

DOĞRU EKSENLİ KOMPOZİT ÇUBUKLARIN DİNAMİK ANALİZİ**Mehmet KIRAÇ ve Faruk Fırat ÇALIM***M.K.Ü., İnşaat Mühendisliği Bölümü, Hatay/Türkiye***Beytullah TEMEL***Ç.Ü., İnşaat Mühendisliği Bölümü, Adana/Türkiye*

ÖZET : *Kompozit doğru eksenli çubukların zamanla değişen yükler altındaki dinamik davranışı Laplace uzayında teorik olarak incelenmiştir. Formülasyonda, malzeme anizotropisi, dönme ataleti, eksenel ve kayma deformasyonu etkileri göz önüne alınmıştır. Çubuk malzemesi homojen, lineer elastik ve anizotropik kabul edilmiştir. Laplace uzayında elde edilen skaler formdaki adi diferansiyel denklemler, problemin dinamik rijitlik matrisini hesaplamak için tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi kullanarak sayısal olarak çözülmüştür. Elde edilen çözümler, uygun bir sayısal ters Laplace dönüşüm yöntemi ile zaman uzayına dönüştürülmektedir. Serbest titreşim zorlanmış titreşimin özel hali olarak alınmıştır. Bu çalışmada elde edilen sonuçların literatür ve ANSYS sonuçları ile uyum içinde olduğu görülmüştür.*

DYNAMIC ANALYSIS OF STRAIGHT COMPOSITE RODS

ABSTRACT : *The dynamic behavior of composite straight rods subjected to time-dependent loads is theoretically investigated in the Laplace domain. The anisotropy of the rod material, effect of the rotary inertia, axial and shear deformations are considered in the formulations. The material of the rod is assumed to be homogeneous, linear elastic and anisotropic. Ordinary differential equations in scalar form obtained in the Laplace domain are solved numerically using the complementary functions method to calculate the dynamic stiffness matrix of the problem accurately. The solutions obtained are transformed to the time space using an appropriate numerical inverse Laplace transform method. The free vibration is then taken into account as a special case of forced vibration. The results obtained in this study are found to be in a good agreement with those available in the literature and ANSYS.*

1. GİRİŞ

Kompozit çubuklar önemli bir mühendislik problemi olarak güncelliğini korumaktadır. Modern mühendislik yapılarında yüksek mukavemet, hafif malzeme gibi özelliklerden dolayı kompozit çubukların davranışı ile ilgili çalışmalar önem kazanmıştır. Kompozit malzemeler kiriş, plak ve kabuk gibi yapı sistemlerinde yaygın olarak kullanılmaktadır.

Teh ve Huang, genel ortotropik konsol kirişlerin doğal frekanslarını hesaplayabilmek için sonlu eleman formülasyonu sunmuşlardır (1). Chen ve Yang, anizotropik tabakalı kirişler için sonlu elemanlar yöntemi kullanarak etkin bir çözüm yöntemi geliştirmişlerdir (2). Formülasyonda kayma deformasyonu etkisini dahil etmişlerdir.

Chandrashekhara ve ark., birinci mertebeye kayma deformasyonu teorisini kullanarak kompozit kirişlerin kesin çözümlerini sunmuşlardır (3). Chandrashekhara ve Bangera, tabakalı kompozit kirişlerin serbest titreşimi için, yüksek mertebeye kayma deformasyonu teorisine dayalı bir sonlu eleman modeli geliştirmişlerdir (4). Formülasyonda, kayma deformasyonu ve dönme ataleti terimleri göz önüne alınmıştır. Hodges ve ark., karışık sonlu elemanlar formülasyonu kullanarak kompozit kirişleri idare eden denklemleri çözmüşlerdir (5). Krishnaswamy ve ark., tabakalı kompozit kirişlerin serbest titreşimini idare eden dinamik denklemleri Hamilton prensibini kullanarak geliştirmişlerdir (6). Enerji formülasyonunda ters kayma etkisi ve dönme ataleti terimleri göz önüne alınmıştır. Singh ve Abdelnaser, birinci mertebeye kayma deformasyon teorisi kullanarak elde edilen tabakalı kompozit kirişlerin hareket denklemleri için bir çözüm önermişlerdir (7). Nabi ve Ganesan, tabakalı kompozit kirişlerin serbest titreşimi için birinci mertebeye teorisi kullanarak genel bir sonlu eleman geliştirmiştir (8). Abramovich ve Livshits, Timoshenko kiriş teorisi kullanarak simetrik olmayan çapraz elyaf takviyeli tabakadan yapılmış kompozit kirişlerin serbest titreşimini çalışmışlardır (9). Dönme ataleti ve kayma deformasyonu etkisi formülasyonda göz önüne alınmıştır. Khedeir ve Reddy, farklı sınır şartlarına sahip tabakalı kompozit kirişlerin serbest titreşimini çalışmışlardır (10). Rao ve Ganesan, sonlu eleman modeli kullanarak değişken kesitli kompozit kirişlerin harmonik davranışını araştırmışlardır (11).

