



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Equação de Klein-Gordon Não-Linear e Superfluidos
Relativísticos**

Aline Nascimento Lins

CAMPINA GRANDE

- Fevereiro 2017 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Equação de Klein-Gordon Não-Linear e Superfluidos Relativísticos

Aline Nascimento Lins

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Física.

Área de Concentração: Física.

Orientador: Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito.

CAMPINA GRANDE

- Fevereiro de 2017 -

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

L759e Lins, Aline Nascimento.
Equação de Klein-Gordon não-linear e superfluidos relativísticos / Aline Nascimento Lins. ó Campina Grande-PB, 2018.
51 f.

Dissertação (Mestrado em Física) ó Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.
"Orientação: Prof. Dr. Francisco de Assis de Britoö.
Referências.

1. Matéria Escura. 2. Energia Escura. 3. Superfluido Relativístico. 4. Galáxias. I. Brito, Francisco de Assis de. II. Título.

CDU 53(043)

EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON NÃO-LINEAR E
SUPERFLUIDOS RELATIVÍSTICOS

ALINE NASCIMENTO LINS

Aprovada em _____

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito

Orientador

Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto (UAF/UFCG)

Examinador

Profa. Dra. Morgana Lígia de Farias Freire (DF/UEPB)

Examinador

À minha mãe.

In memoriam à minha avó, Helena Marinho Costa.

White Monkey stumbled into a sacred cave,
Copied the strange characters on the left wall,
And beat a hasty retreat, when clouds moved in,
Leaving the secret of Creation on the right wall.

I glimpsed at the truth in a wax-sealed slip,
Unravelling 'n unfurled, revealing equations
Whose depth and scope seem to befuddle,
Learned scholars of classical citations.

Telescope peer deep into space,
Revealing God's great design, as angels knew it:
That Law and Vacuum rose together, and
Dark 'n bright matter co-move, in a superfluid.

Kerson Huang

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito, pela orientação e oportunidade de realização deste trabalho.

A todos os professores que contribuíram para minha formação acadêmica.

Aos amigos da Unidade Acadêmica de Física pelas discussões de Física, momentos de lazer e que propiciaram que o ambiente fosse agradável para realização do trabalho.

A minha família e ao meu namorado, Eric Ramalho, por entender minhas ausências e pela paciência comigo durante essa etapa.

Ao Programa de Pós-Graduação em Física da UFCG, pela oportunidade da realização do mestrado em Física.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pela concessão da bolsa.

Resumo

O conceito de Matéria Escura surgiu para explicar uma anomalia na curva de rotação de galáxias espirais, desde então, pesquisadores de todo o mundo vêm tentando detectar a partícula que compõe tal matéria. Sem sucesso nas detecções, surgiram algumas teorias para explicar a existência tanto da Matéria Escura quanto da Energia Escura, responsável pela expansão acelerada do Universo. Neste trabalho apresentamos uma dessas teorias. Aqui sugerimos que o Universo se comporta de uma maneira diferente com a qual estamos acostumados, para isso fizemos uso da relatividade geral e da equação não-linear de Klein-Gordon, e então admitimos que o Universo está imerso em um superfluido relativístico para assim podermos explicar teoricamente Matéria Escura e Energia Escura.

Palavras-chave: Matéria Escura, Energia Escura, superfluido relativístico, galáxias.

Abstract

The concept of Dark Matter arises to explain an anomaly in the rotation curve of spiral galaxies, since then, researchers around the world have been trying to detect the particle that composes this matter. Without success in the detections, some theories appeared to explain the existence of both Dark Matter and Dark Energy, the last one is responsible for the accelerated expansion of the Universe. In this dissertation we present one of these theories. Here we suggest that the Universe behaves in a different way with which we are accustomed, for this we have made use of the general relativity and the Klein-Gordon's nonlinear equation, and then we admit that the Universe is immersed in a relativistic superfluid so we can theoretically explain Dark Matter and Dark Energy.

Keywords: Dark Matter, Dark Energy, relativistic superfluid, galaxies.

Sumário

1	Introdução	1
2	Matéria Escura e Energia Escura	3
2.1	Cosmologia Moderna e Relatividade Geral	4
2.2	Matéria Escura	6
2.2.1	Matéria Escura em Galáxias	8
2.2.2	Matéria Escura em Aglomerados de Galáxias	10
2.3	Energia Escura	12
2.3.1	Modelo Λ CDM	13
2.3.2	Quintessência	14
2.3.3	K-Essência	15
3	Vórtices e Superfluidos Relativísticos	17
3.1	Condensados de Bose-Einstein: Algumas Considerações	18
3.2	Vórtices quantizados em condensados de Bose-Einstein	21
3.3	Superfluidez através da equação Não-Linear de Klein-Gordon	24
3.4	Rotação do Superfluido e a Relação de Feynman	29
3.5	Limite não-relativístico	30
4	Considerações Finais	37

A Equação de Gross-Pitaevskii

39

Referências Bibliográficas

45

Capítulo 1

Introdução

Desde 1933 os cientistas voltaram seus olhos para o que até hoje ainda é desconhecido, a matéria do Universo. A matéria que conhecemos, a matéria que constitui tudo que é visível, corresponde a cerca de 4% do Universo, o restante é, até então, desconhecido e é o que chamamos de Matéria Escura e Energia Escura que correspondem a cerca de 23% e 73% do Universo, respectivamente [1]. Desde a constatação da existência da Matéria Escura e Energia Escura que pesquisadores de todo o mundo vêm tentando encontrar a partícula que deve compor essa Matéria Escura. Mas até o presente momento não se conseguiu detectá-la. Há quem diga que a solução para este problema está em modificar a lei de gravitação, outros continuam tentando detectar uma partícula e há também quem sugira novas teorias para solucionar tal problema.

Longe de querer solucionar esse impasse sobre o que é realmente a Matéria Escura, nosso trabalho apresenta uma teoria que foi proposta pelo físico Kerson Huang e seus colaboradores. Na qual Huang *et al.* apresentaram sua teoria em sua série de trabalhos [2] - [8] e em seu livro que foi lançado recentemente, cujo o título é “*A Superfluid Universe*”[9], em tal teoria ele nos apresenta uma nova forma de olharmos para o Universo, a

teoria do Universo superfluido que propõe que o Universo está imerso em um superfluido relativístico.

Este trabalho foi dividido em quatro capítulos, sendo eles: Introdução; Matéria Escura e Energia Escura, no qual foi abordado primeiramente a Cosmologia Moderna e a Relatividade Geral de Einstein, que são nossas ferramentas matemáticas, temos também uma breve revisão de Matéria Escura e Energia Escura onde foram abordados alguns pontos interessantes sobre ambas; no terceiro capítulo relatamos sobre Vórtices e Superfluidos Relativísticos, onde será apresentada a teoria de Universo superfluido através da condensação de Bose-Einstein, para isso houve a necessidade de estudar a equação de Gross-Pitaevskii; e por fim no quarto capítulo encontram-se nossas considerações finais para este trabalho.

Capítulo 2

Matéria Escura e Energia Escura

A existência de Matéria Escura foi proposta para explicar a curva de rotação de aglomerados de galáxias, pois observou-se que as velocidades individuais das galáxias eram maiores do que era esperado, então foi sugerido que deveria haver uma matéria não visível nas regiões em torno das galáxias, essas regiões são chamadas de halos e essa matéria recebeu o nome de Matéria Escura. Já a existência de uma Energia Escura surgiu para explicar a expansão acelerada do Universo, que pode ser reproduzida através da introdução da constante cosmológica na equação de Einstein.

Este capítulo está dividido em três partes, que são: Cosmologia Moderna e Relatividade Geral, Matéria Escura e Energia Escura. A primeira se fez necessária pois é uma ferramenta fundamental para o desenvolvimento do trabalho. Na segunda parte desse trabalho fizemos uma revisão sobre alguns pontos importantes a saber sobre Matéria Escura, Matéria Escura em galáxias e em aglomerados de galáxias e o teorema do virial que é um método de medição de Matéria Escura. Já na última parte, tratamos da Energia Escura onde foi abordado alguns modelos como o Λ CDM, o modelo de quintessência e o modelo de K-essência.

2.1 Cosmologia Moderna e Relatividade Geral

A Cosmologia Moderna se baseia nas equações de campo da Relatividade Geral de Einstein, estas podem ser escritas como:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

onde G é a constante gravitacional de Newton, $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momentum e $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein que nos dá informação sobre a geometria do espaço-tempo e é definido por:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (2.2)$$

Na Equação 2.1 podemos observar que no lado esquerdo temos o tensor de Einstein para a gravidade, que é a parte bem definida desta equação, já no lado direito temos o tensor energia-momentum, que representa o que ainda é desconhecido, principalmente quando tratamos de Matéria e Energia escuras [10].

As quantidades que aparecem na Equação 2.2 são, o tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, que define o elemento de linha do espaço-tempo¹

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \quad (2.3)$$

e duas contrações do tensor de Riemann, $R^\sigma_{\lambda\mu\nu}$, que são o tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} \equiv R^\sigma_{\mu\sigma\nu}, \quad (2.4)$$

e o escalar de curvatura:

$$R \equiv R^\mu_{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.5)$$

¹Aqui utilizamos uma assinatura de métrica da forma (- + + +)

Para um fluido perfeito, o tensor energia-momentum pode ser escrito como:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}, \quad (2.6)$$

onde ρ é a densidade de energia e p é a pressão do fluido perfeito e u_μ é a quadri-velocidade do elemento de fluido.

De acordo com as identidades de Bianchi [11] podemos escrever:

$$\nabla_\mu G^\mu_\nu = 0, \quad (2.7)$$

e conseqüentemente, para o tensor energia-momentum, T^μ_ν temos:

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0. \quad (2.8)$$

O princípio cosmológico postula a isotropia e a homogeneidade do Universo, ou seja, em escalas suficientemente grandes, acima de 3×10^5 anos luz [12], não existem direções ou pontos privilegiados no espaço-tempo e que o conteúdo de matéria e energia do Universo está razoavelmente bem distribuído. Partindo disso, pode-se estabelecer uma métrica para o Universo, a métrica de Friedman-Robertson-Walker ou métrica FRW:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 + Kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (2.9)$$

onde $a(t)$ é um fator de escala que indica quanto o Universo está expandindo, $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2$ é o ângulo sólido e K é uma constante, cujo valor, nos diz qual a geometria do Universo [2]:

$$K = +1, \quad \text{geometria esférica;}$$

$$K = 0, \quad \text{geometria plana;}$$

$$K = -1, \quad \text{geometria hiperbólica.}$$

A partir disso, é possível derivar duas equações que informam como o Universo evolui dado seu conteúdo, conhecidas como equações dinâmicas do Universo:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \quad (2.10)$$

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (2.11)$$

As Equações 2.10 e 2.11 são conhecidas como equações de Friedmann.

