



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Modelagem de discos galácticos via formalismo de  
imersão na Relatividade Geral**

**Camilla dos Santos Rodrigues Leite**

CAMPINA GRANDE

- Maio 2012 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

## **DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Modelagem de discos galácticos via formalismo de  
imersão na Relatividade Geral**

**Camilla dos Santos Rodrigues Leite**

Dissertação realizada sob a orientação do Prof.Dr. Fábio de Melo Leal Dahia, apresentada à Unidade Acadêmica de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

CAMPINA GRANDE

- Maio 2012 -

MODELAGEM DE DISCOS GALÁCTICOS VIA FORMALISMO DE  
IMERSÃO NA RELATIVIDADE GERAL

CAMILLA DOS SANTOS RODRIGUES LEITE

Aprovada em \_\_\_\_\_

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Fábio de Melo Leal Dahia  
Orientador

---

Prof.Dr. Carlos Augusto Romero Filho  
Examinador

---

Prof.Dr. Rodrigo Fernandes Lira de Holanda  
Examinador



## AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus, pela oportunidade de fazer um curso de mestrado; por sua guia em meus estudos, e ajuda nos momentos de dificuldade.

Agradeço aos meus pais, Sebastião e Josineide; meus irmãos, Larissa e Diego, e minhas queridas sobrinhas, Laís e Maria Ruth, pois mesmo diante da minha ausência, em vários momentos, se mantiveram presentes durante essa jornada, me incentivando e proporcionando todo o suporte que acarretou à conclusão deste trabalho.

Agradeço à meu noivo e fiel companheiro, Miquéias, o qual participou efetivamente, durante todos os finais de semana e feriados, na preparação deste trabalho.

Agradeço ao professor Fábio Dahia, por sua dedicação, paciência e compreensão, sendo estes os alicerces de sua excelente orientação.

Agradeço aos meus ótimos amigos: Nikson, por me ajudar em várias questões a cerca dos assuntos abordados neste trabalho; Wagner, por sua disposição e zelo com que me ensinou o Latex, bem como forneceu todo o aparato computacional necessário para que este trabalho tivesse sua redação e ilustrações concluídas com relativa tranquilidade; e a Neymar e Albery, por se mostrarem prestativos nas ocasiões em que precisei.

Agradeço à todos os professores que participaram da minha formação, tanto na graduação como na pós-graduação, em especial aos professores Suassuna, Precker, Francisco e Rômulo, pelos ensinamentos dados, carinho e incentivo constantes.

Agradeço a todos os amigos que fiz na graduação e pós-graduação, por terem proporcionado durante minha passagem pela UFCG, sentimentos tão nobres, como: amizade, confiança, admiração e alegria, o que tornou nossa convivência salutar e próspera.

Aos funcionários, Dona Graça, Dona Helena, Dona Dalva, Alba e Seu Hélio, pelo apoio e atenção que me concederam ao longo desses anos.

Agradeço a Capes pela bolsa de estudos.

## RESUMO

Uma caracterização bem elaborada das propriedades físicas das galáxias é de fundamental importância para entendermos o comportamento do Universo. Por outro lado, um dos grandes desafios da Teoria da Relatividade Geral é encontrar soluções exatas com clara interpretação física. Nosso trabalho visa obter soluções exatas das equações de Einstein que possam representar modelos de discos galácticos, seguindo um método indireto para evitar a árdua tarefa de resolver as equações de Einstein diretamente. Para tanto, consideramos a idéia de uma hipersuperfície imersa em um espaço de dimensão superior, e utilizamos o formalismo da imersão associado ao Método “deslocar, cortar e refletir” (que pode ser considerado como uma adaptação do conhecido método das imagens, estudado em eletrostática), com o qual “cortando” e “colando” soluções conhecidas de vácuo, geramos soluções com fonte do tipo disco. Este procedimento é aqui denominado Método da Imersão, e constitui-se como uma ferramenta eficiente na modelagem de discos, visto que permite uma maior liberdade quanto à escolha da hipersuperfície de corte, e a consequente determinação das propriedades físicas (densidade, pressão, etc) do disco de matéria gerado. Este método, portanto, torna-se mais abrangente, uma vez que o método convencional se limita à análise de hipersuperfícies “planas”, nas coordenadas consideradas. Através da aplicação desse método, verificamos que o conteúdo material de um disco galáctico, idealizado como um disco de matéria infinitamente fino, é descrito por um tensor energia-momento superficial cujas componentes podem ser escritas explicitamente em termos das funções de imersão. Estudando alguns casos particulares, reproduzimos os resultados encontrados na literatura.

**Palavras-chave:** Discos galácticos, Relatividade Geral, Método “deslocar, cortar e refletir” e Método da Imersão.

## ABSTRACT

The study of the physical properties of galaxies is very important to understand the behavior of the Universe. On the other hand, one of the great challenges of the General Theory of Relativity is to find exact solutions which have a clear physical interpretation. Our work aims to obtain exact solutions of Einstein's equations that can represent models of galactic disks, by following an indirect method to avoid the difficult task of solving Einstein's equations directly. To this end, we consider the idea of a hypersurface embedded in a space of higher dimension, and we use the embedding formalism associated with the method of "displace, cut and reflect" (which can be considered as an adaptation of the known method of images, studied in electrostatics) on known vacuum solutions in order to generate solutions with disk-like sources. This procedure, called the Embedding Method, is an efficient tool for modeling disks, as it allows great freedom in the choice of cutting hypersurfaces, and the consequent determination of physical properties (density, pressure, etc.) of the matter in the disk which is generated. Therefore, this method becomes more general than the conventional formulation of the method of "displace, cut and reflect", which works only to "plane" hypersurfaces (as viewed in the employed coordinate system). By applying the embedding formalism, we found that the material content of galactic disks, idealized as a infinitely thin disk of matter, is described by an energy-momentum tensor whose components can be written explicitly in terms of the embedding functions. By studying individual cases, we reproduce some disk models found in the literature.

**Keywords:** Galactic disks, General Relativity, Method of "displace, cut and reflect" and Embedding Method.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Galáxias e Discos galácticos</b>	<b>4</b>
2.1	Uma breve introdução sobre galáxias . . . . .	5
2.1.1	Descoberta . . . . .	5
2.1.2	Morfologia . . . . .	6
2.1.3	Constituição . . . . .	8
2.1.4	Distribuição . . . . .	11
2.1.5	Nascimento . . . . .	12
2.1.6	Evolução . . . . .	12
2.2	A Massa das Galáxias Espirais . . . . .	15
2.2.1	Analogia entre as Galáxias e os Sistemas Girantes Conhecidos . . . . .	16
2.2.2	Procedimentos para a Obtenção das Curvas de Rotação . . . . .	18
2.2.3	Modelos propostos X resultados obtidos . . . . .	20
2.3	Discos Galácticos . . . . .	22
2.3.1	Modelos teóricos de discos galácticos segundo a Teoria Newtoniana . . . . .	25
2.3.2	Modelo de Plummer . . . . .	26
2.3.3	Modelo de Kuzmin . . . . .	28
2.3.4	Modelo de Miyamoto-Nagai . . . . .	30
2.3.5	Potenciais de disco via Funções de Bessel . . . . .	31

<b>3</b>	<b>Método “deslocar, cortar e refletir” na Construção de Discos</b>	<b>39</b>
3.1	Apresentação do Método “deslocar, cortar e refletir” na construção de discos .	40
3.2	Discos na Teoria Newtoniana . . . . .	43
3.3	Discos na Teoria da Relatividade Geral . . . . .	47
3.3.1	Discos finos na métrica de Chazy-Curzon . . . . .	55
3.3.2	Discos finos na métrica de Schwarzschild . . . . .	57
<b>4</b>	<b>Método da Imersão</b>	<b>60</b>
4.1	Formalismo de Imersão . . . . .	61
4.2	Aplicação do formalismo de imersão ao Método “deslocar, cotar e refletir” . .	65
<b>5</b>	<b>Aplicação do Método da Imersão na obtenção de discos galácticos</b>	<b>71</b>
<b>6</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>83</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>85</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Uma boa parte das estruturas astronômicas apresentam distribuições de matéria em forma de disco, com destaque às formas discoidais evidenciadas em alguns tipos de galáxias. Do ponto de vista da Física, a simetria axial presente em tais objetos tende a simplificar as formulações matemáticas envolvidas na análise teórica desses sistemas, embora, encontrar soluções exatas resolvendo diretamente as equações de Einstein seja, ainda assim, uma tarefa difícil.

Portanto, com o interesse em encontrar soluções exatas para as equações de Einstein com simetria axial, que possam representar modelos reais de discos galácticos, é que este trabalho, se propõe a tratar sobre a construção de discos de matéria no contexto da Teoria da Relatividade Geral, por meio de um método indireto, no qual partindo de conhecidas soluções de vácuo, seja possível determinar soluções com fonte do tipo disco.

Esse assunto se mostra relevante, uma vez que a história das galáxias está intimamente relacionada às propriedades do Universo primitivo. Logo, conhecer o comportamento dinâmico, não só do ponto de vista da Teoria Newtoniana da Gravitação, mas também na Teoria da Relatividade Geral, corresponde a entender os principais fenômenos físicos acerca do Universo. Pois, segundo Binney e Tremaine [1], as galáxias são os tijolos fundamentais do Universo.

Diante do exposto, o objetivo deste trabalho se restringe a desenvolver modelos de discos com características físicas semelhantes à discos galácticos, a fim de adquirir uma melhor

compreensão sobre o conteúdo material que constitui tais estruturas.

Para tanto, baseado no Método das Imagens, comumente visto na eletrostática, utilizamos um artifício similar, para a construção de discos de matéria, conhecido como Método “deslocar, cortar e refletir”. Segundo este método, um espaço-tempo conhecido é dividido, por meio de uma hipersuperfície, em duas regiões: um com singularidade ou fonte e a outra sem. A região com fonte ou singularidade é eliminada e em seguida reflete-se a parte sem singularidade ou fonte, a partir do plano de corte (ou hipersuperfície). Podemos verificar que, como resultado deste procedimento, obtemos um novo espaço-tempo que é gerado por um disco fino de matéria localizado na hipersuperfície.

No entanto, na busca por desenvolver modelos mais realísticos, que reproduzam, de fato, as propriedades físicas existentes em discos galácticos, aliamos a idéia inferida pelo Método “deslocar, cortar e refletir” ao formalismo de imersão, iniciativa esta que deu origem ao chamado Método da Imersão, o qual permite-nos a escolha de hipersuperfícies quaisquer, não mais apenas “planas”, gerando então discos de matéria com diferentes propriedades físicas (densidade, pressão, etc.). Assim, o Método da Imersão se mostra mais abrangente que o método inicialmente citado, pois optando por hipersuperfícies mais apropriadas, pode-se determinar distribuições de matéria do tipo disco com características reais, em princípio.

Dessa forma, visando discutir sobre o tema proposto, com o intuito de atingir a finalidade prevista, este trabalho se divide da seguinte maneira: No capítulo 2 é feita uma rápida abordagem sobre a descoberta; morfologia; constituição; distribuição; evolução, e nascimento das galáxias. Neste capítulo, também apresentamos, de maneira sucinta, alguns aspectos sobre a massa das galáxias espirais e discorremos sobre as principais características dos discos galácticos, bem como alguns modelos teóricos que representam estas estruturas, de acordo com a Teoria Newtoniana da Gravitação. No capítulo 3 mostra-se a construção de discos finos, utilizando o Método “deslocar, cortar e refletir”, sendo estes discutidos tanto do ponto de vista da Teoria Newtoniana, quanto da Teoria da Relatividade Geral. No capítulo 4 desenvolve-se o Método da Imersão, o qual é caracterizado pela aplicação do formalismo de imersão ao

Método “deslocar, cortar e refletir”. No capítulo 5 utiliza-se o método descrito no capítulo anterior para a obtenção de discos com propriedades físicas similares à discos galácticos reais. Por fim, no capítulo 6 são apresentadas as considerações finais.

## Capítulo 2

# Galáxias e Discos galácticos

Há séculos o Homem busca conhecer como se deu o surgimento do Universo; sua estrutura e evolução, a fim de compreender a relação existente entre esses fenômenos e a natureza física em vigor.

Nessa busca, o estudo das galáxias tem-se mostrado relevante, uma vez que o processo de formação das galáxias está intimamente relacionado às propriedades do Universo primitivo. Além do mais, as galáxias podem ser usadas como enormes laboratórios para se estudar as leis da Física em condições extremas.

Este capítulo não tem a pretensão nem o propósito de apresentar uma vasta análise sobre os assuntos elencados acima, mas, apenas possibilitar uma sucinta compreensão sobre as galáxias, num aspecto geral, se detendo, entretanto, a explorar a questão da distribuição de massa nas galáxias espirais, dando ênfase a região dessas galáxias com maior concentração de “matéria visível”, o disco galáctico. Embora, a maior parte da massa total das galáxias, de acordo com os recentes dados observacionais, pareça ser proveniente de um tipo de matéria, até então, de natureza desconhecida, denominada *matéria escura*.

Iremos também aqui, abordar alguns modelos teóricos de discos galácticos segundo a Teoria Newtoniana.

## 2.1 Uma breve introdução sobre galáxias

As galáxias correspondem a uma classe de objetos bastante diversos. Isto significa que um grande número de parâmetros faz-se necessário a fim de caracterizá-las. Dada a importância em se conhecer tais estruturas, nesta seção listamos brevemente as informações referentes à descoberta; morfologia; constituição; distribuição; nascimento e evolução das galáxias. Nossa descrição será breve e certamente não está completa. No entanto, serve para enfatizar a diversidade da população de galáxias.

### 2.1.1 Descoberta

Por volta do século XVIII, através do aperfeiçoamento de instrumentos de observação a longas distâncias, os astrônomos observaram entre as estrelas, a presença de corpos extensos e difusos aos quais chamaram “*nebulosas*”<sup>1</sup>, cuja natureza era, até então, desconhecida. Ao longo dos anos seguintes foram sendo catalogadas várias nebulosas que apresentavam diversas formas e tamanhos. No entanto, como a distância à elas não era conhecida, não se sabia se pertenciam ao nosso sistema estelar (chamado de Via Láctea ou, simplesmente, Galáxia) ou não.

Apenas no século XX, com o desenvolvimento de telescópios cada vez mais eficientes, obteve-se a descoberta que reformulou o entendimento do Universo. Em 1925, o astrônomo americano Edwin Powell Hubble (1889 - 1953), através de um trabalho sistemático, proporcionou a evidência definitiva da existência da nossa galáxia, a Via Láctea, como um grupo separado de estrelas e a consequente descoberta de que algumas das nebulosas eram, na verdade, galáxias independentes, exteriores à nossa [2].

---

<sup>1</sup>Originalmente a palavra “nebulosa” se referia a praticamente qualquer objeto astronômico extenso (além de planetas e cometas). A palavra “nebulosa” vem da palavra grega para “nuvem”. Antes que os astrônomos soubessem que as galáxias eram coleções de estrelas distintas, as galáxias eram chamadas nebulosas por causa de sua aparência indistinta. Hoje a palavra nebulosa é reservada para corpos extensos constituídos, em grande parte, de gás e poeira.

### 2.1.2 Morfologia

Ao longo do seu trabalho, Hubble classificou as galáxias, conforme sua aparência, em quatro tipos morfológicos: elípticas, espirais, espirais barradas e irregulares. Algumas galáxias pareciam ser privadas de qualquer simetria circular ou rotacional e apresentavam estruturas caóticas ou irregulares; Hubble as chamou de galáxias *irregulares*. Por outro lado, a grande maioria das galáxias possuem formas geométricas bastante regulares, quando vistas em projeção contra o céu; Hubble as chamou de galáxias *regulares*. As galáxias regulares estão dispostas em duas formas básicas: galáxias arredondadas foram chamadas de *elípticas* e são simbolizadas pela letra E. De acordo com seu grau de achatamento ou razão axial ( $r = b/a$ ), Hubble as subdividiu em classes que vão de E0 à E7, onde o número  $n$ , que segue a letra E, é dado por  $n = 10 \times (1 - r)$ . De forma que as mais arredondadas são chamadas E0 e as mais alongadas E7; as galáxias achatadas foram chamadas *de discos* ou *discoidais*. As galáxias de disco foram divididas em dois tipos: *espirais normais* e *espirais barradas*. Quando vistas de frente, apresentam uma típica estrutura espiral, sendo assim, simbolizadas pela letra S (do inglês spiral), quando apenas normais e SB se barradas. Tais galáxias apresentam um bojo<sup>2</sup> (ou núcleo), um disco e braços espirais. No tocante as diferenças quanto ao tamanho do bojo (em comparação ao disco) e ao grau de desenvolvimento dos braços espirais, as espirais normais são subdivididas nas categorias Sa, Sb e Sc, as quais caracterizam-se, respectivamente, por apresentarem bojo maior, braços pequenos e bem enrolados; bojo e braços intermediários; e bojo menor, braços grandes e mais abertos. No caso das espirais barradas, elas apresentam o mesmo tipo de subdivisão das espirais normais, sendo a presença das barras indicadas pela inserção da letra B à notação (SBa, SBb, SBc). O intervalo entre as categorias citadas também é um tipo de classificação válida, ou seja, Sab, Sbc, etc. A Via Láctea, por exemplo, é uma galáxia espiral barrada com subclasse do tipo intermediária Sbc (isto é, entre Sb e Sc) [1] e [3].

---

<sup>2</sup>O bojo é uma pequena protuberância amorfa, localizada no centro galáctico

No esquema de classificação de Hubble existem ainda estruturas correspondentes à “elos de transição” entre as galáxias elípticas e as espirais. Estas galáxias foram identificadas por Hubble como S0 ou SB0 se barradas, as quais são conhecidas hoje como *lenticulares* [4]. A figura abaixo ilustra o diagrama da classificação de Hubble.

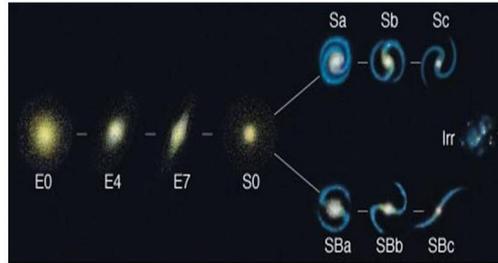


Figura 2.1: Classificação de Hubble.

Juntas as galáxias elípticas e lenticulares são geralmente referidas como galáxias do *tipo precoce* (do inglês, *early-type galaxies*), enquanto que as espirais e irregulares compõem a classe das galáxias do *tipo tardia* (do inglês, *late-type galaxies*), essa tradicional nomenclatura também foi sugerida por Hubble. Frequentemente usa-se os termos *early-type* e *late-type* para designar, respectivamente, as galáxias à esquerda e à direita da sequência de Hubble. De fato, percorrendo a sequência de Hubble (Figura 2.1) da esquerda para a direita, verifica-se que o aumento no grau da complexidade morfológica das galáxias vai de *early-type* para *late-type*. No entanto, deve-se tomar cuidado com a aparente conotação temporal inferida pelos termos “early” e “late”, uma vez que a classificação morfológica de Hubble não têm caráter evolutivo [5].

O esquema original da classificação das galáxias proposto por Hubble é usado até hoje, embora tenha sido estendido para incluir outras variações de galáxias que seguem a ordem do esquema inicial. Um exemplo são as galáxias Sd, incluídas no grupo das galáxias de disco, que se caracterizam pela quase inexistência de bojo e por apresentarem braços maiores e mais abertos do que Sc. Sem falar nos demais tipos de galáxias irregulares que também vêm sendo catalogadas. Para uma descrição mais completa sobre o sistema de classificação de Hubble e

seu conseqüente refinamento ao longo dos anos ver [3] e [6].

Existe um número relevante de correlações entre as propriedades físicas presentes nas galáxias e seus tipos morfológicos. Portanto, é conveniente ilustrar estas correlações utilizando os resultados das análises de grandes bancos de dados, como por exemplo, *AAT 2dF* (Anglo-Australian Telescope 2dF Galaxy Survey) e *Sloan Digital Sky Surveys*, os quais contêm cerca de 225000 e  $10^6$  galáxias, respectivamente. Amostras tão grandes assim necessitam do desenvolvimento de algoritmos de computador que proporcionem uma abordagem quantitativa sobre as características das galáxias. Os resultados desses estudos levam a um tipo de classificação que substitui a classificação tradicional, de *galáxias precoces* e *tardias* (*early* e *late-type*), por um novo esquema caracterizado pela existência de duas sequências distintas, conhecidas como: sequências *vermelha* e *azul* [7]. Em resumo, temos de [7] que:

- A *sequência vermelha* consiste principalmente de galáxias com grande massa esferoidal, onde a formação de estrelas praticamente inexistente. Em outras palavras, podemos dizer que a sequência vermelha é constituída por galáxias “velhas, vermelhas e mortas”;
- A *sequência azul ou nuvem azul* consiste principalmente de galáxias com “pouca” massa (em relação a sequência anterior) e uma estrutura dominante do tipo disco, onde a formação de estrelas é recorrente.

### 2.1.3 Constituição

As galáxias são estruturas gigantescas, que aparecem “isoladas” no espaço, constituídas por conjuntos de *sistemas estelares*, *gás* e *poeira* que estão gravitacionalmente vinculados [4].

As estrelas são as principais e mais numerosas constituintes galácticas, responsáveis pela *luminosidade* e *cor* da galáxia. Uma galáxia contém cerca de  $10^5$  a  $10^{12}$  estrelas [1]. As estrelas também constituem a grande parte da massa no disco de galáxias espirais, embora

não sejam dominantes para a massa total da galáxia, fato este que será abordado na seção 2.2.

Diferentes galáxias têm diferentes populações estelares. Podemos ver em [5] que galáxias com uma população estelar mais jovem têm uma maior luminosidade por unidade de massa estelar do que galáxias com uma população estelar mais velha. A luminosidade total das galáxias está relacionada ao número total de estrelas. A luminosidade de uma estrela é dada pela quantidade de energia emitida por segundo, medida em watts, ou ergs por segundo, sendo esta, geralmente medida através de um ou mais comprimentos de onda específicos. O seu *brilho aparente* ou *fluxo* é a energia total recebida por segundo em cada metro quadrado (ou centímetro quadrado) do telescópio do observador<sup>3</sup> [8].

As galáxias também se apresentam em diferentes cores. A cor de uma galáxia está relacionada às características de idade e metalicidade<sup>4</sup> de sua população estelar. A medida da sua cor é dada pela razão de sua luminosidade em duas bandas de comprimento de onda [5].

Vimos, na subseção 2.1.2, que as galáxias espirais apresentam uma estrutura bastante discretizada, constituída por bojo, disco e braços espirais. Além dessas estruturas, tais galáxias também apresentam um halo, região que se localiza ao redor das galáxias e é composto de duas partes: o halo estelar, região mais externa das galáxias, composta pelas estrelas mais afastadas do centro; e o halo escuro, lugar onde, provavelmente, se encontra a matéria escura. Estas estruturas distinguem-se entre si na morfologia e em muitas outras propriedades. Por exemplo, o halo contém pouco gás e poeira enquanto o disco e o bojo contêm grandes quantidades dos dois. Tanto a aparência quanto a composição são diferentes nesses componentes [4]. A Figura 2.2 destaca algumas das estruturas típicas de galáxias

---

<sup>3</sup>Se uma estrela brilha com brilho igual em todas as direções, podemos usar a lei do inverso do quadrado para estimar a sua luminosidade  $L$  a partir da distância  $d$  e do fluxo  $F$  medido:

$$F = L/(4\pi d^2)$$

<sup>4</sup>metallicidade é a medida da quantidade de elementos mais pesados do que o hélio em alguns corpos celestes.

espirais: bojo, disco e halo.

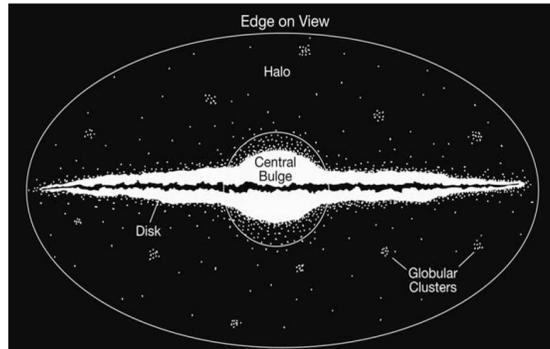


Figura 2.2: Galáxia espiral típica vista de perfil.(Fonte: [4].)

De acordo com a idade e metalicidade, as estrelas encontram-se distribuídas em diferentes proporções e formas pelas diferentes regiões galácticas. As estrelas do halo e do bojo (componentes esferoidais da galáxia), por exemplo, são mais velhas e de baixa metalicidade (conhecidas como *população II*), cuja densidade de distribuição é aproximadamente esférica, em relação ao plano médio galáctico. O movimento das estrelas no halo e no bojo é aleatório, entretanto sempre em torno do centro. Já as estrelas do disco são jovens e de alta metalicidade (conhecidas como *população I*). As estrelas do disco viajam em órbitas aproximadamente circulares em volta do centro galáctico [1].

Uma galáxia típica contém uma infinidade de pequenos sistemas estelares contendo entre  $10^2$  e  $10^6$  estrelas. Esses sistemas são chamados de *aglomerados de estrelas* e podem ser divididos em dois tipos principais: *aglomerados galácticos ou abertos* são sistemas de população I encontradas no disco galáctico. Um típico aglomerado aberto contém  $\sim 10^2$  a  $10^4$  estrelas; *aglomerados globulares* são sistemas de população II contendo entre  $10^4$  a  $10^6$  estrelas [1].

O gás encontrado nas galáxias é sobretudo o de hidrogênio, o qual se encontra nas formas: ionizado, atômico (ou neutro) e molecular, sendo a maior parte deste correspondente ao hidrogênio atômico e molecular [4].

Chama-se de poeira à pequenas partículas sólidas compostas por grãos de grafite e silicatos cobertos por gelo [4].

Juntos o gás e a poeira são chamados de *Meio Interestelar* (MI), cuja massa total pouco contribui para a massa das galáxias, assim MI possui pouca influência direta sobre a dinâmica da galáxia, embora desempenhe um papel central na formação de estrelas nas galáxias [7].