Yıldırım ve ark., Bernoulli-Euler ve Timoshenko kiriş teorisi kullanarak düzlemi içinde ve düzlemine dik simetrik çapraz elyaf takviyeli tabakadan yapılmış kirişlerin serbest titreşimini taşıma matrisi yardımıyla incelemişlerdir (12, 13).

Yıldırım, Timoshenko kiriş teorisi kullanarak ön burulmalı elastik uzaysal çubukların ısı etkisi altındaki titreşim davranışını teorik olarak incelemiştir (14). Formülasyonda, malzeme anizotropisi, çubuk eğriliği, dönme ataleti, eksenel ve kayma deformasyonu etkilerini göz önüne almıştır. Yıldırım ve Kırıl, tabakalı kompozit kirişlerin düzlemine dik serbest titreşimlerini çalışmışlardır (15).

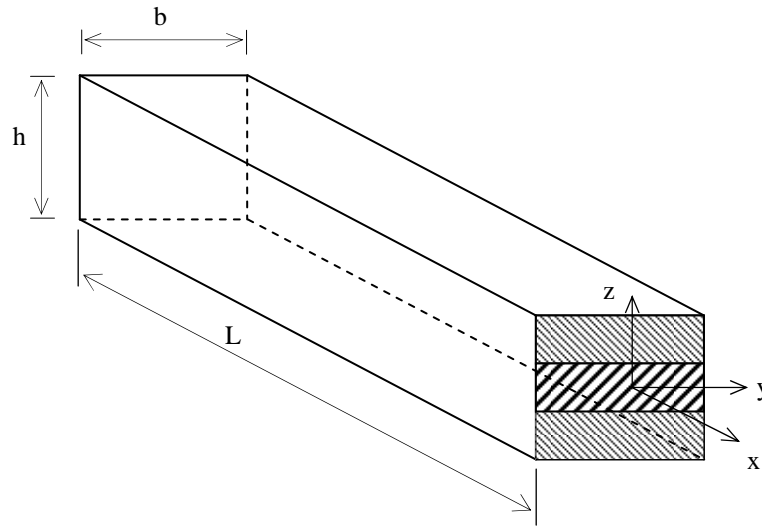
Ramtekkar ve Desai, tabakalı kompozit kirişlerin doğal frekansları için Hamilton enerji yöntemini kullanarak karışık sonlu eleman formülasyonu geliştirmişlerdir (16).

Bu çalışmada, doğru eksenli kompozit çubukların serbest ve zorlanmış titreşimleri Laplace uzayında incelenmiştir. Timoshenko çubuk teorisi kullanarak doğru eksenli çubukların dinamik davranışını idare eden denklemler elde edilmiştir. Formülasyonda, malzeme anizotropisi, dönme ataleti, eksenel ve kayma deformasyonu etkileri göz önüne alınmıştır. Kanonik formda Laplace uzayında elde edilen adi diferansiyel

denklemlere tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi uygulanarak (17,18) problemin dinamik rijitlik matrisi hesaplanmıştır. Laplace uzayında elde edilen çözümlerden zaman uzayına geçmek için Durbin'in sayısal ters Laplace dönüşüm yöntemi kullanılmıştır (17-18).

2. HAREKET DENKLEMİ

Çubuk ekseninde herhangi bir x noktasında yer değiştirme $U^o(x, t)$ ve bu noktadaki kesitin dönmesi $\Omega^o(x, t)$ olarak gösterilsin. $\mathbf{T}(x, t)$ vektörü ile t anında x noktasındaki kesite etkiyen iç kuvvetlerin vektörel toplamı ve $\mathbf{M}(x, t)$ ile bunların ağırlık merkezi olan G noktasına indirgendikleri zaman elde edilen kuvvet çifti olarak gösterilsin. Çubuk ekseninin birim boyuna etkiyen yayılı dış kuvvet $\mathbf{p}^{ex}(x, t)$ ve moment $\mathbf{m}^{ex}(x, t)$ olsun.