2.2 Matéria Escura

A ideia de Matéria Escura surgiu em 1933 por Zwicky [13], que ao estudar a curva de rotação² do aglomerado de galáxias Coma, observou que o aglomerado não poderia estar ligado gravitacionalmente, a menos que a massa total do aglomerado fosse maior que a soma das massas de cada galáxia, ou seja, deveria haver uma matéria não luminosa no aglomerado de galáxias. Parte da matéria não luminosa estaria em torno das galáxias, estas regiões são chamadas de Halos, a outra parte estaria distribuída em outras regiões. Posteriormente, por volta de 1970, Rubin *et al.* perceberam que as curvas de rotação de galáxias eram planas ou crescentes [14, 15], isto significa que objetos orbitando em torno do centro das galáxias fora da região visível, possuem uma velocidade que permanece constante com a distância em vez de diminuir, como seria esperado na teoria Newtoniana.

Desde então o conceito de Matéria Escura tem sido postulado com a finalidade de que seja possível dar uma explicação, de modo que a gravitação Newtoniana não seja modificada, no fato de as velocidades das estrelas nas periferias das galáxias são bem

²Curva de rotação é o gráfico da velocidade de uma partícula teste (estrela) em função de sua distância ao centro da galáxia

maiores do que é o esperado de acordo com a massa visível. A noção de Matéria Escura vai desde sistemas constituídos por galáxias anãs esferoides com massas de 10^7 massas solares até grandes agrupamentos de galáxias detentoras de massa na faixa de 10^{14} massas solares [16, 17].

De acordo com a anisotropia da radiação cósmica de fundo e das medidas de supernovas tipo IA, temos que cerca de $1/3$ da densidade de energia de todo o Universo deveria estar na forma de matéria escura e bariônica, os outros $2/3$, no caso de Universo plano, seria devido a Energia Escura [18, 19]. Em um Universo plano, a densidade de energia da matéria bariônica teria uma contribuição de aproximadamente 5% contra 25% da matéria não bariônica.

Uma proposta para a Matéria Escura, foi de que ela estaria na forma de neutrinos, mas esta possibilidade foi rapidamente descartada, pois a massa dos neutrinos deveria estar em torno de $30 - 70$ eV para valores razoáveis da constante de Hubble. Segundo os experimentos realizados por Mains e Troisk [20], o limite máximo para a massa dos neutrinos seria de aproximadamente $2,2 - 2,5$ eV. E assim foi descartada a possibilidade de a Matéria Escura ser predominantemente constituída por neutrinos.

Existe uma grande diferença entre a distribuição de Matéria Escura em galáxias e em aglomerados de galáxias [21]. A Matéria Escura nas galáxias aumenta de forma proporcional com a distância ao centro. Já nos aglomerados de galáxias, a medida do forte desvio da luz por estes aglomerados indica que neles a Matéria Escura está fortemente concentrada em uma região central de raio aproximadamente igual a $0,2$ a $0,3$ *Mpc*. Também pode haver matéria bariônica, não detectada, na composição da matéria não luminosa, como por exemplo, planetas gigantes e estrelas afastadas que não seriam capazes de emitir uma quantidade de luz suficiente para serem observadas [22].

2.2.1 Matéria Escura em Galáxias

Em galáxias, observa-se que as curvas de rotação são planas em uma região que vai além da região onde a matéria luminosa domina. Para que a Teoria da Relatividade Geral seja mantida na sua forma original, deve existir em torno das galáxias uma certa quantidade de Matéria Escura. Em galáxias tipo espiral as curvas de rotação ficam planas, enquanto que em galáxias do tipo elípticas a curva tende a declinar, como se fosse composta por matéria visível apenas. Para detectar os efeitos gravitacionais da massa de uma galáxia, é necessário que se faça uma medida da massa. A partir da terceira Lei de Kepler, temos que:

$$GM(r) = v^2 r, \quad (2.12)$$

onde v é a velocidade orbital da partícula teste (essa partícula teste pode ser caracterizada por uma estrela ao redor da galáxia), e $M(r)$ é a massa da galáxia no interior do raio r [23], assumindo simetria esférica. Aplicando esta técnica as galáxias tipo espirais e considerando que r seja o raio onde é emitida a maior parte da luz da galáxia, encontramos que a fração da densidade crítica diretamente associada à luz é:

$$\Omega_{LUM} \simeq 0,01. \quad (2.13)$$

Definimos também a fração de densidade crítica total, $\Omega_T = \sum_i \Omega_i$, onde i representa cada componente. A componente $i = LUM$ representa a componente luminosa.

Quando os astrônomos estenderam essa técnica para distâncias maiores que a luminosidade de uma galáxia poderia alcançar, descobriram que $M(r)$ continuava a aumentar. Se houvesse apenas a massa associada com a luminosidade emitida, então, v diminuiria com $r^{-1/2}$ além do raio de luz emitida, mas o que se observou foi que $v \sim constante$, que

corresponde à $M(r) \propto r$. Existe uma fraca evidência adicional de que a Matéria Escura é distribuída aproximadamente de forma esférica, isto implica que $\rho_{dark} \propto r^{-2}$. As curvas de rotação de galáxias indicam que toda galáxia espiral deve ter um halo associado a ela, que contribui pelo menos em 3 à 10 vezes a massa da “matéria visível”. Baseado nisso, podemos dizer que:

$$\Omega_{HALO} \geq 0,1, \quad (2.14)$$

ou seja, a Ω_{HALO} é aproximadamente 10 vezes maior que Ω_{LUM} [23, 22].

É possível realizar medidas nas periferias e nas regiões das galáxias espirais onde não há mais matéria luminosa, tais medidas são realizadas a partir da observação de estrelas raras ou através do efeito Doppler na linha dos 21 *cm* emitido pelo hidrogênio neutro (HI) [17, 23].

Na Figura 2.1, temos um gráfico da velocidade de rotação em $km \cdot s^{-1}$ versus o raio em *Kpc*, de várias galáxias espirais [17].

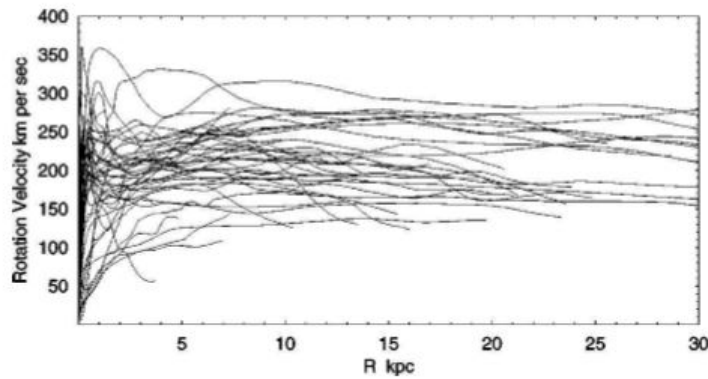


Figura 2.1: Curvas de rotação de várias galáxias espirais [17].

A partir da Lei da gravitação de Newton e comparando com a Equação 2.12, temos que

$$\frac{mGM(r)}{r^2} = \frac{mv^2}{r}, \quad (2.15)$$

onde m é a massa da estrela, $M(r)$ é a massa da galáxia e $v(r)$ a velocidade da estrela.

Logo, podemos obter uma expressão para a velocidade quadrática, da seguinte maneira:

$$v^2 = \frac{GM(r)}{r}. \quad (2.16)$$

Como já foi mencionado antes, na região plana as velocidades das partículas são aproximadamente constante, assim, podemos observar que a massa da Matéria Escura é proporcional ao raio, já a densidade de matéria não luminosa deve variar de acordo com:

$$\rho \propto \frac{M(r)}{r^3} \propto \frac{1}{r^2}. \quad (2.17)$$

Esta relação é verdadeira quando assumimos que a Matéria Escura está distribuída de forma esfericamente simétrica [17].

2.2.2 Matéria Escura em Aglomerados de Galáxias

Como já foi mencionado anteriormente, a ideia de Matéria Escura foi proposta inicialmente por Zwicky, através de estudos sobre as características dos aglomerados de galáxias [24, 25]. Em suas pesquisas, Zwicky observou que havia uma inconsistência na dispersão de velocidades de rotação das galáxias do aglomerado Coma, a densidade de matéria observada (matéria luminosa) era muito menor do que é esperado, surgindo assim a ideia da existência de Matéria Escura nos aglomerados de galáxias. Nesta seção foi descrito resumidamente o teorema do virial que é uma forma de medição da matéria de um aglomerado. Existem outros métodos como por exemplo a utilização de raios X e lentes gravitacionais, mas estes não foram abordados aqui.

Teorema do Virial

O teorema do Virial foi usado por Zwicky em seus estudos sobre a massa do aglomerado Coma [24]. Este teorema faz uma relação entre a energia potencial e a energia cinética de um sistema. Assumindo que as interações entre as galáxias que compõem o aglomerado podem ser descritas pela Lei Gravitacional de Newton e considerando que o aglomerado se comporta como um sistema mecanicamente estacionário, o teorema do virial tem a forma:

$$2 \langle T \rangle + \langle U \rangle = 0, \quad (2.18)$$

onde $\langle T \rangle$ é a média da energia cinética e $\langle U \rangle$ é a média da energia potencial.

Através dessa relação ele conseguiu fazer uma estimativa da massa total do aglomerado de galáxias:

$$M \sim \frac{R \langle v^2 \rangle}{5G}, \quad (2.19)$$

onde M é a massa total estimada do aglomerado de galáxias, R é o raio do aglomerado, G é a constante de gravitação e $\langle v^2 \rangle$ é a média do quadrado das velocidades individuais das galáxias que compõem o aglomerado.

Uma diferença entre o que ocorre em aglomerado de galáxias e em galáxias, é que no caso de galáxias, as partículas (estrelas, planetas, etc.) se movem de forma ordenada, já no caso de aglomerados as partículas (galáxias) se movem desordenadamente a partir de uma certa velocidade. Através de medidas do *redshift*, Zwicky obteve uma massa média por galáxia $\bar{m} = 4,5 \times 10^{10} M_{\odot}$ e considerando a luminosidade média de uma galáxia em torno de $8,5 \times 10^7 L_{\odot}$, onde M_{\odot} e L_{\odot} são, respectivamente, a massa e a luminosidade do Sol. Com isso foi possível obter a razão massa-luminosidade das galáxias do aglomerado

Coma, $\frac{M}{L} \sim 500 \frac{M_\odot}{L_\odot}$, que é aproximadamente 200 vezes maior do que o valor para galáxias locais mais próximas. Similarmente, S. Smith determinou a massa do aglomerado Virgo [26], no qual obteve uma massa média por galáxia $\bar{m} = 2 \times 10^{11} M_\odot$, que também difere do valor obtido através da luminosidade por um fator de 200. Nos trabalhos mais recentes sobre a massa em aglomerados de galáxias [27, 28, 29] observou-se valores muito próximos aos obtidos nestes primeiros trabalhos, ou seja:

$$\frac{M}{L} \sim 300h \frac{M_\odot}{L_\odot}, \quad (2.20)$$

onde h é o chamado parâmetro adimensional de Hubble.

