H-2016

MAT100

Matematikk

Eksamensoppgaver 2012 - 2016

Per Kristian Rekdal

Høgskolen i Molde
Vitenskapelig høgskole i logistikk

Innhold

Forord

Eksamensoppgaver:

Dette er en samling av gamle eksamensoppgaver i emnet "*MAT100 Matematikk*" ved Høgskolen i Molde. Samlingen inneholder totalt 8 eksamensoppgaver, i perioden fra og med 2012 og frem til i dag.

Det finnes også en tilhørende samling med komplette løsningsforslag til disse eksamensoppgavene. Samlingen med løsningsforslag finnes i et eget hefte, separert fra dette oppgaveheftet.

Gratis:

Både samlingen med oppgaver og tilhørende samling med komplette løsningsforslag kan lastes ned gratis via Høgskolen i Molde sin åpne kursportal www.himoldeX.no.

Hvordan bruke denne samlingen av tidligere eksamensoppgaver?:

Det anbefales å regne gjennom gamle eksamensoppgaver før eksamen. Dersom man gjør det så får man en god pekepinn på hva som kreves på eksamensdagen. Sett av 4 timer, prøv så godt du kan uten løsningsforslag. Etter at de 4 timene er over, rett din egen eksamensbesvarelse. Og sett gjerne karakter på deg selv.

Ikke bare i eksamensperioden, men også ellers i semesteret kan det være lurt å regne gjennom gamle eksamensoppgaver. Men gå gjennom teorien før man gjør oppgaver. Da får man bedre utbytte av oppgaveløsningen.

Videoer:

Komplette sett med forelesningsvideoer fra 2013, 2014 og 2015 finnes på www.himoldeX.no.
I tillegg finnes kortvideoer til majoriteten av pensum.

Per Kristian Rekdal

Eksamen i

MAT100 Matematikk

Eksamensdag	**:**	**Tirsdag 11. desember 2012**
Tid	**:**	**09:00 – 13:00**
Faglærer/telefonnummer	**:**	**Per Kristian Rekdal / 924 97 051**
Hjelpemidler	**:**	**KD + formelsamling**
Antall sider inkl. forsiden	**:**	**11 + vedlegg (1 side)**
Målform	**:**	**Norsk (bokmål)**

Noen generelle råd:

- **Skriv rett inn. Ikke bruk så mye tid på kladding.**
- **Kladdark skal ikke leveres inn. De blir ikke sensurert.**
- **Det er totalt 4 oppgaver. I *gjennomsnitt* har du èn time per oppgave.**

Oppgave 1: (kostnad, inntekt og fortjeneste)

Møretank AS er en produsent av varmtvannsberedere. De produserer både store og små beredere. De ansatte har funnet ut, uansett hva slags type varmtvannsbereder det dreier seg om, at den totale kostnaden forbundet med produksjon og salg av varmvannberedere med god tilnærmelse kan modelleres med en *kvadratisk* funksjon:

$$K(x) \;=\; ax^2 + bx + c \tag{1.1}$$

hvor $x =$ antall beredere produsert og solgt per år og hvor a, b og c er konstanter. For en spesifikk type varmtvannsbereder, "*MT Standard bereder*", gjelder følgende tall:

$$\begin{aligned} a &= 1 \;\; \text{NOK} \cdot (\text{år})^2 && (1.2) \\ b &= 200 \;\; \text{NOK} \cdot \text{år} && (1.3) \\ c &= 250\,000 \;\; \text{NOK} \qquad \text{(faste kostnader)} && (1.4) \end{aligned}$$

De ansatte har også funnet ut at det er en *lineær* sammenheng mellom pris p og etterspørsel x:

$$p(x) \;=\; Ax + B \tag{1.5}$$

hvor A og B er konstanter. For berederen "*MT Standard bereder*" gjelder følgende tall:

$$\begin{aligned} A &= -4 \quad \text{NOK} \cdot \text{år} && (1.6) \\ B &= 3\,200 \;\; \text{NOK} && (1.7) \end{aligned}$$

Figur 1.1: Møretank AS lokalisert i Vestnes kommune, Møre og Romsdal.

Kostnader

a) Total enhetskostnad, dvs. kostnad per bereder, er definert ved: $TEK(x) \overset{\text{def.}}{=} \frac{K(x)}{x}$.
Vis at denne er gitt ved: [1]

$$\boxed{TEK(x) \;=\; ax + b + \frac{c}{x} \qquad (1.8)}$$

b) Vis at antall beredere som må produseres per år i bedriften for å *minimere* enhetskostnaden $TEK(x)$ er gitt ved: [2]

$$\boxed{x \;=\; \sqrt{\frac{c}{a}} \qquad (1.9)}$$

c) Bruk lign.(1.2) og (1.4) til å regne ut den numeriske verdien av x i lign.(1.9). [3]

d) I vedlegg A er enhetskostnaden $TEK(x)$ plottet for intervallet $150 \le x \le 1000$ med de numeriske verdiene gitt ved lign.(1.2)-(1.4).

Markèr minimum av $TEK(x)$ på figuren i vedlegg A.
Stemmer det numeriske resultatet fra oppgave **1c** med den blå grafen i vedlegg A?

---

[1] Se side 12 i formelsamlingen, formelen for sum av brøker med samme nevner.

[2] Anta at $\frac{d^2TEK(x)}{dx^2} > 0$ for $x > 0$, dvs. $TEK(x)$ er konveks slik at lign.(1.9) representerer et minimum, og ikke et maksimum. Med denne antagelsen behøver du altså ikke å utføre 2. derivasjonstesten eller lage fortegnsskjema i denne oppgaven.

[3] Husk å bruke riktig benevning. Benevningen til x er per år, dvs. $\frac{1}{\text{år}}$.

e) Grensekostnaden er definert ved: $\frac{d\,K(x)}{dx}$.
Vis at denne er gitt ved:

$$\boxed{\frac{d\,K(x)}{dx} \;=\; 2ax + b \qquad (1.10)}$$

f) I vedlegg A finner du en tom verditabell for grensekostnaden $\frac{d\,K(x)}{dx}$.

Bruk de numeriske verdiene i lign.(1.2)-(1.3) og fyll ut denne verditabellen i vedlegg A.
Tegn også inn grensekostnaden $\frac{d\,K(x)}{dx}$ i figuren i vedlegg A.

g) For hvilken verdi av x skjærer grafen til $TEK(x)$ og grafen til $\frac{d\,K(x)}{dx}$ hverandre? [4]

h) Vis, ved å sette

$$TEK(x) \;=\; \frac{d\,K(x)}{dx} \;, \tag{1.11}$$

at $TEK(x)$ og $\frac{d\,K(x)}{dx}$ skjærer hverandre ved x-verdien gitt ved lign.(1.9).

[4]Her skal du løse oppgaven grafisk, dvs. lese svaret direkte fra figuren i oppgave **1f**. Ingen utregninger behøves. Men husk å bruke rett benevning.

Inntekter

i) Vis at bedriftens totale resultat $TR(x)$ er gitt ved: [5]

$$\boxed{TR(x) \;=\; (A-a)x^2 + (B-b)x - c \qquad (1.12)}$$

j) Vis at antall beredere som må produseres per år i bedriften for å *maksimere* det totale resultatet $TR(x)$ er gitt ved: [6]

$$\boxed{x \;=\; \frac{b-B}{2(A-a)} \qquad (1.13)}$$

k) Bruk de numeriske verdiene på side 8 til å regne ut den numeriske verdien av x i lign.(1.13).

l) Er produksjonskvantumet som *minimerer* enhetskostnaden $TEK(x)$ sammenfallende med produksjonskvantumet som *maksimerer* fortjenesten $TR(x)$ i dette tilfellet?

■

[5] Det totale resultatet $TR(x)$ er bedriftens <u>*fortjeneste*</u>, dvs. inntekt minus kostnad: $TR(x) = I(x) - K(x)$.

[6] Anta at $\frac{d^2TR(x)}{dx^2} < 0$, dvs. $TR(x)$ er konkav slik at lign.(1.9) representerer et maksimum, og ikke et minimum. Med denne antagelsen behøver du altså ikke å utføre 2. derivasjonstesten eller lage fortegnsskjema i denne oppgaven.

Oppgave 2: (innbyggerelastisitet / transport)

I en studie angående transportsystemet i noen byer i USA har man estimert gjennomsnittlig reisetid t til jobb. Det viser seg at denne reisetiden er avhengig av størrelsen på byen målt i antall innbyggere N. Studien viser at sammenhengen er

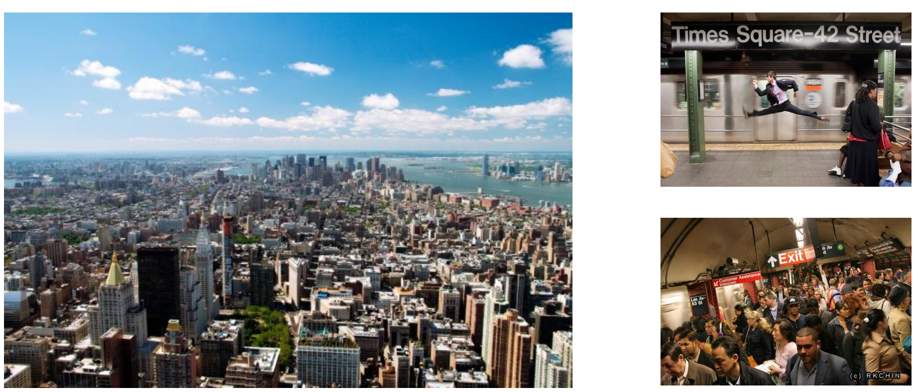
$$t(N) \;=\; c \cdot N^{0.23} \tag{1.14}$$

hvor

$$\begin{aligned} c &= 1.7 \ \text{minutter} && (1.15)\\ t(N) &= \text{gjennomsnittlig reisetid til jobb, i minutter (min)} && (1.16)\\ N &= \text{antall innbyggere i byen} && (1.17) \end{aligned}$$

I denne oppgaven skal vi se på *innbyggerelastisiteten*. Vi skal studere reisetiden sin følsomhet for endring i innbyggertallet i en by. *Innbyggerelastisiteten* kan skrives på følgende halvmatematiske form:

$$E_N(t) \;=\; \frac{\text{\%-vis endring i reisetiden}}{\text{\%-vis endring i innbyggertallet}} \tag{1.18}$$



Figur 1.2: New York City, USA.

Matematisk er denne *innbygger*elastisiteten gitt ved:

$$\boxed{E_N(t) \quad = \quad \frac{d\,t(N)}{dN} \cdot \frac{N}{t(N)} \qquad (1.19)}$$

hvor funksjonen $t(N)$ og variabelen N er definert på forrige side.

a) Finn innbyggerelastisiteten $E_N(t)$.

b) Tolk resultatet i oppgave **2a**.

c) Hvor mye vil %-vise reisetid tilnæremet endre seg med dersom innbyggertallet øker med 5 %? [7]

d) For New York er $N = 8.2$ millioner.
Hva er gjennomsnittlig reisetid til jobb i New York? [8]

e) Dersom innbyggertallet i New York øker med 5 %, hva blir gjennomsnittlig reisetid til jobben da? [9]

■

[7] Du skal finne "%-vis endring i reisetiden" når du vet at:

$$\text{\%-vis endring i innbyggertallet} \;=\; 5\ \% \qquad (1.20)$$

Dette betyr at du vet nevneren i lign.(1.18). Og du skal finne telleren.

[8] Oppgi svaret i minutter.

[9] Oppgi også dette svaret i minutter.

Oppgave 3: (annuitetslån vs serielån)

Du jobber som økonomiansvarlig hos "*Moldegaard Maritime Logistics*". Dette firmaet skal investere i nytt datasystem. Dette nye datasystemet koster $K_0 = 300\,000$ NOK og skal finansieres ved låneopptak. Styret i firmaet har bestemt at lånet skal tilbakebetales i løpet av $n = 15$ år. Renten er $r = \frac{3\ \%}{100\ \%} = 0.03$ i hele perioden.

a) Anta at lånet skal tilbakebetales som et annuitetslån.
Hvor stort blir det det årlige *terminbeløpet* K (rente+avdrag)?

b) Hvor mye betales i renter i løpet av lånets løpetid for et slikt annuitetslån?

c) Anta at lånet istedet skal tilbakebetales som et serielån.
Hvor stort blir det det årlige *avdraget*?

d) Hvor mye betales i renter i løpet av lånets løpetid for et slikt serielån?

e) Dersom du har regnet rett i oppgave **3b** og **3d**, så fant du at $R_n^{\text{ann}} > R_n^{\text{serie}}$.
Forklar kort, uten regning, hvorfor firmaet betaler mer rente til banken ved annuitet enn ved serie. [10]

Figur 1.3: Moldegaard Maritime Logistics.

[10] I starten av lånets tilbakebetalingstid, betaler firmaet mindre tilbake til banken ved et annuitetslån enn et serielån? Betyr det at firmaet låner pengene "lenger" i annuitetslånet? Dersom pengene lånes "lenger", hva betyr det for renten? Større eller mindre?

Oppgave 4: (Lagrange multiplikatorer)

Made By Mom A/S (MBM) er en klesbutikk i Molde som spesialdesigner klær. MBM har egne design og egne kolleksjoner. Et av plaggene som lages, er kåper. Av en bestemt type kåpe lages det to versjoner:

- **A** spesialversjon med ekstra lommer og ekstra dekor
- **B** klassisk versjon

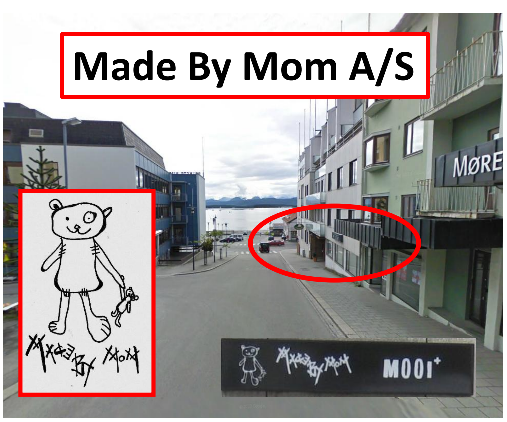
Ut fra erfaring angående lønnsutgifter og priser på stoff og andre råvarer har man funnet ut at kostnaden forbundet med å produsere disse kåpene kan beskrives, med god tilnærmelse til virkeligheten, av følgende funksjon:

$$K(x,y) \;=\; 500x + 100y + 100xy + 1200 \tag{1.21}$$

hvor

$$x \;=\; \text{antall kåper som produseres og selges av type } \mathbf{A}\text{, dvs. spesialversjon} \tag{1.22}$$
$$y \;=\; \text{antall kåper som produseres og selges av type } \mathbf{B}\text{, dvs. klassisk versjon} \tag{1.23}$$

Kostnaden er i NOK.



