

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA**

**Facultad de Ciencias**

**Escuela Profesional de Matemática**



**TESIS**

**APROXIMACIÓN DE CEROS DE FUNCIONES CONTINUAS DE  
DOS VARIABLES COMPLEJAS Y VALOR COMPLEJO  
MEDIANTE EL MÉTODO DE BISECCIÓN**

**Presentada por:**

**Br. Amelia Merced Fiestas Galán**

**PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE  
LICENCIADA EN MATEMÁTICA**

**Línea de investigación: Geometría y Cálculo Simbólico**

**Piura, Perú**

**2019**

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA**

**Facultad de Ciencias**

**Escuela Profesional de Matemática**



**TESIS**

**APROXIMACIÓN DE CEROS DE FUNCIONES CONTINUAS DE  
DOS VARIABLES COMPLEJAS Y VALOR COMPLEJO  
MEDIANTE EL MÉTODO DE BISECCIÓN**

**Línea de investigación: Geometría y Cálculo Simbólico**

---

Br. Amelia Merced Fiestas Galán

Tesista

---

Lic. Robert Ipanaque Chero

Asesor

## DECLARACIÓN JURADA DE ORIGINALIDAD DE LA TESIS

Yo Amelia Merced Fiestas Galán identificada con DNI N° 48418101, Bachiller de la Escuela Profesional de Matemática, de la Facultad de Ciencias y domiciliada en A.H. Vicente Chunga Aldana, manzana G, lote 14, del Distrito de Sechura, Provincia de Sechura, Departamento de Piura. Celular 924519977, Email ame\_18\_27@hotmail.com.

**DECLARO BAJO JURAMENTO:** que la tesis que presento es original e inédita, no siendo copia parcial ni total de una tesis desarrollada, y/o realizada en el Perú o en el Extranjero, en caso contrario de resultar falsa la información que proporciono, me sujeto a los alcances de lo establecido en el Art. N° 411, del Código Penal concordante con el Art. N° 32 de la Ley N°27444, y Ley de Procedimiento Administrativo General y las Normas Legales de Protección a los Derechos de Autor.

En fe de lo cual firmo la presente.

Piura, Setiembre del 2018



A handwritten signature in blue ink, reading "Amelia Merced Fiestas Galán".

---

Amelia Merced Fiestas Galán

DNI 48418101

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA**

**Facultad de Ciencias**

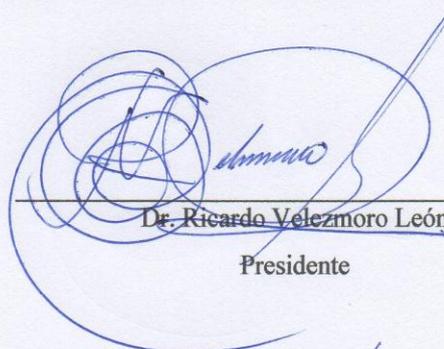
**Escuela Profesional de Matemática**



**TESIS**

**APROXIMACIÓN DE CEROS DE FUNCIONES CONTINUAS DE  
DOS VARIABLES COMPLEJAS Y VALOR COMPLEJO  
MEDIANTE EL MÉTODO DE BISECCIÓN**

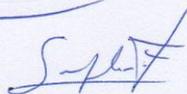
**Línea de investigación: Geometría y Cálculo Simbólico**



---

**Dr. Ricardo Velezmoro León**

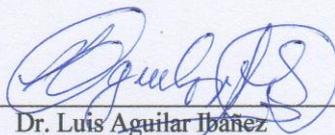
**Presidente**



---

**Dra. Sonia Alicia Casos Fernández**

**Secretaria**



---

**Dr. Luis Aguilar Ibáñez**

**Vocal**



# UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA FACULTAD DE CIENCIAS



"AÑO DE LA LUCHA CONTRA LA CORRUPCIÓN Y LA IMPUNIDAD"

## ACTA DE SUSTENTACIÓN 053-2019-UI-FC-UNP

### FACULTAD DE CIENCIAS

Los Miembros del Jurado Calificador que suscriben, reunidos para evaluar la Tesis denominada "APROXIMACIÓN DE CEROS DE FUNCIONES CONTINUAS DE DOS VARIABLES COMPLEJAS Y VALOR COMPLEJO MEDIANTE EL MÉTODO DE BISECCIÓN", presentada por la señorita Bachiller **AMELIA MERCED FIESTAS GALÁN**, con el asesoramiento del Lic. **Robert Ipanaqué Chero**; oídas las observaciones y respuestas a las preguntas formuladas, y de conformidad al Reglamento de Tesis para obtener el Título Profesional en la Facultad de Ciencias, la declaran:

**APROBADA ( X )**

**DESAPROBADA ( )**

Con la mención de:

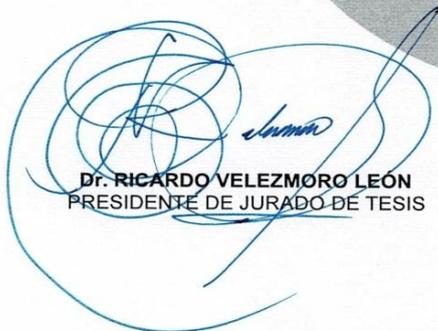
*Sobresaliente*

() En consecuencia, queda en condición de ser ratificado por el Consejo de Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Piura, y recibir el **TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADA EN MATEMÁTICA**.

() En consecuencia, queda en condición de ser ratificado por el Consejo Universitario de la Universidad Nacional de Piura, y recibir el **TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADA EN MATEMÁTICA**; después que la sustentante incorpore la sugerencia del Jurado Calificador.

Piura, 06 de setiembre de 2019.

UNP

  
Dr. RICARDO VELEZMORO LEÓN  
PRESIDENTE DE JURADO DE TESIS

  
Dra. SONIA ALICIA CASÓS FERNÁNDEZ  
SECRETARIO DE JURADO DE TESIS

  
Dr. LUIS AGUILAR IBÁÑEZ  
VOCAL DE JURADO DE TESIS



Campus Universitario - Urb. Miraflores S/N. Castilla  
PIURA PERU

## **DEDICATORIA**

Dedico esta investigación en primer lugar a Dios, por darme la oportunidad necesaria para poder lograr mis objetivos, a mis padres por su constante esfuerzo y ser la motivación en lograr mis metas en cada etapa de mi vida.

A mi esposo por su ayuda idónea y aliento en cada meta propuesta.

## **AGRADECIMIENTOS**

A Dios por direccionar mi vida y darme la oportunidad de lograr mis metas. A mis padres por su apoyo incondicional, a mi asesor por sus conocimientos brindados en el desarrollo de esta tesis.

A mi alma mater la Universidad Nacional de Piura y a los docentes por los conocimientos adquiridos en el trayecto de mi carrera.

# ÍNDICE GENERAL

Introducción .....	1
I. Aspectos de la problemática .....	2
1.1. Descripción de la realidad problemática .....	2
1.2. Formulación del problema de investigación .....	2
1.3. Justificación e importancia de la investigación .....	2
1.4. Objetivos .....	2
1.4.1. Objetivo general .....	2
1.4.2. Objetivos específicos .....	2
II. Marco teórico .....	3
2.1. Antecedentes de la investigación .....	3
2.2. Bases teóricas .....	3
2.2.1. Teorema de conservación del signo .....	4
2.2.2. Teorema de Bolzano .....	4
2.2.3. Teorema del valor intermedio para funciones continuas .....	4
2.2.4. Ceros de una función de una variable real y valor real .....	4
2.2.5. Ceros de una función de dos variables reales y valor real .....	4
2.2.6. Ceros de una función real de varias variables reales .....	5
2.2.7. Método de bisección .....	5
2.2.8. Algoritmo para el método de bisección .....	5
2.2.9. Programa para el método de bisección en el Mathematica .....	6
2.2.10. Intervalo cerrado .....	6
2.2.11. Particiones .....	7
2.2.12. Particiones equiespaciadas .....	7
2.2.13. Segmento cerrado .....	7
2.2.14. Particiones en dos dimensiones .....	7
2.2.15. Particiones en dimensiones mayores que dos .....	7
2.2.16. ¿Qué es Mathematica? .....	8

2.2.17.	Programación en el lenguaje Mathematica .....	8
2.2.18.	Operaciones algebraicas con los números complejos .....	12
2.2.19.	Concepto de función de variable compleja y valor complejo.....	14
2.2.20.	Ceros de una función de una variable compleja y valor complejo .....	15
2.3.	Glosario de términos básicos .....	16
2.3.1.	Aproximación.....	16
2.3.2.	Error absoluto .....	16
2.3.3.	Error relativo .....	16
2.3.4.	Algoritmo .....	16
2.4.	Hipótesis.....	16
III.	Marco metodológico.....	16
3.1.	Enfoque .....	16
3.2.	Nivel.....	16
3.3.	Tipo .....	17
3.4.	Métodos y procedimientos.....	17
3.5.	Aspectos éticos .....	18
IV.	Resultados y discusión .....	18
4.1.	Ceros de una función de dos variables complejas y valor complejo .....	18
4.2.	Teoremas para funciones continuas de varias variables reales y valor real.....	18
4.3.	Método de bisección para funciones continuas de varias variables reales y valor real ....	20
4.4.	Ejemplos en segmentos arbitrarios .....	20
4.5.	ejemplos en segmentos sobre particiones equiespaciadas.....	23
4.5.1.	Particiones en un espacio 1D .....	23
4.5.2.	Particiones en un espacio 2D .....	24
4.5.3.	Particiones en un espacio 3D .....	26
4.5.4.	Particiones en un espacio 4D .....	28
4.6.	Teoremas para funciones continuas de dos variables complejas y valor complejo .....	31
4.7.	Método de bisección para funciones continuas de dos variables complejas y valor complejo.....	31

4.8. Ejemplos para funciones continuas de dos variables complejas y valor complejo .....	32
Conclusiones .....	45
Recomendaciones.....	46
Referencias bibliográficas .....	47
Anexos .....	48
ANEXO 1.....	49

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.	Ceros de la función $f(x) = x \operatorname{sen} x - 1$ en $D: -2 \leq x \leq 2$ .....	4
Figura 2.	Ceros de la función $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ en $D: -2 \leq x \leq 2 \wedge -2 \leq y \leq 2$ .....	5
Figura 3.	Bosquejo de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ y su campo vectorial normal unitario.....	11
Figura 4.	Ceros de la función $F(z) = z \operatorname{sen} z - i$ en $\mathcal{D}: -2 \leq \Re(z) \leq 2 \wedge -2 \leq \Im(z) \leq 2$ . ....	15
Figura 5.	Ceros de la función $F(z, w) = z^2 + w^2 - 1$ en $-1 \leq \Re(z) \leq 1 \wedge -1 \leq \Im(z) \leq 1 \wedge$ $-1 \leq \Re(w) \leq 1 \wedge -1 \leq \Im(w) \leq 1$ .....	19
Figura 6.	Esquema de la función compuesta $\tilde{f}$ .....	19
Figura 7.	Cero aproximado de la función $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ en el segmento $[(0.5, 0.5), (1, 0)]$ .....	22
Figura 8.	Gráfica de la función $f(x) = x^3 - 3x$ y sus ceros en $[-2, 2]$ .....	24
Figura 9.	Gráfica de la función $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ y sus ceros en $[-2, 2] \times [-2, 2]$ .....	25
Figura 10.	Ceros de la función $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 - 4)^2 + z^2 - 4$ en $[-6, 6] \times [-6, 6] \times$ $[-2, 2]$ .....	28
Figura 11.	Ceros de la función $f(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2 - w^2 - 1$ en $[-2, 2] \times [-2, 2] \times$ $[-2, 2] \times [-2, 2]$ .....	30
Figura 12.	Ceros de la función $F(z, w) = z^2 + w^2 - 1$ en $\Re(z) \in [-2, 2], \Im(z) \in [-2, 2]$ y $\Re(w) \in [-2, 2], \Im(w) \in [-2, 2]$ .....	35
Figura 13.	Gráfica de los ceros aproximados de $F(z, w) = z^2 + w^2 - 1$ junto con la gráfica de $z^2 + w^2 = 1$ .....	36
Figura 14.	Ceros de la función $F(z, w) = z^2 - w^2 - 1$ en $\Re(z) \in [-2, 2], \Im(z) \in [-2, 2]$ y $\Re(w) \in [-2, 2], \Im(w) \in [-2, 2]$ .....	40
Figura 15.	Gráfica de los ceros aproximados de $F(z, w) = z^2 - w^2 - 1$ junto con la gráfica de $z^2 - w^2 = 1$ .....	40
Figura 16.	Ceros de la función $F(z, w) = \operatorname{sen} z + \operatorname{cos} w - 1$ en $\Re(z) \in [-2, 2], \Im(z) \in [-2, 2]$ y $\Re(w) \in [-2, 2], \Im(w) \in [-2, 2]$ .....	44

## RESUMEN

El método de bisección es usado para aproximar ceros de funciones continuas de variable real y valor real. En este trabajo se propone el uso del método de bisección para aproximar los ceros de funciones continuas de dos variables complejas y valor complejo. La propuesta se basa en expresar la función compleja en sus partes real e imaginaria, las cuales resultan en dos funciones de cuatro variables reales y valor real; luego se aplica el método de bisección a la composición de la función de cuatro variables y la función que define un segmento que une dos puntos del dominio de dicha función, tanto para la parte real como para la parte compleja; finalmente se eligen aquellos puntos, de las partes compleja y real, que están a cierta distancia  $\epsilon$ . Los segmentos se seleccionan ordenadamente al realizar una partición equiespaciada del dominio de la función. Los resultados permiten obtener bosquejos de los puntos de superficies complejas dadas en forma implícita.

**PALABRAS CLAVE:** Bisección, superficies complejas, puntos de superficies complejas.

## **ABSTRACT**

The bisection method is used to approximate zeros of continuous functions of real variable and real value. In this paper we propose the use of the bisection method to approximate the zeros of continuous functions of two complex variables and complex value. The proposal is based on expressing the complex function in its real and imaginary parts, which result in two functions of four real variables and real value; then the bisection method is applied to the composition of the four-variable function and the function that defines a segment that joins two points of the domain of said function, both for the real part and for the complex part; finally those points are chosen, from the complex and real parts, which are at a certain distance epsilon. Segments are selected in order when performing an equally spaced partition of the function domain. The results allow to obtain sketches of complex surface points given implicitly.

**KEYWORDS:** Bisection, complex surfaces, points of complex surfaces.

## INTRODUCCIÓN

La aproximación de los ceros de funciones complejas se aplica a situaciones reales (Dubbelday, 1983). Se han realizado diversos trabajos para dar solución al problema de la aproximación de ceros de funciones complejas (Herbert, 1978; Vrahatis, y otros, 1997; Yakoubsohn, 2005). No obstante, estos trabajos se limitan, en general, a funciones de una variable compleja y valor complejos.

En este trabajo se aproximan los ceros de funciones continuas de dos variables complejas y valor complejo mediante el método de bisección. Para ello se empezó por verificar que los teoremas de conservación de signo, de Bolzano y de valor intermedio se cumplen para funciones continuas de dos variables complejas y valor complejo. Luego, se enunció y verificó un teorema que definía el método de bisección para funciones continuas de dos variables complejas y valor complejo. Seguidamente, se realizaron las interpretaciones geométricas de los resultados. Finalmente, se elaboró la implementación computacional de los resultados.

