Matti Viikinkoski

Järjestysfunktiolliset kokonaisalueet ja valuaatiot

Lisensiaattityö
Tampereen yliopisto
Helmikuu 2008

TAMPEREEN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

VIIKINKOSKI, MATTI: Järjestysfunktiolliset kokonaisalueet ja valuaatiot
Lisensiaattityö, 78s.
Matematiikka
Helmikuu 2008

Koodausteorian tavoitteena on parantaa tietoliikenteen luotettavuutta kehittämällä menetelmiä häiriöiden aiheuttamien virheiden korjaamiseen. Algebrallisen geometrian ja koodausteorian yhteistyön merkittävimpiä teoreettisia tuloksia ovat 1980-luvulla kehitetyt geometriset Goppa-koodit, jotka paransivat silloin parasta tunnettua alarajaa, niin kutsuttua asymptoottista Gilbertin-Varshamovin rajaa. Nämä Goppa-koodit konstruoidaan evaluoimalla algebrallisen käyrän rationaalifunktioita käyrän pisteissä. Evaluaatiokoodit ovat Goppa-koodien yleistyksiä, jotka saadaan laskemalla variston rationaalifunktioiden arvoja pistejoukossa. Evaluaatiokoodin määritelmä on kuitenkin hyvin yleinen, joten dekoodausalgoritmin löytäminen ja jopa koodin parametrien määrittäminen on vaikeaa. Järjestysfunktiolliset kokonaisalueet ovat laaja joukko renkaita, joiden hyvät ominaisuudet mahdollistavat niistä saatavien evaluaatiokoodien ominaisuuksien tarkemman määrittämisen.

Tämän lisensiaattityön aiheena ovat järjestysfunktiolliset kokonaisalueet ja valuaatiot. Tutkielmassa tarkastellaan järjestysfunktiollisten kokonaisalueiden perusominaisuuksia ja esimerkkejä järjestysfunktioiden konstruoimisesta muun muassa variston lipun avulla. Lisäksi todistetaan, että renkaan säännölliset suodatukset ja toisaalta komplementaariset valuaatiot ovat tiettyjen lievien ehtojen vallitessa ekvivalentteja järjestysfunktioiden määritelmän kanssa. Lopuksi osoitetaan astetta yksi olevien painofunktioiden ja affiinien käyrien välinen yhteys. Viimeisessä pykälässä tarkastellaan pinnan valuaatioiden luokittelua ja näiden valuaatioiden yhteyksiä järjestysfunktioihin.

Sisältö

Luku 1

Johdanto

Koodausteorian tavoitteena on parantaa tietoliikenteen luotettavuutta kehittämällä koodeja, joiden avulla häiriöiden aiheuttamia virheitä voidaan havaita ja mahdollisesti jopa korjata. Käytännön esimerkkinä voidaan mainita Reedin-Solomonin-koodit, joita käytettiin koodaamaan Voyager-luotaimen lähettämät kuvat Uranuksesta. Lisäksi myös DVD- ja CD-levyjen virheenkorjausalgoritmit perustuvat RS-koodeihin. Algebrallisen geometrian ja koodausteorian yhteistyön merkittävimpiä teoreettisia tuloksia ovat 80-luvulla kehitetyt geometriset Goppa-koodit, jotka paransivat silloin parasta tunnettua alarajaa, niin kutsuttua asymptoottista Gilbertin-Varshamovin rajaa. Nämä Goppa-koodit konstruoitiin evaluoimalla algebrallisen käyrän rationaalifunktioita käyrän pisteissä. Evaluaatiokoodit ovat Goppa-koodien yleistyksiä, jotka saadaan laskemalla variston rationaalifunktioiden arvoja pistejoukossa. Evaluaatiokoodien määritelmä on kuitenkin hyvin yleinen, joten dekoodausalgoritmin löytäminen ja jopa koodien parametrien määrittäminen on vaikeaa. Järjestysfunktiolliset kokonaisalueet ovat laaja joukko renkaita, joiden ominaisuudet mahdollistavat niistä saatavien evaluaatiokoodien ominaisuuksien tarkemman määrittämisen.

Lisensiaattityössäni tarkastelen järjestysfunktiollisten kokonaisalueiden konstruointia erilaisilla menetelmillä. Järjestysfunktioista saataviin koodeihin ja niiden parametrien määrittämiseen liittyviä seikkoihin en kuitenkaan tässä työssä puutu. Evaluaatiokoodien muodostamista järjestysfunktiollisista kokonaisalueista on käsitelty muun muassa Ruud Pellikaanin artikkelissa [Pel01]. Tutkin myös komplementaarisia valuaatioita ja säännöllisiä, normalisoituja suodatuksia. Käy ilmi, että nämä ovat ekvivalentteja järjestysfunktiollisen kokonaisalueen määritelmän kanssa. Algebralliset varistot tarjoavat monia mahdollisuuksia järjestysfunktioiden konstruointiin. Tässä työssä keskityn lähinnä variston alivaristojen lipusta saataviin järjestysfunktiollisiin kokonaisalueisiin. Viimeisessä luvussa tutkin esimerkkejä astetta yksi ja kaksi olevista järjestysfunktioista. Astetta yksi oleva järjestysfunktio vastaa affiinia käyrää, jolla on tarkalleen yksi paikka äärettömyydessä. Sen sijaan algebrallisen pinnan tapaus on monimutkaisempi johtuen mahdollisuudesta räjäyttää pinta alivaristossaan. Käyttämällä hyväksi Zariskin [Zar39] ja Spivakovskin [Spi90] tuloksia tiedetään, että pinnan funktiokunnan valuaatiot voidaan jakaa neljään luokkaan. Nähdään, että divisoriin liittyvää valuaatiota ei saada järjestysfunktiosta. Muut kolme valuaatiotyyppiä voivat kuitenkin määrittää järjestysfunktion.

Esitietoina kommutatiivisesta algebrasta oletetaan Matsumuran kirja [Mat89] tunnetuksi. Algebrallisen geometrian osalta lähteenä on käytetty Hartshornen kirjaa [Har97]. Erityisesti skeemojen perusominaisuudet, skeemojen räjäyttäminen ja divisorit oletetaan tunnetuiksi.

Luku 2

Järjestysfunktiot ja niiden perusominaisuudet

Järjestysfunktiot liittyvät hyvin läheisesti kunnan valuaatioihin. Tämän vuoksi ennen varsinaista järjestysfunktioiden määrittelyä esitetään seuraavassa muutamia tuloksia Gröbnerin kannoista ja valuaatioista, osa ilman todistuksia. Lähteinä on käytetty muun muassa kirjoja [GPf02] ja [AL96] sekä valuaatioiden osalta Zariskin ja Samuelin kirjaa [ZS76] sekä Abhyankarin artikkelia [Abh56] ja kirjaa [Abh59].

2.1 Gröbnerin kannoista

Tarkastellaan ensin monoidin $(\mathbb{N}^n, +)$ järjestyksiä. Erityisen hyödyllisiä ovat täydelliset järjestykset jotka käyttäytyvät hyvin monoidin alkioiden yhteenlaskun suhteen:

Määritelmä 2.1.1. Kommutatiivisen monoidin Γ täydellistä järjestystä $\leq$ sanotaan *monoidijärjestykseksi*, jos kaikilla $a, b, c \in \Gamma$ on voimassa:

(i) $0 < a$, kun $a \neq 0$;

(ii) jos $a < b$, niin $a + c < b + c$.

Olkoon $\leq$ on monoidijärjestys monoidissa Γ. Tällöin sanotaan, että $(\Gamma, \leq)$ on *järjestetty monoidi*. Määritellään seuraavaksi muutamia yleisiä monoidijärjestyksiä monoidissa $\mathbb{N}^n$. Olkoon $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$.

(i) $\alpha \leq_{lex} \beta$, jos joko $\alpha = \beta$ tai jos on olemassa indeksi j siten, että $\alpha_i = \beta_i$ kaikilla $i < j$ ja $\alpha_j < \beta_j$. Järjestystä $\leq_{lex}$ sanotaan *lex-järjestykseksi.*

(ii) $\alpha \leq_{gl} \beta$, jos joko $\sum \alpha_i < \sum \beta_i$, tai jos $\sum \alpha_i = \sum \beta_i$ ja $\alpha \leq_{lex} \beta$. Tällaista järjestystä sanotaan *porrastetuksi lex-järjestykseksi* tai vain lyhyesti *glex-järjestykseksi.*

(iii) $\alpha \leq_{grl} \beta$, jos joko $\sum \alpha_i \leq \sum \beta$, tai jos $\sum \alpha_i = \sum \beta_i$ ja löydetään indeksi j siten, että $\alpha_i = \beta_i$ kaikilla $i > j$ ja $\alpha_j > \beta_j$. Tätä järjestystä kutsutaan *grevlex-järjestykseksi.*

Monoidissa $\mathbb{N}^n$ saadaan osittaisjärjestys $\leq_n$ määrittelemällä $a \leq_n b$ jos ja vain jos on olemassa $c \in \mathbb{N}^n$ siten, että $a+c = b$. Seuraavaa tulosta kutsutaan Dicksonin lemmaksi.

Lemma 2.1.2 (Dickson)**.** *Olkoon $M \subset \mathbb{N}^n$. Tällöin on olemassa äärellinen joukko $B \subset M$, jolle on voimassa*

$$\forall \alpha \in M \, \exists \beta \in B : \beta \leq_n \alpha.$$

Tällaista joukkoa B sanotaan joukon M Dicksonin kannaksi.

Todistus. Todistetaan väite induktiolla luvun n suhteen. Tapaus $n = 1$ on selvä. Olkoon $n > 1$. Merkitään

$$M_i = \{\alpha \in \mathbb{N}^{n-1} | (\alpha, i) \in M\}.$$

Induktio-oletuksen perusteella joukolla M_i on Dicksonin kanta B_i. Käyttämällä induktio-oletusta uudelleen, nähdään, että joukolla $\cup B_i$ on Dicksonin kanta B'. Oletuksen mukaan B' on äärellinen, joten on olemassa $s \in \mathbb{N}$ siten, että $B' \subset B_1 \cup \cdots \cup B_s$. Todistetaan, että joukko

$$B = \{(\beta', i) \in \mathbb{N}^n | 0 \leq i \leq s, \beta' \in B_i\}$$

on joukon M Dicksonin kanta. Olkoon $(\alpha, j) \in M$, $j \in \mathbb{N}$. Tällöin $\alpha \in M_j$, joten löydetään $\beta' \in B_j$ siten, että $\beta' \leq \alpha'$. Jos $j \leq s$, niin $(\beta', j) \in B$ ja $(\beta', j) \leq (\alpha', j)$. Jos $j > s$, niin löydetään $\gamma' \in B'$ ja $i \leq s$ siten, että $\gamma' \leq \beta'$ ja $(\gamma', i) \in B_i$. Tällöin $(\gamma', i) \in B$ ja $(\gamma', i) \leq (\alpha', j)$. $\square$

Olkoon $(\mathbb{N}^n, \leq)$ järjestetty monoidi. Jos $a \leq_n b$ kun $a, b \in \mathbb{N}^n$, niin $a + c = b$ jollain $c \in \mathbb{N}^n$. Täten myös $a \leq b$, sillä oletuksen mukaan $\leq$ on monoidijärjestys. Tästä nähdään, että jokainen monoidin $\mathbb{N}^n$ monoidijärjestys on osittaisjärjestyksen $\leq_n$ laajennus.

Lemma 2.1.3. *Olkoon $\leq$ monoidin $\mathbb{N}^n$ monoidijärjestys. Tällöin joukko $\mathbb{N}^n$ on hyvinjärjestetty järjestyksen $\leq$ suhteen.*

Todistus. Järjestys $\leq$ on järjestyksen $\leq_n$ laajennus ja siis Dicksonin lemman nojalla $\leq$ on hyvinjärjestetty. $\square$

Siirrytään seuraavaksi tarkastelemaan polynomirenkaita. Olkoon $\mathcal{M}_n$ polynomirenkaan $R = k[X_1, \ldots, X_n]$ monomien joukko. Kun

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n,$$

merkitään

$$X^\alpha := X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}.$$

Joukko $\mathcal{M}_n$ on multiplikatiivinen monoidi. Monoidissa $\mathcal{M}_n$ määriteltyä monoidijärjestystä sanotaan *termijärjestykseksi*: Täydellinen järjestys $<$ joukossa $\mathcal{M}_n$ on *termijärjestys* jos

(i) $1 < M$ kaikilla $M \in \mathcal{M}_n$, $M \neq 1$;

(ii) Jos $M_1 < M_2$, niin $M_1M_3 < M_2M_3$ kaikilla $M_1, M_2, M_3 \in \mathcal{M}_n$.

Kuvaus $\mathbb{N}^n \to \mathcal{M}_n$, $\alpha \mapsto X^\alpha$ on selvästi järjestettyjen monoidien isomorfismi. Tästä seuraa erityisesti se, että jokainen termijärjestys on hyvinjärjestetty.

Olkoon nyt $<$ jokin termijärjestys ja $F = c_m X^{\alpha_m} + c_{m-1} X^{\alpha_{n-1}} + \cdots + c_0$ polynomi, $\alpha_i \in \mathbb{N}^n$ ja $c_i \in k$, $i = 1, \ldots, m$. Polynomin F *johtava monomi* järjestyksen $<$ suhteen on

$$\mathrm{LM}_<(F) = \max_<\{X^{\alpha_i} | c_i \neq 0\}$$

ja *johtava termi*

$$\mathrm{LT}_<(F) = \max_<\{c_i X^{\alpha_i} | c_i \neq 0\}.$$

Polynomin F johtavan termin kerroin on *johtava kerroin*, jota merkitään $\mathrm{LC}_<(F)$. Polynomin F *aste* on

$$\deg(F) = \alpha,$$

kun $\mathrm{LM}(F) = X^\alpha$. Jos järjestys on selvä asiayhteydestä, merkitään lyhyesti vain $\mathrm{LM}(F)$.

Esimerkki 2.1.4. Pelkkä revlex-järjestys, eli järjestys

$$X^\alpha < X^\beta$$

jos ja vain jos vektorin $\alpha - \beta$ ensimmäinen nollasta eroava koordinaatti oikealta on positiivinen, ei ole termijärjestys. Tämä nähdään helposti seuraavasti: jono

$$x_1 > x_1^2 > x_1^3 > \ldots$$

muodostaa äärettömän vähenevän ketjun, jolla ei ole pienintä alkiota. Täten monomien joukko ei voi olla hyvinjärjestetty järjestyksen $<$ suhteen.

Esimerkki 2.1.5. Olkoon M $m \times n$ reaalilukumatriisi. Matriisi M määrittää järjestyksen $<_M$ monomien $\mathcal{M}_n$ joukossa seuraavasti:

$$X^\alpha <_M X^\beta \iff M\alpha^T <_{lex} M\beta^T.$$

Järjestys on täydellinen, jos $\mathrm{Ker}(M) \cap \mathbb{Z}^n = \{0\}$. Järjestys $<_M$ on termijärjestys jos ja vain jos

$$X^\alpha >_M 1 \text{ kaikilla } \alpha \in \mathbb{N}^n,\ \alpha \neq 0.$$

Tämä ehto pätee tarkalleen silloin, kun matriisin jokaisen pystyrivin ensimmäinen nollasta eroava alkio on positiivinen. Robbiano [Rob85] on todistanut, että jokainen termijärjestys on muotoa $\leq_A$, kun matriisi $A \in GL(n, \mathbb{R})$ on valittu sopivasti.

Kun polynomirenkaassa on määritelty termijärjestys, saadaan jakoalgoritmi, joka on tavallisen yhden muuttujan polynomien jakoalgoritmin yleistys.

Lemma 2.1.6. *Olkoon $\mathcal{G} = \{g_1, \ldots, g_m\}$ äärellinen joukko polynomeja, $<$ termijärjestys ja f jokin polynomi. Tällöin f voidaan esittää muodossa*

$$f = a_1 g_1 + \cdots + a_m g_m + r,$$

missä $a_1, \ldots, a_m$ ja r ovat polynomeja, ja joko $r = 0$, tai mikään jakojäännöksen r termi ei ole jaollinen monomeilla $\mathrm{LM}_<(g_1), \ldots, \mathrm{LM}_<(g_m)$. Lisäksi $\deg(a_i g_i) \leq \deg(f)$ kaikilla i.

Todistus. Oletetaan, että $f \neq 0$. Olkoon

$$a_1 = \cdots = a_m = r = 0.$$

Jos $\mathrm{LM}(g_i) | \mathrm{LM}(f)$ jollain j, niin valitaan

$$a_j = \frac{\mathrm{LT}(f)}{\mathrm{LT}(g_j)}$$

ja

$$f_1 = f - a_j g_j$$

Jos $\mathrm{LM}(f)$ ei ole jaollinen millään polynomien g_i johtavalla monomilla, merkitään

$$r = \mathrm{LT}(f)$$

ja

$$f_1 = f - \mathrm{LT}(f).$$

Nyt saadaan esitys

$$f = f_1 + a_1 g_1 + \ldots + a_m g_m + r, \tag{2.1.7}$$

missä $\mathrm{LT}(f_1) < \mathrm{LT}(f)$. Jos $f_1 \neq 0$, sovelletaan samaa menettelyä polynomiin f_1, jolloin polynomille f_1 saadaan muotoa (2.1.7) oleva esitys, missä polynomin f_1 paikalla on f_2 ja polynomin f paikalla f_1. Lisäksi $\mathrm{LT}(f_2) < \mathrm{LT}(f_1)$. Koska $<$ on termijärjestys, jono monomeja $\mathrm{LT}(f) > \mathrm{LT}(f_1) > \cdots$ muodostaa aidosti vähenevän jonon, joten äärellisen monen askeleen kuluttua $f_n = 0$. Tällöin on saatu väitetty esitys. □

Edellisen lemman esitys riippuu polynomien järjestyksestä, eikä jakojäännöskään ole yksikäsitteinen. On kuitenkin olemassa polynomeja, joilla jaettaessa edellisen lemman algoritmilla jakojäännös on yksikäsitteinen. Tällaista joukkoa sanotaan *Gröbnerin kannaksi.*

Olkoon $<$ jokin termijärjestys. Polynomirenkaan ideaalin polynomien johtavat termit muodostavat ideaalin. Merkitään

$$LM_<(I) = \{LM_<(f) | f \in I\}.$$

Määritelmä 2.1.8. Joukko polynomeja $\{g_1, \ldots, g_m\}$ on ideaalin I *Gröbnerin kanta* termijärjestyksen $<$ suhteen, jos monomit $\mathrm{LM}(g_1), \ldots, \mathrm{LM}(g_m)$ generoivat ideaalin $(\mathrm{LM}(I))$.

Edellisen määritelmän perusteella on selvää, että polynomit muodostavat ideaalin Gröbnerin kannan tarkalleen silloin, kun ideaalin jokaisen polynomin johtava termi on jaollinen Gröbnerin kannan jonkin alkion johtavalla termillä.

Lemma 2.1.9. *Jokaisella polynomirenkaan ideaalilla $I \neq (0)$ on Gröbnerin kanta.*

Todistus. Olkoon $<$ jokin termijärjestys. Voidaan löytää äärellinen joukko monomeja $m_1, \ldots, m_n$, jotka generoivat ideaalin $(\mathrm{LM}_<(f))$. Valitaan polynomit $g_1, \ldots, g_n$ ideaalista I siten, että $\mathrm{LT}_<(g_i) = m_i$, $i = 1, \ldots, n$. Nämä polynomit muodostavat ideaalin I Gröbnerin kannan. □

Lemma 2.1.10. *Olkoon I ideaali ja $\mathcal{G} = \{g_1, \ldots, g_m\}$ sen Gröbnerin kanta termijärjestyksen $<$ suhteen. Kun polynomi f esitetään lemman 2.1.6 muodossa, jakojäännös r on yksikäsitteinen.*

Todistus. Oletetaan, että polynomilla f on kaksi esitystä muodossa (2.1.7). Nyt

$$f = g + r = g' + r',$$

missä $g, g' \in I$, r ja r' ovat jakojäännöksiä. Tällöin $g - g' = r - r'$, joten $r - r' \in I$ ja siis $\mathrm{LT}(r - r')$ on jaollinen jollain $\mathrm{LT}(g_i)$. Tämä on mahdollista vain jos $r = r'$. □

Edellisestä lemmasta seuraa erityisesti, että $f \in I$ tarkalleen silloin, kun esityksessä (2.1.7) $r = 0$.

Määritelmä 2.1.11. Gröbnerin kanta $\mathcal{G} = \{g_1, \ldots, g_m\}$ termijärjestyksen $<$ suhteen on *redusoitu*, jos

(i) $\mathrm{LC}_<(g) = 1$ kaikilla $g \in \mathcal{G}$

(ii) Jos $g \in \mathcal{G}$, niin mikään polynomin g termi ei kuulu ideaalin

$$(\mathrm{LM}_<(\mathcal{G} \backslash \{g\})).$$

Lemma 2.1.12. *Olkoon $<$ jokin termijärjestys. Jokaisella polynomirenkaan ideaalilla on yksikäsitteinen redusoitu Gröbnerin kanta $\mathcal{G}$ järjestyksen $<$ suhteen.*

Todistus. Todistus on esitetty esimerkiksi Adamsin ja Loustaunaun kirjassa [AL96], Theorem 1.8.7. □

Olkoon nyt I polynomirenkaan R ideaali ja $<$ termijärjestys. Merkitään

$$\Delta_<(I) = \Delta(I) = \{m \in \mathcal{M}_n | m \notin (\mathrm{LM}(I))\}.$$

Jos $\mathcal{G}$ on ideaalin I Gröbnerin kanta, on voimassa

$$\Delta(I) = \{m \in \mathcal{M}_n | \, \mathrm{LM}(g) \nmid m \text{ kun } g \in \mathcal{G}\}.$$

Joukon $\mathrm{LM}_<(I)$ osajoukko $\sigma_<(I)$ on *minimaalinen virittäjäjoukko*, jos se on pienin joukko sisältymisrelaation suhteen ja toteuttaa ehdon

$$x^\beta \in \mathrm{LM}_<(I) \Longleftrightarrow x^\beta \text{ on jaollinen jollain } x^\alpha \in \sigma_<(I).$$

Määritelmästä nähdään, että $\sigma_<(I)$ on yksikäsitteinen. Koska x^α jakaa monomin x^β tarkalleen silloin, kun $\alpha \leq_n \beta$, Dicksonin lemmasta seuraa, että $\sigma_<(I)$ on äärellinen.

Lemma 2.1.13. *Olkoon I polynomirenkaan R ideaali ja $<$ jokin termijärjestys. Tällöin tekijärenkaan R/I kanta k-vektoriavaruutena on*

$$\mathcal{B} = \{m + I | m \in \Delta(I)\}.$$

Todistus. Osoitetaan ensin, että joukko $\mathcal{B}$ on lineaarisesti riippumaton. Oletetaan, että

$$\sum a_i m_i \in I,$$

missä $a_i \in k$ ja $m_i \in \Delta(I)$. Kuitenkin monomien m_i valinnan perusteella mikään monomeista ei ole jaollinen ideaalin I Gröbnerin kannan alkion johtavalla termillä, joten tämä ristiriita.

Olkoon nyt $f \in R$, $f \neq 0$. Voidaan olettaa, että f on redusoitu ideaalin I Gröbnerin kannan suhteen, eli mikään polynomin f termi ei ole jaollinen millään Gröbnerin kannan alkiolla. Tästä oletuksesta välittömästi seuraa, että f on joukon $\Delta(I)$ monomien k-lineaarinen summa. Siis joukko $\mathcal{B}$ generoi k-vektoriavaruuden R/I. $\square$

2.2 Valuaatiot ja yhdistetyt valuaatiot

Kokonaisalue V on *valuaatiorengas*, jos kaikilla $x \in K$, missä K on renkaan V osamääräkunta, joko $x \in V$ tai $x^{-1} \in V$. Olkoon Γ täydellisesti järjestetty Abelin ryhmä. Surjektiivinen kuvaus $\nu : K^* \to \Gamma$ on *valuaatio*, jos kaikille $x, y \in K^*$ on voimassa

(i) $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$

(ii) $\nu(x + y) \geq \min\{\nu(x), \nu(y)\}$.

Usein ν laajennetaan koko kuntaan K liittämällä ryhmään Γ alkio ∞ ja määrittelemällä $\nu(0) = \infty$. Kunnan valuaatiorengas määrittää yksikäsitteisen valuaation ja toisaalta ne alkiot, joiden arvo on ei-negatiivinen valuaatiossa ν muodostavat yksikäsitteisen valuaatiorenkaan. Ryhmää Γ sanotaan valuaation ν *arvoryhmäksi*. Valuaatio on *diskreetti*, kun sen arvoryhmä on isomorfinen lex-järjestetyn ryhmän $\mathbb{Z}^n$ kanssa. Tästä poiketen valuaatiorengas on *diskreetti*, jos sen valuaation arvoryhmä on $\mathbb{Z}$. Kunnan *triviaali valuaatio* on valuaatio, joka saa arvon 0 kaikilla kunnan K nollasta eroavilla alkioilla. Kun kunta K on kunnan k laajennus, kunnan K/k valuaatioilla tarkoitetaan niitä valuaatioita, joiden rajoittuma kuntaan k on triviaali.

Olkoon R kokonaisalue ja K sen osamääräkunta. Olkoon lisäksi (S, N) lokaali rengas, jonka osamääräkunta on kunnan K laajennus ja P jokin renkaan R alkuideaali. Jos $R \subset S$ ja $N \cap R = P$ sanotaan, että renkaan S *keskus* renkaassa R on P. Sanotaan myös, että S on *keskittynyt pisteeseen P renkaassa R*. Jos erityisesti R on lokaali rengas, P maksimaalinen ideaali ja S on keskittynyt pisteeseen P, sanotaan, että S *dominoi* rengasta R.

Lemma 2.2.1. *Olkoon K kunta, $R \subset K$ rengas ja P sen alkuideaali. Tällöin on olemassa kunnan K valuaatiorengas, jonka keskus renkaassa R on P.*

Todistus. Matsumura [Mat89], Theorem 10.2. $\square$

Esimerkki 2.2.2. Olkoon K kunta $k(x)$, missä x on transkendenttinen yli kunnan k. Tässä esimerkissä määritetään kaikki kunnan K/k valuaatiot. Olkoon $f(x)$ jaoton polynomi kunnassa renkaassa $R = k[x]$. Rengas

$$R_f = \{\frac{g}{h} \in K | g, h \in R,\ f \not| h\}$$

on valuaatiorengas: Olkoon $z \in K^*$. Alkio z voidaan esittää muodossa $\frac{g}{h}$, missä polynomeilla g ja h ei ole yhteisiä tekijöitä. Jos $z \notin R$, niin $f|h$, joten $z^{-1} = \frac{h}{g} \in R$. Renkaan maksimaalinen ideaali $\mathfrak{m}_f$ on niiden rationaalifunktioiden joukko, jotka voidaan esittää muodossa $\frac{g}{h}$, missä $f|g$ ja $f \not| h$. Tästä nähdään, että jokainen jaoton polynomi määrittää kunnan K valuaation ν_f. Määritellään joukko R_∞ seuraavasti:

$$R_\infty = \{\frac{f}{g} \in K | f, g \in R,\ \ \deg(f) \leq \deg(g)\}.$$

Joukko R_∞ on on rengas, jonka ideaali $\mathfrak{m}_\infty$ on niiden rationaalifunktioiden $\frac{f}{g}$ joukko, joilla $\deg f < \deg g$. Koska jokainen $\frac{f}{g} \in R_\infty \backslash \mathfrak{m}_\infty$ toteuttaa ehdon $\deg(f) = \deg(g)$, nähdään, että ne alkiot jotka eivät kuulu ideaaliin $\mathfrak{m}_\infty$ ovat kääntyviä. Tästä seuraa, että $\mathfrak{m}_\infty$ on maksimaalinen ideaali ja siis R_∞ on lokaali rengas. Olkoon $z \in K^*$ ja oletetaan, että z on esitetty muodossa $\frac{f}{g}$, missä f ja g ovat polynomeja, joilla ei ole yhteisiä tekijöitä. Jos $z \notin R$, niin $\deg(f) > \deg(g)$, joten $z^{-1} \in R$. Tästä seuraa, että R_∞ on kunnan K valuaatiorengas. Olkoon ν_∞ tätä valuaatiorengasta vastaava valuaatio.

Olkoon ν jokin kunnan K/k valuaatio, V sen valuaatiorengas ja $\mathfrak{M}$ maksimaalinen ideaali. Oletetaan, että $R \subset V$. Tällöin $R \cap \mathfrak{M} = (f)$, missä f on jokin jaoton polynomi. Tästä nähdään, että $R_f \subset V$ ja V dominoi rengasta R_f. Täten $\nu = \nu_f$, sillä diskreetti valuaatiorengas on maksimaalinen dominoinnin suhteen. Tarkastellaan seuraavaksi tapausta $R \cap V = k$. Tällöin $x^{-1} \in V$, sillä muutoin $x \in V$, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa. Merkitään $y = x^{-1}$. Koska $y \in V$, niin $k[y] \subset V$ ja $k[y] \cap \mathfrak{M} = (y)$. Tästä nähdään, että

$$\begin{aligned}
V \supset & \{\frac{f}{g} \in K | f, g \in k[y],\ y \not| g\} \\
&= \{\frac{a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots a_0}{b_m y^m + b_{m-1} y^{m-1} + \cdots + b_0} | a_i, b_j \in k \text{ kaikilla } j,\ b_0 \neq 0\} \\
&= \{\frac{a_n x^m + a_{n-1} y^{m-1} + \cdots a_0 x^{m+n}}{b_m x^n + b_{m-1} x^{n-1} + \cdots + b_0 x^{n+m}} | b_0 \neq 0\} \\
&= \{\frac{f}{g} \in K | f, g \in k[x], \deg(f) \leq \deg(g)\}.
\end{aligned}$$

Nähdään, että valuaatiorengas V dominoi valuaatiorengasta R_∞. Tästä seuraa, että $\nu = \nu_\infty$. Olemme siis todistaneet, että jokainen kunnan $K(x)/k$ valuaatio on joko ν_∞, tai sitten valuaatio ν_f, missä f on jaoton polynomi.

Määritelmä 2.2.3. Täydellisesti järjestetyn ryhmän Γ aliryhmä Δ on *eristetty*, jos ehdoista $0 \leq \beta \leq \alpha$, $\beta \in \Gamma$ ja $\alpha \in \Delta$ seuraa $\beta \in \Delta$.