Figur 1.4: Made By Mom A/S.

Det viser seg at det er en sammenheng mellom prisen på kåpene, og antall kåper som produseres og selges. Hun som driver MBM har funnet ut at følgende sammenhenger mellom pris og etterspørsel er en god tilnærmelse til virkeligheten:

$$p_{\mathbf{A}}(x,y) \quad = \quad 4000 - 100x + 200y \tag{1.24}$$
$$p_{\mathbf{B}}(x,y) \quad = \quad 2600 + 200x - 100y \tag{1.25}$$

hvor

$$p_{\mathbf{A}}(x,y) \quad = \quad \text{prisen på en kåpe av type } \mathbf{A}\text{, dvs. spesialversjon} \tag{1.26}$$
$$p_{\mathbf{B}}(x,y) \quad = \quad \text{prisen på en kåpe av type } \mathbf{B}\text{, dvs. klassisk versjon} \tag{1.27}$$

Alle priser er i NOK.

a) Hva er den faste kostnaden forbundet med produksjon av kåpene? [11]

b) Vis at inntekten $I(x,y)$ er gitt ved:

$$\boxed{I(x,y) \quad = \quad -100x^2 - 100y^2 + 400xy + 4000x + 2600y \qquad (1.28)}$$

c) Vis at profittfunksjonen $P(x,y)$ er gitt ved:

$$\boxed{P(x,y) \quad = \quad -100x^2 - 100y^2 + 300xy + 3500x + 2500y - 1200 \qquad (1.29)}$$

[11] Se lign.(1.21). Husk benevning.

Når stoff kjøpes inn til kåpene så kjøpes stoffmengden i bestemte kvantum. Ut fra det kvantumet som er kjøpt inn kan man sy totalt 12 kåper. Matematisk betyr det:

$$x + y = 12 \qquad \text{(bibetingelse)} \tag{1.30}$$

I tillegg må både x og y være positive størrelser. Bibetingelsene utgjør dermed et *lukket* mengde, i dette tilfellet en endelig linje bestemt av lign.(1.30). Ifølge ekstremalverdisetningen vil da $P(x,y)$ ha globale maksimum- og minimumspunkter i denne lukkede mengden.

Anta i denne oppgaven at:

- det stasjonære punktet til $P(x,y)$ under bibetingelsen i lign.(1.30) representerer et maksimum [12]
- verdien av randpunktene til $P(x,y)$ under bibetingelsen i lign.(1.30) er mindre enn verdien av $P(x,y)$ i det stasjonære punktet [13]

d) Hvilken fordeling mellom **A** og **B** kåper maksimerer profitten $P(x,y)$? [14]

e) Hva er den maksimale profitten P_{maks} for MBM ved salg av disse kåpene?

f) Hva slags pris må MBM sette på kåpene for å oppnå maksimum profitt P_{maks}?

■

[12] Med denne antagelsen slipper du å sjekke at det stasjonære punktet faktisk er et maksimum, og ikke et minimum.

[13] Med denne antagelsen slipper du å sjekke randpunktene.

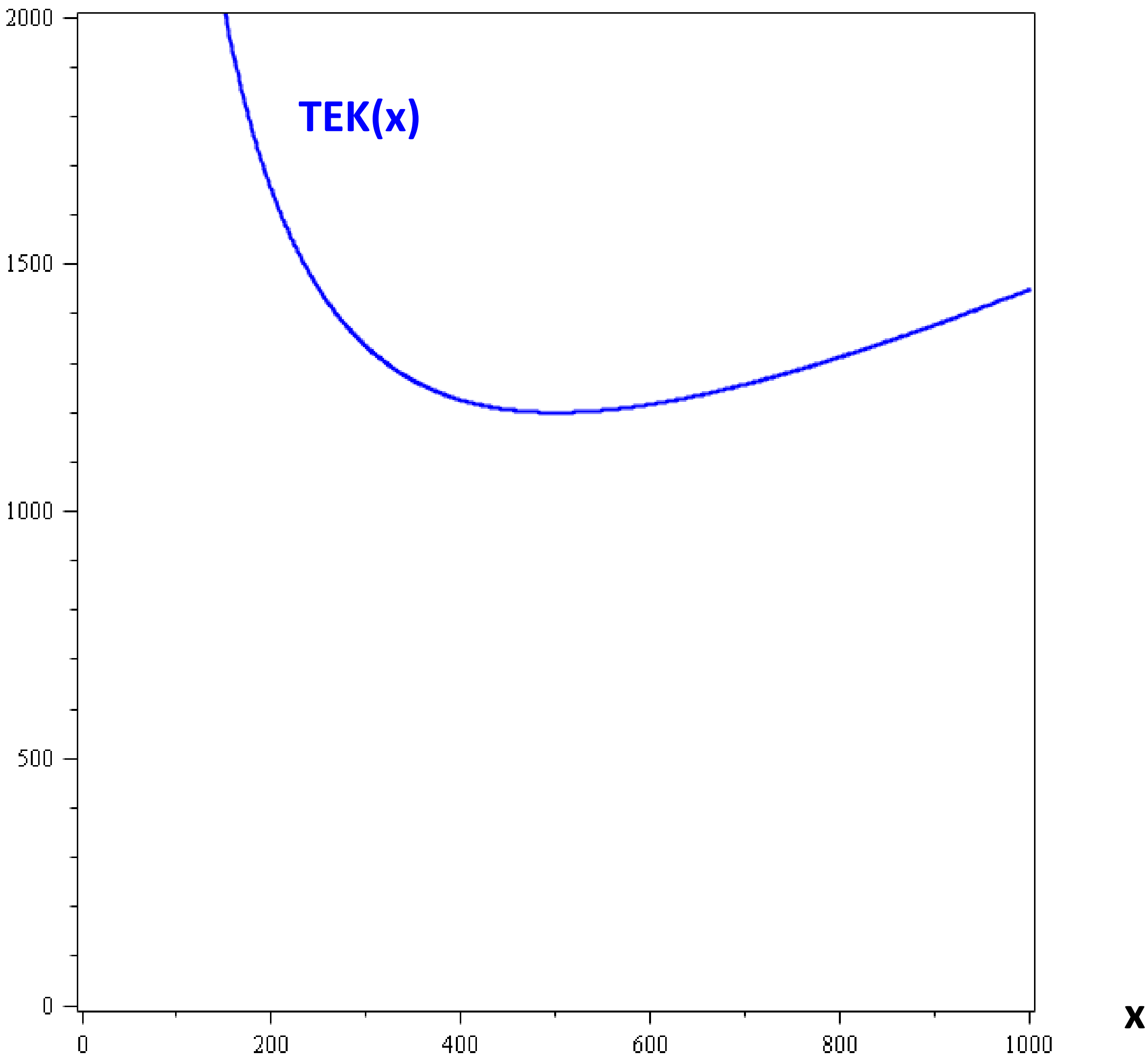
[14] Dvs. finn x og y som gir P_{maks}. Bruk Lagrange multiplikator metoden. Husk, du slipper å sjekke randen.

Vedlegg A

Studentnummer: ______________________________

(Lever inn dette arket sammen med resten av besvarelsen din.)

x	0	400	800
dK(x) / dx			



Avdeling for økonomi, informatikk og samfunnsfag
Høgskolen i Molde

Eksamen i

MAT100 Matematikk

Eksamensdag	**:**	**Fredag 7. juni 2013**
Tid	**:**	**09:00 – 13:00**
Faglærer/telefonnummer	**:**	**Per Kristian Rekdal / 924 97 051**
Hjelpemidler	**:**	**KD + formelsamling**
Antall sider inkl. forsiden	**:**	**10 + vedlegg (1 side)**
Målform	**:**	**Norsk (bokmål)**

Noen generelle råd:

- **Kladdeark skal ikke leveres inn. Disse blir ikke sensurert.**
- **Ikke gå før tiden. Bruk alle 4 timene. Sjekk svarene dersom det er tid til overs.**
- **Det er totalt 4 oppgaver. I *gjennomsnitt* har du en time per oppgave.**

Oppgave 1: (økonomi, kostnad, inntekt og fortjeneste)

Jobbfrukt leverer frukt til bedrifter og andre som ønsker det. Den totale kostnaden $K(x)$ i NOK per uke er:

$$K(x) \;=\; ax^2 + bx + c \quad , \tag{2.1}$$

hvor x = antall fruktfat produsert og solgt per uke og hvor a, b og c er konstanter. For det største og mest eksklusive fruktfatet gjelder følgende numeriske verdier:

$$a \;=\; 2 \;\; \text{NOK} \cdot \text{uke} \tag{2.2}$$

$$b \;=\; 200 \;\; \text{NOK} \tag{2.3}$$

$$c \;=\; 11\,200 \;\; \frac{\text{NOK}}{\text{uke}} \qquad \text{(faste kostnader per uke)} \tag{2.4}$$

Prisen på dette fruktfatet er $p = 560$ NOK.

a) Vis at den totale fortjenesten $F(x)$ per uke er gitt ved:

$$\boxed{F(x) \;=\; (p-b)x - ax^2 - c \qquad (2.5)}$$

b) Finn hvilke produksjonsmengder som gir balanse mellom inntekt og den totale kostnaden. [1]

Figur 2.1: Jobbfrukt.

[1] Dvs. finn de verdiene av x slik at $F(x) = 0$.

c) Vis at antall fruktfat som må produseres og selges per uke for å *maksimere* fortjenesten $F(x)$ er gitt ved:

$$\boxed{x = \frac{p-b}{2a} \qquad (2.6)}$$

Forsikre deg om at lign.(2.6) faktisk er et maksimum ved å betrakte $F''(x)$.

d) Sett inn tall og regn ut x i lign.(2.6). [2]

e) Enhetskostnaden, dvs. kostnad per fruktfat, er definert ved: $E(x) \overset{\text{def.}}{=} \frac{K(x)}{x}$.
Vis at denne er gitt ved: [3]

$$\boxed{E(x) = ax + b + \frac{c}{x} \qquad (2.7)}$$

f) Vis at antall fruktfat som må produseres og selges for å minimere enhetskostnaden er gitt ved:

$$\boxed{x = \sqrt{\frac{c}{a}} \qquad (2.8)}$$

Forsikre deg om at lign.(2.8) faktisk representerer et minimum, og ikke et maksimum, ved å betrakte $E''(x)$.

g) Sett inn tall og regn ut x i lign.(2.8). [4]

h) Sammenlign oppgave **1d** og **1g**. Kommenter svaret. [5]

■

[2] Husk rett benevning.
[3] Se side 12 i formelsamlingen, formelen for sum av brøker med samme nevner.
[4] Husk rett benevning.
[5] Er maksimum av fortjenetsen $F(x)$ sammenfallende med minimum av enhetskostnaden $E(x)$?

Oppgave 2: (priselastisitet / økonomi)

I denne oppgaven skal vi se på *priselastisiteten* til et produkt. Vi skal studere etterspørselen sin følsomhet for endring i prisen på produktet. *Priselastisiteten* kan skrives på følgende halvmatematiske form:

$$E_p(x) \; = \; \frac{\text{\%-vis endring i etterspørselen}}{\text{\%-vis endring i prisen}} \tag{2.9}$$

Matematisk er denne *pris*elastisiteten gitt ved:

$$\boxed{E_p(x) \quad = \quad \frac{d\,x(p)}{dp} \cdot \frac{p}{x(p)} \qquad\qquad (2.10)}$$

hvor $x(p)$ er etterspørselen og p er prisen. Denne priselastisiteten $E_p(x)$ kan deles inn i 3 kategorier. Disse tre kategoriene er:

Uelastisk:	etterspørselen er lite følsom for prisendring.
Nøytralelastisk:	etterspørselen har samme følsomhet som prisen.
Elastisk:	etterspørselen er følsom for prisendring.

I vedlegg A (1 side) finner en figur med en tallinje. På forskjellige plasser i denne tallinjen er det 3 bokser. I disse 3 boksene skal du skrive inn de 3 kommentarene nevnt ovenfor.

a) Fyll ut boksene i vedlegg A med de 3 kommentarene ovenfor.

Du er ansatt i markedsavdelingen til Oskar Sylte mineralvannfabrikk i Molde. Du ønsker å finne ut mer om hvordan markedet responderer på prisendring på 0.5 liter brus. Ut fra historiske data for salgstall og pris kan man estimere, ved hjelp av regresjonsanalyse, en modell for etterspørselen $x(p)$ som funksjon av prisen p. Resultatet fra denne analysen viser at $x(p)$, med god tilnærmelse, er gitt ved:

$$x(p) \;=\; c \cdot p^{-1.2} \tag{2.11}$$

hvor

$$c \;=\; 65\,000 \tag{2.12}$$

$$x(p) \;=\; \text{etterspørsel etter 0.5 liter ananasbrus per dag} \tag{2.13}$$

$$p \;=\; \text{pris for 0.5 liter ananasbrus} \tag{2.14}$$

b) Bestem priselastisiteten $E_p(x)$.

c) Tolk resultatet i oppgave **2a**.

d) Hvor mye vil den %-vise etterspørselen tilnærmet endre seg med dersom prisen på brus øker med 8 %? [6]

Figur 2.2: Brus.

[6] Du skal finne "%-vis endring i etterspørselen" når du vet at:

$$\text{%-vis endring i prisen} \;=\; 8\ \% \tag{2.15}$$

Dette betyr at du vet nevneren i lign.(2.9). Og du skal finne telleren.

e) Prisen på 0.5 liter brus er $p = 18$ NOK.
Hvor stor etterspørsel er det på 0.5 liter brus per dag?

f) Dersom prisen på 0.5 liter brus øker med 12 %, hva blir da etterspørselen $x(p)$ per dag?