Şekil 1. Tabakalı kompozit çubuk

Çubuk malzemesi lineer elastik ve anizotropiktir. Kompozit uzaysal çubuğu idare eden denklemler vektörel formda elde edilmektedir (Şekil 1).

$$\frac{\partial \mathbf{U}^o}{\partial x} = \mathbf{A}'\mathbf{T} + \mathbf{B}'\mathbf{M} + \Omega^o \times \mathbf{i} \quad , \quad \frac{\partial \Omega^o}{\partial x} = \mathbf{F}'\mathbf{T} + \mathbf{D}'\mathbf{M} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}^o}{\partial x} + \mathbf{p}^{(ex)} = \mathbf{p}^{(in)} \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{M}^o}{\partial x} + \mathbf{i} \times \mathbf{T}^o + \mathbf{m}^{(ex)} = \mathbf{m}^{(in)} \quad (2)$$

\mathbf{p}^{in} kütleli atalet kuvveti ve \mathbf{m}^{in} kütleli atalet momenti ifadeleri

$$\mathbf{p}_i^{(in)} = -\rho A \frac{\partial^2 U_i^o}{\partial t^2} \quad , \quad \mathbf{m}_i^{(in)} = -\rho I_i \frac{\partial^2 \Omega_i^o}{\partial t^2} \quad (i = x, y, z) \quad (3)$$

olmak üzere, burada ρ , kütleli yoğunluğu göstermektedir. I_x burulma ve I_y, I_z ise eğilme atalet momentleridir. $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{F}$ ve \mathbf{D} matrisleri çubuk kesitinin toplam esneklik

sabitlerini göstermekte olup her bir tabaka malzemesinin esneklik sabitleri cinsinden elde edilmektedir.

Zorlanmış titreşim durumu için, $\mathbf{Y}(x, t)$ kolon matrisi

$$\mathbf{Y}(x, t) = \{U_x^o, U_y^o, U_z^o, \Omega_x^o, \Omega_y^o, \Omega_z^o, T_x^o, T_y^o, T_z^o, M_x^o, M_y^o, M_z^o\}^T \quad (4)$$

olarak tanımlanmaktadır. (4) ifadesinin zamana göre Laplace dönüşümü, $t > 0$ için $L[\mathbf{Y}(x, t)] = \bar{\mathbf{Y}}(x, s)$ ise

$$\bar{\mathbf{Y}}(x, s) = \int_0^{\infty} \mathbf{Y}(x, t) e^{-st} dt \quad (5)$$

olup, burada Laplace dönüşüm parametresi s kompleks bir sayıdır. Bu tariflerin yardımıyla (1) ve (2) eşitlikleri birinci mertebeden 12 adet adi diferansiyel denklem haline dönüştürülmektedir. Serbest titreşim analizi için, $p_i^{(ex)} = 0$ ve $m_i^{(ex)} = 0$ ($i = x, y, z$) alınmaktadır. Harmonik titreşim kabulü ile \mathbf{U}^o , $\mathbf{\Omega}^o$, \mathbf{T}^o ve \mathbf{M}^o vektörleri denklem (6) da verilmektedir.

$$\mathbf{U}^o(x, t) = \mathbf{U}^*(x) e^{i\omega t}, \quad \mathbf{\Omega}^o(x, t) = \mathbf{\Omega}^*(x) e^{i\omega t}, \quad \mathbf{T}^o(x, t) = \mathbf{T}^*(x) e^{i\omega t}, \quad \mathbf{M}^o(x, t) = \mathbf{M}^*(x) e^{i\omega t} \quad (6)$$

(6) ifadesi (1) ve (2) denkleminde yerine konulduğunda, birinci mertebeden 12 adet adi diferansiyel denklem takımı elde edilir. Eğer, deplasmanlar ve bunlara karşılık gelen kuvvetler, $\mathbf{Y}^*(x)$ kolon matrisinin bileşenleri olarak düşünülürse, bu 12 adet denklem matris formunda aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\frac{d\mathbf{Y}^*(x)}{dx} = \mathbf{F}(x, \omega) \mathbf{Y}^*(x) \quad (7)$$

Sistem dinamik rijitlik matrisinin determinantını sıfır yapan ω değerleri problemin doğal frekanslarını vermektedir.