Lemma 2.2.4. *Olkoot Δ_1 ja Δ_2 ryhmän Γ eristettyjä aliryhmiä. Tällöin joko $\Delta_1 \subset \Delta_2$ tai $\Delta_2 \subset \Delta_1$.*

Todistus. Oletetaan, että löydetään $\alpha_1 \in \Delta_1 \backslash \Delta_2$ ja $\alpha_2 \in \Delta_2 \backslash \Delta_1$. Voidaan olettaa, että $\alpha_i > 0$. Koska Γ on täydellisesti järjestetty, joko $\alpha_1 \leq \alpha_2$ tai $\alpha_2 \leq \alpha_1$. Jos $\alpha_1 < \alpha_2$, niin $\alpha_1 \in \Delta_2$. Toisaalta jos $\alpha_2 < \alpha_1$, niin $\alpha_2 \in \Delta_1$. Molemmat vaihtoehdot johtavat ristiriitaan. □

Määritelmä 2.2.5. Olkoon Γ ryhmä. Ryhmän Γ *rationaalinen aste* on $\dim_{\mathbb{Q}}(\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$. Merkitään tätä lukua $\operatorname{rat.rank} \Gamma$.

Oletetaan, että Γ on täydellisesti järjestetty. Olkoon

$$\{0\} = \Delta_0 \subset \Delta_1 \subset \cdots \subset \Delta_n = \Gamma.$$

ryhmän Γ eristettyjen aliryhmien muodostamana ketju. Suurinta tällaista lukua n sanotaan ryhmän Γ *asteeksi* ja merkitään $\operatorname{rank} \Gamma = n$.

Lemma 2.2.6. *Valuaatiorenkaan V alkuideaalien ja ryhmän Γ eristettyjen aliryhmien välillä on bijektiivinen vastaavuus.*

Todistus. Olkoon ν valuaatiorenkaaseen V liittyvä valuaatio ja Γ sen arvoryhmä. Olkoon $\mathcal{P}$ valuaatiorenkaan V alkuideaalien joukko ja vastaavasti $\mathcal{E}$ ryhmän Γ eristettyjen aliryhmien joukko. Määritellään kuvaukset $\Phi : \mathcal{P} \to \mathcal{E}$ ja $\Psi : \mathcal{E} \to \mathcal{P}$ ja osoitetaan, että nämä kuvaukset ovat toistensa käänteiskuvauksia.

Olkoon Δ ryhmän Γ eristetty aliryhmä. Määritellään joukko

$$I_\Delta = \{x \in V | \nu(x) \notin \Delta\}.$$

Todistetaan ensin, että I_Δ on ideaali: Olkoon $x \in I_\Delta$ ja $a \in V$. Nyt

$$\nu(ax) = \nu(a) + \nu(x),$$

joten jos $\nu(ax) \in \Delta$, myös $\nu(x) \in \Delta$. Tästä nähdään, että $ax \in I_\Delta$. Valuaatiolle ν on voimassa

$$\nu(x + y) \geq \min\{\nu(x), \nu(y)\},$$

joten $x + y \in I_\Delta$ kaikilla $x, y \in I_\Delta$. Täten I_Δ on ideaali. Osoitetaan seuraavaksi, että I_Δ on alkuideaali: Jos $x, y \notin I_\Delta$, niin $\nu(x), \nu(y) \in \Delta$, joten

$$\nu(x) + \nu(y) = \nu(xy) \in \Delta.$$

Tästä nähdään, että $xy \notin I_\Delta$. Määritellään eristetyn aliryhmän Δ kuvaksi $\Psi(\Delta) = I_\Delta$.

Olkoon I valuaatiorenkaan V alkuideaali. Määritellään joukko

$$\Delta_I = \Gamma \backslash \{\nu(I) \cup -\nu(I)\}.$$

Todistetaan ensin, että Δ_I on ryhmä, kun I on alkuideaali: Jos I on valuaatiorenkaan V maksimaalinen ideaali, niin $\Delta_I = \{0\}$. Muussa tapauksessa Δ_I sisältää nollasta eroavan alkion. Jos $h \in \Delta_I$, niin selvästi $-h \in \Delta$ määritelmän symmetrisyydestä johtuen. Olkoot nyt $g, h \in \Delta_I$. Voidaan olettaa, että $g, h \geq 0$. Valitaan $x, y \in R$ siten, että $\nu(x) = g$ ja $\nu(y) = h$. Nyt $x, y \notin I$, ja koska I on alkuideaali, $xy \notin I$. Tästä seuraa, että $g + h = \nu(xy) \in \Delta_I$. Todetaan seuraavaksi, että Δ_I on eristetty aliryhmä: Olkoot $g \in \Delta_I$, $h \in \Gamma$ ja $0 \leq h \leq g$. Valitaan $x, y \in R$ siten, että $\nu(x) = h$ ja $\nu(y) = g$. Riittää osoittaa, että jos $x \in I$ ja $\nu(y) \geq \nu(x)$, niin $y \in I$. Tämä seuraa valuaatiorenkaan ominaisuuksista: Koska $\nu(y) \geq \nu(x)$, $y = \frac{y}{x} x \in I$. Määritellään $\Phi(I) = \Delta_I$.

Osoitetaan lopuksi, että kuvaukset Φ ja Ψ ovat toistensa käänteiskuvauksia: Tarkastellaan ensin yhdistettyä kuvausta $\Phi\Psi$, jossa eristetty aliryhmä Δ kuvautuu eristetyksi aliryhmäksi $\Delta' = \Phi\Psi(\Delta)$. Olkoon $g \notin \Delta'$ ja $g \geq 0$. Tämä on voimassa tarkalleen silloin, kun $g = \nu(x)$ jollain $x \in \Psi(\Delta)$ ja siis tarkalleen silloin, kun $g \notin \Delta$.

Todistetaan seuraavaksi, että yhdistetty kuvaus $\Psi\Phi$, joka kuvaa ideaalin I ideaaliksi $I' = \Psi\Phi(I)$, on identiteettikuvaus: Määritelmän mukaan $x \notin I'$ jos ja vain jos $\nu(x) \in \Phi(I)$. Tämä on voimassa tarkalleen silloin, kun $\nu(x) \notin \nu(I)$, eli tarkalleen silloin, kun $x \notin I$.

□

Lemma 2.2.7. *Olkoon Γ täydellisesti järjestetty ryhmä ja Δ sen eristetty aliryhmä. Tällöin Γ/Δ on täydellisesti järjestetty.*

Todistus. Olkoon

$$p : \Gamma \to \Gamma/\Delta$$

projektio. Merkitään P:llä ryhmän Γ ei-negatiivisia alkioita. Osoitetaan, että tällöin joukko $p(P)$ voidaan valita tekijäryhmän Γ/Δ ei-negatiivisten alkioiden joukoksi: Selvästi

$$p(P) \cup -p(P) = \Gamma/\Delta.$$

Osoitetaan, että
$$p(P) \cap -p(P) = \{0\}.$$
Jos $p(x) = -p(y)$ joillakin $x, y \in P$, niin $x + y \in \Delta$, joten myös $x, y \in \Delta$. Täten $p(x) = p(y) = 0$. $\square$

Lause 2.2.8. *Olkoon Γ täydellisesti järjestetty ryhmä ja Δ sen eristetty aliryhmä. Tällöin*

(a) $\operatorname{rat.rank}(\Gamma/\Delta) = \operatorname{rat.rank}(\Gamma) - \operatorname{rat.rank}(\Delta)$.

(b) $\operatorname{rank}(\Gamma/\Delta) = \operatorname{rank}(\Gamma) - \operatorname{rank}(\Delta)$.

Todistus. Soveltamalla eksaktia funktoria $\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ eksaktiin jonoon
$$0 \to \Delta \to \Gamma \to \Gamma/\Delta \to 0,$$
saadaan eksakti jono
$$0 \to \Delta \otimes \mathbb{Q} \to \Gamma \otimes \mathbb{Q} \to \Gamma/\Delta \otimes \mathbb{Q} \to 0.$$
Väite (a) seuraa tästä. Väite (b) on tosi, sillä eristettyjen aliryhmien joukko on täydellisesti järjestetty sisältymisrelaation suhteen. $\square$

Määritelmä 2.2.9. Valuaation ν *aste* on vastaavan valuaatioryhmän aste.

Esimerkki 2.2.10. Määritetään ryhmän $\mathbb{Z}$ aste ja rationaalinen aste. Olkoon $\Delta \neq \{0\}$ jokin ryhmän $\mathbb{Z}$ eristetty aliryhmä. Valitaan jokin $a \in \Delta$, $a > 0$. Jos $a = 1$, niin $\mathbb{Z} \subset \Delta$, joten $\Delta = \mathbb{Z}$. Muussa tapauksessa $a > 1$. Koska Δ on oletuksen mukaan eristetty, myös $1 \in \Delta$. Täten $\Delta = \mathbb{Z}$. Tästä nähdään, että
$$\operatorname{rank} \mathbb{Z} = 1.$$
Ryhmän $\mathbb{Z}$ rationaalinen aste on yksi, sillä $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$.

Lemma 2.2.11. *Olkoon ryhmä $\mathbb{Z}^d$ järjestetty lex-järjestyksen suhteen. Tällöin*
$$\operatorname{rank} \mathbb{Z}^d = \operatorname{rat.rank} \mathbb{Z}^d = d.$$

Todistus. Todistetaan väite induktiolla luvun d suhteen. Tapaus $d = 1$ on selvä edellisen esimerkin perusteella. Oletetaan, että väite pätee ryhmälle $\mathbb{Z}^d$, kun $d \leq n - 1$. Ryhmällä $\mathbb{Z}^n$ on aliryhmä
$$\Delta = \{0\} \times \cdots \times \{0\} \times \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}.$$

Ryhmä Δ on eristetty: Olkoon $a \in \mathbb{Z}^n$, $b \in \Delta$ ja $0 < a \leq b$. Koska $\leq$ on oletuksen mukaan lex-järjestys, alkio a on välttämättä muotoa $(0, \ldots, 0, i)$, missä $i \in \mathbb{Z}$, joten $a \in \Delta$.

Ryhmä $\Gamma = \mathbb{Z}^n/\Delta$ on isomorfinen ryhmän $\mathbb{Z}^{n-1}$ kanssa, joten käyttämällä induktio-oletusta ja edellistä lausetta nähdään, että

$$\operatorname{rank} \mathbb{Z}^n = \operatorname{rank} \Gamma + \operatorname{rank} \Delta = (n-1) + 1 = n$$

ja

$$\operatorname{rat.rank} \mathbb{Z}^n = \operatorname{rat.rank} \Gamma + \operatorname{rat.rank} \Delta = n.$$

$\square$

Määritelmä 2.2.12. Valuaation ν *aste* on vastaavan valuaatioryhmän aste.

Esimerkki 2.2.13. Ryhmä $\Gamma \neq \{0\}$ on arkhimedinen (eli kaikille $\alpha, \beta \in \Gamma$, $\alpha > 0$ löydetään $n \in \mathbb{Z}$ siten että $n\alpha > \beta$) jos ja vain jos $\operatorname{rank} \Gamma = 1$.

Olkoon Γ arkhimedinen ja Δ eristetty aliryhmä. Oletetaan, että löydetään $\alpha \in \Delta$, $\alpha > 0$. Jos $\beta \in \Gamma$, niin valitaan n jolle $n\alpha > \beta$. Koska Δ on eristetty, tästä seuraa, että $\beta \in \Delta$. Täten ryhmällä Γ ei ole muita eristettyjä aliryhmiä kuin $\{0\}$ ja Γ.

Oletetaan, että $\operatorname{rank} \Gamma = 1$. Olkoon $\alpha \in \Gamma$ ja $\alpha > 0$. Olkoon Δ niiden alkioiden $\beta \in \Gamma$ joukko, jotka toteuttavat ehdon $n\alpha > |\beta|$ jollain $n \in \mathbb{Z}$. Selvästi Δ on eristetty ryhmä, ja koska $\operatorname{rank} \Gamma = 1$, on $\Delta = \Gamma$.

Lemma 2.2.14. *Olkoon ν kunnan K/k valuaatio. Tällöin*

$$\operatorname{rat.rank}(\nu) \leq \operatorname{trdeg}(K/k).$$

Todistus. Oletetaan, että $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ on polynomin

$$f(x) \in k[x_1, \ldots, x_n]$$

nollakohta. Koska $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$, vähintään kahdella monomilla on sama arvo. Tästä seuraa, että on voimassa yhtälö $\nu(a\alpha_1^{i_i} \cdots \alpha_n^{i_n}) = \nu(b\alpha_1^{j_1} \cdots \alpha_n^{j_n})$, missä $i_k \neq j_k$ jollain indeksillä k ja $a, b \in k$. Täten

$$(i_1 - j_1)\nu(\alpha_1) + \cdots + (i_n - j_n)\nu(\alpha_n) = 0.$$

Tästä nähdään, että alkiot $\nu(\alpha_1), \cdots, \nu(\alpha_n)$ ovat lineaarisesti riippuvia arvoryhmässä. $\square$

Lemma 2.2.15. *Olkoon ν valuaatio. Tällöin* $\operatorname{rank}(\nu) \leq \operatorname{rat.rank}(\nu)$.

Todistus. Olkoon $\operatorname{rank}(\nu) = n$ ja Γ valuaation ν arvoryhmä. On osoitettava, että ryhmästä Γ löydetään vähintään n $\mathbb{Z}$-lineaarisesti riippumatonta alkiota. Olkoon

$$\Delta_0 \subset \cdots \subset \Delta_n$$

ketju ryhmän Γ eristettyjä aliryhmiä. Valitaan

$$\delta_i \in \Delta_i \backslash \Delta_{i-1},$$

missä $i = 1, \ldots, n$. Oletetaan, että alkioiden δ_i välillä on relaatio

$$a_1\delta_1 + \cdots + a_m\delta_m = 0,$$

missä $a_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \ldots, m$, $m \leq n$ ja $a_m \neq 0$. Tällöin $a_m\delta_m \in \Delta_{m-1}$. Oletuksen mukaan Δ_{m-1} on eristetty, joten $\delta_m \in \Delta_{m-1}$, mikä on ristiriidassa alkion δ_m valinnan kanssa. $\square$

Olkoon K' kunnan K laajennus, ν' kunnan K' valuaatio ja ν sen rajoittuma kuntaan K. Olkoot lisäksi Γ' ja Γ valuaatioita vastaavat ryhmät ja κ' ja κ niiden tekijäkunnat.

Lemma 2.2.16. *Jos K' on kunnan K algebrallinen laajennus, niin*

$$\operatorname{rat.rank}\Gamma' = \operatorname{rat.rank}\Gamma.$$

Todistus. Olkoon $\alpha \in \Gamma'$. Valitaan $z \in K'$ siten, että $\nu'(z) = \alpha$. Koska laajennus on algebrallinen, löydetään K-kertoiminen polynomi

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0,$$

jonka nollakohta alkio z on. Vähintään kahdella termillä on sama arvo valuaatiolla ν', joten $\nu'(a_iz^i) = \nu'(a_jz^j)$ ja siis $(j-i)\nu'(z) = \nu'(a_j/a_i) \in \Gamma$. Tästä nähdään, että ryhmällä Γ'/Γ on äärellinen kertaluku ja siis $\Gamma'/\Gamma \otimes \mathbb{Q} = 0$. $\square$

Seuraavan lauseen todistuksen on esittänyt Shreeram Abhyankar artikkelissa [Abh56]:

Lause 2.2.17. *Yllä olevilla merkinnöillä on voimassa*

(a) $\operatorname{rat.rank}(\Gamma'/\Gamma) + \operatorname{trdeg}(\kappa'/\kappa) \leq \operatorname{trdeg}(K'/K)$

Jos yhtäsuuruus on voimassa ja laajennus K'/K on äärellisesti generoitu, niin Γ'/Γ on äärellisesti generoitu $\mathbb{Z}$-moduli ja kuntalaajennus κ'/κ on äärellisesti generoitu.

(b) $\operatorname{rank}(\nu') + \operatorname{trdeg}(\kappa'/\kappa) \leq \operatorname{rank}(\nu) + \operatorname{trdeg}(K'/K)$.

Jos yhtäsuuruus on voimassa ja K'/K äärellisesti generoitu laajennus sekä Γ on diskreetti, niin κ'/κ on äärellisesti generoitu ja Γ' on diskreetti.

Olkoon ν laajennuksen K/k valuaatio ja κ sen jäännösluokkakunta. Sovelletaan edellistä lausetta tähän tapaukseen valitsemalla $\nu' = \nu$, $K = k$ ja $\kappa = k$. Merkitään $\dim(\nu) = \operatorname{trdeg} \kappa/k$. Yleisesti saadaan ensin

$$\operatorname{rank}(\nu) + \dim(\nu) \leq \operatorname{rat.rank}(\nu) + \dim(\nu),$$

koska $\operatorname{rank}(\nu) \leq \operatorname{rat.rank}(\nu)$. Lisäksi jos valitaan kohdassa (a) $\Gamma = \{0\}$, niin $\operatorname{rat.rank}(\Gamma) = \operatorname{rat.rank}(\nu)$, eli

$$\operatorname{rat.rank}(\nu) + \dim(\nu) \leq \operatorname{trdeg} K/k.$$

Kuntalaajennusta K/k sanotaan *algebralliseksi funktiokunnaksi*, jos K/k on äärellisesti generoitu kuntalaajennus, joka ei ole algebrallinen. Oletaan lisäksi aina, että kunta k on algebrallisesti suljettu kunnassa K. Jos K/k on funktiokunta ja yhtäsuuruus $\operatorname{rat.rank}(\nu) + \dim(\nu) = \operatorname{trdeg}(K/k)$ on voimassa, niin kohdan (a) perusteella arvoryhmä Γ on äärellisesti generoitu $\mathbb{Z}$-moduli ja κ/k on äärellisesti generoitu.

Jos lisäksi on voimassa yhtäsuuruus $\operatorname{rank}(\nu) + \dim(\nu) = \operatorname{trdeg} K/k$, niin kohdasta (b) nähdään, että valuaation ν arvoryhmä on diskreetti.

Esimerkki 2.2.18. Olkoon K/k funktiokunta, $\operatorname{trdeg} K/k = d$. *Alkudivisori* on on kunnan K/k valuaatio ν, jolle $\dim(\nu) = d - 1$.

Koska valuaatio ei ole triviaali, $\operatorname{rank}(\nu) \geq 1$ ja edellisen lemman kohdasta (b) nähdään, että

$$\operatorname{rank}(\nu) + \operatorname{trdeg} \kappa/k \leq \operatorname{trdeg} K/k,$$

joten $\operatorname{rank}(\nu) = 1$. Koska nyt on voimassa yhtäsuuruus, kohdasta (b) saadaan, että κ/k on äärellisesti generoitu ja Γ on diskreetti. Tästä seuraa erityisesti se, että $\Gamma \cong \mathbb{Z}$. Valuaatiorengas on siis diskreetti ja dimensio on 1, joten se on välttämättä Noetherin rengas.

Yhdistetyt valuaatiot

Tarkastellaan seuraavaksi yhdistettyjä valuaatioita. Olkoon ν valuaatio, R sen valuaatiorengas, $\mathfrak{m}$ sen maksimaalinen ideaali ja Γ sen arvoryhmä. Oletetaan, että $\operatorname{rank}(\nu) > 1$. Tällöin löydetään ryhmän Γ aito eristetty aliryhmä $\Delta \neq \{0\}$. Olkoon $\mathfrak{p}$ eristettyä aliryhmää Δ vastaava alkuideaali. Tällöin $R' = R_{\mathfrak{p}}$ on valuaatiorengas. Olkoon ν' sen valuaatio ja Γ' arvoryhmä.

Rengas $\overline{R} = R/\mathfrak{p}$ on kunnan $R'/\mathfrak{p}R'$ valuaatiorengas, sillä jos $\overline{x} \in R'/\mathfrak{p}R'$ ja $\overline{x} \neq 0$, niin valitaan sen edustaja $x \in R'$. Koska R on valuaatiorengas, joko $x \in R$ tai $x^{-1} \in R$. Tästä seuraa, että joko $\overline{x} \in \overline{R}$ tai $\overline{x}^{-1} \in \overline{R}$. Olkoon $\overline{\nu}$ valuaatiorenkaan $\overline{R}$ valuaatio ja $\overline{\Gamma}$ sen arvoryhmä.

Lemma 2.2.19. *Käytetään samoja merkintöjä kuin yllä.*

(i) Tällöin $\Gamma' \cong \Gamma/\Delta$ *ja* $\overline{\Gamma} \cong \Delta$.

(ii) Jos ν' *on diskreetti, astetta* 1 *oleva valuaatio, niin*

$$\Gamma \cong \Gamma' \times \Delta,$$

kun tulo on järjestetty lex-järjestyksen suhteen.

Todistus. (i) Olkoon renkaan R yksiköiden joukko E ja olkoon vastaavasti renkaan R' yksiköiden joukko E'. Nyt $\nu^{-1}(\Delta) = E'$, sillä jos $z \in E'$, niin voidaan kirjoittaa $z = \frac{x}{y}$, missä $x, y \in R \backslash \mathfrak{p}$. Tästä seuraa, että $\nu(x), \nu(y) \in \Delta$, joten $\nu(z) \in \Delta$. Kääntäen, jos $\alpha \in \Delta$ ja $\nu(x) = \alpha$, niin $x, \frac{1}{x} \notin \mathfrak{p}$, joten $x \in E'$. Määritelmän mukaan $\mathrm{Ker}(\nu') = E'$ ja $E \subset E'$, joten saadaan hyvinmääritelty surjektiivinen homomorfismi

$$\nu'\nu^{-1} : \Gamma \to \Gamma'.$$

Koska $\nu^{-1}(\Delta) = E'$, kuvauksen $\nu'\nu^{-1}$ ydin on Δ. Tästä nähdään, että

$$\Gamma' = \Gamma/\Delta.$$

Tämä on myös järjestettyjen ryhmien välinen isomorfismi, sillä $R \subset R'$.

Tarkastellaan kuvausta ϕ, joka on projektion $R \to R/\mathfrak{p}$ ja valuaation $\overline{\nu}$ yhdistetty kuvaus. Kuvaus ϕ on selvästi surjektiivinen homomorfismi joukolta E' ryhmään $\overline{\Gamma}$. Edellisestä päättelystä seuraa, että $\Delta = E'/E$, joten väitteen todistamiseksi riittää osoittaa, että $\mathrm{Ker}(\phi) = E$. Tämä nähdään suoraan kuvauksen määritelmästä. Todistetaan vielä, että saatu isomorfismi on järjestettyjen ryhmien välinen isomorfismi: Olkoon $x \in E'$. Nyt $\nu(x) > 0$ tarkalleen silloin, kun $x \in R$. Vastaavasti kuvauksessa ϕ alkion $x \in E'$ kuva on positiivinen tarkalleen silloin kun $x \in R$.

(ii) Valuaatio ν' on diskreetti ja astetta 1, joten sen arvoryhmä on isomorfinen ryhmän $\mathbb{Z}$ kanssa. Täten $\Gamma/\Delta \cong \mathbb{Z}$. Tästä saadaan järjestettyjen ryhmien välinen eksakti jono

$$0 \longrightarrow \Delta \xrightarrow{\alpha} \Gamma \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Eksakti jono lohkeaa (Rotman, [Rot79], theorem 3.12), sillä $\mathbb{Z}$ on projektiivinen $\mathbb{Z}$-moduli. Löydetään siis homomorfismi $\gamma : \mathbb{Z} \to \Gamma$, joka toteuttaa ehdon $\beta\gamma = 1$. Tästä seuraa, että

$$\Gamma \cong \mathbb{Z} \times \Delta,$$

missä isomorfismi kuvaa (Rotman [Rot79], theorem 2.7) ryhmän Γ alkion g alkioksi

$$(\beta(g), \alpha^{-1}(g - \gamma\beta(g))).$$

Riittää todistaa, että isomorfismi on järjestettyjen ryhmien välinen homomorfismi, eli kuvaa positiiviset alkiot positiivisille alkioille. Oletetaan, että $\mathbb{Z} \times \Delta$ on järjestetty lex-järjestyksen suhteen. Olkoon $g \in \Gamma$, $g \geq 0$. Koska β kuvaa positiiviset alkiot positiivisille alkioille, väite seuraa jos $\beta(g) > 0$. Tarkastellaan siis tapausta $\beta(g) = 0$. Tällöin g kuvautuu alkiolle $(0, \alpha^{-1}(g))$. Koska g on oletuksen mukaan positiivinen, myös alkio $\alpha^{-1}(g)$ on positiivinen. Siis $(0, \alpha^{-1}(g))$ on positiivinen ja väite seuraa.

□

Sanotaan, että valuaatio ν on valuaatioiden ν' ja $\overline{\nu}$ *yhdistetty valuaatio* ja merkitään

$$\nu = \overline{\nu} \circ \nu'.$$

Esimerkki 2.2.20. Olkoon $K = k(x, y)$, missä x ja y ovat algebrallisesti riippumattomia yli kunnan k. Tarkastellaan alirengasta $R = k(y)[x]$, jonka alkiot ovat $k(y)$-kertoimisia polynomeja. Määritellään kunnan K valuaatio ν' siten, että $\nu'(x) = 1$ ja $\nu'(z) = 0$ kaikilla $z \in k(y)$, missä $z \neq 0$. Tämä ehto määrittää yksikäsitteisen valuaation ja sen keskus renkaassa R on maksimaalinen ideaali $\mathfrak{m}' = (x)$. Valuaatio ν' mittaa polynomin kertalukua pisteessä 0. Tästä seuraa, että valuaation ν' valuaatiorengas on

$$R' = R_{(x)} = \{\frac{f}{g} | f, g \in R,\ g(0) \neq 0\}.$$

Valuaation ν' jäännösluokkakunta on $\kappa' = R'/(x)R' = R/(x) = k(y)$. Tästä nähdään, että $\dim(\nu') = 1$, joten Abhyankarin lemmasta seuraa, että ν' on diskreetti, astetta 1 oleva valuaatio.

Kunnassa $k(y)$ voidaan määritellä vastaavalla tavalla valuaatio $\overline{\nu}$, jolle on voimassa $\overline{\nu}(y) = 1$. Tämän valuaation valuaatiorengas on

$$\overline{R} = \{\frac{f}{g} | f, g \in k[y],\ g(0) \neq 0\} = k[y]_{(y)}.$$

Valuaation jäännösluokkakunnaksi $\overline{k}$ saadaan

$$R/(y)R = k[y]/(y) = k.$$

Tarkastellaan seuraavaksi kunnan K yhdistettyä valuaatiota

$$\nu = \nu' \circ \overline{\nu}.$$

Valuaation ν arvoryhmä on lemman 2.2.19 mukaan isomorfinen lex-järjestyksellä varustetun ryhmän $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ kanssa. Edellisen lemman merkinnöillä isomorfian antaa kuvaus

$$g \mapsto (\beta(g), \alpha^{-1}(g - \gamma\beta(g))) = (\beta(g), \alpha^{-1}(g - \beta(g)\gamma(1))).$$

Tästä seuraa, että

$$\nu(f) = (\nu'(f), \overline{\nu}(fx^{-\nu'(f)})),$$

missä $fx^{-\nu'(f)}$ ajatellaan redusoiduksi kuntaan $R'/\mathfrak{m}'$. Alkio $fx^{-\nu'(f)}$ kuvautuu kunnan $R'/\mathfrak{m}'$ nollasta eroavalla alkiolle, sillä $\nu'(fx^{-\nu'(f)}) = 0$, eli $fx^{-\nu'(f)} \notin \mathfrak{m}'$.

Kvadraattiset muunnokset

Palautetaan mieleen kvadraattisen muunnoksen käsite: Olkoon (R, M) *säännöllinen lokaali rengas* (Matsumura [Mat89], sivu 105)ja K renkaan R osamääräkunta. Merkitään $k = R/M$. Olkoon lisäksi ν jokin valuaatio, jonka keskus renkaassa R on M ja (V_ν, M_ν) sen valuaatiorengas. Valuaation ν *R-dimensio* on kuntalaajennuksen $(V_\nu/M_\nu)/k$ transkendenttisuusaste. Merkitään tätä lukua $\dim_R \nu$. Tässä pykälässä oletetaan, että kuntalaajennus K/k, missä $k = R/M$, on algebrallinen funktiokunta.

Olkoon $\dim R = s > 1$ ja valitaan $x_1, \ldots, x_s \in R$ siten, että $M = (x_1, \ldots, x_s)$. Oletetaan, että $x_1, \ldots, x_s$ ovat järjestetty siten, että $\nu(x_1) \leq \nu(x_i)$, $i = 1, \ldots, s$. Merkitään

$$A = R[\frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_s}{x_1}],$$

$P = A \cap M_\nu$, $S = A_P$ ja $N = PS$. Tällöin (S, N) on säännöllinen lokaali rengas ja $\dim S \leq s$ (Abhyankar [Abh59], Lemma 3.20). Säännöllistä lokaalia rengasta (S, N) sanotaan renkaan R *ensimmäiseksi kvadraattiseksi muunnokseksi* valuaation ν suhteen. Olkoon nyt $R_0, R_1, \ldots$ jono säännöllisiä lokaaleja renkaita, missä R_i on renkaan R_{i-1} ensimmäinen kvadraattinen muunnos jonkin valuaation ν suhteen. Sanotaan lyhyesti, että R_n on renkaan R_0 *kvadraattinen muunnos*. Oletetaan tunnetuksi, että kvadraattisille muunnoksille pätee

$$\dim R_i - \dim R_{i+1} = \dim_{R_i} \nu - \dim_{R_{i+1}} \nu,$$

missä $\dim R$ tarkoittaa renkaan R Krullin dimensiota (Abhyankar [Abh59], Lemma 3.20).

Lause 2.2.21. *Olkoon (R_i, M_i) $i = 1, 2, \ldots$ jono renkaita, missä (R_i, M_i) on normaali ja lokaali kaikilla $i = 1, 2, \ldots$. Oletetaan lisäksi, että R_i:n osamääräkunta on K kaikilla i ja renkaan R_{i+1} keskus renkaassa R_i on M_i. Jos $\cup R_i$ ei ole valuaatiorengas, niin tällöin on olemassa äärettömän monta kunnan K valuaatiota w, jolla on keskus M_i renkaassa R_i ja $\dim_{R_i} w > 0$ kaikilla i.*

Todistus. Merkitään $R = \cup R_i$ ja $M = \cup M_i$. Koska jokaisella renkaalla R_{i+1} on keskus M_i renkaassa R_i, voidaan olettaa, että $R_1/M_1 \subset R_2/M_2 \subset \ldots$. Tästä seuraa, että $D = \cup R_i/M_i$ on kunta. Lisäksi (R, M) on lokaali rengas, sillä jokainen $x \in R$, $x \notin M$ on yksikkö jossain renkaassa R_i ja siis yksikkö renkaassa R. On selvää, että $D = R/M$. Koska jokainen R_i on normaali, myös R on normaali: Jos $x \in K$ on kokonainen yli renkaan R, niin x on R-kertoimisen pääpolynomin nollakohta. Tällöin löydetään äärellinen luku n siten, että pääpolynomin kertoimet kuuluvat renkaaseen R_n. Tästä seuraa, että x on kokonainen yli renkaan R_n. Koska R_n on oletuksen mukaan normaali, $x \in R_n$ ja siis myös $x \in R$.