Estudos dinâmicos dos centros de galáxias revelam, ainda, que eles em sua maioria, apresentam objetos escuros massivos, cuja concentração de massa varia de  $10^6$  a  $10^9$  massa solar<sup>5</sup> compreendidos dentro de poucos parsecs<sup>6</sup> do centro. Astrônomos acreditam que esses objetos devem ser *buracos negros*, por duas razões. Primeiro, os argumentos dinâmicos mostram que nenhum outro sistema astrofísico de longa duração, que não seja o buraco negro, poderia ser tão massivo e tão pequeno. Segundo, muitas galáxias contêm fortes fontes de radiação não-estelar em seus centros, chamados de *núcleos galácticos ativos* ou AGN (do inglês, active galactic nuclei). Sendo que a fonte de energia mais plausível para AGN é a acreção para um buraco negro [1].

### 2.1.4 Distribuição

Com relação a forma pela qual as galáxias se distribuem ao longo do Universo, ao que podemos observar, essa distribuição é uniforme em larga escala ( $\gtrsim 100$  Mpc). Contudo, levando em consideração a distância média entre elas, (isto é, em pequena escala), verifica-se que as galáxias pertencem a uma rica e complexa estrutura hierárquica que inclui galáxias binárias, pequenos grupos de galáxias em grande proximidade, enormes espaços vazios em que a densidade numérica das galáxias é muito reduzido e aglomerados gigantesco contendo milhares de galáxias [1]. Em outras palavras, podemos dizer que a maioria das galáxias

---

<sup>5</sup>Massa solar é uma unidade de medida de massa, igual à massa do Sol, usada em Astronomia para representar a massa de estrelas, galáxias e corpos celestes de grandes dimensões ( $1$  massa solar  $\equiv 1M_{\odot} \equiv 1.99 \times 10^{30}$  kg).

<sup>6</sup>Parsec é a unidade usada para representar distâncias estelares ( $1$  parsec  $\equiv 1\text{pc} \equiv 3.086 \times 10^{16}$  m).

encontram-se ligadas gravitacionalmente a um certo número de outras galáxias, constituindo uma estrutura cuja interação entre os objetos participantes pode ocorrer aos pares, em grupos ou aglomerados. As características e diferenças entre essas estruturas podem ser vistas com mais detalhes em [1], [4] e [8].

### 2.1.5 Nascimento

Uma das proposições mais conhecidas é de que a existência das galáxias apenas foi possível devido a criação de uma certa “assimetria” na distribuição de energia, nos primeiros instantes do Universo, permitindo assim, ao longo dos milhões de anos que se seguiram, a formação, em algumas regiões do espaço, de aglomerados de gás e poeira, que devido as enormes pressões gravitacionais, levaram ao aparecimento de estrelas nessas acumulações. Com a evolução, ocorreram alterações na forma dessas acumulações que são provenientes, não apenas das forças gravitacionais internas, mas também, das fortes interações gravitacionais com outras estrelas e com o meio que as rodeava, dando origem, conseqüentemente, às galáxias [8] e [2].

Caso essa “assimetria” não tivesse ocorrido, o Universo teria evoluído perfeitamente homogêneo, sem a existência de quaisquer das estruturas celestes que hoje conhecemos. No entanto, as causas dessa “assimetria”, que fez do Universo aquilo que hoje conhecemos, permanece um tema atual de pesquisa.

Um dos modelos mais promissores a explicar a origem do processo de formação das estruturas que constituem o Universo é o Modelo Inflacionário. Tal modelo pode ser visto em [9].

### 2.1.6 Evolução

Mudanças significativas nas galáxias, ao longo de sua evolução, ocorrem em períodos de tempo extremamente longos comparados ao tempo de uma vida humana. As evidências de

mudanças nas galáxias decorrem das observação de galáxias em diferentes épocas do Universo. Há algumas décadas atrás era impossível relatar algum efeito ou característica da formação e evolução das galáxias, mas através das evidências fornecidas por telescópios espaciais e pela nova geração de telescópios na Terra, combinados com os avanços na modelagem computacional e teórica, tornou-se possível aos astrônomos descrever a história das galáxias.

Antes de começarmos a discutir sobre a origem e evolução das galáxias, devemos primeiramente esclarecer algumas antigas idéias equivocadas, que perduraram durante um certo tempo [10]:

- As galáxias não evoluem de um tipo morfológico para o outro. As galáxias elípticas não se desenvolvem, evolutivamente, em galáxias espirais ou irregulares, pois as elípticas não podem ser consideradas *galáxias jovens*, uma vez que quase não apresentam gás e poeira, sendo estes os constituintes primordiais para a formação de novas estrelas. A situação inversa também não é válida, isto é, galáxias espirais e irregulares não podem evoluir em galáxias elípticas, porque as galáxias espirais e irregulares contêm tanto estrelas velhas como estrelas jovens, de modo que por possuir estrelas velhas, as galáxias espirais e irregulares também não podem ser consideradas *galáxias jovens*;
- Acreditava-se que uma galáxia, que tenha se formado a partir da rápida rotação de uma nuvem de gás, teria uma grande quantidade de momento angular e então se contrairia lentamente para formar uma galáxia espiral em forma de disco. Já para uma nuvem de gás que girasse lentamente, ela se contrairia mais rapidamente, de modo que estrelas se formariam em uma “menor quantidade de tempo”, usando para isso, praticamente, todo gás e poeira contidos, tornando-se portanto uma galáxia elíptica. Estas descrições refletem a hipótese original de que galáxias formaram-se *de cima para baixo* - a partir de uma única grande nuvem de gás. Porém, evidências modernas mostram claramente que as galáxias se formam, em certo aspecto, *de baixo para cima* - a partir da acumulação gradual de pequenas nuvens de gás e estrelas, e em alguns casos, até de galáxias inteiras (processo este conhecido como canibalismo galáctico). Assim, a história das galáxias é

fortemente marcada por *colisões e fusões*.

As galáxias devem colidir com uma “certa” frequência, já que a separação média entre elas é de apenas cerca de 20 vezes dos seus diâmetros. As estrelas, por outro lado, quase nunca colidem, pois a separação média entre elas corresponde, aproximadamente, a  $10^7$  vezes dos seus diâmetros. Assim, uma colisão entre duas estrelas dentro de uma galáxia é praticamente improvável [10].

Quando duas galáxias colidem, elas podem passar uma pela outra sem colidir suas estrelas. Já as nuvens de gás e o campos magnéticos são passíveis de colisões, porém um dos maiores efeitos produzidos por esse tipo de interação podem ser causados por *marés*. Pois mesmo quando duas galáxias passam, apenas, perto uma da outra, as marés podem causar drásticos efeitos, como por exemplo o aparecimento das chamadas *caudas de maré* (prologamentos provenientes de deformações sofridas pelas galáxias e que provavelmente desecadearam a formação dos braços espirais) [10].

As fusões correspondem a um outro tipo de interação, no qual duas ou mais galáxias se fundem para formar uma nova galáxia, com propriedades bastante distintas dos seus progenitores. As fusões de galáxias são chamadas de *canibalismo galáctico* [10].

Em especial, as elípticas aparecem como sendo o produto de colisões e fusões de galáxias. Elas são desprovidas de gás e poeira, pois provavelmente estes foram utilizados para a rápida formação de estrelas, desencadeadas pelas interações [10].

Assim, algumas colisões e fusões podem deixar uma galáxia sem gás e poeira, o que impossibilita a formação de novas estrelas, como também pode causar alterações às órbitas das estrelas restantes, fazendo com que estas galáxias admitam uma forma elíptica. Os astrônomos suspeitam que as galáxias elípticas, em sua maioria, são formadas pela fusão de pelo menos duas ou três galáxias de tamanhos comparáveis[10].

Já por outro lado, as galáxias espirais nunca devem ter sofrido colisões, uma vez que seus discos finos seriam destruídos pelas forças das marés geradas durante uma colisão com uma galáxia maciça. Além disso, as galáxias espirais mantêm a abundância de gás e poeira,

o que faz com que continuem a produzir estrelas [10].

As galáxias irregulares podem ter sido produzidas por fragmentos pequenos expelidos durante colisões entre galáxias maiores, mas que retiveram gás e poeira suficientes para possibilitar a contínua formação de estrelas nessas estruturas [10].

Embora as interações entre as galáxias sejam, recentemente, consideradas uma das principais causas de seu processo evolutivo, outros fatores também devem influenciar seu decurso, como por exemplo a evolução da composição química do gás e das estrelas presentes nas galáxias [5]; o fato do gás quente, existente em aglomerados de galáxias, fornecer indícios de que as galáxias raramente formam-se de maneira isolada e as nuvens frias de gás que podem “cair” nas galáxias e adicionar material para a formação de estrelas [10]. Tais processos ainda estão sendo estudados e constituem informações importantes para a melhor compreensão do quadro evolucionário das galáxias.

## 2.2 A Massa das Galáxias Espirais

De maneira geral, se considerada como um sistema que se encontra gravitacionalmente isolado, a massa das galáxias pode ser medida através do Teorema do Virial, o qual pode ser visto em [7]. Porém aqui, vamos nos preocupar em analisar, especificamente, a distribuição de massa de galáxias espirais, utilizando um outro artifício: as curvas de rotação<sup>7</sup>.

Sabe-se que as galáxias contêm um grande número de estrelas (vários bilhões), apesar de algumas ter somente 10 milhões. Contudo, mesmo com este grande número, as estrelas não são as constituintes dominantes da massa das galáxias. Dos três constituintes descritos na seção 2.1.3, temos que, além das estrelas, o gás (especificamente, o hidrogênio atômico) também nos fornece importantes indicações sobre a distribuição de massa nas galáxias. Pois, através da análise da velocidade de rotação das nuvens de gás de hidrogênio atômico, foi

---

<sup>7</sup>As curvas de rotação são definidas pela variação da velocidade orbital, ou rotacional,  $v_c(r)$ , em torno do centro galáctico, com a distância a partir do centro [7].

possível determinar a distribuição de massa referente a uma galáxia espiral. Essa análise será discutida logo adiante.

No entanto, até o momento, nenhum dos componentes mencionados na subseção 2.1.3 são preponderantes para a massa da galáxia. De modo que o principal constituinte é algo ainda desconhecido, denominado por *matéria escura*, a qual foi evidenciada graças às análises das curvas de rotação das galáxias espirais [4]-[7].

Nesta seção, iremos abordar de maneira sucinta três temas: os modelos propostos a fim de explicar a distribuição de massa nas galáxias; o método de obtenção das curvas de rotação e a disparidade entre os resultados esperados e os resultados medidos.

### 2.2.1 Analogia entre as Galáxias e os Sistemas Girantes Conhecidos

Dado o interesse em conhecer a maneira pela qual a massa se distribui nas galáxias, astrônomos decidiram analisar sistemas girantes que, de alguma forma, pudessem ser semelhantes a galáxias. Levaram então em consideração, a distribuição de massa de um corpo sólido e do sistema solar.

Sabe-se que um corpo sólido é um sistema constituído por um número finito de partículas com massa (átomos, por exemplo) agregadas de um modo tal que a distância entre as várias partes que o constituem não variam com o tempo. Assim, tais corpos se movem de forma que todas as suas partes completam um giro ao mesmo tempo. A distribuição de massa nesses objetos é uniforme, ou seja, a mesma quantidade de massa que existe em  $1 \text{ cm}^2$  no centro é a mesma que existe em  $1 \text{ cm}^2$  na periferia (ver Figura 2.3).

Já o sistema solar se move de acordo com o movimento Kepleriano, segundo o qual, os corpos no sistema solar seguem as leis do movimento planetário de Kepler, o qual afirma que objetos que estão mais afastados do centro (o Sol) movem-se mais lentamente, enquanto aqueles que estão mais próximos do centro movem-se mais rapidamente. Verificou-se que a distribuição de massa do sistema solar é similar à sua curva de rotação (ver Figura 2.4). Desde

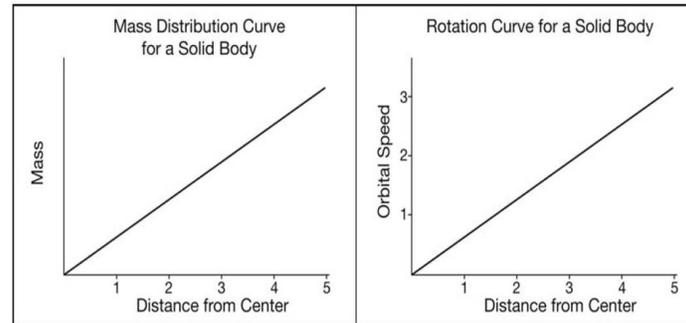


Figura 2.3: A figura da esquerda ilustra a distribuição de matéria de um corpo sólido em relação à distância a partir de seu centro. Já a figura da direita, mostra sua curva de rotação. Observa-se que para um corpo sólido  $v_c(r) \propto r$ . (Fonte: [4].)

que a maior parte da massa do sistema solar (99,8%) está contida dentro do corpo central (o Sol), a distribuição de massa mostra uma rápida diminuição de sua concentração com o aumento da distância a partir do Sol.

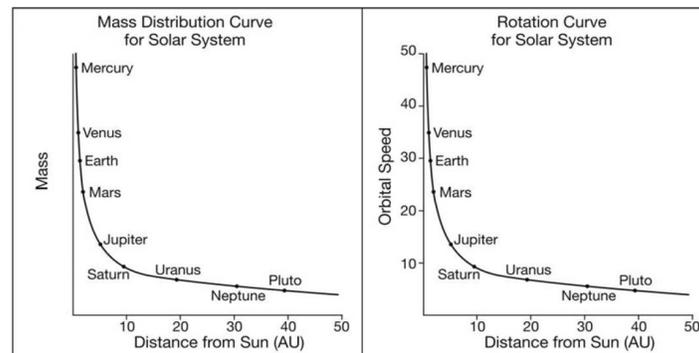


Figura 2.4: O gráfico da esquerda mostra a curva de distribuição de massa do sistema solar. Nota-se que a massa dentro de um determinado raio diminui exponencialmente à medida que a distância, a partir do sol, aumenta. O gráfico à direita, mostra a curva de rotação do sistema solar. Nota-se que a velocidade de rotação do material mais próximo ao centro é maior do que a velocidade de rotação do material mais afastado do centro. (Fonte: [4].)

Até agora, parece ser evidente que a distribuição de massa de um sistema girante nos dá alguma informação sobre sua curva de rotação, uma vez que, em ambos os casos examinados, a curva da distribuição de massa e a curva de rotação se assemelham bastante.

As galáxias, por serem constituídas de várias partes (estrelas, gás e poeira) que se

movem ao redor de um determinado centro, tornam-se mais parecidas com o sistema solar do que com um corpo sólido.

A distribuição de massa de uma galáxia era, até então, desconhecida pelos astrônomos, entretanto, poderia ser imaginada considerando-se a curva de luz das galáxias, supondo que tudo que contribui para a massa da galáxia emite luz. Logo, observando a luz emitida, poderia se analisar sua intensidade em relação à distância ao centro galáctico, e assim, determinar a distribuição de massa.

Observando a curva de luz de qualquer galáxia espiral, (ver Figura 2.5), poderíamos supor que as curvas de rotação de tais galáxias deveriam ser bastante semelhantes à curva de rotação do sistema solar [4].

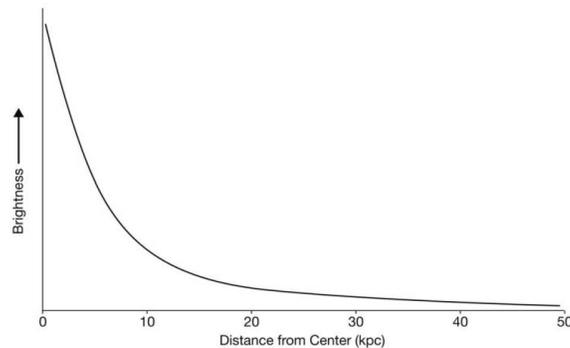


Figura 2.5: O gráfico mostra a curva de distribuição de luz de uma típica galáxia espiral. Observe que a luz diminui exponencialmente a medida que a distância aumenta a partir do centro galáctico. (Fonte: [4].)

### 2.2.2 Procedimentos para a Obtenção das Curvas de Rotação

A medição da velocidade de rotação das galáxias espirais é feita através da medição da velocidade de rotação do gás de hidrogênio atômico.

Com o advento da astronomia de rádio em meados do século XX, foi descoberto que o gás de hidrogênio atômico emite radiação no comprimento de onda de 21 cm<sup>8</sup>.

---

<sup>8</sup>Em 1945, Hendrik Van de Hulst previu que o hidrogênio atômico (HI) emitiria num comprimento de onda

Através do modelo do átomo de Bohr, sabemos que o hidrogênio apresenta vários níveis de energia que são determinados pela posição orbital do elétron. O nível de energia mais baixo, nível 1, é denominado de estado fundamental. Contudo, este nível de energia, na verdade, está dividido em dois, quando se leva em consideração a estrutura hiperfina do átomo de hidrogênio neutro. A razão é que elétrons e prótons têm uma propriedade chamada Spin, responsável pelo movimento de rotação da partícula em torno do seu próprio eixo (momento angular intrínseco). O elétron girando ao redor do próton pode ter spin paralelo ou anti-paralelo em relação ao spin do próton. O estado anti-paralelo representa um estado de mais baixa energia do que o paralelo. E numa transição do estado paralelo para o anti-paralelo, por parte do elétron, a diferença de energia emitida corresponde à linha de radiação de 21 cm. Porém, essa transição ocorre uma vez a cada 10 milhões de anos. Embora seja rara, ela pode ser detectável na região rádio do espectro eletromagnético, através do uso de radiotelescópios<sup>9</sup>, uma vez que as galáxias possuem monstruosas nuvens de gás de hidrogênio atômico (HI), com cerca de  $10^{65}$  átomos [4]. Este fato propicia um grande aumento da probabilidade de serem detectadas tais emissões, em um dado tempo.

Por estarem distribuídas, principalmente, ao longo do disco, as nuvens de HI, assim como as estrelas, possuem uma velocidade orbital devido à rotação do disco galáctico. A intensidade da linha 21 cm depende da densidade da coluna da linha de visada<sup>10</sup>. Assim, observando HI em diferentes direções da galáxia e através das medidas dos desvios da linha de 21cm observadas (desvio este provocado pela rotação do disco), os astrônomos puderam determinar o quão rápido uma nuvem de HI se move em direção à Terra ou se afasta dela, baseados no Efeito Doppler [4].

Dessa maneira, foi-se possível medir a velocidade radial do gás HI, bem como a dos demais objetos pertencentes ao disco galáctico. De modo que a linha de radiação 21 cm torna-se uma boa indicadora da estrutura da galáxia, uma vez que esta nos informa sobre o particular na banda do rádio. O comprimento de onda é de 21,1 cm ( $f = 1420.4$  MHz); tal radiação ficou conhecida como linha de radiação de 21 cm [3].

<sup>9</sup>Radiotelescópio é um aparelho que observa as ondas de rádio emitidas por fonte de rádio.

<sup>10</sup>Linha de visada corresponde a linha imaginária que une dois objetos sem interceptar obstáculos.

movimento coletivo de estrelas e nuvens interestelares ao redor do centro galáctico.

Portanto, através das análises das emissões de HI, pôde-se calcular o perfil rotacional da galáxia, isto é, a curva de rotação, obtendo então, informações importantes sobre a distribuição de massa nas galáxias espirais. Segundo [1], assumindo que a maior parte da massa na galáxia encontra-se na região central (esfericamente simétrica), podemos determinar a massa através da igualdade entre os valores absolutos da força gravitacional e da força centrípeta,

$$F_G = F_c \Rightarrow \frac{GM_G m}{R^2} = \frac{mv_c^2}{R} \Rightarrow M_G = \frac{Rv_c^2}{G} \quad (2.1)$$

Sendo  $M(R)$  a massa interna ao raio  $R$ , temos que

$$M(R) = \frac{Rv_c^2(R)}{G} \quad (2.2)$$

onde,  $R$  é a distância da distribuição de massa com relação ao centro;  $v_c(R)$  é a velocidade circular orbital da distribuição de massa interna à  $R$ , e  $G$  é a constante gravitacional.

### 2.2.3 Modelos propostos X resultados obtidos

Os resultados das curvas de rotação observadas, para várias galáxias espirais, foi completamente inesperado e não coincidia com nenhum dos modelos propostos. A figura abaixo, apresenta as curvas de rotação de sete galáxias espirais dadas por [11].

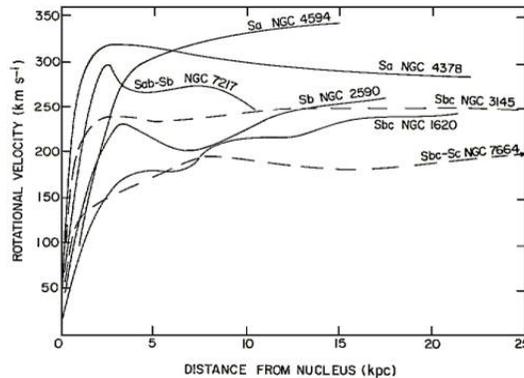


Figura 2.6: Curvas de rotação de sete galáxias espirais. (Fonte: [11].)

As observações da linha de radiação 21cm de HI indicavam claramente que as galáxias não giravam como um corpo sólido, nem tão pouco, seguiam curvas de rotação Keplerianas.

Assim, através da simples comparação entre a curva de rotação típica de uma galáxia espiral e a curva Kepleriana esperada (de acordo com a equação (2.2) ), podemos perceber, olhando para a Figura 2.7, que se toda a massa da galáxia estivesse contida dentro do raio que contém a matéria luminosa esperaríamos que quanto maior a distância ao centro, menor seria a velocidade (curva A). No entanto isto não acontece, já que nas partes externas de muitas galáxias espirais, a velocidade de rotação parece não mais depender de  $R$ , permanecendo praticamente constante, indicando que quanto maior  $R$ , maior a massa interna a ele (curva B).

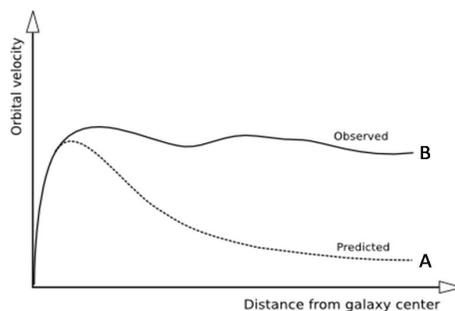


Figura 2.7: Esboço do perfil rotacional de uma típica galáxia espiral: (A) curva previstas e (B) curva observada.

Portanto, vemos que a luminosidade da galáxia tende a diminuir a medida que se afasta do centro, porém, de acordo com a curva de rotação observada, a massa continua crescendo. Isto significa que uma grande parte da massa das galáxias deve ser não luminosa. Alguma espécie de massa que não emite qualquer tipo de radiação eletromagnética, mas apenas interage gravitacionalmente mantendo todas as partes da galáxia coesa, caracterizando uma curva de rotação “achatada”. Pelo fato de desconhecermos a natureza dessa matéria e levando em consideração suas características apresentadas, ela é conhecida como *matéria escura*<sup>11</sup> [4]. Na literatura o termo *matéria escura* denota qualquer forma de matéria cuja

<sup>11</sup>Embora a base da Astronomia e do estudo do Universo estejam alicerçados no fato de que as forças que regem qualquer movimento observado seguem as leis de Newton. A existência da matéria escura é algo não explicado pela Mecânica Newtoniana.

existência é inferida apenas pelo seu efeito gravitacional, ela não emite qualquer tipo de radiação eletromagnética.

Ao longo dos anos, uma vasta variedade de candidatos a matéria escura têm sido sugeridos. Em sua grande maioria, se destacam duas classes propostas: os WIMPs - partículas massivas que interagem fracamente, do inglês *weakly interacting massive particles* - e os MACHOs - objetos massivos compactos do halo, em inglês, *massive compact halo objects*. Tais candidatos podem ser vistos em [4].

Uma outra possibilidade, também considerada, para explicar o fato das curvas de rotação apresentarem um comportamento “plano” é admitida pelo MOND (Modified Newtonian Dynamics). Segundo Milgrom [12], a evidência de matéria escura é apenas aparente, porque o que se evidencia diretamente é a discrepância na massa de galáxias e de aglomerados. A massa total não fornece gravidade suficiente para explicar as acelerações observadas em tais sistemas utilizando a Física padrão [12]. Assim, se aderirmos à dinâmica padrão, a necessidade de matéria escura é a única solução que podemos conceber. Contudo, é possível que as leis da dinâmica, comprovadas em laboratório e no sistema solar, possam simplesmente não serem aplicadas no domínio das galáxias. Dessa forma, pode-se abrir mão completamente da matéria escura se forem feitas modificações apropriadas nas leis da dinâmica que regem os parâmetros pertinentes aos sistemas galácticos, o que implicaria correções no potencial gravitacional Newtoniano. Em [13] e [14] são sugeridos propostas de potencial gravitacional modificado e em [15] são apresentadas implicações da teoria MOND na Relatividade Geral.

### 2.3 Discos Galácticos

A maioria das estrelas nas galáxias espirais encontram-se “achatadas” numa estrutura com simetria aproximadamente axial. Essa estrutura, tipo disco, é então conhecida como *disco galáctico*. O plano médio desse disco é chamado de *plano galáctico* e serve como equador de

coordenadas galácticas  $(l, b)$ , onde  $l$  é a longitude galáctica e  $b$  é a latitude galáctica [1].

A maior parte da luz emitida por uma típica galáxia espiral advém de um disco fino [1]. De modo que uma fração substancialmente considerável da massa dessas galáxias deve estar concentrada no disco.

Os discos galácticos apresentam uma grande quantidade de gás, poeira e estrelas. É dentro do disco que se encontra a maior parte do gás e da poeira contidos numa galáxia [4]. Já as estrelas são consideradas as componentes primordiais para a massa do disco, pois o cálculo do potencial gravitacional da grande coleção de estrelas presentes no disco de galáxias espirais constitui um bom indicativo sobre a distribuição de massa nessas estruturas [1].

A medida da distribuição das estrelas no disco galáctico é dada pelo *brilho de superfície*. O brilho de superfície de uma galáxia corresponde a sua luminosidade estelar total emitida por unidade de área do disco. Conforme descrito por [1], as observações de galáxias espirais sugerem que o brilho da superfície seja aproximadamente uma função exponencial do raio  $R$ ,

$$I(R) = I_d \exp(-R/R_d) \quad (2.3)$$

onde  $R_d$  é o comprimento de extensão do disco.