Kesitin kayma merkezi ile ağırlık merkezinin üst üste düştüğü kabul edilmektedir. Seçilen kesitin geometri ve malzeme bakımından simetrik olduğu kabulü ile, dik koordinat takımında N adet kompozit tabakadan oluşan doğru eksenli çubukların dinamik davranışını idare eden 12 adet adi diferansiyel denklem takımı Laplace uzayında kanonik formda aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\frac{d\bar{U}_x}{dx} = A'_{11} \bar{T}_x \quad (8a)$$

$$\frac{d\bar{U}_y}{dx} = \Omega_z + \alpha_y A'_{22} \bar{T}_y \quad (8b)$$

$$\frac{d\bar{U}_z}{dx} = -\bar{\Omega}_y + \alpha_z A'_{33} \bar{T}_z \quad (8c)$$

$$\frac{d\bar{\Omega}_x}{dx} = D'_{11} \bar{M}_x \quad (8d)$$

$$\frac{d\bar{\Omega}_y}{dx} = D'_{22} \bar{M}_y \quad (8e)$$

$$\frac{d\bar{\Omega}_z}{dx} = D'_{33} \bar{M}_z \quad (8f)$$

$$\frac{d\bar{T}_x}{dx} = s^2 \tilde{A} \bar{U}_x + \bar{V}_7 \quad (8g)$$

$$\frac{d\bar{T}_y}{dx} = s^2 \tilde{A} \bar{U}_y + \bar{V}_8 \quad (8h)$$

$$\frac{d\bar{T}_z}{dx} = s^2 \tilde{A} \bar{U}_z + \bar{V}_9 \quad (8i)$$

$$\frac{d\bar{M}_x}{dx} = s^2 \tilde{I}_x \bar{\Omega}_x + \bar{V}_{10} \quad (8j)$$

$$\frac{d\bar{M}_y}{dx} = s^2 \tilde{I}_y \bar{\Omega}_y + \bar{T}_z + \bar{V}_{11} \quad (8k)$$

$$\frac{d\bar{M}_z}{dx} = s^2 \tilde{I}_z \bar{\Omega}_z - \bar{T}_y + \bar{V}_{12} \quad (8l)$$

$\bar{\mathbf{V}}(x, s)$ kolon matrisinin elemanları (9) denkleminde verilmiştir. Laplace dönüşümünden gelen başlangıç şartları, $\bar{\mathbf{V}}(x, s)$ yük vektörüne dahil edilmektedir.

$$\bar{V}_i(x, s) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, 6)$$

$$\bar{V}_{6+j}(x, s) = -(\bar{p}_j^{(ex)}) - \rho \tilde{A} \left[s U_j^\circ(x, 0) + \frac{\partial U_j^\circ(x, 0)}{\partial t} \right] \quad (j=1, 2, 3) \quad (9)$$

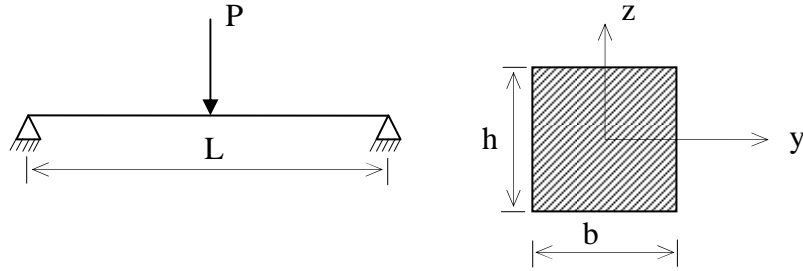
$$\bar{V}_{9+j}(x, s) = -(\bar{m}_j^{(ex)}) - \rho \tilde{I}_j \left[s \Omega_j^\circ(x, 0) + \frac{\partial \Omega_j^\circ(x, 0)}{\partial t} \right]$$

$$\tilde{A} = \sum_{k=1}^N \rho^{(k)} A^{(k)}, \quad \tilde{I}_2 = \sum_{k=1}^N \rho^{(k)} \int_{A^{(k)}} (x_3)^2 dA, \quad \tilde{I}_3 = \sum_{k=1}^N \rho^{(k)} \int_{A^{(k)}} (x_2)^2 dA \quad (10)$$

4. SAYISAL UYGULAMA

Doğru eksenli kompozit çubukların serbest ve zorlanmış titreşimini analiz etmek için FORTRAN dilinde genel amaçlı bilgisayar programları hazırlanmıştır. Bu programda, sistem dinamik rijitlik matrisleri ve sistem yük vektörleri Laplace uzayında tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi (TFY) yardımı ile elde edilmektedir. Sistem matrisleri, kanonik formda verilen diferansiyel denklemlerin çözümlerinden elde edilmektedir. Özel olarak, serbest titreşim frekansları, sistem yük vektörü sıfıra eşitlenip sistem dinamik rijitlik matrisindeki Laplace parametresi “s” yerine “i ω ” konularak hesaplanmaktadır.