2.3 Energia Escura

Em 1917 com o intuito de mostrar que o Universo era estático e evitar o colapso gravitacional, Einstein introduziu a constante cosmológica. Mais tarde, descobriu-se que o Universo se expande e assim a constante cosmológica perdeu seu sentido físico e não foi mais utilizada. Mas, posteriormente, com a descoberta de que o Universo estava se expandindo aceleradamente, a constante cosmológica foi mais uma vez aproveitada, dessa vez com a função de dar sentido ao efeito antigravitacional, e partindo disso, surgiu o exemplo de Energia Escura mais simples. A indicação de que o Universo está acelerando vem de dados das supernovas do tipo Ia e medidas da anisotropia de fundo [19, 22, 30], e esta expansão acelerada é responsável pelas supernovas serem vistas de forma muito fraca, que pode ser causada por uma energia escura com pressão negativa [22]. Na Relatividade Geral, temos:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (2.21)$$

A partir dessa relação, podemos ver que $\ddot{a} = 0$ apenas se $p = -\frac{\rho}{3}$, ou seja, a aceleração do Universo começa a partir de $p \leq -\frac{\rho}{3}$, com pressão sempre negativa, já que a densidade de energia é sempre positiva.

O primeiro candidato para Energia Escura foi a constante cosmológica, que originou o modelo Λ CDM. Com uma constante cosmológica sendo uma “variável”, surgiram algumas variações. Existem vários candidatos e modelos de energia escura, mas quando solucionam um problema outros ficam em aberto, entre eles estão o modelo Λ CDM, quintessência, o caso fantasma, a K-essência, branas, gás de Chaplygin, cordas cósmicas [18] etc. Neste capítulo foi discutido brevemente algumas dessas possibilidades.

2.3.1 Modelo Λ CDM

O modelo Λ CDM é o modelo mais simples que envolve Energia Escura. Com ele é possível explicar a aceleração do Universo através de dados de supernovas. Um Universo acelerado só pode ocorrer a partir de uma Energia Escura com pressão negativa [22]. A equação de Einstein:

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi G \left[T_{\alpha\beta} + \frac{\Lambda g_{\alpha\beta}}{8\pi G} \right]. \quad (2.22)$$

Na equação acima foi utilizada a convenção (+ ---). O valor da constante cosmológica, Λ , deve ser pequeno quando comparado com o valor predito, ou seja, o valor observado é cerca de 10^{120} vezes menor. Isso garante que o Universo começou a acelerar recentemente e é responsável por uma força repulsiva proporcional à distância [21] diferentemente da gravitacional, devido a isso, ela é capaz de acelerar o Universo. O fator de escala evolui da forma:

$$a(t) = a_i \left(\sinh \left[\frac{3}{2} \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} ct \right] \right)^{2/3}, \quad (2.23)$$

e interpola entre o Universo dominado pela matéria $a \propto t^{2/3}$ e a fase de aceleração do Universo governada por $a \propto e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}$. Por estar em acordo com as observações, muitos modelos de Energia Escura se apoiam nos resultados do modelo Λ CDM.

2.3.2 Quintessência

Uma outra candidata à Energia Escura, é a chamada Quintessência, que recebeu este nome devido a ela ser mais uma componente além dos fótons, bárions, neutrinos e matéria escura. No modelo Λ CDM padrão existe uma componente fixa, Λ , já na quintessência, existe uma componente dinâmica representada por um campo escalar ϕ e um potencial $V(\phi)$. O campo escalar da quintessência varia lentamente [31].

A densidade lagrangeana da Quintessência padrão é dada por [21]:

$$L = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi), \quad (2.24)$$

e o parâmetro da equação de estado é dado da seguinte forma:

$$\omega_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi)}{\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi)}, \quad (2.25)$$

com $\omega_\phi > -1$.

Tomando como base dados da radiação cósmica de fundo e de supernovas em aglomerados de galáxias, estima-se com uma segurança de cerca de 95% que o parâmetro de estado da Energia Escura deve estar no intervalo $-1,61 < \omega_{DE} < -0,78$ [32].

Existe um submodelo chamado de Quintessência “campo tracker” que pode solucionar o problema da coincidência cósmica [33]. Este problema vem do questionamento

sobre o fato de vivermos em uma época em que $\rho_m \approx \rho_{DE}$. Atualmente $r_0 = \frac{\rho_\Lambda^0}{\rho_m^0} \approx 1$, observando isto, pode-se dizer que estamos sim vivendo em um momento privilegiado, isto não é bem aceito pelos cosmólogos. Este modelo necessita de um ajuste fino a fim de iniciar o período de pressão negativa do campo e conseqüentemente a aceleração do Universo [34].

O modelo de Quintessência pode ser dividido em duas categorias, que são: o modelo *freezing* (resfriamento) e o modelo *thawing* (degelo), no primeiro o parâmetro da equação de estado ω_ϕ possui um valor arbitrário inicial e decresce com o tempo tendendo assintoticamente para -1 , já o segundo possui inicialmente $\omega_\phi \approx -1$ e aumenta com o tempo [35].

2.3.3 K-Essência

Diferentemente do modelo Quintessência, o termo cinético do modelo K-Essência é dominante em relação ao termo potencial, devido a essa característica ele tem a letra K no nome. Este modelo reproduz muitas características cosmológicas mais naturalmente que o modelo de Quintessência [36]. O termo cinético na ação deste modelo é não linear, e esta característica não é familiar na Física de Partículas ou Cosmologia. Também é objetivo da K-Essência resolver o problema da coincidência. Vários candidatos à Energia Escura necessitam de um ajuste fino na densidade de Energia Escura inicial para que ela se torne cerca de 100 a 120 ordens de magnitude menor do que a densidade de energia inicial da matéria. O propósito da K-Essência é fornecer uma explicação dinâmica que não necessita de ajuste fino das condições iniciais [19]. Uma característica comum entre o modelo de K-Essência e o modelo de Quintessência campo *tracker* é que o campo escalar converge para uma solução atrativa [30]. A diferença é que no modelo *tracker* é necessário

um ajuste fino como mecanismo para iniciar o regime de pressão negativa do campo e consequentemente a aceleração do Universo, já na K-Essência a transição ocorre a partir de processos dinâmicos naturais.

Capítulo 3

Vórtices e Superfluidos Relativísticos

De acordo com a Mecânica Quântica, um sistema de partículas é descrito por uma função de onda complexa, que deve possuir módulo e fase. A coerência macroscópica da fase (correlação da fase quântica sob distâncias macroscópicas) dá origem a superfluidez e ocorre no Condensado de Bose-Einstein (CBE) em diversos sistemas, como por exemplo: ^4He líquido a baixas temperaturas; região central em colisões de íons relativísticos pesados; campos de Higgs ou tipo Higgs sobre escala cosmológica; metais supercondutores; ^3He líquido a baixas temperaturas; no interior de estrela de nêutrons; entre outros. De acordo com Ginzburg e Landau [37] a coerência da fase é descrita em termos de um campo escalar complexo, que é visto como um parâmetro de ordem que surge de uma transição de fase à temperatura abaixo de uma temperatura crítica. Esta transição de fase está associada a quebras espontâneas no gauge de simetria global.

Assim, podemos dizer que um campo escalar complexo sob escalas macroscópicas dá um aumento na superfluidez, o campo serve como um parâmetro de ordem que expressa a coerência de fase quântica sob distâncias macroscópicas, e a velocidade do superfluido corresponde ao gradiente da fase do campo complexo. Então, a partir deste ponto de vista,

podemos ver o Universo como um superfluido. Esta teoria propõe que este superfluido cósmico ofereça explicações tanto para a Energia Escura quanto para a Matéria Escura. E a partir disso podemos dizer que a Energia Escura é a densidade de energia do superfluido cósmico, que faz com que ocorra uma expansão acelerada do Universo e que a Matéria Escura é uma manifestação das variações locais da densidade do superfluido [4].

Uma galáxia que é imersa em um superfluido cósmico deve atrair o superfluido e criar uma região com densidade maior que no vácuo. Este seria o halo de Matéria Escura observado através de lentes gravitacionais [38].

Neste capítulo estudamos a Teoria de Universo Superfluido, para isso fizemos uma breve revisão sobre Condensados de Bose-Einstein, vórtices em condensados de Bose-Einstein, superfluides no espaço-tempo, rotações no superfluido e o limite não-relativístico com e sem uma fonte de interação corrente-corrente.

3.1 Condensados de Bose-Einstein: Algumas Considerações

Albert Einstein, em 1924, inspirado nos trabalhos do físico indiano Satyendra Nath Bose, descreveu o fenômeno conhecido como Condensado de Bose-Einstein. Nos trabalhos de Bose, ele apresentou uma dedução alternativa à estatística de fótons e à fórmula de radiação de corpo negro [39, 40].

Já em 1925, Einstein escreveu uma série de três artigos utilizando as técnicas apresentadas por Bose para o tratamento estatístico-quântico de gases ideais e a ideia de ondas de matéria introduzidas por de Broglie [41]. Einstein demonstrou, em seu segundo trabalho, que o aumento da densidade, à temperatura constante, em um gás sujeito a estatística

de Bose faz com que seus constituintes tendam a ocupar o estado quântico fundamental. Em suas palavras, esta corresponde a fração condensada do gás, enquanto os outros constituintes correspondem a uma fração saturada do gás [40]. Ainda neste trabalho, Einstein demonstrou que no limite termodinâmico ($N, V \rightarrow \infty$ e $V/N = \text{constante}$) o calor específico em um gás de bósons apresenta uma descontinuidade na temperatura crítica, o que caracteriza uma transição de fase de segunda ordem. Este resultado foi contestado pelo físico holandês George Eugene Uhlenbeck com o argumento que não seria válido para sistemas finitos [41]. A partir de estudos sobre o comportamento do calor específico de um gás de bósons, o físico alemão Fritz London desenvolveu uma teoria sobre a superfluidez do ${}^4\text{He}$ em 1938. O ${}^4\text{He}$ foi liquefeito pela primeira vez por Onnes em 1908 [42]. Em 1911 Onnes e seus colaboradores descobriram o fenômeno da supercondutividade no mercúrio [43] e observaram que a densidade do hélio líquido atingia um valor máximo em uma temperatura um pouco acima de 2 K [44].