As galáxias espirais não são infinitesimalmente finas. Embora a densidade de estrelas caia exponencialmente na direção perpendicular ao plano galáctico (chamada “direção vertical”) [1], a análise da estrutura vertical do disco revela a existência de duas estruturas com diferentes escalas de altura (espessura), diferentes densidades e populações estelares também diferentes, as quais caracterizam os denominados *disco fino* e *disco espesso*. A população estelar do disco espesso é mais velha, gira mais lentamente e tem metalicidade mais baixa em comparação à população estelar do disco fino [16]. A densidade de superfície do disco espesso é cerca de 7% da densidade de superfície do disco fino, de modo que, no plano galáctico para cada estrela pertencente ao disco espesso, há em média, 50 estrelas pertencentes ao disco fino [1].

Nas seções anteriores, vimos que o disco está em rotação em volta do centro galáctico,

fazendo com que os objetos pertencentes a ele descrevam órbitas de rotação diferencial.

Através do estudo dinâmico dos sistemas estelares, mais precisamente do cálculo do livre caminho médio de uma estrela antes da colisão com outra estrela, pôde-se verificar que as colisões entre as estrelas são tão raras, que chegam a ser irrelevantes [1]. De modo que, para a maioria dos efeitos, as estrelas do disco podem ser tratadas como massa pontual [1]. Assim, desde que as colisões diretas são raras, cada movimento da estrela é determinado, apenas, pela atração gravitacional de todas as outras estrelas da galáxia. Uma primeira aproximação útil para o campo gravitacional da galáxia pode então ser obtida imaginando-se que a massa da galáxia está continuamente distribuída no disco, ao invés de concentrada em pontos discretos de massa [1].

Logo, como grande parte da matéria visível de uma galáxia reside nas estrelas, devemos então calcular o potencial da grande coleção de estrelas presentes no disco. Esse cálculo pode ser feito de duas maneiras. A maneira inviável seria somar os potenciais de massa-pontual de todas as estrelas que constituem o disco galáctico (lembrando que uma galáxia possui cerca de  $10^{11}$  estrelas). A outra maneira, mais viável, seria modelar o potencial como resultante de uma densidade suavizada, que seja em toda parte proporcional à densidade local de cada estrela. Vamos então, escolher a forma mais viável!

Sabemos que as estrelas do disco viajam em órbitas circulares, aproximadamente estáveis, em volta do centro galáctico. Em particular, podemos obter uma excelente aproximação para a órbita de uma única estrela na galáxia, tratando-a como uma partícula-teste que se move em um potencial suave, do tipo descrito anteriormente. Assim, a velocidade de uma estrela em uma órbita circular de raio  $R$  no plano galáctico é denotado como  $v_c(R)$ . O gráfico de  $v_c(R)$  em relação à  $R$  é chamado de curva de velocidade circular (ou curva de rotação), como vista na seção 2.2.

Calcular o potencial gravitacional e o campo de forças gerados por uma distribuição de matéria é geralmente uma tarefa árdua, que muitas vezes nos leva à fórmulas complicadas envolvendo funções especiais, ou cálculos numéricos. Felizmente, para muitos propósitos, é

suficiente representar uma galáxia por um modelo simples que apresente grosseiramente a mesma forma da galáxia, ou seja, esférica ou tipo disco, para o caso de galáxias elípticas ou espirais, respectivamente [1].

Do ponto de vista da Física Clássica, o comportamento dos sistemas estelares é determinado pelas leis Newtonianas do movimento e da gravitação. Com base nos resultados gerais da Teoria Potencial Newtoniana para sistemas simples de corpos esféricos e “achatados”, vamos apresentar, nesta seção, alguns modelos de potencial a fim de melhor compreender o real potencial gravitacional das galáxias.

### **2.3.1 Modelos teóricos de discos galácticos segundo a Teoria Newtoniana**

Na teoria Newtoniana, modelos para aglomerados globulares e galáxias mais esféricas (elípticas) foram apresentados por Plummer (1911) e King (1966). Já Kuzmin (1956) obteve o primeiro par potencial-densidade que descreve a distribuição de massa dentro de galáxias altamente “achatadas” e com simetria axial. Toomre (1963) encontrou uma família de pares potencial-densidade a partir de derivadas sucessivas do primeiro par potencial-densidade descrito por Kuzmin. Tempos depois, Miyamoto e Nagai (1975), através das famílias de modelos de discos propostas por Toomre, desenvolveram pares de potencial-densidade tridimensionais, em função dos pares já conhecidos. Similarmente, Satoh (1980) obteve uma série de pares potencial-densidade para uma distribuição esférica de massa, a partir de derivadas de ordem superior do par potencial-densidade de Plummer.

Nesta seção, iremos apenas apresentar os modelos de Plummer, Kuzmin e Miyamoto-Nagai. Muito embora, esses modelos não sejam precisamente condizentes com os resultados observados para a distribuição de massa nas galáxias, mas se mostram bastante úteis na modelagem de diversas classes de galáxias e aglomerados globulares. Vamos também calcular o campo gravitacional gerado por um disco semelhante à uma lâmina fina a partir das funções de Bessel. Tendo em vista que a maior parte da luz emitida por uma galáxia espiral advém

de um disco fino. Os demais potenciais usados em modelos galácticos podem ser vistos em [1].

### 2.3.2 Modelo de Plummer

Uma maneira importante de se caracterizar um sistema galáctico é analisar como a sua densidade de massa varia em um certo raio, o que é chamado de perfil de densidade ou perfil de massa. É a distribuição de densidade que determina o potencial, que rege o movimento das estrelas. Portanto, conhecer o potencial gerado por uma certa distribuição de massa e sua correspondente densidade, constitui um fator importante ao estudo desses sistemas, pois, uma vez especificado o potencial ou a densidade, as diversas outras características são decorrentes.

Espera-se, para muitos sistemas esféricos, que a densidade seja praticamente constante próximo ao centro e caia à zero para um raio grande. Fato este, evidenciado na distribuição de luminosidade de galáxias esféricas (elípticas) e aglomerados globulares [1].

Diante do exposto, tomando por base o potencial Newtoniano gerado, por um sistema simples, de uma partícula pontual de massa  $M$ , localizada na origem do sistema de coordenadas,

$$\Phi = -\frac{GM}{r}, \quad (2.4)$$

onde  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  corresponde à distância a partir do centro, e levando em consideração a equação de Poisson, que estabelece a relação entre o potencial e a densidade,

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho, \quad (2.5)$$

pode-se verificar que os potenciais de tais sistemas, com o perfil de densidade apresentado acima, devem ser proporcionais à  $r^2 + \text{constante}$ , para um raio pequeno, e  $r^{-1}$ , para um raio grande. Um simples potencial com estas características foi estudado pelo astrônomo inglês Henry Crozier Keating Plummer [17]. O par potencial-densidade<sup>12</sup> descrito por Plummer foi o

---

<sup>12</sup>Chamamos de par de potencial-densidade a densidade e o potencial que simultaneamente obedecem a equação de Poisson. A princípio, quaisquer funções  $\Phi$  e  $\rho$  que satisfazem a equação de Poisson poderia ser um par potencial-densidade. Contudo, nosso interesse irá se restringir, apenas, a funções fisicamente aceitáveis; por exemplo, a densidade deve ser sempre maior ou igual a zero.

primeiro a se ajustar aos dados observacionais de aglomerados globulares, constituindo assim o chamado Modelo de Plummer, o qual pode ser facilmente obtido pela transformação de  $r \rightarrow \sqrt{r^2 + b^2}$ , com  $b > 0$ , na expressão (2.4). Assim, o potencial assume a seguinte forma,

$$\Phi_P(r) = -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + b^2}} \quad (2.6)$$

onde  $b$  é denominado *escala de comprimento de Plummer* e  $M$  corresponde a massa total do sistema.

Tomando o Laplaciano do potencial de Plummer, em coordenadas esféricas, temos

$$\nabla^2 \Phi_P(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Phi_P(r)}{dr} \right) = \frac{3GMb^2}{(r^2 + b^2)^{5/2}} \quad (2.7)$$

Substituindo (2.7) em (2.5), obtemos que a densidade correspondente ao potencial de Plummer é

$$\rho_P(r) = \frac{3M}{4\pi b^3} \left( 1 + \frac{r^2}{b^2} \right)^{-5/2} \quad (2.8)$$

A massa interior a um raio  $r$  é dada por

$$M(r) = \int_V \rho_P(r') d^3r' \Rightarrow M(r) = M \frac{r^3}{(r^2 + b^2)^{3/2}} \quad (2.9)$$

A velocidade circular é a velocidade que teria uma partícula teste numa órbita circular a uma distância  $r$  do centro. Assim,

$$v_c^2(r) = r|\vec{a}_c| = r|\vec{F}| = r|-\vec{\nabla}\Phi_P| = r \frac{d\Phi_P(r)}{dr} \Rightarrow v_c(r) = \sqrt{GM \frac{r^2}{(r^2 + b^2)^{3/2}}}, \quad (2.10)$$

onde  $\vec{a}_c$  é a aceleração centrípeta e  $\vec{F}$  é a força gravitacional por unidade de massa (campo gravitacional).

A energia potencial é

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho_P(r') \Phi_P(r') d^3r' \Rightarrow W = -\frac{3\pi GM^2}{32b}. \quad (2.11)$$

### 2.3.3 Modelo de Kuzmin

Grande parte dos objetos astronômicos apresentam distribuições de matéria com simetria axial, em destaque às formas discoidais encontradas em galáxias espirais.

Um modelo de massa para representar o potencial gravitacional de um disco infinitamente fino foi introduzido pelo astrônomo finlandês Grigorij Kuzmin [18]. O disco de Kuzmin, como ficou então conhecido, pode ser construído através do potencial gravitacional de um massa pontual. Lembrando que, para o caso de um potencial com simetria axial, a função de distribuição de massa pode ser escrita através de duas variáveis. O raio  $R$  em coordenadas cilíndricas e a altura  $z$ . Dessa forma, a construção do potencial de um disco de Kuzmin, a partir do potencial de uma massa pontual, pode ser visualizado com a ajuda das figuras abaixo.

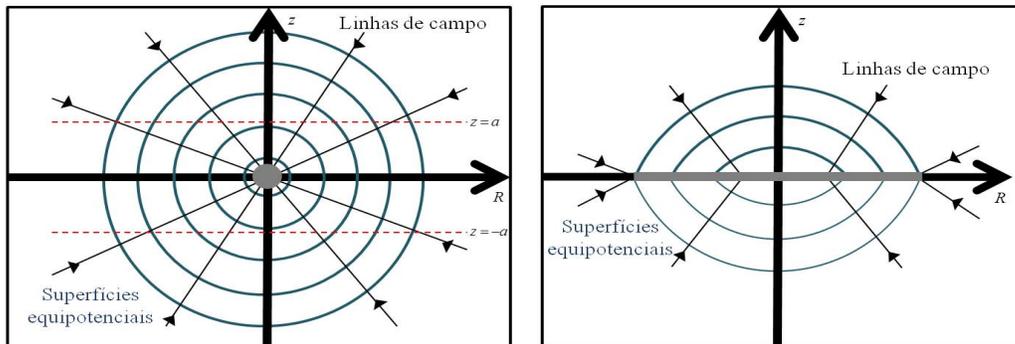


Figura 2.8: A Figura da esquerda mostra as linhas de campo e as superfícies equipotenciais de uma massa pontual. Já a Figura da direita, apresenta as linhas de campo e superfícies equipotenciais de um disco de Kuzmin.

A ilustração da esquerda da Figura 2.8 mostra o potencial de uma massa pontual, descrita por contornos de igual potencial (superfícies equipotenciais), e linhas de campo com direção radial, apontadas no sentido da massa pontual criadora do campo. As linhas tracejadas são superfícies  $z = \text{constante}$  ( $z = \pm a$ ).

Já a ilustração da direita da Figura 2.8, apresenta o potencial do disco de Kuzmin,

produzido pelo “corte” das superfícies  $z = \pm a$ ; seguido pela retirada da região compreendida entre essas superfícies, e posterior junção das partes restantes. Podemos observar que, as linhas de campo não convergem mais para a origem, indicando, portanto, que a massa em questão não está mais concentrada num ponto, localizado na origem, mas sim, ao longo do eixo  $z = 0$ .

A equivalência matemática referente a construção do disco de Kuzmin pode ser facilmente obtida através da transformação  $z \rightarrow a + |z|$  aplicada ao potencial de uma massa pontual, equação (2.4). Assim o potencial resultante gerado pelo disco de Kuzmin é

$$\Phi_K(R, z) = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + (a + |z|)^2}}, \quad (2.12)$$

onde  $R = \sqrt{x^2 + y^2}$  é o raio em coordenadas cilíndricas e  $a \geq 0$ .

O potencial (2.12) satisfaz a equação de Laplace,  $\nabla^2\Phi = 0$ , em toda parte, desde que  $z \neq 0$ . Isto significa que, a densidade de matéria que gera este potencial está confinada no plano do disco  $z = 0$ . Além da equação de Poisson, o Teorema de Gauss<sup>13</sup>, visto em [1], pode ser usado para encontrar a densidade superficial de massa correspondente ao potencial do disco de Kuzmin, considerando-se um volume simples (uma caixa infinitesimal, de pequenas áreas de superfícies superior e inferior e com altura tendendo à zero), que contenha uma pequena porção do plano  $z = 0$ . A Figura 2.9 nos dá uma boa indicação do procedimento a ser seguido.

Dessa forma, a densidade do disco de Kuzmin é

$$\sigma_K(R) = \frac{aM}{2\pi(R^2 + a^2)^{3/2}} \quad (2.13)$$

Através do par potencial-densidade de Kuzmin, equações (2.12) e (2.13), podemos determinar as demais propriedades deste modelo, de maneira similar às calculadas para o Modelo de Plummer.

Assim, pode-se verificar que, tanto o Modelo de Plummer como o Modelo de Kuzmin, apresentam uma massa finita, o que faz da velocidade circular, associada à esses potenciais,

---

<sup>13</sup>O teorema de Gauss diz que a integral da componente normal do gradiente do potencial,  $\vec{\nabla}\Phi$ , em uma superfície fechada é igual a massa contida nesta superfície vezes  $4\pi G$ .

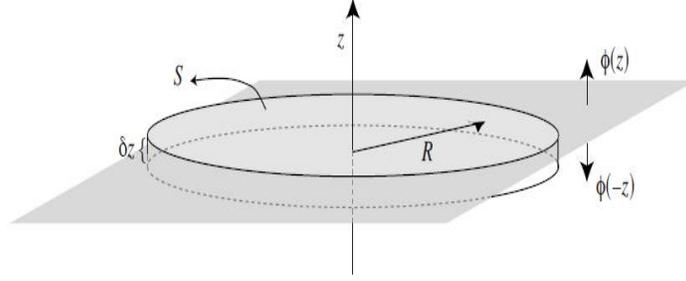


Figura 2.9: Geometria para aplicação do teorema de Gauss para o potencial (2.12). Fazendo  $\delta z \rightarrow 0$  e integrando sobre a superfície  $S$  dos dois lados do plano ( $\pm z$ ), obtemos a densidade superficial. (Fonte: [19]).

ter um comportamento semelhante ao modelo Kepleriano, isto é,  $v_c \propto r^{-1/2}$ , para  $r$  grande. Resultado que não condiz com os dados observacionais, já que a curva de rotação das galáxias espirais tendem a ser planas ou a aumentar para  $r$  grande, como vimos na subseção 2.2.3.

### 2.3.4 Modelo de Miyamoto-Nagai

O disco infinitesimal de Kuzmin pode ser generalizado para uma distribuição tridimensional de massa. Isto foi feito por Miyamoto e Nagai [20], que reescreveram o potencial (2.12) por meio da seguinte transformação:  $|z| \rightarrow \sqrt{z^2 + b^2}$  com  $b > 0$ . Obtendo dessa forma,

$$\Phi_M(R, z) = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2}}. \quad (2.14)$$

Podemos observar que, quando  $a = 0$ ,  $\Phi_M$  se reduz ao potencial esférico de Plummer (2.6), e quando  $b = 0$ ,  $\Phi_M$  se reduz ao potencial do disco infinitamente fino de Kuzmin (2.12). Logo, dependendo da escolha dos parâmetros  $a$  e  $b$ ,  $\Phi_M$  pode representar qualquer potencial, sendo este intermediário entre um disco infinitamente fino e um sistema esférico.

Calculando o laplaciano do potencial acima,  $\nabla^2 \Phi_M$ , obtemos,

$$\rho_M(R, z) = \left(\frac{b^2 M}{4\pi}\right) \frac{aR^2 + (a + 3\sqrt{z^2 + b^2})(a + \sqrt{z^2 + b^2})^2}{\left[R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2\right]^{5/2} (z^2 + b^2)^{3/2}}. \quad (2.15)$$

Neste par potencial-densidade, equações (2.14) e (2.15), a razão  $b/a$  nos informa o quanto a distribuição de matéria é achatada. De modo que, quanto menor for a razão  $b/a$ ,

maior será o grau de achatamento dessa distribuição. Tais afirmações podem ser evidenciadas através das curvas de isodensidade, para vários valores de  $b/a$ , apresentadas em [1] página 74.

A família de pares potencial-densidade, propostas por Miyamoto e Nagai, constitui um dos modelos mais adequados para descrever a distribuição de massa em galáxias espirais, uma vez que, a massa, nesse modelo, não se encontra mais confinada a um único plano. Além de que, tais modelos também nos ajudam a compreender como o potencial gravitacional de um corpo inicialmente esférico é afetado pelo achatamento desse corpo [1].

### 2.3.5 Potenciais de disco via Funções de Bessel

Existem diversas técnicas para se calcular o potencial de um disco fino, desde as mais intuitivas, como as mostradas anteriormente, até às elaboradas a partir de cálculos mais detalhados, como por exemplo: tratar um disco fino, de simetria axial, como um Esferóide Achatado e resolver a equação de Laplace usando coordenadas esferoidais oblatas [1]. Aqui, vamos utilizar as funções de Bessel para calcular o potencial gerado por um disco fino, pelo fato da teoria das funções de Bessel ser bem conhecida e pela relativa simplicidade na formulação das contas.

O potencial gravitacional, obtido através das funções de Bessel, corresponde a uma expressão alternativa para o cálculo de  $\Phi(R, z)$ , dado por Toomre (1962). No método de Toomre, nós resolvemos a equação de Laplace,  $\nabla^2\Phi = 0$ , sujeita às condições de contorno apropriadas no disco e no infinito [21]. Escrevendo a equação de Laplace em coordenadas cilíndricas, temos

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.16)$$

Supondo que a solução de (2.16) possa ser escrita na forma separável, como um produto de funções, isto é,

$$\Phi(R, z) = J(R) Z(z). \quad (2.17)$$

Pelo método de separação de variáveis nós obtemos,

$$\frac{1}{J(R)} \frac{d}{dR} \left( R \frac{dJ}{dR} \right) = \frac{-1}{Z(z)} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k^2, \quad (2.18)$$

onde  $k$  é um número arbitrário real ou complexo. Assim, temos as seguintes equações diferenciais:

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z(z) = 0, \quad (2.19)$$

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left( R \frac{dJ}{dR} \right) + k^2 J(R) = 0. \quad (2.20)$$

A equação (2.19) pode ser simplesmente integrada, de modo, que obtemos

$$Z(z) = S \exp(\pm kz), \quad (2.21)$$

onde  $S$  é uma constante. Já a equação (2.20) pode ser simplificada se definirmos  $u \equiv kR$ . Dessa forma, podemos reescrever (2.20) como,

$$\frac{1}{u} \frac{d}{du} \left( u \frac{dJ}{du} \right) + J(u) = 0. \quad (2.22)$$

A equação (2.22) é de grande interesse, uma vez que sua solução permanece finita em  $u = 0$ , e vai a zero para valores grandes de  $u$ . Essa solução pode ser convenientemente escrita como

$$J_0(u) = J_0(kR), \quad (2.23)$$

e é conhecida como função cilíndrica de Bessel de ordem zero.

Portanto, utilizando as equações (2.21) e (2.23), temos que, a solução geral do potencial gravitacional de um disco fino, em coordenadas cilíndricas (levando em consideração as devidas condições de contorno), é

$$\Phi_{\pm}(R, z) = \exp(\pm kz) J_0(kR). \quad (2.24)$$

Vale lembrar, que as soluções (2.24) satisfazem a equação de Laplace.

Vamos agora, considerar a seguinte função:

$$\Phi_k(R, z) = \exp(-k|z|) J_0(kR), \quad (2.25)$$

onde  $k$  é um número real e positivo. Podemos verificar em (2.25) que  $\Phi_k \rightarrow 0$  quando  $|z| \rightarrow \infty$ , e além disso,  $\Phi_k \rightarrow 0$  quando  $R \rightarrow \infty$ , uma vez que,  $J_0(u) \rightarrow 0$  quando  $u \rightarrow \infty$ . Logo,  $\Phi_k$  satisfaz todas requisitos necessários para ser o potencial gerado por uma distribuição de densidade isolada e finita. Por outro lado,  $\Phi_k$  coincide com  $\Phi_-$ , para  $z > 0$ , e  $\Phi_k$  coincide com  $\Phi_+$ , para  $z < 0$ . Assim,  $\Phi_k$  também é solução da equação de Laplace, tanto para  $z > 0$  como para  $z < 0$ . Contudo, em  $z = 0$  o gradiente sofre uma certa descontinuidade, não satisfazendo, portanto, a equação de Laplace nessa região. Entretanto, podemos, usando o Teorema de Gauss, determinar a densidade superficial,  $\Sigma_k(R)$ , da fina camada que gera essa descontinuidade. A figura abaixo ilustra como podemos usar o teorema de Gauss.

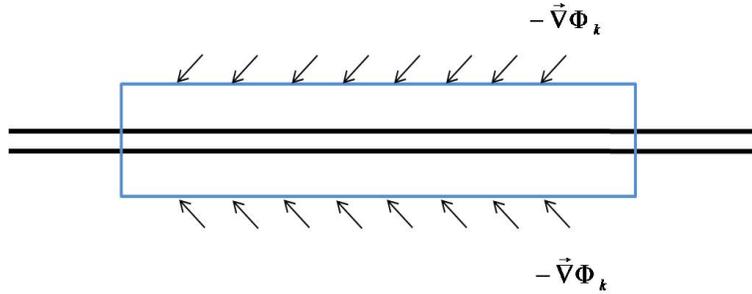


Figura 2.10: A massa do disco está dentro da caixa, mostrada em seção transversal. A componente horizontal de  $\vec{\nabla}\Phi_k$  é devido à atração gravitacional do resto da galáxia. (Fonte: [1].)

Se integrarmos ambos os lados da equação de Poisson sobre um volume arbitrário, de altura  $h$ , contendo uma distribuição massa, e então aplicarmos o teorema da divergência, obteremos

$$\oint_S \vec{\nabla}\Phi \cdot \hat{n} d^2S = 4\pi G \int_V \rho d^3V \quad (2.26)$$

No limite  $h \rightarrow 0$ , segue de (2.26) que:

$$\frac{d\Phi_k}{dz}\Big|_{z \rightarrow +0} - \frac{d\Phi_k}{dz}\Big|_{z \rightarrow -0} = 4\pi G \Sigma_k(R) \quad (2.27)$$

Usando (2.25), obtemos da condição acima:

$$\Sigma_k(R) = -\frac{k}{2\pi G} J_0(kR). \quad (2.28)$$

A expressão (2.28) representa a densidade superficial geradora do potencial (2.25). Pelo fato da densidade superficial em questão não ser positiva definido. Vamos então, encontrar o potencial gerado por um disco de densidade superficial arbitrária  $\Sigma(R)$ , a partir da superposição de  $\Sigma_k(R)$ , através da combinação linear  $S(k)\Sigma_k(R)$ . Usando as equações (2.28) e (2.25), podemos tentar encontrar a função  $S(k)$ , tal que

$$\Sigma(R) = \int_0^\infty S(k)\Sigma_k(R)dk = -\frac{1}{2\pi G} \int_0^\infty S(k)J_0(kR)kdk, \quad (2.29)$$

assim, teremos

$$\Phi(R, z) = \int_0^\infty S(k)\Phi_k(R, z)dk = \int_0^\infty S(k)J_0(kR)\exp(-k|z|)dk. \quad (2.30)$$

Da equação (2.29), vemos que  $S(k)$  é a transformada de Hankel de  $(-2\pi G\Sigma_k(R))$ . As transformadas de Hankel têm propriedades semelhantes às das transformadas de Fourier. Em particular, elas podem ser invertidas, assim como mostra as equações abaixo,

$$g(k) = \int_0^\infty f(r)J_\nu(kr)rdr, \quad (2.31)$$

$$f(r) = \int_0^\infty g(k)J_\nu(kr)kdk. \quad (2.32)$$

Dizemos que  $g$  é a transformada de Hankel de  $f$ , ver apêndice 1.C-7 de [21].

Logo, de (2.29), podemos escrever  $S(k)$  como

$$S(k) = -2\pi G \int_0^\infty J_0(kR)\Sigma(R)RdR. \quad (2.33)$$

Desse modo, substituindo (2.33) em (2.30), obtemos finalmente o potencial, dado por

$$\Phi(R, z) = -2\pi G \int_0^\infty dk \exp(-k|z|)J_0(kR) \int_0^\infty J_0(kR')\Sigma(R')R'dR' \quad (2.34)$$

Já mencionamos, na seção 2.2, que uma quantidade de grande interesse particular é a velocidade circular,  $v_c(R)$ . Sendo assim, para obtermos  $v_c(R)$ , façamos  $z = 0$  na equação (2.30) e diferenciemos ambos os lados, com a ajuda da identidade  $dJ_0(x)/dx = -J_1(x)$ . Então, ficamos com

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial R}\right)_{z=0} = \int_0^\infty S(k)\frac{dJ_0(kR)}{dR}dk \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_c^2(R) = R \left( \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_{z=0} = -R \int_0^\infty S(k) J_1(kR) k dk \quad (2.35)$$

Como vimos na seção 2.3, os discos das galáxias espirais têm, tipicamente, distribuições exponenciais de brilho de superfície, equação (2.3). Por conseguinte, é comum modelar discos, infinitesimalmente finos, como discos exponenciais, com uma distribuição de densidade superficial dada por [1]:

$$\Sigma(R) = \Sigma_0 \exp(-R/R_d) \quad (2.36)$$

Vamos, então, determinar a função  $S(k)$  correspondente à densidade superficial descrita por (2.36). Substituindo (2.36) em (2.33), encontramos  $S(k)$  do disco exponencial, como sendo

$$S(k) = -2\pi G \int_0^\infty J_0(kR) \Sigma_0 \exp(-R/R_d) R dR \quad (2.37)$$

Para resolver a integral de (2.37), vamos utilizar a expressão (6.623.2) de [22], ou seja,

$$\int_0^\infty \exp(-\tau x) J_\nu(\beta x) x^{\nu+1} dx = \frac{2\tau (2\beta)^\nu \Gamma(\nu + 3/2)}{\sqrt{\pi} (\tau^2 + \beta^2)^{\nu+3/2}} \quad (2.38)$$

além disso,  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ ;  $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ ;  $\Gamma(1+1/2) = 1/2\Gamma(1/2) = 1/2\sqrt{\pi}$ .