Oletuksen mukaan R ei ole valuaatiorengas, joten löydetään $x \in K$ siten, että $x, 1/x \notin R$. Merkitään h:lla projektiota renkaalta R kuntaan D. Määritellään kuvaus H renkaalta $R[x]$ renkaalle $D[X]$, X muuttuja, kuvaamalla alkio $\sum f_i x^i$ polynomille $\sum h(f_i) X^i$. Oletetaan, että H on hyvinmääritelty homomorfismi. On selvää, että ehto $H(x) = X$ määrittää homomorfismin h laajennuksen H yksikäsitteisesti. Renkaassa $D[X]$ on äärettömän monta alkuideaalia, sillä jokainen jaoton polynomi generoi alkuideaalin. Valitaan alkuideaali p siten, että $X \notin p$. Merkitään $P = H^{-1}(p)$. Lemmasta 2.2.1 seuraa, että löydetään valuaatio, jonka keskus renkaassa $R[x]$ on P. Tästä seuraa, että $D[x]$ sisältyy valuaation jäännösluokkakuntaan. Täten myös $D(x)$ sisältyy valuaation jäännösluokkakuntaan, joten valuaation jäännösluokkakunta on transkendenttinen yli kunnan R/M. Tällaisia valuaatioita on ääretön määrä, koska alkuideaaliksi p on äärettömän monta vaihtoehtoa.

Osoitetaan lopuksi, että kuvaus H on hyvinmääritelty: Riittää todistaa, että jos $\sum_{i=0}^{n} q_i x^i = 0$, niin $\sum h(q_i) X^i = 0$. Tehdään vastaoletus. Tästä seuraa, että voidaan valita t siten, että $h(q_t) \neq 0$ ja $h(q_i) = 0$ kaikilla $i > t$. Ehto $h(q_t) \neq 0$ tarkoittaa, että q_t on yksikkö. Jakamalla yhtälö $\sum q_i x^i = 0$

yksiköllä q_t ja merkitsemällä $p_i = q_i/q_t$, kun $i \neq t$, saadaan:

$$p_n x^n + \cdots + p_{t+1}x^{t+1} + x^t + p_{t-1}x^{t-1} + \cdots + p_0 = 0.$$

Merkitään

$$r = p_n x^{n-t} + p_{n-1}x^{n-t-1} + \cdots + p_{t+1}x + 1$$

ja

$$s = p_{t-1}x^{-1} + p_{t-2}x^{-2} + \cdots + p_0 x^{-t}.$$

Käyttämällä näitä merkintöjä, ylläolevasta yhtälöstä nähdään, että $rx^t + sx^t = 0$, joten $r = -s$. Käyttämällä lemmaa 2.2.1 valitaan valuaatio ν siten, että ν:n keskus renkaassa R on M. Jos $\nu(x) \geq 0$, niin $\nu(r) \geq 0$. Toisaalta jos $\nu(x) < 0$, niin $\nu(r) = \nu(s) > 0$. Tästä seuraa, että $r \in V_\nu$. Koska tämä pätee kaikilla valuaatioilla, jotka dominoivat lokaalia rengasta R ja R on normaali, on voimassa $r \in R$. Oletuksesta $x \notin R$ ja siitä, että R on normaali, seuraa, että löydetään valuaatio ν, joka dominoi rengasta R ja $\nu(x) < 0$. Tästä nähdään, että $\nu(r) > 0$. Täten $r \in M$ ja siis $1 - r$ on yksikkö. Kirjoitetaan ylläoleva yhtälö voidaan muotoon

$$(1 - r) + p_{t+1}x + \cdots + p_n x^{n-t}x^{n-t} = 0,$$

missä $p_{t+1}, \ldots, p_n \in R$. Koska $1-r$ on yksikkö, jakamalla yhtälö termillä $(1-r)x^{n-t}$ nähdään, että x^{-1} on kokonainen yli renkaan R. Tämä on kuitenkin ristiriidassa oletuksen $x^{-1} \notin R$ kanssa. $\square$

Lause 2.2.22. *Olkoon* (R, M) *säännöllinen lokaali rengas,* $\dim R = n > 1$ *ja* K *renkaan* R *osamääräkunta. Olkoon* ν *kunnan* K *valuaatio, jolla on keskus* M *renkaassa* R *ja* $\dim_R \nu = n - 1$. *Tällöin jono* $R \subset R_1 \subset R_2 \subset \ldots$ *renkaan* R *kvadraattisia muunnoksia valuaation* ν *suhteen on äärellinen, eli löydetään indeksi* h *siten, että* $\dim R_h = 1$. *Lisäksi* R_h *on valuaation* ν *valuaatiorengas.*

Todistus. Tehdään vastaoletus, että kvadraattinen jono on ääretön. Koska kvadraattiselle muunnokselle on aina voimassa

$$\dim R_i - \dim R_{i+1} = \dim_{R_i} \nu - \dim_{R_{i+1}} \nu$$

ja $\dim R_i \geq \dim R_{i+1}$, nähdään, että on olemassa indeksi s siten, että $\dim R_t = \dim R_s$ kaikilla $t \geq s$. Koska $\dim R_0 = n$ ja $\dim_{R_0} \nu = n - 1$, on voimassa

$$\dim_{R_t} \nu = \dim R_t - 1$$

kaikilla $t \geq s$.

Merkitään $S = \cup R_i$ ja $N = \cup M_i$. Tällöin (S, N) on lokaali rengas ja $S/N = \cup R_i/M_i$. Oletuksesta seuraa, että R_{t+1}/M_{t+1} on kunnan R_t/M_t algebrallinen laajennus kun $t \geq s$, joten S/N on kunnan R_t/M_t algebrallinen laajennus. Käyttämällä lausetta 2.2.17 (pykälän alussa oletettiin, että K on algebrallinen funktiokunta) nähdään, että ν on diskreetti, astetta 1 oleva valuaatio.

Oletetaan nyt, että S ei ole minkään kunnan K valuaation valuaatiorengas. Tällöin löydetään alkio $x \in K$ siten, että $x, x^{-1} \notin S$. Erityisesti $x, x^{-1} \notin R_0$. Kirjoitetaan x muodossa y_0/z_0, missä $y_0, z_0 \in M_0$. Oletuksen mukaan valuaatiolla ν on keskus M_i renkaassa R_i, joten $\nu(y_0) > 0$ ja $\nu(z_0) > 0$. Olkoot $x_1, \ldots, x_n$ renkaan R_0 lokaalit parametrit järjestettynä siten, että $\nu(x_1) \leq \nu(x_i)$ kaikilla i. Koska R_1 on renkaan R_0 kvadraattinen muunnos, $x_i/x_1 \in R_1$ kaikilla i. Lisäksi $y_1 = y_0/x_1 \in M_1$ ja $z_1 = z_0/x_1 \in M_1$. Jatkamalla näin saadaan ääretön joukko alkioita $y_i, z_i \in M$ joille $x = y_i/z_i$, $\nu(y_i) > \nu(y_{i+1}) > 0$ ja $\nu(z_i) > \nu(z_{i+1}) > 0$ kaikilla i. Valuaatio ν on diskreetti, joten tämä johtaa ristiriitaan. Tästä seuraa, että renkaan S on oltava jonkin valuaation w valuaatiorengas.

Oletuksen mukaan kvadraattinen jono ääretön, joten erityisesti $\dim R_s > 1$ ja siis $\dim_{R_t} \nu \geq 1$ kaikilla $t \geq s$. Valuaation w valinnan perusteella $V_w \subset V_\nu$, joten

$$V_w \cap M_\nu = S \cap M_\nu = \cup(R_i \cap M_\nu) = \cup M_i = N = M_w,$$

missä (V_w, M_w) on valuaation w valuaatiorengas. Tästä nähdään, että ainoa vaihtoehto on $w = \nu$. Erityisesti siis $V_\nu/M_\nu = S/N$ on kunnan R_s/M_s algebrallinen laajennus. Mutta tämä on mahdotonta, sillä $R_s - \dim \nu \geq 1$. Täten kvadraattisten muunnosten jono on oltava äärellinen. Olkoon viimeinen indeksi h. Tällöin R_h on säännöllinen ja sen dimensio on 1, joten R_h diskreetin, astetta 1 olevan valuaation valuaatiorengas. Toisaalta ν dominoi rengasta R_h, joten R_h on valuaation ν valuaatiorengas. □

Lause 2.2.23. *Olkoon $R_0 \subset R_1 \subset \ldots$ aidosti kasvava jono säännöllisiä lokaaleja renkaita, missä $\dim R_i = 2$ kaikilla i. Oletetaan, että renkaan R_i osamääräkunta on K ja R_i on renkaan R_{i-1} kvadraattinen muunnos kaikilla i. Merkitään $S = \cup R_i$. Tällöin löydetään kunnan K valuaatio ν siten, että valuaation ν keskus renkaassa R_i on M_i, $\dim_{R_i} \nu = 0$ kaikilla i ja S on valuaation ν valuaatiorengas. Lisäksi nämä ehdot määräävät valuaation ν yksikäsitteisesti.*

Todistus. Tehdään vastaoletus, että rengas S ei ole valuaatiorengas. Tällöin lauseen 2.2.21 mukaan löydetään valuaatio w, jolla on keskus M_i renkaassa R_i ja $\dim_{R_i} w > 0$ kaikilla i. Koska $\operatorname{trdeg} K = 2$, edellistä lausetta voidaan soveltaa valuaatioon w. Sen mukaan kvadrattisten muunnosten jono on äärellinen, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa. Täten on olemassa valuaatio

ν, jolla on valuaatiorengas S. Lisäksi valuaatiorenkaan maksimaalinen ideaali on $M_\nu = \cup M_i$. Nyt

$$R_i \cap M_\nu = R_i \cap (\cup M_j) = R_i \cap (\cup_{j>i} M_j) = \cup_{j>i} R_i \cap M_j = M_i.$$

Tästä nähdään, että valuaatiolla ν on keskus M_i renkaassa R_i kaikilla i. Käyttämällä edellistä lausetta nähdään, että $\dim_{R_i} \nu = 0$ kaikilla i. Osoitetaan lopuksi yksikäsitteisyys: Jos w on jokin toinen valuaatio ja V_w sen valuaatiorengas, joka täyttää lauseen ehdot, niin $S = \cup R_i \subset V_w$ ja

$$M_w \cap S = \cup (M_w \cap R_i) = \cup M_i = M_\nu.$$

Tästä seuraa, että $\nu = w$.

$\square$

2.3 Järjestysfunktiolliset kokonaisalueet

Olkoon $(\Gamma, <)$ hyvinjärjestetty joukko järjestysrelaation $<$ suhteen. Olkoon $\Gamma_{-\infty}$ joukko, joka on saatu joukosta Γ lisäämällä alkio $-\infty$. Laajennetaan järjestysrelaatio määrittelemällä $-\infty < \alpha$ kaikilla $\alpha \in \Gamma$. Nähdään, että joukko $\Gamma_{-\infty}$ on hyvinjärjestetty.

Määritelmä 2.3.1. Olkoon k kunta, R kommutatiivinen k-algebra ja $(\Gamma, <)$ hyvinjärjestetty joukko. Algebra R on *järjestysfunktiollinen kokonaisalue*, jos on olemassa surjektiivinen kuvaus $\rho : R \to \Gamma_{-\infty}$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

(J.1) $\rho(f) = -\infty$ jos ja vain jos $f = 0$;

(J.2) $\rho(\lambda f) = \rho(f)$ kaikilla $\lambda \in k \backslash \{0\}$;

(J.3) $\rho(f + g) \leq \max\{\rho(f), \rho(g)\}$ ja yhtäsuuruus on voimassa kun $\rho(f) \neq \rho(g)$;

(J.4) jos $\rho(f) < \rho(g)$ ja $h \neq 0$, niin $\rho(fh) < \rho(gh)$;

(J.5) jos $\rho(f) = \rho(g)$, niin löydetään $\lambda \in k$, jolla $\rho(f - \lambda g) < \rho(g)$.

Ehdot toteuttavaa funktiota ρ sanotaan algebran R *järjestysfunktioksi* ja joukkoa Γ järjestysfunktion ρ *arvojoukoksi*.

Huomautus 2.3.2. Järjestysfunktiollinen kokonaisalue R on kokonaisalue: Jos $fg = 0$ mutta $f \neq 0$, niin ehdoista J.4 ja J.1 seuraa, että $\rho(f) > -\infty$ ja siis $\rho(0) = \rho(fg) > -\infty$, mikä on ristiriidassa ehdon J.1 kanssa.

Esimerkki 2.3.3. Olkoon $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ polynomirengas ja $<_\tau$ jokin termijärjestys. Määritellään funktio $\rho : R \to \mathbb{N}^n_{-\infty}$, $\rho(0) = -\infty$ ja $\rho(f) = \alpha$, kun $\mathrm{LM}_{<_\tau}(f) = x^\alpha$. Kuvaus ρ järjestysfunktio, sillä jos $\rho(f) = \rho(g)$ kun $f, g \in R$, $f, g \neq 0$, niin $\mathrm{LM}(f) = \mathrm{LM}(g)$ ja $\mathrm{LM}(f - ag) <_\tau \mathrm{LM}(g)$, kun a on valittu sopivasti. Ominaisuudet J.1-J.4 seuraavat suoraan operaattorin LM ominaisuuksista.

Esimerkki 2.3.4. Olkoon M $m \times n$-matriisi, jonka alkiot ovat ei-negatiivisia kokonaislukuja. Oletetaan, matriisin vaakarivit ovat lineaarisesti riippumattomia. Valitaan jokin monoidin $\mathbb{N}^m$ monoidijärjestys $\prec$. Määritellään kuvaus

$$\mathrm{w}_M(x^\alpha) = M\alpha^T$$

renkaan R monomien joukolta monoidiin $\mathbb{N}^m$. Arvoa $\mathrm{w}_M(m)$ sanotaan monomin m M-painoksi. Tästä saadaan uusi monoidijärjestys $<_{M,\tau}$ renkaassa R määrittelemällä $x^\alpha <_{M,\tau} x^\beta$, jos $\mathrm{w}_M(\alpha) \prec \mathrm{w}_M(\beta)$, tai jos $\mathrm{w}_M(\alpha) = \mathrm{w}_M(\beta)$ ja $x^\alpha <_\tau x^\beta$. Jos matriisin M pystyrivit ovat lineaarisesti riippumattomat, niin w voidaan laajentaa järjestysfunktioksi määrittelemällä $w(f)$ maksimiksi polynomin f monomien M-painoista.

Muussa tapauksessa löydetään $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ joilla $M\alpha^T = M\beta^T$ ja $\alpha \neq \beta$, joten w ei voi olla järjestysfunktio. Kuitenkin joissakin tapauksissa on mahdollista löytää renkaan R ideaali I siten, että R/I on järjestysfunktiollinen kokonaisalue ja w indusoi järjestysfunktion tekijärenkaassa R/I.

Lemma 2.3.5. *Olkoon ρ algebran R järjestysfunktio. Tällöin*

(i) Jos $\rho(f) = \rho(g)$, niin $\rho(fh) = \rho(gh)$ kaikilla $h \in R$.

(ii) Jos $f \neq 0$, niin $\rho(1) \leq \rho(f)$.

(iii) $k = \{f \in R | \rho(f) \leq \rho(1)\}$.

(iv) Jos $\rho(f) = \rho(g)$, niin löydetään yksikäsitteinen $\lambda \in k$, jolle

$$\rho(f - \lambda g) < \rho(g).$$

(v) Jos $\rho(fh) > \rho(gh)$, niin $\rho(f) > \rho(g)$.

Todistus. (i) Kun $h = 0$, väite on selvästi tosi. Oletetaan siis, että $h \neq 0$ ja $\rho(fh) < \rho(gh)$. Ehdosta J.5 seuraa, että löydetään $\lambda \in k$, jolle $\rho(fh - \lambda gh) < \rho(gh)$. Toisaalta ehdon J.3 perusteella $\rho(fh - \lambda gh) = \rho(gh)$. On siis oltava $\rho(fg) = \rho(gh)$.

(ii) Jos olisi $\rho(f) < \rho(1)$ ja $f \neq 0$, niin ehdon J.4 avulla saataisiin ääretön laskeva jono $\ldots < \rho(f^2) < \rho(f) < \rho(1)$ joukon Γ alkioita. Tämä on ristiriidassa oletuksen kanssa, sillä Γ on hyvinjärjestetty.

(iii) Selvästi $\rho(\lambda) \leq \rho(1)$ kaikilla $\lambda \in k$. Jos $f \in R$ ja $\rho(f) = \rho(1)$, niin $\rho(f - \lambda \cdot 1) < \rho(1)$ ja täten $f = \lambda \in k$.

(iv) Jos $\lambda, \lambda' \in k$ toteuttavat ehdon J.5, niin

$$\rho(g) > \rho((f - \lambda g) - (f - \lambda' g)) = \rho((\lambda' - \lambda)g),$$

mikä on mahdollista vain jos $\lambda = \lambda'$.

(v) Väite seuraa välittömästi kohdasta (ii) ja järjestysfunktion määritelmästä J.4.

□

Määritelmä 2.3.6. Järjestysfunktiollisen kokonaisalueen R järjestysfunktio $\rho : R \to \Gamma_{-\infty}$ on *painofunktio*, jos ensinnäkin $(\Gamma, +)$ on hyvinjärjestetty monoidi ja toiseksi ρ toteuttaa ehdon

(J.6) $\rho(ab) = \rho(a) + \rho(b)$ kaikilla $a, b \in \Gamma$

Painofunktion ehto J.6 ei ole niin rajoittuva kuin ensin vaikuttaa, sillä itseasiassa kaikki järjestysfunktiot voidaan ajatella painofunktioina:

Olkoon $\rho : R \to \Gamma_{-\infty}$ järjestysfunktio. Jos $\rho(f) = \rho(f')$, niin $\rho(fg) = \rho(f'g)$ edellisen lemman perusteella. Määrittelemällä $\alpha + \beta := \gamma$, kun $\alpha = \rho(f)$, $\beta = \rho(g)$ ja $\gamma = \rho(fg)$, saadaan hyvinmääritelty operaatio joukossa Γ. Selvästi $+$ on kommutatiivinen ja assosiatiivinen. Kun lisäksi määritellään $0 = \rho(1)$, on selvää, että Γ on kommutatiivinen monoidi operaation $+$ suhteen.

Jos $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$ joillekin $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$, niin ehdosta J.4 seuraa, että välttämättä $\alpha = \beta$. Olkoon $\alpha + \beta = 0$, eli $\rho(fg) = \rho(1)$, kun $\rho(f) = \alpha$ ja $\rho(g) = \beta$. Jos $f \notin k$, niin $\rho(f) > \rho(1)$ ja siis myös $\rho(fg) > \rho(1)$. Tästä seuraa, että on oltava $\rho(f) = \rho(g) = \rho(1)$, eli $\alpha = \beta = 0$.

Nyt on siis todistettu, että määrittelemällä operaatio $+$ hyvinjärjestetyssä joukossa $(\Gamma, <)$, joukko $(\Gamma, +)$ on monoidi jonka nolla-alkiona on $\rho(1)$. Lisäksi järjestys $<$ on monoidijärjestys, eli toteuttaa ehdot

(i) $0 < \alpha$ kaikilla $\alpha \in \Gamma \backslash \{0\}$

(ii) Jos $\alpha < \beta$, niin $\alpha + \gamma < \alpha + \gamma$ kaikilla $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$.

Monoidi $(\Gamma, +)$ on *hyvinjärjestetty monoidi* järjestyksen $<$ suhteen, jos $(\Gamma, <)$ on hyvinjärjestetty joukko ja järjestysrelaatio $<$ toteuttaa ylläolevat ehdot.

Lause 2.3.7. *Olkoon* $\rho : R \to \Gamma_{-\infty}$ *järjestysfunktio. Tällöin hyvinjärjestetyssä joukossa* $(\Gamma, <)$ *voidaan määritellä binäärioperaatio* $+$ *siten, että* $(\Gamma, +)$ *hyvinjärjestetty monoidi järjestyksen* $<$ *suhteen. Lisäksi*

$$\rho(fg) = \rho(f) + \rho(g).$$

On siis osoitettu, että jokainen järjestysfunktio on painofunktio, kun binäärioperaatio määritellään sopivasti. Tästä edes puhutaan painofunktiosta lähinnä silloin, kun tarvitaan järjestysfunktion arvojoukon monoidistruktuuria. Monoidia Γ sanotaan järjestysfunktion ρ *arvomonoidiksi.*

Huomautus 2.3.8. Kun $\rho : R \to \Gamma_{-\infty}$ on painofunktio ja $\Gamma \subset \mathbb{N}$ oletetaan aina, että alkioiden $\rho(x)$, missä $x \in R\backslash\{0\}$, suurin yhteinen tekijä on 1.

Lemma 2.3.9. *Olkoon* $(\Gamma, +)$ *äärellisesti generoitu monoidi, jolle on voimassa*

$$\alpha + \beta = 0 \Longrightarrow \alpha = \beta = 0 \text{ kaikilla } \alpha, \beta \in \Gamma.$$

Jos $\prec$ *on monoidijärjestys, niin tällöin* Γ *on hyvinjärjestetty järjestyksen* $\prec$ *suhteen.*

Todistus. Koska Γ on äärellisesti generoitu, saadaan surjektiivinen kuvaus

$$f : \mathbb{N}^n \to \Gamma,$$

joka kuvaa yksikkövektorit Γ:n virittäjäalkioille. Monoidi on hyvinjärjestetty, jos jokaisesta monoidin alkioista muodostetusta jonosta $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ löydetään indeksit $j < k$ siten, että $a_j \leq a_k$. Olkoon $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ jokin jono monoidissa Γ. Käyttämällä hyväksi surjektiivista kuvausta f saadaan jono $(\beta)_{i\in\mathbb{N}}$ monoidissa $\mathbb{N}^n$, joka toteuttaa $f(\beta_i) = \alpha_i$. Dicksonin lemman mukaan löydetään $j < k$ ja $\gamma \in \mathbb{N}$ siten, että $\beta_j + \gamma = \beta_k$. Nyt $\alpha_j + f(\gamma) = \alpha_k$, joten $\alpha_j \preceq \alpha_k$, eli Γ on hyvinjärjestetty. $\square$

Jos monoidi Γ on hyvinjärjestetty järjestyksen $<$ suhteen, se voidaan upottaa ryhmään: Määritellään joukossa $\Gamma \times \Gamma$ ekvivalenssirelaatio $\sim$ seuraavasti:

$$(\alpha_1, \alpha_2) \sim (\beta_1, \beta_2) \text{ jos } \alpha_1 + \beta_2 = \alpha_2 + \beta_1.$$

Määritellään

$$(\alpha_1, \alpha_2) + (\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2).$$

Olkoon $D(\Gamma)$ näiden ekvivalenssiluokkien joukko ja ajatellaan alkiot (α_1, α_2) ekvivalenssiluokkiensa edustajina. Nyt on selvää, että $D(\Gamma)$ on ryhmä, missä $-(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_2, \alpha_1)$ ja $0 = (\alpha, \alpha)$. Upotetaan monoidi Γ ryhmään kuvauksella $\alpha \mapsto (\alpha, 0)$.

Määritelmä 2.3.10. Olkoon Γ hyvinjärjestetty monoidi. Monoidin Γ *aste*

$$\operatorname{rank}\Gamma = \dim_{\mathbb{Q}} D(\Gamma) \otimes_Z \mathbb{Q}.$$

Lause 2.3.11. *Olkoon R järjestysfunktiollinen kokonaisalue,*

$$\rho : R \to \Gamma_{-\infty}$$

painofunktio ja $\Gamma \subset \mathbb{N}$. Tällöin $\dim_k R/(f) = \rho(f)$.

Todistus. Olkoot $a_1, a_2, \ldots$ monoidin Γ alkiot lueteltuna kasvavassa järjestyksessä. Valitaan renkaan R kanta (f_i) k-modulina siten, että $\rho(f_i) = a_i$ kaikilla i. Ideaalin (f) kuva kuvauksessa ρ on $\alpha + \Gamma$, missä $\alpha = \rho(f)$. Tämän perusteella ne alkiot f_i, jotka toteuttavat $\rho(f_i) \in \alpha + \Gamma$, voidaan olettaa valituksi siten, että $f_i \in (f)$. Tästä nähdään, että alkiot f_i, $a_i \in \Gamma \backslash (\alpha + \Gamma)$ muodostavat renkaan $R/(f)$ kannan. Väite seuraa, kunhan todistetaan, että

$$|\Gamma \backslash (\alpha + \Gamma)| = \alpha.$$

Oletuksen mukaan monoidin alkioiden suurin yhteinen tekijä on yksi, joten löydetään alkiot $a, b \in \Gamma$ siten, että $(a, b) = 1$. Tästä seuraa, että jokaisella kokonaisluvulla on yksikäsitteinen esitys muodossa $xa + yb$, missä $0 \leq y < b$. Erityisesti siis ne ei-negatiiviset kokonaisluvut jotka eivät sisälly monoidiin Γ, voidaan esittää esittää muodossa $xa + yb$, missä $0 \leq y < b$ ja $x < 0$. Tämän ehdon toteuttavia ei-negatiivisia kokonaislukuja on vain äärellinen määrä. Tämän perusteella seuraava määritelmä on mielekäs. Olkoon $c \in \Gamma$ pienin alkio joka toteuttaa ehdon

$$\{x | x \geq c\} \subset \Gamma.$$

Tällainen alkio on olemassa, sillä on oletettu, että monoidin Γ suurin yhteinen tekijä on 1. Merkitään

$$T = \{t \in \mathbb{N} | t \geq \alpha + c\}$$

ja

$$U = \{u \in \Gamma | u < a + c\}.$$

Nyt $\Gamma = U \uplus T$ ja

$$|U| = \alpha + c - g,$$

missä $g = |\mathbb{N} \backslash \Gamma|$, ja merkinnällä $\uplus$ tarkoitetaan erillisten joukkojen yhdistettä. Luvun g äärellisyys seuraa edellä esitetystä päättelystä. Merkitään lisäksi

$$V = \{v \in \alpha + \Gamma | \alpha \leq v < \alpha + c\} \subset U.$$

Nyt $|V| = c - g$ ja $\alpha + \Gamma = V \uplus T$. Tästä nähdään, että

$$|\Gamma \backslash (\alpha + \Gamma)| = |U| - |V| = \alpha.$$

□

Määritelmä 2.3.12. Olkoon R järjestysfunktiollinen kokonaisalue ja ρ sen painofunktio. Painofunktio ρ on *Arkhimedinen* jos on olemassa järjestyksen säilyttävä bijektio joukkojen Γ ja $\mathbb{N}$ välillä, missä Γ on painofunktion ρ arvomonoidi ja $\mathbb{N}$ on järjestetty tavanomaisen järjestyksen suhteen.

Esimerkki 2.3.13. Olkoon $R = k[x, y]$ polynomirengas ja $<=<_{gl}$, $x > y$. Painofunktio $\rho : R \to \mathbb{N}^2_{-\infty}$ saadaan merkitsemällä $\rho(0) = -\infty$ ja $\rho(f) = (a, b)$, kun $\mathrm{LM}_<(f) = x^a y^b$. Bijektio $\mathbb{N}$:n kanssa saadaan ryhmittelemällä alkiot (a, b) ensin alkion asteen $a + b$ mukaan ja sen jälkeen samaa painoa olevat alkiot järjestetään lex-järjestyksen avulla: Painoa 0 olevia alkioita on vain yksi, $(0, 0)$. Painoa 1 olevia alkioita ovat $(1, 0)$ ja $(0, 1)$ ja $(0, 1) < (1, 0)$. Näin jatkamalla saadaan bijektio.

Edellisessä esimerkissä on oleellista, että polynomirenkaan järjestys $<$ on porrastettu, eli ensin tarkastellaan polynomin kokonaisastetta.

Lemma 2.3.14. *Olkoon $\rho : R \to \Gamma_{-\infty}$ Arkhimedinen painofunktio. Jos $f, g \in R$ ja $f \notin k$, niin $\rho(f^n) > \rho(g)$, kun n on tarpeeksi suuri.*

Todistus. Oletuksen mukaan on olemassa järjestyksen säilyttävä bijektio $\mu : \Gamma \to \mathbb{N}$. Koska $\rho(f) > \rho(1)$, saadaan aidosti kasvava jono

$$\rho(1) < \rho(f) < \rho(f^2) < \dots$$

ja jono säilyy aidosti kasvavana, kun se kuvataan bijektiolla μ joukkoon $\mathbb{N}$. Tästä seuraa, että löydetään indekti n, jolle $\mu(\rho(f^n)) > \mu(\rho(g))$. Tällöin myös $\rho(f^n) > \rho(g)$, koska μ säilyttää järjestyksen. □

Esimerkki 2.3.15. Käytetään samoja merkintöjä kuin edellisessä esimerkissä, mutta valitaan järjestykseksi $<_{lex}$. Tässä tapauksessa ei ole olemassa järjestyksen säilyttävää bijektiota $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, kun $\mathbb{N}^2$ on järjestetty järjestyksen $<_{lex}$ suhteen, sillä $y <_{lex} x$ ja $y^n <_{lex} x$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Olkoon $\rho : R \to \Gamma_{-\infty}$ painofunktio, joka on Arkhimedinen ja μ bijektion antava kuvaus. Saadaan yhdistetty kuvaus $o = \mu\rho : R \to \mathbb{N}_{-\infty}$ määrittelemällä $o(0) = -\infty$. Koska μ on järjestyksen säilyttävä bijektio, nähdään, että o on järjestysfunktio. Järjestysfunktio o ei kuitenkaan yleensä ole painofunktio, sillä bijektio μ ei välttämättä ole monoidien välinen isomorfismi. Kuitenkin lauseen 2.3.7 mukaan joukossa $\mathbb{N}$ voidaan määritellä binäärioperaatio $\oplus$ siten, että o on painofunktio.

Hyvinjärjestetyt kannat

Hyvinkäyttäytyvät kannat antavat vaihtoehtoisen tavan määritellä järjestysfunktiollinen kokonaisalue. Erityisen hyödyllinen tämä käsite on juuri sen takia, että varsinaista järjestysfunktiota ei tarvitse konstruoida.