Em 1924 Onnes observou um rápido aumento do calor específico do hélio líquido em torno de $2,17\text{ K}$. Em 1930 o físico holandês William Hendrik Keeson confirmou essa medida e sugeriu que essa descontinuidade na curva do calor específico correspondia a existência de um ponto triplo no hélio, ou seja, deveria coexistir as fases sólida, líquida e gasosa a esta temperatura. Mas, em 1932, o físico holandês Krijn Wrijbin Tacones, submeteu o hélio líquido abaixo de $2,17\text{ K}$ a raios X na tentativa de observar estruturas cristalinas, sem obter os resultados esperados, a suposição do ponto triplo no hélio teve de ser desconsiderada, então, Keeson propôs como alternativa a coexistência de duas fases líquidas no hélio, que foram chamadas de He I e He II.

Devido a curva do calor específico do hélio ser semelhante à letra grega λ , a transição entre as fases do He I e He II foi chamada de ponto- λ [45]. Em 1938 os físicos

canadenses John Frank Allen e Don Misener e, de forma independente, o físico soviético Pyotr Leonidovich Kapitza publicaram na mesma edição da Revista *Nature* [46, 47] seus resultados experimentais sobre a viscosidade do He II. Segundo os autores a viscosidade do He II é da ordem de $10^{-9}P^1$, menor que a viscosidade do hidrogênio que era o fluido de menor viscosidade conhecido na época, da ordem de $10^{-5}P$. Assim Kapitza dá a esse fenômeno o nome de superfluidez [46].

London, ainda em 1938 observando os resultados dos experimentos com o hélio líquido, propôs a existência de uma conexão entre o comportamento do He II e o fenômeno da Condensação de Bose-Einstein. Em seus resultados, demonstrou que a expressão para a temperatura crítica de um gás de Bose ideal fornece uma boa estimativa para a temperatura do ponto- λ ($T_0 = 3,09K$) [48, 49, 50].

László Tisza, partindo das ideias de London criou um modelo de dois fluidos para explicar o comportamento do hélio líquido considerando as fases normal (He I) e superfluida (He II), supondo que a fase He II é descrita por um gás ideal de Bose. Ele ainda previu a existência de oscilações de temperatura em um superfluido que posteriormente foram chamadas de segundo som [41, 51, 52].

Entre 1940 e 1950, Landau e o físico soviético Issak Markovick Khalatnikov deram sequência ao desenvolvimento da teoria da superfluidez. A teoria de Landau-Khalatnikov ainda é bastante usada para descrever a superfluidez [53, 54], no entanto, esta teoria não poderia descrever o fenômeno da turbulência e formação de vórtices no He II, observados por Kapitza em 1941 [55], pois de acordo com essa teoria os superfluidos são irrotacionais. Devido a esse problema, o químico norueguês Lars Onsager propôs em 1949 que as linhas de vórtices em um superfluido são quantizadas em unidades de \hbar/m [56].

¹P (poise) é a unidade do sistema CGS e é equivalente à 0,1 Pa·s no SI (Pa·s é pascal segundo).

Em 1947, o físico soviético Nikolai Nikolaievch Bogoliubov apresenta um novo modelo capaz de descrever um gás de bósons fracamente interagentes, e obteve uma expressão da relação de dispersão para excitações elementares [57, 58].

Feynman, entre 1953 e 1958, desenvolveu uma série de trabalhos sobre o hélio líquido, em que considera a existência de linhas de vórtices quantizadas no He II, como foi sugerido por Onsager [59].

Onsager e Penrose, em 1956, apresentaram um artigo onde propuseram existir a Condensação de Bose-Einstein em um sistema, o maior autovalor da matriz densidade do sistema deve ser da ordem do número de seus constituintes [60].

Em 1961 Gross e Pitaevskii, independentemente, apresentaram em seus resultados de vórtices em hélio líquido, uma equação derivada de um formalismo de campo médio que descreve um gás fracamente interagente à temperatura nula [61, 62]. Esta equação é atualmente conhecida como equação de Gross-Pitaevskii (Apêndice A) e é uma das principais ferramentas teóricas na descrição de condensados de Bose-Einstein.

3.2 Vórtices quantizados em condensados de Bose-Einstein

A Equação de Gross-Pitaevskii dependente do tempo, pode ser escrita como:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r}) + g|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \Psi(\mathbf{r}, t). \quad (3.1)$$

A Equação 3.1 também é conhecida como equação não-linear de Schrödinger. Aqui o campo escalar complexo Ψ pode ser considerado como um campo de Higgs capaz de quebrar espontaneamente um determinado gauge de simetria global [10].

Multiplicando a Equação 3.1 por Ψ^* , temos:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi^*\nabla^2\Psi + V|\Psi|^2 + g|\Psi|^4 = i\hbar\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t}. \quad (3.2)$$

Subtraindo a Equação 3.2 pelo seu complexo conjugado, obtemos:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}[\Psi^*\nabla^2\Psi - \Psi\nabla^2\Psi^*] - i\hbar\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\right) = 0, \quad (3.3)$$

que pode ser reescrita como:

$$\frac{\hbar}{2mi}\nabla \cdot (\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) + \frac{\partial n}{\partial t} = 0, \quad (3.4)$$

onde $n = n(\mathbf{r}, t) = |\Psi|^2$.

A equação da continuidade é dada por:

$$\nabla \cdot (n\mathbf{v}) + \frac{\partial n}{\partial t} = 0, \quad (3.5)$$

observamos na Equação 3.4 que o campo de velocidades em um condensado é dado por:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{2mi} \frac{(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*)}{|\Psi|^2}. \quad (3.6)$$

Podemos escrever a função de onda na forma $\Psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{n(\mathbf{r}, t)}e^{i\sigma(\mathbf{r}, t)}$, onde $\sigma(\mathbf{r}, t)$ é a fase da função de onda. Podemos, então, reescrever a forma do campo de velocidades:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{m}\nabla\sigma(\mathbf{r}, t). \quad (3.7)$$

A vorticidade quântica é uma manifestação da superfluidez. Um vórtice quântico deve satisfazer a condição de onda livre, $\nabla \times \mathbf{v} = 0$. Então, podemos definir a vorticidade como sendo:

$$\xi = \nabla \times \mathbf{v}, \quad (3.8)$$

e por definição o rotacional do gradiente é sempre nulo, então a vorticidade deve ser nula, ou seja,

$$\xi = \nabla \times \mathbf{v} = \frac{\hbar}{m} \nabla \times (\nabla \sigma) = 0. \quad (3.9)$$

Isto significa que o campo de velocidades do fluido é irrotacional, a menos que $\sigma(\mathbf{r}, t)$ possua uma singularidade [63].

Em Mecânica Quântica, o momento angular é quantizado $L_z = N\hbar$, sendo N um número inteiro, com isso:

$$L_z = mvr = N\hbar, \quad (3.10)$$

e, portanto,

$$v_s = \frac{\hbar N}{m r}. \quad (3.11)$$

Logo, a circulação é dada por:

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi \frac{\hbar}{m} N, \quad (3.12)$$

onde podemos observar que essa é uma grandeza quantizada em unidades de \hbar/m [58].

A partir das Equações 3.8 e 3.12, temos que:

$$\xi = \nabla \times \mathbf{v} = 2\pi \frac{\hbar}{m} N \delta(r) \hat{z}. \quad (3.13)$$

Logo, o campo de vorticidade em um condensado de Bose-Einstein possui uma singularidade, e isto caracteriza a existência de vórtices. Podemos observar que esta é

uma relação não-relativística com o campo escalar complexo da forma: $\Psi = |\Psi|e^{i\beta}$, mais adiante faremos a reconexão com o limite relativístico, ou seja, relacionaremos Ψ com Φ .

3.3 Superfluididez através da equação Não-Linear de Klein-Gordon

O campo escalar complexo no vácuo é escrito na forma polar como sendo:

$$\Phi(x) = F(x)e^{i\sigma(x)}, \quad (3.14)$$

em que usamos um sistema de unidades naturais na qual $\hbar = c = 1$, e a métrica de Minkowski que corresponde à $(-1, 1, 1, 1)$ no espaço-tempo plano.

A densidade lagrangiana tem a seguinte forma

$$\mathcal{L} = -g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi^*\partial_\nu\Phi - V, \quad (3.15)$$

onde $g^{\mu\nu}$ é o tensor métrico e $V = V(\Phi\Phi^*)$ é a própria interação potencial. A ação é definida como a integral da lagrangiana com respeito ao tempo, ou seja,

$$\begin{aligned} S &= \int Ldt = \int dt \int d^3x \mathcal{L}, \\ S &= \int dt d^3x \sqrt{-g} (g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi^*\partial_\nu\Phi + V), \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde foi usada a seguinte definição: $g = \det(g_{\mu\nu})$ ².

A Equação de Euler-Lagrange é definida para o campo Φ^* da seguinte forma,

²Embora não tenhamos focado neste problema aqui, através do tensor métrico que incluímos os efeitos gravitacionais ao sistema, tal que $g_{00} = -(1 + 2U)$ e $g_{jk} = \delta_{jk}$, onde $U \ll 1$ é o potencial gravitacional no limite Newtoniano

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi^*)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^*} = 0, \quad (3.17)$$

e analogamente, para o campo Φ

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} = 0. \quad (3.18)$$

Assim, encontramos que a equação de movimento para este campo escalar complexo é da seguinte forma:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi) - \frac{\partial V}{\partial \Phi^*} = 0. \quad (3.19)$$

Por questão de simplicidade, definimos $V' \equiv \frac{dV}{d(\Phi\Phi^*)}$, então podemos ver que a equação de movimento pode também ser escrita da seguinte maneira:

$$(\square - V') \Phi = 0, \quad (3.20)$$

onde, o operador d'Alembertiano é definido por: $\square \equiv \nabla^\mu \nabla_\mu$.