Fazendo  $\tau = 1/R_d$ ,  $x = R$ ,  $\nu = 0$  e  $\beta = k$  temos que,

$$\int_0^\infty J_0(kR) \Sigma_0 \exp(-R/R_d) R dR = \frac{R_d^2}{[1 + (kR_d)^2]^{3/2}} \quad (2.39)$$

Substituindo (2.39) em (2.37), temos

$$S(k) = -\frac{2\pi G \Sigma_0 R_d^2}{[1 + (kR_d)^2]^{3/2}} \quad (2.40)$$

Finalmente, substituindo (2.40) em (2.30), obtemos que o potencial gerado por um disco exponencial é

$$\Phi(R, z) = -2\pi G \Sigma_0 R_d^2 \int_0^\infty \frac{J_0(kR) \exp(-k|z|)}{[1 + (kR_d)^2]^{3/2}} dk \quad (2.41)$$

Fazendo  $z = 0$  em (2.41) ficamos com

$$\Phi(R, 0) = -2\pi G \Sigma_0 R_d^2 \int_0^\infty \frac{J_0(kR)}{[1 + (kR_d)^2]^{3/2}} dk \quad (2.42)$$

Entretanto, para resolver a equação (2.42), vamos utilizar algumas sugestões vistas em [23]. Primeiramente, façamos a seguinte substituição  $y \equiv R/2R_d$  em (2.42). Assim, podemos escrever

$$\Phi(R, 0) = -2\pi G \Sigma_0 R_d^2 (2y)^3 \int_0^\infty \frac{J_0(kR)}{[4y^2 + (kR)^2]^{3/2}} dk \quad (2.43)$$

Com a ajuda de [24], página 441, temos

$$\int_0^\infty \frac{J_0(u)}{[u^2 + (2w)^2]^{3/2}} du = \frac{I_0(w) K_1(w)}{2w} \quad (2.44)$$

onde  $I_n(w)$  e  $K_n(w)$  são funções modificadas de Bessel de primeiro e segundo tipos, ver apêndice 1.C-7 de [21].

Considerando a mudança de variável,  $u = kR \Rightarrow du = Rdk$  e fazendo  $w \equiv y$ , podemos reescrever a integral (2.44) como:

$$\int_0^\infty \frac{J_0(kR)}{[(kR)^2 + (2y)^2]^{3/2}} dk = \frac{I_0(y) K_1(y)}{2yR}. \quad (2.45)$$

Assim, substituindo (2.45) em (2.43), chegamos a

$$\Phi(R, 0) = -2\pi G \Sigma_0 R I_0(y) K_1(y). \quad (2.46)$$

A fim de determinar a velocidade circular do disco exponencial, vamos escrever o potencial (2.46) com a ajuda da fórmula 8.477.2, dada por [22], na qual  $I_{\nu+1}(w) K_\nu(w) + I_\nu(w) K_{\nu+1}(w) = 1/w$ . De modo, que podemos escrever esse potencial na forma

$$\Phi(R, 0) = -\pi G \Sigma_0 R \left[ I_0(y) K_1(y) - I_1(y) K_0(y) + \frac{2R_d}{R} \right]. \quad (2.47)$$

Podemos ainda escrever o potencial (2.47) em função de  $y$ , lembrando que  $y \equiv R/2R_d$ . Assim,

$$\Phi(y, 0) = -2\pi G \Sigma_0 y R_d \left[ I_0(y) K_1(y) - I_1(y) K_0(y) + \frac{1}{y} \right] \quad (2.48)$$

Deferenciando (2.48) com relação à  $y$ , e levando em consideração as seguintes propriedades das derivadas das funções modificadas de Bessel:  $I'_0(w) = I_1(w)$ ;  $K'_0(w) = -K_1(w)$ ;  $I'_1(w) = [I_0(w) - I_1(w)/w]$  e  $K'_1(w) = [-K_0(w) - K_1(w)/w]$ , obtemos

$$\frac{\partial \Phi(y, 0)}{\partial y} = -4\pi G_0 y R_d [I_1(y) K_1(y) - I_0(y) K_0(y)] \quad (2.49)$$

Através da regra da cadeia, podemos escrever a diferencial acima como

$$\frac{\partial\Phi(y, 0)}{\partial y} = \frac{\partial\Phi(R, 0)}{\partial R} \frac{dR}{dy} \Rightarrow \frac{\partial\Phi(y, 0)}{\partial y} = \frac{\partial\Phi(R, 0)}{\partial R} 2R_d \quad (2.50)$$

Portanto, a velocidade circular quadrática de um disco exponencial é

$$v_c^2(R) = R \frac{\partial\Phi(R, 0)}{\partial R} = \frac{\pi G \Sigma_0 R^2}{R_d} \left[ I_0\left(\frac{R}{2R_d}\right) K_0\left(\frac{R}{2R_d}\right) - I_1\left(\frac{R}{2R_d}\right) K_1\left(\frac{R}{2R_d}\right) \right] \quad (2.51)$$

Na Figura 2.11 são traçadas três curvas de rotação dadas por: uma distribuição de massa do tipo disco exponencial, uma distribuição esférica e uma massa pontual, utilizando-se para os três casos a massa de um disco exponencial contida no interior de um raio  $R$ , dada por:

$$M_d(R) = 2\pi \int_0^R \Sigma_0 \exp(-R'/R_d) R' dR' = 2\pi \Sigma_0 R_d^2 \left[ 1 - \exp(-R/R_d) \left( 1 + \frac{R}{R_d} \right) \right]. \quad (2.52)$$

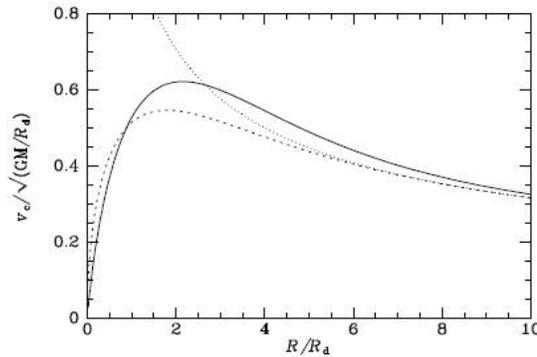


Figura 2.11: Curva da velocidade circular de: um disco exponencial (curva cheia); um sistema de massa pontual, em que toda a massa do disco encontra-se concentrada no centro (curva pontilhada); um corpo esférico em que  $M(R)$  é dada pela eq. (2.52) (curva tracejada). (Fonte: [1] página 102.)

Através da análise das curvas, pôde-se observar que a curva de velocidade circular do disco encontra-se entre a curva de uma distribuição esférica (no limite inferior), e a curva da velocidade circular Kepleriana<sup>14</sup> (no limite superior). Além disso, a proximidade entre as curvas se dá de forma suave, de maneira a decrescer com o aumento do raio.

<sup>14</sup>A velocidade circular de uma massa pontual é geralmente referida como Kepleriana, pois Kepler foi quem primeiro determinou a velocidade circular para o sistema solar,  $v_c \propto r^{-1/2}$ .

Dessa forma, a utilização do modelo de um potencial Newtoniano dado por uma distribuição tipo disco, tende a possibilitar a diminuição da presença de matéria escura para explicar as curvas de rotação planas.

Na prática, costuma-se usar a equação (2.35) para adequar um modelo, com distribuição de densidade superficial  $\Sigma$ , à alguns parâmetros ajustáveis às observações de  $v_c$  [21].

Embora o modelo de disco exponencial seja amplamente utilizado para modelagem de curvas de rotação e na formação de galáxias disco, seu uso é geralmente inadequada para modelos dinâmicos mais detalhados . Uma vez que, os discos realistas têm uma espessura diferente de zero. Em princípio, é simples construir modelos de disco de espessura, desde que a distribuição da densidade é separável, ou seja, pode ser escrita como o produto de uma função de  $R$  e uma função de  $z$ . A construção de tais discos, via funções modificadas de Bessel, pode ser vista em detalhes por [5] e [1].

## Capítulo 3

# Método “deslocar, cortar e refletir” na Construção de Discos

Vimos no capítulo anterior que, os campos gravitacionais de discos galácticos podem ser estudados através da teoria Newtoniana da gravitação. Contudo, existem situações em que a gravidade considerada é suficientemente forte, exigindo assim, o uso da Relatividade Geral. Uma situação típica na qual a teoria de Einstein faz-se necessária está baseada na existência de maciços objetos, compactos e escuros, localizados no centro de algumas galáxias. A modelagem teórica de tais configurações se ajusta ao estudo de discos de acreção (acrécimo de matéria em forma de disco) em volta de buracos negros centrais, e pode ser vista em [25]-[27].

Os requisitos básicos à construção de discos de matéria, segundo a Teoria Newtoniana, restringem-se a determinar o potencial e a densidade da matéria geradora, a partir de procedimentos matemáticos comumente conhecidos na Física, como por exemplo, resolver a equação de Poisson, sob certas condições de contorno. Já a construção de discos na Relatividade Geral, está obrigatoriamente relacionada à resolução das equações de Einstein para sistemas com simetria axial. Por sua vez, as soluções exatas das equações de Einstein podem ser obtidas de duas maneiras principais. A primeira, denominada como *Método Direto*, consiste em resolver diretamente as equações de Einstein, uma vez conhecida a distribuição de matéria (isto é, o tensor energia-momento). Esse método, em geral, é extremamente não

trivial, e tem sido usado por um grupo alemão a fim de desenvolver várias soluções exatas de discos [28]-[35]. A segunda, é conhecida como *Método-g* ou *Método Inverso* [36], no qual o tensor energia-momento é calculado a partir de uma métrica,  $(g)$ , dada.

De forma geral, como veremos, o Método Inverso pode ser usado para construir modelos de discos finos ou espessos, tanto na Teoria Newtoniana quanto na Relatividade Geral [37]. No caso de discos finos, este procedimento é conhecido como Método “deslocar, cortar e refletir”, o qual é similar ao da construção de um disco de Kuzmin, (visto na subseção 2.3.3), sendo este, aqui, também entendido como uma extensão do Método das Imagens, visto em Eletrostática. Neste capítulo, apresentaremos o Método “deslocar, cortar e refletir” para a construção de discos infinitesimalmente finos, na Teoria Newtoniana bem como na Relatividade Geral.

### 3.1 Apresentação do Método “deslocar, cortar e refletir” na construção de discos

O Método “deslocar, cortar e refletir” corresponde a uma adaptação do conhecido método das imagens, comumente estudado em Eletrostática, no qual “cortando” e “colando” soluções para o vácuo podem ser geradas soluções com fonte do tipo disco [36]. De maneira esquemática, podemos descrever o Método “deslocar, cortar e refletir” da seguinte forma (ver Figura 3.1):

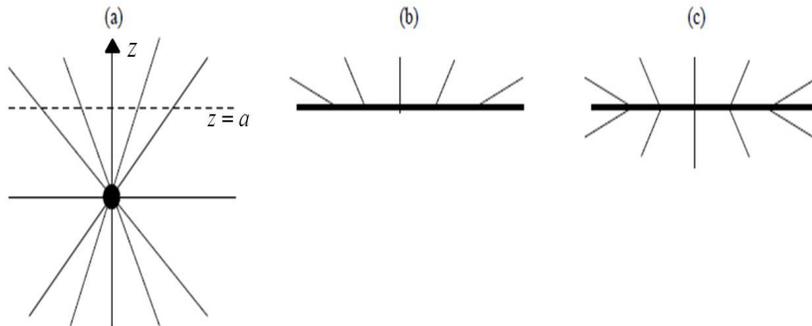


Figura 3.1: Sequência esquemática do Método “deslocar, cortar e refletir” na construção de um disco fino. (Figura adaptada de [37]).

De acordo com a Figura 3.1, o procedimento se dá a partir de um espaço-tempo com fonte ou singularidade localizada na região  $z = 0$ . O método consiste em estabelecer um plano situado em  $z = a$ , (ilustração (a)) - *Deslocar*. Desse modo, pode-se observar que o plano  $z = a$  divide o espaço em duas regiões: uma sem singularidade ou fonte e a outra com. Um corte, então, é feito neste plano, e a região do espaço com singularidade ou fonte ( $z < a$ ) é descartada, (ilustração (b)) - *Cortar*. Em seguida, fazemos uma reflexão do espaço que nos restou ( $z > a$ ), (ilustração (c)) - *Refletir*. O resultado é uma solução com um disco de extensão infinita em  $z = a$ . Uma outra maneira, também equivalente, de esquematizarmos este procedimento é semelhante ao realizado na Figura 2.8, para a obtenção do disco de Kuzmin, ou seja, dividindo este mesmo espaço inicial em três partes, a partir de dois planos situados respectivamente em  $z = +a$  e  $z = -a$ . O resultado deste procedimento é o mesmo disco fino de extensão infinita, cuja densidade superficial associada pode ser calculada pela equação de Poisson, fazendo uso da função delta de Dirac com suporte em  $z = a$ . Como veremos, o procedimento matemático que implementa este método consiste em aplicarmos a transformação  $z \rightarrow h(z) + a$  na solução original, onde  $a$  é uma constante positiva e  $h(z) = |z|$ , para o caso de um disco fino.

O Método “deslocar, cortar e refletir” também pode ser utilizado para gerar discos finos com halo. O procedimento é análogo ao exposto pela Figura 3.1, sendo este apresentado na Figura 3.2. Porém, nesse caso, o espaço inicial corresponde a uma distribuição esférica de um fluido.

Na Figura 3.2, uma esfera de fluido é cortada por um plano a uma distância do centro menor que o raio da esfera, (ilustração (a)). A parte do espaço contendo o centro da esfera é descartada, (ilustração (b)), e a outra parte é refletida usando a superfície do plano de corte, (ilustração (c)). O resultado será um disco fino com um halo central. Vale salientar que, a parte do disco dentro do halo terá propriedades diferentes da parte externa ao halo [37].

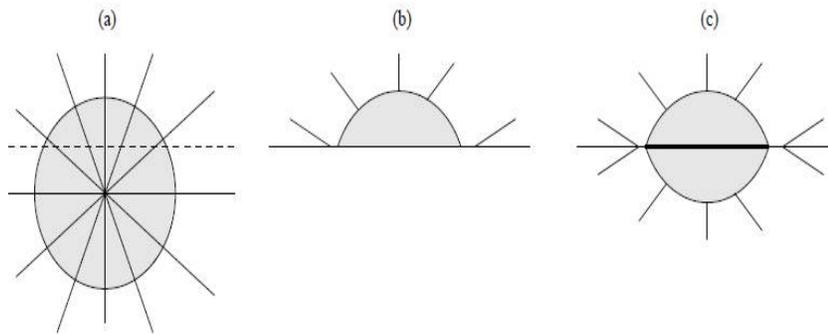


Figura 3.2: Sequência esquemática do Método “deslocar, cortar e refletir” na construção de um disco fino com halo. (Fonte: [37]).

Uma generalização do Método “deslocar, cortar e refletir” foi proposta por González e Letelier [38], a fim de gerar discos com espessura arbitrária. A modificação no método anterior se dá através da adição de um passo intermediário, no qual além de cortar e colar as soluções no vácuo, adiciona-se um enchimento, constituindo assim o denominado Método “deslocar, cortar, encher e refletir”.

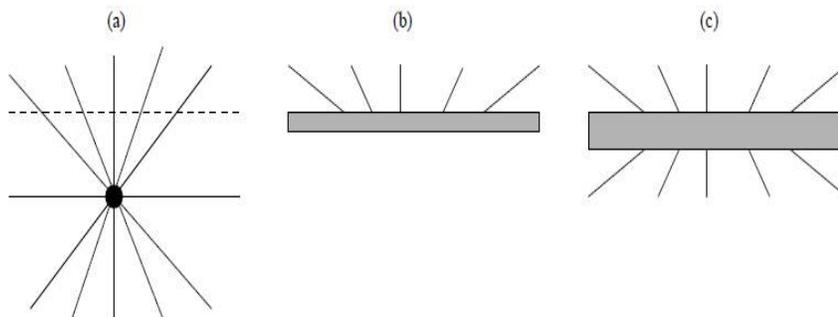


Figura 3.3: Sequência esquemática do Método “deslocar, cortar, encher e refletir” na construção de um disco com espessura arbitrária. (Fonte: [37]).

Os passos descritos pela Figura 3.3 são semelhantes aos da Figura 3.1, a não ser pela adição da camada grossa de matéria evidenciada na ilustração (b). Em [38] se discute uma função particular de enchimento para engrossar os discos e também apresenta discos grossos em vários sistemas de coordenadas.

## 3.2 Discos na Teoria Newtoniana

Na teoria gravitacional Newtoniana, o potencial no vácuo,  $\Phi^{(0)}(R, z)$ , é solução da equação de Laplace. Desta forma, as soluções da equação de Poisson que representam discos finos podem ser construídas a partir de soluções da equação de Laplace para o potencial gravitacional no vácuo  $\Phi^{(0)} = \Phi^{(0)}(R, z)$ . A equação de Laplace em coordenadas cilíndricas (apêndice B.3 de [1]) é dada por:

$$\nabla^2 \Phi^{(0)} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial z^2} = 0. \quad (3.1)$$

A fim de simplificar, vamos reescrever a equação (3.1) adotando a seguinte notação:

$$\nabla^2 \Phi^{(0)} = \frac{1}{R} \Phi_{,R}^{(0)} + \Phi_{,RR}^{(0)} + \Phi_{,zz}^{(0)} = 0. \quad (3.2)$$

Através da solução  $\Phi^{(0)}(R, z)$ , vamos construir uma nova função  $\Phi(R, z)$  que represente o potencial gravitacional gerado pelo disco. O Método “deslocar, cortar e refletir” é aplicado ao potencial de vácuo  $\Phi^{(0)}(R, z)$ , por meio da transformação  $z \rightarrow z' = h(z) + a$ , gerando assim um novo potencial  $\Phi(R, z)$ , o potencial do disco. Dessa forma,

$$\Phi(R, z) = \Phi^{(0)}(R, z'). \quad (3.3)$$

A função  $h(z)$ , além de par, deve ser escolhida de tal modo que  $h(z)$  seja contínua na região  $-a \leq z \leq +a$ . Além disso,  $h(z)_{,z}$  e  $h(z)_{,zz}$  devem ser escolhidos de modo que a densidade de massa seja não negativa e uma função monotonicamente decrescente em termos de  $R$  e  $z$  [37].

Tomando o Laplaciano da equação (3.3), podemos determinar a distribuição de matéria do disco por meio da equação de Poisson, uma vez que,

$$\nabla^2 \Phi(R, z) = 4\pi G \rho(R, z), \quad (3.4)$$

onde  $\rho(R, z)$  é a densidade de massa do disco.

Vamos então, calcular o Laplaciano de  $\Phi(R, z)$

$$\nabla^2 \Phi(R, z) = \frac{1}{R} \Phi_{,R} + \Phi_{,RR} + \Phi_{,zz}. \quad (3.5)$$

Para tanto, de (3.3) é válido ressaltar as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi(R, z)}{\partial z} &= \frac{\partial\Phi^{(0)}(R, z')}{\partial z} \\ \Rightarrow \frac{\partial\Phi(R, z)}{\partial z} &= \frac{\partial\Phi^{(0)}(R, z')}{\partial z'} \cdot \frac{dz'}{dz}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

como  $z' = h(z) + a$ , temos

$$\frac{\partial\Phi(R, z)}{\partial z} = \frac{\partial\Phi^{(0)}(R, z')}{\partial z'} \cdot \frac{dh}{dz}. \quad (3.7)$$

Por outro lado, podemos observar que  $\frac{\partial\Phi^{(0)}(R, z')}{\partial z'} = \frac{\partial\Phi^{(0)}(R, z')}{\partial h}$ . Dessa forma, voltando a utilizar a notação adotada, obtemos

$$\Phi_{,z} = \Phi_{,h}^{(0)} h_{,z} \quad (3.8)$$

Logo,

$$\Phi_{,zz} = h_{,zz} \Phi_{,h}^{(0)} + (h_{,z})^2 \Phi_{,hh}^{(0)}. \quad (3.9)$$

Desse modo, substituindo (3.8) e (3.9) em (3.5), obtemos

$$\nabla^2\Phi(R, z) = \frac{1}{R}\Phi_{,R}^{(0)} + \Phi_{,RR}^{(0)} + h_{,zz}\Phi_{,h}^{(0)} + (h_{,z})^2\Phi_{,hh}^{(0)}. \quad (3.10)$$

Assim, de (3.4), segue-se que:

$$\frac{1}{R}\Phi_{,R}^{(0)} + \Phi_{,RR}^{(0)} + h_{,zz}\Phi_{,h}^{(0)} + (h_{,z})^2\Phi_{,hh}^{(0)} = 4\pi G\rho(R, z). \quad (3.11)$$

A equação (3.11) nos dá a densidade de massa, referente à distribuição de matéria que gera o potencial gravitacional  $\Phi(R, z)$ , escrita em termos do potencial de vácuo  $\Phi^{(0)}(R, z)$  e da função  $h(z)$ .

Nas coordenadas  $(R, z')$  a equação de Laplace, do potencial de vácuo, ainda pode ser escrita como:

$$\nabla^2\Phi^{(0)}(R, z') = \frac{1}{R}\Phi_{,R}^{(0)} + \Phi_{,RR}^{(0)} + \Phi_{,z'z'}^{(0)} = \frac{1}{R}\Phi_{,R}^{(0)} + \Phi_{,RR}^{(0)} + \Phi_{,hh}^{(0)} = 0. \quad (3.12)$$

O que nos fornece,

$$\frac{1}{R}\Phi_{,R}^{(0)} + \Phi_{,RR}^{(0)} = -\Phi_{,hh}^{(0)}. \quad (3.13)$$

Aplicando, portanto, (3.13) em (3.11), temos que

$$\rho(R, z) = \frac{1}{4\pi G} \left\{ h_{,zz} \Phi_{,h}^{(0)} + [(h_{,z})^2 - 1] \Phi_{,hh}^{(0)} \right\}. \quad (3.14)$$

A equação (3.14) representa a expressão geral da densidade de massa  $\rho(R, z)$  associada ao novo potencial, uma vez que ela nos possibilita encontrar qualquer distribuição de massa através, apenas, do potencial de vácuo  $\Phi^{(0)}(R, z)$  e da escolha da função  $h(z)$ .

Por estarmos interessados no estudo de discos finos, devemos tomar  $h(z) = |z|$ . Nota-se que,  $h_{,z} = \partial_z |z| = 2\theta(z) - 1$ , onde  $\theta(z)$  é a função Heaveside (também conhecida como função degrau), e  $h_{,zz} = 2\delta(z)$ , onde  $\delta(z)$  é a função delta de Dirac. A Figura 3.4 mostra os gráficos de  $h(z) = |z|$  (linha tracejada) e suas derivadas.

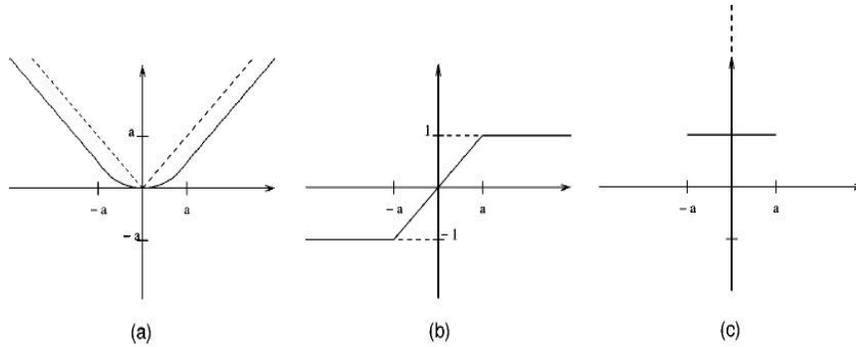


Figura 3.4: Gráfico da função  $h(z)$  e de suas derivadas, para um disco fino (linha tracejada) e para um disco espesso (linha cheia). Em (a) temos o gráfico de  $h(z)$ ; em (b) o de  $h(z)_{,z}$ , e (c) o de  $h(z)_{,zz}$ . (Fonte: [38]).

Finalmente, substituindo as derivadas da função  $h(z) = |z|$  na equação (3.14), obtemos a densidade de matéria do disco fino em função do potencial de vácuo:

$$\rho(R, z) = \frac{1}{2\pi G} \Phi_{,h}^{(0)} \delta(z). \quad (3.15)$$

Desse modo, a densidade de massa  $\rho(R, z)$ , que é volumétrica, é proporcional a  $\delta(z)$ . Isto significa que  $\rho(R, z)$  representa uma distribuição de massa concentrada no plano  $z = 0$ , cuja densidade superficial é

$$\sigma(R) = \frac{1}{2\pi G} \Phi_{,h}^{(0)}. \quad (3.16)$$

Para ilustrar o método geral da construção de discos na teoria Newtoniana, vamos aplicá-lo ao potencial Newtoniano de uma massa pontual  $M$ , escrito em coordenadas cilíndricas, dado por:

$$\Phi^{(0)}(R, z) = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + z^2}}. \quad (3.17)$$

A partir dessa solução, construímos um novo potencial  $\Phi$ , através da operação abaixo:

$$\Phi(R, z) = \Phi^{(0)}(R, z') = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + (z')^2}}. \quad (3.18)$$

Como  $z' = h(z) + a$ , temos que

$$\Phi^{(0)}(R, z') = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + (h(z) + a)^2}}. \quad (3.19)$$

Fazendo  $h(z) = |z|$ , ficamos com

$$\Phi^{(0)}(R, z') = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + (|z| + a)^2}}. \quad (3.20)$$

Observe que o potencial descrito em (3.20) é idêntico ao proposto por Kuzmin, na equação (2.12).