La metodología que se utilizó tiene un enfoque cuantitativo, un diseño experimental, un nivel descriptivo y es de tipo básica.

Este trabajo se realizó porque no se registra el uso del método de bisección para aproximar los ceros de funciones continuas de dos variables complejas y valor complejo y para aportar la generalización del método de bisección en la aproximación de los ceros de funciones continuas de dos variables complejas y valor complejo, lo que permitió obtener puntos que pertenecen a la gráfica de superficies complejas definidas en forma implícita.

En la búsqueda de antecedentes relacionados con este trabajo de investigación se pudo tener acceso virtual a cuatro artículos (Herbert, 1978; Vrahatis, y otros, 1997; Dubbelday, 1983; Yakoubsohn, 2005).

Esta tesis consta de cuatro capítulos. En el primer capítulo se abordan los aspectos de la problemática. En el segundo capítulo se desarrolla el marco teórico. En el tercer capítulo se redacta el marco metodológico. Y en el cuarto capítulo se brindan los resultados y la discusión.

# **I. ASPECTOS DE LA PROBLEMÁTICA**

## **1.1. DESCRIPCIÓN DE LA REALIDAD PROBLEMÁTICA**

La aproximación de los ceros de funciones complejas se aplica a situaciones reales (Dubbelday, 1983). Si bien es cierto que el método de Newton admite una generalización para aproximar ceros de funciones de  $n$  variables complejas y  $n$  valores complejos, este método exige el cálculo del jacobiano y no permite aproximar ceros de funciones de  $m$  variables complejas y  $n$  valores complejos. Por otra parte, se han realizado diversos trabajos para dar solución al problema de la aproximación de ceros de funciones complejas (Herbert, 1978; Vrahatis, y otros, 1997; Yakoubsohn, 2005). No obstante, estos trabajos se limitan, en general, a funciones de solamente una variable compleja y valor complejos.

## **1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN**

¿Es posible aproximar los ceros de funciones continuas de dos variables complejas y valor complejo mediante el método de bisección?

## **1.3. JUSTIFICACIÓN E IMPORTANCIA DE LA INVESTIGACIÓN**

Este trabajo se realizó porque no se registra el uso del método de bisección para aproximar los ceros de funciones continuas de dos variables complejas y valor complejo.

Este trabajo se realizó para aportar la generalización del método de bisección en la aproximación de los ceros de funciones continuas de dos variables complejas y valor complejo. Esto permitirá obtener puntos que pertenezcan a la gráfica de superficies complejas definidas en forma implícita.

## **1.4. OBJETIVOS**

### **1.4.1. Objetivo general**

Aproximar los ceros de funciones continuas de dos variables complejas y valor complejo mediante el método de bisección.

### **1.4.2. Objetivos específicos**

- Verificar que los teoremas de conservación de signo, de Bolzano y de valor intermedio se cumplen para funciones continuas de dos variables complejas y valor complejo.
- Enunciar y demostrar un teorema que defina el método de bisección para funciones continuas de dos variables complejas y valor complejo.

- Realizar las interpretaciones geométricas de los resultados.
- Realizar la implementación computacional de los resultados.

## **II. MARCO TEÓRICO**

### **2.1. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN**

Un primer trabajo corresponde a (Herbert, 1978). En este artículo se presenta un método numérico para resolver ecuaciones polinomiales. El módulo básico de este método usa sucesiones de Sturm para contar los ceros que están en un rectángulo dado del plano complejo. Este artículo se relaciona con la investigación en curso en que obtiene ceros de funciones complejas, aunque las funciones son polinomiales y de una sola variable compleja y valor complejo.

Un segundo trabajo es el artículo presentado por (Vrahatis, y otros, 1997). En dicho artículo se estudian los ceros complejos de las funciones de Bessel de orden real, de primera y segunda especie y sus primeras derivadas. La noción del grado topológico es usada para el cálculo del número exacto de estos ceros dentro de una región abierta y limitada del plano complejo, así como para la localización de estos ceros. Este trabajo es pertinente con la investigación aquí planteada en el sentido que aproxima ceros de funciones complejas, sin embargo, las funciones son de un tipo particular (de Bessel) y de una sola variable compleja y valor complejo.

Un tercer trabajo de (Dubbelday, 1983). En este artículo se encuentran las raíces complejas de las relaciones de dispersión, mediante una nueva técnica numérica. El algoritmo básico indica la ubicación de una raíz relativa a una línea situada cerca de la raíz. Al disminuir sucesivamente el espaciado de dos pares de líneas mutuamente perpendiculares, la raíz se encierra dentro de un cuadrado de tamaño arbitrariamente pequeño. Este trabajo a similitud de la investigación aquí propuesta aproxima ceros de funciones complejas, aunque son funciones vinculadas con las relaciones de dispersión para ondas elásticas en una placa cargada de fluido y de solamente una variable compleja y valor complejo.

Un cuarto trabajo de (Yakoubsohn, 2005) establece resultados precisos sobre la complejidad de un método de bisección exclusiva para localizar ceros de funciones analíticas univariadas contenidas en un cuadrado. La salida de este algoritmo es una lista de cuadrados que contiene todos los ceros. El método propuesto en este trabajo es eficiente, pero se limita a funciones univariadas, es decir de una variable compleja y valor complejo.

### **2.2. BASES TEÓRICAS**

Este trabajo se basa en el método de bisección, para aproximar ceros de funciones continuas reales y de valor real, el cual se generaliza para aplicarse a funciones continuas complejas y de valor complejo.

### 2.2.1. Teorema de conservación del signo

Sea  $f$  continua en  $c$  y supongamos que  $f(c) \neq 0$ . Existe entonces un intervalo  $\langle c - \delta, c + \delta \rangle$  en el que  $f$  tiene el mismo signo que  $f(c)$  (Apostol, 2001).

### 2.2.2. Teorema de Bolzano

Sea  $f$  continua en cada punto del intervalo cerrado  $[a, b]$  y supongamos que  $f(a)$  y  $f(b)$  tienen signos opuestos. Existe entonces por lo menos un  $c$  en el intervalo abierto  $\langle a, b \rangle$  tal que  $f(c) = 0$  (Apostol, 2001).

### 2.2.3. Teorema del valor intermedio para funciones continuas

Sea  $f$  continua en cada punto de un intervalo  $[a, b]$ . Si  $x_1 < x_2$  son dos puntos cualesquiera de  $[a, b]$  tales que  $f(x_1) \neq f(x_2)$ , la función  $f$  toma todos los valores comprendidos entre  $f(x_1)$  y  $f(x_2)$  por lo menos una vez en el intervalo  $\langle x_1, x_2 \rangle$  (Apostol, 2001).

### 2.2.4. Ceros de una función de una variable real y valor real

Sea  $f$  una función continua, de dominio  $D \subset \mathbb{R}$  y valor real, los ceros de  $f$  son los elementos del conjunto  $\theta_f = \{x \in D \mid f(x) = 0\}$ .

Los ceros de tal función son puntos de la recta real ( $\mathbb{R}$ ) que satisfacen  $f(x) = 0$ . Por ejemplo, la Figura 1 muestra los ceros de la función

$$f(x) = x \operatorname{sen} x - 1 \text{ en } D: -2 \leq x \leq 2.$$

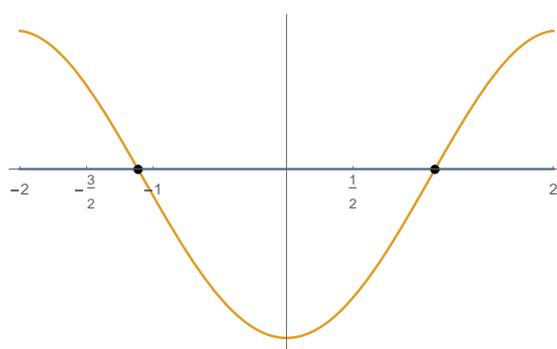


Figura 1. Ceros de la función  $f(x) = x \operatorname{sen} x - 1$  en  $D: -2 \leq x \leq 2$ .

### 2.2.5. Ceros de una función de dos variables reales y valor real

Sea  $f$  una función continua, de dominio  $D \subset \mathbb{R}^2$  y valor real, los ceros de  $f$  son los elementos del conjunto  $\theta_f = \{(x, y) \in D \mid f(x, y) = 0\}$ .

Los ceros de tal función son puntos del plano ( $\mathbb{R}^2$ ) que descansan sobre la curva  $f(x, y) = 0$ . Por ejemplo, la Figura 2 muestra los ceros de la función

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy \text{ en } D: -2 \leq x \leq 2 \wedge -2 \leq y \leq 2.$$

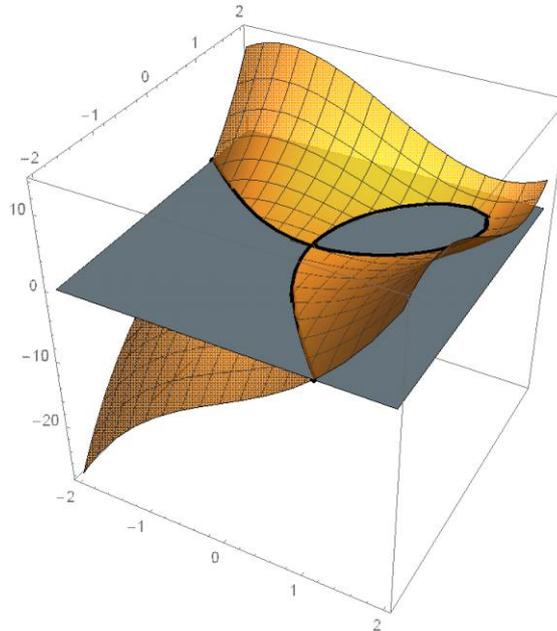


Figura 2. Ceros de la función  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$  en  $D: -2 \leq x \leq 2 \wedge -2 \leq y \leq 2$ .

### 2.2.6. Ceros de una función real de varias variables reales

Sea  $f$  una función continua, de dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$  y valor real, los ceros de  $f$  son los elementos del conjunto  $\Theta_f = \{\bar{x} \in D | f(\bar{x}) = 0\}$ .

### 2.2.7. Método de bisección

Supongamos que  $f$  es una función continua definida en el intervalo  $[a, b]$  con  $f(a)$  y  $f(b)$  de signos diferentes. De acuerdo con el teorema del valor intermedio, existe un número  $p$  en  $(a, b)$  tal que  $f(p) = 0$ . El método requiere dividir varias veces a la mitad los subintervalos de  $[a, b]$  y, en cada paso, localizar la mitad que contenga a  $p$  (Burden & Faires, 2002).

### 2.2.8. Algoritmo para el método de bisección

En este trabajo usaremos un algoritmo que se basa en el propuesto por (Burden & Faires, 2002). Se ha modificado para que no se tenga en cuenta el número máximo de iteraciones.

### **Biseción**

Para encontrar una solución a  $f(x) = 0$  dada la función continua determinada  $f$  en el intervalo  $[a, b]$ , donde  $f(a)$  y  $f(b)$  tienen signos opuestos:

ENTRADA puntos finales  $a, b$ ; tolerancia  $TOL$ .

SALIDA solución aproximada  $q$ .

*Paso 1* Sea  $i = 1$ ;

$$FA = f(a).$$

*Paso 2* Mientras  $0.5(b - a) \geq TOL$  haga los pasos 3 – 5.

*Paso 3* Sea  $q = 0.5(a + b)$ ;

$$FQ = f(q).$$

*Paso 4* Si  $FQ = 0$  o  $|FQ| < TOL$  entonces

SALIDA ( $q$ )

PARE.

*Paso 5* Si  $FA * FQ > 0$ , entonces  $a = q$

$$FA = FQ$$

$$b = q.$$

*Paso 6* SALIDA ( $q$ )

### **2.2.9. Programa para el método de bisección en el Mathematica**

Con base en el algoritmo del apartado 2.2.8, previo, codificaremos el programa que usaremos en este trabajo.

```
Bisection[fun_, var_, a_, b_, TOL_] :=  
Module[{f=Function[var, fun], A=a, B=b, FA, q, FQ},  
FA=f[a];  
While[0.5 (B-A) >= TOL,  
q=0.5 (A+B);  
FQ=f[q];  
If[FQ==0 || Abs[FQ] < TOL, Return[q]; Break];  
If[FA * FQ > 0, A=q; FA=FQ, B=q];  
];  
q  
]
```

### **2.2.10. Intervalo cerrado**

Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ . Si  $a < b$ , se indica por  $[a, b]$  el conjunto de todos los  $x$  que satisfacen las desigualdades  $a \leq x \leq b$  y se denomina intervalo cerrado de  $a$  a  $b$  (Apostol, 2001).

### 2.2.11. Particiones

Un intervalo  $[a, b]$ , se supone descompuesto en  $n$  subintervalos fijando  $n - 1$  puntos de subdivisión,  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  sujetos únicamente a la restricción

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b. \quad (1)$$

Es conveniente designar el punto  $a$  por  $x_0$  y el  $b$  por  $x_n$ . Un conjunto de puntos que satisfacen (1) se denomina una partición  $P$  de  $[a, b]$ , y se utiliza el símbolo

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

para designar tal partición. La partición  $P$  determina  $n$  subintervalos cerrados

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n].$$

$[x_{k-1}, x_k]$  indica uno de estos subintervalos cerrados y se dice que es precisamente el subintervalo cerrado  $k$ -ésimo de  $P$  (Apostol, 2001).

### 2.2.12. Particiones equiespaciadas

Diremos que una partición  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ , de un intervalo  $[a, b]$ , es equiespaciada si se cumple que

$$x_k - x_{k-1} = (b - a)/n, \quad k = 1, \dots, n.$$

### 2.2.13. Segmento cerrado

Sean  $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^n$ . El segmento de recta de extremos  $\bar{a}, \bar{b}$  es el conjunto

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \{(1 - t)\bar{a} + t\bar{b} \mid 0 \leq t \leq 1\} \text{ (Lima, 1999).}$$

### 2.2.14. Particiones en dos dimensiones

Sea  $Q$  un rectángulo, producto cartesiano de dos intervalos cerrados  $[a, b]$  y  $[c, d]$ ,

$$Q = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \mid x \in [a, b] \text{ e } y \in [c, d]\}.$$

Consideremos dos particiones  $P_1$  y  $P_2$  de  $[a, b]$  y  $[c, d]$ , respectivamente

$$P_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\} \text{ y } P_2 = \{y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, y_m\},$$

donde  $x_0 = a$ ,  $x_n = b$ ,  $y_0 = c$ ,  $y_m = d$ . Se dice que el producto cartesiano  $P_1 \times P_2$  es una partición de  $Q$ . Puesto que  $P_1$  descompone  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos y  $P_2$  descompone  $[c, d]$  en  $m$  subintervalos, la partición  $P = P_1 \times P_2$  descompone  $Q$  en  $mn$  subrectángulos (Apostol, 2002).

### 2.2.15. Particiones en dimensiones mayores que dos

Un intervalo cerrado  $n$ -dimensional  $[\bar{a}, \bar{b}]$  es el producto cartesiano de  $n$  intervalos unidimensionales cerrados  $[a_k, b_k]$ , en donde  $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$  y  $\bar{b} = (b_1, \dots, b_n)$ . Si  $P_1, \dots, P_n$  son

particiones de  $[a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n]$ , respectivamente, el producto cartesiano  $P = P_1 \times \dots \times P_n$  será una partición de  $[\bar{a}, \bar{b}]$  (Apostol, 2002).