Substituindo $\Phi = F e^{i\sigma}$ na Equação 3.20 e separando as partes real e imaginária obtemos as seguintes equações:

$$(\square - V') F - F \nabla^\mu \sigma \nabla_\mu \sigma = 0 \quad (3.21)$$

e

$$2\nabla^\mu F \nabla_\mu \sigma + F \nabla^\mu \nabla_\mu \sigma = 0. \quad (3.22)$$

A primeira equação pode ser reescrita na forma da equação relativística de Euler, ou seja,

$$\nabla_\mu (F^{-1} \square F - V') - 2F^{-2} \nabla^\lambda (F^2 \nabla_\lambda \nabla_\mu) = 0, \quad (3.23)$$

e a segunda equação é a equação da continuidade:

$$\nabla^\mu j_\mu = 0, \quad (3.24)$$

com

$$j_\mu \equiv F^2 \nabla_\mu \sigma = F^2 \partial_\mu \sigma. \quad (3.25)$$

Existe uma carga conservada, Q , e um tensor energia-momentum covariantemente conservado, $T_{\mu\nu}$, dados respectivamente por:

$$Q = \int d^3x \sqrt{-g} j^0 \quad (3.26)$$

e

$$T_{\mu\nu} = \nabla_\mu \Phi^* \nabla_\nu \Phi + \nabla_\nu \Phi^* \nabla_\mu \Phi - g_{\mu\nu} \nabla^\tau \Phi^* \nabla_\tau \Phi - g_{\mu\nu} V. \quad (3.27)$$

O campo $\Phi(\mathbf{x}, t)$ corresponde a um parâmetro de ordem no limite de temperatura zero absoluto, podendo assim representar um superfluido puro [64].

Desde que τ seja o tempo próprio ao longo da *worldline* tipo-tempo de um elemento de fluido cujas coordenadas são:

$$x^\mu = (ct(\tau), x^i(\tau)), \quad (3.28)$$

com $i = 1, 2, 3$.

A velocidade do elemento de fluido, ou tri-velocidade, é dada por

$$\mathbf{v}_s = \frac{d\mathbf{x}}{dt}. \quad (3.29)$$

Então, podemos definir uma quadri-velocidade, em termos do tempo próprio, da seguinte maneira:

$$U^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} = (\gamma c, \gamma \mathbf{v}_s), \quad (3.30)$$

onde γ é definido por

$$\gamma \equiv \frac{dt}{d\tau}. \quad (3.31)$$

Então, partindo do fato de que $ds^2 = -c^2 d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, obtemos a expressão para γ como sendo:

$$\gamma = \left(-g_{00} - 2g_{0i} \frac{v^i}{c} - g_{ij} \frac{v^i v^j}{c^2} \right)^{-1/2}. \quad (3.32)$$

A densidade do superfluido, ρ_s , pode ser obtida através da relação $j^\mu = \rho_s U^\mu$, e se comparamos isso com a Equação 3.25 e fazendo $\mu = 0$ e $\mu = 1, 2, 3$ conseguimos escrever duas equações, uma para a densidade do superfluido e outra para a velocidade do superfluido, ou seja:

$$\rho_s = \hbar (c\lambda\xi_s)^{-1} F^2, \quad (3.33)$$

$$\frac{\mathbf{v}_s}{c} = \xi_s \nabla \sigma, \quad (3.34)$$

onde $\xi = (\partial^0 \sigma)^{-1}$.

No espaço-tempo de Minkowski, as Equações 3.23 e 3.24 podem ser escritas, respectivamente, como:

$$\begin{aligned} \partial_\mu (F^{-1} \square F - V') - 2F^{-2} \partial^\lambda (F^2 \partial_\lambda \sigma \partial_\mu \sigma) &= 0 \\ \partial^\mu (F^2 \partial_\mu \sigma) &= 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

A quadri-velocidade é dada por:

$$U^\mu = (\gamma c, \gamma \mathbf{v}_s), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v_s^2/c^2}}. \quad (3.36)$$

Podemos observar que $U^\mu U_\mu = -c^2$ e isto nos garante que a velocidade do superfluido, v_s , é sempre menor que a velocidade da luz. A densidade ρ_s e a velocidade v_s do superfluido são determinadas pelas seguintes equações:

$$\rho_s = -\frac{\hbar \dot{\sigma}}{c^2 \gamma} F^2 \quad e \quad \frac{\vec{v}_s}{c} = -\frac{c}{\dot{\sigma}} \nabla \sigma. \quad (3.37)$$

No caso de uma solução estacionária da forma $\Phi(\mathbf{x}, t) = e^{-i\omega t} \chi(\mathbf{x})$, temos que $\dot{\sigma} = -\omega$.

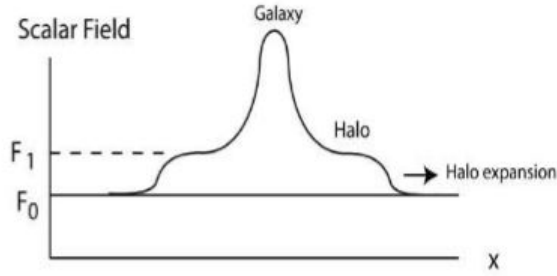


Figura 3.1: Perfil do campo escalar, apresentando o halo de matéria escura em torno da galáxia [4].

Na Figura 3.1, podemos observar o halo de matéria escura em torno da galáxia, através do perfil de campo escalar, que tem módulo F_0 fora do halo e $F_1 > F_0$ dentro do halo. Isto cria uma alta densidade de energia no halo, e pode ser observado através de lentes gravitacionais.

3.4 Rotação do Superfluido e a Relação de Feynman

Uma propriedade que caracteriza o superfluido é o fato de que ele é capaz de fluir sem, ou praticamente sem atrito, ao longo de uma superfície a baixas velocidades. Quando a velocidade do superfluido atinge um valor crítico é possível que seja observado dissipações. Esta velocidade crítica deve ser suficiente o bastante para que haja uma excitação no sistema. De maneira similar, se considerarmos um superfluido contido em um recipiente em rotação, o superfluido deverá permanecer em repouso até que a frequência angular do recipiente supere um valor crítico, no qual através da criação de vórtices quantizados ocorre um campo de velocidade rotacional, com linha de vórtices paralelas ao eixo de rotação. No caso de estabilidade do estado estes vórtices formam uma estrutura de forma específica. Este problema pode ser melhor tratado, quando assumimos um sistema de coordenadas em rotação com o recipiente, pois facilmente identificamos as forças inerciais, a força de Coriolis e a força centrífuga, que são as forças responsáveis pela criação do vórtice [64].

Ao considerar um sistema em rotação sobre o eixo z , com velocidade angular Ω_0 . Utilizando um sistema de coordenadas esféricas, temos que o referencial do laboratório, (t', r', θ', ϕ') , e o do sistema em rotação, (t, r, θ, ϕ) , são relacionados pela transformação como:

$$t = t'; \quad r = r'; \quad \theta = \theta'; \quad \phi = \phi' - \Omega_0 t'. \quad (3.38)$$

O operador d'Alembertiano, \square , no espaço-tempo plano para um referencial girante é dado por:

$$\square = \square^{(0)} + R_{Coriolis} + R_{Centrifuga}, \quad (3.39)$$

onde $\square^{(0)} = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2}$, $R_{Coriolis} = \frac{2\Omega_0}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t \partial \phi}$ e $R_{Centrifuga} = -\frac{\Omega_0}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$.

Essa forma de definir o operador d'Alembertiano pode ser aplicada no estudo de qualquer equação de Klein-Gordon para estruturas em rotação com interações.

Considerando N vórtices em um recipiente em rotação com raio R e a velocidade angular Ω nas paredes do recipiente, a velocidade do superfluido é $v_s = \Omega R$ e a partir da Equação 3.12, podemos obter

$$\Omega = \pi c \xi_s n_\nu, \quad (3.40)$$

com $n_\nu = \frac{N}{\pi R^2}$, o número de vórtices por unidade de área. Esta expressão pode nos dar uma estimativa da densidade local de vórtices. No limite não-relativístico $\xi_s = \hbar/mc$, temos $\Omega = (\pi \hbar/m) n_\nu$, que é conhecida como relação de Feynman [64].

3.5 Limite não-relativístico

Seja uma função de onda Ψ , dada por:

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = e^{-i\omega_0 t} \Psi(\mathbf{x}, t). \quad (3.41)$$

Substituindo Φ na equação não-linear de Klein-Gordon (NLKG) e fazendo $\omega_0 = mc^2/\hbar$, temos:

$$(\square - V')\Phi = 0, \quad (3.42)$$

ou

$$(\square - V')\Psi(\mathbf{x}, t)e^{-i\omega_0 t} = 0 \quad (3.43)$$

onde \square é definido como:

$$\square = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (3.44)$$

Substituindo a Equação 3.44 na equação 3.43, obtemos

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - V'\right)(\Psi(\mathbf{x}, t)e^{-i\omega_0 t}) = 0, \quad (3.45)$$

ou

$$e^{-i\omega_0 t} \nabla^2 \Psi(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[-i\omega_0 e^{-i\omega_0 t} \Psi + e^{-i\omega_0 t} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right] - V' e^{-i\omega_0 t} \Psi(\vec{x}, t) = 0, \quad (3.46)$$

A Equação 3.46 pode ser reescrita também como:

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c^2} \left[-\omega_0^2 \Psi - 2i\omega_0 \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \right] - V' \Psi(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (3.47)$$

Multiplicando a Equação 3.47 por $\hbar^2/2m$ e lembrando que $\omega_0 = mc^2/\hbar$, encontramos a seguinte equação

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + U \Psi + \frac{\hbar^2}{2mc^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}, \quad (3.48)$$

onde

$$U = \frac{\hbar^2}{2m} V' - \frac{mc^2}{2}. \quad (3.49)$$

O termo $\frac{\hbar^2}{2mc^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$ pode ser descartado se considerarmos um limite no qual a velocidade da luz, c , seja muito maior que a “velocidade da função de onda”, $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$. Fazendo esta aproximação obtemos a equação não-linear de Schrödinger.

Agora, podemos denotar a fase da função de onda não-relativística por $\beta(\vec{x}, t)$, da seguinte forma:

$$\Psi = |\Psi| e^{i\beta}. \quad (3.50)$$

Como $\Phi = F e^{i\sigma} = e^{-i\omega_0 t} \Psi$, o σ tem a seguinte forma:

$$\sigma = -\omega_0 t + \beta. \quad (3.51)$$

Assim, a partir da equação

$$\partial_\mu (F^{-1} \square F - V') - 2F^{-2} \partial^\lambda (F^2 \partial_\lambda \sigma \partial_\mu \sigma) = 0, \quad (3.52)$$

podemos obter uma equação para a fase da função de onda não-relativística β . Como a parte dessa equação para $\mu = 0$ não contribui, consideramos apenas a equação para

$\mu = k$, ($k = 1, 2, 3$), ou seja:

$$\partial_k \left[F^{-1} \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) F - V' \right] - 2F^{-2} \partial_0 (F^2 \partial_0 \sigma \partial_k \sigma) - 2F^{-2} \partial^j (F^2 \partial_j \sigma \partial_k \sigma) = 0, \quad (3.53)$$

ou

$$\frac{c^2}{2\omega_0} F^2 \partial_k \left[F^{-1} \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) F - V' \right] - \partial^t \left[F^2 \left(1 - \frac{\dot{\beta}}{\omega_0} u_k \right) \right] - \frac{c^2}{\omega_0} \partial^j (F^2 u_j u_k) = 0, \quad (3.54)$$

onde, $u^k \equiv \partial_k \sigma = \partial_k \beta$ e $\partial^t \sigma = -\omega_0 + \dot{\beta}$.

