M_j\otimes_R B),
\end{array}$$

missä τ_A ja τ_B ovat R-isomorfismeja, kuten Lauseessa 1.33 ja φ on, kuten esimerkissä 1.2 (eli $\varphi((a_j)_{j\in I}) = ((1_{M_j}\otimes i)(a_j))_{j\in I})$. Edelleen esimerkin 1.2 mukaan φ on injektio, jos ja vain jos $1_{M_j}\otimes i)$ on injektio kaikilla $j \in I$. Jos kaavio kommutoi, niin φ on injektio, jos ja vain jos $1_{(\bigoplus_{j\in I} M_j)}\otimes i$. Tällöin väite olisi todistettu. Osoitetaan, että kaavio kommutoi.

Olkoon $(m_j)_{j\in I}\in \bigoplus_{j\in I} M_j$ ja $a\in A$. Nyt

$$\begin{aligned}
\tau_B((1_{(\bigoplus_{j\in I} M_j)}\otimes i)((m_j)_{j\in I}\otimes a)) &= \tau_B((m_j)_{j\in I}\otimes i(a)) \\
&= (m_j\otimes i(a))_{j\in I}
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
\varphi(\tau_A((m_j)_{j\in I}\otimes a)) &= \varphi((m_j\otimes a)_{j\in I}) \\
&= ((1_{M_j}\otimes i)(m_j\otimes a))_{j\in I} \\
&= (m_j\otimes i(a))_{j\in I}.
\end{aligned}$$

Siis kaavio kommutoi ja täten väite on osoitettu todeksi.

(iii) Seuraa Lauseesta 4.6.

□

Lause 4.19. (ks. [1, s. 133]) Jos jokainen äärellisesti viritetty R-modulin M alimoduli on laakea, niin M on laakea.

Todistus. Olkoon

$$0 \to A \xrightarrow{i} B$$

eksakti. Osoitetaan, että

$$0 \to M\otimes_R A \xrightarrow{1_M\otimes i} M\otimes_R B$$

on eksakti.

Olkoon $u \in ker(1_M\otimes i)$. Lauseen 1.32 mukaan on olemassa äärellisesti viritetty alimoduli $N\subseteq M$ ja alkio $u'\in N\otimes_R A$ siten, että $u'\in ker(1_N\otimes i)$

ja $u = (\phi \otimes 1_A)(u')$, missä ϕ on inkluusio. Koska oletuksen mukaan N on laakea, niin $N \otimes_R \square$ on eksakti. Tällöin $1_N \otimes i$ on injektio, joten $u' = 0$. Nyt

$$0 = (\phi \otimes 1_A)(u') = u.$$

Siis $1_M \otimes i$ on injektio ja täten M on laakea. $\square$

Lause 4.20. (ks. [1, s. 134]) Olkoon R pääideaalirengas. Tällöin R-moduli A on laakea, jos ja vain jos se on torsiovapaa.

Todistus.

"$\Rightarrow$"

Oletetaan, että A on laakea. Tällöin $A \otimes_R \square$ on eksakti funktori, joten eksaktin jonon

$$0 \to R \xrightarrow{i} Q(R)$$

eksaktiudesta seuraa jonon

$$0 \to A \otimes_R R \xrightarrow{i} A \otimes_R Q(R)$$

eksaktius. Mutta $A \cong A \otimes_R R \subseteq A \otimes_R Q(R)$ ja $A \otimes_R Q(R)$ on torsiovapaa. Edelleen torsiovapaan modulin jokainen alimoduli on torsiovapaa, joten A on torsiovapaa.

"$\Leftarrow$"

Oletetaan, että A on torsiovapaa. Koska R on pääideaalirengas, niin jokainen äärellisesti viritetty R-moduli M on syklisten modulien suora summa. Jos M on lisäksi torsiovapaa, niin se on modulien R suora summa eli M on vapaa. Vapaat modulit ovat projektiivisia ja edelleen projektiiviset laakeita. Täten M on laakea. Lauseen 4.19 mukaan A on siis laakea.

$\square$

Seuraavaksi annetaan esimerkki laakeasta modulista, joka ei ole projektiivinen.

Esimerkki 4.7. Tutkitaan $\mathbb{Z}$-modulia $\mathbb{Q}$. Rengas $\mathbb{Z}$ on pääideaalirengas ja $\mathbb{Q}$ on torsiovapaa, joten Lauseen 4.20 mukaan $\mathbb{Q}$ on laakea.

Jos $\mathbb{Q}$ olisi projektiivinen, niin esimerkin 4.2 mukaan se olisi vapaa. Moduli $\mathbb{Q}$ ei ole vapaa, joten se ei ole myöskään projektiivinen. Osoitetaan, että $\mathbb{Q}$ ei ole vapaa.

Tutkitaan joukkoa $S := \{q', q''\} \subseteq \mathbb{Q}$, missä $q', q'' \neq 0$. Nämä alkiot voidaan kirjoittaa muodossa $q' = a'/b'$ ja $q'' = a''/b''$, missä $0 \neq a', a'', b', b'' \in \mathbb{Z}$. Nyt

$$0 = a''b'a'/b' - a'b''a''/b'',$$

joten joukko S ei ole vapaa. Siis vapaita osajoukkoja ovat vain yksialkioiset osajoukot. Jos $\mathbb{Q}$ olisi vapaa, niin olisi olemassa $\mathbb{Z}$-isomorfismi (eli ryhmäisomorfismi) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ (Lauseen 1.7 mukaan). Tämä on ristiriita, joten $\mathbb{Q}$ ei ole vapaa.

Viitteet

[1] Joseph J. Rotman, An Introduction to Homological Algebra, 2nd edition, Springer, 2009.

[2] M. Scott Osborne, Basic Homological Algebra, 1st edition, Springer, 2000.

[3] Lekh R. Vermani, An Elementary Approach to Homological Algebra, 1st edition, Chapman and Hall/CRC, 2003.

[4] Alex Youcis, The splitting lemma (for modules), Abstract Nonsense Blog, 2011 [Viitattu 26.2.2014]. URL http://drexel28.wordpress.com/2011/11/04/the-splitting-lemma-for-modules-pt-i/