■

Oppgave 3: (diskret vs kontinuerlig rente)

Du har startkapitalen $K_0 = 10\,000$ NOK som du skal sette i banken. I den sammenheng vurderer du tilbud fra to forskjellige banker, DnB og Sparebanken Møre.

a) Anta at DnB tilbyr terminmessig forrentning.
Vis at antall terminer n det tar for at startkapitalen K_0 har forrentet seg til verdien K_n, er gitt ved: [7]

$$\boxed{n = \frac{\ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\ln(1+r)} \qquad (2.16)}$$

hvor r er renten.

b) DnB tilbyr årlig rente, med rentefot $r = \frac{3\ \%}{100\ \%} = 0.03$ i hele perioden.
Hvor lang tid tar det før startkapitalen K_0 har forrentet seg til $K_n = 15\,000$ NOK? [8]

Figur 2.3: DnB.

[7] Hvilken formel bør du ta utgangspunkt i for å utlede lign.(2.16)? Se formelsamlingen dersom du ikke har den formelen i hodet.

[8] Bruk resultatet fra oppgave **3a**.

c) Anta at Sparebanken Møre tilbyr kontinuerlig forrentning.
Vis at den dimensjonsløse tiden t det tar for at startkapitalen K_0 har forrentet seg til verdien K_t, er gitt ved: [9]

$$\boxed{t = \frac{\ln\left(\frac{K_t}{K_0}\right)}{r} \qquad (2.17)}$$

hvor r er renten.

d) Sparebanken Møre tilbyr kontinuerlig rente, men med litt dårligere rente enn DnB, nemlig $r = \frac{2.8\ \%}{100\ \%} = 0.028$ i hele perioden.
Hvor lang tid tar det før startkapitalen K_0 har forrentet seg til $K_t = 15\,000$ NOK? [10]

e) Hvilket tilbud er best?

■

Figur 2.4: Sparebanken Møre.

[9]Hvilken formel bør du ta utgtangspunkt i for å utlede lign.(2.17)? Se formelsamlingen dersom du ikke har den formelen i hodet.

[10]Bruk resultatet fra oppgave **3c**.

Oppgave 4: (nyttemaksimering / Lagrange multiplikatorer / økonomi)

En person som liker å gå på kino og teater har funnet ut at følgende nyttefunksjon gjelder for henne:

$$\boxed{U(x,y) \;=\; 4\,x^{0.4}y^{0.6} \qquad (2.18)}$$

hvor

$$\begin{array}{lcll} x & = & \text{antall kinobesøk} & \text{(gode nr. 1)} \qquad (2.19) \\ y & = & \text{antall teaterbesøk} & \text{(gode nr. 2)} \qquad (2.20) \end{array}$$

I løpet av ett år ønsker hun maksimalt å bruke m kroner på teater og kino. Denne summen, samlet konsumutgift, skal dekke både kinoutgifter og teaterutgifter. Budsjettligningen for ett år blir dermed:

$$p_x \cdot x \;+\; p_y \cdot y \;\leq\; m \qquad (2.21)$$

hvor

$$\begin{array}{lcll} p_x & = & \text{pris for en kinobillett} & \text{(gode nr. 1)} \qquad (2.22) \\ p_y & = & \text{pris for en teaterbillett} & \text{(gode nr. 2)} \qquad (2.23) \end{array}$$

Figur 2.5: Kino og teater.

a) Gjør om ulikheten i budsjettligningen til likhet og formuler kort dette som et maksimaliseringsproblem.

b) Vis at løsningen på maksimeringsproblemet i oppgave **4a** er:

$$\boxed{x = \frac{2}{5} \cdot \frac{m}{p_x} \qquad , \qquad y = \frac{3}{5} \cdot \frac{m}{p_y} \qquad (2.24)}$$

Bruk Lagrange multiplikator metoden. [11]

Anta at prisen på kinobilletter er $p_x = 75$ NOK og at prisen på teaterbilletter er $p_y = 150$ NOK. Vår kino- og teaterentusiast bestemmer seg for å begrense de årlige utgiftene på kino og teater til $m = 6\,000$ NOK.

c) Hva blir de numeriske verdiene av lign.(2.24)?

d) Tolk svaret i oppgave **4c**. [12]

e) Hvor mye penger bruker hun på kinobilletter i året?

f) Hvor mye penger bruker hun på teaterbilletter i året?

■

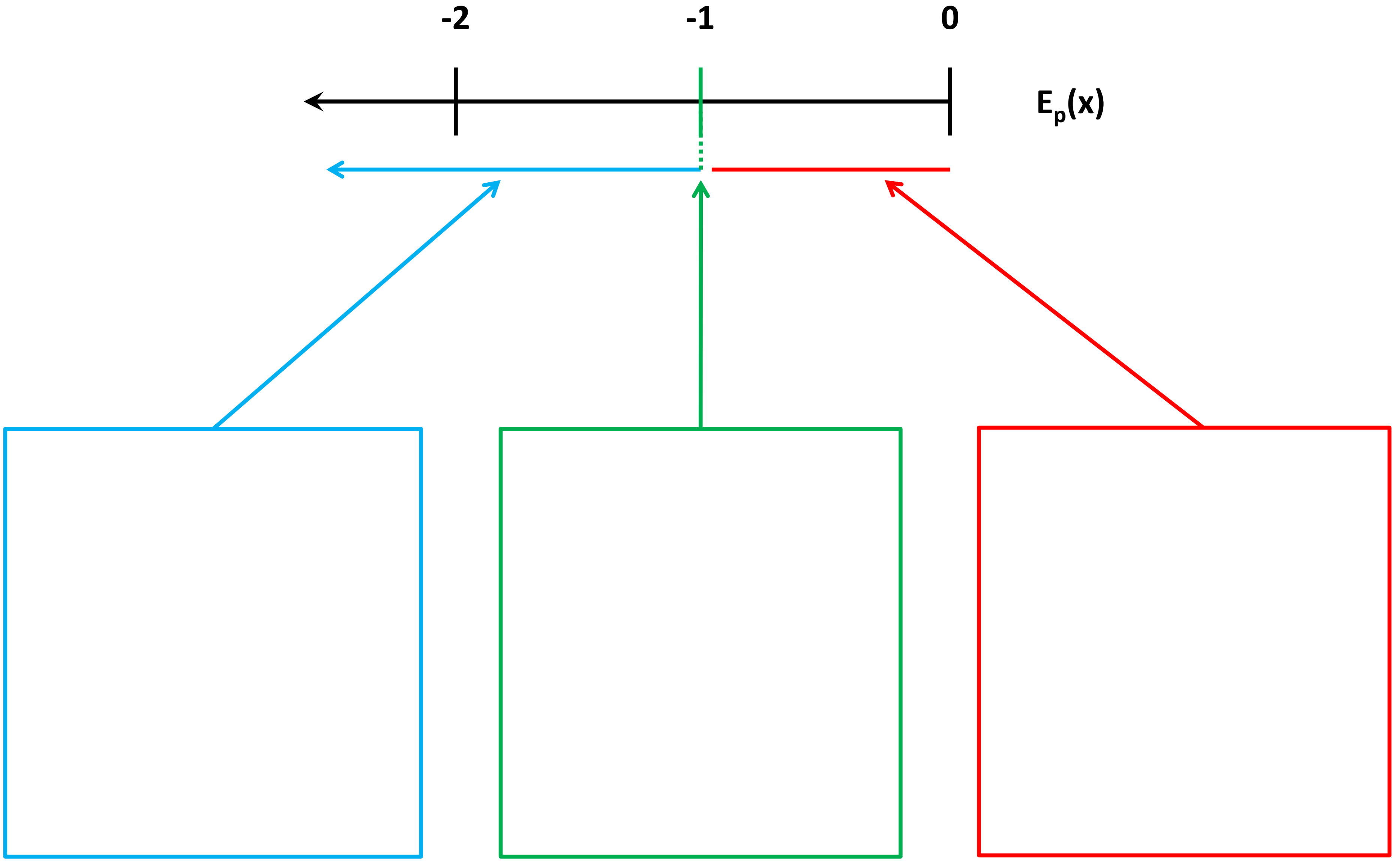
[11] For å være helt sikre på at lign.(2.24) gir maksimal nytte $U_{\max}$, og ikke minimal nytte $U_{\min}$, må man gjøre mer analyse. Men det trenger du ikke gjøre i denne oppgaven.

[12] Dvs. skriv svaret på "godt norsk".

Vedlegg A

(Husk å skrive studentnummer på vedlegget.)

Studentnummer: ____________________



Høgskolen i Molde

Eksamen i

MAT100 Matematikk

Eksamensdag	**:**	**Onsdag 18. desember 2013**
Tid	**:**	**09:00 – 13:00 (4 timer)**
Faglærer/telefonnummer	**:**	**Per Kristian Rekdal / 924 97 051**
Hjelpemidler	**:**	**KD + formelsamling**
Antall sider inkl. forsiden	**:**	**11 + vedlegg (1 side)**
Målform	**:**	**Norsk (bokmål)**

Noen generelle råd:

- **Skriv rett inn. Ikke bruk så mye tid på kladding.**
- **Kladdark skal ikke leveres inn. De blir ikke sensurert.**
- **Det er totalt 5 oppgaver.**

Oppgave 1: (algebra / faktorisering / brøk)

I makroøkonomi lærer man at en viktig sammenheng for realøkonomien er at tilgang på varer og tjenester i løpet av en periode er lik bruken. Dette kalles ofte for *generalbudsjettligningen*. For et land som er i økonomisk likevekt kan denne ligningen skrives:

$$\boxed{R \;=\; C + I + G + X \;, \qquad (3.1)}$$

hvor

$$\begin{array}{rcll} R &=& \text{inntekt, (nasjonalprodukt)} & \text{(R=“revenue”)} \qquad (3.2) \\ C &=& \text{konsumentfunksjon} & \text{(C=“consumption”)} \qquad (3.3) \\ I &=& \text{investering} & \text{(I=“investment”)} \qquad (3.4) \\ G &=& \text{offentlige utgifter} & \text{(G=“government”)} \qquad (3.5) \\ X &=& \text{netto eksport} & \text{(X=”export”)} \qquad (3.6) \end{array}$$

La oss anta at konsumentfunksjon C og netto eksport X er gitt ved følgende formler:

$$C \;=\; C_0 + c(R - T) \qquad (3.7)$$

$$X \;=\; X_0 - bR \;, \qquad (3.8)$$

hvor

$$\begin{array}{rcll} C_0 &=& \text{konstant, (inntektsuavhengig konsum)} & (3.9) \\ c &=& \text{marginal konsumrate} & (3.10) \\ T &=& \text{skattenivå} & (3.11) \\ X_0 &=& \text{konstant, (inntektsuavhengig eksport)} & (3.12) \\ b &=& \text{investors marginale rentefølsomhet} & (3.13) \end{array}$$

Figur 3.1: Makroøkonomi.

a) Vis at inntekten R (nasjonalprodukt) kan skrives

$$\boxed{R = m \cdot \big(C_0 + X_0 \; - \; cT \; + \; I \; + \; G \big) \; , \qquad (3.14)}$$

hvor vi har definert

$$m \overset{\text{def.}}{\equiv} \frac{1}{1 - c + b} \; , \tag{3.15}$$

som kalles *inntektsmultiplikatoren*.

b) La oss se nærmere på inntektsmultiplikatoren m i lign.(3.15).
i) Dersom c øker, vil da m øke eller minke?
ii) Dersom b øker, vil da m øke eller minke?

c) I matematikken kan man ikke dele på 0.
Hva slags sammenheng mellom c og b kan man derfor ikke ha i lign.(3.15)?

d) La oss se på følgende konkrete modell:

$$C = 100 + 0.25(R - T) \tag{3.16}$$
$$I = 150 + 0.25R - 800r \tag{3.17}$$
$$X = 0 \tag{3.18}$$
$$T = 200 \tag{3.19}$$
$$G = 200 \; , \tag{3.20}$$

hvor r = realrenten.
Sett de fem ligningene (3.16), (3.17), (3.18), (3.19) og (3.20) inn i generalbudsjettligningen i lign.(3.1) og vis at renten r som funksjon av inntekten R kan skrives på formen:

$$\boxed{r \; = \; -0.000625R \; + \; 0.5 \qquad \text{(IS-kurve)} \qquad (3.21)}$$

e) I vår modell inngår også tilbud M^T og etterspørsel M^E av penger. Dersom

$$M^E = 3R - 8000r \qquad (M^E = \text{"money", etterspørsel}) \tag{3.22}$$
$$M^T = 2000 \qquad (M^T = \text{"money", tilbud}) \tag{3.23}$$

og pengemarkedet er i likevet, dvs. $M^E = M^T$, kan man vise at renten r sfa. inntekten R kan skrives på formen: (Du skal ikke vise lign.(3.24). Bare ta den for gitt.)

$$\boxed{r = 0.000375R - 0.25 \qquad \text{(LM-kurve)} \qquad (3.24)}$$

Hva er inntekten R når økonomien er i likevekt? [1]

f) Hva er rentenivået r når det er likevekt i økonomien?

g) Hva slags type ligninger er lign.(3.21) og (3.24)?

h) I vedlegg A finner du to verditabeller og et koordinatsystem.
Fyll ut verditabellene og plott lign.(3.21) og (3.24) i dette koordinatsystemet.

i) For hva slags verdi av inntekten R (nasjonalprodukt) skjærer grafene hverandre i forrige oppgave?
Stemmer denne grafiske løsningen med den algebraiske løsningen i oppgave **1f**?

Investeringsnivået er $I_1 = 468$ når $R = 1200$ og $r = 0.04$ (=4 %). Når R økes til $R = 1500$ så øker investeringsnivået til $I_2 = 543$.

j) Hvor stor er den prosentvise endringen? [2]

■

[1] Dvs. finn R ved å sette lign.(3.21) og (3.24) lik hverandre. Løs med hensyn på R.
[2] I formelsamlingen finnes det en formel for prosentvis endring.