### 2.2.16. ¿Qué es Mathematica?

Todo lenguaje computacional hace del computador una herramienta de propósito general, pero entre estos Mathematica es uno muy especial, por varias razones.

Sin disponer de un dominio completo del paquete, en las primeras sesiones de trabajo, es posible obtener la solución a gran cantidad de problemas de la matemática y de sus aplicaciones. Un extenso conjunto de elaborados métodos pueden ser aplicados directamente, sacando provecho de la herramienta sin necesidad de ocuparse de ella como lenguaje de programación.

Pero, aunque Mathematica dispone de gran cantidad de procedimientos ya definidos, en todos los campos de la matemática y sus aplicaciones, adquiere su verdadera potencia cuando permite utilizarlos para redefinir y crear nuevos procedimientos. En este aspecto agrega a los tradicionales recursos de los lenguajes de programación, renovados recursos para hacer cálculo numérico y la construcción de gráficos y nuevas herramientas para hacer cálculo simbólico, creando un nuevo paradigma de programación: la programación simbólica.

Con todo ello Mathematica se convierte en una extensión del lenguaje de la matemática, que permite no solo representar y transformar información o conocimientos, si no que le da a la matemática una nueva dimensión al posibilitar el ensayo y la exploración, como medio habitual de aproximarse a los problemas y su solución (Arce, 2002).

### 2.2.17. Programación en el lenguaje Mathematica

Mathematica aparte de admitir su uso como una súper calculadora también constituye un lenguaje de programación que soporta múltiples paradigmas de programación (Gray, 1994; Wellin, Kamin, & Gaylord, 2005).

- Programación funcional. Es la que involucra el uso de funciones de orden superior; entendiéndose como función de orden superior a aquella función que toma entre sus argumentos una o más funciones diferentes.

*Mathematica*

La función *Map* (función de orden superior) toma como argumento la función *f*.

*Map*[*f*, {*a*, *b*, *c*, *d*, *e*}];

{*f*[*a*], *f*[*b*], *f*[*c*], *f*[*d*], *f*[*e*]}

Cálculo del promedio de un conjunto de números usando programación funcional.

```
f = Plus@@#/Length[#] &;
f[{a, b, c, d, e}]
```

$$\frac{1}{5}(a + b + c + d + e)$$

- Programación basada en reglas. Se caracteriza por transformaciones repetidas de objetos de datos como un término, gráfico, situación de prueba o almacenamiento de restricciones. Las transformaciones son descritas por reglas que especifican el cálculo de un objeto que pretende reemplazar otro objeto descrito por un patrón.

Una forma común de usar las reglas.

```
{f[1], f[2], f[3], f[4], f[5], f[6], f[7], f[8], f[9], f[10]}/. f: > g;
{g[1], g[2], g[3], g[4], g[5], g[6], g[7], g[8], g[9], g[10]}
```

Cálculo del promedio de un conjunto de números usando programación basada en reglas.

```
f[list_] := (list/.List: > Plus)/Length[list]
f[{a, b, c, d, e}]
```

$$\frac{1}{5}(a + b + c + d + e)$$

- Programación procedural. Se trata de un estilo de programación basado en estructurar el código de un programa en componentes, que reciben el nombre de procedimientos, subrutinas o funciones.

Cálculo del promedio de un conjunto de números usando programación procedural.

```
f[list_] := Module[{s = 0, n = Length[list], i}, Do[s = s + list[[i]], {i, n}]; s/n]
```

$f[\{a, b, c, d, e\}]$

$$\frac{1}{5}(a + b + c + d + e)$$

*Mathematica*

Segunda forma de calcular el promedio de un conjunto de números usando programación procedural.

```
f[list_] := Module[{s = 0, n = Length[list], i}, For[i = 1, i ≤ n, i ++,  
  s = s + list[[i]]]; s/n]
```

$f[\{a, b, c, d, e\}]$

$$\frac{1}{5}(a + b + c + d + e)$$

*Mathematica*

Tercera forma de calcular el promedio de un conjunto de números usando programación procedural.

```
f[list_] := Module[{s = 0, n = Length[list], i = 1}, While[i ≤ n, s = s + list[[i]];  
  i ++]; s/n]
```

$f[\{a, b, c, d, e\}]$

$$\frac{1}{5}(a + b + c + d + e)$$

- Programación recursiva. Es aquella que se basa en invocar una función dentro de la definición de la misma.

*Mathematica*

Cálculo del promedio de un conjunto de números usando programación recursiva.

```
f[list_, i_ /; i > 0, n_ /; n > 0] := If[i == n, list[[i]]/n, list[[i]]/n + f[list, i + 1, n]]
```

$f[\{a, b, c, d, e\}, 1, 5]$

$$\frac{a}{5} + \frac{b}{5} + \frac{c}{5} + \frac{d}{5} + \frac{e}{5}$$

- Programación basada en listas. Utiliza listas de elementos para definir las funciones.

*Mathematica*

Cálculo del promedio de un conjunto de números usando programación basada en listas.

```
f[list_]:= Apply[Plus,list]/Length[list]
```

```
f[{a,b,c,d,e}]
```

$$\frac{1}{5}(a + b + c + d + e)$$

- Programación gráfica. Se rescata el hecho que todos los objetos gráficos (obtenidos con comandos como *Plot*, *ParametricPlot*, *ContourPlot*, etc.) son generados, con base en complejos algoritmos, mediante los llamados objetos gráficos primitivos (*Point*, *Line*, *Polygon*, etc.), lo que permite crear nuevos programas aprovechando la funcionalidad de los comandos existentes.

*Mathematica*

Gráfica de la curva  $x^2 - y^2 = 1$  y su campo vectorial normal unitario.

```
Show[graf = ContourPlot[x^2 - y^2 == 1, {x, -2,2}, {y, -2,2}], graf/.
```

```
Graphics[GraphicsComplex[pts_, ad_], ad_]: >
```

```
Graphics[Arrow[{#, # + {#[[1]}, -#[[2]]}/Sqrt[#.#]}]&/@pts],
```

```
PlotRange -> All, AspectRatio -> Automatic]
```

Ver Figura 3

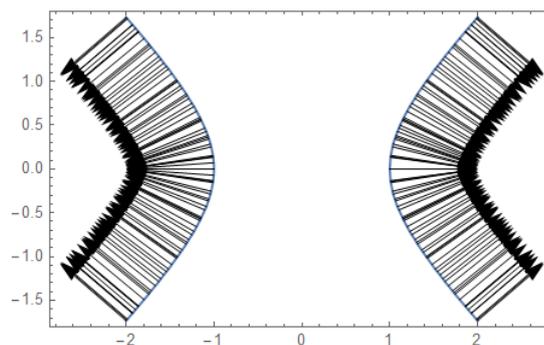


Figura 3. Bosquejo de la hipérbola  $x^2 - y^2 = 1$  y su campo vectorial normal unitario.

### 2.2.18. Operaciones algebraicas con los números complejos

Según (Bolgov & otros, 1983), se denominan números complejos toda clase de pares ordenados  $z = (x, y)$  de los números reales, para los cuales las operaciones de adición y multiplicación vienen definidas del modo siguiente:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$
$$(x_1, y_1) (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

El conjunto de todos los números complejos se designa por el símbolo  $\mathbb{C}$ .

Los números reales  $x$  e  $y$  llevan el nombre de partes real e imaginaria del número complejo  $z = (x, y)$  y se denotan mediante los símbolos  $\Re(z)$  e  $\Im(z)$ , respectivamente.

Dos números complejos  $z_1 = (x_1, y_1)$  y  $z_2 = (x_2, y_2)$  se dicen iguales cuando, y sólo cuando,  $x_1 = x_2$  e  $y_1 = y_2$ .

De las definiciones de adición y multiplicación se deduce que todo número complejo  $(x, y)$  puede escribirse del modo siguiente:

$$(x, y) = (x, 0) + (0, 1) (y, 0).$$

Si, ahora, identificamos los números complejos del tipo  $(x, 0)$  con los números reales, y designamos el número  $(0, 1)$  por el símbolo  $i$ , entonces la última igualdad tendrá la expresión

$$z = x + iy$$

y se denominará forma algebraica del número complejo  $z = (x, y)$ .

Las operaciones de adición y multiplicación de los números complejos poseen las siguientes propiedades:

- $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$  (conmutatividad de la adición);
- $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$  (asociatividad de la adición).
- $z_1z_2 = z_2z_1$  (conmutatividad de la multiplicación);
- $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$  (asociatividad de la multiplicación);
- $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$  (ley de la distributividad).
- $\forall z_1, z_2 \neq 0, \exists z (z_2 z = z_1)$ . Tal número  $z$  se llama cociente de la división de  $z_1$  entre  $z_2$  y se designa mediante el símbolo  $\frac{z_1}{z_2}$ . Si  $z_1 = x_1 + iy_1$  y  $z_2 = x_2 + iy_2$ , entonces:  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$ .

Al adicionar y multiplicar los números complejos, representados en la forma algebraica, podemos tratarlos igual que los binomios del tipo  $a + ib$ , teniendo en cuenta adicionalmente que  $i^2 = (0, 1) (0, 1) = (-1, 0) = -1 + 0i$ .

Si en un plano se ha introducido un sistema de coordenadas rectangulares cartesianas  $OXY$ , entonces a todo número complejo  $z = x + iy$  se le puede asignar cierto punto  $M(x, y)$  de abscisa  $x$  y ordenada  $y$ .

En este caso suele decirse que el punto  $M(x, y)$  representa el número complejo  $z = x + iy$ . El plano, en el que se representan los números complejos, se denomina plano complejo, el eje  $OX$ , eje real y el  $OY$ , eje imaginario.

El número  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  se llama módulo del número complejo  $z = x + iy$  y se denota por el símbolo  $|z|$ . El módulo del número  $z$  es igual a la distancia entre el punto  $M$  que representa este número y el origen de coordenadas.

Toda solución  $\varphi$  del sistema de ecuaciones

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \text{sen } \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

recibe el nombre de argumento del número complejo  $z = x + iy \neq 0$ . Todos los argumentos del número  $z$  difieren en números enteros múltiplos de  $2\pi$  y se designan por el símbolo único  $\text{Arg } z$ . Cada valor del argumento coincide con la magnitud  $\varphi$  de cierto ángulo al cual se debe girar el eje  $\tilde{O}x$  hasta que coincida con el radio vector  $\overline{OM}$  de punto  $M$  (en este caso  $\varphi > 0$ , si el giro se realiza en sentido antihorario, y  $\varphi < 0$ , en el sentido contrario). Se denomina valor principal del argumento al valor de  $\text{Arg } z$  que satisface la condición  $0 \leq \text{Arg } z < 2\pi$ , y se denota mediante el símbolo  $\arg z$ .

En algunos casos se llama valor principal del argumento el valor de  $\text{Arg } z$  que satisface la condición  $-\pi < \text{Arg } z \leq \pi$ .

De las igualdades para  $\cos \varphi$  y  $\text{sen } \varphi$  se deduce que para todo número complejo  $z$  se verifica la igualdad

$$z = |z|(\cos \varphi \pm i \text{sen } \varphi),$$

llamada forma trigonométrica del número  $z$ .

El número complejo  $x - iy$  se llama conjugado del número complejo  $z = x + iy$  y se designa por el símbolo  $\bar{z}$ . Se cumple que:

- |  |  |
|--|--|
| a) $z + \bar{z} = 2\Re(z)$ .   | e) $\overline{\bar{z}_1 + \bar{z}_2} = z_1 + z_2$ .                          |
| b) $z - \bar{z} = 2i\Im(z)$ .  | f) $\overline{\bar{z}_1 \bar{z}_2} = z_1 z_2$ .                              |
| c) $\overline{\bar{z}} = z$ .  | g) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ . |
| d) $ \bar{z}  =  z $ .   | h) $z\bar{z} =  z ^2$ .  |
| i) $ z_1 z_2  =  z_1   z_2 $ .   |  |
| j) $\left \frac{z_1}{z_2}\right  = \frac{ z_1 }{ z_2 }$ .  |  |
| k) $\text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2 = \text{Arg } (z_1 z_2)$ .   |  |
| l) $\text{Arg } z_1 - \text{Arg } z_2 = \text{Arg } \left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ .  |  |
| m) La magnitud $ z_1 - z_2 $ es igual a la distancia en el plano complejo entre los puntos $M_1$ y $M_2$ , que representan los números complejos $z_1$ y $z_2$ . |  |
| n) $ z_1 + z_2  \leq  z_1  +  z_2 $ .  |  |

$$o) |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||.$$

Sea  $\varphi$  un número real arbitrario. Mediante el símbolo  $e^{i\varphi}$  se denota un número complejo  $\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi$ . Con ayuda de esta designación todo número complejo  $z = |z|(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$  puede escribirse en la forma exponencial

$$z = |z| e^{i\varphi}.$$

Se cumplen las siguientes propiedades:

- a)  $\forall n \in \mathbb{Z} (e^{i2\pi n} = 1)$ .  
 b)  $\overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}$ .  
 c)  $e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$ .  
 d)  $\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$ .  
 e)  $\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$ ,  $\operatorname{sen} \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$ .  
 f) Si  $z = r e^{i\varphi}$ , entonces  $z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n (\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi)$ .

Sea  $a = r e^{i\varphi}$  un número complejo fijo. Entonces, la ecuación  $z^n = a$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , tiene exactamente  $n$  diferentes soluciones  $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ , con la particularidad de que dichas soluciones se determinan por la fórmula

$$z_k = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), k = 0, 1, \dots, n-1$$

(aquí  $\sqrt[n]{r}$  es un número positivo real). Los números  $z_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , se denominan raíces de  $n$ -ésimo grado del número complejo  $a$  y se designan por el símbolo  $\sqrt[n]{a}$ .

### 2.2.19. Concepto de función de variable compleja y valor complejo

Según (Bolgov & otros, 1983), el conjunto de puntos  $E$  del plano complejo extendido se llama conexo, si cualesquiera dos puntos suyos pueden unirse por una curva continua, todos los puntos de la cual pertenecen al conjunto dado. El conjunto abierto conexo de los puntos del plano complejo se llama región y se designa mediante  $D$ ,  $G$ , etc. La región  $D$  se llama simplemente conexa, si su frontera es un conjunto conexo; en el caso contrario la región  $D$  lleva el nombre de región múltiplemente conexa. Por ejemplo, el círculo  $|z - z_0| < R$  es una región simplemente conexa y el anillo  $0 \leq r < |z - z_0| < R$ , una región múltiplemente (doblemente) conexa.

Si a todo número complejo  $z = x + iy$  perteneciente a la región  $D$ , según cierta regla, está puesto en correspondencia uno o varios números complejos  $w = u + iv$ , entonces se dice que en el conjunto  $D$  está definida la función y se escribe simbólicamente:

$$w = f(z) = u + iv = u(x, y) + iv(x, y),$$

donde

$$u(x, y) = \Re(f(z)), \quad v(x, y) = \Im(f(z)).$$

Uno de los procedimientos más empleados para definir la función, la definición con ayuda de fórmulas, puede llevar tanto a las funciones uniformes como a las multiformes. Así pues, la función  $w = z^2$  es uniforme en el plano complejo extendido, y que a todo  $z$  le corresponde un

valor de  $w = z^2$  y la función  $w = \sqrt{z}$ , en virtud de la definición de la raíz del número complejo, es biforme en todos puntos, excepto los puntos  $z = 0$  y  $z = \infty$  en los cuales es uniforme; tales puntos suelen llamarse puntos de ramificación.