A fim de encontrar a densidade de massa, através do método geral, de acordo com a equação(3.15), podemos observar que nossa tarefa se restringe a determinar  $\Phi_{,h}^{(0)}$ . Dessa forma, para  $z > 0$ , temos

$$\Phi_{,h}^{(0)} = \frac{GM(|z| + a)}{[R^2 + (|z| + a)^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (3.21)$$

Como a matéria está concentrada em  $z = 0$ , obtemos

$$\Phi_{,h}^{(0)} = \frac{GMa}{(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.22)$$

Finalmente, substituindo (3.22) em (3.15), concluímos que a densidade de massa do disco fino Newtoniano é

$$\rho(R, z) = \frac{Ma}{2\pi(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}\delta(z). \quad (3.23)$$

Já de (3.16), segue que a densidade superficial de massa do disco fino será

$$\sigma(R) = \frac{Ma}{2\pi(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.24)$$

Aqui, comprovamos explicitamente que o Método “deslocar, cortar e refletir” reproduz fielmente o modelo proposto por Kuzmin, quando aplicamos à ele a solução particular (3.17).

### 3.3 Discos na Teoria da Relatividade Geral

A construção de modelos de discos finos, em Relatividade Geral, pode ser feita partindo de soluções axialmente simétricas das equações de Einstein no vácuo e introduzindo uma descontinuidade finita na derivada primeira do tensor métrico, através do plano  $z = a$ . Tal descontinuidade pode ser obtida, por exemplo, refletindo a solução através do plano em questão. A descontinuidade nas derivadas primeiras do tensor métrico pode ser representada por uma função de Heaveside [39].

O procedimento descrito por [39], se trata do Método “deslocar, cortar e refletir”, no qual, como já vimos, aplica-se a seguinte transformação,  $z \rightarrow z' = h(z) + a$ , às funções que descrevem as soluções das equações de Einstein no vácuo, definindo assim, a partir destas, novas funções, as quais descreverão a métrica de um novo espaço-tempo, agora preenchido por uma certa distribuição de energia. Para determinarmos essa distribuição que produz a nova métrica, devemos calcular o tensor de Einstein para esse espaço-tempo. Dessa forma, a partir das equações de Einstein podemos, então, determinar o tensor energia-momento associado à nova distribuição concentrada no plano de corte. Em síntese, temos que, dada uma métrica, cuja simetria coincida com a simetria do espaço-tempo que se deseja obter (no nosso caso, um disco de matéria com simetria axial), sob operações apropriadas, é possível obter uma nova métrica, gerada por uma certa distribuição de matéria.

Nesta seção, iremos construir um disco fino usando a Teoria da Relatividade Geral. Partiremos da métrica de vácuo de um espaço-tempo estático e com simetria axial. Sob essas condições, pode-se mostrar que a métrica nas chamadas coordenadas de Weyl [26], assume a seguinte forma:

$$ds^2 = -e^{2\phi^{(0)}} dt^2 + e^{2(\nu^{(0)} - \phi^{(0)})} (dr^2 + dz^2) + r^2 e^{-2\phi^{(0)}} d\varphi^2, \quad (3.25)$$

onde as funções  $\phi^{(0)}$  e  $\nu^{(0)}$  dependem apenas das coordenadas  $r$  e  $z$ .

Para uma certa distribuição de energia, ou matéria, a métrica é completamente determinada pelas equações de Einstein. As equações de Einstein para um espaço-tempo

quadrimensional [40], sem a presença de uma constante cosmológica são dadas por:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (3.26)$$

onde  $G_{\mu\nu}$  é o tensor de Einstein, definido como

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (3.27)$$

onde  $R_{\mu\nu}$  representa o tensor de Ricci e  $R$  o escalar de curvatura. Ambos são dados, respectivamente, por:

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}, \quad (3.28)$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (3.29)$$

e  $R^{\alpha}_{\mu\beta\nu}$  é o tensor de Riemann, também chamado de tensor de curvatura, pois ele nos informa qual é a curvatura do espaço-tempo. De modo que, espaços-tempo curvos apresentam, em termos dos coeficientes da conexão afim,  $R^{\alpha}_{\mu\beta\nu} \neq 0$ , enquanto os planos têm  $R^{\alpha}_{\mu\beta\nu} = 0$ . O tensor de Riemann tem a seguinte forma:

$$R^{\alpha}_{\mu\beta\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}\Gamma^{\gamma}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\gamma\nu}\Gamma^{\gamma}_{\mu\beta}. \quad (3.30)$$

Na Teoria Geral da Relatividade, admite-se que o espaço-tempo tem torção nula e a métrica é compatível com a conexão afim. Nesse caso, as componentes da conexão afim,  $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ , coincidem com os símbolos Christoffel [41], ou seja,

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}), \quad (3.31)$$

onde as vírgulas denotam a derivação parcial em relação às coordenadas.

O elemento  $T_{\mu\nu}$ , do lado direito das equações de Einstein, equação (3.26), corresponde ao tensor energia-momento. Este tensor contém todas as informações sobre a distribuição de matéria, ou energia, que provoca a curvatura do espaço-tempo.

Através de (3.27), pode-se observar que o tensor de Einstein está em função da métrica e de suas derivadas até segunda ordem. Desse modo, dada uma certa distribuição de

matéria, ou seja, conhecendo  $T_{\mu\nu}$ , o problema de resolver as equações de Einstein torna-se encontrar as componentes  $g_{\mu\nu}$ , que são as incógnitas do problema, e assim, chegamos a 10 equações diferenciais parciais não-lineares, acopladas e de segunda ordem para determinar as 10 componentes independentes da métrica. O caráter não-linear das equações, torna o problema extremamente não-trivial, em geral.

No vácuo,  $T_{\mu\nu} = 0$ . Logo, as equações de Einstein (3.26) passam a ser escritas como

$$G_{\mu\nu} = 0. \quad (3.32)$$

Aqui, a fim de evitarmos a manipulação de constantes ao longo dos cálculos, vamos trabalhar com sistemas de unidades, nos quais a constante gravitacional,  $G$ , e a velocidade da luz,  $c$ , sejam iguais a 1 (sistemas de unidades naturais).

Assim, de acordo com os passos descritos acima, ao usarmos a forma geral do elemento de linha de Weyl (3.25) nas equações de Einstein para o vácuo (3.32), conseguimos reescrevê-las encontrando as seguintes equações para as funções  $\phi^{(0)}$  e  $\nu^{(0)}$ :

$$-2 \left( r\phi_{,rr}^{(0)} + r\phi_{,zz}^{(0)} + \phi_{,r}^{(0)} \right) + r \left( \left( \phi_{,r}^{(0)} \right)^2 + \nu_{,zz}^{(0)} + \nu_{,rr}^{(0)} + \left( \phi_{,z}^{(0)} \right)^2 \right) = 0; \quad (3.33)$$

$$r \left( \left( \phi_{,z}^{(0)} \right)^2 - \left( \phi_{,r}^{(0)} \right)^2 \right) + \nu_{,r}^{(0)} = 0; \quad (3.34)$$

$$-2r\phi_{,r}^{(0)}\phi_{,z}^{(0)} + \nu_{,z}^{(0)} = 0; \quad (3.35)$$

$$-r \left( \left( \phi_{,z}^{(0)} \right)^2 - \left( \phi_{,r}^{(0)} \right)^2 \right) - \nu_{,r}^{(0)} = 0; \quad (3.36)$$

$$\left( \phi_{,r}^{(0)} \right)^2 + \nu_{,zz}^{(0)} + \nu_{,rr}^{(0)} + \left( \phi_{,z}^{(0)} \right)^2 = 0, \quad (3.37)$$

onde  $\phi^{(0)} = \phi^{(0)}(r, z)$  e  $\nu^{(0)} = \nu^{(0)}(r, z)$ .

Vamos agora aplicar o Método “deslocar, cortar e refletir” definindo novas funções  $\phi$  e  $\nu$  por meio da transformação  $z \longrightarrow z' = h(z) + a$ , aplicada a  $\phi^{(0)}$  e  $\nu^{(0)}$ . Dessa forma,

$$\phi(r, z) = \phi^{(0)}(r, z'), \quad (3.38)$$

$$\nu(r, z) = \nu^{(0)}(r, z'). \quad (3.39)$$

Substituindo estas novas funções, equações (3.38) e (3.39), na métrica do espaço-tempo inicial (3.25) obteremos a métrica de um novo espaço-tempo, agora preenchido por uma distribuição de energia. Para determinarmos essa distribuição que gera a nova métrica, devemos calcular o tensor de Einstein para esse espaço-tempo. A partir das equações de Einstein (3.26), podemos então determinar o tensor energia-momento da distribuição, dado por:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi} G_{\mu\nu}. \quad (3.40)$$

Considerando a correspondência  $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, z, \varphi)$ , temos de (3.40), que para a métrica com as novas funções, as componentes não-nulas do tensor energia-momento são:

$$T_0^0 = \frac{-1}{8\pi r e^{2(\nu-\phi)}} [2(r\phi_{,rr} + r\phi_{,zz} + \phi_{,r}) - r((\phi_{,r})^2 + \nu_{,zz} + \nu_{,rr} + (\phi_{,z})^2)]; \quad (3.41)$$

$$T_1^1 = \frac{1}{8\pi r e^{2(\nu-\phi)}} [r((\phi_{,z})^2 - (\phi_{,r})^2) + \nu_{,r}]; \quad (3.42)$$

$$T_2^1 = T_1^2 = \frac{-1}{8\pi r e^{2(\nu-\phi)}} [2r\phi_{,r}\phi_{,z} - \nu_{,z}]; \quad (3.43)$$

$$T_2^2 = -T_1^1; \quad (3.44)$$

$$T_3^3 = \frac{1}{8\pi e^{2(\nu-\phi)}} [(\phi_{,r})^2 + \nu_{,zz} + \nu_{,rr} + (\phi_{,z})^2]. \quad (3.45)$$

De maneira análoga à seção anterior, queremos expressar o tensor energia-momento em termos das funções originais  $\Phi^{(0)}$  e  $\nu^{(0)}$ . Temos, que as definições (3.38) e (3.39) nos fornecem as seguintes relações:

$$\phi_{,z} = h_{,z}\phi_{,h}^{(0)}; \quad (3.46)$$

$$\phi_{,zz} = h_{,zz}\phi_{,h}^{(0)} + (h_{,z})^2\phi_{,hh}^{(0)}; \quad (3.47)$$

$$\nu_{,z} = h_{,z}\nu_{,h}^{(0)}; \quad (3.48)$$

$$\nu_{,zz} = h_{,zz}\nu_{,h}^{(0)} + (h_{,z})^2\nu_{,hh}^{(0)}. \quad (3.49)$$

Ao aplicarmos as relações de (3.46) a (3.49) nas componentes não nulas do tensor energia-momento, ficamos com:

$$T_0^0 = \frac{-1}{8\pi r e^{2(\nu^{(0)} - \phi^{(0)})}} \left\{ 2 \left[ r \phi_{,rr}^{(0)} + r \left( h_{,zz} \phi_{,h}^{(0)} + (h_{,z})^2 \phi_{,hh}^{(0)} \right) + \phi_{,r}^{(0)} \right] + r \left[ (\phi_{,r}^{(0)})^2 + \left( h_{,zz} \nu_{,h}^{(0)} + (h_{,z})^2 \nu_{,hh}^{(0)} \right) + \nu_{,rr}^{(0)} + \left( h_{,z} \phi_{,h}^{(0)} \right)^2 \right] \right\}; \quad (3.50)$$

$$T_1^1 = \frac{1}{8\pi r e^{2(\nu^{(0)} - \phi^{(0)})}} \left\{ r \left[ \left( h_{,z} \phi_{,h}^{(0)} \right)^2 - (\phi_{,r}^{(0)})^2 \right] + \nu_{,r}^{(0)} \right\}; \quad (3.51)$$

$$T_2^1 = T_1^2 = \frac{-1}{8\pi r e^{2(\nu^{(0)} - \phi^{(0)})}} \left\{ 2r \phi_{,r}^{(0)} \left( h_{,z} \phi_{,h}^{(0)} \right) - h_{,z} \nu_{,h}^{(0)} \right\}; \quad (3.52)$$

$$T_2^2 = -T_1^1; \quad (3.53)$$

$$T_3^3 = \frac{1}{8\pi e^{2(\nu^{(0)} - \phi^{(0)})}} \left\{ (\phi_{,r}^{(0)})^2 + \left( h_{,zz} \nu_{,h}^{(0)} + (h_{,z})^2 \nu_{,hh}^{(0)} \right) + \nu_{,rr}^{(0)} + \left( h_{,z} \phi_{,h}^{(0)} \right)^2 \right\}, \quad (3.54)$$

onde  $\phi^{(0)} = \phi^{(0)}(r, z')$  e  $\nu^{(0)} = \nu^{(0)}(r, z')$ .

Devemos lembrar que  $\phi^{(0)}(r, z')$  e  $\nu^{(0)}(r, z')$  satisfazem às equações de Einstein no vácuo, equações (3.33) a (3.37). Logo, podemos manipulá-las de modo que:

$$2r \phi_{,rr}^{(0)} + 2\phi_{,r}^{(0)} - r (\phi_{,r}^{(0)})^2 - r \nu_{,rr}^{(0)} = -2r \phi_{,hh}^{(0)} + r \nu_{,hh}^{(0)} + r (\phi_{,h}^{(0)})^2; \quad (3.55)$$

$$-r (\phi_{,r}^{(0)})^2 + \nu_{,r}^{(0)} = -r (\phi_{,h}^{(0)})^2; \quad (3.56)$$

$$2r \phi_{,r}^{(0)} \phi_{,h}^{(0)} = \nu_{,h}^{(0)}; \quad (3.57)$$

$$(\phi_{,r}^{(0)})^2 + \nu_{,rr}^{(0)} = -\nu_{,hh}^{(0)} - (\phi_{,h}^{(0)})^2. \quad (3.58)$$

Reescrevendo as equações (3.50) a (3.54), com base nas equações (3.55) a (3.58), temos

$$T_0^0 = \frac{-1}{8\pi e^{2(\nu^{(0)} - \phi^{(0)})}} \left\{ [(h_{,z})^2 - 1] \left( 2\phi_{,hh}^{(0)} - \nu_{,hh}^{(0)} - (\phi_{,h}^{(0)})^2 \right) + h_{,zz} \left( 2\phi_{,h}^{(0)} - \nu_{,h}^{(0)} \right) \right\}; \quad (3.59)$$

$$T_1^1 = \frac{1}{8\pi e^{2(\nu^{(0)} - \phi^{(0)})}} \left\{ [(h_{,z})^2 - 1] (\phi_{,h}^{(0)})^2 \right\}; \quad (3.60)$$

$$T_2^1 = T_1^2 = 0; \quad (3.61)$$

$$T_2^2 = -T_1^1; \quad (3.62)$$

$$T_3^3 = \frac{1}{8\pi e^{2(\nu^{(0)} - \phi^{(0)})}} \left\{ [(h_{,z})^2 - 1] \left( \nu_{,hh}^{(0)} + \phi_{,hh}^{(0)} \right) + h_{,zz} \nu_{,h}^{(0)} \right\}. \quad (3.63)$$

Podemos perceber que as equações (3.59) a (3.63) são bem gerais, uma vez que são válidas para uma função  $h(z)$  arbitrária e quaisquer funções de vácuo,  $\phi^{(0)}$  e  $\nu^{(0)}$ . Assim, através do ajuste dessas funções, é possível obter discos com características distintas. González e Letelier [38], por exemplo, obtiveram soluções para discos espessos, utilizando este mesmo método. Porém, aqui, estamos interessados em discos finos, e portanto, vamos proceder da mesma forma que no caso Newtoniano, ou seja, consideremos  $h(z) = |z|$  e portanto suas respectivas derivadas:  $h_{,z} = 2\theta(z) - 1$  e  $h_{,zz} = 2\delta(z)$ . Dessa forma, as equações (3.59) a (3.63) se reduzem a:

$$T_0^0 = \frac{-1}{4\pi e^{2(\nu^{(0)} - \phi^{(0)})}} \left\{ \left( 2\phi_{,h}^{(0)} - \nu_{,h}^{(0)} \right) \delta(z) \right\}; \quad (3.64)$$

$$T_1^1 = 0; \quad (3.65)$$

$$T_2^1 = T_1^2 = 0; \quad (3.66)$$

$$T_2^2 = -T_1^1 = 0; \quad (3.67)$$

$$T_3^3 = \frac{1}{4\pi e^{2(\nu^{(0)} - \phi^{(0)})}} \left\{ \nu_{,h}^{(0)} \delta(z) \right\}. \quad (3.68)$$

De acordo com a equação (3.57), podemos ainda reescrever as componentes não nulas do tensor energia-momento, referente à distribuição, como:

$$T_0^0 = \frac{-1}{2\pi} e^{2(\phi^{(0)} - \nu^{(0)})} \left( 1 - r\phi_{,r}^{(0)} \right) \phi_{,h}^{(0)} \delta(z); \quad (3.69)$$

$$T_3^3 = \frac{1}{2\pi} e^{2(\phi^{(0)} - \nu^{(0)})} r\phi_{,r}^{(0)} \phi_{,h}^{(0)} \delta(z). \quad (3.70)$$

Logo, as equações (3.69) e (3.70) correspondem as componentes não nulas do tensor energia-momento de um disco infinitesimalmente fino, sobre o plano  $z = 0$ , escrito em termos das funções  $\phi^{(0)}$  e  $\nu^{(0)}$ , as quais constituem a solução de vácuo original.

Para encontrarmos a densidade de energia e as principais pressões que atuam sobre o disco é preciso escrever o tensor energia-momento na sua forma canônica. Como o tensor

energia-momento em questão possui apenas componentes diagonais, podemos escrevê-lo na forma:

$$T_{\mu\nu} = \epsilon V_\mu V_\nu + p_r W_\mu W_\nu + p_z X_\mu X_\nu + p_\varphi Y_\mu Y_\nu, \quad (3.71)$$

ou seja, em uma base de vetores ortonormais reais  $\{V^\mu, W^\mu, X^\mu, Y^\mu\}$ , associada aos observadores estáticos em relação às coordenadas de Weyl (3.25), o que nos fornece

$$V^\mu = e^{-\phi^{(0)}}(1, 0, 0, 0); \quad (3.72)$$

$$W^\mu = e^{(\phi^{(0)} - \nu^{(0)})}(0, 1, 0, 0); \quad (3.73)$$

$$X^\mu = e^{(\phi^{(0)} - \nu^{(0)})}(0, 0, 1, 0); \quad (3.74)$$

$$Y^\mu = \frac{e^{\phi^{(0)}}}{r}(0, 0, 0, 1). \quad (3.75)$$

Levando em consideração as equações (3.72) a (3.75), podemos determinar os coeficientes de (3.71), de maneira que,

$$\epsilon = T_v^\mu V_\mu V^v = -T_0^0; \quad (3.76)$$

$$p_r = T_v^\mu W_\mu W^v = T_1^1; \quad (3.77)$$

$$p_z = T_v^\mu X_\mu X^v = T_2^2; \quad (3.78)$$

$$p_\varphi = T_v^\mu Y_\mu Y^v = T_3^3, \quad (3.79)$$

são respectivamente, a densidade de energia, pressão radial, pressão vertical e pressão azimutal. As equações (3.76) a (3.79) nos informam sobre a densidade volumétrica. No entanto, como a matéria está concentrada na superfície, isto é, no plano  $z = 0$ , é conveniente encontrarmos o tensor energia-momento superficial associado à distribuição. Para tanto, devemos integrar o tensor  $T_v^\mu$  na direção normal à superfície. Logo, o tensor energia-momento superficial  $S_v^\mu$  será dado por:

$$S_v^\mu = \lim_{\ell \rightarrow 0} \int_{-\ell}^{+\ell} T_v^\mu dn, \quad (3.80)$$

onde  $dn = \sqrt{g_{zz}} dz$  corresponde ao comprimento de um deslocamento infinitesimal na direção normal ao disco.

Portanto, levando em consideração a equação (3.80), vamos integrar ambos os lados das equações (3.76) a (3.79) com respeito à direção normal à superfície, de modo a obter, a densidade de energia superficial, a pressão radial e azimutal, ambas, agora, sobre a superfície do disco, dadas respectivamente por:

$$\sigma = -S_0^0; \quad (3.81)$$

$$\tilde{p}_r = S_1^1; \quad (3.82)$$

$$\tilde{p}_\varphi = S_3^3, \quad (3.83)$$

Como era de se esperar, a pressão vertical sobre a superfície do disco é nula,  $\tilde{p}_z = S_2^2 = 0$ , uma vez que a matéria esta confinada no plano  $z = 0$ .

Para o caso particular em questão, aplicando (3.69) e (3.70) em (3.80), temos que as únicas componentes não nulas do tensor energia-momento superficial são:

$$S_0^0 = \frac{-1}{2\pi} [e^{(\phi-\nu)} (1 - r\phi_{,r}) \phi_{,h}] |_{z=a}; \quad (3.84)$$

$$S_3^3 = \frac{1}{2\pi} [e^{(\phi-\nu)} r\phi_{,r}\phi_{,h}] |_{z=a}. \quad (3.85)$$

Como foi exposto, a função  $h(z)$  é, em princípio, arbitrária. Cada função  $h(z)$  escolhida estabelece uma solução particular que corresponderá a discos com características distintas. Os discos finos obtidos por meio do método, aqui apresentado, são de interesse da Física, uma vez que podem ser usados como modelos idealizados para representar estruturas como galáxias.

Uma maneira de interpretarmos a distribuição de matéria descrita pelo tensor  $S_\nu^\mu$  é assumindo que o disco seja composto por várias partículas, que percorram órbitas estáveis, circulando tanto para a direita como para a esquerda, de modo que, o momento angular resultante seja nulo, e portanto tenhamos um espaço-tempo estático. O movimento de “contrarotação” exercido sob as partículas do disco dá origem a uma pressão tangencial ( $\tilde{p}_\varphi$ ). Tais discos foram estudados por Morgan e Morgan [42] e são chamados de discos de contrarotação.

Os sistemas do tipo disco vêm sendo amplamente estudados, pois, com já foi dito, eles servem de modelo à análise de vários objetos astrofísicos que admitem tal estrutura, como as galáxias espirais, por exemplo. As soluções do tipo disco além de estáticas podem ser estacionárias e também com ou sem pressão radial. Soluções que representam discos estáticos sem pressão na direção radial foram estudados primeiramente por Bonnor e Sackfield [43], e Morgan e Morgan [42]; e com pressão radial por Morgan e Morgan [44]. Diversas classes de soluções exatas das equações de Einstein que representam discos finos com ou sem pressão radial têm sido obtidas por diferentes autores [25]-[26] e [45]-[52]. Já para o caso estacionário, discos finos podem ser considerados com fonte na métrica de Kerr e foram apresentados por [53], e discos com rotação e fluxo de calor foram estudados em [54]. Também discos com tensão radial [55]; campos magnéticos [56], e campos magnéticos e elétricos foram considerados em [57]. Superposições não lineares de um disco com um buraco negro foram obtidas primeiramente por Lemos e Letelier [25]. Discos de fluido perfeito com halos [58] e discos de fluido perfeito carregado [59] também têm sido estudados. Um levantamento sobre discos finos pode ser visto em [60].

Com a finalidade de adquirirmos certa familiaridade como a obtenção de soluções de discos finos relativísticos, através do Método “deslocar, cortar e refletir”, vamos avaliar situações mais particulares. Partiremos então, das soluções de Chazy-Curzon e Schwarzschild, ambas nas coordenadas de Weyl.

### 3.3.1 Discos finos na métrica de Chazy-Curzon

A métrica de Chazy-Curzon é uma métrica estática e com simetria axial, na qual a função  $\phi^{(0)}$  corresponde ao potencial gravitacional Newtoniano de um partícula com massa  $M$ . Como primeiro exemplo, vamos aplicar o Método “deslocar, cortar e refletir” para obter discos finos usando a solução de Chazy-Curzon [61]-[62], nas coordenadas de Weyl, dada por:

$$\phi^{(0)}(r, z) = -\frac{M}{\sqrt{r^2 + z^2}}; \quad (3.86)$$

$$\nu^{(0)}(r, z) = -\frac{1}{2} \frac{M^2 r^2}{\sqrt{r^2 + z^2}}. \quad (3.87)$$

Ao aplicarmos o Método “deslocar, cortar e refletir”, temos

$$\phi(r, z) = \phi^{(0)}(r, z') = -\frac{M}{[r^2 + (h(z) + a)^2]^{\frac{1}{2}}}; \quad (3.88)$$

$$\nu(r, z) = \nu^{(0)}(r, z') = -\frac{1}{2} \frac{M^2 r^2}{[r^2 + (h(z) + a)^2]^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.89)$$

Logo, considerando as equações (3.69) e (3.70), temos que as únicas componentes não nulas do tensor energia-momento de um disco fino, na métrica de Chazy-Curzon são:

$$T_0^0 = -\frac{1}{2\pi} e^{2(\phi^{(0)} - \nu^{(0)})} Ma \left[ \frac{(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} - Mr^2}{(r^2 + a^2)^3} \right] \delta(z); \quad (3.90)$$

$$T_3^3 = \frac{1}{2\pi} e^{2(\phi^{(0)} - \nu^{(0)})} \left[ \frac{M^2 r^2 a}{(r^2 + a^2)^3} \right] \delta(z). \quad (3.91)$$

Assim, resolvendo (3.84) e (3.85) para o caso em questão, temos de (3.81) e (3.83) que a densidade superficial e a pressão superficial azimutal são respectivamente:

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} Ma \left[ \frac{(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} - Mr^2}{(r^2 + a^2)^3} \right] e^{(\phi_d - \nu_d)}. \quad (3.92)$$

$$\tilde{p}_\varphi = \frac{1}{2\pi} \frac{M^2 r^2 a}{(r^2 + a^2)^3} e^{(\phi_d - \nu_d)}, \quad (3.93)$$

onde  $\phi_d$  e  $\nu_d$  são as funções sobre o disco, escritas em termos de  $(r, a)$ , uma vez que o suporte da delta de Dirac  $\delta(z)$  está avaliada em  $z = 0$ . Assim,

$$\phi_d = \frac{-M}{(r^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (3.94)$$

$$\nu_d = \frac{-1}{2} \frac{M^2 r^2}{(r^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.95)$$

O gráfico da Figura 3.5 mostra as densidades superficiais de nove discos finos, para a métrica de Chazy-Curzon nas coordenadas de Weyl, exibidos como função do raio circunferencial  $\tilde{R} = re^{-\phi_d}$ . Todas as curvas foram feitas fixando a massa total em  $M = 1$  e tomando diferentes valores para o parâmetro  $a$ :  $M/a = 0.49, 0.59, 0.69, \dots, 1.29$ . Podemos verificar que os menores valores de  $a$  correspondem aos discos mais energéticos, e observando as curvas, nota-se que a densidade superficial tende a zero a medida que  $\tilde{R}$  cresce. Fato este, que indica a presença de uma maior concentração de matéria na região central do disco.