Oppgave 2: (derivasjon / algebra / tolkning / forståelse av ligninger)

Det koster penger å ha varer på lager. La oss i denne oppgaven kun se på kostnadene forbundet med lager- og bestillingskostnadene. Anta at lagerkostnadene per periode er gitt ved $HQ/2$ og at bestillingskostnadene er DS/Q slik at den totale kostnaden $TC(Q)$ per periode, "*total cost*", er:

$$\boxed{TC(Q) = \underbrace{\frac{H}{2}Q}_{\text{lagerkost.}} + \underbrace{\frac{DS}{Q}}_{\text{ordrekost.}} \qquad (3.25)}$$

hvor

$$Q = \text{ordrestørrelse} \qquad (\text{“quantity”}) \qquad (3.26)$$
$$H = \text{lagerholdkostnader per enhet per periode} \qquad (3.27)$$
$$D = \text{etterspørsel per periode} \qquad (\text{“demand”}) \qquad (3.28)$$
$$S = \text{kostnad per ordre} \qquad (3.29)$$

a) La oss se nærmere på hvert av leddene i $TC(Q)$, lign.(3.25)

i) Dersom Q øker, vil da lagerkostnaden øke eller minke?
ii) Dersom Q øker, vil da ordrekostnaden øke eller minke?

b) Vis at optimum av $TC(Q)$ inntreffer når

$$\boxed{\underbrace{\frac{H}{2}Q}_{\text{lagerkost.}} = \underbrace{\frac{DS}{Q}}_{\text{ordrekost.}} \qquad (3.30)}$$

dvs. kostnaden optimeres når lager- og ordrekostnadene er like.

c) For å være sikker på at lign.(3.30) representerer et *minimum* av $TC(Q)$, og ikke et maksimum, må vi gjøre "2. deriverttesten". Vis at den 2. deriverte av $TC(Q)$ er

$$\frac{d^2TC(Q)}{dQ^2} = \frac{2\,D\,S}{Q^3} \,, \tag{3.31}$$

og argumenter for hvorfor dette resultatet viser at lign.(3.30) representerer et *minimum* av $TC(Q)$.

d) Vis at lign.(3.30) er ekvivalent med den velkjente "EOQ"-formelen i lagerstyring, dvs. vis at lign.(3.30) gir, etter litt omskriving, følgende formel:

$$\boxed{EOQ = \sqrt{\frac{2DS}{H}} \qquad (3.32)}$$

e) Gi en tolkning av EOQ-formelen i lign.(3.32). [3]

f) Vis at den totale kostnaden i minimum, dvs. $TC_{\min} = TC(EOQ)$, er gitt ved:

$$\boxed{TC_{\min} = \sqrt{2\,D\,S\,H} \qquad (3.33)}$$

g) Gi en tolkning av $TC_{\min}$ i lign.(3.33).

[3]Dvs. hva betyr lign.(3.32) på "godt norsk"? Gi et kort svar.

Øverland bil og dekk A/S i Molde selger dekk til personbilmarkedet. De selger 100 dekk i måneden. Lagerkostnaden er 150 NOK per dekk per måned. Bestillingskostnadene er 1 850 NOK per bestilling. Dermed:

$$D = 100 \ \frac{\text{dekk}}{\text{måned}} \quad , \quad \text{etterspørsel per måned} \tag{3.34}$$

$$S = 1\,850 \ \text{NOK} \quad , \quad \text{kostnad per ordre} \tag{3.35}$$

$$H = 150 \ \frac{\text{NOK}}{\text{dekk måned}} \quad , \quad \text{lagerholdkostnader per dekk per måned} \tag{3.36}$$

h) Vanlig praksis hos Øverland bil og dekk er å bestille 100 dekk om gangen, dvs. èn bestilling per måned.

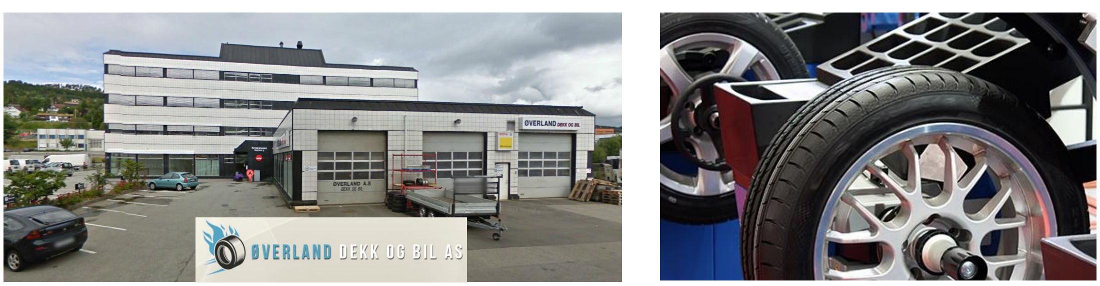
Hva er den totale kostnaden $TC(Q)$ med en ordrestørrelse på $Q = 100$?

i) Du blir ansatt som innkjøpsansvarlig hos Øverland dekk og bil.
Du forklarer til sjefen din at du mener ordrestørrelsen ikke er riktig, og at kostnadene kan reduseres dersom det bestilles mindre antall dekk per bestilling.
Før sjefen går med på å endre ordrestrørrelsen vil hun ha tall på bordet.

Hva slags ordrestørrelse bør firmaet ha for å minimere $TC(Q)$?

Hva er den totale kostnaden $TC(Q)$ da?

■



Figur 3.2: Øverland dekk og bil.

Oppgave 3: (diskret vs kontinuerlig rente)

Du har startkapitalen $K_0 = 10\,000$ NOK som du skal sette i banken. I den sammenheng vurderer du tilbud fra to forskjellige banker.

a) Anta at en bank tilbyr terminmessig forrentning.
Vis at antall terminer n det tar for at startkapitalen K_0 har forrentet seg til verdien K_n, er gitt ved: [4]

$$\boxed{n = \frac{\ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\ln(1+r)} \qquad (3.37)}$$

hvor r er renten.

b) DnB tilbyr årlig rente, med rentefot $r = \frac{3\ \%}{100\ \%} = 0.03$ i hele perioden.
Hvor lang tid tar det før startkapitalen K_0 har forrentet seg til $K_n = 15\,000$ NOK?

Figur 3.3: DnB.

[4] Hvilken formel bør du ta utgangspunkt i for å utlede lign.(3.37)? Se formelsamlingen dersom du ikke har den formelen i hodet.

c) Anta at en annen bank tilbyr kontinuerlig forrentning.
Vis at den dimensjonsløse tiden t det tar for at startkapitalen K_0 har forrentet seg til verdien K_t, er gitt ved: [5]

$$\boxed{t \;=\; \frac{\ln\left(\frac{K_t}{K_0}\right)}{r} \qquad (3.38)}$$

hvor r er renten.

d) Sparebanken Møre tilbyr kontinuerlig rente, men med litt dårligere rente enn DnB, nemlig $r = \frac{2.8\ \%}{100\ \%} = 0.028$ i hele perioden.
Hvor lang tid tar det før startkapitalen K_0 har forrentet seg til $K_t = 15\,000$ NOK?

e) Hvilket tilbud er best?

■

Figur 3.4: Sparebanken Møre.

[5]Hvilken formel bør du ta utgangspunkt i for å utlede lign.(3.38)? Se formelsamlingen dersom du ikke har den formelen i hodet.

Oppgave 4: (annuitetslån vs serielån)

En person har bestemt seg for å kjøpe ei leilighet. Leiligheten koster $K_0 = 1\,200\,000$ NOK. Lånet skal tilbakebetales over $n = 20$ år. Anta at renten er konstant $r = \frac{5\ \%}{100\ \%} = 0.05$ i hele perioden.

a) Lånet skal nedbetales som en etterskuddsannuitet.
Hvor stort blir det årlige *terminbeløpet* K?

b) Hvor mye betales i renter i løpet av lånets løpetid for et slikt annuitetslån?

c) Anta at lånet i stedet skal tilbakebetales som et serielån.
Hvor stort blir det årlige *avdraget*?

d) Hvor mye betales i renter i løpet av lånets løpetid for et slikt serielån?

$\blacksquare$

Figur 3.5: Kjøp av leilighet.

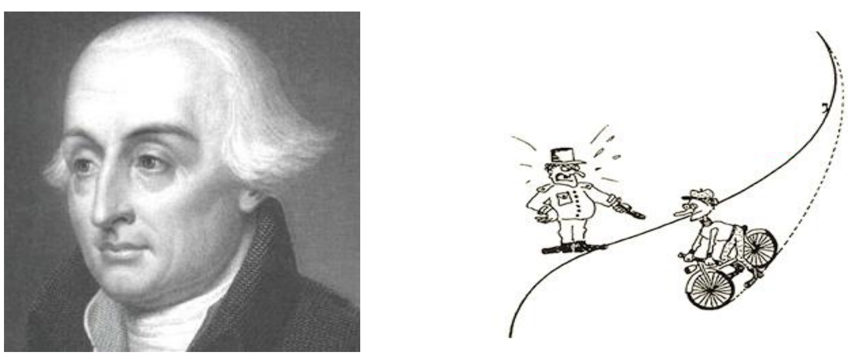
Oppgave 5: (Lagrange multiplikatorer)

I dette kurset har vi lært om funksjoner med flere variabler. Noe av det vi lærte om i den sammenheng var Lagranges multiplikator metode.

a) Hva kan Lagranges multiplikator metode brukes til?

b) Formuler Lagrange sin metode for en funksjon $z = f(x, y)$ med to variabler.

■

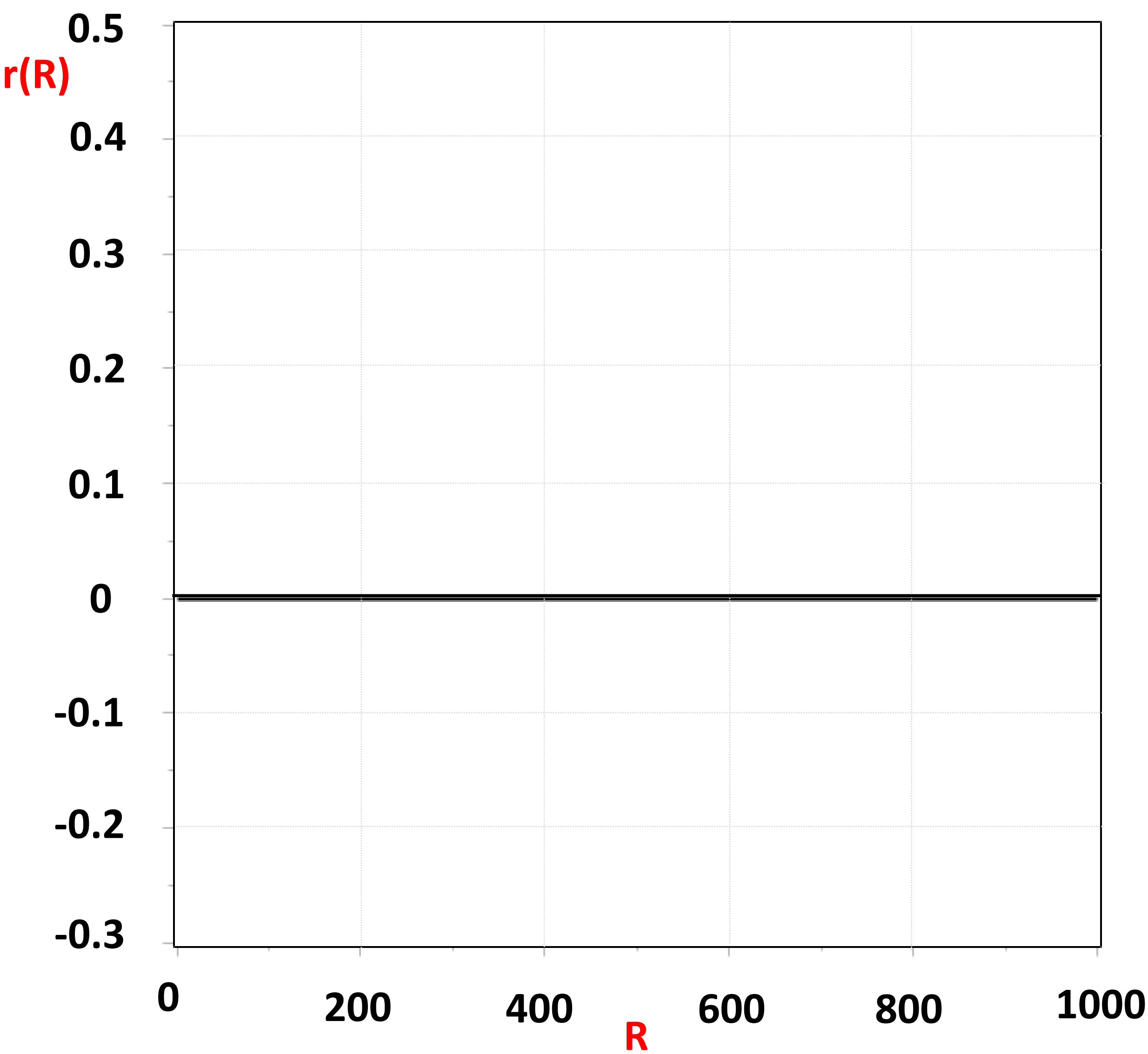


Figur 3.6: Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

Vedlegg A

R	0	500	1000
r(R) = - 0.000625*R + 0.5			

R	0	500	1000
r(R) = 0.000375*R - 0.25			



Høgskolen i Molde

Eksamen i

MAT100 Matematikk

Eksamensdag	**:**	**Tirsdag 3. juni 2014**
Tid	**:**	**09:00 – 13:00**
Faglærer/telefonnummer	**:**	**Per Kristian Rekdal / 924 97 051**
Hjelpemidler	**:**	**KD + formelsamling**
Antall sider inkl. forsiden	**:**	**11 + vedlegg (2 sider)**
Målform	**:**	**Norsk (bokmål)**

Noen generelle råd:

- **Kladdeark skal ikke leveres inn. Disse blir ikke sensurert.**
- **Ikke gå før tiden. Bruk alle 4 timene. Sjekk svarene dersom det er tid til overs.**
- **Det er totalt 5 oppgaver. I *gjennomsnitt* har du *under* en time per oppgave.**

Oppgave 1: (logistikkøkonomi)

Shell har oppdaget et nytt oljefelt i Barentshavet. Fagfolk har anslått oljefunnet til å inneholde 60 millioner fat med olje. Kostnadene ved å utvinne og føre oljen frem til markedet fra feltet er anslått til å være:

$$K(x) \;=\; x^2 + 50x + 425 \quad , \tag{4.1}$$

hvor x = antall **millioner** oljefat og $x \in [0, 60]$.
Funksjonen $K(x)$ gir kostnadene i millioner dollar.

a) Finn grensekostnaden $K'(x)$.