La función uniforme  $f(z)$  definida geoméricamente en  $D$  puede considerarse como aplicación de la región  $D$  del plano ( $z$ ) sobre cierto conjunto  $G$  del plano ( $w$ ), que es colección de los valores de  $f(z)$  correspondientes a todo  $z \in D$ .

La función  $w = f(z)$  se llama unifoliada en la región  $D$ , si a los distintos cualesquiera valores arbitrarios  $z_1 \neq z_2$  tomados de la región  $D$ , les corresponden distintos valores de la función  $f(z_1) \neq f(z_2)$ .

### 2.2.20. Ceros de una función de una variable compleja y valor complejo

Sea  $F$  una función continua, de dominio  $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$  y valor complejo, los ceros de  $F$  son los elementos del conjunto  $\Theta_F = \{z \in \mathcal{D} | F(z) = 0\}$ .

Dado que, si  $z = x + iy$  y entonces

$$F(z) = F(x + iy) = \phi(x, y) + i \eta(x, y) = 0.$$

Se puede afirmar que los ceros de tal función son puntos del plano ( $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ ) que satisfacen

$$F(z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \phi(x, y) = 0, \\ \eta(x, y) = 0. \end{cases}$$

Por ejemplo, la Figura 4 muestra los ceros de la función

$$F(z) = z \operatorname{sen} z - i \text{ en } \mathcal{D}: -2 \leq \Re(z) \leq 2 \wedge -2 \leq \Im(z) \leq 2.$$

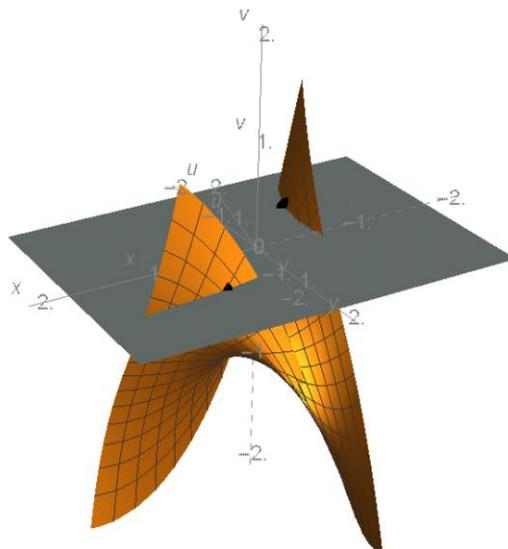


Figura 4. Ceros de la función  $F(z) = z \operatorname{sen} z - i$  en  $\mathcal{D}: -2 \leq \Re(z) \leq 2 \wedge -2 \leq \Im(z) \leq 2$ .

## **2.3. GLOSARIO DE TÉRMINOS BÁSICOS**

### **2.3.1. Aproximación**

Según la RAE, aproximación es el resultado inexacto, pero próximo al exacto, que se obtiene en una medición o en un cálculo cuando no se puede precisar absolutamente.

### **2.3.2. Error absoluto**

La diferencia entre el valor aproximado y el valor exacto de un número, se llama error absoluto de dicho valor aproximado (Burden & Faires, 2002).

### **2.3.3. Error relativo**

Se llama error relativo de un número aproximado, la razón de su error absoluto al número exacto (Burden & Faires, 2002).

### **2.3.4. Algoritmo**

Un algoritmo es un procedimiento que describe, sin ambigüedades, una serie finita de pasos a realizar en un orden específico. El objeto del algoritmo es poner en práctica un procedimiento para resolver un problema o aproximarse a una solución del problema (Burden & Faires, 2002).

## **2.4. HIPÓTESIS**

Es posible aproximar los ceros de funciones continuas de dos variables complejas y valor complejo mediante el método de bisección.

## **III. MARCO METODOLÓGICO**

### **3.1. ENFOQUE**

Este trabajo tiene un enfoque cuantitativo ya que tiene como objetivo encontrar la respuesta a una consulta por medio de evidencia numérica.

### **3.2. NIVEL**

Este trabajo tiene un nivel descriptivo ya que responde a la pregunta: ¿Cómo aproximar los ceros de funciones continuas de dos variables complejas y valor complejo mediante el método de bisección?

### 3.3. TIPO

Este trabajo es de tipo básico ya que tiene como finalidad la obtención y recopilación de información para ir construyendo una base de conocimiento que se va agregando a la información previa existente.

### 3.4. MÉTODOS Y PROCEDIMIENTOS

Se expresará la función

$$F: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$$
$$(z, w) \rightarrow F(z, w)$$

en la forma

$$F: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$$
$$(x + iy, u + iv) \rightarrow F(x + iy, u + iv).$$

Luego, se expandirá la función para expresarla en la forma

$$F(x + iy, u + iv) = \phi(x, y, u, v) + i \eta(x, y, u, v).$$

Después, se generará una partición equiespaciada del dominio y con base en los teoremas de conservación de signo, de Bolzano y de valor intermedio aproximar las soluciones del sistema de dos ecuaciones con cuatro variables reales

$$\begin{cases} \phi(x, y, u, v) = 0, \\ \eta(x, y, u, v) = 0. \end{cases}$$

Estas soluciones constituirán las aproximaciones de los ceros de la función  $F$ . Los resultados obtenidos permitirán enunciar un teorema que defina el método de bisección para funciones continuas de dos variables complejas y valor complejo.

Los ceros de la función  $F$  son puntos que descansan sobre la superficie compleja

$$M: F(z, w) = 0.$$

Estos ceros podrán ser visualizados usando un modelo para representar objetos de  $\mathbb{R}^4$  (Velezmoro, Ipanaqué, & Mechato, 2019).

Finalmente, se elaborarán algoritmos que permitirán codificar programas para automatizar todo el proceso. En particular se usará el software de cálculo simbólico Wolfram Mathematica v.11.2, instalado en una computadora portátil de las siguientes características:

- Nombre del dispositivo: DESKTOP-0DHVL9C,
- Procesador: Intel(R) Core(TM) i7-6500U CPU @ 2.50GHz 2.60 GHZ
- RAM instalado: 8.00 GB (7.30 GB usable)

### 3.5. ASPECTOS ÉTICOS

Se utilizará una licencia del Mathematica v.11.2 financiada por la Universidad Nacional de Piura para realizar investigaciones.

Tres artículos consultados no son de acceso libre (Dubbelday, 1983; Vrahatis, y otros, 1997; Herbert, 1978), sin embargo, se utilizó como alternativa el repositorio Sci-hub (Wikipedia, 2018) para tener acceso al contenido de dichos artículos.

Este trabajo de investigación es original no siendo copia parcial ni total de un trabajo de investigación desarrollado, y/o realizado en el Perú o en el Extranjero.

## IV. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

A continuación, se enunciarán algunas definiciones y comentarios que permitirán inducir, de manera natural, el cumplimiento de los objetivos planteados.

### Los teoremas de conservación de signo, de Bolzano y de valor intermedio se cumplen para funciones continuas de dos variables complejas y valor complejo.

#### 4.1. CEROS DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES COMPLEJAS Y VALOR COMPLEJO

Sea  $F$  una función continua, de dominio  $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^2$  y valor complejo, los ceros de  $F$  son los elementos del conjunto  $\Theta_F = \{(z, w) \in \mathcal{D} | F(z, w) = 0\}$ .

Los ceros de tal función son puntos del hiperplano ( $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ ) que descansan sobre la superficie

$$F(z, w) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \phi(x, y, u, v) = 0, \\ \eta(x, y, u, v) = 0. \end{cases}$$

Por ejemplo, la Figura 5 muestra los ceros de la función

$$F(z, w) = z^2 + w^2 - 1$$

$$\text{en } -1 \leq \Re(z) \leq 1 \wedge -1 \leq \Im(z) \leq 1 \wedge -1 \leq \Re(w) \leq 1 \wedge -1 \leq \Im(w) \leq 1.$$

#### 4.2. TEOREMAS PARA FUNCIONES CONTINUAS DE VARIAS VARIABLES REALES Y VALOR REAL

Dadas las funciones  $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $\psi(t) = (1-t)\bar{a} + t\bar{b}$  y  $f: [\bar{a}, \bar{b}] \subset D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definiremos la función compuesta  $\tilde{f}: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  tal que

$$\tilde{f}(t) = (f \circ \psi)(t) \text{ (Figura 6).}$$

De este modo, los ceros de  $\tilde{f}$  en  $[0,1]$  constituyen los ceros de  $f$  en  $[\bar{a}, \bar{b}]$ . Así pues, los teoremas de conservación de signo, de Bolzano y de valor intermedio se cumplen de manera natural para funciones continuas de varias variables reales y valor real sobre segmentos contenidos en el dominio de estas.

En particular, si se genera un mallado rectangular equiespaciado en el dominio,  $D$  de  $f$ , se obtendrán segmentos paralelos a los ejes coordenados, sobre los cuales resultará sencillo aproximar los ceros de  $f$ .

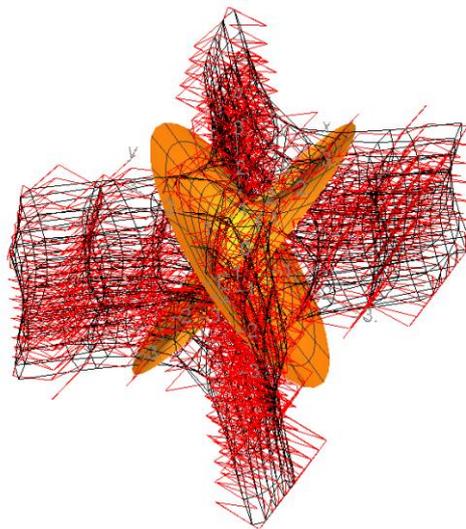


Figura 5. Ceros de la función  $F(z, w) = z^2 + w^2 - 1$  en  $-1 \leq \Re(z) \leq 1 \wedge -1 \leq \Im(z) \leq 1 \wedge -1 \leq \Re(w) \leq 1 \wedge -1 \leq \Im(w) \leq 1$ .

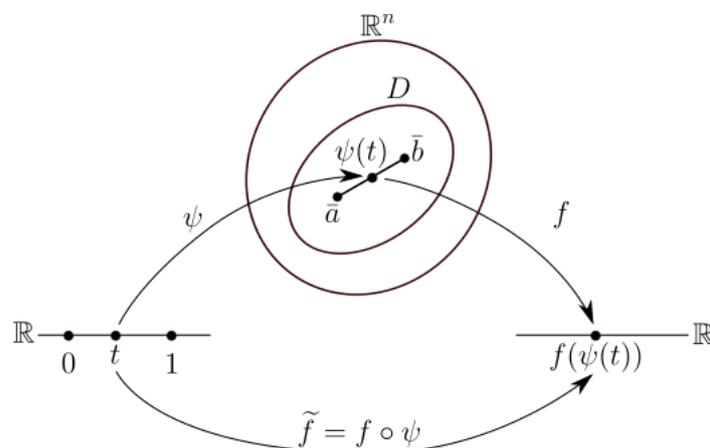


Figura 6. Esquema de la función compuesta  $\tilde{f}$ .

### 4.3. MÉTODO DE BISECCIÓN PARA FUNCIONES CONTINUAS DE VARIAS VARIABLES REALES Y VALOR REAL

Sea  $\tilde{f}$  una función continua en  $[0,1]$  de valor real, con  $\tilde{f}(0) \cdot \tilde{f}(1) < 0$ . La sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , tal que

$$x_n(a, b) = \begin{cases} \frac{a+b}{2} & n = 1 \vee \tilde{f}(x_1(a, b)) = 0, \\ \begin{cases} x_{n-1}(x_1(a, b), b) & f(0) \cdot f(x_1(0,1)) > 0, \\ x_{n-1}(a, x_1(a, b)) & \text{otro caso.} \end{cases} & n > 1. \end{cases}$$

converge a  $p$ , con  $\tilde{f}(p) = 0$ , tan rápido como  $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a cero. Donde  $\tilde{f}(t)$  se define según la sección previa.

### 4.4. EJEMPLOS EN SEGMENTOS ARBITRARIOS

Dada la función  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$  y el segmento  $[(0.5, 0.5), (1, 0)]$  se construye la función  $\tilde{f}(t) = f((1-t)(0.5, 0.5) + t(1, 0))$  y se aproxima el respectivo cero (Figura 7).

```

Mathematica
Aquí se define la función f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy

f[{x_, y_}] := x^3 + y^3 - 3xy

```

```

Mathematica
Aquí se definen las funciones ψ(t) = (1 - t)(0.5, 0.5) + t(1, 0) y f̃(t) = f(ψ(t)).

ā = {0.5, 0.5}; b̄ = {1, 0};
ψ[t_] := (1 - t)ā + t b̄
f̃[t_] := f[ψ[t]]
f̃[t]//Simplify

-0.5 + 1.5t^2

```

Mathematica

Aquí se aplica el método de bisección a la función  $\tilde{f}$  en  $[0,1]$ , con una tolerancia 0.001, para aproximar el respectivo cero de  $\tilde{f}$ . Luego se calcula el punto asociado al cero aproximado. Finalmente, se verifica que el punto calculado constituye una aproximación al cero de  $f$ .

```
p = Bisection[ $\tilde{f}[t]$ , t, 0, 1, 0.001]
                                0.576171875
P =  $\psi$ [p]
                                {0.7880859375, 0.2119140625}
f[P]
                                -0.0020389556884765625
```

Dada la función  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$  y el segmento  $[(0.5, -1, 0.25), (1, -0.5, 0)]$  se construye la función  $\tilde{f}(t) = f((1-t)(0.5, -1, 0.25) + t(1, -0.5, 0))$  y se aproxima el respectivo cero.

Mathematica

Aquí se define la función  $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

```
f[{x_, y_, z_}] := x3 + y3 + z3 - 3xyz
```

Mathematica

Aquí se definen las funciones  $\psi(t) = (1-t)(0.5, -1, 0.25) + t(1, -0.5, 0)$  y  $\tilde{f}(t) = f(\psi(t))$ .

```
 $\bar{a} = \{0.5, -1, 0.25\}$ ;  $\bar{b} = \{1, -0.5, 0\}$ ;
```

```
 $\psi[t\_]:= (1-t)\bar{a} + t\bar{b}$ ;
```

```
 $\tilde{f}[t\_]:= f[\psi[t]]$ 
```

```
 $\tilde{f}[t]$ //Simplify
```

```
-0.484375 + 1.640625t - 0.703125t2 + 0.421875t3
```

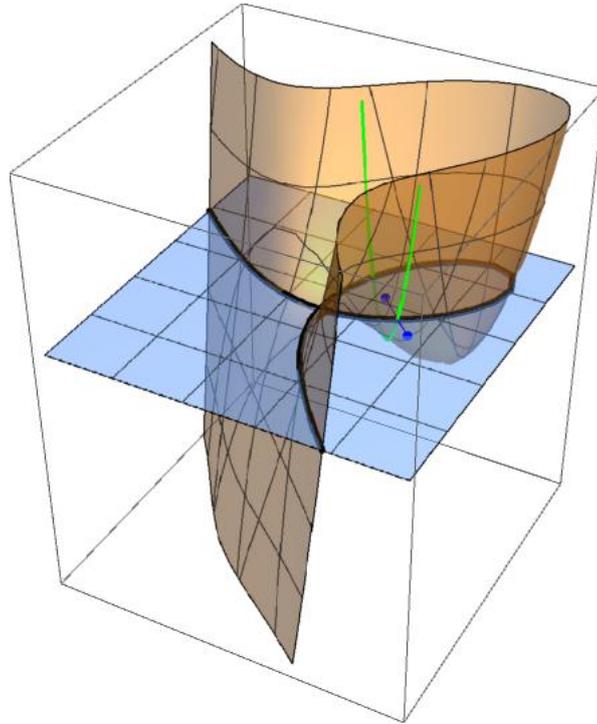


Figura 7. Cero aproximado de la función  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$  en el segmento  $[(0.5,0.5), (1,0)]$ .