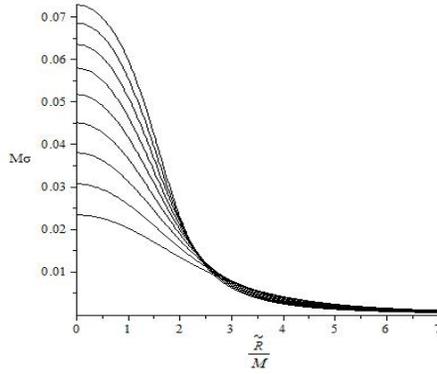


Figura 3.5: Gráfico da densidade superficial de nove discos finos, na métrica de Chazy-Curzon nas coordenadas de Weyl.

### 3.3.2 Discos finos na métrica de Schwarzschild

A solução de Schwarzschild descreve a geometria exterior do espaço-tempo de uma fonte gravitacional esférica e estática. Uma importante previsão dessa geometria é a existência de buracos negros sem rotação. Neste caso o buraco negro é dito de Schwarzschild, o qual possui uma singularidade física em  $r = 0$  coberta por um horizonte de eventos (uma superfície esférica definida pelo raio de Schwarzschild  $R_S = 2GM/c^2$ ). Escrita nas coordenadas de Weyl, o horizonte de eventos de Schwarzschild toma a forma de uma haste, de comprimento igual a duas vezes a massa da fonte. A solução de Schwarzschild nas coordenadas de Weyl pode ser expressa na forma [26]

$$\phi^{(0)} = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{R_1 + R_2 - 2m}{R_1 + R_2 + 2m} \right]; \quad (3.96)$$

$$\nu^{(0)} = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{(R_1 + R_2)^2 - 4m^2}{4R_1 R_2} \right], \quad (3.97)$$

onde  $R_1 = \sqrt{r^2 + (m - z)^2}$ ;  $R_2 = \sqrt{r^2 + (m + z)^2}$  e  $m$  é uma constante que está associada a massa da fonte ( $m = GM/c^2$ ).

Aplicando o Método “deslocar, cortar e refletir” em (3.96) e (3.97), ficamos com

$$\phi(r, z) = \phi^{(0)}(r, z') = \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{[r^2 + [m - (h(z) + a)]^2]^{1/2} + [r^2 + [m + (h(z) + a)]^2]^{1/2} - 2m}{[r^2 + [m - (h(z) + a)]^2]^{1/2} + [r^2 + [m + (h(z) + a)]^2]^{1/2} + 2m} \right\}; \quad (3.98)$$

$$\nu(r, z) = \nu^{(0)}(r, z') = \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{\left\{ [r^2 + [m - (h(z) + a)]^2]^{1/2} + [r^2 + [m + (h(z) + a)]^2]^{1/2} \right\}^2 - 4m^2}{4 [r^2 + [m - (h(z) + a)]^2]^{1/2} [r^2 + [m + (h(z) + a)]^2]^{1/2}} \right\}. \quad (3.99)$$

E das equações (3.69) e (3.70), temos que as únicas componentes não nulas do tensor energia-momento de um disco fino, na métrica de Schwarzschild são:

$$T_0^0 = \frac{-1}{2\pi} e^{2(\phi^{(0)} - \nu^{(0)})} \left\{ m \left[ (a - m)\tilde{R}_2 + (a + m)\tilde{R}_1 \right] \left[ (r^2 - m^2 + a^2) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left[ \tilde{R}_1\tilde{R}_2 + (r^2 - m^2 + a^2) \right] - r^2 m \left( \tilde{R}_1 + \tilde{R}_2 \right) \right] \right\} \delta(z) / \left[ \left( \tilde{R}_1 + \tilde{R}_2 \right)^2 - 4m^2 \right]^2 \left( \tilde{R}_1 \right)^2 \left( \tilde{R}_2 \right)^2; \quad (3.100)$$

$$T_3^3 = \frac{1}{2\pi} e^{2(\phi^{(0)} - \nu^{(0)})} \frac{\left\{ r^2 m^2 \left( \tilde{R}_1 + \tilde{R}_2 \right) \left[ (a - m)\tilde{R}_2 + (a + m)\tilde{R}_1 \right] \right\}}{\left[ \left( \tilde{R}_1 + \tilde{R}_2 \right)^2 - 4m^2 \right]^2 \left( \tilde{R}_1 \right)^2 \left( \tilde{R}_2 \right)^2} \delta(z), \quad (3.101)$$

onde  $\tilde{R}_1 = \sqrt{r^2 + (m - a)^2}$  e  $\tilde{R}_2 = \sqrt{r^2 + (m + a)^2}$ .

Vamos primeiro determinar a pressão superficial azimutal. Para isto, partindo de (3.85), temos de (3.83) que:

$$\tilde{p}_\varphi = \frac{1}{2\pi} e^{(\phi_d - \nu_d)} \frac{\left\{ r^2 m^2 \left( \tilde{R}_1 + \tilde{R}_2 \right) \left[ (a - m)\tilde{R}_2 + (a + m)\tilde{R}_1 \right] \right\}}{\left[ \left( \tilde{R}_1 + \tilde{R}_2 \right)^2 - 4m^2 \right]^2 \left( \tilde{R}_1 \right)^2 \left( \tilde{R}_2 \right)^2}. \quad (3.102)$$

De maneira análoga, a densidade superficial de energia é obtida, através de (3.84). E tomando (3.81), ficamos com:

$$\sigma = \frac{\tilde{p}_\varphi}{r^2 m \left( \tilde{R}_1 + \tilde{R}_2 \right)} \left\{ (r^2 - m^2 + a^2) \left[ \tilde{R}_1\tilde{R}_2 + (r^2 - m^2 + a^2) \right] - r^2 m \left( \tilde{R}_1 + \tilde{R}_2 \right) \right\}, \quad (3.103)$$

onde  $\phi_d$  e  $\nu_d$  são as funções sobre o plano do disco de Schwarzschild, dadas por:

$$\phi_d = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{\tilde{R}_1 + \tilde{R}_2 - 2m}{\tilde{R}_1 + \tilde{R}_2 + 2m} \right], \quad (3.104)$$

$$\nu_d = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{\left( \tilde{R}_1 + \tilde{R}_2 \right)^2 - 4m^2}{4\tilde{R}_1\tilde{R}_2} \right]. \quad (3.105)$$

O gráfico da Figura 3.6 mostra as densidades superficiais de onze discos finos, para a métrica de Schwarzschild nas coordenadas de Weyl, exibidos como função do raio circunferencial  $\tilde{R} = re^{-\phi_d}$ . Todas as curvas foram feitas fixando a massa total em  $M = 1$  e tomando diferentes valores para o parâmetro  $a$ :  $M/a = 1/3.01, 1/2.81, 1/2.61, \dots, 1/1.01$ . Assim como no gráfico da Figura 3.5, os discos de Scharwzchild mais energéticos são aqueles com menor valor de  $a$ , e nesses, a densidade superficial de energia também cresce rapidamente em direção ao centro.

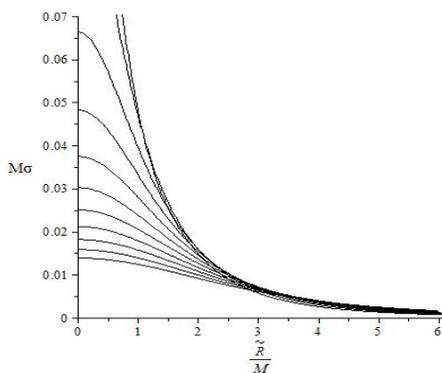


Figura 3.6: Gráfico da densidade superficial de onze discos finos, na métrica de Schwarzschild nas coordenadas de Weyl.

Em [63] o mesmo procedimento descrito acima é aplicado à métrica de Schwarzschild nas coordenadas isotrópicas.

# Capítulo 4

## Método da Imersão

Nossos estudos, até o momento, serviram para enfatizar a importância de se analisar formas do tipo disco no contexto da Teoria da Relatividade Geral. Pois, a simetria axial, presente em tais objetos, serve para representar modelos idealizados de discos galácticos reais.

No capítulo anterior, vimos a aplicação do Método “deslocar, cortar e refletir” na construção de discos de matéria e também obtivemos informações sobre o conteúdo material (densidade e pressão) de tais estruturas. Por sua vez, existem outros métodos capazes de cumprir esta mesma finalidade. Temos o Método do Espalhamento Inverso, usado para produzir soluções das equações de Einstein com rotação (solução estacionária) a partir de soluções sem rotação (solução estática). A utilização desse método é feita em [39] e [64]. E temos também o Método da Imersão, que veremos neste capítulo.

O Método da Imersão é caracterizado pela aplicação do formalismo de imersão ao Método “deslocar, cortar e refletir”. Em certos aspectos, esse método torna-se mais geral que o método de “deslocar, cortar e refletir”, uma vez que a superfície de matéria, aqui, gerada não precisa ser um plano ( $z = \textit{constante}$ ), nas coordenadas de Weyl, mas sim, pode assumir qualquer forma e inclusive ser dependente do tempo [63]. Logo, dizemos que este método apresenta uma maior abrangência.

No espaço-tempo quadridimensional, o Método da Imersão pode ser empregado na obtenção de soluções de disco de matéria que procuram representar discos galácticos, uma vez que este método caracteriza a possibilidade de encontrar soluções exatas das equações de Einstein

capazes de descrever tais estruturas.

A princípio, neste capítulo, faremos uma introdução sobre o formalismo de imersão. Em seguida apresentaremos o Método da Imersão, partindo da métrica de Weyl nas coordenadas canônicas de Weyl, a fim de também obter soluções exatas das equações de Einstein, que representem as mesmas propriedades físicas encontradas no capítulo anterior.

## 4.1 Formalismo de Imersão

Na geometria euclidiana, uma superfície de duas dimensões pode ser vista como imersa em espaços tridimensionais planos. Por meio da imersão podemos levar um espaço com dimensão menor,  $\Sigma$ , para um espaço com dimensão maior,  $M$ , (também conhecido como espaço-ambiente ou bulk), através da identificação de cada ponto  $p \in \Sigma$  com os pontos  $q \in M$ . Essa identificação é feita por meio de funções paramétricas que possibilitam a imersão de um espaço em outro. Como exemplo, vamos representar uma superfície esférica  $S^2$  imersa em um espaço plano tridimensional  $E^3$ .

Sabemos que uma superfície esférica é uma variedade que pode ser caracterizada pelo conjunto de pontos de coordenadas longitudinais ( $\phi$ ) e colatitudinais ( $\theta$ ), definidas nos intervalos  $0 < \phi < 2\pi$  e  $0 < \theta < \pi$ . Por sua vez, podemos visualizar essa superfície em um espaço plano tridimensional, como um conjunto de pontos  $(x, y, z)$  que satisfazem a equação  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , onde  $R$  é o raio. A Figura 4.1 ilustra a imersão de  $S^2$  em  $E^3$ .

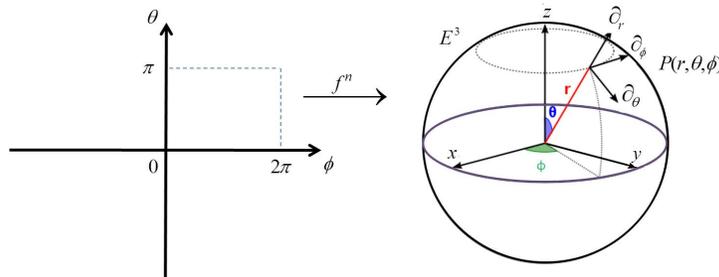


Figura 4.1: Representação dos pontos de uma superfície esférica  $S^2$  num plano cartesiano, imersa num plano tridimensional  $E^3$ , através das funções de imersão  $f^n$ .

A correspondência geométrica entre tais espaços é estabelecida pelas seguintes relações:

$$x = f(\theta, \phi) = R \sin \theta \cos \phi; \quad (4.1)$$

$$y = g(\theta, \phi) = R \sin \theta \sin \phi; \quad (4.2)$$

$$z = h(\theta, \phi) = R \cos \theta, \quad (4.3)$$

onde  $(x, y, z)$  são as coordenadas do espaço maior,  $(\theta, \phi)$  as coordenadas do espaço menor e  $f(\theta, \phi)$ ,  $g(\theta, \phi)$  e  $h(\theta, \phi)$  são as chamadas funções de imersão.

A análise de vetores em ambos os espaços, também pode ser feita por meio das funções de imersão, definidas acima. Podemos escrever a base de vetores da superfície esférica como  $\left[ \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \phi} \right]$ , e a base de vetores do espaço Euclidiano como  $\left[ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right]$ . Desse modo, as relações entre as bases do espaço menor e as do espaço maior podem ser determinadas pela simples aplicação da regra da cadeia, com a qual verifica-se que

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial z}; \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{\partial x}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (4.5)$$

Assim, de maneira geral, consideremos  $y^A$  as coordenadas da variedade  $M$ , de dimensão  $n$ , onde  $(A = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ , e  $x^\alpha$  as coordenadas da variedade  $\Sigma$ , de dimensão  $(n-1)$ , onde  $(\alpha = 0, 1, 2, \dots, n-2)$ . Então, uma vez conhecida a localização dos pontos em cada sistema de coordenadas, automaticamente pode-se determinar as “funções de imersão” que estabelecem a relação entre as coordenadas dos dois espaços, as quais podem ser expressas por

$$y^A = f^A(x^\alpha). \quad (4.6)$$

Sejam  $\frac{\partial}{\partial y^A}$  a base de vetores de  $T_p M$  (espaço tangente de  $M$  num ponto  $p \in M$ ), e  $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$  a base de vetores de  $T_p \Sigma$  (espaço tangente de  $\Sigma$  num ponto  $p \in \Sigma$ ). De maneira análoga às equações (4.4) e (4.5), podemos decompor os vetores  $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$  como uma combinação linear dos vetores da base de  $T_p M$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} &= \frac{\partial y^A}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial y^A} \\ \Rightarrow \partial_\alpha &= e_\alpha^A \partial_A, \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde  $e_\alpha^A \equiv \frac{\partial y^A}{\partial x^\alpha}$ . Da equação (4.6), vemos que o elemento  $e_\alpha^A$  corresponde, na verdade, à diferencial da função de imersão  $f^A(x^\alpha)$  em relação a base do espaço menor.

Como sabemos, a métrica é quem descreve as medidas de distâncias nas variedades. Por definição, o tensor métrico é uma aplicação bilinear que atua em vetores do espaço tangente produzindo um número real, definindo assim o produto interno entre vetores do espaço tangente [41]. Assim, dados dois vetores quaisquer, escritos em termos de uma base:  $\bar{A} = A^\mu \partial_\mu$  e  $\bar{B} = B^\nu \partial_\nu$ , podemos escrever

$$g(\bar{A}, \bar{B}) = A^\mu B^\nu g(\partial_\mu, \partial_\nu) = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu. \quad (4.8)$$

onde as componentes  $g_{\mu\nu}$  correspondem ao produto interno entre os vetores da base

Quando a imersão é de codimensão um (ou seja, quando a diferença entre as dimensões da variedade pela subvariedade for um), dizemos que a subvariedade é uma hipersuperfície. Dessa forma, em uma variedade de um espaço-tempo quadrimensional, uma hipersuperfície é uma subvariedade tridimensional que pode ser do tipo: tempo; espaço, ou luz, dependendo da natureza do vetor normal, que pode ser do tipo: espaço; tempo, ou luz, respectivamente [65].

A métrica do espaço maior  $M$ , naturalmente, *induz* uma métrica na hipersuperfície  $\Sigma$ , que corresponde à métrica “sentida” pelos observadores “presos” à  $\Sigma$ . Neste caso, podemos dizer que a métrica de  $\Sigma$  é “tomada emprestada” da métrica de  $M$ . Pegar “emprestado”, no sentido de que, para calcular o produto interno entre vetores da hipersuperfície  $\Sigma$ , podemos aplicar a métrica  $g$  de  $M$ , uma vez que todo vetor pertencente a  $T_p\Sigma$  também pertence a  $T_pM$ . Assim, a métrica de  $\Sigma$  é tida como métrica induzida e será aqui identificada por  $h$ . Somente nesta situação a imersão é dita *isométrica*.

Logo, sejam  $h$  e  $g$  as respectivas métricas dos espaços  $\Sigma$  e  $M$ . Da condição de isometria e diante do exposto sobre a métrica induzida, temos que produto interno entre dois vetores  $\bar{V}$  e  $\bar{W}$  pertencentes à  $T_p\Sigma$ , é dado por:

$$h(\bar{V}, \bar{W}) = g(\bar{V}, \bar{W}). \quad (4.9)$$

Sendo  $\bar{V}$  e  $\bar{W}$  pertencentes à  $T_p\Sigma$ , podemos escrevê-los em função de suas bases, ou seja,  $\bar{V} = V^\alpha \partial_\alpha$  e  $\bar{W} = W^\beta \partial_\beta$ , mas como  $\bar{V}$  e  $\bar{W}$  também pertencem a  $T_pM$ , logo,  $\bar{V} = V^A \partial_A$  e  $\bar{W} = W^B \partial_B$ . Portanto, se escolhermos  $\bar{V} = \partial_\alpha$  e  $\bar{W} = \partial_\beta$ , em (4.9), obtemos, usando (4.7), a seguinte relação:

$$\begin{aligned} h(\partial_\alpha, \partial_\beta) &= g(e_\alpha^A \partial_A, e_\beta^B \partial_B) = e_\alpha^A e_\beta^B g(\partial_A, \partial_B) \\ \Rightarrow h_{\alpha\beta} &= e_\alpha^A e_\beta^B g_{AB}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

A geometria intrínseca da hipersuperfície  $\Sigma$  é, então, completamente determinada pela métrica induzida (4.10). No entanto, a maneira como esta superfície é “vista” pelos observadores que habitam  $M$ , nos fornece informações sobre a curvatura extrínseca desse espaço com respeito ao espaço-ambiente, sendo este elemento descrito pelo chamado tensor de curvatura extrínseca.

O tensor de curvatura extrínseca corresponde à quantidade que mede a variação do vetor normal à hipersuperfície  $\Sigma$  ao longo dos seus vetores tangentes [65]. Logo, a curvatura extrínseca é um tensor definido em  $\Sigma$  que indica como esta hipersuperfície se curva em relação ao espaço  $M$  que a envolve.

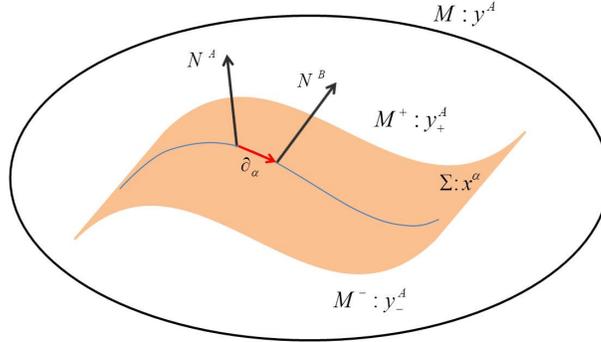


Figura 4.2: Ilustração do tensor de curvatura extrínseca e das duas regiões do espaço-tempo  $M$  unidas por um fronteira comum (a hipersuperfície  $\Sigma$ ).

Matematicamente, podemos definir a curvatura extrínseca como a derivada covariante do vetor ortogonal à  $\Sigma$  ao longo de um vetor na direção tangente, dada por,

$$K_{\alpha\beta} = -e_\alpha^A e_\beta^B (\nabla_B N_A). \quad (4.11)$$

Podemos ainda verificar que o tensor de curvatura extrínseca é simétrico, ou seja,

$$K_{\alpha\beta} = K_{\beta\alpha} \quad (4.12)$$

De acordo com a Figura (4.2), podemos observar que a hipersuperfície  $\Sigma$  divide localmente  $M$  em duas regiões, as quais nos referiremos como positiva e negativa. De modo que a curvatura extrínseca associada a essas regiões pode ser calculada separadamente com respeito à parte positiva  $K_{\alpha\beta}^+$  ou a parte negativa  $K_{\alpha\beta}^-$ . Sendo o tensor de curvatura extrínseca suposto contínuo através de  $\Sigma$ , ele deve ser o mesmo em ambos os lados da hipersuperfície. Logo,

$$[K_{\alpha\beta}] \equiv K_{\alpha\beta}^+ - K_{\alpha\beta}^- = 0. \quad (4.13)$$

Juntos, a métrica induzida (4.10) e o tensor de curvatura extrínseca (4.11) fornecem importantes informações sobre a hipersuperfície  $\Sigma$ .

Para informações mais detalhadas sobre o formalismo de imersão em variedades ver [66] e [67].

## 4.2 Aplicação do formalismo de imersão ao Método “deslocar, cotar e refletir”

Na seção anterior, apresentamos as ferramentas do formalismo de imersão, que nos serão úteis à aplicação deste ao Método “deslocar, cortar e refletir”. Nesta seção, portanto, buscaremos examinar a seguinte questão: Dado um espaço-tempo  $M$  dotado de uma métrica que descreve a região exterior a um sistema com simetria axial, como obter um disco fino de matéria, a partir de uma hipersuperfície, imersa em  $M$ , que a princípio, admite uma forma qualquer?

Para responder a esta pergunta, vamos utilizar o formalismo de imersão para “deslocar, cortar e refletir” um espaço-tempo  $M$  estático e com simetria axial, considerando apenas uma hipersuperfície  $\Sigma$  particular.

Na construção do disco, o espaço-tempo quadrimensional  $M$ , é uma solução do vácuo, mas que possui uma singularidade ou fonte, em uma região limitada. Vamos considerar

uma hipersuperfície tridimensional  $\Sigma$ , imersa em  $M$ . Logo,  $\Sigma$  divide localmente o espaço em duas regiões, as quais chamaremos  $M^+$  e  $M^-$ . Faz-se um “corte” em  $M$ , na região em que se encontra  $\Sigma$ , de modo que a região com singularidade ou fonte, a parte inferior à  $\Sigma$ , seja descartada e a parte superior seja refletida, a partir da linha do corte, ou seja, fazemos uma reflexão do espaço que nos restou. O resultado é uma nova variedade  $\hat{M}$ , dada por,  $\hat{M} = (M^+ \cup \Sigma) \cup (\text{reflexão de } M^+)$ , a qual passará a apresentar um disco de matéria de extensão infinita, uma vez que a reflexão pressupõe a identificação de cada ponto pertencente à  $\Sigma$  com os pontos da sua imagem. O procedimento realizado pode ser visto na Figura 4.3.

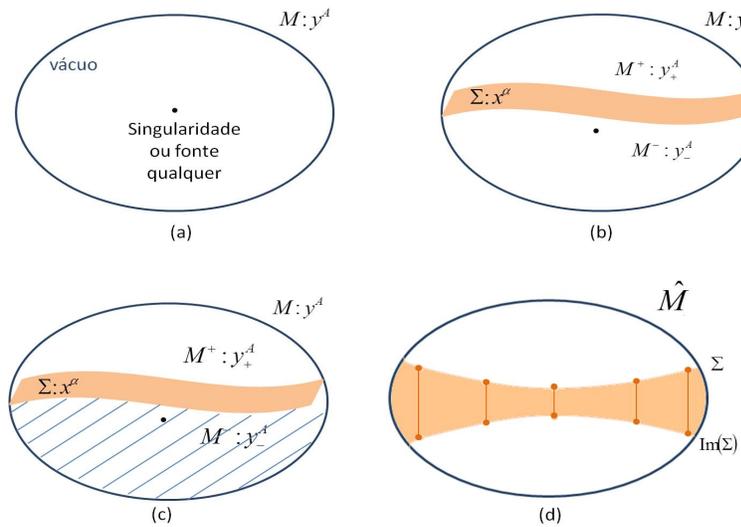


Figura 4.3: Sequência esquemática do método da imersão.

Na Figura 4.3, a ilustração (a) mostra o espaço-ambiente  $M$  descrito por uma métrica estática e com simetria axial, no vácuo; em (b)  $\Sigma$  divide  $M$  em duas regiões:  $M^+$  e  $M^-$ , cujas métricas são respectivamente  $g_{AB}^+$ , expressas nas coordenadas  $y_+^A$ , e  $g_{AB}^-$ , expressa nas coordenadas  $y_-^A$ ; em (c) um corte é feito, logo abaixo de  $\Sigma$  e então, a região com singularidade é desprezada, por fim em (d) uma nova variedade é criada  $\hat{M}$ , a partir da simetria de reflexão, que estabelece a identificação entre os pontos pertencentes à  $\Sigma$  e a sua imagem.

Desse modo, sejam  $y^A = (T, R, Z, \Phi)$  as coordenadas do espaço maior  $M$ , e  $x^\alpha = (t, r, \varphi)$  as coordenadas do espaço menor  $\Sigma$ .