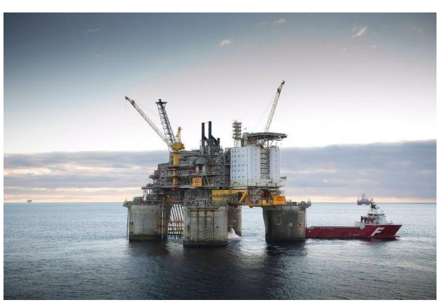
b) i) Finn grensekostnaden for å produsere 50 millioner oljefat, dvs. finn $K'(50)$.

ii) Gi en *kort* tolkning av resultatet fra oppgave **1b** i ut fra et økonomisk perspektiv.

Anta at oljeprisen er 100 dollar per fat i hele produksjonsperioden på feltet. Inntektene ved å selge x millioner oljefat er dermed:

$$I(x) = 100\,x \ , \tag{4.2}$$

målt i millioner dollar.

Figur 4.1: Oljefunn.

c) Vis at fortjenesten $F(x)$ som funksjon av x er gitt ved:

$$F(x) = -x^2 + 50x - 425 \tag{4.3}$$

d) i) Finn antall oljefat som bør utvinnes fra feltet for å **maksimere** profitten.

ii) Begrunn ved en *kort* regning hvorfor det stasjonære punktet du har funnet er et maksimum og ikke et minimum. [1]

iii) Hva er den maksimale fortjenesten?

e) Dersom oljeprisen er 110 dollar per oljefat istedet for 100 kan man vise, på samme måte som over, at fortjenesten til Shell blir 475 millioner dollar. (Dette skal **ikke** vises. Bare ta det for gitt).

Hvor stor er økningen av fortjenesten i prosent i forhold til svaret i oppgave **1d** iii? [2]

■

[1] Tips: Betrakt $K''(x)$.

[2] Hint: Økningen er mer enn 100 %.

Oppgave 2: (finansmatematikk)

Både serielån og annuitetslån kan beskrives av følgende formel:

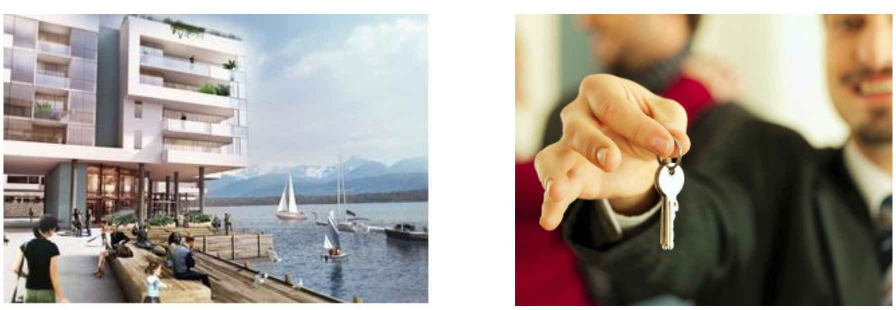
$$\boxed{\text{terminbeløp} \quad = \quad \text{avdrag} \quad + \quad \text{renter} \qquad (4.4)}$$

For et serielån er èn av de tre størrelsene i lign.(4.4) konstant.
For et annuitetslån er en annen av disse tre størrelsene konstant.

a) Hva slags størrelse av de tre er konstant for et serielån? Og for et annuitetslån? [3]

Prisene på boliger har de siste 5 årene fordoblet seg.
Anta at det er en konstant årlig prisvekst r disse årene.

b) Finn r. [4]



Figur 4.2: Bolig.

[3]Tips: Se formelsamling.
[4]Hva slags formel beskriver årlig vekst (årlig "rente")? Oppgi svaret i prosent %.

Du har tatt opp et lån på 900 000 NOK til kjøp av din første bolig.
Lånet skal tilbakebetales over $n = 20$ år.
Renten er 5 %, dvs. $r = 0.05$, per år i hele nedbetalingsperioden.

c) Anta at lånet er et **annuitetslån**.

i) Finn beløpet som skal betales ved utgangen av hvert år. [5]

ii) Finn det totale rentebeløpet R_n^{ann} som må betales i lånets løpetid.

d) Anta at lånet istedet skal tilbakebetales som et **serielån.**

Finn det totale rentebeløpet R_n^{serie} som må betales i lånets løpetid.

e) Dersom du har regnet rett i de to foregående oppgavene så har du funnet ut at man betaler mer i totale renter dersom man betaler lånet tilbake ved annuitet enn serie, dvs.:

$$R_n^{\text{ann}} \quad > \quad R_n^{\text{serie}} \tag{4.5}$$

Gi en *kort* forklaring på dette. [6]

■

[5] Dvs. finn *terminbeløpet* K.

[6] Ingen regning behøves. Kun en kort, enkel kvalitativ forklaring.

Oppgave 3: (logistikk og økonomi)

ASKO er Norges største grossist, og leverer dagligvarer til forskjellige dagligvarekjeder. Anta at du er ansatt som trailersjåfør hos ASKO. Føringene du har fått fra din arbeidsgiver er at de samlede konsumutgiftene må være begrenset - maksimum m NOK per måned. Konsumutgiftene skal dekke dieselutgifter og vedlikeholdsutgifter på den traileren som du disponerer.
La:

$$p_x = \text{pris per time for vedlikehold, NOK/time} \quad \text{(gode nr. 1)} \tag{4.6}$$
$$p_y = \text{pris på diesel, NOK/liter} \quad \text{(gode nr. 2)} \tag{4.7}$$

Budsjettligningen per måned blir dermed:

$$p_x \cdot x + p_y \cdot y \leq m \, , \tag{4.8}$$

hvor m = samlet konsumutgift og

$$x = \text{antall timer på verksted i gjennomsnitt per måned} \quad \text{(gode nr. 1)} \tag{4.9}$$
$$y = \text{antall liter diesel per måned} \quad \text{(gode nr. 2)} \tag{4.10}$$

Anta at nytten ved forbruk av vedlikehold x (gode 1) og diesel y (gode 2) per måned er bestemt av nyttefunksjonen:

$$U(x,y) = c\,xy^5 \, , \tag{4.11}$$

hvor c er en konstant.

Figur 4.3: Trailer fra Asko.

a) Gjør om ulikheten til likhet i lign.(4.8) og vis at y som funksjon av x er gitt ved:

$$\boxed{y \; = \; \frac{m}{p_y} \; - \; \frac{p_x}{p_y} \cdot x \qquad (4.12)}$$

for gitt m.

b) i) Finn et uttrykk for hvor linjen i lign.(4.12) skjærer y-aksen. [7]

ii) Finn et uttrykk for hvor linjen i lign.(4.12) skjærer x-aksen.

iii) Lign.(4.12) definerer en rett linje. Skriv ned et uttrykk for stigningstallet. [8]

Anta at prisen på vedlikehold av trailere er $p_x = 1250$ NOK/time og prisen på diesel er $p_y = 15$ NOK/liter. Din arbeidsgiver gir deg et budsjett på maksimalt $m = 35\,000$ NOK/mnd.

c) Sett inn tallene som oppgitt for parametrene og vis at lign.(4.12) blir:

$$y \; = \; 2333.33 \; - \; 83.33 \cdot x \tag{4.13}$$

med to desimales nøyaktighet.

d) For en gitt, bestemt nytte $U_0 = U(x, y)$, vis at y som funksjon av x i lign.(4.11) er gitt ved:

$$\boxed{y \; = \; \left(\frac{U_0}{c\,x} \right)^{\frac{1}{5}} \qquad (4.14)}$$

Denne ligningen kalles *indifferensligningen* for vår aktuelle nyttefunksjon.

[7] Finn et uttrykk for y når du setter $x = 0$.

[8] Her behøves ingen regning. Bare bruk lign.(4.12) og skriv ned et uttrykk for stigningstallet direkte.

e) I vedlegg A er indifferensligningen, dvs. lign.(4.14), plottet for en gitt verdi av c og tre forskjellige verdier av U_0. I tillegg finner du en verditabell i vedlegg A.

For lign.(4.13), fyll ut verditabellen og tegn inn kurven i figuren. [9]

f) Dersom du har tegnet den rette linjen riktig i oppgave **3e** så ser du at den tangerer èn av de tre indifferenskurvene.
Dette tangeringspunktet mellom indifferenskurven og budsjettligningen representerer et maksimum, altså den optimale kombinasjonen av x og y som gir maksimal nytte.

i) Hva er den optimale kombinasjonen av vedlikehold og diesel som gir maksimal nytte? [10]

ii) Marker tangeringspunktet på figuren i vedlegg A.

■

[9] Vedlegg A skal **legges ved** i din besvarelse. Husk å skriv på studentnummer på vedlegget.

[10] Dvs. hvilken kombinasjon av x og y gir størst nytte $U(x, y)$ innenfor budsjettet? Du skal løse problemet grafisk, dvs. kun ved avlesningen av figuren i vedlegg A. Ingen regning behøves.

Oppgave 4: (økonomi)

Anta at etterspørselen av aviser for løssalg er gitt ved:

$$\boxed{x(p) \;=\; c\,e^{-0.1p} \,, \qquad (4.15)}$$

hvor

$$c \;=\; 800 \qquad (4.16)$$

$$x(p) \;=\; \text{etterspørsel av aviser per dag} \qquad (4.17)$$

$$p \;=\; \text{pris per avis} \qquad (4.18)$$

a) En gutt som selger aviser setter seg som mål å selge $x(p) = 80$ i løpet av en dag. Hva må prisen på avisen settes til for at han skal nå dette målet? [11]

La oss nå se på *priselastisiteten* til avisene. Vi skal studere etterspørselen sin følsomhet for endring i prisen på aviser. *Priselastisiteten* kan skrives på følgende halvmatematiske form:

$$E_p(x) \;=\; \frac{\text{\%-vis endring i etterspørselen}}{\text{\%-vis endring i prisen}} \qquad (4.19)$$

Figur 4.4: Avisgutt.

[11]Sett $x(p) = 80$ inn i lign.(4.15) og løs med hensyn på p.

Matematisk er denne *pris*elastisiteten definert ved:

$$\boxed{E_p(x) \quad = \quad \frac{d\,x(p)}{dp} \cdot \frac{p}{x(p)} \qquad\qquad (4.20)}$$

hvor $x(p)$ er etterspørselen og p er prisen.

b) Vis at priselastisiteten $E_p(x)$ for avisene er ved:

$$E_p(x) = -0.1\,p \tag{4.21}$$

I oppgave **4c** og **4d** nedenfor, anta at prisen er $p = 25$ NOK per avis.

c) Tolk resultatet i oppgave **4b**.

d) Hva er "%-vis endring i etterspørselen" dersom prisen på aviser øker med 5 %? [12]

■

[12] Tips: Bruk lign.(4.19).

Oppgave 5: (Lagrange multiplikatorer)

Oppgave 3 dreide seg om å finne maksimum av en funksjon under en bibetingelse (budsjettligningen). Vi løste oppgaven grafisk ved å finne tangeringspunktet mellom indifferenskurven og budsjettligningen.

I denne oppgaven skal vi diskutere den algebraiske tilnærmelsen til et slikt problem. I den sammenheng skal vi se på Lagranges multiplikator-metode.

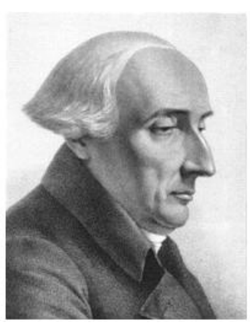
a) Forklar *kort*, på generelt grunnlag, hva Lagranges multiplikator-metode kan brukes til.

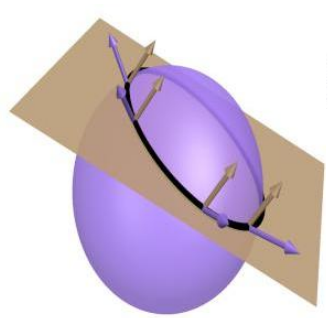
b) Formuler Lagrange sin metode for en funksjon $z = f(x, y)$ med to variabler.

c) I vedlegg B ser du en figur med en parabol $z = f(x, y)$. I tillegg er det tegnet inn tre nivåkurver samt en bibetingelse $g(x, y) = c$ (blå kurve), hvor c er en konstant.

Marker tydelig på figuren i vedlegg B hvor maksimum av $z = f(x, y)$ er under bibetingelsen $g(x, y) = c$. [13]

■





Figur 4.5: Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

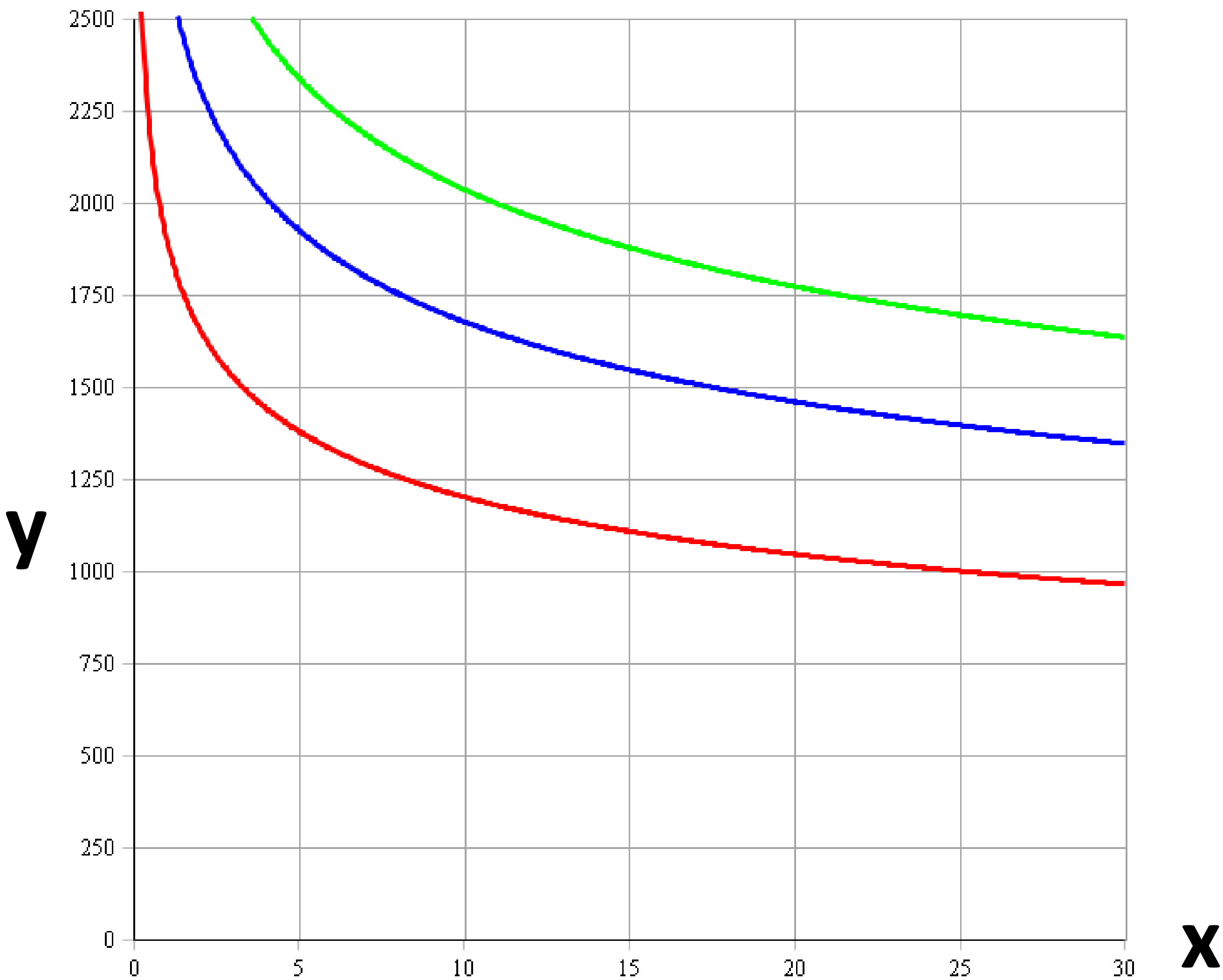
[13]Vedlegg B skal **legges ved** i din besvarelse. Husk å skriv på studentnummer på vedlegget.