Määritelmä 2.3.16. Olkoon R k-algebra ja $\mathcal{B}$ R:n kanta k-modulina. Olkoon lisäksi $(\Lambda, <_\Lambda)$ hyvinjärjestetty joukko ja $\rho : \mathcal{B} \to \Lambda$ bijektio. Indeksoidaan joukon $\mathcal{B}$ alkiot siten, että $f_\lambda := f \in \mathcal{B}$ jos $\rho(f) = \lambda$. Tällöin joukon $\mathcal{B}$:n alkiot voidaan järjestää määrittelemällä $f_\lambda <_\mathcal{B} f_\gamma$ jos $\lambda <_\Lambda \gamma$. *Hyvinjärjestetty kanta* on järjestetty joukko $\mathcal{B}_{\rho,<_\Lambda} := (f_\lambda | \lambda \in \Lambda)_{<_\Lambda}$.

Hyvinjärjestetyn kannan $\mathcal{B}_{\rho,<_\Lambda}$ avulla määritellään *l-funktio* seuraavasti:

$$l_\Lambda : \Lambda \times \Lambda \to \Lambda,\ (\alpha, \beta) \mapsto \min_{<_\Lambda}\{\lambda \in \Lambda | f_\alpha f_\beta \in R_\lambda\}, \tag{2.3.17}$$

missä R_λ on alkioiden $\{f_\gamma | \gamma \leq_\Lambda \lambda\}$ generoima k-moduli.

Sanotaan, että kanta $\mathcal{B}_{\rho,<_\Lambda}$ on *hyvinkäyttäytyvä*, jos $l_\Lambda(\alpha, \beta) <_\Lambda l(\gamma, \beta)$ kun $\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda$ ja $\alpha <_\Lambda \gamma$.

Välittömästi huomataan, että järjestysfunktio määrittää hyvinkäyttäytyvän kannan järjestysfunktiollisessa kokonaisalueessa:

Lause 2.3.18. *Olkoon R järjestysfunktiollinen kokonaisalue ja $\rho : R \to \Lambda_{-\infty}$ sen järjestysfunktio. Valitaan joukko $\mathcal{B} \subset R$ siten, että $\rho_{|\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to \Lambda$ on bijektio. Tällöin $\mathcal{B}$ on k-modulin R kanta, ja jos joukon $\mathcal{B}$ alkiot indeksoidaan siten, että $f_\lambda := f$ kun $\rho(f) = \lambda$, niin $\mathcal{B}_{\rho,<_\Lambda} := (f_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ on hyvinkäyttäytyvä kanta.*

Todistus. Olkoon $f \in R \backslash \{0\}$. Tällöin löydetään $f_\lambda \in \mathcal{B}$ ja $a_\lambda \in k$ siten, että $\rho(f) = \lambda$ ja $\rho(f - a_\lambda f_\lambda) <_\Lambda \rho(f_\lambda)$. Jos $f - a_\lambda f_\lambda \neq 0$, niin jatkamalla samaa päättelyä saadaan esitys

$$f = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda f_\lambda,$$

missä $a_\lambda \in k$ ja $a_\lambda = 0$ melkein kaikilla $\lambda \in \Lambda$. Lisäksi joukon $\mathcal{B}$ alkiot ovat lineaarisesti riippumattomia, koska määritelmän mukaan funktion ρ rajoittuma joukkoon on bijektiivinen.

Osoitetaan vielä, että $\mathcal{B}_{\rho,<_\Lambda}$ on hyvinkäyttäytyvä: Olkoon $\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda$ ja $\alpha <_\Lambda \gamma$. Tällöin $\rho(f_\alpha) <_\Lambda \rho(f_\gamma)$, joten ehdosta *J*.4 seuraa, että $\rho(f_\alpha f_\beta) <_\Lambda \rho(f_\gamma f_\beta)$. Tästä seuraa, että $l(\alpha, \beta) <_\Lambda l(\gamma, \beta)$. ☐

Lause 2.3.19. *Olkoon $(\Gamma, <)$ hyvinjärjestetty joukko, ja $\mathcal{B} = (f_\alpha | \alpha \in \Gamma)$ k-algebran R hyvinkäyttäytyvä kanta. Määritellään $\rho(0) = -\infty$ ja*

$$\rho(f) = \min\{\gamma | f \in R_\gamma\} \text{ kun } f \neq 0.$$

Tällöin $\rho : R \to \Gamma_{-\infty}$ on järjestysfunktio.

Todistus. Järjestysfunktion määritelmän ominaisuudet J.1-J.3 ovat selvät. Ehto J.4 seuraa siitä, että l-funktiolle on voimassa $l(\alpha,\beta) < l(\gamma,\beta)$ kun $\alpha < \beta$. Osoitetaan ehto J.5: Olkoot $f, g \in R$ nollasta eroavia, $\rho(f) = \rho(g) = \gamma$. Tällöin

$$f = \sum_{\alpha<\gamma} a_\alpha f_\alpha + a f_\gamma$$

ja

$$g = \sum_{\beta<\gamma} b_\beta f_\beta + b f_\gamma,$$

missä $a, b \neq 0$. Nyt

$$f - \frac{a}{b} g = \sum_{\alpha<\gamma} c_\alpha f_\alpha,$$

joten $\rho(f - \frac{a}{b} g) < \gamma$.

□

Olkoon nyt k' kunta ja k sen alikunta. Oletetaan, että R on järjestysfunktiollinen kokonaisalue yli kunnan k. Kuten yllä on todistettu, k-algebralla R on tällöin hyvinkäyttäytyvä kanta (f_α). Funktio l voidaan määritellä vastaavalla tavalla k-algebralle

$$R' = R \otimes_k k',$$

missä kannaksi on valittu $(f_\alpha \otimes 1)$. Käyttämällä samoja merkintöjä kuin l-funktion määritelmässä, on voimassa $R'_\lambda = R_\lambda \otimes k'$. Tästä nähdään, että kanta $(f_\alpha \otimes 1)$ on k'-algebran R' hyvinkäyttäytyvä kanta. Erityisesti jos R on muotoa $k[x_1, \ldots, x_n]/(F)$ oleva järjestysfunktiollinen kokonaisalue, missä F on polynomi, niin

$$R \otimes_k \overline{k} \cong \overline{k}[x_1, \ldots, x_n]/(F)$$

on myös kokonaisalue yli kunnan k algebrallisen sulkeuman $\overline{k}$, eli polynomi F on välttämättä *absoluuttisesti jaoton.*

Luku 3

Järjestysfunktioiden konstruointi

Seuraavaksi tarkastelemme järjestysfunktioiden muodostamista käyttämällä hyväksi erilaisia konstruktioita. Ensimmäisenä tarkasteltavat suodatukset antavat vaihtoehtoisen tavan määritellä järjestysfunktiolliset kokonaisalueet säännöllisinä suodatuksina. R. Pellikaanin todistaman [Pel01] tekijärengaslauseen avulla on helppo löytää esimerkkejä järjestysfunktioista polynomirenkaiden tekijärenkaissa. Lopuksi tutkimme variston alivaristojen lippuja ja niistä saatavia valuaatioita sekä lippujen muodostamista räjäyttämällä alivaristoja.

3.1 Suodatukset

Määritelmä 3.1.1. Olkoon k kunta ja A k-algebra. Joukko $\mathcal{F}$ algebran A osajoukkoja on *suodatus*, jos kaikilla $S, T \in \mathcal{F}$ joko $S \subset T$ tai $S \subset T$. Suodatus $\mathcal{F}$ on *k-suodatus*, jos kaikki sen alkiot ovat k -vektoriavaruuksia.

Suodatus $\mathcal{F}$ määrittää relaation algebrassa A: Määritellään $a \leq_{\mathcal{F}} b$ jos ja vain jos kaikilla $S \in \mathcal{F}$ joilla $b \in S$, myös $a \in S$. Merkitään

$$a <_{\mathcal{F}} b, \text{ jos } a \leq_{\mathcal{F}} b \text{ ja } b \nleq_{\mathcal{F}} a.$$

Jos $a \leq_{\mathcal{F}} b$ ja $b \leq_{\mathcal{F}} a$, merkitään $a \sim_{\mathcal{F}} b$.

Relaatio $\leq_{\mathcal{F}}$ refleksiivinen ja transitiivinen, mutta ei yleensä antisymmetrinen. Sanotaan, että relaatio $\leq_{\mathcal{F}}$ on suodatuksen $\mathcal{F}$ määräämä *(kvasi)järjestys*. Suodatuksen määritelmästä nähdään, että kaikille $a, b \in A$, joko $a <_{\mathcal{F}} b$ tai $b \leq_{\mathcal{F}} a$. Suodatuksen määräämä järjestys on siis täydellinen.

Olkoon $a \in A$ ja $\mathcal{F}$ suodatus. Tällöin voidaan määritellä joukot

$$A_{\leq_{\mathcal{F}} a} = \{b \in A | b \leq_{\mathcal{F}} a\}$$

ja

$$A_{<_{\mathcal{F}}a} = \{b \in A | b <_{\mathcal{F}} a\}.$$

Lemma 3.1.2. *Olkoon $a, b \in A$. Tällöin*

(i) $A_{\leq_{\mathcal{F}}a} \subseteq A_{\leq_{\mathcal{F}}b}$ *jos ja vain jos* $a \leq_{\mathcal{F}} b$,

(ii) $A_{\leq_{\mathcal{F}}a} = \cap_{\{S \in \mathcal{F} | a \in S\}} S$,

(iii) $A_{<_{\mathcal{F}}a} = \cup_{\{S \in \mathcal{F} | a \notin S\}} S$.

Todistus. (i) Oletetaan ensin, että $a \leq_{\mathcal{F}} b$. Jos $c \in A_{\leq_{\mathcal{F}}a}$, niin

$$c \leq_{\mathcal{F}} a \leq_{\mathcal{F}} b,$$

joten transitiivisuuden perusteella $c \in A_{\leq_{\mathcal{F}}b}$.

Kääntäen, jos $A_{\leq_{\mathcal{F}}a} \subseteq A_{\leq_{\mathcal{F}}b}$, niin $a \in A_{\leq_{\mathcal{F}}b}$ ja siis $a \leq_{\mathcal{F}} b$.

(ii) On voimassa $c \leq_{\mathcal{F}} a$ jos ja vain jos kaikille $S \in \mathcal{F}$ joille $a \in S$, $c \in S$. Väite seuraa suoraan tästä.

(iii) Jos $S \in \mathcal{F}$ ja $a \notin S$, niin selvästi $S \subset A_{<_{\mathcal{F}}a}$. Kääntäen, jos $c \in A_{<_{\mathcal{F}}a}$, niin $a \not\leq_{\mathcal{F}} c$, eli on olemassa $S \in \mathcal{F}$ jolle $c \in S$ ja $a \notin S$.

□

Olkoon $A/\mathcal{F}$ muotoa $A_{\leq_{\mathcal{F}}a}$ olevien joukkojen joukko. Kun $S, T \in A/\mathcal{F}$, määrittelemällä

$$S \leq T \text{ jos ja vain jos } S \subset T,$$

saadaan järjestys joukossa $R/\mathcal{F}$. Lemmasta 3.1.2 seuraa, että $\leq$ on täydellinen järjestys, koska $\leq_{\mathcal{F}}$ on täydellinen. Määritellään kuvaus

$$\varsigma : A \to A/\mathcal{F},\ a \mapsto A_{\leq_{\mathcal{F}}a}.$$

Merkitään

$$(A/\mathcal{F})^* = A/\mathcal{F} \backslash \{\varsigma(0)\}.$$

Seuraavassa lemmassa todetaan, että kuvaus ς säilyttää järjestyksen $<_{\mathcal{F}}$:

Lemma 3.1.3. *Olkoon $\mathcal{F}$ suodatus ja $a, b \in A$. Tällöin*

(i) $\varsigma(a) = \varsigma(b)$ *jos ja vain jos* $a \sim_{\mathcal{F}} b$,

(ii) $\varsigma(a) < \varsigma(b)$ *jos ja vain jos* $a <_{\mathcal{F}} b$.

Todistus. (i) Lemmasta 3.1.2 seuraa, että $A_{<_{\mathcal{F}}a} = A_{<_{\mathcal{F}}b}$ jos ja vain jos $a \sim_{\mathcal{F}} b$.

(ii) On voimassa $\varsigma(a) < \varsigma(b)$ jos ja vain jos $A_{\leq_\mathcal{F} a} \subset A_{\leq_\mathcal{F} b}$ ja $A_{\leq_\mathcal{F} b} \not\subset A_{\leq_\mathcal{F} a}$, eli jos ja vain jos $a \leq_\mathcal{F} b$ ja $b \not\leq_\mathcal{F} a$.

□

Määritelmä 3.1.4. Olkoon A k-algebra ja $\mathcal{F}$ k-suodatus. Sanotaan, että $\mathcal{F}$ on *ei-negatiivinen*, jos $\cap_{S\in\mathcal{F}} S = 0$ ja $\varsigma(1_A)$ on joukon $(A/\mathcal{F})^*$ pienin alkio.

Lemma 3.1.5. *Olkoon $\mathcal{F}$ k-algebran A k-suodatus. Tällöin*

(i) Joukko $A_{\leq_\mathcal{F} a}$ on k-vektoriavaruus kun $a \in A$.

(ii) Joukko $A_{<_\mathcal{F} a}$ on k-vektoriavaruus kun $a \in A \setminus \cap_{S\in\mathcal{F}} S$.

Todistus. (i) Koska vektoriavaruuksien leikkaus on vektoriavaruus, lemmasta 3.1.2 seuraa, että $A_{\leq_\mathcal{F} a}$ on vektoriavaruus.

(ii) Kaikille $S, T \in \mathcal{F}$, joko $S \subseteq T$ tai $T \subseteq S$. Tästä ja lemmasta 3.1.2 seuraa, että $A_{<_\mathcal{F} a}$ on vektoriavaruus, jos se ei ole tyhjä. Toisaalta $A_{<_\mathcal{F} a} = \emptyset$ jos ja vain jos $a \in S$ kaikilla $S \in \mathcal{F}$.

□

Esimerkki 3.1.6. Olkoon $A = k[x]$ polynomirengas, suodatus $\mathcal{F} = \{(x^i)\}_{i\geq 1}$. Koska ideaalit ovat k-vektoriavaruuksia, $\mathcal{F}$ on k-suodatus.

Jos $b \in A \setminus (x)$ niin $A_{<_\mathcal{F} b} = A$ ja $A_{<_\mathcal{F} b} = (x^i)$ kun $b \in (x^i)$.

Edellisen lemman perusteella on mielekästä määritellä tekijäavaruus

$$A_{\leq_\mathcal{F} a} / A_{<_\mathcal{F} a}.$$

Koska useampi $a \in A$ voi määrittää saman vektoriavaruuden, valitaan edustajat joukosta $(A/\mathcal{F})^*$ ja merkitään

$$\mathrm{gr}_C\, A = A_{\leq_\mathcal{F} c} / A_{<_\mathcal{F} c}, \text{ kun } C \in (A/\mathcal{F})^* \text{ ja } C = \varsigma(c).$$

Näitä kutsutaan k-suodatuksen $\mathcal{F}$ *porrastetuiksi komponenteiksi.*

Esimerkki 3.1.7. Olkoot $\mathcal{F}$ ja A kuten edellisessä esimerkissä. Merkitään $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cup \{A\}$. Tällöin $\mathcal{G}$ on suodatus ja $A_{\leq_\mathcal{F} b} = A_{\leq_\mathcal{G} b}$ kaikilla $b \in A$, eli $\leq_\mathcal{F} = \leq_\mathcal{G}$.

Edellisestä esimerkistä nähdään, että kvasijärjestys $<_\mathcal{F}$ ei määritä suodatusta yksikäsitteisesti. Koska olemme kiinnostuneet niistä ominaisuuksista, jotka seuraavat kvasijärjestyksestä, on järkevää valita edustaja niiden suodatusten joukosta, jotka antavat saman kvasijärjestyksen. Sopiva valinta on $A/\mathcal{F}$, kuten seuraavassa lemmassa todetaan.

Lemma 3.1.8. *Olkoon A k-algebra ja $\mathcal{F}$ sen suodatus.*

(i) Kvasijärjestykset $\leq_{\mathcal{F}}$ ja $\leq_{A/\mathcal{F}}$ ovat samat.

(ii) Jos suodatukset $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ määrittävät saman kvasijärjestyksen, niin

$$A/\mathcal{F} = A/\mathcal{G}.$$

(iii) $A/\mathcal{F} = A/(A/\mathcal{F})$.

Todistus. (i) Riittää todistaa, että $A_{\leq_{\mathcal{F}} a} = A_{\leq_{A/\mathcal{F}} a}$ kaikilla $a \in A$. Nyt

$$A_{\leq_{A/\mathcal{F}} a} = \cap_{a \leq_{\mathcal{F}} b} A_{\leq_{\mathcal{F}} b} = \cap_{a \leq_{\mathcal{F}} b} \cap_{b \in S \subset \mathcal{F}} S = \cap_{a \in S} S = A_{\leq_{\mathcal{F}} a}.$$

(ii) Suodatuksen $A/\mathcal{F}$ alkiot ovat muotoa $A_{\leq_{\mathcal{F}} a}$. Koska oletuksen mukaan järjestykset ovat samat, $A_{\leq_{\mathcal{F}} a} = A_{\leq_{\mathcal{G}} a}$ kaikilla $a \in A$. Siis suodatukset $A/\mathcal{F}$ ja $A/\mathcal{G}$ ovat yhtäsuuret.

(iii) Kohdasta (i) seuraa, että kvasijärjestykset $\leq_{\mathcal{F}}$ ja $\leq_{A/\mathcal{F}}$ ovat yhtäsuuret. Soveltamalla kohtaa (ii) saadaan, että $A/\mathcal{F}$ ja $A/(A/\mathcal{F})$ ovat yhtäsuuret.

□

Määritelmä 3.1.9. Algebran A suodatuksen $\mathcal{F}$ *normalisointi* on joukko $A/\mathcal{F}$. Suodatus $\mathcal{F}$ on *normaali*, jos $\mathcal{F} = A/\mathcal{F}$.

Multiplikatiiviset suodatukset

Olkoon A kokonaisalue ja K sen osamääräkunta. Jotta kvasijärjestys määrittäisi valuaation kunnassa K, pitää vähintään vaatia, että suodatuksen antama kvasijärjestys renkaassa A voidaan laajentaa osamääräkunnan K kvasijärjestykseksi. Tästä taas seuraa, että kvasijärjestys on oltava vakaa supistamisen suhteen; toisin sanoen jos $ac \geq bc$, niin $a \geq b$ kun $c \neq 0$. Tällaista suodatusta sanotaan multiplikatiiviseksi.

Määritelmä 3.1.10. Olkoon A k-algebra ja $\mathcal{F}$ suodatus. Tällöin $\mathcal{F}$ on *heikosti multiplikatiivinen* jos kaikilla $a, b, c \in A$,

$$a \leq_{\mathcal{F}} b \Rightarrow ac \leq_{\mathcal{F}} bc.$$

Heikosti multiplikatiivinen suodatus on *multiplikatiivinen*, jos

$$a <_{\mathcal{F}} b \Rightarrow ac <_{\mathcal{F}} bc \text{ kun } c \neq 0.$$

Lemma 3.1.11. *Olkoon $\mathcal{F}$ algebran A heikosti multiplikatiivinen suodatus ja $a, b, c, d \in A$.*

(i) Jos $a \sim_{\mathcal{F}} b$, niin $ac \sim_{\mathcal{F}} bc$.

(ii) Jos $ac <_{\mathcal{F}} bc$, niin $a <_{\mathcal{F}} b$.

Todistus. (i) Koska $\mathcal{F}$ on heikosti multiplikaativinen, oletuksesta $a \sim_{\mathcal{F}} b$ seuraa, että $ac \leq_{\mathcal{F}} bc$ ja $bc \leq_{\mathcal{F}} ac$, eli $ac \sim_{\mathcal{F}} bc$.

(ii) Jos $b \leq_{\mathcal{F}} a$, niin heikosta multiplikatiivisuudesta seuraa, että $bc \leq_{\mathcal{F}} ac$, mikä on ristiriidassa oletuksen $ac <_{\mathcal{F}} bc$ kanssa.

□

Lemma 3.1.12. *Olkoon $\mathcal{F}$ multiplikatiivinen suodatus ja $a, b, c \in A$.*

(i) Jos $c \neq 0$ ja $ac \leq_{\mathcal{F}} bc$, niin $a \leq_{\mathcal{F}} b$.

(ii) Jos $c \neq 0$ ja $ac \sim_{\mathcal{F}} bc$, niin $a \sim_{\mathcal{F}} b$.

(iii) Olkoot $ad \leq_{\mathcal{F}} bc$, $b <_{\mathcal{F}} b$ ja joko $c \neq 0$ tai $d \neq 0$. Tällöin $d <_{\mathcal{F}} c$.

Todistus. (i) Jos $b <_{\mathcal{F}} a$ ja $c \neq 0$, niin $bc <_{\mathcal{F}} ac$, mikä ei ole mahdollista oletuksen nojalla. Siis $a \leq_{\mathcal{F}} b$.

(ii) Kohdan (i) perusteella oletuksesta $ac \sim_{\mathcal{F}} bc$ seuraa, että $a \sim_{\mathcal{F}} b$.

(iii) Olkoot $ad \leq_{\mathcal{F}} bc$, $b <_{\mathcal{F}} a$ ja $c \neq 0$. Tällöin $bc <_{\mathcal{F}} ac$ ja siis $ad \leq_{\mathcal{F}} bc <_{\mathcal{F}} ac$, joten $d <_{\mathcal{F}} c$.

□

Lause 3.1.13. *Olkoon $\mathcal{F}$ heikosti multiplikatiivinen k-suodatus algebrassa A ja $\cap_{S \in \mathcal{F}} S = \{0\}$.*

(i) Algebran A kaikki nollanjakajat sisältyvät joukkoon $A_{<_{\mathcal{F}} 1}$.

(ii) Jos suodatuksen $\mathcal{F}$ kaikkien porrastettujen komponenttien dimensio on yksi ja A on kokonaisalue, niin $\mathcal{F}$ on multiplikatiivinen.

Todistus. (i) Olkoon $a \in A$ nollanjakaja ja oletetaan, että $1 \leq_{\mathcal{F}} a$. Nyt löydetään $b \in A$, $b \neq 0$ siten, että $ba = 0$. Heikosta multiplikatiivisuudesta seuraa, että $b \leq_{\mathcal{F}} ab = 0$. Oletuksen perusteella $b \neq 0$, mikä on ristiriita.

(ii) Olkoot $a <_\mathcal{F} b$, $c \neq 0$. Oletuksesta seuraa, että $ac \leq_\mathcal{F} bc$. Riittää osoittaa, että oletus $ac \sim_\mathcal{F} bc$ johtaa ristiriitaan.

Koska A on kokonaisalue, $bc \neq 0$. Oletuksen mukaan porrastettujen komponenttien dimensio on yksi, joten löydetään sellainen $\lambda \in k$, että

$$ac - \lambda bc <_\mathcal{F} bc.$$

Käyttämällä heikkoa multiplikatiivisuutta tästä seuraa, että

$$a - \lambda b <_\mathcal{F} b.$$

Nyt myös $a \in A_{<_\mathcal{F} b}$, joten $b \in A_{<_\mathcal{F} b}$, mikä ei ole mahdollista.

□

Lause 3.1.14. *Olkoon $\mathcal{F}$ heikosti multiplikatiivinen k-suodatus.*

(i) Olkoot $C, D \in A/\mathcal{F}$, $C = \varsigma(c)$, $D = \varsigma(d)$. Kun määritellään $CD = \varsigma(cd)$, joukko $A/\mathcal{F}$ on multiplikatiivinen monoidi. Lisäksi jos $C \leq D$, niin $EC \leq DE$ kaikilla $C, D, E \in A/\mathcal{F}$.

(ii) Olkoon $\mathcal{F}$ multiplikatiivinen k-suodatus jolla $\cap_{S \in \mathcal{F}} S = \{0\}$. Tällöin $(A/\mathcal{F})^*$ on monoidin $A/\mathcal{F}$ alimonoidi. Jos lisäksi $C < D$, niin $CE < DE$ kaikilla $E \in (A/\mathcal{F})^*$.

Todistus. (i) Todetaan ensin, että operaatio on hyvinmääritelty: Olkoot $C = \varsigma(c) = \varsigma(c')$, $D = \varsigma(d) = \varsigma(d')$ ja $c \sim_\mathcal{F} c'$, $d \sim_\mathcal{F} d'$. Nyt heikon multiplikatiivisuuden nojalla $cd \sim_\mathcal{F} c'd$ ja $c'd \sim_\mathcal{F} c'd'$, joten $cd \sim_\mathcal{F} c'd'$ ja siis $\varsigma(cd) = \varsigma(c'd')$. Neutraalialkio $\varsigma(1_A)$ ja assosiatiivisuus periytyvät algebran A ominaisuuksista.

Todetaan lopuksi, että operaatio käyttäytyy hyvin järjestysrelaation $\leq$ suhteen: Olkoot $C, D, E \in A$, $C = \varsigma(c)$, $D = \varsigma(d)$, $E = \varsigma(e)$ ja $C \leq D$. Oletuksesta $C \leq D$ seuraa, että $c \leq_\mathcal{F} d$. Suodatus on heikosti multiplikatiivinen, joten $ce \leq_\mathcal{F} de$ ja siis $\varsigma(ce) \leq \varsigma(de)$, eli $CE \leq DE$.

(ii) Joukko $(A/\mathcal{F})^*$ on monoidin $A/\mathcal{F}$ osajoukko ja $\varsigma(1_A) \in (A/\mathcal{F})^*$, joten riittää osoittaa, että $(A/\mathcal{F})^*$ on suljettu operaation suhteen:

Olkoot $C, D \in (A/\mathcal{F})^*$ ja $C = \varsigma(c)$, $D = \varsigma(d)$. Jos $\varsigma(cd) = \varsigma(0)$, niin $cd \sim_\mathcal{F} 0$ ja siis $d \sim_\mathcal{F} 0$. Oletuksen mukaan suodatuksen alkioiden leikkaus on $\{0\}$, joten $d = 0$. Mutta tämä on ristiriita, sillä alussa oletettiin, että $\varsigma(d) \in (A/\mathcal{F})^*$.

Olkoon $C, D, E \in (A/\mathcal{F})^*$, $C = \varsigma(c)$, $D = \varsigma(d)$, $E = \varsigma(e)$ ja $C < D$. Suodatus $\mathcal{F}$ on multiplikatiivinen, joten oletuksesta $c <_\mathcal{F} d$ seuraa, että $ce <_\mathcal{F} de$, eli $CE < DE$.

□

Olkoon A kokonaisalue, K renkaan A osamääräkunta ja $\mathcal{F}$ multiplikatiivinen suodatus renkaassa A. Olkoon $a, b, c, d \in A$ ja $b, c \neq 0$. Laajennetaan kvasijärjestys $\leq_{\mathcal{F}}$ kuntaan K seuraavasti:

$$\frac{a}{b} \leq_{\mathcal{F}} \frac{c}{d} \iff ad \leq_{\mathcal{F}} bc.$$

Multiplikatiivisuudesta seuraa, että järjestysrelaatio on riippumaton K alkion esityksestä A:n alkioiden osamääränä. Osoitetaan transitiivisyys: Olkoot $a_i, b_i \in A$, $b_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3$ sekä

$$\frac{a_1}{b_1} \leq_{\mathcal{F}} \frac{a_2}{b_2}, \text{ ja } \frac{a_2}{b_2} \leq_{\mathcal{F}} \frac{a_3}{b_3}.$$

Tällöin

$$a_1 b_2 \leq_{\mathcal{F}} a_2 b_1, \text{ ja } a_2 b_3 \leq_{\mathcal{F}} a_3 b_3.$$

Multiplikatiivisuudesta ja kvasijärjestyksen transitiivisuudesta renkaassa A seuraa, että $a_1 b_2 b_3 \leq_{\mathcal{F}} a_3 b_1 b_2$. Edelleen $a_1 b_3 \leq_{\mathcal{F}} a_3 b_1$ ja siis

$$\frac{a_1}{b_1} \leq_{\mathcal{F}} \frac{a_3}{b_3}.$$

Yhteenvetona voidaan siis todeta:

Lemma 3.1.15. *Olkoon A kokonaisalue ja $\mathcal{F}$ multiplikatiivinen suodatus. Tällöin kvasijärjestys $\leq_{\mathcal{F}}$ renkaassa A voidaan laajentaa yksikäsitteisesti A:n osamääräkunnan kvasijärjestykseksi määrittelemällä*

$$\frac{a}{b} \leq_{\mathcal{F}} \frac{c}{d} \text{ jos ja vain jos } ad \leq_{\mathcal{F}} bc.$$

Edellisen lemman perusteella merkinnät $\sim_{\mathcal{F}}$, $<_{\mathcal{F}}$ ja $\leq_{\mathcal{F}}$ voidaan yksikäsitteisesti laajentaa kuntaan K.

Lemma 3.1.16. *Olkoon A kokonaisalue, K sen osamääräkunta ja $\mathcal{F}$ multiplikatiivinen suodatus. Tällöin*

(i) $\frac{a}{b} \sim_{\mathcal{F}} \frac{c}{d} \iff ad \sim_{\mathcal{F}} bc$,

(ii) $\frac{a}{b} \leq_{\mathcal{F}} \frac{c}{d} \iff \frac{d}{c} \leq_{\mathcal{F}} \frac{b}{a}$, *kun* $a, b, c, d \neq 0$.

Todistus. (i) Määritelmän mukaan

$$\frac{a}{b} \sim_{\mathcal{F}} \frac{c}{d}$$

jos ja vain jos $ad \leq_{\mathcal{F}} bc$ ja $bc \leq_{\mathcal{F}} ad$, eli jos ja vain jos $ad \sim_{\mathcal{F}} bc$.