Por simplicidade, admitiremos que a localização da hipersuperfície  $\Sigma$  seja dada por uma

equação arbitrária do tipo:

$$Z = Z(r). \quad (4.14)$$

Logo, dada a localização de  $\Sigma$ , temos de (4.6), que as funções de imersão que relacionam as coordenadas de ambos os espaços são:

$$T = t; \quad (4.15)$$

$$R = r; \quad (4.16)$$

$$Z = Z(r); \quad (4.17)$$

$$\Phi = \varphi. \quad (4.18)$$

Para o caso desejado (sistema com simetria axial), vamos considerar que a métrica descrita por  $M$  seja a métrica de Weyl (3.25), cujo elemento de linha ao quadrado, nas coordenadas  $y^A$ , tem a forma,

$$g_{AB}dy^A dy^B = -e^{2\phi}dT^2 + e^{2(\nu-\phi)}(dR^2 + dZ^2) + R^2e^{-2\phi}d\Phi^2, \quad (4.19)$$

onde  $\phi = \phi(R, Z)$  e  $\nu = \nu(R, Z)$ .

Já a métrica de  $\Sigma$  será a métrica induzida, dada pela equação (4.10). Entretanto, uma maneira mais simples de determinarmos a métrica induzida é aplicando na métrica de  $M$ , (4.19), a diferencial das funções de imersão (4.15) a (4.18). Assim, obtemos

$$h_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = -e^{2\phi}dt^2 + e^{2(\nu-\phi)}[1 + (Z_{,r})^2]dr^2 + r^2e^{-2\phi}d\varphi^2. \quad (4.20)$$

onde, aqui,  $\phi = \phi(r, Z(r))$  e  $\nu = \nu(r, Z(r))$ , isto é,  $\phi$  e  $\nu$  são calculadas em  $\Sigma$ .

Na sequência da nossa discussão será conveniente encontrarmos as componentes do vetor normal a  $\Sigma$ .

Podemos encontrar o vetor normal  $\bar{N}$ , considerando primeiramente um deslocamento infinitesimal arbitrário  $d\bar{l}$  ao longo de  $\Sigma$ . Tomando pequenos incrementos ao longo das coordenadas intrínsecas de  $\Sigma$ , poderíamos escrever  $dl^\alpha = (dt, dr, d\varphi)$ . Sendo assim, as

componentes desse vetor, escritas na base do espaço-ambiente, são , de acordo com as funções de imersão (4.15) a (4.18), dadas por:

$$dl^A = (dt, dr, Z_{,r}dr, d\varphi). \quad (4.21)$$

O vetor normal deve ser ortogonal a qualquer deslocamento sobre  $\Sigma$ . Portanto,  $N^A$  deve satisfazer à equação,

$$N_A dl^A = 0. \quad (4.22)$$

Além disso,  $\bar{N}$  é unitário, ou seja,

$$N^A N_A = \eta \equiv \begin{cases} -1, & \text{se } \Sigma \text{ é do tipo tempo,} \\ +1, & \text{se } \Sigma \text{ é do tipo espaço.} \end{cases}$$

Para o caso em estudo, vamos tomar

$$N^A N_A = 1. \quad (4.23)$$

Resolvendo o sistema de equação constituído por (4.22) e (4.23), obtemos as seguintes componentes do vetor normal:

$$N_A = N (0, -Z_{,r}, 1, 0), \quad (4.24)$$

onde  $N$  é o fator de normalização, dado por

$$N = e^{(\nu-\phi)} [1 + (Z_{,r})^2]^{-1/2}. \quad (4.25)$$

De posse do vetor normal a  $\Sigma$ , vamos determinar a curvatura extrínseca da hipersuperfície  $\Sigma$  imersa em  $M$ . Através da definição da derivada covariante de um campo tensorial  $(\nabla_B N_A = \frac{\partial N_A}{\partial y^B} - \Gamma_{AB}^C N_C)$ , a curvatura extrínseca, equação (4.11), pode ser expressa como:

$$K_{\alpha\beta} = -\frac{\partial y^A}{\partial x^\alpha} \frac{\partial N_A}{\partial x^\beta} + \frac{\partial y^A}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^B}{\partial x^\beta} \Gamma_{AB}^C N_C. \quad (4.26)$$

Assim, de (4.26), temos que as componentes não nulas do tensor de curvatura extrínseca são:

$$K_{tt} = N [\phi_{,Z} - \phi_{,R} Z_{,r}] e^{-2(\nu-2\phi)}; \quad (4.27)$$

$$K_{rr} = N \{ Z_{,rr} + [1 + (Z_{,r})^2] [Z_{,r} (\nu_{,R} - \phi_{,R}) - (\nu_{,Z} - \phi_{,Z})] \}; \quad (4.28)$$

$$K_{\varphi\varphi} = NR e^{-2\nu} [Z_{,r} + R (\phi_{,Z} - \phi_{,R} Z_{,r})]. \quad (4.29)$$

A presença da camada de matéria concentrada em  $\Sigma$  provoca uma descontinuidade, um salto, sentido pelo espaço-tempo de  $M$ , de tal forma que a derivada primeira do tensor métrico na direção normal apresentará uma descontinuidade finita ao longo da hipersuperfície  $\Sigma$ , isto é,

$$[K_{\alpha\beta}] \equiv K_{\alpha\beta}^+ - K_{\alpha\beta}^- \neq 0. \quad (4.30)$$

Resolvendo as equações de Einstein em torno de  $\Sigma$ , é possível mostrar que a descontinuidade de  $K_{\alpha\beta}$  está relacionada ao tensor energia-momento superficial  $S_{\alpha\beta}$ , que descreve o conteúdo energético da hipersuperfície  $\Sigma$ , pela chamada condição de Junção de Israel [65],

$$S_{\alpha\beta} = +\frac{1}{8\pi} ([K_{\alpha\beta}] - [K] h_{\alpha\beta}), \quad (4.31)$$

onde  $[K] \equiv K^+ - K^-$  é o traço do tensor de curvatura extrínseca.

Através do Método da Imersão, temos que o novo espaço-tempo obtido apresentará simetria de reflexão, o que implica  $K_{\alpha\beta}^+ = -K_{\alpha\beta}^-$ . Dessa maneira, segue da condição de Junção de Israel, equação (4.31), que o tensor energia-momento superficial associado à  $\Sigma$  satisfaz à equação abaixo:

$$S_{\beta}^{\alpha} = \frac{1}{4\pi} (K_{\beta}^{\alpha} - K \delta_{\beta}^{\alpha}). \quad (4.32)$$

Logo, conhecendo as componentes não-nulas do tensor de curvatura extrínseca (4.27) a (4.29) podemos determinar  $S_{\alpha\beta}$ . A partir de (4.32), temos que as componentes não nulas do tensor energia-momento superficial são:

$$S_t^t = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{(\phi-\nu)}}{[1 + (Z_{,r})^2]^{3/2}} \left\{ -Z_{,rr} + [1 + (Z_{,r})^2] \left[ -Z_{,r} (\nu_{,R} - 2\phi_{,R}) + (\nu_{,Z} - 2\phi_{,Z}) - \frac{1}{R} Z_{,r} \right] \right\}; \quad (4.33)$$

$$S_r^r = \frac{-1}{4\pi R} \frac{e^{(\phi-\nu)} Z_{,r}}{[1 + (Z_{,r})^2]^{1/2}}; \quad (4.34)$$

$$S_{\varphi}^{\varphi} = \frac{-1}{4\pi} \frac{e^{(\phi-\nu)}}{[1 + (Z_{,r})^2]^{3/2}} \{ Z_{,rr} + [1 + (Z_{,r})^2] (Z_{,r} \nu_{,R} - \nu_{,Z}) \}. \quad (4.35)$$

No caso particular em que a hipersuperfície está localizada em um plano  $Z(r) = a$ , onde  $a$  é uma constante, devemos reproduzir os resultados obtidos no capítulo anterior, através do Método “deslocar, cortar e refletir”.

Assim, fazendo  $Z(r) = a$  nas equações (4.33) a (4.35), ficamos com

$$S_t^t = \frac{1}{4\pi} [(\nu_{,Z} - 2\phi_{,Z}) e^{(\phi-\nu)}] |_{Z=a}; \quad (4.36)$$

$$S_r^r = 0; \quad (4.37)$$

$$S_\varphi^\varphi = \frac{1}{4\pi} [\nu_{,Z} e^{(\phi-\nu)}] |_{Z=a}. \quad (4.38)$$

Sabemos que  $\phi$  e  $\nu$  são soluções das equações de Einstein no vácuo, e portanto satisfazem às equações (3.55) a (3.58). Tomando em particular (3.57) e lembrando que  $R = r$  (da função de imersão, (4.16)), podemos reescrever (4.36) e (4.38), a fim de verificar diretamente que a distribuição obtida apresenta

$$S_t^t = \frac{-1}{2\pi} [e^{(\phi-\nu)} (1 - r\phi_{,r}) \phi_{,Z}] |_{Z=a}; \quad (4.39)$$

$$S_\varphi^\varphi = \frac{1}{2\pi} [e^{(\phi-\nu)} r\phi_{,r}\phi_{,Z}] |_{Z=a}. \quad (4.40)$$

Portanto, idênticas àquelas encontradas em (3.84) e (3.85), já que, como vimos,  $\phi_{,Z} = \phi_{,h}$  onde  $h(Z)$ . Assim, podemos confirmar que o Método “deslocar, cortar e refletir” é realmente um caso particular do Método da Imersão, apresentado neste capítulo.

## Capítulo 5

# Aplicação do Método da Imersão na obtenção de discos galácticos

Vimos no capítulo 2 que, a massa das galáxias ainda não pôde ser completamente determinada, já que uma grande parte desta é de natureza, até então, desconhecida. Entretanto, é conhecido que uma fração substancialmente considerável de massa reside nos chamados discos galácticos, causando portanto muitas especulações à respeito de seu comportamento físico e de como este se traduz aos moldes da Física atual.

Através da Relatividade Geral a modelagem de discos tem se estabelecido, primeiro pela possibilidade de se obter versões relativísticas dos modelos Newtonianos já existentes, vistos por exemplo em [68], e segundo por se adequar a certas situações adversas, como por exemplo a presença de buracos negros massivos no centro de algumas galáxias. Resultando desse modo, numa ampla produção literária a respeito de novas abordagens sobre a modelagem dinâmica das galáxias via Relatividade Geral.

Utilizando a Relatividade Geral, Cooperstock e Tieu [69] obtiveram um modelo idealizado de galáxia, no qual esta seria representada por um fluido uniforme, axialmente simétrico, girante e sem pressão (poeira). De acordo com os autores, a distribuição de densidade de uma galáxia está relacionada, de forma não linear, com o parâmetro de rotação. Eles revelaram que as curvas de rotação medidas para várias galáxias são consistentes com a distribuição de massa de um disco achatado, excluindo assim, a necessidade de um grande halo com matéria

escura. Contudo, esse modelo tem sido criticado por alguns autores [70]-[72]. Em particular, Korzynski [70] argumenta que o modelo apresenta um disco fino singular, com rotação em  $z = 0$ , já Vogt e Letelier [71] têm mostrado que esse disco singular é feito de matéria exótica (um tipo de fonte com propriedades não físicas, como por exemplo, densidade de energia negativa). Por outro lado, Balasin e Grumiller [73], através de uma formulação matemática um pouco diferente, verificaram que é possível obter curvas de rotação achatadas sem fontes não físicas em  $z = 0$ , mas por sua vez fontes de distribuição podem surgir sobre o eixo- $z$ .

Com o interesse em construir modelos de discos com características físicas semelhantes aos discos galácticos, vamos, neste capítulo, desenvolver modelos de discos com rotação. Para isto, usaremos o Método da Imersão, apresentado no capítulo anterior, partindo de uma métrica que descreva o exterior de um espaço-tempo axialmente simétrico e em rotação. Consideraremos, portanto, a métrica de Kerr nas coordenadas de Boyer-Lindquist, a fim de obter soluções exatas das equações de Einstein para um disco de matéria que possa representar soluções de discos galácticos.

Antes de começarmos a descrever, propriamente, a aplicação do método exposto no capítulo anterior, analisemos os motivos que nos levaram a escolher a métrica de Kerr.

Embora a solução de Kerr apresente simetria axial, ela não pertence à classe de Weyl, por não se tratar de um espaço-tempo estático. De fato, por causa da rotação o espaço-tempo é estacionário. Dessa maneira, a solução de Kerr descreve um espaço-tempo com rotação e axialmente simétrico. Esta solução é caracterizada pelos parâmetros  $M$  e  $J$  definidos respectivamente como massa e momento angular, os quais se relacionam a partir do parâmetro de Kerr ( $a = J/M$ ). O elemento de linha ao quadrado desta solução, escrito nas coordenadas de Boyer-Lindquist [40], é

$$g_{AB}dy^A dy^B = - \left( 1 - \frac{2GMR}{\rho^2} \right) dT^2 - \frac{4GMaR \sin^2 \Theta}{\rho^2} dT d\Phi + \frac{\rho^2}{\Delta} dR^2 + \rho^2 d\Theta^2 + \frac{\sin^2 \Theta}{\rho^2} \left[ (R^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \Theta \right] d\Phi^2. \quad (5.1)$$

onde  $y^A$  será, agora, definido pelas coordenadas  $(T, R, \Theta, \Phi)$ ,  $\rho^2(R, \Theta) = R^2 + a^2 \cos^2 \Theta$  e

$$\Delta(R) = R^2 - 2GMR + a^2.$$

O espaço-tempo descrito pela solução de Kerr corresponde a um buraco negro axialmente simétrico e com rotação. Neste caso, o buraco negro é dito Buraco Negro de Kerr.

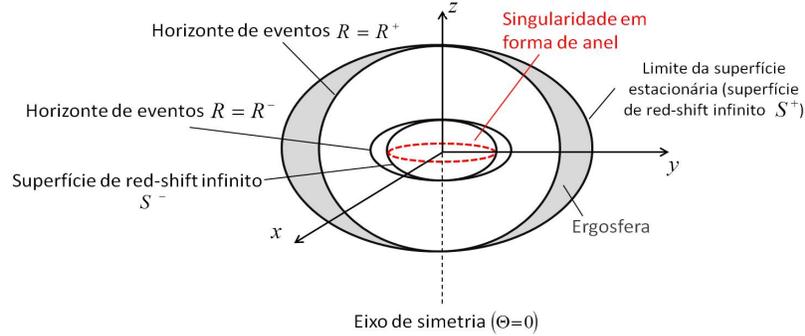


Figura 5.1: Geometria da solução de Kerr (Figura adaptada de [40]).

A Figura (5.1) ilustra a geometria do Buraco Negro de Kerr, a qual é constituída por uma singularidade em forma de anel, o anel de Kerr, de “raio”  $a$ ; duas superfícies oblatas de *red-shift* infinito:  $R_{S\pm} = GM \pm \sqrt{G^2M^2 - a^2 \cos^2 \Theta}$ ; dois *horizontes de eventos* elipsoidais (no caso em que  $a < GM$ ):  $R_{\pm} = GM \pm \sqrt{G^2M^2 - a^2}$ , e uma região chamada *ergosfera*, na qual todos as partículas ali presentes devem girar no mesmos sentido que o buraco negro [40].

Já de posse da métrica do espaço-ambiente (5.1), seguindo o procedimento adotado na seção 4.2, vamos considerar que a hipersuperfície imersa, tenha coordenadas  $x^\alpha = (t, r, \varphi)$ , e seja especificada pelas funções de imersão:

$$T = t; \tag{5.2}$$

$$R = r; \tag{5.3}$$

$$\Theta = \Theta(r); \tag{5.4}$$

$$\Phi = \varphi; \tag{5.5}$$

A função  $\Theta(r)$  é arbitrária e permite-nos escolher diferentes hipersuperfícies com simetria axial e estacionárias.

Vimos que a métrica que descreve a geometria intrínseca da hipersuperfície é a métrica induzida, a qual para caso em questão, assume a seguinte forma:

$$h_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = - \left(1 - \frac{2GMR}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{4GMaR \sin^2 \Theta}{\rho^2} dt d\varphi + \\ + \rho^2 \left[ \frac{1}{\Delta} + (\Theta_{,r})^2 \right] dr^2 + \frac{\sin^2 \Theta}{\rho^2} \left[ (R^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \Theta \right] d\varphi^2. \quad (5.6)$$

Dando prosseguimento, de forma análoga à realizada no capítulo anterior, obtemos o vetor normal à hipersuperfície,  $(N^A)$ . Escolhendo o sentido de  $N^A$  de tal maneira que ele aponte da região negativa ( $M^-$ ) para a região positiva ( $M^+$ ), temos que as componentes do vetor normal à hipersuperfície são:

$$N_A = -N (0, -\Theta_{,r}, 1, 0), \quad (5.7)$$

onde  $N$  é o fator de normalização, dado por

$$N = \rho [\Delta (\Theta_{,r})^2 + 1]^{-1/2}. \quad (5.8)$$

Por sua vez, da definição de curvatura extrínseca, equação (4.26), podemos verificar que as componentes não nulas do tensor de curvatura extrínseca associadas à hipersuperfície são (lembrando que estamos utilizando o sistema de unidades naturais, no qual  $G = 1$ ):

$$K_{tt} = \frac{2MN}{\rho^6} [1/2 a^2 R \sin (2\Theta(r)) + \Delta \Theta_{,r} (-1/2 \rho^2 + R^2)]; \quad (5.9)$$

$$K_{t\varphi} = K_{\varphi t} = -\frac{2MN a}{\rho^6} [1/2 R \sin (2\Theta(r)) (\rho^2 + a^2 \sin^2 (\Theta(r))) + \\ + \Delta \Theta_{,r} \sin^2 (\Theta(r)) (-1/2 \rho^2 + R^2)]; \quad (5.10)$$

$$K_{rr} = \frac{N}{\Delta \rho^2} \{ -1/2 a^2 \sin (2\Theta(r)) (1 + \Delta (\Theta_{,r})^2) - \Theta_{,rr} \Delta \rho^2 + \\ + \Theta_{,r} [-R \Delta^2 (\Theta_{,r})^2 - \Delta R + \rho^2 (-R + M)] \}; \quad (5.11)$$

$$K_{\varphi\varphi} = -\frac{N}{\rho^6} \{ \sin (2\Theta(r)) [1/2 a^4 \Delta \sin^4 (\Theta(r)) - 1/2 a^2 \sin^2 (\Theta(r)) (-2 \Delta \rho^2 + R^4 + 2 R^2 a^2 + a^4) + \\ - 1/2 \rho^2 (R^2 + a^2)^2] + \Delta \Theta_{,r} \sin^2 (\Theta(r)) [a^2 \sin^2 (\Theta(r)) ((\Delta - \rho^2) R + \rho^2 M) + \\ - R (R^2 + a^2) (R^2 + a^2 - 2 \rho^2)] \}. \quad (5.12)$$

Através das equações (5.9) a (5.12), obtemos, utilizando a Condição de Junção de Israel, equação (4.32), que as componentes não nulas do tensor energia-momento superficial, referentes à hipersuperfície, têm a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 S_t^t = & -\frac{N}{4} \left\{ 1/2 [1 + (\Theta_{,r})^2 \Delta] \sin(2\Theta(r)) [a^2 \sin^2(\Theta(r)) (-1/2 \rho^2 \Delta + MR\Delta + M^2 R^2) + \right. \\
 & - 1/2 (R^2 + a^2)^2 (-1/2 \rho^2 + MR)] + \sin^2(\Theta(r)) [-\Delta \Theta_{,rr} [a^2 \sin^2(\Theta(r)) \times \\
 & \times (-1/4 \rho^2 \Delta + 1/2 MR\Delta + M^2 R^2) - 1/2 (R^2 + a^2)^2 (-1/2 \rho^2 + MR)] + \\
 & + \Theta_{,r} \sin^2(\Theta(r)) [\Delta^2 (\Theta_{,r})^2 [-1/2 a^2 \sin^2(\Theta(r)) (1/2 \rho^2 M - 1/2 R\rho^2 + R^2 M) + \\
 & + (R^2 + a^2) R (-1/2 \rho^2 + MR)] + a^2 \sin^2(\Theta(r)) (-R^3 M^2 + M (-\Delta + M^2) R^2 + \\
 & + 1/2 \Delta (M^2 + \rho^2) R - 1/2 \Delta \rho^2 M) - 1/2 (-R^3 + R^2 M + (-2\Delta - a^2) R + M a^2) \times \\
 & \times (R^2 + a^2) (-1/2 \rho^2 + MR)] \left. \right\} / \left\{ [a^2 \sin^2(\Theta(r)) (-1/4 \rho^2 \Delta + 1/2 MR\Delta + M^2 R^2) + \right. \\
 & \left. - 1/2 (R^2 + a^2)^2 (-1/2 \rho^2 + MR)] [1 + (\Theta_{,r})^2 \Delta] \pi \rho^2 \sin^2(\Theta(r)) \right\}; \quad (5.13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_\varphi^t = & -\frac{N\Delta aM}{8} [\cos^2(\Theta(r)) - 1] \left\{ -1/2 a^2 R \sin(2\Theta(r)) + \Theta_{,r} [a^2 \cos^2(\Theta(r)) \times \right. \\
 & \times (-R^2 + 1/2 \Delta + MR) + 1/2 a^4 + (-1/2 \Delta - MR) a^2 - 3/2 R^4] \left. \right\} / \left\{ \rho^2 \pi \times \right. \\
 & \times [a^2 \cos^2(\Theta(r)) (-1/4 \rho^2 \Delta + 1/2 MR\Delta + M^2 R^2) + (-1/4 \rho^2 + 1/2 MR) a^4 + \\
 & + [MR^3 + (-M^2 - 1/2 \rho^2) R^2 - 1/2 MR\Delta + 1/4 \rho^2 \Delta] a^2 + \\
 & \left. - 1/4 \rho^2 R^4 + 1/2 MR^5] \right\}; \quad (5.14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_r^r = & -\frac{N}{2} \left\{ \sin(2\Theta(r)) [1/2 a^4 \sin^4(\Theta(r)) (M^2 R^2 - 1/8 \rho^2 \Delta + 1/2 MR\Delta) + 1/2 a^2 \sin^2(\Theta(r)) \times \right. \\
 & \times [(1/8 \rho^2 - 1/2 MR) a^4 + (1/4 \rho^2 R^2 - MR^3) a^2 + 1/2 MR\Delta \rho^2 - 1/4 \rho^4 \Delta + 1/8 \rho^2 R^4 + \\
 & - 1/2 MR^5 + M^2 R^2 \rho^2] - 1/8 \rho^2 (-1/2 \rho^2 + MR) (R^2 + a^2)^2 \left. \right] + \Theta_{,r} \Delta \sin^2(\Theta(r)) \times \\
 & \times [a^2 \sin^2(\Theta(r)) [R^3 M^2 - 1/4 M (-2\Delta + \rho^2) R^2 - 1/4 \rho^2 (-1/2 \rho^2 + M^2 + 1/2 \Delta) R + \\
 & - 1/8 M \rho^2 (\rho^2 + \Delta)] - 1/2 (R^2 + a^2) [(R^2 M - 1/4 R \rho^2 - 1/4 \rho^2 M) a^2 + \\
 & + R (MR^3 - 1/4 \rho^2 R^2 - 5/4 MR \rho^2 + 1/2 \rho^4)] \left. \right\} / \left\{ \rho^4 \pi \sin^2(\Theta(r)) [a^2 \sin^2(\Theta(r)) \times \right. \\
 & \left. \times (-1/4 \rho^2 \Delta + 1/2 MR\Delta + M^2 R^2) - 1/2 (R^2 + a^2)^2 (-1/2 \rho^2 + MR)] \right\}; \quad (5.15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_t^\varphi &= \frac{NM a}{8} \left\{ R \sin(2\Theta(r)) [MR - 1/2 \rho^2 - 1/2 a^2 \sin^2(\Theta(r))] - \Theta_{,r} \Delta \sin^2(\Theta(r)) \times \right. \\
 &\quad \times (-1/2 \rho^2 + R^2) \left. \right\} / \left\{ \rho^2 \pi \sin^2(\Theta(r)) [a^2 \sin^2(\Theta(r)) (-1/4 \rho^2 \Delta + 1/2 MR \Delta + M^2 R^2) + \right. \\
 &\quad \left. - 1/2 (R^2 + a^2)^2 (-1/2 \rho^2 + MR)] \right\}; \tag{5.16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_\varphi^\varphi &= -\frac{N}{4} \left\{ 1/2 a^2 \sin(2\Theta(r)) [1 + (\Theta_{,r})^2 \Delta] (1/4 a^2 \Delta \sin^2(\Theta(r)) - 1/2 R^2 a^2 - 1/4 R^4 + \right. \\
 &\quad + M^2 R^2 - 1/4 a^4) - \Delta \Theta_{,rr} [a^2 \sin^2(\Theta(r)) (-1/4 \rho^2 \Delta + 1/2 MR \Delta + M^2 R^2) + \\
 &\quad \left. - 1/2 (R^2 + a^2)^2 (-1/2 \rho^2 + MR)] + \Theta_{,r} [-1/2 \Delta^2 (\Theta_{,r})^2 [a^2 \sin^2(\Theta(r)) \times \right. \\
 &\quad \times [(-1/2 \Delta + M^2) R + 1/2 M \Delta] - 1/2 (R^2 + a^2)^2 (-R + M)] + a^2 \sin^2(\Theta(r)) \times \\
 &\quad \times [-R^3 M^2 + (-1/2 \Delta + M^2) MR^2 + 1/4 \Delta (\rho^2 + \Delta) R - 1/4 M \Delta (\rho^2 + \Delta)] + \\
 &\quad \left. - 1/2 (-R + M) (R^2 + a^2)^2 (MR - 1/2 \rho^2 - 1/2 \Delta)] \right\} / \left\{ \rho^2 \pi [1 + (\Theta_{,r})^2 \Delta] \times \right. \\
 &\quad \times [a^2 \sin^2(\Theta(r)) (-1/4 \rho^2 \Delta + 1/2 MR \Delta + M^2 R^2) + \\
 &\quad \left. - 1/2 (R^2 + a^2)^2 (-1/2 \rho^2 + MR)] \right\}. \tag{5.17}
 \end{aligned}$$

Para analisarmos o conteúdo material sobre a superfície é conveniente determinarmos os autovalores e autovetores do tensor energia-momento superficial, através da resolução da equação:

$$S_\beta^\alpha U^\beta = \lambda U^\alpha. \tag{5.18}$$

Podemos verificar, estudando as soluções da equação (5.18), que os autovalores são:

$$\lambda_t = \frac{1}{2} (T - \sqrt{D}); \tag{5.19}$$

$$\lambda_r = S_r^r; \tag{5.20}$$

$$\lambda_\varphi = \frac{1}{2} (T + \sqrt{D}); \tag{5.21}$$

onde

$$T = S_\varphi^\varphi + S_t^t; \tag{5.22}$$

$$D = (S_\varphi^\varphi - S_t^t)^2 + 4S_t^\varphi S_\varphi^t. \tag{5.23}$$

Para o caso em que  $D > 0$  teremos três autovalores reais distintos, fato este, que nos permite diagonalizar o tensor energia-momento superficial. Assim, podemos escrever  $S_{\alpha\beta}$  em sua forma canônica, em termos de seus autovalores e autovetores, do seguinte modo,

$$S_{\alpha\beta} = -\lambda_t V_\alpha V_\beta + \lambda_r W_\alpha W_\beta + \lambda_\varphi X_\alpha X_\beta, \quad (5.24)$$

onde os autovetores  $\{\bar{V}, \bar{W}, \bar{X}\}$ , que formam uma base ortonormal, têm as seguintes componentes nas base  $\left[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi}\right]$ :

$$V^\alpha = N_0 (1, 0, \Omega); \quad (5.25)$$

$$W^\alpha = N_1 (0, 1, 0); \quad (5.26)$$

$$X^\alpha = N_2 (1, 0, \Psi), \quad (5.27)$$

onde  $N_0$ ,  $N_1$  e  $N_2$  são fatores de normalização, os quais podem ser determinados pelas condições:  $V^\alpha V_\alpha = -1$ ,  $W^\alpha W_\alpha = 1$  e  $X^\alpha X_\alpha = 1$ , e as funções  $\Omega$  e  $\Psi$  são dadas por:

$$\Omega = (\lambda_t - S_t^t) / S_\varphi^t; \quad (5.28)$$

$$\Psi = (\lambda_\varphi - S_\varphi^\varphi) / S_t^\varphi. \quad (5.29)$$

Com respeito a esta nova base, podemos determinar algumas propriedades físicas do conteúdo material da hipersuperfície. Por exemplo, a densidade superficial  $\sigma$ , medida pelos observadores com velocidade própria  $\bar{V}$ , seria dada por:  $\sigma = S_{\alpha\beta} V^\beta V^\alpha$ , a qual com a ajuda de (5.18), resulta em

$$\sigma = -\lambda_t \quad (5.30)$$

De maneira similar, temos que as pressões radial e azimutal, medidas com respeito à base  $[\bar{V}, \bar{W}, \bar{X}]$ , são:

$$\tilde{p}_r = \lambda_r \quad (5.31)$$

$$\tilde{p}_\varphi = \lambda_\varphi \quad (5.32)$$

De posse dessa formulação geral, como aplicação, vamos escolher uma hipersuperfície particular. Consideremos novamente uma hipersuperfície  $z = \text{constante}$ , onde  $z$  se refere às

coordenadas de Weyl. Nas coordenadas esferoidais oblatas, essa hipersuperfície será descrita pela função:

$$\Theta(r) = \arccos\left(\frac{z}{r - GM}\right) \quad (5.33)$$

Cientes de que o procedimento apresentado seja efetuado a partir de um “corte” no espaço-ambiente, descrito pela métrica de Kerr nas coordenadas de Boyer-Lindquist. E assumindo que a localização da hipersuperfície seja determinada pelo plano de corte  $z = b = \text{constante}$ .