O termo $\frac{c^2}{2\omega_0} \partial_k (F^{-1} \nabla^2 F)$ pode ser manipulado até obtermos a forma $\partial_k \left[\frac{c^2}{4\omega_0} F^2 \nabla^2 (\ln F^2) \right]$,

então podemos reescrever a última equação da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \partial_t \left[F^2 \left(1 - \frac{\dot{\beta}}{\omega_0} \right) u^k \right] + \frac{c^2}{\omega_0} \partial^j [F^2 u_j u_k] - \partial_k \left[\frac{c^2}{4\omega_0} F^2 \nabla^2 (\ln F^2) \right] + \\ \frac{F^2}{2\omega_0} \partial_k [F^{-1} \partial_t^2 F] + \frac{c^2}{2\omega_0} F^2 \partial_k V' = 0. \end{aligned} \quad (3.55)$$

O quarto termo desta equação, $\frac{F^2}{2\omega_0} \partial_k [F^{-1} \partial_t^2 F]$, pode ser reescrito como $\partial_t \left[\frac{F^2}{4\omega_0} \partial^k \partial_t (\ln F^2) \right]$,

já o último termo pode ser manipulado conforme a seguir:

$$\frac{c^2}{2\omega_0} F^2 \partial_k V' = \partial_k \left[\frac{c^2}{2\omega_0} F^2 V' \right] - \frac{c^2}{\omega_0} F \partial_k F V'. \quad (3.56)$$

Lembrando que $V = V(\Phi\Phi^*)$ e que $V' = \frac{\partial V}{\partial(\Phi\Phi^*)}$ temos que

$$\partial_k V = \frac{\partial V}{\partial(\Phi\Phi^*)} \partial_k (\Phi\Phi^*) = V' \partial_k F^2 = 2V' F \partial_k F. \quad (3.57)$$

Assim, podemos reescrever a Equação 3.56 como:

$$\frac{c^2}{2\omega_0} F^2 \partial_k V' = \partial_k \left[\frac{c^2}{2\omega_0} F^2 V' - \frac{c^2}{2\omega_0} V \right]. \quad (3.58)$$

A equação para a fase, β , da função de onda no limite não-relativístico é:

$$\begin{aligned} \partial_t \left[F^2 \left(1 - \frac{\dot{\beta}}{\omega_0} \right) u^k + \frac{F^2}{4\omega_0} \partial^k \partial_t (\ln F^2) \right] + \frac{c^2}{\omega_0} \partial^j [F^2 u_j u_k] \\ + \partial_k \left[\frac{c^2}{2\omega_0} (F^2 V' - V) - \frac{c^2}{4\omega_0} F^2 \nabla^2 (\ln F^2) \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.59)$$

O último termo desta equação é definido como sendo a derivada da pressão, o termo $\frac{c^2}{2\omega_0} (F^2 V' - V)$ é a pressão devida a própria interação, enquanto que o termo $\frac{c^2}{4\omega_0} F^2 \nabla^2 (\ln F^2)$ é a pressão quântica [65].

A partir da seguinte equação, podemos obter uma outra equação para a fase, β , da função de onda, Ψ .

$$\partial^\mu (F^2 \partial_\mu \sigma) = 0. \quad (3.60)$$

Onde encontramos que:

$$\partial^0 (F^2 \partial_0 \sigma) + \partial^j (F^2 \partial_j \sigma) = 0 \quad (3.61)$$

ou

$$\partial_t \left[\left(1 - \frac{\dot{\beta}}{\omega_0} \right) F^2 \right] + \frac{c^2}{\omega_0} \partial_j (F^2 u^j) = 0. \quad (3.62)$$

Substituindo σ nas equações abaixo, podemos calcular a densidade e a velocidade do superfluido no limite não-relativístico

$$\rho_s = -\frac{\hbar \dot{\sigma}}{c^2 \gamma} F^2 \quad (3.63)$$

$$\frac{\vec{v}_s}{c} = -\frac{c}{\dot{\sigma}} \nabla \sigma. \quad (3.64)$$

Considerando que $v_s \ll c$, podemos fazer uma expansão em $\gamma = \left(1 - \frac{v_s^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$ em torno de $\frac{v_s}{c} = 0$, em que consideramos os termos até segunda ordem. Fazendo isso, obtemos as equações para a densidade e a velocidade do superfluido no limite não-relativístico, respectivamente, como sendo:

$$\begin{aligned} \rho_s &= m |\Psi|^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v_s^2}{c^2} - \frac{\hbar \dot{\beta}}{m c^2} \right) + O(c^{-4}), \\ \vec{v}_s &= \frac{\hbar}{m} \nabla \beta \left(1 + \frac{\hbar \dot{\beta}}{m c^2} \right) + O(c^{-4}). \end{aligned} \quad (3.65)$$

Em um referencial girante, temos que a equação NLKG é dada por:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - V' + R_{Coriolis} + R_{Centrifuga} \right) \Phi = 0,$$

com

$$V' = \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 - 2m\lambda|\Phi|^2,$$

$$R_{Coriolis} = \frac{2\Omega}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t \partial \phi},$$

$$R_{Centrifuga} = -\frac{\Omega^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (3.66)$$

Onde usamos um potencial de forma específica. No limite não-relativístico, ou seja, $\Phi = e^{-i\omega_0 t} \Psi$, com $\omega_0 = mc^2/\hbar$ e eliminando os termos da ordem de c^{-2} , obtemos:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + i\hbar\Omega \frac{\partial}{\partial \phi} - \lambda\hbar^2 |\Psi|^2 \right) \Psi = 0, \quad (3.67)$$

que é a equação não-linear de Schrödinger, ou equação de Gross-Pitaevskii, bastante usada para descrever rotações em condensados de Bose-Einstein [66].

Interação corrente-corrente com uma fonte

Na presença de uma galáxia, adicionamos um termo de interação à densidade lagrangiana, este termo representa a interação não-gravitacional entre a galáxia e o campo escalar. A interação dessa fonte com o campo escalar é descrita através da interação corrente-corrente, ou seja:

$$\mathcal{L}_{int} = -\eta J^\mu j_\mu, \quad (3.68)$$

onde j_μ é a corrente conservada do campo escalar complexo, η é uma constante de acoplamento e J^μ é a corrente conservada da fonte externa. Podemos reescrever a densidade

lagrangeana mais explicitamente da forma:

$$\mathcal{L}_{int} = -\eta F^2 J^\mu \partial_\mu \sigma. \quad (3.69)$$

Incluindo esse termo de interação na Lagrangiana e através da equação de Euler-Lagrange, podemos encontrar uma nova equação de movimento, dada por:

$$(\square - V') \Phi - i\eta J^\mu \partial_\mu \Phi = 0, \quad (3.70)$$

para simular a presença de galáxias em um superfluido cósmico Huang *et al.*, admitem que a corrente externa tem a forma [8]:

$$J^\mu = (\rho, \mathbf{J}), \quad \mathbf{J} = \rho \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}, \quad (3.71)$$

na qual J representa uma galáxia em rotação em um superfluido cósmico, quando consideramos uma galáxia como um corpo rígido em rotação com velocidade angular Ω e $\rho(x)$ descreve o perfil da densidade da galáxia.

Neste caso a equação NLKG é escrita como:

$$(\square - V') \Phi - i\eta \rho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \cdot \nabla \Phi \right) = 0. \quad (3.72)$$

O último termo, em um sistema de coordenadas cilíndricas com ângulo azimutal ϕ sobre o eixo de rotação, pode ser escrito como:

$$i\eta \rho \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \cdot \nabla \Phi = i\eta \rho \Omega \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}. \quad (3.73)$$

Desde que $\rho \Omega$ nos dê uma velocidade angular que dependa do espaço, este termo dá origem a um efeito semelhante ao *frame-dragging* ³.

³*frame-dragging* é um efeito previsto na Teoria da Relatividade Geral de Einstein, e se refere a uma distorção especial na geometria do espaço-tempo causada por uma massa em rotação.

A equação NLKG foi resolvida com vários termos inerciais ou de interação no espaço-tempo de Minkowski. Com ênfase na dinâmica e estado dos vórtices em superfluidos cósmicos.

A partir da equação NLKG, formulamos uma investigação da superfluidez e dos mecanismos para a criação de vorticidade quantizada no regime relativístico, para o caso no espaço-tempo plano e para o limite não-relativístico.

Capítulo 4

Considerações Finais

Neste trabalho investigamos a Teoria de Universo Superfluido cuja ideia principal é que o Universo está imerso em um superfluido que é descrito por um campo escalar complexo. A matéria escura é uma manifestação das flutuações de densidade do superfluido. Este superfluido é relativístico e preenche todo o Universo. Com o objetivo de investigar a superfluidez e os mecanismos para a criação de vórtices no limite relativístico escolhemos um campo escalar complexo e partimos da equação não-linear de Klein-Gordon. Em nossos estudos foi considerado o espaço-tempo plano e então fizemos o limite não-relativístico. A partir disso podemos concluir que vórtices quantizados podem ser criados através de forças inerciais, força de Coriolis e força centrífuga, e através da interação corrente-corrente. No cosmos, vórtices podem ser criados pela rotação de galáxias no superfluido, colisão de galáxias ou rotação de buracos negros. Também generalizamos a relação de Feynman no regime relativístico, considerando N vórtices em um recipiente em rotação de raio R e velocidade angular Ω , através dessa relação podemos obter uma estimativa da densidade local de vórtices quando o superfluido flui com variação na velocidade angular local. Para este trabalho consideramos apenas superfluido puro a temperatura zero, ficando assim

como sugestão de trabalhos futuros a generalização dessa formulação relativística para o caso de temperatura finita.