(ii) Nyt

$$\frac{a}{b} \leq_{\mathcal{F}} \frac{c}{d}$$

jos ja vain jos $ad \leq_{\mathcal{F}} bc$, eli jos ja vain jos

$$\frac{d}{c} \leq_{\mathcal{F}} \frac{b}{a}.$$

□

Lemma 3.1.17. *Olkoon $\mathcal{F}$ multiplikatiivinen k-suodatus, A kokonaisalue ja K sen osamääräkunta. Kun $a \in K$, niin $K_{\leq_{\mathcal{F}} a}$ ja $K_{<_{\mathcal{F}} a}$ ovat vektoriavaruuksia.*

Todistus. Koska $\mathcal{F}$ on k-suodatus, $K_{\leq_{\mathcal{F}} a}$ on suljettu kunnan k alkiolla kertomisen suhteen. Olkoon $a = \frac{c}{d}$, $c, d \in A$ ja

$$\frac{a_i}{b_i} \leq_{\mathcal{F}} \frac{c}{d}, \; a_i, b_i \in A \text{ ja } i = 1, 2.$$

Nyt $a_i d <_{\mathcal{F}} b_i c$ ja multiplikatiivisuuden nojalla molemmat epäyhtälöt voidaan kertoa puolittain, jolloin saadaan

$$a_1 d b_2 \leq_{\mathcal{F}} b_1 b_2 c \text{ ja } a_2 d b_1 \leq_{\mathcal{F}} b_1 b_2 c,$$

jolloin

$$(a_1 b_2 + a_2 b_1) d \leq_{\mathcal{F}} c b_1 b_2.$$

Tämä tarkoittaa, että

$$\frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 b_2} \leq_{\mathcal{F}} \frac{c}{d},$$

eli $K_{\leq_{\mathcal{F}} a}$ on suljettu yhteenlaskun suhteen. Se, että $K_{<_{\mathcal{F}} a}$ on vektoriavaruus todistetaan samoin. □

Valuaatiot ja säännölliset suodatukset

Määritelmä 3.1.18. Algebran A multiplikatiivinen k-suodatus $\mathcal{F}$ on *säännöllinen*, jos se toteuttaa ehdot

(i) $\bigcup_{S \in \mathcal{F}, S \neq A} S = A$;

(ii) $\bigcap_{S \in \mathcal{F}} S = \{0\}$;

(iii) $\dim \operatorname{gr}_C A = 1$, kun $C \in (A/\mathcal{F})^*$;

(iv) $\varsigma(1_A)$ on monoidin $(A/\mathcal{F})^*$ pienin alkio.

Määritelmä 3.1.19. Olkoon kunta K kunnan k laajennus ja $A \subset K$ alirengas. Olkoon ν jokin kunnan K/k valuaatio, V sen valuaatiorengas ja $\mathfrak{m}$ sen maksimaalinen ideaali.. Valuaatio ν on *k-komplementaarinen* renkaan A suhteen, jos

(i) $A \cap V = k$;

(ii) $V = k + \mathfrak{m}$.

Lause 3.1.20. *Olkoon k-algebra A kokonaisalue, K sen osamääräkunta ja $\mathcal{F}$ multiplikatiivinen k-suodatus.*

(i) Joukko $K_{\leq_{\mathcal{F}}1}$ on valuaatiorengas ja $K_{<_{\mathcal{F}}1}$ on sen maksimaalinen ideaali.

(ii) Valuaatiorenkaan $K_{\leq_{\mathcal{F}}1}$ jäännösluokkakunta on k tarkalleen silloin, kun

$$\dim \operatorname{gr}_C A = 1$$

kaikilla $C \in (A/\mathcal{F})^*$.

*(iii) Jos $\mathcal{F}$ on säännöllinen, niin valuaatiorengas $K_{\leq_{\mathcal{F}}1}$ on k-*komplementaarinen *A:n suhteen.*

Todistus. (i) Merkitään $V = K_{\leq_{\mathcal{F}}1}$ ja $\mathfrak{m} = K_{<_{\mathcal{F}}1}$. Oletuksen mukaan suodatus $\mathcal{F}$ on multiplikatiivinen, eli kaikilla $u, v \in V$ on voimassa $uv \leq_{\mathcal{F}} 1$, joten V on suljettu kertolaskun suhteen. Aiemmin osoitettiin, että V on k-vektoriavaruus. Siis V on rengas.

Jos $u \notin V$, niin $1 <_{\mathcal{F}} u$, joten

$$\frac{1}{u} \leq_{\mathcal{F}} 1,$$

eli $\frac{1}{u} \in V$. Olkoon nyt $u \in V \backslash \mathfrak{m} = K_{\sim_{\mathcal{F}}1}$. Tällöin $u \sim_{\mathcal{F}} 1$, joten myös $\frac{1}{u} \sim_{\mathcal{F}} 1$. Tästä seuraa, että renkaan V yksiköt ovat tarkalleen joukon $K_{\sim_{\mathcal{F}}1}$ alkiot. Siis $\mathfrak{m}$ on maksimaalinen ideaali.

(ii) Oletetaan, että porrastettujen komponenttien dimensio on yksi. Koska valuaatiorenkaan maksimaalinen ideaali on $\mathfrak{m}$, riittää osoittaa, että valuaatiorengas voidaan esittää muodossa $k+\mathfrak{m}$. Olkoon nyt $a, b \in A \backslash \{0\}$. Jos $a <_{\mathcal{F}} b$, niin $\frac{a}{b} <_{\mathcal{F}} 1$. Oletetaan, että $a \sim_{\mathcal{F}} b$. Nyt $a = \lambda c + a_1$ ja $b = \gamma c + b_1$, missä $a_1, b_1, c \in A_{<_{\mathcal{F}}a}$ ja $c \in A_{\leq_{\mathcal{F}}a}$. Tästä seuraa, että

$$a - \frac{\lambda}{\gamma} b = a_1 - \frac{\lambda}{\gamma} b_1$$

ja

$$\frac{a}{b} = \frac{\lambda}{\gamma} + \frac{a - \frac{\lambda}{\gamma}b}{b} = \frac{\lambda}{\gamma} + \frac{a_1 - \frac{\lambda}{\gamma}b_1}{b_1},$$

ja koska $a_1 - \frac{\lambda}{\gamma}b_1 \leq_{\mathcal{F}} b$, väite seuraa.

Oletetaan, että valuaation jäännösluokkakunta on k. Olkoot $a, b \in A_{\leq_{\mathcal{F}} a}$ ja $a \sim_{\mathcal{F}} b$. Nyt $\frac{a}{b} \sim_{\mathcal{F}} 1$, joten $\frac{a}{b} = \lambda + c$, missä $\lambda \in k$ ja $c \in K_{<_{\mathcal{F}} 1}$. Siis

$$a - \lambda b = bc <_{\mathcal{F}} b,$$

eli $a = \lambda b$ tekijäavaruudessa $A_{\leq_{\mathcal{F}} a}/A_{<_{\mathcal{F}} a}$.

(iii) Selvästi $k \subset V$, koska kaikilla $a \in k$ on voimassa $a \sim_{\mathcal{F}} 1$. Tästä seuraa, että $k \subset A \cap V$. Olkoon $a \in A \cap V$. Jos $a <_{\mathcal{F}} 1$, niin $a = 0$, sillä $\varsigma(1)$ on monoidin $(A/\mathcal{F})^*$ pienin alkio. Tapauksessa $a \sim_{\mathcal{F}} 1$ löydetään $\lambda \in k$, jolla $a - \lambda <_{\mathcal{F}} 1$. Käyttämällä samaa päättelyä kuin yllä nähdään, että $a = \lambda \in k$. Yhtäsuuruus $A \cap V = k$ on siis osoitettu.

Olkoon nyt $u \in V$. Jos $u <_{\mathcal{F}} 1$, niin $u \in \mathfrak{m}$. Voidaan siis olettaa, että $u \sim_{\mathcal{F}} 1$. Kirjoitetaan $u = \frac{a}{b}$, missä $a, b \in A$. Nyt $a \sim_{\mathcal{F}} b$, joten löydetään $\lambda \in k$ jolle $a - \lambda b <_{\mathcal{F}} b$. Koska $\mathcal{F}$ on multiplikatiivinen, supistamalla b:llä saadaan $u - \lambda <_{\mathcal{F}} 1$. Kirjoittamalla $u = \lambda + (u - \lambda)$ nähdään, että $V \subset A \cap V + \mathfrak{m}$. Käänteinen sisältyminen on triviaali, joten yhtäsuuruus seuraa.

□

Lause 3.1.21. *Olkoon A k-algebra, K A:n osamääräkunta ja ν kunnan K valuaatio, jolla $\nu(k) = 0$. Merkitään $\Delta = \nu(A^*)$. Olkoon*

$$\mathcal{F} = \{\{0\}\} \cup \{A_\alpha\}_{\alpha \in \Delta},$$

missä

$$A_\alpha = \{a \in A | \nu(a) \geq \alpha\}.$$

Tällöin

(i) Suodatus $\mathcal{F}$ on algebran A multiplikatiivinen normalisoitu k-suodatus.

(ii) Kaikilla $C \in (A/\mathcal{F})^*$ on $\dim_k \operatorname{gr}_C A = 1$ jos ja vain jos valuaation ν jäännösluokkakunta on k.

(iii) Kun ν on k-komplementaarinen A:n suhteen, suodatus $\mathcal{F}$ on säännöllinen.

Todistus. (i) Olkoon Γ valuaation ν arvoryhmä. Ryhmä Γ on täysin järjestetty ja $\nu(a+b) \geq \min\{\nu(a), \nu(b)\}$, joten $\mathcal{F}$ on k-suodatus. Suodatus $\mathcal{F}$ on normalisoitu, sillä $A_{\leq_{\mathcal{F}} a} = A_{\nu(a)}$. On selvää, että $a \leq_{\mathcal{F}} b$ tarkalleen silloin, kun $\nu(b) \leq \nu(a)$. Osoitetaan multiplikatiivisuus: Olkoon $a, b, c \in A$, $a \leq_{\mathcal{F}} b$. Nyt

$$\nu(ac) = \nu(a) + \nu(c) \geq \nu(b) + \nu(c) = \nu(bc),$$

eli $ac \leq_{\mathcal{F}} bc$. Vastaavalla tavalla osoitetaan, että $ac <_{\mathcal{F}} bc$ jos $c \neq 0$ ja $a <_{\mathcal{F}} b$.

(ii) Olkoon V valuaation ν valuaatiorengas ja $\mathfrak{m}$ sen maksimaalinen ideaali. Olkoon $\operatorname{gr}_C A = 1$ kaikilla $C \in (A/\mathcal{F})^*$ ja $u \in V$. Osoitetaan, että $V = k + m$. Voidaan olettaa, että $\nu(u) = 0$. Kirjoitetaan $u = \frac{a}{b}$, missä $a, b \in A$ ja $b \neq 0$. Nyt $\nu(a) = \nu(b)$, eli $a \sim_{\mathcal{F}} b$, joten voidaan löytää $\lambda \in k$ jolle $a - \lambda b <_{\mathcal{F}} b$. Suodatuksen multiplikatiivisuudesta seuraa, että $u - \lambda <_{\mathcal{F}} 1$, eli $u = \lambda + (u - \lambda)$. Tästä nähdään, että $V \subset k + \mathfrak{m}$. Koska käänteinen sisältyminen on triviaali, $V = k + m$.

Oletetaan, että valuaation ν osamääräkunta on k ja osoitetaan, että suodatuksen $\mathcal{F}$ porrastettujen komponenttien dimensio on yksi: Olkoon $b \in A_{\leq_{\mathcal{F}} a}$. Nyt $\nu(a) \leq \nu(b)$, joten $b = va$ jollain $v \in V$. Koska oletuksen mukaan tekijäkunta on k, v voidaan lausua muodossa $\lambda + c$, missä $\lambda \in k$ ja $c \in \mathfrak{m}$. Nyt $b = \lambda a + ca$, missä $\nu(ca) > \nu(a)$. siis $b = \lambda a$ modulo $A_{<_{\mathcal{F}} a}$.

(iii) Riittää osoittaa, että $\varsigma(1_A)$ on monoidin $(A/\mathcal{F})^*$ pienin alkio, sillä määritelmän muut ehdot ovat selviä lauseen alkuosan perusteella. Olkoon $a \in A$ ja $a <_{\mathcal{F}} 1$. Nyt $\nu(a) > 0$ eli $a \in \mathfrak{m}$. Oletuksen mukaan valuaatio on k-komplementaarinen, joten $\mathfrak{m} \cap A = \{0\}$. Siis $a = 0$.

$\square$

Olkoon A k-algebra ja K sen osamääräkunta. Lauseen 3.1.20 mukaan on olemassa kuvaus Φ, joka kuvaa renkaan A säännöllisen k-suodatuksen kunnan K valuaatioksi, joka on k-komplementaarinen A:n suhteen.

Toisaalta lauseessa 3.1.21 osoitettiin, että on olemassa kuvaus Ψ, joka liittää k-komplementaariseen valuaatioon säännöllisen suodatuksen. Todistetaan seuraavaksi, että kuvaukset Ψ ja Φ ovat itse asiassa bijektioita:

Lause 3.1.22. *Olkoon A k-algebra ja K sen osamääräkunta. Algebran A säännöllisten, normalisoitujen k-suodatusten ja kunnan K A:n suhteen k-komplementaaristen valuaatioiden välillä on bijektiivinen vastaavuus.*

Todistus. Olkoon ν k-komplementaarinen valuaatio A:n suhteen ja

$$\tau = \Phi(\Psi(\nu)).$$

Riittää todistaa, että valuaatioiden ν ja τ valuaatiorenkaat yhtyvät: Olkoon $u \in K$ ja $\mathcal{F} = \Psi(\nu)$. Nyt

$$\tau(u) \geq 0 \Longleftrightarrow u \leq_{\mathcal{F}} 1 \Longleftrightarrow \nu(u) \geq 0.$$

Tästä nähdään, että valuaatiorenkaat ovat samat.

Kääntäen, olkoon $\mathcal{F}$ säännöllinen normalisoitu k-suodatus ja

$$\mathcal{G} = \Psi(\Phi(\mathcal{F})).$$

Merkitään $\nu = \Phi(\mathcal{F})$. Koska suodatukset $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ ovat normalisoituja, riittää osoittaa, että kvasijärjestykset $\leq_{\mathcal{F}}$ ja $\leq_{\mathcal{G}}$ ovat samat: Olkoot $a, b \in A$. Nyt

$$a \leq_{\mathcal{F}} b \iff \nu(a) \geq \nu(b) \iff a \leq_{\mathcal{G}} b.$$

Siis $\mathcal{G} = \mathcal{F}$. □

Esimerkki 3.1.23. Määritetään polynomirenkaan $A = k[x]$ normalisoidut, säännölliset suodatukset. Olkoon $\mathcal{F}$ jokin normalisoitu säännöllinen suodatus. Koska $\mathcal{F}$ on normalisoitu, riittää etsiä joukot $A_{\leq_{\mathcal{F}} a}$, kun $a \in A$. Alkio $x \notin k$, joten $1 <_{\mathcal{F}} x$. Multiplikatiivisuuden perusteella saadaan aidosti kasvava jono

$$1 <_{\mathcal{F}} x <_{\mathcal{F}} x^2 <_{\mathcal{F}} \ldots.$$

Tästä nähdään, että joukko $A_{\leq_{\mathcal{F}} x^n}$ sisältää ainakin polynomit, joiden aste on enintään n. Toisaalta

$$\dim_k A_{\leq_{\mathcal{F}} a} / A_{<_{\mathcal{F}} a} = 1$$

ja $A_{<_{\mathcal{F}} x} = k$, joten vektoriavaruuden $A_{\leq_{\mathcal{F}} x}$ kanta on $\{1, x\}$. Vastaavasti

$$x^n \in A_{\leq_{\mathcal{F}} x^n} \backslash A_{<_{\mathcal{F}} x^n},$$

mistä seuraa, että vektoriavaruuden $A_{\leq_{\mathcal{F}} x^n}$ kanta on tarkalleen $\{1, x, \ldots, x^n\}$.

Määritetään vielä suodatukseen $\mathcal{F}$ liittyvä k-komplementaarinen valuaatio ν: Jos $a, b \in A$, $b \neq 0$, niin $a \leq_{\mathcal{F}} b$ jos ja vain jos $\deg(a) \leq \deg(b)$.

Toisaalta valuaation määritelmän mukaan

$$\frac{a}{b} \leq_{\mathcal{F}} 1 \text{ jos ja vain jos } \nu(b) \leq \nu(a).$$

Tästä seuraa, että

$$\nu(\frac{a}{b}) = \deg(b) - \deg(a)$$

ja valuaatio ν on affiinin suoran äärettömyyspisteeseen liittyvä valuaatio.

Lause 3.1.24. *Olkoon $\mathcal{F}$ säännöllinen k-suodatus jolle $(A/\mathcal{F})^*$ on hyvinjärjestetty monoidi. Tällöin voidaan määritellä kuvaus ja monoidi Γ siten, että*

$$\rho : A \to \Gamma_{-\infty}$$

on painofunktio.

Todistus. Määritellään kuvaus $\rho(0) = -\infty$ ja $\rho(c) = \varsigma(c)$, kun $c \neq 0$. Tällöin saadaan kuvaus

$$\rho : A \to (A/\mathcal{F})^*_{-\infty}.$$

Todistetaan, että tämä kuvaus on painofunktio: Määrittelyn perusteella

$$\rho(f) = -\infty$$

tarkalleen silloin, kun $f = 0$. Koska $\mathcal{F}$ on k-suodatus, $\rho(\lambda f) = \rho(f)$ kaikilla $\lambda \in k$ ja $f \in A$. Olkoon nyt $f, g \in R$. Koska $\leq_{\mathcal{F}}$ on täydellinen järjestys, voidaan olettaa, että $f \leq_{\mathcal{F}} g$. Tällöin $f + g \leq_{\mathcal{F}} g$ seuraa, sillä oletuksen mukaan $A_{\leq_{\mathcal{F}} g}$ on vektoriavaruus. Täten

$$\rho(f + g) \leq \max\{\rho(f), \rho(g)\}$$

ja yhtäsuuruus on voimassa jos $\rho(f) \neq \rho(g)$, sillä tällöin $A_{\leq_{\mathcal{F}} f} \neq A_{\leq_{\mathcal{F}} g}$ ja siis joko $f <_{\mathcal{F}} g$ tai $g <_{\mathcal{F}} f$. Multiplikatiivisuudesta seuraa, että jos $\rho(f) < \rho(g)$ ja $h \neq 0$, niin $\rho(fh) < \rho(gh)$. Koska $\mathcal{F}$ on säännöllinen, porrastetut komponentit ovat yksiulotteisia, joten jos $\rho(f) = \rho(g)$, niin on olemassa $\lambda \in k$ siten, että $f - \lambda g \in A_{<_{\mathcal{F}} g}$, eli $\rho(f - \lambda g) < \rho(g)$. $\square$

Lause 3.1.25. *Olkoon k-algebra A järjestysfunktiollinen kokonaisalue. Tällöin on olemassa säännöllinen normalisoitu k-suodatus $\mathcal{F}$ renkaassa A. Lisäksi suodatuksen monoidi $(A/\mathcal{F})^*$ on hyvinjärjestetty.*

Todistus. Olkoon ρ järjestysfunktiollisen kokonaisalueen A painofunktio ja Γ sen arvomonoidi. Määritellään suodatus $\mathcal{F}$ seuraavasti:

$$\mathcal{F} = \cup_{a \in A} \mathcal{F}_a,$$

missä

$$\mathcal{F}_a = \{x \in A | \rho(x) \leq \rho(a)\}.$$

$\mathcal{F}$ on selvästi k-suodatus, sillä kaikille $x, y \in A$ on voimassa joko $\rho(x) \leq \rho(y)$ tai $\rho(y) \leq \rho(x)$. Lisäksi kaikki joukot $\mathcal{F}_a$ ovat vektoriavaruuksia. Osoitetaan säännöllisyys: Ehto

$$\cup_{\mathcal{F}_a \neq A} \mathcal{F} = A$$

ja $\cap \mathcal{F}_a = \{0\}$ ovat selviä, sillä $\{0\} \in \mathcal{F}$ ja monoidissa Γ ei ole suurinta alkiota, jos ρ on ei-triviaali. Porrastettujen komponenttien dimensio on 1, sillä määritelmän mukaan jos $\rho(x) = \rho(y)$, niin löydetään $\lambda \in k$ jolla

$$\rho(x - \lambda y) < \rho(\lambda).$$

Monoidit $(A/\mathcal{F})^*$ ja Γ ovat isomorfisia: On voimassa

$$a \leq_{\mathcal{F}} b \Longleftrightarrow \rho(a) \leq \rho(b),$$

joten kuvaamalla $A_{\leq_{\mathcal{F}} a}$ alkiolle $\rho(a)$ saadaan isomorfismi monoidien välillä. Lisäksi tämä isomorfismi säilyttää järjestyksen. Tämän perusteella nähdään välittömästi, että $\varsigma(1_A)$ on monoidin $(A/\mathcal{F})^*$ pienin alkio, koska $\rho(1_A)$ on monoidin Γ pienin alkio.

□

Esimerkki 3.1.26. Olkoon $A = k[x, y]$ ja ν korkeutta 1 olevaan alkuideaalin (x) liittyvä valuaatio. Valuaatio ν määrittää suodatuksen $\mathcal{F}$, kun joukoiksi määritellään $\{0\}$ ja

$$\mathcal{F}_m = \{f \in k[x, y] | \nu(f) \geq m\}$$

kaikilla $m \in \mathbb{N}$. Suodatus $\mathcal{F}$ on k-suodatus, mutta ei säännöllinen: porrastetut komponentit eivät ole äärellisulotteisia. Jokainen $A_{\leq_{\mathcal{F}} m}$ sisältää alkiot $x^m y^n$, missä $n \in \mathbb{N}$, jotka eivät sisälly joukkoon $A_{<_{\mathcal{F}} m}$. Täten valuaatio ν ei määritä painofunktiota polynomirenkaassa $k[x, y]$

On helppo nähdä, että lauseissa 3.1.24 ja 3.1.25 esitetyt kuvaukset suodatusten ja järjestysfunktioiden välillä ovat bijektioita: Jos $\mathcal{F}$ on lauseen 3.1.24 ehdot täyttävä suodatus, niin painofunktiolle ρ on voimassa $\rho(a) = \varsigma(a)$. Kun $\mathcal{G}$ on painofunktion ρ määrittämä suodatus, niin

$$a \leq_{\mathcal{G}} b \Longleftrightarrow \rho(a) \leq \rho(b) \Longleftrightarrow \varsigma(a) \leq \varsigma(b).$$

Yhdistämällä lauseet 3.1.24, 3.1.25 ja 3.1.22 saadaan:

Lause 3.1.27. *Olkoon A k-algebra ja K sen osamääräkunta. Tällöin on olemassa bijektiivinen vastaavuus seuraavien joukkojen välillä:*

(i) Renkaan A painofunktiot ρ.

(ii) Kunnan K k-komplementaariset valuaatiot renkaan A suhteen, joilla monoidi $-\nu(A)$ on hyvinjärjestetty.

(iii) *Säännölliset normalisoidut k-suodatukset $\mathcal{F}$ renkaassa A, joilla $(A/\mathcal{F})^*$ on hyvinjärjestetty.*

Todistus. Väite seuraa välittömästi ylläolevista lauseista, mutta todistetaan valuaatioiden ja järjestysfunktioiden yhteys suoraan: Osoitetaan ensin, että järjestysfunktiollisen kokonaisalueen A järjestysfunktio ρ määrittää kunnan K valuaation yksikäsitteisesti: Merkitään

$$V = \{x \in K \mid x = \frac{f}{g},\ f, g \in A \text{ ja } \rho(f) \leq \rho(g)\} \text{ ja}$$
$$\mathfrak{m} = \{x \in K \mid x = \frac{f}{g},\ f, g \in A \text{ ja } \rho(f) < \rho(g)\}.$$

Todistetaan, että V on valuaatiorengas ja $\mathfrak{m}$ sen maksimaalinen ideaali. Olkoon

$$\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2}.$$

Nyt $f_1 g_2 = f_2 g_1$ ja käyttämällä järjestysfunktion määritelmää J.4 ja lemmaa 2.3.5 nähdään, että $\rho(f_1) < \rho(g_1)$ tarkallaan silloin, kun $\rho(f_2) < \rho(g_2)$ ja vastaavasti $\rho(f_1) = \rho(g_1)$ tarkalleen silloin, kun $\rho(f_2) = \rho(g_2)$. Kaikille $x = \frac{f}{g} \in V$, $f, g \in A$ on siis voimassa $\rho(f) \geq \rho(g)$. Todetaan, että V on rengas: Olkoot $f_i, g_i \in A$, $i = 1, 2$, $g_i \neq 0$ ja $\rho(f_i) \leq \rho(g_i)$. Nyt

$$\frac{f_1}{g_1} \cdot \frac{f_2}{g_2} = \frac{f_1 f_2}{g_1 g_2}$$

ja $\rho(f_1 f_2) \leq \rho(g_1 g_2)$, koska $\rho(f_i) \leq \rho(g_i)$. Vastaavasti

$$\frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2} = \frac{f_1 g_2 + f_2 g_1}{g_1 g_2}$$

ja

$$\rho(f_1 g_2 + f_2 g_1) \leq \max\{\rho(f_1 g_2), \rho(f_2 g_1)\} \leq \rho(g_1 g_2).$$

Vastaavalla tavalla kuten yllä nähdään helposti, että $\mathfrak{m}$ on ideaali. Jos $x \in V \backslash \mathfrak{m}$ ja $x \neq 0$, niin $x = f/g$, missä $f, g \in A$ ja $\rho(f) = \rho(g)$. Tästä nähdään, että myös $1/x = g/f \in V \backslash \mathfrak{m}$ ja joukon $V \backslash \mathfrak{m}$ alkiot ovat tarkalleen renkaan V yksiköt. V on siis lokaali rengas. Todetaan, että V on valuaatiorengas: jos $x \notin V$, niin $x = f/g$, missä $\rho(f) > \rho(g)$. Nyt nähdään välittömästi, että $x^{-1} \in V$.

Osoitetaan lopuksi, että näin saatu valuaatio on k-komplementaarinen A:n suhteen: Selvästi $k \subset V \cap A$. Jos $x \in V \cap A$, niin tällöin $x/1 \in A$, joten $\rho(x) \leq \rho(1)$, eli $x \in k$. Olkoon $x \in V$, $x = f/g$, missä $\rho(f) = \rho(g)$. Nyt

$\rho(f - \lambda g) < \rho(g)$ jollain $\lambda \in k$, joten $(f - \lambda g)/g \in \mathfrak{m}$. ja siis $f/g - \lambda \in \mathfrak{m}$. Täten $S/\mathfrak{m} = k$.

Olkoon nyt V k-komplementaarinen valuaatiorengas A:n suhteen, ν sen valuaatio ja $\mathfrak{m}$ sen maksimaalinen ideaali. Määritellään $\rho = -\nu|_A$ ja osoitetaan, että ρ on renkaan A painofunktio. Järjestysfunktion määritelmät ehdot J.1-J.4 seuraavat suoraan valuaation ominaisuuksista. Todistetaan J.5: Olkoon $f, g \in A \backslash \{0\}$ ja $\rho(f) = \rho(g)$. Nyt $\nu(f/g) = 0$ ja koska V on k-komplementaarinen, löydetään $\lambda \in k$, jolle $f/g - \lambda \in \mathfrak{m}$. Tästä seuraa, että $\nu(g) < \nu(f - \lambda g)$, eli $\rho(f - \lambda g) < \rho(g)$.

□

Esimerkki 3.1.28. Olkoon $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ polynomirengas ja $\preceq$ termijärjestys. Olkoon joukko $\mathcal{F}_\alpha$ alkioiden

$$\{x^\beta | x^\beta \preceq x^\alpha\}$$

generoima k-vektoriavaruus. Olkoon $\mathcal{F}$ suodatus, jonka alkioina ovat joukot $\mathcal{F}_\alpha$, missä $\alpha \in \mathbb{N}^n$, ja joukko $\{0\}$.

Nyt selvästi $A_{\leq_{\mathcal{F}} g} = A_{\leq_{\mathcal{F}} \mathrm{LM}(g)}$ kaikilla polynomeilla g. Lisäksi

$$x^\alpha \leq_{\mathcal{F}} x^\beta \Longleftrightarrow x^\alpha \preceq x^\beta,$$

joten suodatuksen indusoima järjestys monomeille on sama kuin alkuperäinen termijärjestys. Jos $\mathrm{LM}(f) = \mathrm{LM}(g)$ polynomeilla $f, g \in A$, niin löydetään $\lambda \in k$ siten, että $\mathrm{LM}(f - \lambda g) < \mathrm{LM}(g)$. Tästä seuraa, että $\dim \mathrm{gr}_C A = 1$ kaikilla $C \in (A/\mathcal{F})^*$. Nyt on ilmeistä, että suodatus $\mathcal{F}$ on säännöllinen. Tarkastellaan seuraavaksi monoidia $(A/\mathcal{F})^*$. Monoidin alkiot ovat muotoa $A_{\leq_{\mathcal{F}} m}$, missä m on monomi. Tästä nähdään, että monoidi $(A/\mathcal{F})^*$ on välttämättä hyvinjärjestetty, koska monomien joukko on hyvinjärjestetty termijärjestyksen suhteen. Jokainen monomin termijärjestys määrittää polynomirenkaassa A säännöllisen suodatuksen $\mathcal{F}$, jonka monoidi $(A/\mathcal{F})^*$ on hyvinjärjestetty.

Edellisen esimerkin jälkeen on mielekästä kysyä, onko jokainen polynomirenkaan säännöllinen suodatus, jonka monoidi on hyvinjärjestetty, jonkin termijärjestyksen indusoima? Vastaus tähän kysymykseen on kielteinen, sillä on olemassa säännöllisiä suodatuksia, jotka eivät tule termijärjestyksistä. Esimerkki tällaisesta löydetään käyttämällä hyväksi edellistä lausetta: Koska jokaista säännöllistä suodatusta jonka monoidi on hyvinjärjestetty, vastaa painofunktio, riittää siis löytää polynomirenkaan painofunktio joka saa saman arvon kahdella eri monomilla. Tällainen painofunktio konstruoidaan viimeisessä pykälässä, esimerkissä 4.2.3.

3.2 Tekijärengaslause

Tässä pykälässä todistettava tekijärengaslause on hyvin käytännöllinen kun konstruoidaan esimerkkejä polynomirenkaan tekijärenkaaseen liittyvistä järjestysfunktioita. Pellikaanin [GP02] lauseen mukaan polynomirenkaan ideaalin I määrittämä tekijärengas on järjestysfunktiollinen kokonaisalue tarkalleen silloin, kun ideaalin I Gröbnerin kanta toteuttaa tietyt ehdot.

Olkoon (R, ρ, Γ) äärellisesti generoitu järjestysfunktiollinen kokonaisalue. Koska Γ on äärellisesti generoitu, voidaan lauseen 4.1.3 mukaan olettaa, että $\Gamma \subseteq \mathbf{N}^r$ ja osajoukko $M = \{m_1, \ldots, m_n\} \subseteq \Gamma$ generoi monoidin Γ. Olkoon $\prec$ monoidin Γ järjestys.