*Mathematica*

Aquí se aplica el método de bisección a la función  $\tilde{f}$  en el intervalo  $[0,1]$ , con una tolerancia 0.001, para aproximar el respectivo cero de  $\tilde{f}$ . Luego se calcula el punto asociado al cero aproximado. Finalmente, se verifica que el punto calculado constituye una aproximación al cero de  $f$ .

```
p = Bisection[ $\tilde{f}[t]$ , t, 0, 1, 0.001]
```

```
0.333984375
```

```
P =  $\psi$ [p]
```

```
{0.6669921875, -0.8330078125, 0.16650390625}
```

```
f[P]
```

```
0.000854373094625771
```

Dada la función  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x, y, z, w) = x^3 + y^3 + z^3 + w^3 - 3xyzw$  y el segmento  $[(0.5,0.5,0.5,0.5), (1,0,0.5,0.5)]$  procederemos a realizar la construcción de la función  $\tilde{f}(t) = f((1-t)(0.5,0.5,0.5,0.5) + t(1,0,0.5,0.5))$  y a aproximar el respectivo cero.

Mathematica

Aquí se define la función  $f(x, y, z, w) = x^3 + y^3 + z^3 + w^3 - 3xyzw$

$$f[\{x_, y_, z_, w_}] := x^3 + y^3 + z^3 + w^3 - 3xyzw$$

Mathematica

Aquí se definen las funciones  $\psi(t) = (1-t)(0.5, 0.5, -1, 0.5) + t(1, 0, 0.5, -0.5)$  y  $\tilde{f}(t) = f(\psi(t))$ .

$$\bar{a} = \{0.5, 0.5, -1, 0.5\}; \bar{b} = \{1, 0, 0.5, -0.5\};$$

$$\psi[t_] := (1 - t)\bar{a} + t\bar{b};$$

$$\tilde{f}[t_] := f[\psi[t]]$$

$$\tilde{f}[t] // Simplify$$

$$-0.25 + 2.4375t - 3.75t^2 + 3.6875t^3 - 1.125t^4$$

Mathematica

Aquí se aplica el método de bisección a la función  $\tilde{f}$  en  $[0, 1]$ , con una tolerancia 0.001, para aproximar el respectivo cero de  $\tilde{f}$ . Luego se calcula el punto asociado al cero aproximado. Finalmente, se verifica que el punto calculado constituye una aproximación al cero de  $f$ .

$$p = Bisection[\tilde{f}[t], t, 0, 1, 0.001]$$

$$0.123046875$$

$$P = \psi[p]$$

$$\{0.5615234375, 0.4384765625, -0.8154296875, 0.376953125\}$$

$$f[P]$$

$$-0.00023833757040847559$$

## 4.5. EJEMPLOS EN SEGMENTOS SOBRE PARTICIONES EQUIESPACIADAS

### 4.5.1. Particiones en un espacio 1D

Mathematica

Obtención de ceros en segmentos sobre particiones equiespaciadas 1D.

$$f[\{x_}] := x^3 - 3x$$

$$x1 = -2; xn = 2; n = 20;$$

```

XP = Flatten[Table[
   $\bar{a} = \{x_1 + i(x_n - x_1)/(n - 1)\};$ 
   $\bar{b} = \{x_1 + (i + 1)(x_n - x_1)/(n - 1)\};$ 
   $\psi[t\_]:= (1 - t)\bar{a} + t\bar{b};$ 
   $\tilde{f}[t\_]:= f[\psi[t]];$ 
  If[ $\tilde{f}[0]\tilde{f}[1] < 0,$ 
     $p = \text{Bisection}[\tilde{f}[t], t, 0, 1, 0.001];$ 
     $P = \psi[p];$ 
    Point[P],
    Nothing], {i, 0, n - 2}]];
Show[Plot[{0, f[{x]}], {x, -2, 2}],
  Graphics[{AbsolutePointSize[5], XP /. {x_} -> {x, 0}}]]

```

Ver Figura 8

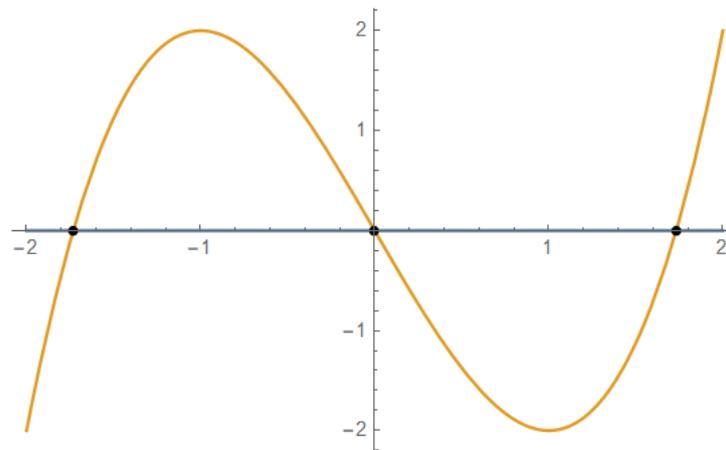


Figura 8. Gráfica de la función  $f(x) = x^3 - 3x$  y sus ceros en  $[-2, 2]$ .

#### 4.5.2. Particiones en un espacio 2D

*Mathematica*

Obtención de ceros en segmentos sobre particiones equiespaciadas 2D.

$$f[\{x\_ , y\_ \}] := x^3 + y^3 - 3xy$$

$$x_1 = -2; x_n = 2; y_1 = -2; y_n = 2; n = 20; m = 20;$$

```
XP = Flatten[Table[
```

$$\bar{a} = \{x_1 + i(x_n - x_1)/(n - 1), y_1 + j(y_n - y_1)/(m - 1)\};$$

```

 $\bar{b} = \{x1 + (i + 1) (xn - x1)/(n - 1), y1 + j (yn - y1)/(m - 1)\};$ 
 $\psi[t\_]: = (1 - t)\bar{a} + t\bar{b};$ 
 $\tilde{f}[t\_]: = f[\psi[t]];$ 
If[ $\tilde{f}[0]\tilde{f}[1] < 0$ ,  $p = \text{Bisection}[\tilde{f}[t], t, 0, 1, 0.001]$ ;  $P = \psi[p]$ ;
  Point[P],
  Nothing, {i, 0, n - 2}, {j, 0, m - 1}]];
YP = Flatten[Table[
   $\bar{a} = \{x1 + i (xn - x1)/(n - 1), y1 + j (yn - y1)/(m - 1)\};$ 
   $\bar{b} = \{x1 + i (xn - x1)/(n - 1), y1 + (j + 1) (yn - y1)/(m - 1)\};$ 
   $\psi[t\_]: = (1 - t)\bar{a} + t\bar{b};$ 
   $\tilde{f}[t\_]: = f[\psi[t]];$ 
If[ $\tilde{f}[0]\tilde{f}[1] < 0$ ,  $p = \text{Bisection}[\tilde{f}[t], t, 0, 1, 0.001]$ ;  $P = \psi[p]$ ;
  Point[P],
  Nothing, {i, 0, n - 1}, {j, 0, m - 2}]];
Show[Plot3D[{f[{x, y}], 0}, {x, -2, 2}, {y, -2, 2},
  PlotRange -> All, BoxRatios -> 1],
  Graphics3D[{AbsolutePointSize[5], {XP/. {x_, y_} -> {x, y, 0}, YP/. {x_, y_} -> {x, y, 0}}]]]

```

Ver Figura 9

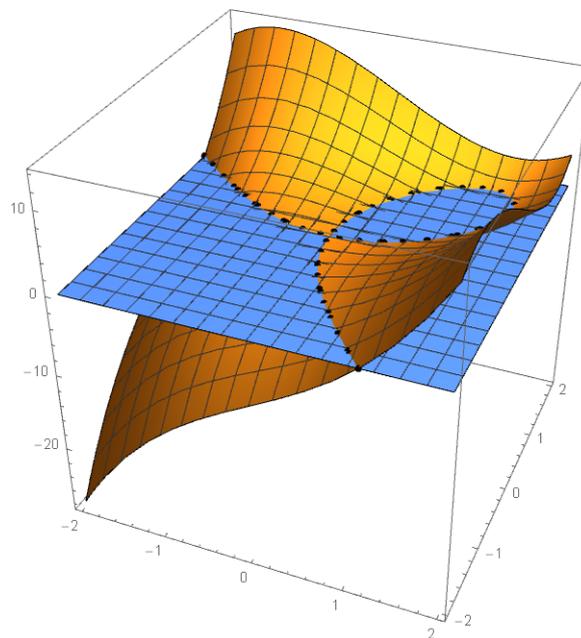


Figura 9. Gráfica de la función  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$  y sus ceros en  $[-2, 2] \times [-2, 2]$ .

### 4.5.3. Particiones en un espacio 3D

*Mathematica*

Obtención de ceros en segmentos sobre particiones equiespaciadas 3D.

$$f[\{x_, y_, z_.\}] := (\sqrt{x^2 + y^2} - 4)^2 + z^2 - 4$$

$$x1 = -6; xn = 6; y1 = -6; yn = 6; z1 = -2; zn = 2;$$

$$n = 15; m = 15; l = 15;$$

$$XP = Flatten[Table[$$

$$\bar{a} =$$

$$\{x1 + i(xn - x1)/(n - 1), y1 + j(yn - y1)/(m - 1), z1 + k(zn - z1)/(l - 1)\};$$

$$\bar{b} =$$

$$\{x1 + (i + 1)(xn - x1)/(n - 1), y1 + j(yn - y1)/(m - 1), z1 + k(zn - z1)/(l - 1)\};$$

$$\psi[t_.] := (1 - t)\bar{a} + t\bar{b};$$

$$\tilde{f}[t_.] := f[\psi[t]];$$

$$\text{If}[\tilde{f}[0]\tilde{f}[1] < 0,$$

$$p = \text{Bisection}[\tilde{f}[t], t, 0, 1, 0.001];$$

$$P = \psi[p];$$

$$\text{Point}[P],$$

$$\text{Nothing}, \{i, 0, n - 2\}, \{j, 0, m - 1\}, \{k, 0, l - 1\}\};$$

$$YP = Flatten[Table[$$

$$\bar{a} =$$

$$\{x1 + i(xn - x1)/(n - 1), y1 + j(yn - y1)/(m - 1), z1 + k(zn - z1)/(l - 1)\};$$

$$\bar{b} =$$

$$\{x1 + i(xn - x1)/(n - 1), y1 + (j + 1)(yn - y1)/(m - 1), z1 + k(zn - z1)/(l - 1)\};$$

$$\psi[t_.] := (1 - t)\bar{a} + t\bar{b};$$

$$\tilde{f}[t_.] := f[\psi[t]];$$

```

If[ $\tilde{f}[0]\tilde{f}[1] < 0$ ,
  p = Bisection[ $\tilde{f}[t], t, 0, 1, 0.001$ ];
  P =  $\psi[p]$ ;
  Point[P],
  Nothing, {i, 0, n - 1}, {j, 0, m - 2}, {k, 0, l - 1}]];
ZP = Flatten[Table[

 $\bar{a} =$ 
{x1 + i (xn - x1)/(n - 1), y1 + j (yn - y1)/(m - 1), z1 +
  k (zn - z1)/(l - 1)};
 $\bar{b} =$  {x1 + i (xn - x1)/(n - 1), y1 + j (yn - y1)/(m - 1), z1 +
  (k + 1) (zn - z1)/(l - 1)};
 $\psi[t_]:= (1 - t)\bar{a} + t\bar{b}$ ;
 $\tilde{f}[t_]:= f[\psi[t]]$ ;
If[ $\tilde{f}[0]\tilde{f}[1] < 0$ ,
  p = Bisection[ $\tilde{f}[t], t, 0, 1, 0.001$ ];
  P =  $\psi[p]$ ;
  Point[P],
  Nothing, {i, 0, n - 1}, {j, 0, m - 1}, {k, 0, l - 2}]];
Graphics[{AbsolutePointSize[5], XP /. {x_} := {x, 0}}]

```

Ver Figura 10

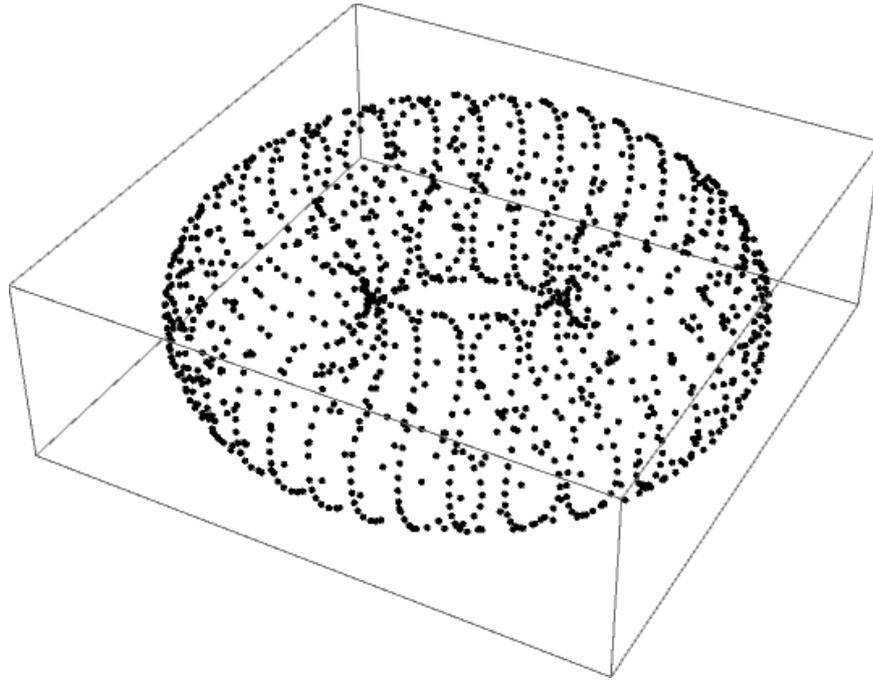


Figura 10. Ceros de la función  $f(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2} - 4)^2 + z^2 - 4$  en  $[-6,6] \times [-6,6] \times [-2,2]$ .