Vedlegg A:

Student nummer: ____________________

Verditabell:

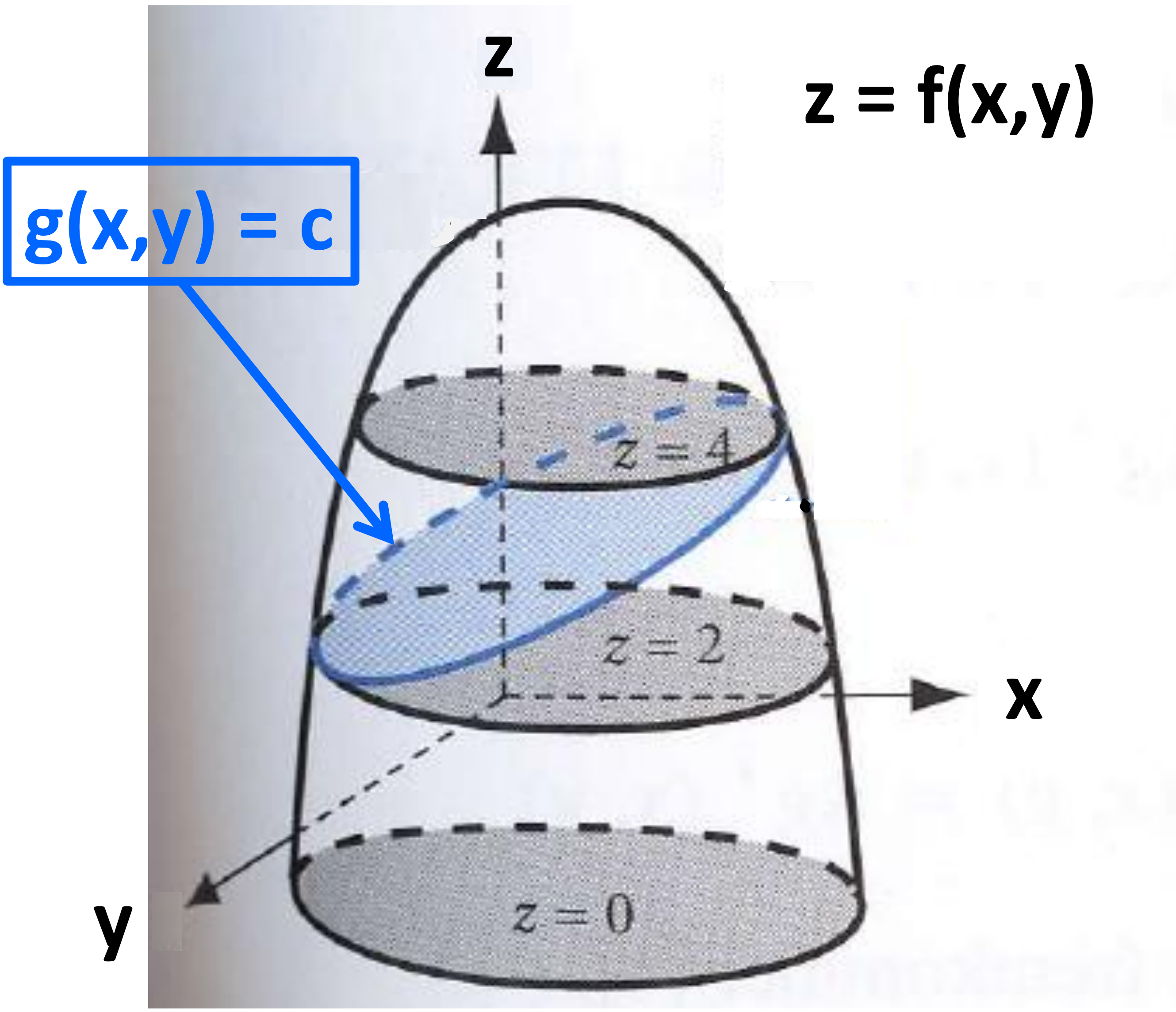
x	0	10	15	25
y				



(Dette vedlegget skal legges ved i din besvarelse).

Vedlegg B: **Student nummer:** ____________________

Marker tydelig på figuren maksimum av z=f(x,y) under bibetingelsen g(x,y)=c:



(Dette vedlegget skal legges ved i din besvarelse).

Høgskolen i Molde

Eksamen i

MAT100 Matematikk

Eksamensdag	**:**	**Torsdag 18. desember 2014**
Tid	**:**	**09:00 – 13:00 (4 timer)**
Faglærer/telefonnummer	**:**	**Molde:** **Per Kristian Rekdal / 924 97 051** **Kristiansund:** **Terje Bach / 932 55 838**
Hjelpemidler	**:**	**KD + formelsamling**
Antall sider inkl. forsiden	**:**	**9 + vedlegg (1 side)**
Målform	**:**	**Norsk (bokmål)**

Noen generelle råd:

- **Skriv rett inn. Ikke bruk så mye tid på kladding.**
- **Kladdark skal ikke leveres inn. De blir ikke sensurert.**
- **Det er totalt 4 oppgaver. Dvs. i *gjennomsnitt* èn time per oppgave.**

Oppgave 1: (logistikk og økonomi)

Varme- og belysningsprodusenten *Glamox* produserer to typer varmeovner for offshore og maritim industri. I den sammenheng defineres følgende beslutningsvariabler:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \text{antall produserte varmeovner av type 1 per dag} \\
X_2 &= \text{antall produserte varmeovner av type 2 per dag}
\end{aligned}
$$

Inntekten til Glamox ved salg av slike varmeovner er da gitt ved inntektsfunksjonen $I(X_1, X_2)$:

$$
\boxed{I(X_1, X_2) = 1200X_1 \ + \ 1750X_2 \qquad (5.1)}
$$

Denne inntektsfunksjonen er gitt i norske kroner (NOK). Glamox ønsker å maksimere denne inntekten.

Avdelingen til Glamox som kun driver med produksjon av disse varmeovnene har begrenset med ressurser. Per dag har de 75 timer disponibelt til produksjon av komponenter, 160 timer til montering og kun 30 timer til pakking. Disse **restriksjonene** kan man angi som lineære kombinasjoner av beslutningsvariablene:

$$
\text{restriksjoner} \ : \ \begin{cases} 3X_1 + 3X_2 \ \leq \ 75 & \text{(produksjon av komponenter)} \\[2ex] 4\,X_1 + 8\,X_2 \ \leq \ 160 & \text{(montering)} \\[2ex] X_1 + X_2 \ \leq \ 30 & \text{(pakking)} \end{cases} \tag{5.2}
$$

I tillegg til dette må selvsagt også beslutningsvariablene være positive, dvs. $X_1 \geq 0$ og $X_2 \geq 0$.

Figur 5.1: Glamox heating.

a) Hva er prisen på en ovn av type 1? Og type 2?
Hvor lang tid brukes på å pakke en ovn av type 1? Og type 2? [1]

b) Gjør om ulikhetene i lign.(5.2) til likheter og vis at restriksjonene kan skrives

$$\boxed{\begin{aligned} X_2(X_1) &= 25 - X_1 && (5.3) \\ X_2(X_1) &= 20 - \frac{1}{2}X_1 && (5.4) \\ X_2(X_1) &= 30 - X_1 && (5.5) \end{aligned}}$$

hvor X_2 er en funksjon av X_1.

c) I vedlegg A finner du tre verditabeller og et koordinatsystem.
Fyll ut verditabellene og plott lign.(5.3), (5.4) og (5.5) i dette koordinatsystemet. [2]

d) Skraver det området i figuren som tilfredsstiller alle restriksjonene.

e) Vil "pakking" være en begrensende ressurs for noen mulige kombinasjoner av X_1 og X_2?

f) Inntekten i lign.(5.1) skal **maksimeres** under restriksjonene beskrevet av lign.(5.2).
Dette er et LP optimaliseringsproblem som kan løses grafisk.

i) Indiker alle *hjørneløsninger* på figuren fra **c**.

ii) Les av alle hjørneløsninger [3] fra grafen og regn ut tilhørende inntekt $I(X_1, X_2)$.

iii) Hvilken kombinasjon av X_1 og X_2 gir *maksimal* inntekt $I(X_1, X_2)$?

■

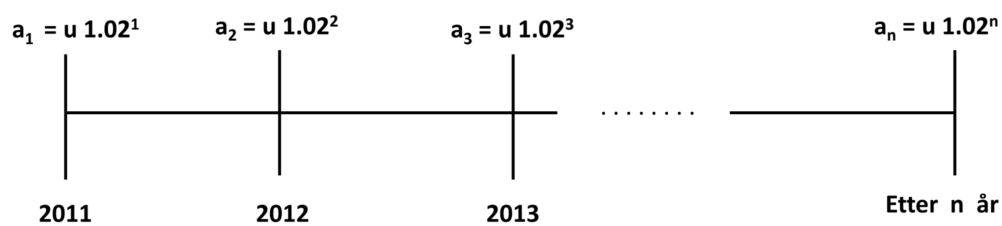
[1] I denne oppgaven skal du ikke regne deg frem til svaret. Bare skriv svaret rett ned.
[2] Husk at vedlegg A skal legges ved i din eksamensbesvarelse.
Husk også å skrive inn ditt studentnummer på vedlegget.
[3] Dvs. les av koordinatene (X_1, X_2) for alle hjørneløsninger.

Oppgave 2: (petroleumslogistikk)

I 2010 ble det totalt utvunnet

$$u = 31.2 \cdot 10^9 \text{ fat olje} \tag{5.6}$$

Analytikerne i Statoil estimerer at produksjonen av olje på verdensbasis må øke med 2 % de kommende år for å dekke den økende etterspørselen. Det betyr at det i 2011 må produseres $a_1 = u \cdot 1.02$ fat olje, $a_2 = u \cdot 1.02^2$ fat olje i 2012, $a_3 = u \cdot 1.02^3$ fat olje i 2013 osv. Se figur 5.2:



Figur 5.2: Utvinning av olje.

Summen av produsert olje n år etter 2010 er da:

$$S_n \;=\; a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \;=\; \sum_{i=1}^{n} a_i \tag{5.7}$$

a) Hva slags type rekke representerer a_i, hvor $i = 1, 2, \ldots n$?

b) Vis at summen S_n etter n år er gitt ved:

$$S_n = 51u\big(1.02^n - 1\big) \tag{5.8}$$

Figur 5.3: Olje.

Verdens kjente reserver R av olje var ved utgangen av 2010:

$$R = 1.33 \cdot 10^{12} \text{ fat olje} \tag{5.9}$$

c) Vis at antall år de kjente oljereservene vil rekke dersom man ikke finner mer olje er gitt ved:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{R}{51u} + 1\right)}{\ln 1.02} \tag{5.10}$$

d) Hvor lang tid tar det før man bruker opp oljereservene R dersom man ikke finner mer olje? [4]

■

[4] Regn ut det numeriske svaret.

Oppgave 3: (finansmatematikk)

Innen finansmatematikk er det mange formler. To viktige formler i den sammenheng som vi har lært om i "*MAT100 Matematikk*" er:

$$\boxed{S_n^{\text{ann}} = K(1+r)\,\frac{(1+r)^n - 1}{r} \qquad (5.11)}$$

og

$$\boxed{K_0 = K\,\frac{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}{r} \qquad (5.12)}$$

a) Forklart *kort* hva disse formlene beskriver.
Hva slags restriksjon**er** må man ha på renten r for at formlene skal gjelde?

b) Tegn en **enkel figur** som illustrerer tidslinjen som beskrives av formelen S_n^{ann} i lign.(5.11) for tilfellet med $n = 3$ terminer, i tråd med gjennomgangen i forelesningene og kompendiet. Sett inn blant annet formlene

$$K_1 = K(1+r) \tag{5.13}$$

$$K_2 = K(1+r)^2 \tag{5.14}$$

$$K_3 = K(1+r)^3 \tag{5.15}$$

$$S_3^{\text{ann}} = K_1 + K_2 + K_3 \tag{5.16}$$

på relevante plasser i figuren du lager.

c) Tegn en **enkel figur** som illustrerer tidslinjen som beskrives av formelen K_0 i lign.(5.12) for tilfellet med $n = 3$ terminer, i tråd med gjennomgangen i forelesningene og kompendiet. Sett inn blant annet formlene

$$K_{01} = \frac{K}{1+r} \tag{5.17}$$

$$K_{02} = \frac{K}{(1+r)^2} \tag{5.18}$$

$$K_{03} = \frac{K}{(1+r)^3} \tag{5.19}$$

$$K_0 = K_{01} + K_{02} + K_{03} \tag{5.20}$$

på relevante plasser i figuren du lager.