Şekil 2’de görülen iki ucu sabit mesnetli ortotropik çubuk problemi göz önüne alınmıştır (0°). Malzeme sabitleri; elastisite modülleri $E_{11} = 144.8 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, $E_{22} = E_{33} = 9.65 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, kayma modülleri $G_{12} = G_{13} = 4.14 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, $G_{23} = 3.45 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ve Poisson oranları $\nu_{12} = \nu_{13} = 0.3$, $\nu_{23} = 0.399$ ve $\rho = 1389.23 \text{ kg/m}^3$ olarak seçilmiştir.



Şekil 2. İki ucu sabit mesnetli kiriş ve kesiti

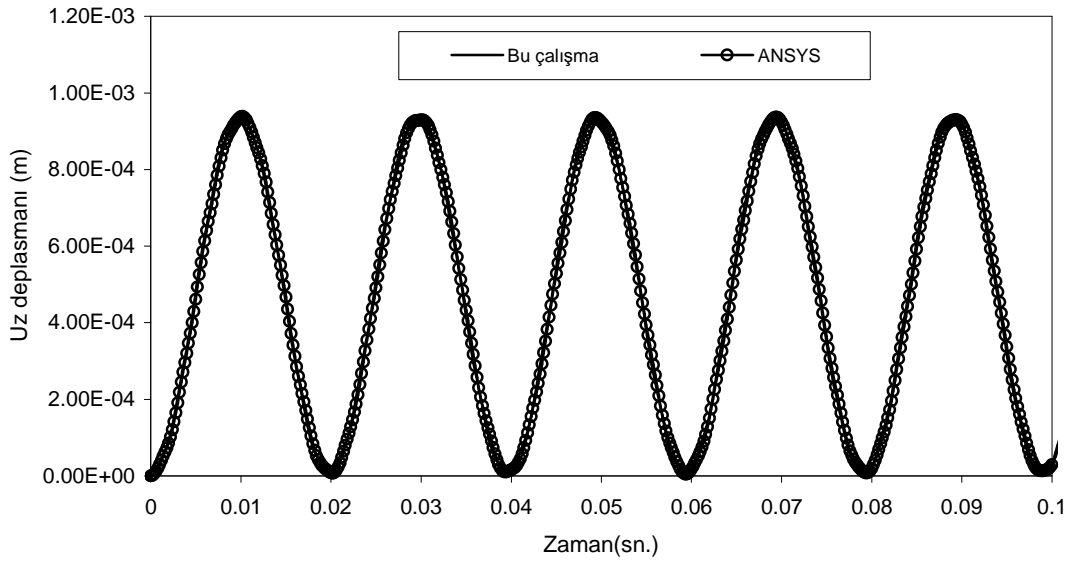
Farklı L/h oranlarını içeren düzlemine dik serbest titreşim frekansları Tablo 1’de gösterilmektedir.

Tablo 1. Düzlemine dik doğal frekanslar (kHz)