#### 4.5.4. Particiones en un espacio 4D

*Mathematica*

Obtención de ceros en segmentos sobre particiones equiespaciadas 4D.

$$f[\{x_, y_, z_, w_\}] := x^2 + y^2 + z^2 - w^2 - 1$$

$$x1 = -2; xn = 2; y1 = -2; yn = 2; z1 = -2; zn = 2; w1 = -2; wn = 2;$$

$$n = 10; m = 10; l = 10; h = 10;$$

$$XP = Flatten[Table[$$

$$\bar{a} =$$

$$\{x1 + i (xn - x1)/(n - 1), y1 + j (yn - y1)/(m - 1), z1 + \\ k (zn - z1)/(l - 1), w1 + q (wn - w1)/(h - 1)\};$$

$$\bar{b} =$$

$$\{x1 + (i + 1) (xn - x1)/(n - 1), y1 + j (yn - y1)/(m - 1), z1 + \\ k (zn - z1)/(l - 1), w1 + q (wn - w1)/(h - 1)\};$$

$$\psi[t_]:= (1 - t)\bar{a} + t\bar{b};$$

$$\tilde{f}[t_]:= f[\psi[t]];$$

```

If[ $\tilde{f}[0]\tilde{f}[1] < 0$ ,
   $p = \text{Bisection}[\tilde{f}[t], t, 0, 1, 0.001]$ ;
   $P = \psi[p]$ ;
  Point[ $P$ ],
  Nothing,  $\{i, 0, n - 2\}, \{j, 0, m - 1\}, \{k, 0, l - 1\}, \{q, 0, h - 1\}$ ]];
YP = Flatten[Table[

```

```

 $\bar{a} =$ 
 $\{x1 + i(xn - x1)/(n - 1), y1 + j(yn - y1)/(m - 1), z1 +$ 
 $k(zn - z1)/(l - 1), w1 + q(wn - w1)/(h - 1)\}$ ;

```

```

 $\bar{b} =$ 
 $\{x1 + i(xn - x1)/(n - 1), y1 + (j + 1)(yn - y1)/(m - 1), z1 +$ 
 $k(zn - z1)/(l - 1), w1 + q(wn - w1)/(h - 1)\}$ ;

```

```

 $\psi[t\_]: = (1 - t)\bar{a} + t\bar{b}$ ;

```

```

 $\tilde{f}[t\_]: = f[\psi[t]]$ ;

```

```

If[ $\tilde{f}[0]\tilde{f}[1] < 0$ ,

```

```

   $p = \text{Bisection}[\tilde{f}[t], t, 0, 1, 0.001]$ ;

```

```

   $P = \psi[p]$ ;

```

```

  Point[ $P$ ],

```

```

  Nothing,  $\{i, 0, n - 1\}, \{j, 0, m - 2\}, \{k, 0, l - 1\}, \{q, 0, h - 1\}$ ]];

```

```

ZP = Flatten[Table[

```

```

 $\bar{a} =$ 
 $\{x1 + i(xn - x1)/(n - 1), y1 + j(yn - y1)/(m - 1), z1 +$ 
 $k(zn - z1)/(l - 1), w1 + q(wn - w1)/(h - 1)\}$ ;

```

```

 $\bar{b} = \{x1 + i(xn - x1)/(n - 1), y1 + j(yn - y1)/(m - 1),$ 
 $z1 + (k + 1)(zn - z1)/(l - 1), w1 + q(wn - w1)/(h - 1)\}$ ;

```

```

 $\psi[t\_]: = (1 - t)\bar{a} + t\bar{b}$ ;

```

```

 $\tilde{f}[t\_]: = f[\psi[t]]$ ;

```

```

If[ $\tilde{f}[0]\tilde{f}[1] < 0$ ,

```

```

   $p = \text{Bisection}[\tilde{f}[t], t, 0, 1, 0.001]$ ;

```

```

   $P = \psi[p]$ ;

```

```

Point[P],
Nothing, {i, 0, n - 1}, {j, 0, m - 1}, {k, 0, l - 2}, {q, 0, h - 1}]];
WP = Flatten[Table[

 $\bar{a} =$ 
{x1 + i (xn - x1)/(n - 1), y1 + j (yn - y1)/(m - 1), z1 +
      k (zn - z1)/(l - 1), w1 + q (wn - w1)/(h - 1)};

 $\bar{b} =$ 
{x1 + i (xn - x1)/(n - 1), y1 + j (yn - y1)/(m - 1), z1 +
      k (zn - z1)/(l - 1), w1 + (q + 1) (wn - w1)/(h - 1)};
 $\psi[t\_]: = (1 - t)\bar{a} + t\bar{b};$ 
 $\tilde{f}[t\_]: = f[\psi[t]];$ 
If[ $\tilde{f}[0]\tilde{f}[1] < 0,$ 
  p = Bisection[f[t], t, 0, 1, 0.001];
  P =  $\psi[p];$ 
  Point[P],
  Nothing, {i, 0, n - 1}, {j, 0, m - 1}, {k, 0, l - 1}, {q, 0, h - 2}]];
Graphics4D[{XP, YP, ZP, WP}, PlotRange -> All]

```

Ver Figura 11



Figura 11. Ceros de la función  $f(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2 - w^2 - 1$  en  $[-2, 2] \times [-2, 2] \times [-2, 2] \times [-2, 2]$ .

#### 4.6. TEOREMAS PARA FUNCIONES CONTINUAS DE DOS VARIABLES COMPLEJAS Y VALOR COMPLEJO

Dada la función  $F$ , continua en  $[(a_1, a_2), (b_1, b_2)] \subset \mathcal{D} \subset \mathbb{C}^2$  y de valor complejo, desde que

$$F(z, w) = F(x + iy, u + iv) = \phi(x, y, u, v) + i \eta(x, y, u, v)$$

definiremos las funciones  $\tilde{\phi}, \tilde{\eta}$  continuas en  $[0,1]$  de valor real de la siguiente manera

$$\tilde{\phi}(t) = \phi \left( (1-t)(\Re(a_1), \Im(a_1), \Re(a_2), \Im(a_2)) + t(\Re(b_1), \Im(b_1), \Re(b_2), \Im(b_2)) \right),$$

$$\tilde{\eta}(s) = \eta \left( (1-s)(\Re(a_1), \Im(a_1), \Re(a_2), \Im(a_2)) + s(\Re(b_1), \Im(b_1), \Re(b_2), \Im(b_2)) \right).$$

De este modo, los ceros de  $\tilde{\phi}(t)$  y  $\tilde{\eta}(s)$  en  $[0,1]$  constituyen los ceros de

$$\phi \left( (1-t)(\Re(a_1), \Im(a_1), \Re(a_2), \Im(a_2)) + t(\Re(b_1), \Im(b_1), \Re(b_2), \Im(b_2)) \right)$$

y

$$\eta \left( (1-s)(\Re(a_1), \Im(a_1), \Re(a_2), \Im(a_2)) + s(\Re(b_1), \Im(b_1), \Re(b_2), \Im(b_2)) \right),$$

respectivamente, en  $[(\Re(a_1), \Im(a_1), \Re(a_2), \Im(a_2)), (\Re(b_1), \Im(b_1), \Re(b_2), \Im(b_2))] \subset \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2$ .

Como ya se vio en el apartado 4.2, los teoremas de conservación de signo, de Bolzano y de valor intermedio se cumplen de manera natural para las funciones continuas,  $\phi$  y  $\eta$ , de cuatro variables reales y valor real sobre segmentos contenidos en el dominio de estas.

#### Teorema del método de bisección para funciones continuas de dos variables complejas y valor complejo.

#### 4.7. MÉTODO DE BISECCIÓN PARA FUNCIONES CONTINUAS DE DOS VARIABLES COMPLEJAS Y VALOR COMPLEJO

Sean  $\tilde{\phi}$  y  $\tilde{\eta}$  dos funciones continuas en  $[0,1]$  de valor real, con  $\tilde{\phi}(0) \cdot \tilde{\phi}(1) < 0$  y  $\tilde{\eta}(0) \cdot \tilde{\eta}(1) < 0$ . Las sucesiones  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , tal que

$$x_n(a, b) = \begin{cases} \frac{a+b}{2} & n = 1 \vee \tilde{\phi}(x_1(a, b)) = 0, \\ \begin{cases} x_{n-1}(x_1(a, b), b) & \tilde{\phi}(a) \cdot \tilde{\phi}(x_1(a, b)) > 0, \\ x_{n-1}(a, x_1(a, b)) & \text{otro caso.} \end{cases} & n > 1. \end{cases}$$

$$y_m(c, d) = \begin{cases} \frac{c+d}{2} & m = 1 \vee \tilde{\eta}(y(c, d)) = 0, \\ \begin{cases} y_{m-1}(y_1(c, d), d) & \tilde{\eta}(c) \cdot \tilde{\eta}(y_1(c, d)) > 0, \\ y_{m-1}(c, y_1(c, d)) & \text{otro caso.} \end{cases} & m > 1. \end{cases}$$

convergen a  $p$  y  $q$ , con  $\tilde{\phi}(p) = 0$  y  $\tilde{\eta}(q) = 0$ , tan rápido como  $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^m\right\}_{m \in \mathbb{N}}$  convergen a cero, respectivamente. Las funciones  $\tilde{\phi}(t)$  y  $\tilde{\eta}(t)$  se definen según la sección previa. Para un  $\epsilon > 0$  bastará elegir aquellos ceros que cumplan

$$|\tilde{\phi}(t) - \tilde{\eta}(s)| < \epsilon$$

para aproximar un cero de  $F$  (vea sección previa).

### Interpretaciones geométricas y la implementación computacional de los resultados.

#### 4.8. EJEMPLOS PARA FUNCIONES CONTINUAS DE DOS VARIABLES COMPLEJAS Y VALOR COMPLEJO

Por ejemplo, dada la función  $F: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $F(z, w) = z^2 + w^2 - 1$ , se aproximarán los ceros de  $F$ . Puesto que

$$\begin{aligned} F(z, w) &= \\ &= F(x + iy, u + iv) = (x + iy)^2 + (u + iv)^2 - 1 \\ &= x^2 - y^2 + i(2xy) + u^2 - v^2 + i(2uv) - 1 \\ &= x^2 - y^2 + u^2 - v^2 - 1 + i(2xy + 2uv) \end{aligned}$$

con  $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ , entonces los ceros de  $F$  serán las soluciones de

$$F(z, w) = z^2 + w^2 - 1 = 0,$$

esto es, las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + u^2 - v^2 - 1 = 0, \\ 2xy + 2uv = 0. \end{cases}$$

A continuación, se usarán los resultados de los apartados 4.6 y 4.7, así como el Mathematica para realizar los cálculos respectivos.

Mathematica

Aquí se definen las funciones  $f(x, y, u, v) = x^2 - y^2 + u^2 - v^2 - 1$  y  $g(x, y, u, v) = 2xy + 2uv$ .

$$f[\{x\_y\_u\_v\_ \}]: = x^2 - y^2 + u^2 - v^2 - 1$$

$$g[\{x\_y\_u\_v\_ \}]: = 2xy + 2uv$$

Mathematica

Aquí se procede a aproximar las soluciones del sistema  $\begin{cases} f(x, y, u, v) = 0, \\ g(x, y, u, v) = 0. \end{cases}$

$x_1 = -2; x_n = 2; y_1 = -2; y_n = 2; u_1 = -2; u_n = 2; v_1 = -2; v_n = 2;$   
 $n = 20; m = 20; l = 20; h = 20;$   
 $\text{tol} = 0.1; \epsilon = 0.5;$   
 $\text{XP} = \text{Flatten}[\text{Table}[$

$\bar{a} =$

$\{x_1 + i(x_n - x_1)/(n - 1), y_1 + j(y_n - y_1)/(m - 1), u_1 +$   
 $k(u_n - u_1)/(l - 1), v_1 + q(v_n - v_1)/(h - 1)\};$

$\bar{b} =$

$\{x_1 + (i + 1)(x_n - x_1)/(n - 1), y_1 + j(y_n - y_1)/(m - 1), u_1 +$   
 $k(u_n - u_1)/(l - 1), v_1 + q(v_n - v_1)/(h - 1)\};$

$\psi[t\_]:= (1 - t)\bar{a} + t\bar{b};$

$\tilde{f}[t\_]:= f[\psi[t]];$

$\tilde{g}[t\_]:= g[\psi[t]];$

$\text{Which}[\text{*inicio*}]$

$\tilde{f}[0] == 0 \& \& \tilde{g}[0] == 0, \text{Point}[\psi[0]],$

$\tilde{f}[1] == 0 \& \& \tilde{g}[1] == 0, \text{Point}[\psi[1]],$

$\tilde{f}[0]\tilde{f}[1] < 0 \& \& \tilde{g}[0]\tilde{g}[1] < 0,$

$p_1 = \text{Bisection}[\tilde{f}[t], t, 0, 1, \text{tol}];$

$p_2 = \text{Bisection}[\tilde{g}[t], t, 0, 1, \text{tol}];$

$\text{If}[\text{Abs}[p_1 - p_2] < \epsilon, P = \psi[p_1]; \text{Point}[P], \text{Nothing}],$

$\text{True}, \text{Nothing}[\text{*fin*}], \{i, 0, n - 2\}, \{j, 0, m - 1\}, \{k, 0, l - 1\}, \{q, 0, h - 1\}\};$

$\text{YP} = \text{Flatten}[\text{Table}[$

$\bar{a} =$

$\{x_1 + i(x_n - x_1)/(n - 1), y_1 + j(y_n - y_1)/(m - 1), u_1 +$   
 $k(u_n - u_1)/(l - 1), v_1 + q(v_n - v_1)/(h - 1)\};$

$\bar{b} =$

$\{x_1 + i(x_n - x_1)/(n - 1), y_1 + (j + 1)(y_n - y_1)/(m - 1), u_1 +$   
 $k(u_n - u_1)/(l - 1), v_1 + q(v_n - v_1)/(h - 1)\};$

$\psi[t\_]:= (1 - t)\bar{a} + t\bar{b};$

```

 $\tilde{f}[t\_]:=f[\psi[t]];$ 
 $\tilde{g}[t\_]:=g[\psi[t]];$ 
Which[*inicio*]
 $\tilde{f}[0]==0\&\&\tilde{g}[0]==0, \text{Point}[\psi[0]],$ 
 $\tilde{f}[1]==0\&\&\tilde{g}[1]==0, \text{Point}[\psi[1]],$ 
 $\tilde{f}[0]\tilde{f}[1]<0\&\&\tilde{g}[0]\tilde{g}[1]<0,$ 
p1 = Bisection[ $\tilde{f}[t]$ , t, 0, 1, tol];
p2 = Bisection[ $\tilde{g}[t]$ , t, 0, 1, tol];
If[Abs[p1 - p2] <  $\epsilon$ , P =  $\psi[p1]$ ; Point[P], Nothing],
True, Nothing[*fin*]], {i, 0, n - 1}, {j, 0, m - 2}, {k, 0, l - 1}, {q, 0, h - 1}];
UP = Flatten[Table[

```

```

 $\bar{a} =$ 
{x1 + i (xn - x1)/(n - 1), y1 + j (yn - y1)/(m - 1), u1 +
k (un - u1)/(l - 1), v1 + q (vn - v1)/(h - 1)};
 $\bar{b} =$  {x1 + i (xn - x1)/(n - 1), y1 + j (yn - y1)/(m - 1), u1 +
(k + 1) (un - u1)/(l - 1), v1 + q (vn - v1)/(h - 1)}