Valitaan $y_1, \ldots, y_n$ siten, että $\rho(y_i) = m_i$. Koska $y_1, \ldots, y_n$ generoivat algebran R, saadaan surjektiivinen homomorfismi

$$\phi : k[x_1, \ldots, x_n] \to R, \; x_i \mapsto y_i.$$

Täten $R \cong k[x_1, \ldots, x_n]/I$, missä $I = \operatorname{Ker} \phi$. Tässä pykälässä oletetaan, että äärellisesti generoitu järjestysfunktiollinen kokonaisalue on esitetty yllä olevassa muodossa polynomirenkaan tekijärenkaana. Laajennetaan järjestysfunktio ρ polynomirenkaan funktioksi määrittelemällä $\rho(f) := \rho(\phi(f))$, kun $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$.

Olkoon $<_\tau$ jokin polynomirenkaan $k[x_1, \ldots, x_n]$ monomien termijärjestys. Määritellään termijärjestys $<_{\rho,\tau}$ seuraavasti: Olkoot m_1, m_2 monomeja. Tällöin $m_1 <_{\rho,\tau} m_2$ jos ja vain jos joko $\rho(m_1) \prec \rho(m_2)$, tai jos $\rho(m_1) = \rho(m_2)$ ja $m_1 <_\tau m_2$. Merkitään seuraavassa lemmassa järjestystä $<_{\rho,\tau}$ lyhyesti merkinnällä $<$.

Lemma 3.2.1. *Joukko $\Delta_<(I)$ on tarkalleen niiden monomien x^s joukko, jotka toteuttavat seuraavan ehdon: Jos $\rho(x^s) = \rho(x^t)$ jollain monomilla x^t, niin $x^s \leq_\tau x^t$.*

Todistus. Olkoon $x^s \in \Delta(I)$ ja $\rho(x^s) = \rho(x^t)$. Valitaan $c_{s,t} \in k$ siten, että $\rho(x^s - c_{s,t}x^t) \prec \rho(x^s)$. Jos $x^s - c_{s,t}x^t \neq 0$, voidaan edelleen löytää sellainen $x^{u_1} \in \Delta(I)$ ja $c_1 \in k$, jolle

$$\rho(x^s - c_{s,t}x^t - c_1 x^{u_1}) \prec \rho(x^s - c_{s,t}x^t).$$

Jatkamalla näin löydetään lopulta sellaiset $x^{u_2}, \ldots, x^{u_r} \in \Delta(I)$ ja $c_2, \ldots, c_r \in k$, että

$$f := x^s - c_{s,t}x^t - \sum c_i x^{u_i} \in I$$

ja $\rho(x^{u_i}) \prec \rho(x^s)$. Koska $f \in I$, niin $x^t <_\tau x^s$ jos ja vain jos $\operatorname{LM}(f) = x^s$, eli jos ja vain jos $x^s \notin \Delta_<(I)$. $\square$

Käytetään seuraavassa lauseessa esimerkin 2.3.4 merkintöjä: Kun M $m \times n$-matriisi, jonka alkiot ovat ei-negatiivisia kokonaislukuja, määritellään funktio $\mathrm{w}_M(x^\alpha) = M\alpha^T$. Tätä vektoria sanotaan monomin x^α M-painoksi. Laajennetaan funktio polynomeille f määrittelemällä $\mathrm{w}_M(f)$ maksimiksi polynomin f monomien M-painoista, missä maksimi otetaan jonkin tietyn monoidin $\mathbb{N}^m$ monoidijärjestyksen suhteen.

Lause 3.2.2. *Olkoon $R = k[x_1, \dots, x_n]$ polynomirengas, $<_\tau$ sen termijärjestys, I renkaan R ideaali, M $m \times n$ kokonaislukumatriisi, jonka vaakarivit ovat lineaarisesti riippumattomat ja $\prec$ monoidin $\mathbb{N}^m$ monoidijärjestys. Olkoon $\mathcal{G}$ ideaalin I Gröbnerin kanta järjestyksen $< = <_{M,\tau}$ suhteen. Oletetaan, että*

(i) Jokaisella $\mathcal{G}$:n alkiolla on tarkalleen kaksi korkeinta M-painoa olevaa monomia.

(ii) Funktion w_M rajoittuma joukkoon $\mathcal{M}_n \setminus \mathrm{LM}_<(I)$ on injektiivinen.

Tällöin R/I on järjestysfunktiollinen kokonaisalue, jonka arvomonoidi Γ on matriisin M pystyrivien generoima.

Todistus. Indeksoidaan joukon

$$\Delta_<(I) = \mathcal{M}_n \setminus \mathrm{LM}_<(I)$$

alkiot siten, että $\mathrm{w}_M(F_\lambda) = \lambda$ ja merkitään

$$\mathcal{B} = \{F_\lambda + I | F_\lambda \in \Delta_<(I)\}.$$

Joukko $\mathcal{B}$ on tekijärenkaan R/I kanta k-vektoriavaruutena.

Ehdoista (i) ja (ii) seuraa, että $F_\lambda + I \leftrightarrow \lambda$ on bijektiivinen vastaavuus joukkojen $\mathcal{B}$ ja Γ välillä: Olkoon $\lambda \in \Gamma$. Valitaan $\alpha \in \mathbf{N}^n$ siten, että $\lambda = M\alpha^T$. Jos $x^\alpha \in \Delta_<(I)$, niin $\mathrm{w}_M(x^\alpha) = \lambda$. Muutoin $x^\alpha \in I$. Redusoimalla Gröbnerin kannan $\mathcal{G}$ suhteen saadaan $x^\alpha = x^\beta + \sum_{\gamma \prec \beta} a_\gamma x^\gamma$ modulo $\mathcal{G}$, missä $M\alpha^T = M\beta^T$ ja $x^\beta \in \Delta_<(I)$. Tästä seuraa, että $x^\beta + I \in \mathcal{B}$. Lauseen todistamiseksi riittää osoittaa, että $\mathcal{B}$ muodostaa hyvinkäyttäytyvän kannan: Olkoon $f_\lambda = F_\lambda + I$ ja $f_\gamma = F_\gamma + I$. Nyt $f_\lambda f_\gamma = F_\lambda F_\gamma + I$, mutta $F_\lambda F_\gamma$ ei välttämättä kuulu joukkoon $\Delta_<(I)$. Redusoidaan $F_\gamma F_\lambda$ Gröbnerin kannan $\mathcal{G}$ suhteen, jolloin saadaan $F_\lambda F_\gamma = \sum_{\beta \preceq l(\lambda,\gamma)} a_\beta F_\beta$ modulo $\mathcal{G}$, missä l on kannan $\mathcal{B}$ l-funktio. Lemman 3.2.3 perusteella

$$\lambda + \gamma = \mathrm{w}_M(F_\lambda F_\gamma) = \mathrm{w}_M(\sum a_\beta F_\beta) = w(a_{l(\lambda,\gamma)} F_{l(\lambda,\gamma)}) = l(\lambda, \gamma).$$

Tästä seuraa, että $l(\alpha, \beta) = \alpha + \beta \prec \alpha + \gamma = l(\alpha, \gamma)$, kun $\beta \prec \gamma$. Siis joukko $\mathcal{B}$ on renkaan R/I hyvinkäyttäytyvä kanta ja täten R/I on järjestysfunktiollinen kokonaisalue.

$\square$

Lemma 3.2.3. *Olkoon $\mathcal{G}$ edellisen lauseen ehdot toteuttava Gröbnerin kanta. Jos polynomilla F on tarkalleen yksi korkeinta M-painoa oleva termi, niin tällöin myös sen reduktiolla Gröbnerin kannan $\mathcal{G}$ suhteen on tarkalleen yksi korkeinta M-painoa oleva termi, ja sen paino pysyy muuttumattomana reduktiossa.*

Todistus. Käyttämällä induktiota voidaan rajoittua tapaukseen jossa G on saatu redusoimalla polynomia F jollakin sopivalla Gröbnerin kannan $\mathcal{G}$ alkiolla. Nyt $F = F' + \lambda_\alpha x^\alpha$ ja $\mathrm{w}_M(F') \prec \mathrm{w}_M(F)$. Tällöin $G = F - \mu m G_i$, missä $G_i \in \mathcal{G}$, $\mathrm{w}_M(mG_i) \preceq \mathrm{w}_M(F)$ ja m on monomi.

Tarkastellaan ensin tapausta $\mathrm{w}_M(mG_i) \prec \mathrm{w}_M(F)$. Tällöin $G = (F' - \mu m G_i) + \lambda_\alpha x^\alpha$ ja polynomin F korkeinta M-painoa oleva termi siirtyy polynomiin G muuttumattomana.

Jos $\mathrm{w}_M(mG_i) = \mathrm{w}_M(F)$, niin löydetään polynomi G_i', monomit m_1, m_2 sekä $\mu_1, \mu_2 \in k$, joille

$$G_i = G_i' + \mu_1 m_1 + \mu_2 m_2,$$
$$\mathrm{w}_M(G_i') \prec \mathrm{w}_M(m_1) = \mathrm{w}_M(m_2)$$

ja $m_1 <_\tau m_2$. Polynomin $\mu m G_i$ johtava termi on $\mu\mu_2 m m_2$. Sen on siis oltava sama kuin $\lambda_\alpha x^\alpha$, koska $\lambda_\alpha x^\alpha$ on polynomin F ainoa samaa painoa oleva monomi. Täten

$$G = (F' - \mu m G_i') - \mu\mu_1 m m_1$$

ja

$$\mathrm{w}_M(F' - \mu m G_i') \prec \mathrm{w}_M(G) = \mathrm{w}_M(m m_1).$$

Tästä seuraa, että $\mathrm{w}_M(G) = \mathrm{w}_M(F)$ ja mm_1 on ainoa korkeinta M-painoa oleva monomi polynomissa G. $\square$

Lause 3.2.4. *Olkoon nyt $R = k[x_1, \ldots, x_n]/I$ äärellisesti generoitu järjestysfunktiollinen kokonaisalue ja $\rho : R \to \Gamma \subset \mathbf{N}^m$ sen järjestysfunktio. Olkoon M matriisi, jonka pystyrivit ovat $\rho(x_1), \ldots, \rho(x_n)$, ja $\mathcal{G}$ ideaalin I redusoitu Gröbnerin kanta järjestyksen $<_{M,\tau}$ suhteen, missä $<_\tau$ on jokin polynomirenkaan termijärjestys. Tällöin $\mathcal{G}$ koostuu muotoa*

$$x^s + c_{s+t}x^t + \sum_{x^u \in \Delta(I), \rho(x^s) \succ \rho(x^u)} c_u x^u$$

olevista polynomeista, missä $x^s \in \sigma(I)$, $x^t \in \Delta(I)$, $\rho(x^s) = \rho(x^t)$ ja $c_{s,t} \neq 0$.

Todistus. Olkoon $x^s \in \sigma(I)$. Koska R on järjestysfunktiollinen kokonaisalue, löydetään $x^t \in \Delta(I)$ siten, että $\rho(x^s) = \rho(x^t)$. Päättelemällä samoin kuten lemmassa 3.2.1, löydetään polynomi

$$f_s := x^s - c_{s,t}x^t - \sum c_i x^{u_i} \in I,$$

missä $c_{s,t} \neq 0$ ja $x^t <_\tau x^s$. Nähdään, että $\mathrm{LM}(f_s) = x^s$. Koska $\sigma(I)$ on minimaalinen virittäjäjoukko ja $\mathcal{G}$ on redusoitu, on välttämättä oltava

$$\mathcal{G} = \{f_s\}_{s\in\sigma(I)}.$$

□

Esimerkki 3.2.5. Olkoon $R = k[x,y]/I$, missä I on polynomin

$$p = x^a + y^b + G$$

generoima ideaali. Oletetaan, että f toteuttaa seuraavat ehdot:

(i) Lukujen a ja b suurin yhteinen tekijä on 1.

(ii) Polynomille G on voimassa $\mathrm{w}_M(G) < ab$, missä M on matriisi (b,a).

Tällöin R on järjestysfunktiollinen kokonaisalue, ja painofunktio ρ toteuttaa $\rho(x) = \rho(y) = ab$. Todistetaan väite käyttämällä lausetta 3.2.2: Valitaan lauseen matriisiksi M ja olkoon $\prec$ jokin renkaan $k[x,y]$ monomijärjestys. Lauseen ehto (i) toteutuu, koska $\mathrm{w}_M(x^a) = \mathrm{w}_M(y^b) = ab$ ja oletuksen mukaan $\mathrm{w}_M(G) < ab$. Riittää siis osoittaa, että funktion w_M rajoittuma joukkoon $\Delta(I)$ on injektiivinen. Nyt

$$\Delta(I) = \{x^iy^j | 0 \leq i < a,\ 0 \leq j < b\}.$$

Jos w_M ei ole injektiivinen joukossa $\Delta(I)$, niin löydetään kaksi eri monomia, joilla w_M saa saman arvon. Tämä tarkoittaa sitä, että löydetään luvut s ja t siten, että $|s| < a$, $|t| < b$ ja $tb + as = 0$. Tämä on kuitenkin mahdotonta, koska oletuksen mukaan $(a,b) = 1$. Lauseen 3.2.2 mukaan R on järjestysfunktiollinen kokonaisalue, jonka painofunktiona on w_M. Erityisesti tästä seuraa se, että polynomi p on absoluuttisesti jaoton.

3.3 Valuaatiot ja liput

Siirrytään seuraavaksi tarkastelemaan variston määrittämiä järjestysfunktioita. Tietyissä tapauksissa variston alkudivisori määrittää alivariston koordinaattirenkaassa järjestysfunktion, kuten seuraavassa lauseessa nähdään. Kuitenkin yleisesti ottaen alkudivisorin määräämä suodatus ei ole tarpeeksi hieno järjestysfunktion määrittelemiseksi. Tarkempia suodatuksia saadaan kun alivariston asemasta tarkastellaankin useampaa aliavaristoa, jotka muodostavat laskevan jonon, niin sanotun lipun.

Algebrallinen k-varisto on äärellistyyppinen, separoituva ja kokonainen skeema yli kunnan k.

Lause 3.3.1. *Olkoon $X = \operatorname{Spec} R$ affiini $\mathbf{F}_q$-varisto ja $\mathcal{X}$ sen projektiivinen sulkeuma. Olkoon H_0 redusoitu skeema joka on $\mathcal{X}$:n ja äärettymyydessä olevan hypertason leikkaus. Oletetaan, että H_0 on jaoton divisori varistolla $\mathcal{X}$ ja ν jokin kunnan $K(\mathcal{X})$ valuaatio, joka toteuttaa seuraavat ehdot:*

(i) $\operatorname{rat.rank}(\nu) = \dim \mathcal{X}$,

(ii) *ν on keskittynyt sileään pisteeseen $Q \in H_0 \subset \mathcal{X}$,*

(iii) *$R \cap S_\nu = \mathbf{F}_q$ ja $S_\nu/\mathfrak{m}_\nu \cong \mathbf{F}_q$, missä S_ν on valuaation ν valuaatiorengas ja $\mathfrak{m}_\nu$ sen maksimaalinen ideaali.*

Tällöin $\rho = -\nu|_R$ on järjestysfunktio renkaassa R.

Todistus. Variston $\mathcal{X}$ funktiokunta on äärellisesti generoitu ja

$$\operatorname{rat.rank} \nu = \dim \mathcal{X},$$

joten Abhyankarin lemmasta seuraa, että valuaation ν arvoryhmä Λ on diskreetti, eli $\Lambda \cong (\mathbb{Z}^d, +)_{lex}$. Ehdoista nähdään, että ν on $\mathbf{F}_q$-komplementaarinen valuaatio, joten riittää osoittaa, että monoidi $\Gamma = -\nu(R)$ on hyvinjärjestetty. Koska Γ sisältyy valuaatioryhmän Λ ei-negatiivisten alkioiden joukkoon ja ρ on valuaation rajoittuma, väite seuraa lemmasta 2.3.9, kunhan ensin todistetaan, että Γ on äärellisesti generoitu. Monoidi Γ on äärellisesti generoitu, sillä Noetherin normalisointilauseen (Matsumura [Mat89], sivu 262) perusteella löydetään algebrallisesti riippumattomat alkiot $z_1, \ldots, z_d \in R$ siten, että R on äärellisesti generoitu moduli yli polynomirenkaan $k[z_1, \ldots, z_n]$. Tästä nähdään, että monoidin Γ generoivat alkiot $\rho(z_i)$ ja äärellisen monen renkaan R alkion arvot. □

Edellisen lauseen ehdot (i) ja (ii) eivät riitä takaamaan järjestysfunktion olemassaoloa. Seuraavan vastaesimerkin on löytänyt John Little:

Esimerkki 3.3.2. Käytetään samoja merkintöjä kuin edellisessä lauseessa. Merkitään $\mathcal{X} = \operatorname{Proj} k[X, Y, Z]$. Valitaan affiiniksi varistoksi $\mathcal{Y} = \mathrm{D}_+(Z)$, jolloin lokaaleiksi koordinaateiksi saadaan $x = X/Z$ ja $y = Y/Z$. Affiinin variston $\mathcal{Y}$ koordinaattirengas on $R = k[x, y]$. Äärettömyydessä olevan hypertason muodostaa taso $Z = 0$. Valitaan tasolta pisteeksi $Q = (1 : 0 : 0)$. Piste Q sisältyy affiiniin tasoon $\mathrm{D}_+(X)$. Merkitään $S = k[u, v]$, missä $u = Y/X$ ja $v = Z/X$. Nähdään, että pisteen Q lokaali rengas on $S_Q = k[u, v]_{(u,v)}$. Määritellään kuvaus ν siten, että $\nu(v) = 1$ ja $\nu(u) = \sqrt{2}$. Kuvaus ν voidaan laajentaa polynomirenkaalle S määrittelemällä polynomin $f = \sum a_{ij} u^i v^j$ kuvaksi

$$\nu(f) = \min\{j + i\sqrt{2} | a_{ij} \neq 0\}.$$

Kuvaus ν toteuttaa polynomeilla valuaation määritelmän ehdot, joten se voidaan laajentaa yksikäsitteisesti polynomirenkaan $k[u,v]$ osamääräkunnan $K = k(u,v)$ valuaatioksi määrittelemällä $\nu(\frac{f}{g}) = \nu(f) - \nu(g)$, kun $f, g \in S$ ja $g \neq 0$ (Matsumura [Mat89], sivu 78). Käytetään tästä laajennuksesta samaa merkintää ν. Valuaation ν arvoryhmä on reaalilukujen osajoukko $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$, joten $\operatorname{rank}\nu = 1$. Koska 1 ja $\sqrt{2}$ ovat rationaalisesti riippumattomat, $\operatorname{rat.rank}\nu = 2$. Abhyankarin lemmasta nähdään, että $\dim\nu = 0$. Valuaation valuaatiorengas sisältää polynomirenkaan S ja ν on positiivinen ideaalilla (u,v), joten valuaatiorengas dominoi rengasta S_Q. Tästä seuraa, että valuaatio toteuttaa edellisen lauseen ehdot (i) ja (ii).

Nyt kuitenkin

$$\nu(y) = \nu(u) - \nu(v) = \sqrt{2} - 1 > 0,$$

joten valuaation rajoittuma renkaaseen R ei ole negatiivinen. Siis valuaation rajoittuma ei voi määrittää järjestysfunktiota renkaassa R.

Olkoon $\mathcal{X}$ projektiivinen $\mathbf{F}_q$-varisto ja merkitään $d = \dim\mathcal{X}$. Oletetaan, että

$$\mathcal{L} : \mathcal{X} = V_0 \supset V_1 \supset \ldots V_d$$

on lippu variston $\mathcal{X}$ $\mathbf{F}_q$-alivaristoja jotka toteuttavat seuraavat ehdot:

(i) Jokainen V_i on jaoton,

(ii) $\dim V_i = d - i$,

(iii) V_i on sileä V_{i+1}:n geneerisessä pisteessä.

Määritelmästä seuraa, että jokainen V_{i+1} on variston V_i jaoton divisori. Täten V_{i+1} määrittää diskreetin, astetta 1 olevan valuaation ν_{i+1} kunnassa $K(V_i)$ (Hartshorne [Har97], pykälä II.6) ja jokaisella rationaalifunktiolla $g \in K(V_i)$ on hyvinmääritelty kertaluku $\nu_{i+1}(g)$.

Lause 3.3.3. *Yllä olevat ehdot täyttävä lippu $\mathcal{L}$ määrittää kunnan $K(\mathcal{X})$ diskreetin valuaation ν, jolla* $\operatorname{rank}(\nu) = \operatorname{rat.rank}(\nu) = d$.

Todistus. Alivaristo V_d on piste dimensiota 1 olevassa varistossa V_{d-1}. Olkoon ν_d sen määrittämä diskreetti, astetta 1 oleva valuaatio kunnassa $K(V_{d-1})$. Vastaavasti alivaristo V_{d-1} määrittää diskreetin, astetta 1 olevan valuaation ν_{d-1} kunnassa $K(V_{d-2})$. Olkoon g_{d-1} sen lokaali parametri. Käyttämällä lemmaa 2.2.19 ja sitä seuraavaa esimerkkiä, muodostetaan yhdistetty valuaatio

$$\nu' = \nu_{d-1} \circ \nu_d,$$

jonka arvoryhmä on $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ lex-järjestyksellä varustettuna ja joka kuvaa kunnan $K(V_{d-2})$ nollasta eroavan alkion g ryhmän $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ alkiolle

$$(a, \nu_d(gg_{d-1}^{-a})),$$

missä $a = \nu_{d-1}(g)$. Oletetaan nyt, että diskreetti, astetta $d-k$ oleva valuaatio ν'_{k-1} on määritelty kunnassa $K(V_k)$, missä $k > 0$. Osoitetaan, että tällöin voidaan konstruoida kunnan $K(V_{k-1})$ diskreetti valuaatio ν_k: Variston V_{k-1} alivaristo V_k määrittää kunnan $K(V_{k-1})$ diskreetin astetta 1 olevan valuaation ν_k. Määritellään yhdistetty valuaatio

$$\nu'_k = \nu_k \circ \nu'_{k-1}.$$

Lemmasta 2.2.19 seuraa, että valuaation ν'_k arvoryhmä on $\mathbb{Z}^{d-(k-1)}$ ja sen aste on $d-(k-1)$, joten ν'_k on diskreetti. Tästä seuraa, että lippu $\mathcal{L}$ määrittää kunnan $K(\mathcal{X})$ diskreetin, astetta d olevan valuaation. Yllä olevan konstruktion avulla saatu yhdistetty valuaatio voidaan esittää seuraavasti: Oletetaan, että on valittu valuaation ν_i lokaali parametri $g_i \in K(V_{i-1})$, $i = 1, \ldots, d-1$. Olkoon $f \in K(\mathcal{X}) = K(V_0)$. Määritellään jono

$$\begin{aligned}
&\nu_1(f) = n_1 \\
&\nu_2((f/g_1^{n_1})|_{V_1}) = n_2 \\
&\vdots \\
&\nu_d(f/(g_1^{n_1} \cdots g_{d-1}^{n_{d-1}})|_{V_d}) = n_d.
\end{aligned}$$

Yhdistetty valuaatio ν on siis kuvaus

$$\nu : K(\mathcal{X})^* \to \mathbb{Z}^d,$$

$$f \mapsto (n_1, \ldots n_d),$$

missä ryhmä $\mathbb{Z}^d$ on järjestetty *lex*-järjestyksen mukaan. Lemmasta 2.2.11 seuraa, että valuaation ν rationaalinen aste on d.

□

Esimerkki 3.3.4. Määritellään lippu

$$\mathbb{P}^n \supset V_+(Y_0) \supset V_+(Y_0, Y_1) \supset \cdots \supset V_+(Y_0, \ldots, Y_{n-1}).$$

Rajoitutaan affiiniin avoimeen joukkoon $D_+(Y_n)$ ja merkitään $y_i = \frac{Y_i}{Y_n}$, missä $i = 0, \ldots, n-1$. Valuaation ν_1 valuaatiorengas on $k[y_0, \ldots, y_{n-1}]_{(y_0)}$ kunnassa $k(y_0, \ldots, y_{n-1})$, joten $\nu_1(y_0) = 1$ ja $\nu_1(y_i) = 0$, kun $i > 0$. Vastaavasti valuaation ν_2 valuaatiorengas on $k[y_1, \ldots, y_{n-1}]_{(y_1)}$ kunnassa $k(y_1, \ldots, y_{n-1})$.

Tällöin $\nu_2(y_1) = 1$, ja $\nu_2(y_i) = 0$ kun $i \neq 1$. Jatkamalla näin saadaan lopulta n valuaatiota $\nu_1, \dots, \nu_n$, joten yhdistetyn valuaation $\nu = \nu_1 \circ \cdots \circ \nu_n$ arvoiksi saadaan

$$\begin{aligned} \nu(y_0) &= (1, 0, \dots, 0) \\ \nu(y_1) &= (0, 1, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \\ \nu(y_{n-1}) &= (0, \dots, 0, 1). \end{aligned}$$

Valuaatio määrittää lex-järjestyksen monomeilla, sillä

$$y_0^{a_0} \cdots y_{n-1}^{a_{n-1}} \geq_{lex} y_0^{b_0} \cdots y_{n-1}^{b_{n-1}}$$

tarkalleen silloin, kun

$$(a_0, \dots, a_{n-1}) \geq_{lex} (b_0, \dots, b_{n-1}).$$

Esimerkki 3.3.5. Olkoon

$$\mathcal{H}_3 = V_+(X_0^{q+1} + X_1^{q+1} + X_2^{q+1} + X_3^{q+1} - X_4^{q+1}) \subset \mathbb{P}^4$$

Hermiten hyperpinta yli äärellisen kunnan $\mathbf{F}_{q^2}$. Valitaan lippu

$$\mathcal{L} : \mathcal{H}_3 \supset V_+(X_0) \cap \mathcal{H}_3 \supset V_+(X_0, X_1) \cap \mathcal{H}_3 \supset V(X_0, X_1, X_3 - \delta X_2) \cap \mathcal{H}_3,$$

missä δ toteuttaa $\delta^{q+1} = -1$. Kunta $\mathbf{F}_{q^2}$ sisältää polynomin $x^{q+1} = -1$ kaikki juuret, sillä se sisältää kaikki $q+1$:nnet ykkösenjuuret. Siirrytään affiiniin avoimeen joukkoon $D_+(X_2)$ ja merkitään $x_i = \frac{X_i}{X_2}$, $i \neq 2$. Olkoon K' hyperpinnan $\mathcal{H}_3$ funktiokunta. Kunnassa K' alkiot x_0, x_1, x_3 ovat algebrallisesti riippumattomia. Tästä nähdään, että K' on kunnan $K = \mathbf{F}_{q^2}(x_0, x_1, x_3)$ äärellinen algebrallinen laajennus, joka on saatu liittämällä kuntaan K alkio x_4, joka toteuttaa yhtälön

$$x_0^{q+1} + x_1^{q+1} + x_3^{q+1} - x_4^{q+1} = 0. \tag{3.3.6}$$

Lippu määrittää valuaatiot ν_1', ν_2' ja ν_3', joiden yhdistetty valuaatio ν' on kunnan K' valuaatio. Lipun rajoittuma affiiniin alivaristoon $\mathbb{A}^3$ antaa lipun, joka määrittää valuaatiot ν_1, ν_2, ν_3, joiden yhdistetty valuaatio ν on kunnan K valuaatio. Valuaatiot ν_1, ν_2, ν_3 ovat valuaatioiden ν_1', ν_2', ν_3' rajoittumat.

Valuaatio ν_1 on kunnan K valuaatio, joka liittyy alivaristoon $V(x_0)$. Tästä seuraa, että valuaation valuaatiorengas sisältää renkaan

$$R_1 = \mathbf{F}_{q^2}[x_0, x_1, x_3]_{(x_0)}.$$

Toisaalta R_1 on dimensiota 1 oleva normaali Noetherin rengas, joten valuaation ν_1 valuaatiorengas on tarkalleen R_1. Tästä nähdään, että $\nu_1(x_0) = 1$ ja $\nu_1(x_i) = 0$, kun $i = 1, 3$. Kunnan K' alkio x_4 toteuttaa yhtälön (3.3.6), joten $\nu_1'(x_4) = 0$. Käyttämällä samoja merkintöjä kuin edellisessä lauseessa, voidaan valita $g_1 = x_0$.

Valuaatio ν_2 on valuaation ν_1 jäännösluokkakunnan $\mathbf{F}_{q^2}(x_1, x_3)$ valuaatio, jonka alivaristo $V(x_1)$ määrittää. Samoin perustein kuin edellä, nähdään, että valuaation ν_2 valuaatiorengas on $R_2 = \mathbf{F}_{q^2}[x_1, x_3]_{(x_1)}$. Tästä seuraa, että $\nu_2(x_1) = 1$ ja $\nu_2(x_3) = 0$. Käyttämällä yhtälöä (3.3.6), huomataan, että $\nu_2'(x_4) = 0$. Valitaan $g_2 = x_1$.

Viimeinen valuaatio ν_3 on jäännösluokkakunnan $K_3 = \mathbf{F}_{q^2}(x_3)$ pisteen $x_3 = \delta$ määrittämä valuaatio. Tämän valuaatiorengas on $\mathbf{F}_{q^2}[x_3]_{(x_3-\delta)}$ ja $\nu_3(x_3 - \delta) = 1$. Valuaatio ν_3' on valuaation ν_3 laajennus kuntaan $K_3' = \mathbf{F}_{q^2}(x_3, x_4)$, missä x_3 ja x_4 toteuttavat yhtälön

$$x_3^{q+1} + 1 - x_4^{q+1} = 0.$$

Kunta K_3' on algebrallinen funktiokunta yli kunnan $\mathbf{F}_{q^2}$. Laskemalla polynomin $p = x^{q+1} + 1 - y^{q+1}$ sarjakehitelmän pisteessä $(\delta, 0)$ nähdään, että x_4 on valuaation ν_3' lokaali parametri, sillä polynomin osittaisderivaatta x:n suhteen pisteessä $(\delta, 0)$ on nollasta eroava. Tästä nähdään, että $\nu_3'(x_4) = 1$ ja

$$\nu_3'(x_3 - \delta) = \nu_3'(x_3^{q+1} + 1) = \nu_3'(x_4^{q+1}) = q + 1.$$

Tästä seuraa, että laajennus on täysin haaroittunut (Stichtenoth [Sti93], määritelmä III.1.5). Koska yhdistetyn valuaation haaroittumisindeksi on valuaatioiden haaroittumisindeksien tulo(Zariski ja Samuel [ZS76] sivu 55), myös laajennus ν' on täysin haaroittunut.