Desse modo, substituindo (5.33) nas equações (5.13) a (5.17), obteremos o tensor energia-momento superficial  $S_{\beta}^{\alpha}$  que representa um disco girante de matéria imerso no espaço-tempo de Kerr. Logo adiante, vamos analisar especificamente a densidade superficial de energia e as pressões superficiais deste disco.

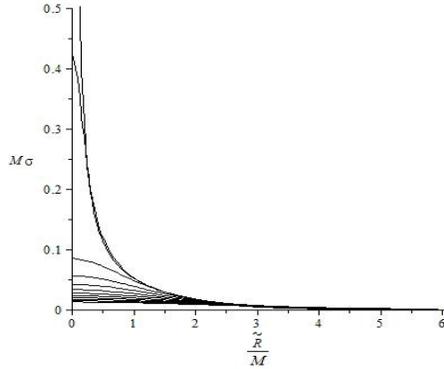


Figura 5.2: Gráfico da densidade superficial de doze discos finos, na métrica de Kerr nas coordenadas de Boyer-Lindquist.

O gráfico da Figura 5.2 apresenta a densidade superficial de doze discos finos de matéria, exibidos como função do raio circunferencial  $\tilde{R} = \sqrt{h_{\varphi\varphi}}$ . Podemos observar que a densidade  $\sigma$  é definida positiva em toda parte do disco, caindo à zero quando  $\tilde{R}$  tende ao infinito. Aqui, todas as curvas foram feitas fixando a massa total em  $M = 1$ ; o parâmetro de Kerr em  $a = 0.8$ , e tomando diferentes valores para o plano de corte,  $z = b$ :  $b/M = 0.6013, 0.613, 0.87, 1.11, 1.34, 1.56, 1.78, 2.00, 2.21, 2.42, 2.63, 2.84$ .

Verificamos que a pressão na direção radial é nula.

Já para o caso da pressão na direção azimutal, Figura 5.3, os mesmos doze discos finos de

Kerr foram usados, resultando numa pressão  $\tilde{p}_\varphi$  definida positivo, e também caindo á zero no infinito.

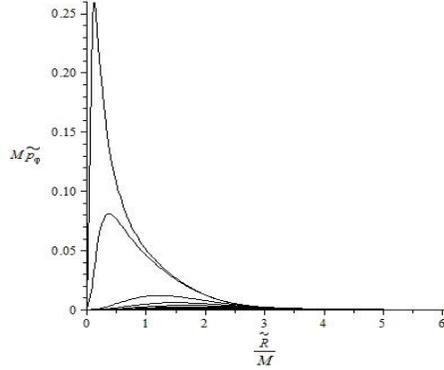


Figura 5.3: Gráfico da pressão na direção azimutal de doze discos finos imersos no espaço-tempo de Kerr.

Como já mencionamos anteriormente, todas essas quantidades são medidas com respeito à base ortonormal  $[\bar{V}, \bar{W}, \bar{X}]$ , ou seja, por observadores que têm velocidade própria  $\bar{V}$  e portanto são comóveis ao disco. A existência de uma pressão na direção azimutal pode ser explicada por esses observadores, considerando que o disco de matéria seja composto por dois fluidos que circulam em sentidos opostos, fluidos de contrarotação (ver Figura 5.4).

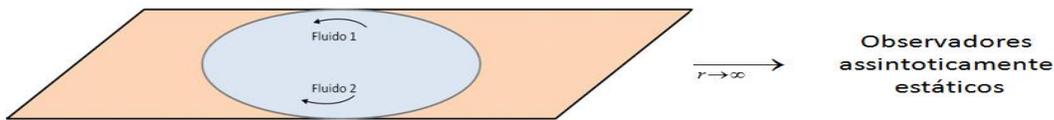


Figura 5.4: Descrição de um disco de contrarotação em relação à distintos observadores.

Com respeito aos observadores comóveis ao disco, os fluidos têm a mesma velocidade  $U^*$ , identificada com a velocidade de contrarotação das partículas nos fluidos, dada por [54]:

$$U^* = (\tilde{p}_\varphi/\sigma)^{1/2}. \quad (5.34)$$

Deve-se salientar, no entanto, que do ponto de vista dos observadores assintoticamente estáticos, o disco gira com velocidade angular  $\frac{d\varphi}{dt} = \Omega$ . Assim, com respeito a estes observadores distantes, os fluidos circulam com diferentes velocidades angulares.

Levando em consideração a interpretação admitida, temos que a densidade superficial de energia do disco,  $\sigma$ , será definida pela soma das densidades de energia de cada fluido. Logo,

$$\sigma = \sigma_{(1)} + \sigma_{(2)}. \quad (5.35)$$

Podemos relacionar  $\sigma_{(1)}$  e  $\sigma_{(2)}$ , com a densidade própria dos fluidos,  $\sigma_{P(1)} = \sigma_{P(2)} \equiv \sigma_P$ , ou seja, com a densidade medida pelos observadores comóveis aos fluidos.

Uma vez que os observadores comóveis aos fluidos se movem, com respeito aos observadores comóveis ao disco, com velocidade  $U^*$ , temos que a relação existente entre  $\sigma_P$  e a densidade superficial de cada fluido ( $\sigma_{(1)}$  e  $\sigma_{(2)}$ ) é dada sob uma transformação de Lorentz. Logo, sendo  $\sigma = S_{\alpha\beta}V^\alpha V^\beta$ , podemos escrever a densidade superficial como a componente (0) (0) do tensor energia-momento superficial na base  $[\bar{V}, \bar{W}, \bar{X}]$ , ou seja,  $\sigma = S_{\alpha\beta}V^\alpha V^\beta = S_{(0)(0)}^*$ . Como  $S_{(0)(0)}^*$  é uma componente de um tensor de Lorentz do tipo (0, 2), ela se transforma da seguinte maneira,

$$S_{(0)(0)}^* = \Lambda_0^{\hat{\alpha}} \Lambda_0^{\hat{\beta}} S_{(\hat{\alpha})(\hat{\beta})}, \quad (5.36)$$

onde  $S_{(\hat{\alpha})(\hat{\beta})}$  representa as componentes do tensor energia-momento na base comóvel ao fluido. Nesta base, a única componente não nula é  $S_{(\hat{0})(\hat{0})}$ . Logo,

$$S_{(0)(0)}^* = \left(\Lambda_0^{\hat{0}}\right)^2 S_{(\hat{0})(\hat{0})}. \quad (5.37)$$

Desse modo, levando em consideração cada fluido, podemos escrever:

$$\sigma_{(1)} = \frac{1}{[1 - (U^*)^2]} \sigma_P; \quad (5.38)$$

$$\sigma_{(2)} = \frac{1}{[1 - (U^*)^2]} \sigma_P. \quad (5.39)$$

Substituindo (5.38) e (5.39) em (5.35), obtemos

$$\sigma = \frac{2\sigma_P}{[1 - (U^*)^2]}. \quad (5.40)$$

A equação (5.40) corresponde a densidade superficial do par de fluidos. Sendo  $U^* = (\tilde{p}_\varphi/\sigma)^{1/2}$ , podemos reescrevê-la na forma

$$2\sigma_P = \sigma - \tilde{p}_\varphi. \quad (5.41)$$

A equação (5.41) representa a soma das densidades superficiais próprias de ambos os fluidos.

Os resultados obtidos, referentes às medidas relacionadas aos fluidos: a velocidade de contrarotação, equação (5.34), e a soma das densidades superficiais próprias, equação (5.41), também foram analisados graficamente para os doze discos de Kerr, já mencionados, fornecendo respectivamente:

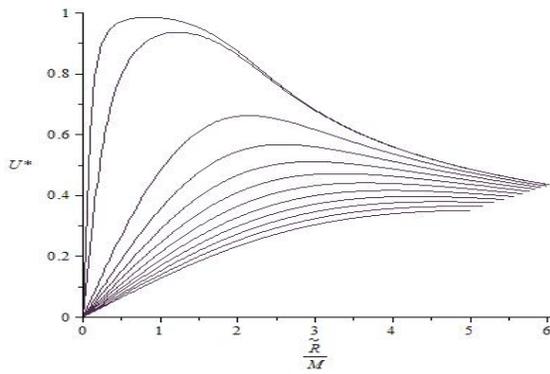


Figura 5.5: Gráfico referente às curvas da velocidade de contrarotação dos fluidos.

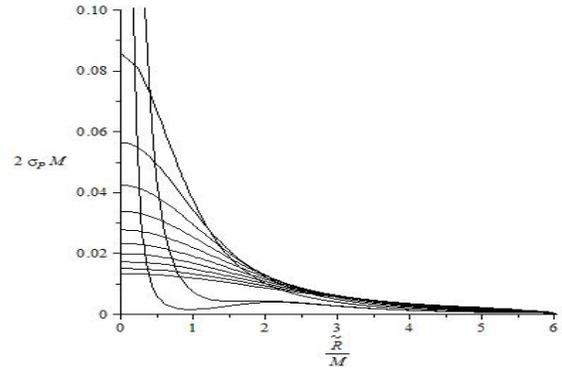


Figura 5.6: Gráfico correspondente a soma das densidades superficiais próprias dos fluidos.

A Figura 5.5 mostra as curvas das velocidades de contrarotação dos fluidos, medidas pelos observadores comóveis ao disco, em função do raio circunferencial. Podemos verificar que os discos com maior velocidade são aqueles que apresentam menor  $b$ . Já a Figura 5.6 nos dá as curvas referentes às somas das densidades superficiais próprias dos fluidos, em função do raio circunferencial, para as quais temos que  $2\sigma_P$  é maior no centro, contudo, decresce mais rapidamente com o aumento de  $\tilde{R}$ .

Podemos ainda verificar que os gráficos das Figuras 5.5 e 5.6, correspondem aos resultados obtidos por Bicak e Ledvinka [53], os quais partindo de uma solução de Kerr, aplicam o já referido método “cortar, deslocar e refletir” na construção de discos finos de matéria em contrarotação.

Assim, mais uma vez, atestamos a eficiência do Método da Imersão na construção de discos de matéria, os quais servem de modelo à algumas estruturas astrofísicas, visto que, o

caso particular de uma hipersuperfície “plana”,  $z = b$ , pôde ser reproduzido através de um método mais geral, o qual permite uma maior liberdade em relação à escolha de diferentes hipersuperfície que produzem discos de matéria com diferentes propriedades físicas (densidade, pressão, etc).

Portanto, diante do exposto, somos levados a especular que, com uma escolha conveniente da hipersuperfície, seria possível obter um disco de matéria que apresentasse as mesmas propriedades físicas de um disco galáctico real, isto é, compatíveis aos dados observacionais.

# Capítulo 6

## Conclusões e Perspectivas

Ao longo deste trabalho, estudamos a possibilidade de encontrar soluções exatas das equações de Einstein que descrevessem discos galácticos reais.

Para isto, fizemos no capítulo 2 uma breve introdução sobre as galáxias, dando ênfase aos discos galáctico e aos principais modelos, na Teoria Newtoniana da Gravitação, que embora não representem fielmente as propriedades observadas em tais estruturas, mas servem de base à modelos idealizados. No capítulo 3 discutimos o Método “deslocar, cortar e refletir”, o qual matematicamente é implementado por meio de uma transformação de coordenada,  $z \rightarrow h(z) + a$ , aplicada as componentes de uma métrica inicialmente conhecida, cuja simetria coincida com a simetria do espaço-tempo que se deseja obter (no nosso caso, simetria axial). Fisicamente, este método consiste em estabelecermos um plano ao longo de  $z$  constante, que adotamos como sendo  $z = a$ , o qual divide o espaço em duas partes: uma com singularidade ou fonte e a outra sem. A parte singular nós desprezamos e a parte sem singularidade ou fonte, é refletida a partir do plano estabelecido, resultando, assim, no surgimento de um disco fino de matéria localizado no plano de corte. Nossa meta, a partir de então, foi usar as equações de Einstein para encontrar as propriedades (como densidade e pressão) referentes à distribuição de matéria confinada na superfície de tais objetos. Aplicamos este método às métricas de Chazy-Curzon e Schwarzschild, ambas nas coordenadas de Weyl, resultando em discos infinitamente finos com densidade superficial definidas positivas ao longo do raio

circunferencial, nos dois casos.

Vimos que o Método “deslocar, cortar e refletir” pode, então, ser empregado na obtenção de soluções de discos de matéria que procuram representar discos galácticos idealizados. Todavia este método se limite, apenas, à analisar hipersuperfícies de corte num plano ( $z = \text{constante}$ ). Sendo assim, diante do exposto, visando desenvolver modelos de discos mais gerais, introduzimos o formalismo de imersão à formulação do Método “deslocar, cortar e refletir”, a fim de se ter uma maior liberdade quanto a escolha da hipersuperfície de corte. Visto que, em princípio, optando por hipersuperfícies de corte mais apropriadas, torna-se possível encontrar discos de matéria com propriedades físicas similares as dos discos galácticos reais. Com este procedimento, chamado de Método da Imersão, conseguimos reproduzir, nos capítulos 4 e 5, algumas soluções exatas das equações de Einstein com simetria axial, que representam soluções de discos galácticos idealizados conhecidos na literatura.

Em particular no capítulo 5, aplicamos o referido método à métrica de Kerr nas coordenadas de Boyer-Lindquist. Com a utilização do mencionado método, obtivemos, por meio da Condição de Junção de Israel, a distribuição de matéria num disco galáctico, descrita pelo tensor energia-momento superficial  $S_{\beta}^{\alpha}$ , escrito explicitamente em termos das funções de imersão, o que resultou nas equações (5.13) a (5.17). Desse modo, usando diferentes funções de imersão, encontraremos distribuições de matéria do tipo disco com diferentes propriedades físicas (densidade, pressão,...).

A idéia para pesquisas futuras é manipular as funções de imersão, buscando reproduzir os dados observacionais relativos aos discos galácticos reais. Poderíamos inclusive escolher hipersuperfícies que contivessem a singularidade da solução de Kerr, na tentativa de descrever um disco galáctico com um buraco negro no centro, como sugerido pelos dados observacionais.

# Bibliografia

- [1] Binney, J. and Tremaine, S., “Galactic Dynamics”, Princeton University Press, Second Edition, (2008).
- [2] Malcolm S. Longair, “Galaxy Formation”, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (1998).
- [3] Frank H. Shu, “The Physical Universe An Introduction to Astronomy”, University Science Books, (1982).
- [4] Lauren V. Jones, “Stars and Galaxies”, Greenwood Guides to the Universe, (2010).
- [5] Houjun Mo, Frank Van Den Bosh and Simon White, “Galaxy Formation and Evolution”, Cambridge University Press, (2010).
- [6] Elmegreen D. Meloy, “Galaxies and Galactic Structure”, Prentice Hall, Upper Saddle River, (1998).
- [7] Malcolm S. Longair, “High Energy Astrophysics”, Cambridge University Press, Third Edition, (2011).
- [8] Linda S. Sparke and John S. Gallagher III, “Galaxies in the Universe: An Introduction”, Cambridge University Press, Second Edition, (2007).
- [9] Mukhanov, V., “Physical Foundations of Cosmology”, Cambridge University Press (2005).
- [10] Seeds, M. A. and Backman, D. E., “Stars and Galaxies”, Seventh Edition, Brooks/Cole Cengage Learning (2011).

- [11] Rubin, V. C., Thonnard, N. & Ford, W. K., “Extended rotation curves of high-luminosity spiral galaxies. IV - Systematic dynamical properties, Sa through Sc”. *The Astrophysical Journal*, Vol. 225, L107–L110, (1978b).
- [12] M. Milgrom, “MOND-a pedagogical review”. *Acta Phys. Polon. B*, 32, 3613 (2001).
- [13] S. Capozziello, V. F. Cardone and A. Troisi, “Low surface brightness galaxies rotation curves in the low energy limit of  $R^n$  gravity: no need for dark matter?”. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 375, 4, 1423-1440 (2007).
- [14] Campos, J. P., “Correção Logarítmica no Potencial Newtoniano e sua Aplicação à Galáxias Espirais”. Dissertação de Mestrado em Ciências Físicas. Universidade Federal do Espírito Santo, (2007).
- [15] Jacob D. Bekenstein, “An Alternative to Dark Paradigm: Relativistic MOND Gravitation”, astro-ph/0412652 v3 (2005).
- [16] Bensby, T., Feltzing, S., “The Galactic thin and thick disks in the context of galaxy formation”. *International Astronomical Union*, (2010).
- [17] H. C. Plummer, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 71, 460 (1911).
- [18] G. G. Kuzmin, *Astron. Zh.* 33, 27 (1956).
- [19] Neto, Gastão Bierrenbach Lima, “Notas de aula”. *Introdução à Dinâmica Estelar*, (2000).
- [20] M. Miyamoto and R. Nagai, *Publ. Astron. Soc. Japan* 27, 533 (1975)
- [21] J. Binney e S. Tremaine, “Galactic Dynamics”. Princeton University Press, (1987).
- [22] I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik, “Tables of Series, Products and Integrals”. MIR, (1981).
- [23] K. C. Freeman, “On the Disk of Spiral and S0 Galaxies”. *Ap. J.*, 160, 811-830 (1970).

- [24] G. N. Watson, “A Treatise on the Theory of Bessel Functions”. Cambridge University Press, Second Edition, (1980).
- [25] Lemos, J. P. S. and Letelier, P. S. “Superposition of Morgan and Morgan Disks with a Schwarzschild Black Hole”. *Class. Quantum Grav.* 10, L75 (1993).
- [26] Lemos, J. P. S. and Letelier, P. S. “Exact General Relativistic Thin Disks around Black Holes”. *Phys. Rev. D* 49, 5135 (1994).
- [27] Lemos, J. P. S. and Letelier, P. S. “Two Families of Exact Disks with a Central Black Hole”. *Int. J. Mod. Phys. D* 5, 53 (1996).
- [28] C. Klein, *Class. Quantum Grav.* 14, 2267 (1997).
- [29] G. Neugebauer and R. Meinel, *Phys. Rev. Lett.* 75, 3046 (1995).
- [30] C. Klein and O. Richter, *Phys. Rev. Lett.* 83, 2884 (1999).
- [31] C. Klein, *Phys. Rev. D* 63, 064033 (2001).
- [32] J. Frauendiener and C. Klein, *Phys. Rev. D* 63, 084025 (2001).
- [33] C. Klein, *Phys. Rev. D* 65, 084029 (2002).
- [34] C. Klein, *Phys. Rev. D* 68, 027501 (2003).
- [35] C. Klein, *Ann. Phys.* 12(10), 599 (2003).
- [36] Letelier, P.S., “Soluções exatas das equações de Einstein com simetria axial”. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 27, n. 1, p. 121-136, (2005).
- [37] Vogt, D., “Modelos de discos e outras estruturas auto-gravitantes em Relatividade Geral”. Tese de Doutorado. Universidade Estadual de Campinas, (2006).
- [38] G. González and P.S. Letelier, *Phys. Rev. D* 69, 044013 (2004).

- [39] González, G. A. Villegas, “Construção de Modelos Relativísticos de discos com suporte de esforço na direção radial”. Tese de Doutorado. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, (1998).
- [40] D’Inverno, R., “Introducing Einstein’s Relativity”. Oxford University Press, First Edition, Oxford, (1992).
- [41] Dahia, F. L. M., “Notas de Aula”. Não publicadas, (2011).
- [42] T. Morgan and L. Morgan, Phys. Rev. 183, 1097 (1969).
- [43] W. A. Bonnor and A. Sackfield, Comm. Math. Phys. 8, 338 (1968).
- [44] L. Morgan and T. Morgan, Phys. Rev. D 2, 2756 (1970).
- [45] D. Lynden-Bell and S. Pineault, Mon. Not. R. Astron. Soc. 185, 679 (1978).
- [46] P. S. Letelier and S. R. Oliveira, J. Math. Phys. 28, 165 (1987).
- [47] J. P. S. Lemos, Class. Quantum Grav. 6, 1219 (1989).
- [48] J. Bičák, D. Lynden-Bell and J. Katz, Phys. Rev. D 47, 4334 (1993).
- [49] J. Bičák, D. Lynden-Bell and C. Pichon, Mon. Not. R. Astron. Soc. 265, 126 (1993).
- [50] J. P. S. Lemos and P. S. Letelier, Int. J. Mod. Phys. D 5, 53 (1996).
- [51] G. A. González and O. A. Espitia, Phys. Rev. D 68, 104028 (2003).
- [52] G. García R. and G. A. González, Phys. Rev. D 69, 124002 (2004).
- [53] J. Bičák and T. Ledvinka, Phys. Rev. Lett. 71, 1669 (1993).
- [54] G. A. González and P. S. Letelier, Phys. Rev. D 62, 064025 (2000).
- [55] G. A. González and P. S. Letelier, Class. Quantum Grav. 16, 479 (1999).

- [56] P. S. Letelier, *Phys. Rev. D* 60, 104042 (1999).
- [57] J. Katz, J. Bičák and D. Lynden-Bell, *Class. Quantum Grav.* 16, 4023 (1999).
- [58] D. Vogt and P. S. Letelier, *Phys. Rev. D* 68, 084010 (2003).
- [59] D. Vogt and P. S. Letelier, *Phys. Rev. D* 70, 064003 (2004).
- [60] V. Karas, J. M. Hure and O. Semerák, *Class. Quantum Grav.* 21, R1(2004).
- [61] M. Chazy, *Bull. Soc. Math. France* 52, 17 (1924).
- [62] H. Curzon, *Proc. London Math. Soc.* 23, 477 (1924).
- [63] Vasconcelos, K. C., “Soluções exatas com simetria axial na Relatividade Geral: Um estudo sobre estrelas em modelos de branas”. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Campina Grande. Centro de Ciências e Tecnologia, (2010).
- [64] Castro, G. M., “Soluções Exatas das Equações de Einstein para Buracos Negros e Anéis de Matéria”. Tese de Doutorado. Universidade estadual de Campinas. Instituto de Física Gleb Wataghin, (2009).
- [65] Poisson, E., “A Relativist’s Toolkit - The Mathematics of Black-Holes Mechanics”. Cambridge University Press, (2004).
- [66] Andrade, N. R. F., “Equações de Campos Efetivas Induzidas em Branas Pela Imersão”. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Campina Grande. Centro de Ciências e Tecnologia, (2011).
- [67] Odon, P. I., “Sobre a Origem das Simetrias Internas”. Dissertação de Mestrado. Instituto de Física da Universidade de Brasília, (2006).
- [68] D. Vogt and P. S. Letelier, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 363, 268 (2005).
- [69] F. I. Cooperstock and S. Tieu, preprint: astro-ph/0507619 (2005).

## Bibliografia

---

- [70] M. Korzynski, preprint: astro-ph/0508377 (2005).
- [71] D. Vogt and P. S. Letelier, preprint: astro-ph/0510750 (2005).
- [72] D. Garfinkle, *Class. Quantum Grav.* 23, 1391 (2006).
- [73] H. Balasin and D. Grumiller, preprint: astro-ph/0602519 (2006).