```

```

 $\psi[t\_]:= (1 - t)\bar{a} + t\bar{b};$ 
 $\tilde{f}[t\_]:=f[\psi[t]];$ 
 $\tilde{g}[t\_]:=g[\psi[t]];$ 
Which[*inicio*]
 $\tilde{f}[0]==0\&\&\tilde{g}[0]==0, \text{Point}[\psi[0]],$ 
 $\tilde{f}[1]==0\&\&\tilde{g}[1]==0, \text{Point}[\psi[1]],$ 
 $\tilde{f}[0]\tilde{f}[1]<0\&\&\tilde{g}[0]\tilde{g}[1]<0,$ 
p1 = Bisection[ $\tilde{f}[t]$ , t, 0, 1, tol];
p2 = Bisection[ $\tilde{g}[t]$ , t, 0, 1, tol];
If[Abs[p1 - p2] <  $\epsilon$ , P =  $\psi[p1]$ ; Point[P], Nothing],
True, Nothing[*fin*]], {i, 0, n - 1}, {j, 0, m - 1}, {k, 0, l - 2}, {q, 0, h - 1}];
VP = Flatten[Table[

```

```

 $\bar{a} =$ 
{x1 + i (xn - x1)/(n - 1), y1 + j (yn - y1)/(m - 1), u1 +
k (un - u1)/(l - 1), v1 + q (vn - v1)/(h - 1)};

```

```

 $\bar{b} =$ 
{x1 + i (xn - x1)/(n - 1), y1 + j (yn - y1)/(m - 1), u1 +
  k (un - u1)/(l - 1), v1 + (q + 1) (vn - v1)/(h - 1)};
 $\psi[t_]:= (1 - t)\bar{a} + t\bar{b};$ 
 $\tilde{f}[t_]:= f[\psi[t]];$ 
 $\tilde{g}[t_]:= g[\psi[t]];$ 
Which[(*inicio*)
   $\tilde{f}[0] == 0 \&\& \tilde{g}[0] == 0, \text{Point}[\psi[0]],$ 
   $\tilde{f}[1] == 0 \&\& \tilde{g}[1] == 0, \text{Point}[\psi[1]],$ 
   $\tilde{f}[0]\tilde{f}[1] < 0 \&\& \tilde{g}[0]\tilde{g}[1] < 0,$ 
  p1 = Bisection[ $\tilde{f}[t], t, 0, 1, \text{tol}$ ];
  p2 = Bisection[ $\tilde{g}[t], t, 0, 1, \text{tol}$ ];
  If[Abs[p1 - p2] <  $\epsilon, P = \psi[p1]; \text{Point}[P], \text{Nothing}$ ],
  True, Nothing(*fin*)], {i, 0, n - 1}, {j, 0, m - 1}, {k, 0, l - 1}, {q, 0, h - 2}];
ceros = Graphics4D[{XP, YP, UP, VP}, PlotRange -> All]

```

Ver Figura 12

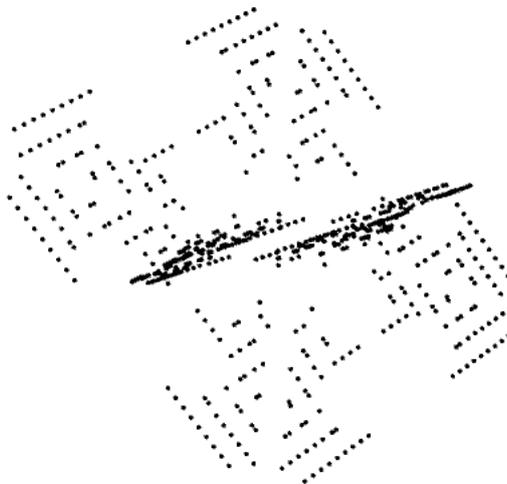


Figura 12. Ceros de la función  $F(z, w) = z^2 + w^2 - 1$  en  $\Re(z) \in [-2, 2], \Im(z) \in [-2, 2]$  y  $\Re(w) \in [-2, 2], \Im(w) \in [-2, 2]$ .

A continuación, se genera la gráfica de los ceros aproximados de  $F(z, w) = z^2 + w^2 - 1$  junto con la gráfica de  $z^2 + w^2 = 1$ .

```
Show[
  ComplexPlot[{-Sqrt[1 - z^2], Sqrt[1 - z^2]}, {z, -2 - 2I, 2 + 2I},
    Axes -> True, AxesLength -> {{-3,3}, {-3,3}, {-3,3}, {-3,3}}, Mesh -> False],
  Ceros
]
```

Ver Figura 13

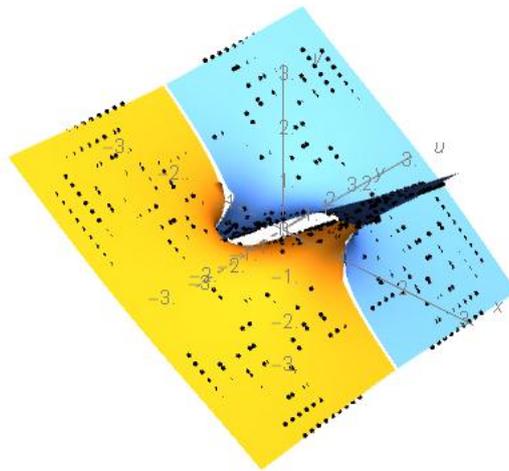


Figura 13. Gráfica de los ceros aproximados de  $F(z, w) = z^2 + w^2 - 1$  junto con la gráfica de  $z^2 + w^2 = 1$ .

A modo de otro ejemplo considere la función  $F: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $F(z, w) = z^2 - w^2 - 1$ , se aproximarán los ceros de  $F$ . Puesto que

$$\begin{aligned} F(z, w) &= \\ &= F(x + iy, u + iv) = (x + iy)^2 - (u + iv)^2 - 1 \\ &= x^2 - y^2 + i(2xy) - u^2 + v^2 - i(2uv) - 1 \\ &= x^2 - y^2 - u^2 + v^2 - 1 + i(2xy - 2uv) \end{aligned}$$

con  $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ , entonces los ceros de  $F$  serán las soluciones de

$$F(z, w) = z^2 - w^2 - 1 = 0,$$

esto es, las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - u^2 + v^2 - 1 = 0, \\ 2xy - 2uv = 0. \end{cases}$$

A continuación, se usarán los resultados de los apartados 4.6 y 4.7, así como el Mathematica para realizar los cálculos respectivos.

```

Mathematica
Aquí se definen las funciones  $f(x, y, u, v) = x^2 - y^2 - u^2 + v^2 - 1$  y  $g(x, y, u, v) = 2xy - 2uv$ .

f[{x_, y_, u_, v_}] := x^2 - y^2 - u^2 + v^2 - 1
g[{x_, y_, u_, v_}] := 2xy - 2uv

```

```

Mathematica
Aquí se procede a aproximar las soluciones del sistema  $\begin{cases} f(x, y, u, v) = 0, \\ g(x, y, u, v) = 0. \end{cases}$ 

x1 = -2; xn = 2; y1 = -2; yn = 2; u1 = -2; un = 2; v1 = -2; vn = 2;
n = 20; m = 20; l = 20; h = 20;
tol = 0.1; ε = 0.5;
XP = Flatten[Table[

ā =
{x1 + i (xn - x1)/(n - 1), y1 + j (yn - y1)/(m - 1), u1 +
k (un - u1)/(l - 1), v1 + q (vn - v1)/(h - 1)};

b̄ =
{x1 + (i + 1) (xn - x1)/(n - 1), y1 + j (yn - y1)/(m - 1), u1 +
k (un - u1)/(l - 1), v1 + q (vn - v1)/(h - 1)};

ψ[t_]:= (1 - t)ā + t b̄;
f̃[t_]:= f[ψ[t]];
g̃[t_]:= g[ψ[t]];
Which[*inicio*
f̃[0] == 0 && g̃[0] == 0, Point[ψ[0]],
f̃[1] == 0 && g̃[1] == 0, Point[ψ[1]],
f̃[0] f̃[1] < 0 && g̃[0] g̃[1] < 0,
p1 = Bisection[f̃[t], t, 0, 1, tol];
p2 = Bisection[g̃[t], t, 0, 1, tol];

```

```

If[Abs[p1 - p2] < ε, P = ψ[p1]; Point[P], Nothing],
True, Nothing(*fin*)], {i, 0, n - 2}, {j, 0, m - 1}, {k, 0, l - 1}, {q, 0, h - 1}]];
YP = Flatten[Table[

```

```

ā =
{x1 + i (xn - x1)/(n - 1), y1 + j (yn - y1)/(m - 1), u1 +
k (un - u1)/(l - 1), v1 + q (vn - v1)/(h - 1)};

```

```

b̄ =
{x1 + i (xn - x1)/(n - 1), y1 + (j + 1) (yn - y1)/(m - 1), u1 +
k (un - u1)/(l - 1), v1 + q (vn - v1)/(h - 1)};

```

```

ψ[t_]:= (1 - t)ā + t b̄;

```

```

f̃[t_]:= f[ψ[t]];

```

```

g̃[t_]:= g[ψ[t]];

```

```

Which(*inicio*)

```

```

f̃[0] == 0 && g̃[0] == 0, Point[ψ[0]],

```

```

f̃[1] == 0 && g̃[1] == 0, Point[ψ[1]],

```

```

f̃[0] f̃[1] < 0 && g̃[0] g̃[1] < 0,

```

```

p1 = Bisection[f̃[t], t, 0, 1, tol];

```

```

p2 = Bisection[g̃[t], t, 0, 1, tol];

```

```

If[Abs[p1 - p2] < ε, P = ψ[p1]; Point[P], Nothing],

```

```

True, Nothing(*fin*)], {i, 0, n - 1}, {j, 0, m - 2}, {k, 0, l - 1}, {q, 0, h - 1}]];

```

```

UP = Flatten[Table[

```

```

ā =
{x1 + i (xn - x1)/(n - 1), y1 + j (yn - y1)/(m - 1), u1 +
k (un - u1)/(l - 1), v1 + q (vn - v1)/(h - 1)};

```

```

b̄ = {x1 + i (xn - x1)/(n - 1), y1 + j (yn - y1)/(m - 1), u1 +
(k + 1) (un - u1)/(l - 1), v1 + q (vn - v1)/(h - 1)}

```

```

ψ[t_]:= (1 - t)ā + t b̄;

```

```

f̃[t_]:= f[ψ[t]];

```

```

g̃[t_]:= g[ψ[t]];

```

```

Which(*inicio*)

```

```

 $\tilde{f}[0] == 0 \&\& \tilde{g}[0] == 0, \text{Point}[\psi[0]],$ 
 $\tilde{f}[1] == 0 \&\& \tilde{g}[1] == 0, \text{Point}[\psi[1]],$ 
 $\tilde{f}[0]\tilde{f}[1] < 0 \&\& \tilde{g}[0]\tilde{g}[1] < 0,$ 
p1 = Bisection[ $\tilde{f}[t], t, 0, 1, \text{tol}$ ];
p2 = Bisection[ $\tilde{g}[t], t, 0, 1, \text{tol}$ ];
If[Abs[p1 - p2] <  $\epsilon, P = \psi[p1]; \text{Point}[P], \text{Nothing}$ ],
True, Nothing(*fin*), {i, 0, n - 1}, {j, 0, m - 1}, {k, 0, l - 2}, {q, 0, h - 1}]];
VP = Flatten[Table[

 $\bar{a} =$ 
{x1 + i (xn - x1)/(n - 1), y1 + j (yn - y1)/(m - 1), u1 +
k (un - u1)/(l - 1), v1 + q (vn - v1)/(h - 1)};

 $\bar{b} =$ 
{x1 + i (xn - x1)/(n - 1), y1 + j (yn - y1)/(m - 1), u1 +
k (un - u1)/(l - 1), v1 + (q + 1) (vn - v1)/(h - 1)};

 $\psi[t\_]:= (1 - t)\bar{a} + t\bar{b};$ 
 $\tilde{f}[t\_]:= f[\psi[t]]; \quad \tilde{g}[t\_]:= g[\psi[t]];$ 
Which(*inicio*)
 $\tilde{f}[0] == 0 \&\& \tilde{g}[0] == 0, \text{Point}[\psi[0]],$ 
 $\tilde{f}[1] == 0 \&\& \tilde{g}[1] == 0, \text{Point}[\psi[1]],$ 
 $\tilde{f}[0]\tilde{f}[1] < 0 \&\& \tilde{g}[0]\tilde{g}[1] < 0,$ 
p1 = Bisection[ $\tilde{f}[t], t, 0, 1, \text{tol}$ ];
p2 = Bisection[ $\tilde{g}[t], t, 0, 1, \text{tol}$ ];
If[Abs[p1 - p2] <  $\epsilon, P = \psi[p1]; \text{Point}[P], \text{Nothing}$ ],
True, Nothing(*fin*), {i, 0, n - 1}, {j, 0, m - 1}, {k, 0, l - 1}, {q, 0, h - 2}]];
ceros = Graphics4D[{XP, YP, UP, VP}, PlotRange -> All]

```

Ver Figura 14



Figura 14. Ceros de la función  $F(z, w) = z^2 - w^2 - 1$  en  $\Re(z) \in [-2,2]$ ,  $\Im(z) \in [-2,2]$  y  $\Re(w) \in [-2,2]$ ,  $\Im(w) \in [-2,2]$ .

*Mathematica*

A continuación, se genera la gráfica de los ceros aproximados de  $F(z, w) = z^2 - w^2 - 1$  junto con la gráfica de  $z^2 - w^2 = 1$ .

Show[

```
ComplexPlot[{-Sqrt[z^2 - 1], Sqrt[z^2 - 1]}, {z, -2 - 2I, 2 + 2I},
  Axes -> True, AxesLength -> {{-3,3}, {-3,3}, {-3,3}, {-3,3}}, Mesh -> False],
```

Ceros

]

Ver Figura 15

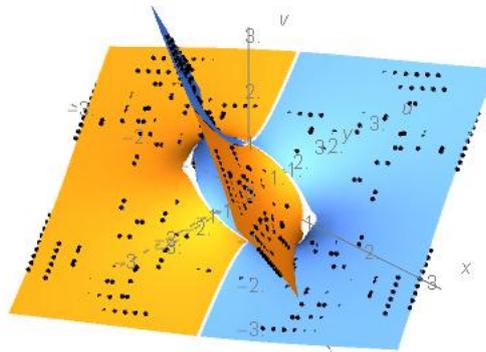


Figura 15. Gráfica de los ceros aproximados de  $F(z, w) = z^2 - w^2 - 1$  junto con la gráfica de  $z^2 - w^2 = 1$ .

Como un ejemplo adicional considere la función  $F: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $F(z, w) = \text{sen } z + \text{cos } w - 1$ , se aproximarán los ceros de  $F$ . Puesto que

$$\begin{aligned} F(z, w) &= \\ &= F(x + iy, u + iv) = \text{sen}(x + iy) + \text{cos}(u + iv) - 1 \end{aligned}$$

$$= \sin x \cosh y + \cos u \cosh v - 1 + i(\cos x \sinh y - \sin u \sinh v)$$

con  $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ , entonces los ceros de  $F$  serán las soluciones de

$$F(z, w) = \sin z + \cos w - 1 = 0,$$

esto es, las soluciones del sistema

$$\begin{cases} \sin x \cosh y + \cos u \cosh v - 1 = 0, \\ \cos x \sinh y - \sin u \sinh v = 0. \end{cases}$$

A continuación, se usarán los resultados de las secciones 4.6 y 4.7, así como el Mathematica para realizar los cálculos respectivos.