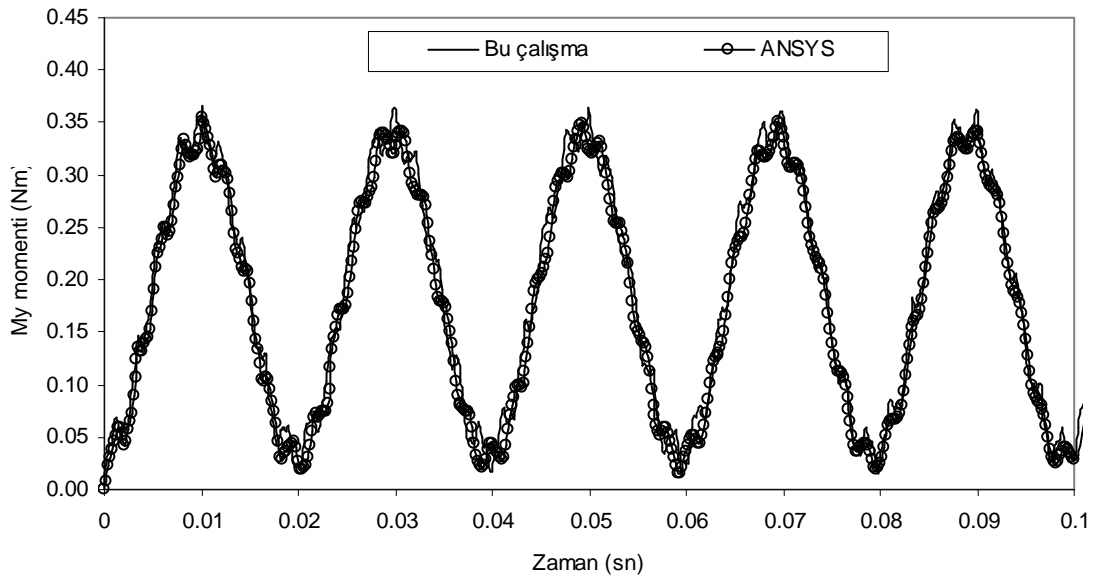
L/h	Mod no	Chandras. ve ark. (3)	Chandras. ve Bangera (4)	Nabi ve Ganesan (8)	Rao ve Ganesan (11)	Yıldırım ve ark. (13)	ANSYS	Bu çalışma
120 (L=762 mm)	1	0.051	0.051	0.054	0.051	0.051	0.051	0.051
	2	0.203	0.202	0.213	0.202	0.202	0.202	0.202
	3	0.454	0.453	0.472	0.454	0.451	0.451	0.451
	4	0.804	0.799	0.801	0.804	0.795	0.795	0.795
	5	1.262	1.238	----	1.252	1.229	1.229	1.229
15 (L=381 mm)	1	0.755	0.756	0.789	0.754	0.753	0.754	0.753
	2	2.548	2.554	2.656	2.555	2.544	2.551	2.544
	3	4.716	4.742	4.895	4.753	4.711	4.724	4.711
	4	6.960	7.032	7.165	7.052	6.956	6.970	6.956
	5	9.194	9.355	----	9.383	9.195	9.202	9.191

Tablo 1 incelendiğinde, bu çalışmada sunulan model ile elde edilen düzlemine dik ilk beş serbest titreşim frekansın, ANSYS ve literatürdeki sonuçlarla uyumlu oldukları görülmektedir.

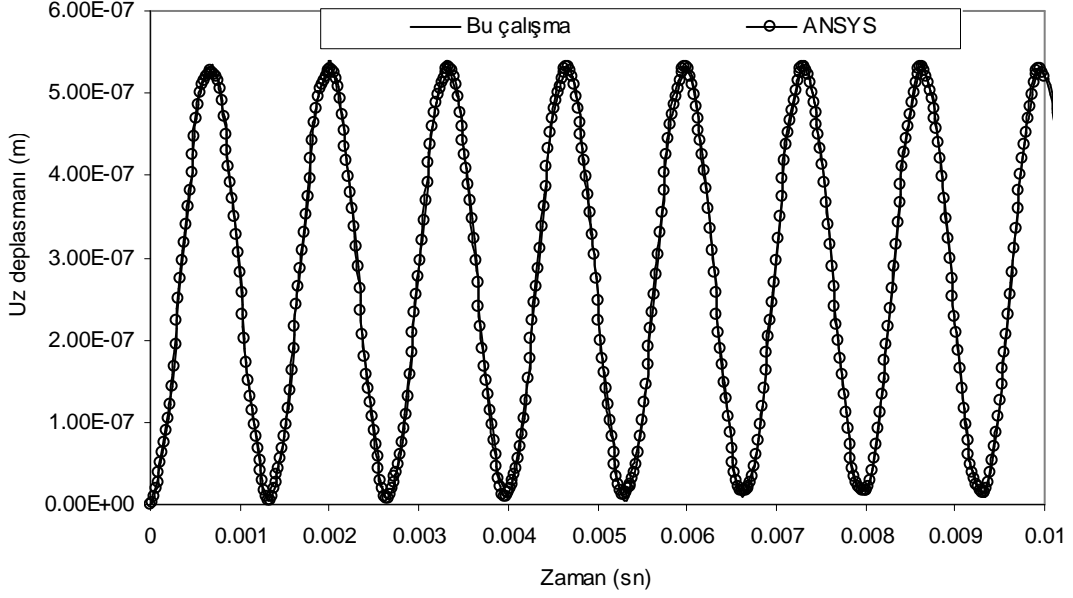
Kirişin orta noktasına z doğrultusunda $P_0=1$ N şiddetinde adım tipi dinamik yük uygulanmaktadır. Farklı narinlik oranı (L/h) için kirişin orta noktasındaki U_z deplasmanı (Şekil 3 ve Şekil 5) ve M_y momentinin (Şekil 4 ve Şekil 6) zamanla değişimleri hesaplanmaktadır. Hesaplamalarda, zaman artımı $\Delta t=0.0002$ sn alınmaktadır.