Apêndice A

Equação de Gross-Pitaevskii

Em um sistema de bósons com interação entre pares, o Hamiltoniano do sistema é descrito da seguinte forma [58, 63, 65] :

$$\hat{H} = \int \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{H}_0 \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) dr + \frac{1}{2} \int \int \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}', t) V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}', t) \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) dr' dr, \quad (\text{A.1})$$

onde $\hat{H}_0 = \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{r})$ é o Hamiltoniano da partícula, sendo $V_{ext}(\mathbf{r})$ um potencial externo, e $V(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ um potencial de interação entre duas partículas. Iremos adotar uma notação mais simples de maneira que consideraremos: $\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \hat{\Psi}$, $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) = \hat{\Psi}^\dagger$, $\hat{\Psi}(\mathbf{r}', t) = \hat{\Psi}'$ e $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}', t) = \hat{\Psi}'^\dagger$. As relações de comutação para operadores bosônicos, são:

$$[\hat{\Psi}, \hat{\Psi}'^\dagger] = \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (\text{A.2})$$

e

$$[\hat{\Psi}, \hat{\Psi}'] = [\hat{\Psi}^\dagger, \hat{\Psi}'^\dagger] = 0. \quad (\text{A.3})$$

Pela equação de Heisenberg

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial t} = [\hat{\Psi}, \hat{H}] = [\hat{\Psi}, \hat{\mathcal{H}}] + [\hat{\Psi}, \hat{\mathcal{G}}], \quad (\text{A.4})$$

onde $\hat{H} = \hat{\mathcal{H}} + \hat{\mathcal{G}}$, com:

$$\hat{\mathcal{H}} = \int \hat{\Psi}^\dagger \hat{H}_0 \hat{\Psi} dr \quad (\text{A.5})$$

e

$$\hat{\mathcal{G}} = \frac{1}{2} \int \hat{\Psi}^\dagger \left[\int \hat{\Psi}'^\dagger V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\Psi}' dr' \right] \hat{\Psi} dr. \quad (\text{A.6})$$

Calculando o comutador de $\hat{\Psi}'$ com $\hat{\mathcal{H}}$, temos:

$$\begin{aligned} [\hat{\Psi}', \hat{\mathcal{H}}] &= \hat{\Psi}' \hat{\mathcal{H}} - \hat{\mathcal{H}} \hat{\Psi}' = \int \hat{\Psi}' \hat{\Psi}^\dagger H_0 \hat{\Psi} dr - \int \hat{\Psi}^\dagger H_0 \hat{\Psi} \hat{\Psi}' dr \\ &= \int (\hat{\Psi}' \hat{\Psi}^\dagger - \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi}') H_0 \hat{\Psi} dr = \int \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') H_0 \hat{\Psi} dr = H_0' \hat{\Psi}' \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Considerando que o sistema seja um gás de bósons fracamente interagente e a baixa temperatura, o comprimento de onda de de Broglie $\lambda_{dB} = \sqrt{2\pi\hbar^2/mk_B T}$, onde m é a massa de um bóson e T é a temperatura do sistema, é muito maior que o alcance do potencial de interação. Desse modo, o potencial de interação entre os átomos pode ser aproximado a um potencial de contato na forma $V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \equiv g\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, onde g é a chamada constante de acoplamento e é linearmente proporcional ao comprimento de espalhamento entre os átomos. Assim, podemos reescrever a Equação A.6, da forma:

$$\hat{\mathcal{G}} = \frac{g}{2} \int \hat{\Psi}^\dagger \left[\int \hat{\Psi}'^\dagger \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\Psi}' dr' \right] \hat{\Psi} dr = \frac{g}{2} \int \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi}'^\dagger \hat{\Psi}' \hat{\Psi} dr. \quad (\text{A.8})$$

Agora podemos calcular o comutador de $\hat{\Psi}'$ com $\hat{\mathcal{G}}$, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
[\hat{\Psi}', \hat{\mathcal{G}}] &= \hat{\Psi}' \hat{\mathcal{G}} - \hat{\mathcal{G}} \hat{\Psi}' = \frac{g}{2} \int \left(\hat{\Psi}' \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} \hat{\Psi} - \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} \hat{\Psi}' \right) dr \\
&= \frac{g}{2} \int \left(\hat{\Psi}' \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi}^\dagger - \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi}' \right) \hat{\Psi} \hat{\Psi} dr \\
&= \frac{g}{2} \int \left(\hat{\Psi}' \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi}^\dagger - \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi}' + \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi}' \hat{\Psi}^\dagger - \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi}' \hat{\Psi}^\dagger \right) \hat{\Psi} \hat{\Psi} dr \\
&= \frac{g}{2} \int \left([\hat{\Psi}', \hat{\Psi}^\dagger] \hat{\Psi}^\dagger + \hat{\Psi}^\dagger [\hat{\Psi}', \hat{\Psi}^\dagger] \right) \\
&= g \int \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} \hat{\Psi} dr = g \hat{\Psi}'^\dagger \hat{\Psi}' \hat{\Psi}'. \tag{A.9}
\end{aligned}$$

Substituindo as Equações A.7 e A.9 na Equação A.4, obtemos:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial t} = \left(\hat{H}_0 + g \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} \right) \hat{\Psi} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext} + g \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} \right) \hat{\Psi}. \tag{A.10}$$

Podemos escrever os operadores de campo $\hat{\Psi}$ na base das funções de onda de partícula única, como segue:

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \sum_k \psi_k(\mathbf{r}) a_k(t) \tag{A.11}$$

e

$$\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) = \sum_k \psi_k^*(\mathbf{r}) a_k^\dagger(t), \tag{A.12}$$

onde ψ_k são funções de onda de uma única partícula do k -ésimo orbital, $a_k^\dagger(t)$ e $a_k(t)$ são, respectivamente, os operadores de criação e aniquilação de uma partícula no estado correspondente ao orbital $\psi_k(\mathbf{r})$, sendo:

$$a_k^\dagger(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar} a_k^\dagger(0) e^{i\hat{H}t/\hbar} \quad e \quad a_k(t) = e^{i\hat{H}t/\hbar} a_k(0) e^{-i\hat{H}t/\hbar}, \quad (\text{A.13})$$

onde $a_k^\dagger(t)$ e $a_k(t)$ satisfazem as relações de comutação:

$$[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta_{k,k'} \quad (\text{A.14})$$

e

$$[a_k, a_{k'}] = [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] = 0, \quad (\text{A.15})$$

e também as seguintes operações:

$$a_k^\dagger a_k |n_k\rangle = n_k |n_k\rangle, \quad (\text{A.16})$$

$$a_k |n_k\rangle = \sqrt{n_k} |n_k - 1\rangle, \quad (\text{A.17})$$

e

$$a_k^\dagger |n_k\rangle = \sqrt{n_k + 1} |n_k + 1\rangle. \quad (\text{A.18})$$

Onde $n_k = 0, 1, 2, \dots, \infty$ indica o número de partículas no estado k . A Equação A.11 pode ser reescrita de uma forma mais conveniente, separando os termos que correspondem ao estado fundamental, $\Psi_0(\mathbf{r}, t)$, e aos estados excitados, $\Psi_k(\mathbf{r}, t)$, obtendo assim,

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \psi_0(\mathbf{r}) a_0(t) + \sum_{k \neq 0} \psi_k(\mathbf{r}) a_k(t). \quad (\text{A.19})$$

A média sobre o operador $\Psi(\mathbf{r}, t)$ é:

$$\langle \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{n_k=0}^{\infty} \langle n_k | e^{-\beta \hat{H}} \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) | n_k \rangle, \quad (\text{A.20})$$

sendo $Z = \sum e^{-\beta \hat{H}}$ a função de partição. Supondo que o sistema esteja a uma temperatura muito baixa, de modo que a probabilidade de ocupação do estado fundamental é

aproximadamente igual a um, então, utilizando as Equações A.19 e A.14, a média é dada por:

$$\langle \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \rangle = \psi_0(\mathbf{r}) \langle n_0 | a_0(t) | n_0 + 1 \rangle + \sum_{k \neq 0} \psi_k(\mathbf{r}) \langle n_k | a_k | n_k + 1 \rangle \quad (\text{A.21})$$

$$= (n_0 + 1)^{1/2} \Psi_0(\mathbf{r}, t) + \sum_{k \neq 0} (n_k + 1)^{1/2} \Psi_k(\mathbf{r}, t). \quad (\text{A.22})$$

Definindo $\delta\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{k \neq 0} (n_k + 1)^{1/2} \Psi_k(\mathbf{r}, t)$, a Equação A.22 pode ser reescrita como:

$$\langle \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \rangle = \Psi(\mathbf{r}, t) + \delta\Psi(\mathbf{r}, t), \quad (\text{A.23})$$

onde por simplicidade fizemos $(n_0 + 1)^{1/2} \Psi_0(\mathbf{r}, t) = \Psi(\mathbf{r}, t)$. Utilizando a Equação A.23 para a média do operador $\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)$ na Equação A.10 obtemos que:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\Psi + \delta\Psi) &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext} + g(\Psi^* + \delta\Psi^*)(\Psi + \delta\Psi) \right] (\Psi + \delta\Psi) \\ &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext} \right] (\Psi + \delta\Psi) + g(|\Psi|^2 + \Psi^* \delta\Psi + \Psi \delta\Psi^* + |\delta\Psi|^2) (\Psi + \delta\Psi). \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Podemos separar essa equação em duas, uma em termos de Ψ e outra em termos de $\delta\Psi$, ou seja:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{r}) + g|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \Psi(\mathbf{r}, t) \quad (\text{A.25})$$

e

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \delta\Psi(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \delta\Psi(\mathbf{r}, t) + V_{ext}(\mathbf{r}) \delta\Psi(\mathbf{r}, t) + 2g|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \delta\Psi(\mathbf{r}, t) + g\Psi^2(\mathbf{r}, t) \delta\Psi^*(\mathbf{r}, t). \quad (\text{A.26})$$

A Equação A.25 é a equação de Gross-Pitaevskii dependente do tempo, também conhecida como equação não-linear de Schrödinger, ela descreve um sistema de N bósons a temperatura nula.

A energia do sistema [63] pode ser obtida através das Equações A.1 e A.22 como:

$$E = \int \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \Psi(\mathbf{r}, t)|^2 + V(\mathbf{r}) |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 + \frac{g}{2} |\Psi(\mathbf{r}, t)|^4 \right] d\mathbf{r}. \quad (\text{A.27})$$

No caso em que todas as partículas estão no estado fundamental, o segundo termo da Equação A.22 é nulo e utilizando a Equação A.13, temos que:

$$\langle \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \rangle = \psi_0 \langle n_0 | a_0(t) | n_0 + 1 \rangle \quad (\text{A.28})$$

$$= \psi_0 \langle n_0 | e^{i\hat{H}t/\hbar} a_0(0) e^{-i\hat{H}t/\hbar} | n_0 + 1 \rangle \quad (\text{A.29})$$

$$= \sqrt{N} \psi_0(\mathbf{r}) e^{-i[E(n_0+1) - E(n_0)]t/\hbar} \quad (\text{A.30})$$

$$= \sqrt{N} \psi_0(\mathbf{r}) e^{-i\mu t/\hbar}, \quad (\text{A.31})$$

sendo μ o potencial químico do sistema, $\mu = E(n_0 + 1) - E(n_0) \sim \partial E / \partial N$ [58]. Utilizando a Equação A.31 na equação de Gross-Pitaevskii, Equação A.25, obtemos a equação de Gross-Pitaevskii para estados estacionários:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(r) + g |\psi(\mathbf{r})|^2 \right] \psi(\mathbf{r}) = \mu \psi(\mathbf{r}). \quad (\text{A.32})$$

Esta equação ainda é bastante utilizada e de muita importância no tratamento de problemas que envolvem condensados de Bose-Einstein.