Mathematica

Aquí se definen las funciones  $f(x, y, u, v) = \sin x \cosh y + \cos u \cosh v - 1$  y  $g(x, y, u, v) = \cos x \sinh y - \sin u \sinh v$ .

$$f[\{x_, y_, u_, v_\}] := \sin x \cosh y + \cos u \cosh v - 1$$

$$g[\{x_, y_, u_, v_\}] := \cos x \sinh y - \sin u \sinh v$$

Mathematica

Aquí se procede a aproximar las soluciones del sistema  $\begin{cases} f(x, y, u, v) = 0, \\ g(x, y, u, v) = 0. \end{cases}$

$$x1 = -2; xn = 2; y1 = -2; yn = 2; u1 = -2; un = 2; v1 = -2; vn = 2;$$

$$n = 20; m = 20; l = 20; h = 20;$$

$$\text{tol} = 0.1; \epsilon = 0.5;$$

$$\text{XP} = \text{Flatten}[\text{Table}[$$

$$\bar{a} =$$

$$\{x1 + i (xn - x1)/(n - 1), y1 + j (yn - y1)/(m - 1), u1 + k (un - u1)/(l - 1), v1 + q (vn - v1)/(h - 1)\};$$

$$\bar{b} =$$

$$\{x1 + (i + 1) (xn - x1)/(n - 1), y1 + j (yn - y1)/(m - 1), u1 + k (un - u1)/(l - 1), v1 + q (vn - v1)/(h - 1)\};$$

$$\psi[t\_]:= (1 - t)\bar{a} + t\bar{b};$$

$$\tilde{f}[t\_]:= f[\psi[t]];$$

$$\tilde{g}[t\_]:= g[\psi[t]];$$

$$\text{Which}[*\text{inicio}*$$

```

 $\tilde{f}[0] == 0 \&\& \tilde{g}[0] == 0, \text{Point}[\psi[0]],$ 
 $\tilde{f}[1] == 0 \&\& \tilde{g}[1] == 0, \text{Point}[\psi[1]],$ 
 $\tilde{f}[0]\tilde{f}[1] < 0 \&\& \tilde{g}[0]\tilde{g}[1] < 0,$ 
p1 = Bisection[ $\tilde{f}[t], t, 0, 1, \text{tol}$ ];
p2 = Bisection[ $\tilde{g}[t], t, 0, 1, \text{tol}$ ];
If[Abs[p1 - p2] <  $\epsilon, P = \psi[p1]; \text{Point}[P], \text{Nothing}$ ],
True, Nothing(*fin*), {i, 0, n - 2}, {j, 0, m - 1}, {k, 0, l - 1}, {q, 0, h - 1}]];
YP = Flatten[Table[

```

```

 $\bar{a} =$ 
{x1 + i (xn - x1)/(n - 1), y1 + j (yn - y1)/(m - 1), u1 +
k (un - u1)/(l - 1), v1 + q (vn - v1)/(h - 1)};

```

```

 $\bar{b} =$ 
{x1 + i (xn - x1)/(n - 1), y1 + (j + 1) (yn - y1)/(m - 1), u1 +
k (un - u1)/(l - 1), v1 + q (vn - v1)/(h - 1)};

```

```

 $\psi[t_]:= (1 - t)\bar{a} + t\bar{b};$ 

```

```

 $\tilde{f}[t_]:= f[\psi[t]];$ 

```

```

 $\tilde{g}[t_]:= g[\psi[t]];$ 

```

```

Which>(*inicio*)

```

```

 $\tilde{f}[0] == 0 \&\& \tilde{g}[0] == 0, \text{Point}[\psi[0]],$ 

```

```

 $\tilde{f}[1] == 0 \&\& \tilde{g}[1] == 0, \text{Point}[\psi[1]],$ 

```

```

 $\tilde{f}[0]\tilde{f}[1] < 0 \&\& \tilde{g}[0]\tilde{g}[1] < 0,$ 

```

```

p1 = Bisection[ $\tilde{f}[t], t, 0, 1, \text{tol}$ ];

```

```

p2 = Bisection[ $\tilde{g}[t], t, 0, 1, \text{tol}$ ];

```

```

If[Abs[p1 - p2] <  $\epsilon, P = \psi[p1]; \text{Point}[P], \text{Nothing}$ ],

```

```

True, Nothing(*fin*), {i, 0, n - 1}, {j, 0, m - 2}, {k, 0, l - 1}, {q, 0, h - 1}]];

```

```

UP = Flatten[Table[

```

```

 $\bar{a} =$ 
{x1 + i (xn - x1)/(n - 1), y1 + j (yn - y1)/(m - 1), u1 +
k (un - u1)/(l - 1), v1 + q (vn - v1)/(h - 1)};

```

```

 $\bar{b} = \{x1 + i (xn - x1)/(n - 1), y1 + j (yn - y1)/(m - 1), u1 +$ 

```

$$(k + 1)(un - u1)/(l - 1), v1 + q(vn - v1)/(h - 1)\}$$

$$\psi[t\_]:= (1 - t)\bar{a} + t\bar{b};$$

$$\tilde{f}[t\_]:= f[\psi[t]];$$

$$\tilde{g}[t\_]:= g[\psi[t]];$$

Which[\*inicio\*]

$$\tilde{f}[0] == 0 \&\& \tilde{g}[0] == 0, \text{Point}[\psi[0]],$$

$$\tilde{f}[1] == 0 \&\& \tilde{g}[1] == 0, \text{Point}[\psi[1]],$$

$$\tilde{f}[0]\tilde{f}[1] < 0 \&\& \tilde{g}[0]\tilde{g}[1] < 0,$$

$$p1 = \text{Bisection}[\tilde{f}[t], t, 0, 1, \text{tol}];$$

$$p2 = \text{Bisection}[\tilde{g}[t], t, 0, 1, \text{tol}];$$

$$\text{If}[\text{Abs}[p1 - p2] < \epsilon, P = \psi[p1]; \text{Point}[P], \text{Nothing}],$$

$$\text{True}, \text{Nothing}[*fin*], \{i, 0, n - 1\}, \{j, 0, m - 1\}, \{k, 0, l - 2\}, \{q, 0, h - 1\}];$$

VP = Flatten[Table[

$$\bar{a} =$$

$$\{x1 + i(xn - x1)/(n - 1), y1 + j(yn - y1)/(m - 1), u1 + k(un - u1)/(l - 1), v1 + q(vn - v1)/(h - 1)\};$$

$$\bar{b} =$$

$$\{x1 + i(xn - x1)/(n - 1), y1 + j(yn - y1)/(m - 1), u1 + k(un - u1)/(l - 1), v1 + (q + 1)(vn - v1)/(h - 1)\};$$

$$\psi[t\_]:= (1 - t)\bar{a} + t\bar{b};$$

$$\tilde{f}[t\_]:= f[\psi[t]];$$

$$\tilde{g}[t\_]:= g[\psi[t]];$$

Which[\*inicio\*]

$$\tilde{f}[0] == 0 \&\& \tilde{g}[0] == 0, \text{Point}[\psi[0]],$$

$$\tilde{f}[1] == 0 \&\& \tilde{g}[1] == 0, \text{Point}[\psi[1]],$$

$$\tilde{f}[0]\tilde{f}[1] < 0 \&\& \tilde{g}[0]\tilde{g}[1] < 0,$$

$$p1 = \text{Bisection}[\tilde{f}[t], t, 0, 1, \text{tol}];$$

$$p2 = \text{Bisection}[\tilde{g}[t], t, 0, 1, \text{tol}];$$

$$\text{If}[\text{Abs}[p1 - p2] < \epsilon, P = \psi[p1]; \text{Point}[P], \text{Nothing}],$$

$$\text{True}, \text{Nothing}[*fin*], \{i, 0, n - 1\}, \{j, 0, m - 1\}, \{k, 0, l - 1\}, \{q, 0, h - 2\}];$$

`ceros = Graphics4D[{XP, YP, UP, VP}, PlotRange -> All]`

Ver Figura 16



Figura 16. Ceros de la función  $F(z, w) = \text{sen } z + \text{cos } w - 1$  en  $\Re(z) \in [-2, 2], \Im(z) \in [-2, 2]$  y  $\Re(w) \in [-2, 2], \Im(w) \in [-2, 2]$ .

## CONCLUSIONES

1. Los teoremas de conservación de signo, de Bolzano y de valor intermedio se cumplen para funciones de varias variables reales y valor real sobre segmentos dentro del dominio de tales funciones.
2. Los teoremas de conservación de signo, de Bolzano y de valor intermedio se cumplen para funciones continuas de dos variables complejas y valor complejo al expandir la expresión analítica de tales funciones en sus partes real y compleja.
3. El método de bisección para funciones continuas de dos variables complejas y valor complejo se definió a partir de un teorema enunciado con base en las conclusiones previas.
4. Las interpretaciones geométricas de los resultados con ayuda de los comandos incluidos en el software científico Mathematica permitieron constatar que las aproximaciones obtenidas pertenecen a la superficie compleja constituida por los ceros de una función dada.
5. La implementación computacional de los resultados usando el lenguaje de programación del software científico Mathematica facilitó y simplificó la realización de los diversos cálculos.

## **RECOMENDACIONES**

Se hace las siguientes recomendaciones:

1. A otro tesista, utilizar un método diferente de aproximación de ceros para aproximar los ceros de funciones continuas de dos variables complejas y valor complejo.
2. A otro tesista, realizar una investigación similar a la de este trabajo con un software libre.
3. Al lector interesado, utilizar una computadora de características superiores a una Intel(R) Core(TM) i7-6500U CPU @ 2.50GHz 2.60 GHZ para ejecutar los ejemplos mostrados en este trabajo.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Apostol, T. (2001). *Calculus* (Vol. I). Barcelona: Reverté.
- Apostol, T. (2002). *Calculus* (Vol. II). Barcelona: Reverté.
- Arce, C. (2002). Recuperado el 26 de Febrero de 2019, de Mathematica: potentes herramientas: <https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/ContribucionesV3n3002/0Arce/presmath/node1.html>
- Bolgov, V., & otros. (1983). *Problemas de las matemáticas superiores I*. Moscú: MIR.
- Bolgov, V., & otros. (1983). *Problemas de las matemáticas superiores II*. Moscú: MIR.
- Burden, R., & Faires, D. (2002). *Análisis Numérico*. International Thomson Editores S.A.
- Dubbelday, P. (1983). Application of a New Complex Root-Finding Technique to the Dispersion Relations for Elastic Waves in a Fluid-Loaded Plate. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1127–1139.
- Gray, J. (1994). *Mastering Mathematica*. New York: Academic Press Inc.
- Herbert, W. (Julio de 1978). A Global Bisection Algorithm for Computing the Zeros of Polynomials in the Complex Plane. *Journal of the ACM*, 415-420. doi:10.1145/322077.322084
- Lima, E. (1999). *Curso de análise* (Vol. II). Río de Janeiro: IMPA.
- Velezmoro, R., Ipanaqué, R., & Mechato, J. (2019). A Mathematica Package for Visualizing Objects Immersed in R4. *Computational Science and Its Applications – ICCSA 2019* (págs. 479-493). San Petersburgo: Springer.
- Vrahatis, M., Ragos, O., Skiniotis, T., Zafiropoulos, F.A., & Grapsa, T. (1997). The topological degree theory for the localization and computation of complex zeros of bessel functions. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 227-234. doi:<https://doi.org/10.1080/01630569708816756>
- Wellin, P., Kamin, S., & Gaylord, R. (2005). *An Introduction to Programming with Mathematica*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Wikipedia. (3 de Julio de 2018). Recuperado el 14 de Julio de 2018, de Sci-hub: <https://es.wikipedia.org/wiki/Sci-hub>
- Wolfram, S. (2003). *The Mathematica Book*. Champaign: Wolfram Research, Inc.
- Yakoubsohn, J. (Octubre de 2005). Numerical analysis of a bisection-exclusion method to find zeros of univariate analytic functions. *Journal of Complexity*, 652–690. doi:<https://doi.org/10.1016/j.jco.2005.06.007>

## **ANEXOS**

## ANEXO 1

### Título: APROXIMACIÓN DE CEROS DE FUNCIONES CONTINUAS DE DOS VARIABLES COMPLEJAS Y VALOR COMPLEJO MEDIANTE EL MÉTODO DE BISECCIÓN

Nombre del tesista: Amelia Merced Fiestas Galán

Problemas	Objetivos	Hipótesis	Metodología
<p><b>General</b></p> <p>¿Será posible aproximar los ceros de funciones continuas de dos variables complejas y valor complejo mediante el método de bisección?</p> <p><b>Específicos</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>¿Será posible que los teoremas de conservación de signo, Bolzano y valor intermedio se cumplan para funciones continuas de dos variables complejas y valor complejo?</li> <li>¿Será posible definir el método de bisección para</li> </ol>	<p><b>General</b></p> <p>Aproximar los ceros de funciones continuas de dos variables complejas y valor complejo mediante el método de bisección.</p> <p><b>Específicos</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Verificar que los teoremas de conservación de signo, Bolzano y valor intermedio se cumplen para funciones continuas de dos variables complejas y valor complejo.</li> <li>Enunciar y demostrar un teorema que defina el</li> </ol>	<p><b>General</b></p> <p>Es posible aproximar los ceros de funciones continuas de dos variables complejas y valor complejo mediante el método de bisección.</p> <p><b>Específicos</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Es posible verificar que los teoremas de conservación de signo, Bolzano y valor intermedio se cumplen para funciones continuas de dos variables complejas y valor complejo.</li> <li>Es posible definir el método de bisección para funciones continuas de dos variables complejas y valor complejo.</li> <li>Es posible realizar las</li> </ol>	<p><b>Enfoque:</b> Cuantitativo.</p> <p><b>Diseño:</b> Experimental.</p> <p><b>Nivel:</b> Descriptivo.</p> <p><b>Tipo:</b> Básica.</p> <p><b>Métodos</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Teoría de funciones complejas.</li> <li>- Partición equiespaciada de dominios.</li> <li>- Método de bisección para aproximar los ceros de funciones complejas.</li> <li>- Programas en el software de cálculo simbólico Wolfram Mathematica v.11.2.</li> </ul>

<p>funciones continuas de dos variables complejas y valor complejo?</p> <p>3. ¿Será posible realizar las interpretaciones geométricas de los resultados?</p> <p>4. ¿Será posible realizar la implementación computacional de los resultados?</p>	<p>método de bisección para funciones continuas de dos variables complejas y valor complejo.</p> <p>3. Realizar las interpretaciones geométricas de los resultados.</p> <p>4. Realizar la implementación computacional de los resultados.</p>	<p>interpretaciones geométricas de los resultados.</p> <p>4. Es posible realizar la implementación computacional de los resultados.</p> <p><b>Justificación</b></p> <p>Este trabajo se realiza porque no se registra el uso del método de bisección para aproximar los ceros de funciones continuas de dos variables complejas y valor complejo.</p> <p><b>Importancia</b></p> <p>Este trabajo se realiza para aportar la generalización del método de bisección en la aproximación de los ceros de funciones continuas de dos variables complejas y valor complejo. Esto permitirá obtener puntos que pertenezcan a la gráfica de superficies complejas definidas en forma implícita.</p>	
--	---	--	--