Yhdistetyn valuaation $\nu' = \nu_1' \circ \nu_2' \circ \nu_3'$ arvoiksi saadaan

$$\begin{aligned}
\nu'(x_0) &= (1, 0, 0) \\
\nu'(x_1) &= (0, 1, 0) \\
\nu'(x_3) &= (0, 0, 0) \\
\nu'(x_4) &= (0, 0, 1).
\end{aligned}$$

Merkitään $y_i = \frac{X_i}{X_0}$, missä $i = 1, \dots, 4$. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}
\nu'(y_1) &= \nu'(x_1) - \nu'(x_0) = (-1, 1, 0) \\
\nu'(y_2) &= -\nu'(x_0) = (-1, 0, 0) \\
\nu'(y_3) &= \nu'(x_3) - \nu'(x_0) = (-1, 0, 0) \\
\nu'(y_4) &= \nu'(x_4) - \nu'(x_0) = (-1, 0, 1).
\end{aligned}$$

Kun valitaan

$$R = \mathbf{F}_{q^2}[y_1, y_2, y_3, y_4]/(1 + y_1^{q+1} + y_2^{q+1} + y_3^{q+1} - y_4^{q+1})$$

ja merkitään $\rho = -\nu'_{|R}$, saadaan järjestysfunktio ρ renkaassa R.

Seuraavaksi tarvitsemme räjäytyksen käsitteen: Olkoon X Noetherin skeema ja $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ ideaalilyhde. Olkoon $Y \subset X$ ideaalilyhdettä $\mathcal{I}$ vastaava aliskeema. Skeeman X *räjäytys* (Hartshorne [Har97], pykälä II.7) pitkin aliskeemaa Y on skeema $\tilde{X}$ ja morfismi

$$\Phi : \tilde{X} \to X,$$

jolla $\mathcal{I}\mathcal{O}_Z$ on kääntyvä ja joka toteuttaa seuraavan universaalisuusominaisuuden: Jos $\Psi : Z \to X$ on sellainen morfismi, että $\mathcal{I}\mathcal{O}_Z$ on kääntyvä, niin olemassa yksikäsitteinen morfismi $\psi : Z \to \tilde{X}$ siten, että $\psi\Phi = \Psi$. Merkitään $\tilde{X} = \operatorname{Bl}_Y X$. Alkukuvaa $\Phi^{-1}(Y)$ sanotaan *poikkeusdivisoriksi*. Skeeman X aliskeeman Y' *tarkka muunnos* on alkukuva $\Phi^{-1}(Y' \backslash (Y' \cap Y))$.

Valitaan lippu kuten esimerkissä 3.3.4 ja merkitään

$$V_i = V_+(Y_0, \dots, Y_{n-i}),$$

$i = 1, \dots n-1$. Aloitetaan määrittelemällä uusi skeema X_1 räjäyttämällä $\mathbb{P}^n$ aliskeemassaan V_1. Olkoon $E_1 \subset X_1$ poikkeusdivisori. Olkoot $V_i^{(1)} \subset X_1$ aliskeemojen V_i, $i = 2, \dots n-1$ tarkat muunnokset. Jatketaan räjäyttämällä X_1 aliskeemassaan $V_2^{(1)}$: Merkitään

$$X_2 = \operatorname{Bl}_{V_2^{(1)}} X_1,$$

$E_2 \subset X_2$ poikkeusdivisori ja $E_1^{(2)} \subset X_2$ skeeman E_1 tarkka muunnos. Jatketaan näin n kertaa kunnes $X_n = \operatorname{Bl}_{V_n^{(n-1)}} X_{n-1}$. Tällöin saadaan jono skeemoja $E_1^{(n)}, \dots, E_{n-1}^{(n)}$ ja poikkeusdivisori E_n. Lippu voidaan muodostaa määrittelemällä

$$X_n \supset E_1^{(n)} \supset E_1^{(n)} \cap E_2^{(n)} \supset \cdots \supset E_1^{(n)} \cap \cdots \cap E_{n-1}^{(n)} \cap E_n.$$

Tämä lippu määrittää *grevlex*-järjestyksen polynomirenkaassa. Havainnollistetaan asiaa konkreettisella esimerkillä:

Esimerkki 3.3.7. Käytetään samoja merkintöjä kuin yllä. Valitaan lipuksi

$$\mathbb{P}^3 \supset V(Y_0) \supset V(Y_0, Y_1) \supset V(Y_0, Y_1, Y_2).$$

Merkitään $A = K[Y_0, \ldots, Y_3]$ ja $I = (Y_0, Y_1, Y_2)$. Nyt

$$X_1 = \mathrm{Bl}_{V_1} \mathbb{P}^3 = \mathrm{Proj}\, A[It].$$

Tarkastellaan räjäytyksiä lokaalisti rajoittumalla affiiniin joukkoon $D_+(Y_3)$ ja merkitään $y_i = \frac{Y_i}{Y_3}$, $i = 0, 1, 2$. Joukot $D_+(y_i t)$ muodostavat räjäytyksen X_1 affiinin peitteen. Nyt

$$D_+(y_2 t) = \mathrm{Spec}\, k[y_2, y_0', y_1'], \text{ missä } y_i' = \frac{y_i}{y_2}.$$

Poikkeusdivisorin E_1 lokaaliksi yhtälöksi saadaan y_2. Alivaristojen V_2 ja V_3 tarkat muunnokset ovat $V(y_0', y_1')$ ja $V(y_0')$. Räjäytetään uudelleen, ja samoin kuten yllä saadaan affiinissa palassa

$$D_+(y_1' t) = \mathrm{Spec}\, k[y_2, y_1', y_0''], \text{ missä } y_0'' = \frac{y_0'}{y_1'}.$$

Poikkeusdivisorin E_2 lokaali yhtälö on (y_1') ja tarkan muunnoksen $E_1^{(2)}$ lokaali yhtälö pysyy muuttumattomana, koska sen geneerinen piste on räjäytyskeskuksen ulkopuolella. Viimeinen räjäytys alivaristossa $V_3^{(2)} = V(y_0'')$ on isomorfismi, joten lipuksi saadaan

$$V(y_2) \supset V(y_2, y_1') \supset V(y_2, y_1', y_0'')$$

affiinissa varistossa

$$\mathrm{Spec}\, k[y_2, y_1', y_0''].$$

Tällöin

$$y_0^{a_1} y_1^{a_1} y_2^{a_2} = y_0''^{a_0} y_1'^{a_1+a_2} y_2^{a_0+a_1+a_2}$$

ja on voimassa

$$\nu(y_0^{a_1} y_1^{a_1} y_2^{a_2}) \geq_{lex} \nu(y_0^{b_1} y_1^{b_1} y_2^{b_2})$$

jos vain jos

$$(a_0 + a_1 + a_2, a_0 + a_1, a_0) \geq_{lex} (b_0 + b_1 + b_2, b_0 + b_1, b_0). \tag{3.3.8}$$

Ensimmäisenä verrataan monomien kokonaisastetta $a_1 + a_2 + a_3$ ja $b_1 + b_2 + b_3$. Jos ne ovat yhtäsuuret, niin seuraavaksi vertaillaan onko $a_0 + a_1 \geq b_0 + b_1$. Koska oletuksen mukaan kokonaisasteet on ovat yhtäsuuret, epäyhtälö $a_0 + a_1 \geq b_0 + b_1$ on voimassa tarkalleen silloin, kun $a_2 \leq b_2$. Viimeinen epäyhtälö $a_0 \leq b_0$ on ekvivalentti ehdon $a_1 \leq b_1$ kanssa, sillä $a_0 + a_1 = b_0 + b_1$. Täten epäyhtälö (3.3.8) on ekvivalentti epäyhtälön

$$(a_0, a_1, a_2) \geq_{grl} (b_0, b_1, b_2)$$

kanssa.

Luku 4

Algebrallisen käyrän ja pinnan järjestysfunktioista

Aiemmin on todettu, että valuaatiot ja järjestysfunktiot liittyvät hyvin läheisesti toisiinsa. Siksi onkin järkevää tarkastella seuraavaksi algebrallisista käyristä ja pinnoista saatavia valuaatioita ja järjestysfunktioita. Käyrien tapaus on hyvin yksinkertainen, kuten Matsumoto [Mat99] on osoittanut: Jokainen astetta yksi oleva painofunktio saadaan affiinista käyrästä, jolla on tarkalleen yksi napa äärettömyydessä. Algebrallisten pintojen valuaatiot voidaan jakaa neljään eri tyyppiin valuaation asteesta, rationaalisesta asteesta ja dimensiosta riippuen. Nähdään, että kaikki pinnan valuaatiot eivät määritä järjestysfunktiota.

4.1 Käyrän valuaatiot ja järjestysfunktiot

Palautetaan mieleen muutamia määritelmiä ja perustuloksia algebrallisten käyrien teoriasta. Kaikki seuraavat tulokset löytyvät Henning Stichtenothin kirjan [Sti93] ensimmäisestä luvusta. *Affiini algebrallinen käyrä* $\mathcal{X}$ on polynomirenkaan $k[x_1, \ldots, x_n]$ alkuideaali I, jolla tekijärenkaan $R = k[x_1, \ldots, x_n]/I$ dimensio on yksi. Rengasta R sanotaan käyrän *koordinaattirenkaaksi*. Renkaan R osamääräkunta K on yhden muuttujan algebrallinen funktiokunta yli kunnan k. Tästä seuraa, että voidaan valita $x \in K$ siten, että $K/k(x)$ on äärellinen algebrallinen laajennus.

Funktiokunnan K/k *paikka* on kunnan K/k valuaation maksimaalinen ideaali. Käytetään funktiokunnan K/k kaikkien paikkojen joukosta merkintää $\mathbb{P}_K$. Funktiokunnan paikkojen määrä on ääretön. Kun P paikka, sen valuaatiorengasta merkitään $\mathcal{O}_P$ ja valuaatiota ν_P. Paikan P *aste* on kuntalaajennuksen $(\mathcal{O}_P/P)/k$ aste. Paikkoja, joiden aste on yksi sanotaan *ra-*

tionaalisiksi. Olkoon $P \in \mathbb{P}_K$ ja $f \in K$. Paikka P on funktion f *napa*, jos $\nu_P(z) < 0$. Jos $\nu_P(z) > 0$, paikka P on funktion *nollakohta*. Funktion f *kertaluku* paikassa P on $|\nu_P(f)|$. Jokaisella funktiolla $f \in K \backslash k$ on vähintään yksi nollakohta ja napa. Toisaalta jokaisella alkiolla on vain äärellinen määrä nollakohtia ja napoja. Jos alkiolla f ei ole yhtään nollakohtaa tai yhtään napaa, niin $f \in k$. Sanotaan, että Affiinin käyrällä on *tarkalleen yksi napa P äärettömyydessä*, jos sen koordinaattirenkaan nollasta eroavilla alkioilla ei ole muita napoja kuin P.

Esimerkki 4.1.1. Affiinin suoran koordinaattirengas on polynomirengas $k[x]$. Esimerkissä 2.2.2 on todistettu, että kunnan $k(x)/k$ paikat ovat valuaatio ν_∞, sekä valuaatiot ν_f, missä f on polynomirenkaan $k[x]$ jaoton polynomi. Olkoon $p \in k[x]$. Oletetaan, että polynomilla p on esitys $p_1^{a_1} \cdots p_n^{a_n}$ jaottomien polynomien tulona. Tällöin polynomin nollakohdat ovat polynomeja p_i vastaavat paikat P_i ja kertaluku paikassa P_i on a_i. Polynomin p ainoa napa on valuaatiota ν_∞ vastaava paikka, ja $\nu_\infty(p) = -\deg(p)$. Tästä nähdään, että affiinilla suoralla on tarkalleen yksi napa äärettömyydessä.

Funktiokunnan K/k *divisori* D on summa

$$\sum_{a_P \in \mathbb{P}_K} n_P P,$$

missä $n_P \in \mathbb{Z}$ ja $n_P = 0$ melkein kaikilla P. Erityisesti jokainen $f \in K$ määrittää divisorin

$$(f) = \sum_{P \in \mathbb{P}_K} \nu_P(f) P.$$

Divisoriin D liitetään äärellisulotteinen vektoriavaruus

$$\mathcal{L}(D) = \{f \in K | (f) \geq -D\} \cup \{0\}.$$

Kun P on paikka, erityisen tärkeä on vektoriavaruus $\mathcal{L}(mP)$, jonka alkiot ovat määritelmän mukaan funktioita, joiden ainoa napa on paikassa P ja navan kertaluku on enintään m. Jos

$$\mathcal{L}(mP) = \mathcal{L}((m-1)P),$$

sanotaan, että m on *aukko*. Muutoin sanotaan, että m on *napaluku*. Napaluvut muodostavat monoidin, sillä jos funktion f navan kertaluku paikassa P on m ja funktion g kertaluku n, niin funktion fg navan kertaluku paikassa P on $m+n$. Tämä seuraa suoraan siitä, että valuaatioille pätee $\nu_P(fg) = \nu_P(f) + \nu_P(g)$. Napalukujen muodostamaa monoidia sanotaan *Weierstrassin puoliryhmäksi.* Weierstrassin puoliryhmä on lähes koko $\mathbb{N}$, sillä aukkojen lukumäärä on äärellinen. Jos g on funktiokunnan K/k *genus*, niin aukkoja on tarkalleen g kappaletta.

Seuraavan lauseen ovat todistaneet Geil ja Pellikaan artikkelissa [GP02]:

Lause 4.1.2. *Olkoon* Γ *hyvinjärjestetty äärellisesti generoitu monoidi ja*

$$\operatorname{rank}\Gamma = r < \infty.$$

Tällöin on olemassa injektiivinen monoidien välinen homomorfismi

$$\varphi : \Gamma \to \mathbb{N}^r.$$

Lisäksi jos

$$\psi : \Gamma \to \mathbb{N}^n$$

on jokin injektiivinen homomorfismi, niin $n \geq r$.

Kun edellistä lausetta sovelletaan äärellisesti generoituun järjestysfunktiolliseen kokonaisalueeseen, saadaan:

Lause 4.1.3. *Olkoon* R *äärellisesti generoitu järjestysfunktiollinen kokonaisalue ja* Γ *sen arvomonoidi. Oletetaan, että* $\operatorname{rank}\Gamma = r$. *Tällöin voidaan määritellä painofunktio* $\rho : R \to \Delta_{-\infty}$, *missä* $\Delta \subset \mathbb{N}^r$.

Olkoon R äärellisesti generoitu järjestysfunktiollinen kokonaisalue ja Γ sen arvomonoidi. Tarkastellaan seuraavaksi tapausta $\operatorname{rank}\Gamma = 1$. Lauseen 4.1.3 perusteella renkaan R järjestysfunktio ρ voidaan ajatella painofunktiona $\rho : R \to \mathbb{N}_{-\infty}$.

Esimerkki 4.1.4. Olkoon K/k yhden muuttujan algebrallinen funktiokunta ja P jokin funktiokunnan rationaalinen paikka. Olkoon $\{\rho_i | i \in \mathbb{N}\}$ paikan P Weierstrassin puoliryhmän alkiot lueteltuna kasvavassa järjestyksessä. Valitaan jokaista $\rho_i \neq 0$ kohti funktio

$$f_i \in \mathcal{L}(\rho_i P) \backslash \mathcal{L}((\rho_i - 1)P).$$

Merkitään

$$R = \cup_{m \geq 1} \mathcal{L}(mP).$$

Olkoon R_λ funktioiden $f_1, \ldots, f_\lambda$ generoima k-vektoriavaruus ja olkoon l kuvaus joukolta $\mathbb{N}^2$ joukolle $\mathbb{N}$, jossa alkio (a, b) kuvautuu alkiolle

$$\min\{\lambda \in \mathbb{N} | f_a f_b \in R_\lambda\}.$$

Todistetaan, että joukko $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ on k-algebran R hyvinkäyttäytyvä kanta: Riittää osoittaa, että l-funktiolle pätee $l(a, b) < l(c, b)$, kun $a < c$. Tämä on selvää, sillä funktion $f_a f_b$ navan kertaluku on $\rho_a + \rho_b$ ja jono $\rho_1, \rho_2, \ldots$ on aidosti kasvava. Tästä seuraa, että k-algebralla R on hyvinkäyttäytyvä kanta, joten R on järjestysfunktiollinen kokonaisalue, jonka arvomonoidina on Weierstrassin puoliryhmä.

Erikoistapaus edellisestä esimerkistä on affiini käyrä $\mathcal{X}$, jolla on tarkalleen yksi napa äärettömyydessä. Tällöin, käyttäen edellisen esimerkin merkintöjä, rengas R on käyrän $\mathcal{X}$ koordinaattirengas. Tässä pykälässä todistetaan, että jokainen astetta yksi oleva järjestysfunktiollinen kokonaisalue R, jolla on astetta yksi oleva painofunktio, voidaan ajatella affiinin käyrän koordinaattirenkaana, jolla on tarkalleen yksi napa äärettömyydessä.

Lause 4.1.5. *Olkoon R järjestysfunktiollinen kokonaisalue ja*

$$\rho : R \to \Gamma_{-\infty} \subset \mathbb{N}_{-\infty}$$

sen painofunktio. Kokonaisalueen R osamääräkunta K on yhden muuttujan algebrallinen funktiokunta.

Todistus. Olkoon $f \in R$ alkio, joka ei ole yksikkö. Koska $\dim_k R/(f) = \rho(f)$ lauseen 2.3.11 mukaan, renkaan $R/(f)$ Krullin dimensio on 0 (Atiyah [AM69], theorem 8.5). Täten renkaan R dimensio on 1 (Eisenbud [Eis95], Corollary 13.11), ja siis $\operatorname{trdeg} K/k = 1$. Rengas R on äärellisesti generoitu yli kunnan k, joten K/k on äärellisesti generoitu kuntalaajennus, siis algebrallinen funktiokunta. □

Lause 4.1.6. *Olkoon R äärellisesti generoitu k-algebra ja kokonaisalue. Olkoon $\overline{R}$ renkaan R kokonainen sulkeuma renkaan R osamääräkunnassa K. Oletetaan, että renkaan R Krullin dimensio on yksi. Tällöin $\overline{R}/R$ on äärellisulotteinen k-vektoriavaruus.*

Todistus. Tiedetään, että $\overline{R}$ on äärellisesti generoitu R-moduli (Matsumura [Mat89], s. 262). Tästä seuraa, että $\overline{R}$ on myös äärellisesti generoitu k-algebra. Koska $\overline{R}$ on algebran R kokonainen sulkeuma, näiden Krullin dimensiot ovat yhtäsuuret. Olkoon A $\overline{R}$-modulin $\overline{R}/R$ annihilaattori, eli A on niiden alkioiden $x \in \overline{R}$ joukko, jotka toteuttavat ehdon $x\overline{R} \subset R$. Koska $\overline{R}$ on äärellisesti generoitu ja sisältyy renkaan R osamääräkuntaan K, ideaali A on nollasta eroava. Tästä seuraa, että renkaan $\overline{R}/A$ Krullin dimensio on nolla. Koska lisäksi $\overline{R}/A$ on äärellisesti generoitu k-algebra, rengas $\overline{R}/A$ on äärellisesti generoitu k-moduli. Täten myös äärellisesti generoitu $\overline{R}/A$-moduli $\overline{R}/R$ äärellisesti generoitu k-moduli, eli välttämättä äärellisulotteinen k-vektoriavaruus. □

Lause 4.1.7. *Olkoon k-algebra R järjestysfunktiollinen kokonaisalue, K sen osamääräkunta ja*

$$\rho : R \to \Gamma_{-\infty} \subset \mathbb{N}_{-\infty}$$

painofunktio. Tällöin löydetään affiini käyrä $\mathcal{X}$, jonka koordinaattirengas on R ja funktiokunta K/k. Lisäksi käyrällä on tarkalleen yksi napa Q äärettömyydessä ja $\rho(x) = -\nu_Q(x)$ kaikilla $x \in R$.

Todistus. Tiedetään, että painofunktiosta ρ saadaan diskreetti valuaatio ν kunnassa K määrittelemällä $\nu(\frac{f}{g}) = \rho(g) - \rho(f)$ kaikilla $f, g \in R$, $g \neq 0$. Olkoon Q vastaava rationaalinen paikka kunnassa K/k.

Kokonaisalueen R kokonainen sulkeuma $\overline{R}$ on $\cap_P \mathcal{O}_P$, missä leikkaus otetaan niiden paikkojen P yli, joilla $R \subset \mathcal{O}_P$ (Stichtenoth [Sti93], theorem III.2.6). Käytetään tästä joukosta merkintää $S(R)$. Koska jokaisella alkiolla joka ei ole algebrallinen yli kunnan k on vähintään yksi napa, joukko $S(R)$ on joukon $\mathbb{P}_K$ aito osajoukko.

Olkoon $\mathcal{X}$ affiini käyrä, jonka koordinaattirengas on R. On osoitettava, että käyrällä $\mathcal{X}$ on tarkalleen yksi napa Q äärettömyydessä, toisin sanoen $S(R) = \mathbb{P}_K \backslash \{Q\}$. Tehdään vastaoletus, että on olemassa paikka $T \in \mathbb{P}_K \backslash \{S(R) \cup \{Q\}\}$. Käyttämällä valuaatioiden approksimointilausetta (Stichenoth [Sti93], theorem I.6.4) löydetään $x_i \in K$, $i = 1, 2, \ldots$ siten, että $\nu_Q(x_i) = i$ ja $\nu_P(x_i) \geq 0$ kaikilla $P \in \mathbb{P}_K \backslash \{T\}$. Koska $\nu_P(x_i) \geq 0$ kaikilla $P \in S(R)$, on voimassa $\{x_i\} \subset \overline{R}$. Alkiot $x_1, x_2, \ldots$ ovat lineaarisesti riippumattomia, sillä $\nu_Q(x_i) \neq \nu_Q(x_j)$ kun $i \neq j$. Näytetään, että tämä johtaa ristiriitaan.

Merkitään

$$W = \{x \in \overline{R} | \nu_Q(x) > 0\}.$$

Lauseen 4.1.6 perusteella $\dim_k \overline{R}/R < \infty$, ja $W \cap R = \{0\}$, joten $\dim_k W < \infty$. Toisaalta $\{x_i\}_{i \geq 1} \subset W$, mutta tämä on mahdotonta, sillä alkiot x_i, $i = 1, 2, \ldots$ ovat lineaarisesti riippumattomia. Oletus $S(R) \subsetneq \mathbb{P}_K \backslash \{Q\}$ johtaa siis ristiriitaan, joten affiinilla käyrällä $\mathcal{X}$ on tarkalleen yksi napa äärettömyydessä. $\square$

Esimerkki 4.1.8. Olkoon $\mathcal{H}$ yhtälön

$$F(X, Y, Z) = X^{q+1} - Y^q Z - Y Z^q = 0$$

määräämä projektiivinen käyrä yli äärellisen kunnan $\mathbf{F}_{q^2}$ ja K sen funktiokunta. Tällaista käyrää kutsutaan *Hermiten käyräksi.* Tarkastelemalla osittaisderivaattoja nähdään välittömästi, että käyrä on sileä. Valitaan piste $Q = (0 : 1 : 0)$ käyrältä ja siirrytään sen affiiniin ympäristöön $D_+(Y)$.

Tällöin käyrän yhtälö saadaan muotoon

$$f(x_1, z_1) = x_1^{q+1} - z_1^q - z_1,$$

missä

$$x_1 = \frac{X}{Y} \text{ ja } z_1 = \frac{Z}{Y}.$$

Nyt $f_{x_1}(Q) = 0$ mutta $f_{z_1}(Q) \neq 0$, joten muodostamalla sarjakehitelmä pisteessä Q nähdään, että x_1 on pisteen Q määräämän valuaation ν_Q lokaali parametri, sillä sarjakehitelmän avulla z_1 voidaan lausua muodossa $a x_1^d$, missä

a on yksikkö. Lisäksi

$$\nu_Q(z_1) = \nu_Q\left(\frac{x_1^{q+1}}{z_1^{q-1} - 1}\right) = q + 1.$$

Merkitään

$$x = \frac{x_1}{z_1} \text{ ja } y = \frac{1}{z_1}.$$

Tästä seuraa, että $\nu_Q(x) = -q$ ja $\nu_Q(y) = -(q+1)$. Lisäksi piste Q on alkioiden x ja y ainoa napa, sillä Q on ainoa äärettömyyspiste affiinissa (x, y)-tasossa.

Merkitään

$$R = \cup_{m \geq 0} \mathcal{L}(mQ) = \mathbf{F}_{q^2}[x, y]/(x^{q+1} - y^q - y).$$

Valitaan $\rho = -\nu_Q$, jolloin saadaan painofunktio

$$\rho : R \to \Gamma_{-\infty},$$

missä $\Gamma \subset \mathbb{N}$ on alkioiden q ja $q+1$ generoima monoidi.

4.2 Algebrallisen pinnan valuaatiot ja järjestysfunktiot

Edellisessä pykälässä nähtiin, että painofunktioiden ja algebrallisten käyrien välinen vastaavuus tunnetaan tarkasti. Seuraava tapaus, eli algebralliset pinnat ovat huomattavasti monimutkaisempi tapaus johtuen osaksi siitä, että varisto voidaan räjäyttää alivaristossaan.

Seuraavaksi tarkastellaan valuaatioita transkendenttisuusastetta 2 olevassa funktiokunnassa. Olkoon K äärellisesti generoitu kunta yli kunnan k, jolla $\operatorname{trdeg}(K/k) = 2$. Lauseen 2.2.17 mukaan kunnan K valuaatiot voidaan luokitella asteen, rationaalisen asteen ja dimension avulla. Olkoon ν kunnan K valuaatio, joka on triviaali kunnalla k ja Γ sen arvoryhmä. Seurataan Michel Vaquién artikkelin [Vaq] pykälän 3.2 esitystä. Koska $\operatorname{trdeg}(K/k) = 2$, valuaation ν dimensio on joko 1 tai 0. Käyttämällä lausetta 2.2.17 nähdään, että valuaatio ν on jokin neljästä vaihtoehdosta:

(i) $\operatorname{rank}(\nu) = \operatorname{rat.rank}(\nu) = 1$, $\dim(\nu) = 1$

(ii) $\operatorname{rank}(\nu) = \operatorname{rat.rank}(\nu) = 2$, $\dim(\nu) = 0$

(iii) $\operatorname{rank}(\nu) = \operatorname{rat.rank}(\nu) = 1$, $\dim(\nu) = 0$

(iv) $\operatorname{rank}(\nu) = 1$, $\operatorname{rat.rank}(\nu) = 2$, $\dim(\nu) = 0$.

Tarkastellaan näitä tapauksia lähemmin. Seuraavassa tarvittavat tulokset alkuideaalin korkeudesta ja renkaan dimensiosta on esitetty Matsumuran kirjan [Mat89] pykälässä 3.5. Yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan, että kunta k on algebrallisesti suljettu. Tapauksessa (i)

$$\operatorname{rank}(\nu) = \dim(\nu) = \operatorname{trdeg}(K/k),$$

joten Abhyankarin lemmasta seuraa, että valuaation ν arvoryhmä Γ on isomorfinen ryhmän $\mathbb{Z}$ kanssa ja valuaation jäännösluokkakunta on kunnan k äärellisesti generoitu transkendenttinen laajennus. Olkoon V valuaation ν valuaatiorengas ja $\mathfrak{m}$ sen maksimaalinen ideaali. Valitaan edustaja $x \in K$ siten, että valuaation jäännösluokkakunta on kunnan $k(x)$ äärellinen algebrallinen laajennus. Valitaan lisäksi $y \in K$ siten, että K on kunnan $k(x, y)$ äärellinen algebrallinen laajennus. Näin voidaan tehdä, sillä oletimme, että K on kunnan k äärellisesti generoitu laajennus. Korvaamalla alkiot tarvittaessa käänteisalkioilla, voidaan olettaa, että $\nu(x), \nu(y) \geq 0$. Merkitään $R' = k[x, y]$ ja olkoon R renkaan R' kokonainen sulkeuma kunnassa K. Olkoon $\mathfrak{p} = R \cap \mathfrak{m}$, $\mathfrak{p}' = R' \cap \mathfrak{m}$ ja ν' valuaation ν rajoittuma kuntaan $k(x, y)$. Koska $K/k(x, y)$ on äärellinen algebrallinen laajennus, Abhyankarin lemman kohdasta (a) nähdään, että $\dim(\nu) = \dim(\nu')$. Toisaalta alkion x kuva kunnassa $V/\mathfrak{m}$ on transkendenttinen yli kunnan k, joten sen kuva renkaassa $R'/\mathfrak{p}'$ on myös transkendenttinen yli kunnan k. Siis renkaan $R'/\mathfrak{p}'$ osamääräkunta on transkendenttisuusastetta 1 yli kunnan k. Koska R' on äärellisesti generoitu k-algebra, tästä seuraa, että $\operatorname{ht} \mathfrak{p}' = 1$ (Matsumura [Mat89], theorem 5.6). Rengas R on renkaan R' kokonainen sulkeuma ja $\mathfrak{p}' = R' \cap \mathfrak{p}$, mistä seuraa, että $\operatorname{ht} \mathfrak{p} = 1$. Täten rengas $R_{\mathfrak{p}}$ on kokonaisesti suljettu ja sen dimensio on 1, joten $R_{\mathfrak{p}}$ on diskreetti valuaatiorengas (Matsumura [Mat89], theorem 11.2). Toisaalta valuaatiorengas V dominoi rengasta $R_{\mathfrak{p}}$, ja diskreetti valuaatiorengas on maksimaalinen rengas dominoinnin suhteen, mistä seuraa yhtäsuuruus $R_{\mathfrak{p}} = V$.