Referências Bibliográficas

- [1] D. Larson, *et. al.*, **Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Power Spectra and WMAP-Derived Parameters**, Astrophysical Journal Supplement Series Vol. 192, 2011, p. 16.
- [2] K. Huang, H. -B. Low and R. -S. **Scalar Field Cosmology I: Asymptotic Freedom and the Initial-Value Problem**, Tung, Class. Quant. Grav. 29, 155014, [arXiv: 1106.5282[gr-qc]], 2012.
- [3] K. Huang, C. Xiong and X. Zhao. **Scalar Field Cosmology II: Superfluidity, Quantum Turbulence, and Inflation**. Int. J. Mod. Phys. A 27, 1250154, [arXiv: 1106.5283[gr-qc]], 2012.
- [4] K. Huang, C. Xiong and X. Zhao. **Scalar-field theory of dark matter** Int. J. Mod. Phys. A 29, no. 13, 1450074, [arXiv: 1304.1595[gr-qc]], 2014.
- [5] K. Huang. **Dark Energy and Dark Matter in a Superfluid Universe**, [arXiv:1309.5707[gr-qc]], 2013.
- [6] M. R. R. Good, C. Xiong, A. J. K. Chua and K. Huang. **Geometric creation of quantum vorticity** [arXiv: 1407.5760[gr-qc]], 2015.
- [7] K. Huang. **Quantum vorticity in nature** [arXiv:1508.05619[gr-qc]], 2015.

- [8] K. Huang, C. Xiong and X. Zhao. **Scalar-field theory of dark matter** Int. J. Mod. Phys. A 29, no. 13, 1450074, [arXiv: 1304.1595[gr-qc]], 2014.
- [9] K. Huang, **A Superfluid Universe**, World Scientific, 2016. (ISBN 9813148454).
- [10] H.-B. Low and Chi Xiong. **Fantasia of a Superfluid Universe - In memory of Kerson Huang** [arXiv: 1612.01347[astro-ph.CO]], 2016.
- [11] Weinberg, S. **Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity**. John Wiley and Sons, 1972.
- [12] L. Campanelli, P. Cea, G. L. Fogli, and A. Marrone, **Testing the isotropy of the Universe with type Ia supernovae** Phys. Rev. D **83**, 103503, 2011.
- [13] L.M. Diaz-Rivera, L. Samushia and B. Ratra, PRD 73, 083503, 2006.
- [14] V. Rubin and W. K. Ford Jr, “**Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emissions**”, Astrophysical Journal 159, 379, 1970.
- [15] V. Rubin, N. Thonnard and W. K. Ford Jr, “**Rotational Properties of 21Sc Galaxies with a Large Range of Luminosities and Radii from NGC 4605(R=4kpc) to UCG 2885 (R=122kpc)**”, Astrophysical Journal 238, 471, 1980.
- [16] J.D. Bekenstein. **Relativistic gravitation theory for the MOND paradigm**, Phys. Rev. D, 70, 083509, 2004.
- [17] J.D. Bekenstein. **The modified Newtonian dynamics-MOND-and its implications for new physics**, Comtemp. Phys. 47, 387 [arXiv:astro-ph/0701848], 2006.
- [18] J. Grande, J. Sola, S. Hrvoje. **LXCDM: a cosmon model solution to the cosmological coincidence problem?** JCAP 011[arXiv:gr-qc/0604057], 2006.

- [19] C. Armendariz-Picon, V. Mukhanov. **Essentials of k-essence** Phys. Rev. D, 63, 103510, 2001.
- [20] C. Skordis, Topical Review, 2009.
- [21] V. Sahni. **Dark Matter and Dark Energy** [arXiv:astro-ph0403324], 2004.
- [22] S. Dodelson, **Modern Cosmology**, Academic press, 2003.
- [23] E. Kolb, M. S. Turner, **The early universe**, (Addison-Wesley Publishing. Company), 1994.
- [24] F. Zwicky, **The Redshift of Extragalactic Nebulae** (“**Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln**”), Helvetica Acta 6, 110-127, 1933.
- [25] F. Zwicky, **On the masses os Nebulae and of Clusters of Nebulae**, Astrophysical Journal Vol. 86, p. 217, 1937.
- [26] S. Smith. **The Mass of the Virgo Cluster**, Astrophysical Journal Vol. 83, p.23, 1936.
- [27] S. M. Kent and J. E. Gunn. **The Dynamicc of Rich Clusters of Galaxies. I. The Coma Cluster**, Astronomical Journal Vol. 87, Num. 7, 1982.
- [28] J-L. Zhao, R-S. Pan and Y-P. He. **Virial Mass and Kinematics of the Virgo Cluster**, Acta Astrophys. Sin. 12/2, p.107, 1992.
- [29] M. Geller, T. Beers, et. al. **A Redshift Survey of the poor Cluster A1142**, Astronomical Journal Vol. 89, Num. 3, 1984.

- [30] C. Armendariz-Picon, V. Mukhanov, P.J. Steinhardt. **Dynamical Solution to the Problem of a Small Cosmological Constant and Late-Time Cosmic Acceleration** Phys. Rev. Lett. 85, 21, 4438, 2000
- [31] I. Zlatev, P. Steinhardt. **A tracker solution to the cold dark matter cosmic coincidence problem**, Physical letters B 459, 570-574, 1999.
- [32] M. Tegmark *et al.* **Cosmological parameters from SDSS and WMAP**, astro-ph/0310723, 2003.
- [33] P. Steinhardt, L.Wang, I.Zlatev. **Cosmological tracking solutions**, Phys.Rev. D, Vol. 59,123504, 1999.
- [34] C. Armendariz-Picon, V. Mukhanov, P.J. Steinhardt. **Dynamical Solution to the Problem of a Small Cosmological Constant and Late-Time Cosmic Acceleration**, Phys. Rev. Lett. 85, 21, 4438, 2000.
- [35] M. Roshan, F. Shojai. **Thawing $f(R)$ cosmology**, Phys.Rev.D, vol. 80, 043508, 2009.
- [36] J.P.Bruneton, G.Esposito-Farèse, Phys.Rev.D78, 124012(20070[arXiv:gr-qc07054043]
- [37] V. L. Ginzburg and L. D. Landau. **QED-Lie Algebra and Their \mathcal{L} -Modules in Superconductivity**, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **20**, 1064, 1950.
- [38] W. Tucker et. al., Astrophys. J. Lett. **496**, L5 ; arXiv:astro-ph/9801120, 1988.
- [39] S. N. Bose. **Plancks Gezets und Lichtquantenhypothese**, Zeitschrift für Physik, 26, 178-181, 1924.
- [40] A. Einstein. **Quantentheorie des einatomigen idealen Gases (Zweite Abhandlung)**, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1, 3-14,

- 1925; **Teoria quântica do gás ideal monoatômico (Segundo Tratado)**, RBEF, 27, 113-120, 2005.
- [41] A. Griffin, **A Brief History of Our Understanding of BEC: From Bose to Believe**, arXiv: cond-mat/9901123, 1999.
- [42] H. K. Onnes, **The Liquefaction of Helium**, Communications from the Physical Laboratory at the University of Leiden, 108, 3, 1908.
- [43] H. K. Onnes. **The Disappearance of the Resistivity of Mercury**, Communications from the Physical Laboratory at the University of Leiden, 122b, 1911.
- [44] P. F. Dahl. **Superconductivity**, American Institute of Physics, New York, 1992.
- [45] P. Ehrenfest, Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, 36, 147, 1933.
- [46] P. Kapitza. **Viscosity of Liquid Helium Below the λ - Point**, Nature 141, 74, 1938.
- [47] J. F. Allen and D. Misener. **Flow of Liquid Helium II**, Nature 141, 75, 1938.
- [48] F. London. **The λ -Phenomenon of Liquid Helium and the Bose-Einstein Degeneracy**, Nature 141, 643, 1938.
- [49] F. London. **On the Bose-Einstein Condensation**, Phys. Rev. 54, 947, 1938.
- [50] F. London. **The State of Liquid Helium Near Absolute Zero**, J. Phys. Chem. 43, 49, 1938.
- [51] L. Tisza. **Transport Phenomena in Helium II**, Nature 141, 913, 1938.
- [52] L. Tisza. **Journal de Physique et le Radium**, 1, 164, 350, 1940.

- [53] I. M. Khalatnikov. **An Introduction to the Theory of Superfluidity**, Westview Press, 1965.
- [54] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. **Fluid Mechanics**, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.
- [55] P. Kapitza, J. Phys. U.S.S.R. 4, 181, 1941.
- [56] L. Onsager. **Nuovo Cimento**, 6, 249, 1949.
- [57] N. N. Bogoliubov, J. Phys. U.S.S.R. 11, 23, 1947.
- [58] L. P. Pitaevskii and S. Stringari. **Bose-Einstein Condensation**, Oxford University Press, 2003.
- [59] L. M. Brown, **Selected Papers of Richard Feynman**, World Scientific, Singapore, 2003.
- [60] O. Penrose and L. Onsager. **Bose-Einstein Condensation and Liquid Helium**, Phys. Rev. 104, 576, 1956.
- [61] E. P. Gross. **Structure of a Quantized Vortex in Boson Systems**, Nuovo Cimento 20, 454, 1961.
- [62] L. P. Pitaevskii, **Vortex Lines in an Imperfect Bose Gas**, JETP 13, 451, 1961.
- [63] C. J. Pethick and H. Smith, **Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases**, 2nd edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
- [64] C. Xiong, M. R. R. Good, Y. Guo, X. Liu and K. Huang. **Relativistic superfluidity and vorticity from the nonlinear Klein-Gordon equation**, arXiv: 1408.0779 [hep-th], 2014.

- [65] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii and S. Stringari. **Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases**, Rev. Mod. Phys. 71, 463, 1999.
- [66] A. L. Fetter. **Rotating trapped Bose-Einstein condensates** Rev. Mod. Phys. 81, 647, 2009.