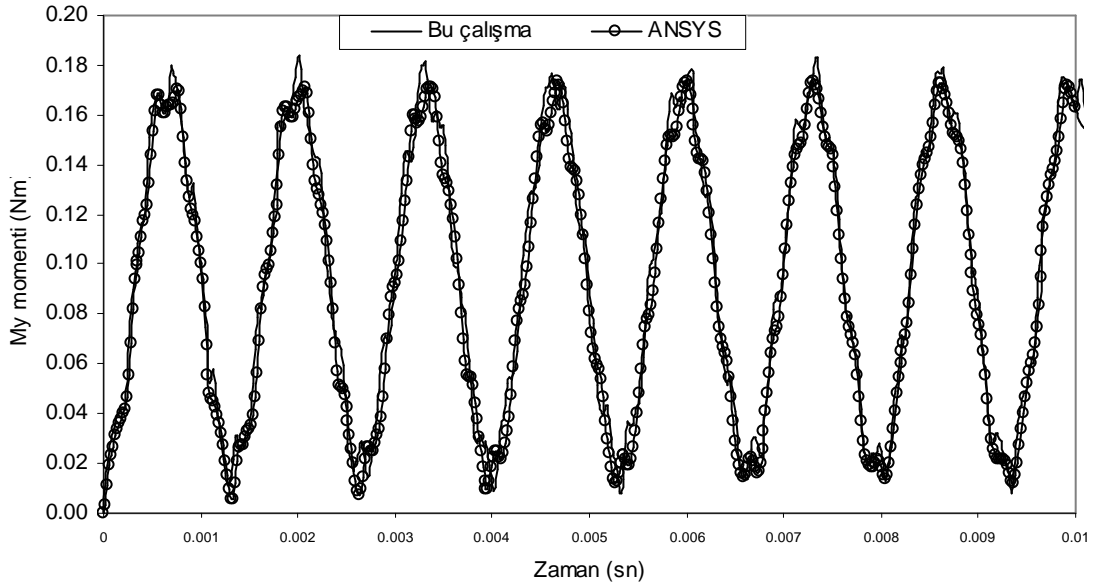
Şekil 3. Kirişin orta noktasındaki U_z deplasmanının zamanla değişimi ($L/h=120$, $L=762$ mm)



Şekil 4. Kirişin orta noktasındaki M_y momentinin zamanla değişimi ($L/h=120$, $L=762$ mm)



Şekil 5. Kirişin orta noktasındaki Uz deplasmanın zamanla değişimi
($L/h=15$, $L=381$ mm)



Şekil 6. Kirişin orta noktasındaki My momentinin zamanla değişimi
($L/h=15$, $L=381$ mm)

Farklı narinlik oranı (L/h) için kirişin orta noktasındaki deplasman ve momentin zamanla değişimleri ANSYS sonuçları ile karşılaştırılmış ve sonuçların uyumlu oldukları görülmüştür.

5. SONUÇ

Bu çalışmada, kompozit malzemeden yapılmış doğru eksenli çubukların dinamik davranışları etkin bir yöntem kullanılarak ele alınmıştır. Kompozit doğru eksenli çubukların serbest ve zorlanmış titreşimi Laplace uzayında incelenmiştir. Serbest titreşim, zorlanmış titreşimin özel hali olarak ele alınmıştır.

Zamanla değişen yükler altında doğru eksenli kompozit çubukların dinamik analizini yapmak için FORTRAN dilinde genel amaçlı bilgisayar programı hazırlanmıştır. Hazırlanan bilgisayar programı ile literatürde verilen çeşitli örnekler çözülmüş ve ANSYS programı sonuçları ile kıyaslamalar yapılmıştır. Bulunan sonuçların hem literatür hem de ANSYS sonuçları ile uyum içinde olduğu gösterilmiştir.