Tapauksessa (ii) $\operatorname{rank}(\nu) = 2 > 1$, joten lemman 2.2.6 mukaan voidaan valita korkeutta 1 oleva alkuideaali $\mathfrak{p}$ valuaation ν valuaatiorenkaasta R. Muodostetaan uusi valuaatio ν', jonka valuaatiorengas on $R_{\mathfrak{p}}$. Koska

$$\operatorname{rank}(\nu') = \operatorname{rat.rank}(\nu') = 1$$

ja rengas $R/\mathfrak{p}$ on valuaation ν' jäännösluokkakunnan k' ei-triviaali valuaatiorengas, on oltava $\dim(\nu') = 1$. Yhtäsuuruus

$$\operatorname{rank}(\nu') + \dim(\nu') = \operatorname{trdeg}(K/k)$$

on siis voimassa, joten Abhyankarin lemmasta seuraa, että ν' diskreetti valuaatio. Valuaatio ν' on siis tyyppiä (i) oleva valuaatio. Lemman 2.2.19 mukaan valuaatio ν voidaan esittää yhdistettynä valuaationa: Olkoon t valuaation ν' lokaali parametri. Koska k'/k on transkendenttinen laajennus, löydetään kunnan k' valuaatio $\overline{\nu}$, joka vastaa valuaatiorengasta $R/\mathfrak{p}$. Valuaatio ν on valuaatioiden ν' ja $\overline{\nu}$ yhdistetty valuaatio ja

$$\nu(x) = (\nu'(x), \overline{\nu}(xt^{-\nu'(x)}).$$

Tarkastellaan seuraavaksi tyyppiä (iii) olevia valuaatioita. Edellisissä tapauksissa valuaation arvoryhmä on ollut diskreetti, mutta nyt sellaista rajoitusta ei ole. Oletetaan ensin, että valuaatio ν on diskreetti. Koska $\operatorname{rank}(\nu) = 1$, voidaan olettaa, että $\Gamma = \mathbb{Z}$. Olkoon R valuaatiorengas ja $\mathfrak{p}$ sen maksimaalinen ideaali. Oletuksen mukaan kunta k on algebrallisesti suljettu ja valuaation ν jäännösluokkakunta on kunnan k algebrallinen laajennus, joten valuaation jäännösluokkakunta on tarkalleen k. Osoitetaan, että K voidaan upottaa k-kertoimisten Laurentin sarjojen kuntaan $k((t))$ siten, että valuaatio ν on kunnan $k((t))$ valuaation ν' rajoittuma, missä ν' on valuaatio, joka saa kunnan $k((t))$ alkiolla $\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i t^i$ arvon $\min\{i \in \mathbb{Z} | a_i \neq 0\}$.

Valitaan alkio $t \in K$ siten, että $\nu(t) = 1$. Jos $u \in K$ ja $\nu(u) = i_1 \in \mathbb{Z}$, niin löydetään $a_1 \in k$, siten, että joko $u - a_1 t^{i_1} = 0$ tai

$$\nu(u - a_1 t^{i_1}) = i_2 > i_1.$$

Jälkimmäisessä tapauksessa voidaan valita $a_2 \in k$ siten, että

$$\nu((u - a_1 t^{i_1}) - a_2 t^{i_2}) > i_2.$$

Jatkamalla näin alkiolle u saadaan sarjaesitys

$$u = a_1 t^{i_1} + a_2 t^{i_2} + \dots$$

ja tästä nähdään, että K voidaan upottaa kuntaan $k((t))$. Jokaisen alkion u sarjakehitelmän pienin nollasta eroava termi on astetta $\nu(u)$, joten ν on valuaation ν' rajoittuma.

Oletetaan seuraavaksi, että valuaation arvoryhmä Γ ei ole diskreetti. Koska $\operatorname{rank}(\Gamma) = 1$, voidaan olettaa, että $\Gamma \subset \mathbb{R}$ (Zariski ja Samuel [ZS76], sivu 45). Ehdosta $\operatorname{rat.rank}(\nu) = 1$ seuraa, että mitkä tahansa kaksi ryhmän Γ alkiota ovat rationaalisesti riippuvia. Jos $\tau \in \Gamma$ on irrationaalinen, niin jokaiselle $\alpha \in \Gamma$, missä $\alpha \neq 0$, löydetään kokonaisluvut $a, b \in \mathbb{Z}$ siten, että $\alpha = \frac{a}{b}\tau$. Tämän perusteella voidaan olettaa, että $\mathbb{Z} \subset \Gamma \subset \mathbb{Q}$. Koska Γ ei ole diskreetti, ryhmässä Γ ei ole pienintä nollasta eroavaa alkiota, joten Γ:n alkioiden ovat nimittäjät eivät ole rajoitettuja.

Voidaan olettaa, että ryhmän Γ alkiot on esitetty muodossa $\frac{m}{n}$, missä $(m,n)=1$. Lisäksi oletetaan, että $1 \in \Gamma$. Ryhmän Γ alkioiden nimittäjissä esiintyvät alkuluvut voidaan jakaa kahteen luokkaan sen mukaan, ovatko niiden eksponentit rajoitetut: Merkitään P:llä niiden alkulukujen joukko joiden eksponentit alkioiden nimittäjissä ovat rajoitetut, ja olkoon Q muiden nimittäjissä olevien alkulukujen joukko. Jokaista $p \in P$ kohti löydetään luku α_p siten, että p^{α_p} esiintyy jonkin Γ:n alkion nimittäjässä, mutta p^n ei esiinny millään $n > \alpha_p$. Osoitetaan, että ryhmän Γ alkiot ovat tarkalleen ne rationaaliluvut, joiden nimittäjät ovat muotoa

$$p_1^{a_1} \dots p_m^{a_m} \dots q_1^{b_1} \dots q_n^{b_n},$$

missä $a_i \leq \alpha_{p_i}$ ja $q_i, n, m \in \mathbb{N}$ kaikilla i. Jos $\frac{m}{n} \in \Gamma$, niin löydetään $a, b \in \mathbb{Z}$ siten, että $am + bn = 1$. Tästä seuraa, että

$$\frac{1}{n} = b + \frac{am}{n} \in \Gamma.$$

Olkoot nyt $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2} \in \Gamma$ ja oletetaan, että $(n_1, n_2) = 1$. Tästä nähdään, että myös

$$(m_1n_2 + m_2n_1, n_1n_2) = 1,$$

joten summa

$$\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1n_2 + m_2n_1}{n_1n_2} \in \Gamma$$

ja siis myös $\frac{1}{n_1n_2} \in \Gamma$. Yhdistämällä nämä kaksi tulosta väite nähdään oikeaksi.

Viimeiseksi tarkastellaan tyyppiä (iv) olevaa valuaatiota. Käytetään samoja merkintöjä kuten aiemmin: Olkoon ν valuaatio ja Γ sen arvoryhmä. Koska $\operatorname{rank}(\nu) = 1$, ryhmä Γ voidaan upottaa additiivisten reaalilukujen ryhmään (Zariski ja Samuel [ZS76], s. 45). Voidaan siis olettaa, että $\Gamma \subset \mathbb{R}$. Koska $\operatorname{rat.rank}(\nu) = 2$, joukossa Γ on on kaksi rationaalisesti riippumatonta lukua. Valitaan jokin irrationaalinen luku $\alpha > 0$ ryhmästä Γ. Valitaan alkiot $x, y \in K$ siten, että $\nu(x) = 1$ ja $\nu(y) = \alpha$. Tästä seuraa, että alkiolle $f = \sum_{i=1}^{n} c_i x^{a_i} y^{b_i}$, missä on $a_i, b_i, n \in \mathbb{N}$ ja $c_i \in k$, on voimassa

$$\nu(f) = \nu(\sum c_i x^{a_i} y^{b_i}) = \min\{a_i + \alpha b_i | c_i \neq 0\},$$

sillä kokonaisluvuilla a, b, c ja d on voimassa $a + \alpha b = c + \alpha d$ tarkalleen silloin, kun $a = b$ ja $c = d$. Tästä nähdään, että x, y ovat algebrallisesti riippumattomia. Kunta K on kunnan $k(x,y)$ algebrallinen laajennus ja lisäksi äärellinen, sillä oletuksen mukaan K/k on äärellisesti generoitu. Olkoon ν' on valuaation ν rajoittuma kuntaan $k(x,y)$ ja Γ' sen arvoryhmä. Ryhmän Γ'

generoivat kaksi rationaalisesti riippumatonta alkiota 1 ja α. Tästä seuraa, että Γ' on vapaa, astetta kaksi oleva Abelin ryhmä. Kuntalaajennus $K/k(x,y)$ on äärellinen, joten $(\Gamma : \Gamma') = n < \infty$ (Zariski ja Samuel [ZS76], sivu 52) ja siis $n\Gamma \subset \Gamma'$. Täten myös $\Gamma \cong n\Gamma$ on astetta kaksi oleva vapaa Abelin ryhmä.

Tarkastellaan lopuksi esimerkkejä valuaatioista. Käy ilmi, että ainoastaan tyyppiä (i) olevat valuaatiot eivät voi tulla järjestysfunktioista. Seurataan O'Sullivanin artikkelin [Osu01] esitystä.

Esimerkki 4.2.1. Olkoon $X = \mathbb{P}^2 = \operatorname{Proj} k[X,Y,Z]$. Valitaan lokaalit koordinaatit $u = X/Z$ ja $v = Y/Z$. Merkitään $S = k[u,v]$. Olkoon S_0 renkaan S lokaali rengas $S_{(u,v)}$. Muodostetaan jono lokaaleja renkaita

$$S_0 \subset S_1 \subset S_2 \subset \cdots ,$$

missä rengas S_i saadaan renkaasta S_{i-1} tekemällä kvadraattinen muunnos. Rengas S_i on siis muotoa

$$S_i = k[u, \frac{v}{u^i}]_{(u,\frac{v}{u^i})}.$$

Lauseen 2.2.23 perusteella renkaiden S_i yhdiste on valuaatiorengas $S_v = \cup S_i$. Tarkastellaan tätä valuaatiota ν lähemmin. Valuaatiolle ν on voimassa $\operatorname{rank}(\nu) > 1$, sillä $\frac{v}{u^i} \in S_v$ kaikilla i, joten $\nu(v) > i\nu(u)$ kaikilla i. Toisaalta valuaation aste on aina enintään valuaation rationaalinen aste, joten

$$\operatorname{rank}(\nu) = \operatorname{rat.rank}(\nu) = 2$$

ja valuaatio ν on siis tyyppiä (ii). Merkitään $x = \frac{1}{v}$ ja $y = \frac{u}{v}$. Määritellään järjestys $\prec$ polynomirenkaan $k[x,y]$ monomien joukossa siten, että

$$x^{a_1}y^{b_1} \prec x^{a_2}y^{b_2} \text{ jos ja vain jos } \nu(x^{a_1}y^{b_1}) > \nu(x^{a_2}y^{b_2}).$$

Nyt $\nu(x) < 0$ ja $\nu(y) < 0$, eli $x \succ 1$ ja $y \succ 1$. Tästä seuraa, että monomit ovat hyvinjärjestetty joukko järjestyksessä $\prec$. Määritelmästä nähdään, että $x^{a_1}y^{b_1} \prec x^{a_2}y^{b_2}$ tarkalleen silloin, kun $\nu(x^a y^b) < 0$, missä $a = a_1 - a_2$ ja $b = b_1 - b_2$. Tämä on ekvivalenttia ehdon

$$0 < \nu\left(\frac{1}{x^a y^b}\right) = \nu\left(\frac{v^{a+b}}{u^b}\right) \tag{4.2.2}$$

kanssa. Tämä pätee aina kun $a + b > 0$. Jos $a + b = 0$, niin on oltava $b < 0$, joten $a > 0$. Tästä nähdään, että järjestys $\prec$ polynomirenkaassa $k[x,y]$ on porrastettu lex-järjestys.

Esimerkki 4.2.3. Olkoon X ja S kuten edellisessä esimerkissä. Valitaan $S_0 = k[u,v]_{(u,v)}$. Muodostetaan jono

$$S_0 \subset S_1 \subset S_2 \subset \dots$$

lokaaleja renkaita, missä $S_i = k[u_i, v_i]_{(u_i,v_i)}$, $u_0 = u$ ja $v_0 = v$, sekä yleisesti

$$u_{i+1} = \frac{v_i + u_i^2}{u_i^2} \text{ ja } v_{i+1} = u_i.$$

Tällöin $v_i = u_i^2(u_{i+1}-1)$, joten lokaali rengas S_{i+1} dominoi rengasta S_i. Tästä seuraa, että rengas $S = \cup S_i$ on lokaali rengas, ja lemman 2.2.1 mukaan löydetään valuaatio ν ja valuaatiorengas S_ν, joka dominoi rengasta S. Valuaatio on määritelty siten, että jokainen $\nu(u_{i+1}) > 0$, eli on oltava $\nu(v_i) = 2\nu(u_i)$ ja siis

$$\nu(u_i) = \frac{\nu(v_i)}{2} = \frac{\nu(u_{i-1})}{2}.$$

Oletetaan, että $\nu(u) = 1$. Tällöin $\nu(u_i) = 2^{-i}$, joten valuaation ν arvoryhmä sisältää lukuja mielivaltaisen läheltä nollaa, eli valuaatio ν on oltava tyyppiä (iii).

Todistetaan, että valuaatio ν määrittää järjestysfunktion ρ polynomirenkaassa $R = k[x,y]$, missä $x = \frac{u}{v}$, $y = \frac{1}{v}$.

Nyt $\nu(x) < 0$ ja $\nu(y) < 0$, josta seuraa, että S_ν on k-komplementaarinen valuaatio renkaan R suhteen. Riittää siis osoittaa, että funktion $\rho = -\nu|_R$ arvomonoidi on hyvinjärjestetty. Merkitään

$$H_r = \{f \in k(u,v) | \nu(f) \geq r\}.$$

Jos pystytään osoittamaan, että

$$R \cap H_{-r} \subset \{f \in R | \deg f \leq 2r\}, \tag{4.2.4}$$

nähdään, että

$$R \cap H_{-r} = \{f \in R | \rho(f) \leq r\}$$

on äärellisulotteinen, joten joukko

$$\{\rho(f) | f \in R \cap H_{-r}\}$$

on äärellinen. Tästä seuraa, että järjestysfunktion arvomonoidissa ei voi olla ääretöntä laskevaa jonoa, eli arvomonoidi on hyvinjärjestetty. Ennen tämän väitteen todistamista tarvitaan muutamia aputuloksia: Osoitetaan ensin, että

$$\nu(g(u_1, v_1)) = \frac{\nu(g(u,v))}{2} \tag{4.2.5}$$

kaikilla kahden muuttujan rationaalifunktioilla g. On selvää, että riittää todistaa väite kun g on polynomi. Jos polynomissa g on tarkalleen yksi monomi $u^a v^b$, jonka arvo valuaatiossa ν on pienempi kuin muiden polynomin g monomien, niin sijoituksessa $u = u_1$, $v = v_1$ tämä ominaisuus säilyy. Riittää siis tarkastella binomeja, joiden monomien arvot valuaatiossa ν ovat yhtäsuuret. Valuaation määrittelystä nähdään, että tällaiset binomit ovat muotoa

$$g(u,v) = v^n + cu^{2n},$$

missä $n \in \mathbb{N}$ ja $c \in k$. Nyt $v = u^2(u_1+1)$, joten

$$g(u,v) = v^n + cu^{2n} = u^{2n}(1+u_1)^n + cu^{2n}$$

ja siis

$$\nu(g(u,v)) = \begin{cases} \nu(u^{2n}) = 2n, & \text{jos } c \neq -1, \\ \nu(u^{2n}u_1) = 2n + \frac{1}{2} = \frac{4n+1}{2} & \text{jos } c = -1. \end{cases}$$

Vastaavasti

$$g(u_1,v_1) = v_1^n + cu_1^{2n} = u_1^{2n}(u_2+1)^n + cu_1^{2n},$$

jolloin

$$\nu(g(u_1,v_1)) = \begin{cases} \nu(u_1^{2n}) = n & \text{jos } c \neq -1, \\ \nu(u_1^{2n}u_2) = \frac{4n+1}{4} & \text{jos } c = -1. \end{cases}$$

Olkoon $f(u,v) = \sum a_{ij}u^i v^j$. Merkitään

$$\deg_u(f) = \min\{i | a_{i0} \neq 0\}.$$

Todistetaan seuraavaksi, että

$$\deg_u(f) \leq d \Longrightarrow \nu(f) \leq \frac{3d}{2} \tag{4.2.6}$$

induktiolla d:n suhteen: Jos $d = 0$, niin polynomilla f on vakiotermi ja siis $\nu(f) = 0$. Olkoon nyt $d > 0$. Kirjoitetaan

$$f(u,v) = \sum f_i(u)v^i,$$

missä polynomin $f_0(u)$ pienintä astetta oleva termi on αu^d. Sijoittamalla polynomin f lausekkeeseen $u_0 = u$, $v = u_0^2(u_1+1)$ ja $f_i(u) = \sum a_{ij}u^j$ saadaan

$$\begin{aligned} f(u,v) &= \sum_{i,j} a_{ij}u_0^{2i+j}(u_1+1)^i \\ &= \sum_r u_0^r \sum_{2i+j=r} a_{ij}(u_1+1)^i = \sum_r u_0^r g_r(u_1)' \end{aligned}$$

missä

$$g_r(u_1) = \sum_{2i+j=r} a_{ij}(u_1+1)^i.$$

Merkitään $m = \min\{r | g_r(u_1) \neq 0\}$. On selvää, että $g_r(u_1)$ on nollasta eroava tarkalleen silloin, kun jokin a_{ij}, missä $2i + j = r$, on nollasta eroava. Koska oletuksen mukaan $\deg_u f = d$, on voimassa $a_{0d} \neq 0$ ja siis $m \leq d$. Kirjoitetaan

$$G(u_1, u_0) = \sum_{r \geq m} u_0^{r-m} g_r(u_1).$$

Tarkastellaan lukua $\deg_{u_1}(G)$. Lukua $\deg_{u_1}(G)$ vastaava termi löytyy polynomista $g_m(u_1)$. Koska $g_m(u_1)$ on ensimmäinen nollasta eroava polynomi ja $2 \deg g_m(u_1) \leq m$, on voimassa

$$\deg_{u_1} u(G) \leq \frac{m}{2} < d.$$

Käyttämällä induktio-oletusta polynomiin G saadaan

$$\nu(G(u,v)) = \frac{3m}{4}$$

ja käyttämällä tulosta (4.2.5) nähdään, että

$$\nu(G(u_1, u_0) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{3m}{4} = \frac{3m}{8}.$$

Sovelletaan tätä tulosta polynomin $f(u,v)$ lausekkeeseen, jolloin saadaan

$$\nu(f(u,v)) = \nu(u_0^m G(u_1, u_0)) \leq \frac{11}{8} m < \frac{3}{2} d.$$

Nyt voidaan viimeinkin todistaa väite (4.2.4): Olkoon polynomin $h(x,y)$ aste d. Tällöin h voidaan lausua muodossa

$$h(x,y) = \sum_{i=0}^{d} h_i(x,y),$$

missä polynomit h_i ovat homogeenisia ja astetta i. Oletuksen mukaan $h_d \neq 0$. Koska $x = \frac{u}{v}$ ja $y = \frac{1}{v}$, voidaan kirjoittaa

$$h(x,y) = v^{-d} \sum_{i=0}^{d} h_i(u,1) v^{d-i}.$$

Koska $h_d \neq 0$,

$$\deg_u \left(\sum_{i=0}^{d} h_i(u,1) v^{d-i} \right) \leq d.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} \nu(h(x,y) &= -\, d\nu(v) + \nu \left(\sum_{i=0}^{d} h_i(u,1) v^{d-1} \right) \\ &\leq -2d + \frac{3d}{2} = -\frac{d}{2}. \end{aligned}$$

Tästä nähdään, että ehdosta $\deg(h(x,y)) > 2r$ seuraa $\nu(h) < -r$.

Esimerkki 4.2.7. Olkoon $X = \mathbb{P}^2 = \operatorname{Proj} k[X,Y,Z]$. Merkitään $S = k[u,v]$, missä $u = X/Z$ ja $v = Y/Z$. Olkoon $a_0, a_1, \ldots$ jono positiivisia kokonaislukuja. Muodostetaan jono lokaaleja renkaita

$$S_0 \subset S_1 \subset S_2 \subset \cdots,$$

missä

$$S_i = k[u_i, v_i]_{(u_i, v_i)},$$

$$v_0 = v, \qquad u_0 = u; \tag{4.2.8}$$

$$v_{i+1} = \frac{u_i}{v_i^{a_i}} \text{ ja } u_{i+1} = v_i. \tag{4.2.9}$$

Jokainen rengas S_{i+1} saadaan lokaalista renkaasta S_i tekemällä a_i peräkkäistä kvadraattista muunnosta. Tästä seuraa, että renkaiden S_i yhdiste on valuaatiorengas, jota merkitään S_ν. Olkoon ν rengasta S_ν vastaava valuaatio. Rationaalifunktioiksi v_i saadaan

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{u}{v^{a_0}} \\ v_2 &= \frac{u_1}{v_1^{a_1}} = \frac{v^{a_0 a_1 + 1}}{u^{a_1}} = \frac{v^{p_1}}{u^{q_1}} \\ v_3 &= \frac{u_2}{v_2^{a_2}} = \frac{u^{a_1 a_2 + 1}}{v^{a_2(a_0 a_1 + 1) + a_0}} = \frac{u^{q_2}}{v^{p_2}}, \end{aligned}$$

missä kokonaisluvut p_i ja q_i, $i = 1,2,3$, ovat ketjumurtolukukehitelmään $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ liittyvät *konvergentit* (Tattersall [Tat99], pykälä 8.5). Todistetaan yleinen kaava

$$v_{n+1} = \begin{cases} \frac{u^{q_n}}{v^{p_n}}, & \text{jos n on parillinen,} \\ \frac{v^{p_n}}{u^{q_n}} & \text{muulloin.} \end{cases}$$

induktiolla: Oletetaan, että väite pätee alkioilla v_d, kun $d \leq n$. Kun n on parillinen, voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} v_{n+1} =& \frac{v_{n-1}}{v_n^{a_n}} = \frac{u^{q_{n-2}}}{v^{p_{n-2}}} \cdot \left(\frac{u^{q_{n-1}}}{v^{p_{n-1}}}\right)^{a_n} \\ =& \frac{u^{q_n}}{v^{p_n}}, \end{aligned}$$

sillä konvergentit p_n ja q_n toteuttavat yhtälöt (Tattersall [Tat99], pykälä 8.5)

$$\begin{aligned} p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2} \text{ ja} \\ q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2}. \end{aligned}$$

Tapaus n on pariton todistetaan vastaavalla tavalla. Normalisoidaan valuaatio ν siten, että $\nu(v) = 1$. Tällöin saadaan

$$\nu(u) = \frac{p_n}{q_n} + (-1)^{n+1}\frac{\nu(v_{n+1})}{q_n}. \tag{4.2.10}$$

Tarkastellaan seuraavaksi tapausta, missä $a_0, a_1, \ldots$ muodostavat luvun $\sqrt{3}$ ketjumurtolukukehitelmän. Tällöin

$$\sqrt{3} = [1, 1, 2, 1, 2, \ldots] = [1, \overline{1, 2}].$$

Valuaation määritelmästä nähdään, että $\nu(v_n) > 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Toisaalta yhtälöistä (4.2.8) seuraa, että $\nu(v_{i+2}) \leq \nu(v_i)$, eli $\nu(v_n)$ on rajoitettu kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Kun n kasvaa, yhtälön (4.2.10) oikeanpuolimmaisin termi lähenee nollaa ja termi $\frac{p_n}{q_n}$ lähenee arvoa $\sqrt{3}$. Tästä seuraa, että $\nu(u) = \sqrt{3}$. Valuaation ν arvoryhmä on siis $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{3}$, joten valuaatio on tyyppiä (iv).

Merkitään $R = k[x, y]$ missä $x = \frac{v}{u}$, $y = \frac{1}{u}$. Määritellään $\prec$ järjestys seuraavasti:

$$x^a y^b \succ 1 \iff \nu(x^a y^b) < 0.$$

Nyt

$$\nu(x^a y^b) = \nu(\frac{v^a}{u^{a+b}}) = a - (a+b)\sqrt{3}$$

ja tästä nähdään, että

$$x^{a_1} y^{b_1} \prec x^{a_2} y^{b_2} \iff (a_1, b_1) \cdot w < (a_2, b_2) \cdot w,$$

missä $w = (\sqrt{3} - 1, \sqrt{3})$. Valuaation ν määrittämä järjestys on siis matriisiin w liittyvä termijärjestys renkaassa R.

Tyypin (i) valuaatiot eivät tuota järjestysfunktioita:

Lause 4.2.11. *Olkoon R äärellisesti generoitu k-algebra, ρ painofunktio ja ν siihen liittyvä valuaatio. Tällöin ν ei ole tyyppiä (i).*

Todistus. Olkoon K renkaan R osamääräkunta. Oletetaan, että ν on tyyppiä (i). Valitaan $u \in K$ siten, että $\nu(u) = 1$. Nyt $u = \frac{x}{y}$, missä $x, y \in R$. Merkitään $-a = \nu(x)$ ja $-b = \nu(y)$. Koska $x, y \in R$, niin $a, b > 0$ ja $b - a = 1$. Jos x ja y eivät ole algebrallisesti riippumattomia, voidaan valita z siten, että x ja z ovat algebrallisesti riippumattomia. Tällöin $x' = x^c + z$ ja $y' = y^d$ ovat algebrallisesti riippumattomia, kun $c, d \geq 1$. Valitaan $c = kb + 1$ ja $d = ka + 1$, missä k on valittu siten, että $-kba < \nu(z)$. Tällöin on voimassa

$$\nu(x') - \nu(y') = 1.$$

Joka tapauksessa voidaan siis olettaa, että löydetään algebrallisesti riippumattomat alkiot x ja y siten, että $\nu(x) = -a$, $\nu(y) = -b$ ja $b - a = 1$. Monomien $x^r y^s$ arvot valuaatiossa ν ovat tarkalleen kaikki joukon

$$N = \{-ra - sb | r, s \in \mathbb{N}\}$$

alkiot. Koska $b - a = 1$, joukko $-\mathbb{N} \cap N$ on äärellinen. Konstruoidaan induktiivisesti jokaista positiivista lukua k kohti astetta kb oleva polynomi $p_k(x, y)$, jonka arvo valuaatiossa ν ei sisälly joukkoon

$$N \cup \{\nu(p_i(x, y)) | i < k\}.$$

Valitaan ensin

$$p_k^0(x, y) = x^{kb} - \alpha y^{ka},$$

missä α on valittu siten, että

$$\nu(p_k^0) > -kab.$$

Oletetaan nyt, että polynomit p_k^{j-1} kaikilla $k \in \mathbb{N}$ on konstruoitu. Näytetään, miten seuraava polynomi löydetään: Jos

$$\nu(p_k^{j-1}) \notin N \cup \{\nu(p_i(x, y) | i < k\},$$

valitaan $p_k = p_k^{j-1}$, jolloin polynomi luvulle k on löydetty. Muutoin $\nu(p_k^{j-1}) = \nu(f)$, missä joko $f = x^s y^r$ tai $f = p_i(x, y)$ jollain $i < k$. Joka tapauksessa voidaan löytää $\alpha \in k$ siten, että

$$\nu(p_k^{j-1} + \alpha f) > \nu(p_k^{j-1}).$$

Valitaan

$$p_k^j = p_k^{j-1} + \alpha f.$$

Nyt $\deg(f) < kb$, joten $\deg p_k^j = kb$ kaikilla j, eli $\deg p_k = kb$. Saadaan siis ääretön jono $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ polynomeja, joilla

$$\nu(p_k) \notin N \cup \{\nu(p_i) | i < k\}.$$

Koska $-\mathbb{N} \cap N$ on äärellinen, äärellisen monen askeleen kuluttua löydetään polynomi $p_k \in k[x, y]$, jonka valuaatio on positiivinen. Tällainen valuaatio ei voi tulla renkaan $k[x, y]$ järjestysfunktiosta. $\square$

Kirjallisuutta

[Abh56] Abhyankar, S.: On the valuations centered in a local domain. - Amer. J. Math. 77, 1956.

[Abh59] Abhyankar, S.: Ramification theoretic methods in algebraic geometry. - Princeton University press, 1959.

[AL96] Adams, W. ja Loustaunau, P.: An Introduction to Gröbner Bases. - American Mathematical Society, 1996.

[AM69] Atiyah, M. F., MacDonald, I.: Introduction to Commutative Algebra. - Perseus Books, 1969.

[BH98] Blake, I., Heegard, C. Hoholdt, T. ja Wei, V.: Algebraic-Geometry Codes. - IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 41, s.2596-2618, 1998.

[Eis95] Eisenbud, D.: Commutative algebra with a view toward algebraic geometry. - Springer-Verlag, 1995.

[GP02] Geil, O. ja Pellikaan, R.: On the structure of order domains. - Finite Fields and their Applications 8, 2002.

[GPf02] Greuel G. ja Pfister, G.: A singular introduction to commutative algebra. - Springer-Verlag, 2002.

[Har97] Hartshorne, R.: Algebraic Geometry. - Springer-Verlag, 1997.

[HP98] HØoholdt, T., Pellikaan, R. ja van Lint, J.: Algebraic geometry codes. - Handbook of Coding Theory, Elsevier, 1998.

[CL92] Cox, D., Little, J. ja O'Shea, D.: Ideals, Varieties and Algorithms. - 2. painos, Springer-Verlag, 1992.

[CL04] Cox, D., Little, J. ja O'Shea, D.: Using Algebraic Geometry. - 2. painos, Springer-Verlag, 2004.

[KV04] Kiyek, K., Vicente, J.L.: Resolution of Curve and Surface Singularities in Characteristic Zero. - Kluwer Academic, 2004.

[Kun85] Kunz, E.: Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry. - Birkhäuser, 1985.

[Lit03] Little, J. B.: The ubiquity of order domains for the construction of error control codes. - Advances in Mathematics of Communications 1 (2007), 151-171.

[Mat89] Matsumura, H.: Commutative Ring Theory. - Cambridge University Press, 1989.

[Mat99] Matsumoto, R.: Miura's generalization of one-point AG codes is equivalent to Høholdt, van Lint and Pellikaan's Generalization. - IEICE trans. fundamentals, VOL E82-A, NO.10 october 1999.

[Osu01] O'Sullivan, M.: New Codes for the Berlekamp-Massey-Sakata Algorithm. - Finite fields and their Applications 7, 2001.

[Pel01] Pellikaan, R.: On the existence of order functions. - Journal of Statistical Planning and Inference, vol. 94, s. 287-301, 2001.

[Rob85] Robbiano, L.: Term orderings on the polynomial ring. - Proceedings of EUROCAL 1985, Springer-Verlag.

[Rot79] Rotman, J.: An Introduction to homological algebra. - Academic Press, 1979.

[Spi90] Spivakovsky, M.: Valuations in function fields of surfaces. - Amer. J. Math. 112, 1990.

[Sti93] Stichtenoth, H.: Algebraic function fields and codes. - Universitext, Springer-Verlag, Berlin 1993.

[Tat99] Tattersall, J.: Elementary Number Theory in Nine Chapters. - Cambridge University Press, 1999.

[Vaq] Vaquie, M.: Valuations and local uniformization. - Preprint.

[Zar39] Zariski, O.: The reduction of singularities of an algebraic surface. - Ann. of Math. 40, 1939.

[ZS76] Zariski, O. ja Samuel, P.: Algebra II. - Springer-Verlag 1976.