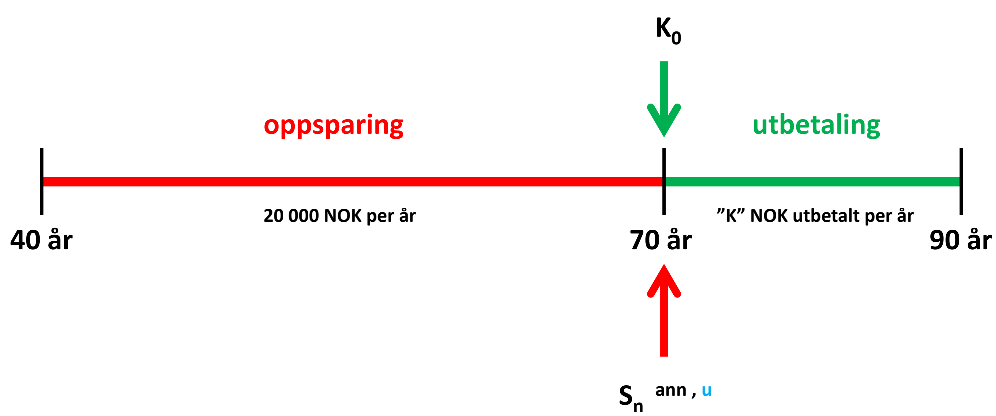
Anne Hansen er 40 år og ønsker å sette av penger til sin pensjon. Istedet for å betale til en pensjonskasse så bestemmer Anne seg for sette penger i banken.

Anne bestemmer seg videre for å sette av et fast beløp hvert år, $K = 20\,000$ NOK, de neste 30 årene, dvs. frem til hun blir 70 år.

Anta at renten er $r = \frac{5\ \%}{100\ \%} = 0.05$ i hele perioden på $n = 30$ år.

d) Hvor stort beløp har Anne oppspart når hun fyller 70 år, <u>like etter</u> at siste beløp er satt inn i banken?

e) Det oppsparte beløpet som du fant i oppgave **3d** ønsker Anne å ta ut i faste beløp èn gang i året, fra hun er 70 år til hun blir 90 år, altså i $n = 20$ år. Anta at renten er den samme, dvs. $r = 0.05$, for alle 20 årene. Hvor mye kan Anne ta ut i året?



Figur 5.4: Først sparing. Så utbetaling.

f) Istedet for å få utbetalt et fast beløp i året over "bare" 20 år så ønsker Anne få utbetalt et fast beløp til evig tid.
Anta at renten er den samme hele tiden, $r = 0.05$.

Hvor stort beløp kan Anne ta ut i hvert år til evig tid?

■

Oppgave 4: (logistikk og økonomi)

Varme- og belysningsprodusenten *Glamox* produserer mange typer lamper. En av disse lampene heter "*lux light*". Denne lampen produseres både ved fabrikken som Glamox har i USA og ved fabrikken i Molde.

Timeprisen for arbeiderne i USA er 320 NOK og timeprisen for arbeiderne i Molde er 360 NOK. Utgiften $u(x,y)$ til Glamox ved produksjon av "*lux light*" lamper når man bruker x antall timer i produksjonen i USA og y antall timer i produksjonen i Molde er dermed:

$$\boxed{u(x,y) = 320x \ + \ 360y \qquad\qquad (5.21)}$$

i NOK, hvor

$$\begin{aligned} x \quad &= \quad \text{antall timer i produksjonen av "\textit{lux light}" lamper ved fabrikken i USA} && (5.22) \\ y \quad &= \quad \text{antall timer i produksjonen av "\textit{lux light}" lamper ved fabrikken i Molde} && (5.23) \\ u(x,y) \quad &= \quad \text{utgift ved produksjon av "\textit{lux light}"} && (5.24) \end{aligned}$$

Glamox har funnet ut at sammenhengen mellom antall enheter "*light lux*" som produseres og antall timer som behøves til produksjon er gitt ved:

$$g(x,y) \ = \ 4\sqrt{x} \ + \ 6\sqrt{y} \tag{5.25}$$

hvor

$$g(x,y) \quad = \quad \text{antall produserte enheter av lampen "\textit{lux light}"} \tag{5.26}$$

Figur 5.5: Glamox.

Da Atlanten videregående skole i Kristiansund ble bygget trengte man 360 "*lux light*" lamper. Glamox vant anbudsrunden og skal levere 360 slike lamper. Glamox ønsker å minimere utgiftene $u(x,y)$ ved produksjon av 360 slike enheter, dvs. $u(x,y)$ skal minimeres under bibetingelsen:

$$g(x,y) \;=\; 4\sqrt{x}+6\sqrt{y} \;=\; 360 \qquad \text{(bibetingelse)} \tag{5.27}$$

a) Hvordan må fordelingen av produksjonstimer være mellom fabrikken i USA og Molde for å minimere utgiftene $u(x,y)$? [5] [6]

b) Hva er den minimale utgiften u_{min} for Glamox i denne sammenheng?

■

Figur 5.6: Atlanten videregående skole.

---

[5] Dvs. finn x og y som gir minst $u(x,y)$. Bruk Lagrange multiplikator metoden.

[6] For å være helt sikre på at man finner minimum av lign.(5.21), og ikke et maksimum, må man gjøre mer analyse.

Men en slik analyse behøver du *ikke* å gjøre her. Du trenger heller *ikke* å sjekke randen.

Vedlegg A

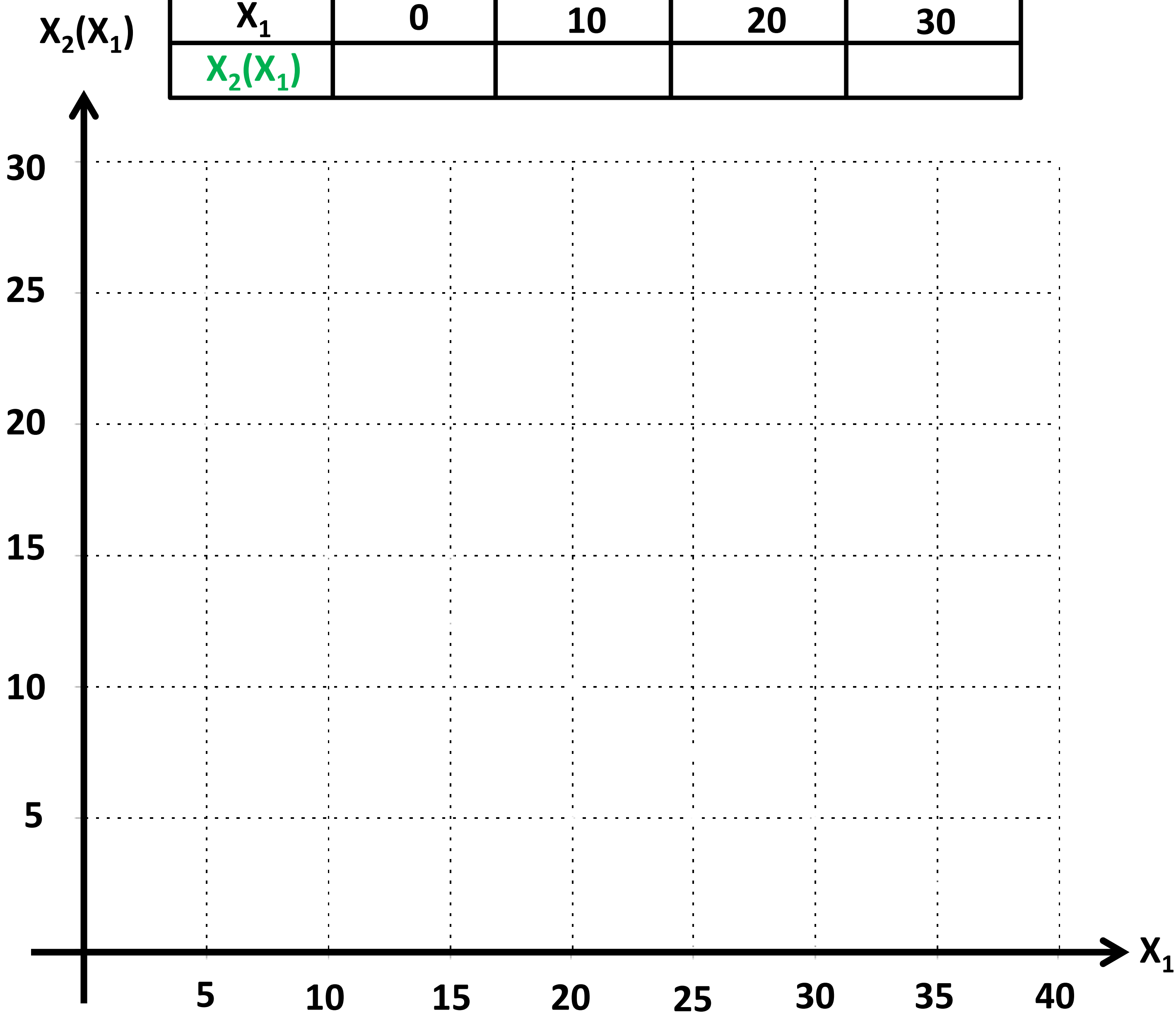
Studentnummer: ______________________________

(skriv inn ditt studentnummer her)

X_1	0	10	20	25
$X_2(X_1)$				

X_1	0	10	20	40
$X_2(X_1)$				

X_1	0	10	20	30
$X_2(X_1)$				



Høgskolen i Molde

Eksamen i

MAT100 Matematikk

Eksamensdag	**:**	**Fredag 5. juni 2015**
Tid	**:**	**09:00 – 13:00 (4 timer)**
Faglærer/telefonnummer	**:**	**Molde:** **Per Kristian Rekdal / 924 97 051** **Kristiansund:** **Terje Bach / 932 55 838**
Hjelpemidler	**:**	**KD + formelsamling fra 2014**
Antall sider inkl. forsiden	**:**	**9 + vedlegg (2 sider)**
Målform	**:**	**Norsk (bokmål)**

Noen generelle råd:

- **Skriv rett inn. Ikke bruk så mye tid på kladding.**
- **Kladdark skal ikke leveres inn. De blir ikke sensurert.**
- **Det er totalt 4 oppgaver. Dvs. i *gjennomsnitt* èn time per oppgave.**

Oppgave 1: (teori)

En andregradsligning kan skrives på formen

$$f(x) = ax^2 + bx + c \tag{6.1}$$

hvor a, b og c er koeffisienter. Nullpunktene til en slik andregradsligning kalles røttene til ligningen. Røttene kan uttrykkes ved hjelp av den såkalte "ABC-formelen":

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad , \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{6.2}$$

Uttrykket $b^2 - 4ac$ i kvadratroen kalles *diskriminanten*. La oss i denne oppgaven kun se på reelle røtter. For løsningsmengden til $f(x) = 0$ skiller man mellom tre tilfeller:

- to løsninger
- en løsninger
- ingen løsninger

Alternativene ovenfor er avhengig av om diskriminaten er null, negativ eller positiv:

- $b^2 - 4ac \; = \; 0$
- $b^2 - 4ac \; < \; 0$
- $b^2 - 4ac \; > \; 0$

a) Se vedlegg A. Dette vedlegget har 6 ledige ruter.
Fyll inn de 6 kulepunktene ovenfor i rett rute slik at antall løsninger og riktig verdi på diskriminanten hører sammen.

b) For reelle koeffisienter a, b og c så fremstiller $f(x)$ i lign.(6.1) en parabel.
I vedlegg B ser du et koordinatsystem. Tegn inn enkle prinsippskisser for hånd av lign.(6.1) som grafisk illustrerer tilfellene med en, to og ingen løsninger av $f(x) = 0$. [1]

■

[1] Du behøver ikke spesifikke verdier for a, b og c for å løse denne oppgaven.

Oppgave 2: (økonomi)

Bedriften “Rofi” i Molde produserer telt til forskjellige formål. Anta at bedriftens totale kostnaden ved produksjon og slag av x antall telt av en bestemt type er beskrevet av:

$$K(x) = x^2 + 200x + 250\,000 \tag{6.3}$$

med definisjonsmengde $x \in [0, 800]$. Funksjonen $K(x)$ gir kostnadene i NOK.

a) Finn grensekostnaden $K'(x)$.

b) i) Finn grensekostnaden når det produseres 150 telt, dvs. finn $K'(150)$.

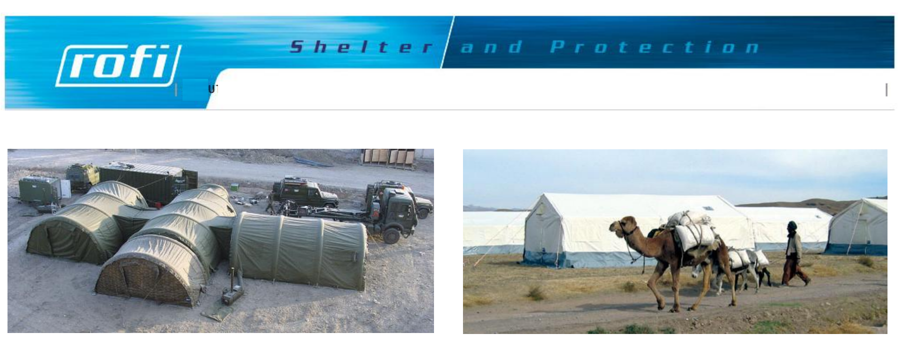
ii) Gi en *kort* tolkning av resultatet fra oppgave **2b** i ut fra et økonomisk perspektiv.

c) Vis at $K(x)$ er en voksende funksjon. [2]

Anta at prisen $p(x)$ på det aktuelle teltet varierer med antall enheter x som etterspørres, og er gitt ved formelen:

$$p(x) = 3200 - 4x\ , \tag{6.4}$$

hvor $x \in [0, 800]$. Funksjonen $p(x)$ gir prisen i NOK.



Figur 6.1: Telt fra Rofi.