6. KAYNAKLAR

1. Teh, K.K. and Huang, C.C., "The Vibrations of Generally Orthotropic Beams, A Finite Element Approach", *Journal of Sound and Vibration*, 62(2), 195-206, 1979.
2. Chen, A.T. and Yang, T.Y., "Static and Dynamic Formulation of a Symmetrically Laminated Beam Finite Element for a Microcomputer", *Journal of Composite Materials*, 19, 459-475, 1985.
3. Chandrashekhara, K., Krisnamurty, K. and Roy, S., "Free Vibration of Composite Beams Including Rotary Inertia and Shear Deformation", *Composite Structures*, 14, 269-279, 1990.
4. Chandrashekhara, K. and Banger, K.M., "Free Vibration of Composite Beams Using a Refined Shear Flexible Beam Element", *Computer and Structures*, 43(4), 719-727, 1992.
5. Hodges, D.H., Atilgan, A.R., Fulton, M.V. and Rehfield, L.W., "Free Vibration Analysis of Composite Beams", *Journal of the American Helicopter Society*, 36(3), 36-47, 1991.
6. Krishnaswamy, S., Chandrashekhara, K. and Wu, W.Z.B., "Analytical Solutions to Vibration of Generally Layered Composite Beams", *Journal of Sound and Vibration*, 159(1), 85-99, 1992.
7. Singh, M.P. and Abdelnaser, A.S., "Random Response of Symmetric Cross-Ply Composite Beams with Arbitrary Boundary Conditions", *AIAA Journal*, 30(4), 1081-1088, 1992.
8. Nabi, S.M. and Ganesan, N., "A Generalized Element for the Free Vibration Analysis of Composite Beams", *Computers and Structures*, 51(5), 607-610, 1994.
9. Abramovich, H. and Livshits, A., "Free Vibrations of Non-Symmetric Cross-Ply Laminated Composite Beams", *Journal of Sound and Vibration*, 176(5), 597-612, 1994.
10. Khedeir, A.A. and Reddy, J.N., "Free Vibration of Cross-Ply Laminated Beams with Arbitrary Boundary Conditions", *International Journal of Engineering Science*, 32(12), 1971-1980, 1994.
11. Rao, S.R. and Ganesan, N., "Dynamic Response of Non-Uniform Composite Beams", *Journal of Sound and Vibration*, 200(5), 563-577, 1997.
12. Yıldırım, V., Sancaktar, E. and Kiral, E., "Free Vibration Analysis of Symmetric Cross-Ply Laminated Composite Beams with the Help of the Transfer Matrix Approach", *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 15, 651-660, 1999.

13. Yıldırım,V., Sancaktar,E. and Kırıl,E., “Comparison of the In-Plane Natural Frequencies of Symmetric Cross-Ply Laminated Beams Based on the Bernoulli-Euler and Timoshenko Beam Theory”, *Journal of Applied Mechanics, ASME*, 66, 410-417, 1999.

14. Yıldırım,V., “Governing Equations of Initially Twisted Elastic Space Rods Made of Laminated Composite Materials”, *International Journal of Mechanical Sciences*, 37, 1007-1035, 1999.

15. Yıldırım,V. and Kırıl,E., “Investigation of the Rotary Inertia and Shear Deformation Effects on the Out-of-Plane Bending and Torsional Natural Frequencies of Laminated Beams”, *Composite Structures*, 49, 313-320, 2000.

16. Ramtekkar,G.S. and Desai,Y.M., “Natural Vibrations of Laminated Composite Beams by Using Mixed Finite Element Modelling”, *Journal of Sound and Vibration*, 257(4), 635-651, 2002.

17. Çalım,F.F., “Viskoelastik, Anizotropik Eğri Eksenli Uzaysal Çubuk Sistemlerin Dinamik Analizi”, *ÇÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Adana*, 2003.

18. Temel,B., Çalım,F.F. and Tütüncü,N., “Forced Vibration of Composite Cylindrical Helical Rods”, *International Journal of Mechanical Sciences* 47(7), 998-1022, 2005.

19. ANSYS Swanson Analysis System, Inc., 201 Johnson Road, Houston, PA 15342-1300.