[2]Hva kan du si om $K'(x)$ innenfor definisjonsmengden $x \in [0, 800]$ dersom $K(x)$ er voksende?

d) Finn bedriftens inntektsfunksjon $I(x) = x \cdot p(x)$, og vis at fortjenesten $F(x)$ er gitt ved:

$$F(x) = -5x^2 + 3000x - 250\,000 \tag{6.5}$$

e) Rofi går med overskudd når $F(x) > 0$.
Sett opp fortegnsskjema og finn for hvilke verdier av x Rofi går med overskudd.

f) i) Finn antall telt som må produseres og selges for å **maksimere** fortjenesten.

ii) Begrunn ved en *kort* regning hvorfor det stasjonære punktet du har funnet er et maksimum og ikke et minimum. [3]

iii) Hva er den maksimale fortjenesten?

g) Total enhetskostnad $TEK(x)$, dvs. gjennomsnittlig kostnad per telt, er gitt ved:

$$TEK(x) = \frac{K(x)}{x} \tag{6.6}$$

Finn minste enhetskostnad og for hvilken x det inntreffer. [4]

h) Sammenlign svaret i oppgave **2f** med svaret i oppgave **2g**.
Inntreffer maksimum for fortjenesten for samme verdi av x som minimum av enhetskostnaden?

i) Anta at Rofi selger $x_0 = 675$ telt ett gitt år.
Anta videre at de selger $x_1 = 540$ telt året etter.

Hva er den tilhørende prosentvise endringen i prisen på telt?

■

[3] Tips: Betrakt $K''(x)$.
[4] Husk også å begrunne hvorfor det er et minimum, og ikke et maksimum, du finner.

Oppgave 3: (økonomi og finansmatematikk)

Inflasjon er at det generelle prisnivået stiger sammenhengende over tid. I Hellas har inflasjonen, altså prisnivået, kommet helt ut av kontroll.

Anta at den årlige inflasjonen er 50 % i Hellas. La oss bruke notasjonen $r_{\text{inf}} = 0.50$ for inflasjonen.

Ved innskudd i bank får man 25 % rente. La oss bruke notasjonen $r_{\text{inn}} = 0.25$ for innskuddsrenten.

Myntenheten i Hellas er euro.

a) Du setter inn $K_0 = 100\,000$ euro i banken ved starten av et år.
Hvor mye penger K_5 har du i banken etter $n = 5$ år?

b) Inflasjonen vil redusere verdien på bankinnskuddet.
Hva er nåverdien $K_{0\,,\,b}$ til kapitalen K_5 som du har i banken etter 5 år? [5]

c) Sammenlign innskuddet $K_0 = 100\,000$ euro med nåverdien $K_{0\,,\,b}$ fra oppgave **3b**.
Kommenter sammenligningen. [6]

Figur 6.2: Hellas har en økonomi med stor inflasjon.

[5] Bruk resultatet for K_5 fra oppgave **3a**. Formelen for nåverdi finner du i formelsamlingen.
[6] Lønner det seg å ha penger i banken?

Istedet for å la pengene stå passivt på en bankkonto som i de foregående deloppgavene så tar du ut et fast beløp B fra kontoen ved slutten av hvert år. Etter n år blir da saldoen S_n i banken:

$$S_n \;=\; K_0 \cdot k^n - B\big(\,1 + k + k^2 + .. + k^{n-1}\,\big) \tag{6.7}$$

hvor vi har innført notasjonen $k \equiv 1 + r_{\text{inn}}$.

d) Bruk formelen for summen av en geometrisk rekke til å forenkle uttrykket i lign.(6.7). [7]

e) Vis at beløpet B du kan ta ut hvert år er:

$$B \;=\; 37\,185 \text{ euro} \tag{6.8}$$

dersom du bestemmer deg for å bruke opp saldoen S_n i løpet av $n = 5$ år. [8]

f) Du tar opp et lån på x euro i banken. Anta at renten på dette lånet er 30 %, dvs. $r = 0.30$. Anta videre at lånet er avdragsfritt, dvs. du behøver **kun** å betale rente på lånet.

Hvor stort lån x kan du ta opp dersom du bestemmer deg for å bruke det årlige beløpet B fra oppgave **3e** til å betale de årlige rentene?

g) Du bestemmer deg for å investere lånebeløpet x fra oppgave **3f** i eiendom. Anta at verdien av eiendommen stiger i takt med inflasjonen, dvs. verdien V_n på eiendommen er:

$$V_n = x \cdot (1 + r_{\text{inf}})^n \tag{6.9}$$

etter n antall år.

Etter $n = 5$ år bestemmer du deg for å selge eiendommen. Hvor stor kapital $K_{5\,,\,e}$ sitter du da igjen med ved en slik investering i eiendom? [9]

---

[7] Se formelsamlingen for formelen for summen av en geometrisk rekke.
[8] Sett $S_n = 0$ i ligningen du fant i oppgave **3d** og løs med hensyn på B.
[9] Tips: Kapitalen $K_{5\,,\,e}$ som du sitter igjen med er verdien på eiendomen V_n minus lånets størrelse x.

h) Regn ut nåverdien $K_{0\,,\,e}$ til kapitalen $K_{n\,,\,e}$ etter $n = 5$ år ved en slik investering i eiendom. [10]

i) Sammenlign svaret i oppgave **3b**, dvs. nåverdien $K_{0\,,\,b}$ ved å sette pengene i banken, med svaret i oppgave **3h**, dvs. nåverdien $K_{0\,,\,e}$ ved å investere i eiendom. Kommenter sammenligningen. [11]

■

[10] Tips: Det er inflasjonen som bestemmer nåverdien for kapitalen som er bundet opp i eiendom.

[11] Lønner det seg å investere i eiendom kontra det å ha pengene i banken?

Oppgave 4: (logistikk og økonomi)

NEAS, Nordmøre Energiverk AS, eier Reinset kraftverk og Ulvund kraftverk. La x og y betegne antall megawatt timer, MWh, som produseres i disse to lokale kraftverkene per døgn:

$$x \;=\; \text{antall MWh per døgn som produseres ved Reinset kraftverk} \tag{6.10}$$
$$y \;=\; \text{antall MWh per døgn som produseres ved Ulvund kraftverk} \tag{6.11}$$

Anta at kostnadene per døgn ved kraftverkene på Reinset og Ulvund er henholdsvis: (i NOK)

$$K_R(x) \;=\; x^2 + 500x \tag{6.12}$$
$$K_U(y) \;=\; y^2 + 300y \tag{6.13}$$

Den samlede kostnaden per døgn for disse to kraftverkene $K(x, y)$ er dermed: (i NOK)

$$K(x, y) \;=\; x^2 + 500x \;+\; y^2 + 300y \tag{6.14}$$

Antall MWh som samlet produseres per døgn $g(x, y)$ for disse to kraftverkene er $g(x, y) = x + y$.

NEAS inngår en avtale med Norsk Hydro på Sunndalsøra om å produsere og levere 500 MWh per døgn til en **fast pris**. Siden de har en fast pris på strømmen så ønsker de å minimere totalkostanden. NEAS ønsker altså å minimere $K(x, y)$ under bibetingelsen:

$$g(x, y) \;=\; x + y \;=\; 500 \tag{6.15}$$

I tillegg må selvsagt størrelsene x og y være positive, dvs. $x \geq 0$ og $y \geq 0$.

Figur 6.3: Reinset kraftverk og Ulvund kraftverk.

a) Hvordan må fordelingen av antall MWh være mellom de to kraftverkene for at NEAS skal minimere sine samlede kostnader $K(x, y)$? [12] [13]

b) Hva er den minste samlede kostnaden K_{min} for NEAS i denne sammenheng?

■

[12] Dvs. finn x og y som gir minst $K(x, y)$. Bruk Lagrange multiplikator metoden.

[13] For å være helt sikre på at man finner minimum av lign.(6.14), og ikke et maksimum, må man gjøre mer analyse.

Men en slik analyse behøver du *ikke* å gjøre her. Du trenger heller *ikke* å sjekke randen.

Vedlegg A

Høgskolen i Molde
Vitenskapelig høgskole i logistikk

Studentnummer: ___________________________

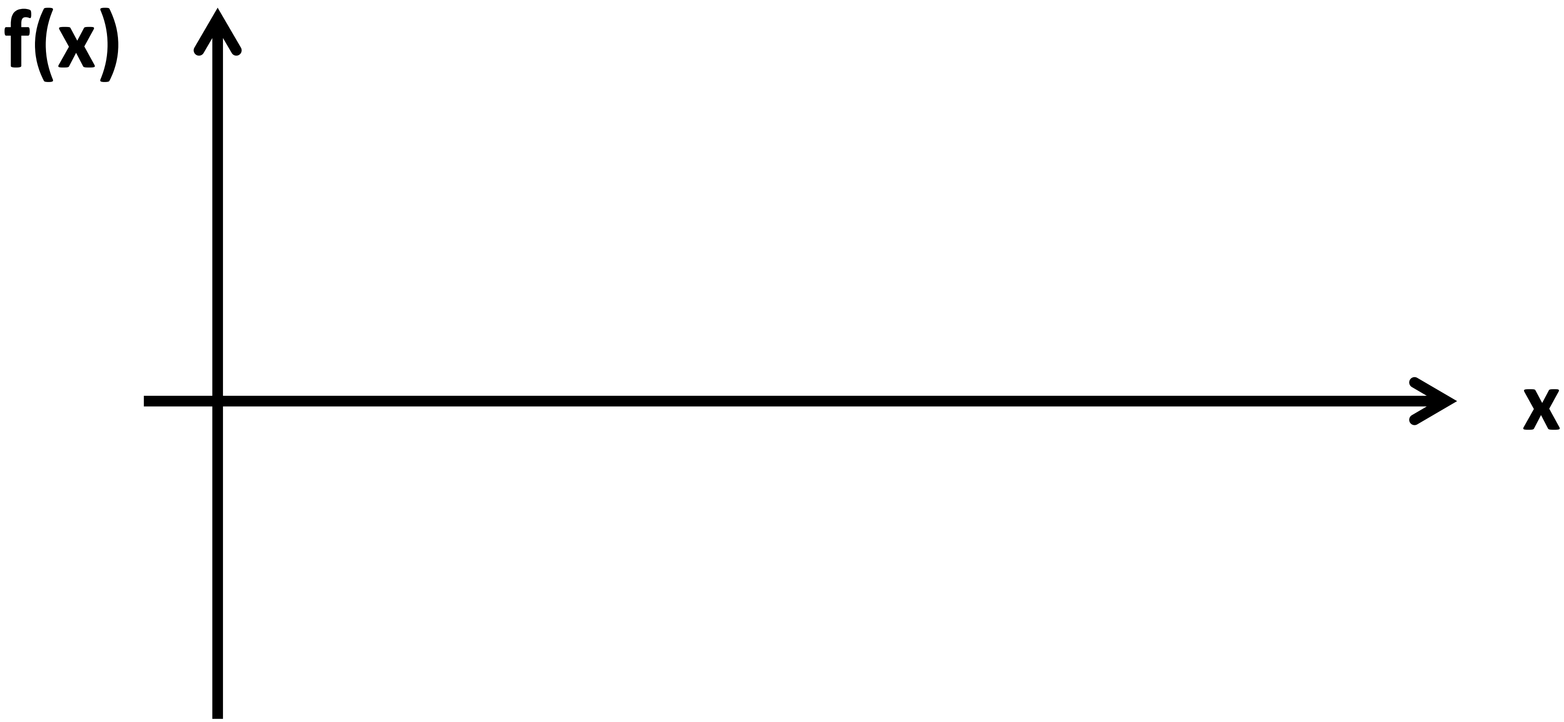
Diskriminant	Antall løsninger

(Dette vedlegget skal legges ved i din besvarelse).

Vedlegg B

Høgskolen i Molde
Vitenskapelig høgskole i logistikk

Studentnummer: ___________________________



(Dette vedlegget skal legges ved i din besvarelse).

Høgskolen i Molde

Eksamen i

MAT100 Matematikk

Eksamensdag	**:**	**Torsdag 17. desember 2015**
Tid	**:**	**09:00 – 13:00 (4 timer)**
Faglærer/telefonnummer	**:**	**Molde: Per Kristian Rekdal / 924 97 051 Kristiansund: Terje Bach / 932 55 838**
Hjelpemidler	**:**	**KD + formelsamling**
Antall sider inkl. forsiden	**:**	**11 + vedlegg (1 side)**
Målform	**:**	**Norsk (bokmål)**

Noen generelle råd:

- **Skriv rett inn. Ikke bruk så mye tid på kladding.**
- **Kladdark skal ikke leveres inn. De blir ikke sensurert.**
- **Det er totalt 4 oppgaver. Dvs. i *gjennomsnitt* èn time per oppgave.**

Oppgave 1: (økonomi)

La oss se på en bedrift som produserer et produkt. Anta at det totale resultatet $TR(x)$ som bedriften får ved å produsere x antall enheter er et bestemt produkt, kan beskrives av funksjonen

$$\boxed{TR(x) = I(x) - K(x) \qquad (7.1)}$$

hvor

$$TR(x) = \text{totalt resultat} \qquad (7.2)$$
$$I(x) = \text{total inntekt} \qquad (7.3)$$
$$K(x) = \text{total kostnad} \qquad (7.4)$$
$$x = \text{antall enheter produsert av produktet} \qquad (7.5)$$

Innen økonomi defineres grenseinntekt og grensekostnad som den **deriverte** av henholdsvis inntekts- og kostandsfunksjonen:

$$\text{grenseinntekt} \overset{\text{def.}}{=} \frac{dI(x)}{dx} \qquad (7.6)$$

$$\text{grensekostnad} \overset{\text{def.}}{=} \frac{dK(x)}{dx} \qquad (7.7)$$

a) Vis at **maksimalt resultat** $TR_{\max}$ oppnås når: [1]

$$\boxed{\text{grenseinntekt} = \text{grensekostnad} \qquad (7.8)}$$

b) Gi en *kort* generell tolkning av grensekostnaden i et økonomisk perspektiv. [2]

---

[1]Denne oppgaven krever lite regning. I tillegg, anta at $\frac{d^2TR(x)}{dx^2} < 0$ for $x > 0$, dvs. $TR(x)$ er konkav slik at lign.(7.8) representerer en betingelse for *maksimum* av $TR(x)$, ikke et minimum. Dermed behøver du heller ikke å utføre 1. derivasjonstesten eller 2. derivasjonstesten.

[2]Tips: Se formelsamling, kapittel 3.

Ello i Kristiansund produserer blant annet vaskemidler, såpeprodukter samt produkter for personlig pleie. Eksempler på dette er merkevarer som *Blenda*, *Lano* og *Solidox*.

Basert på erfaring viser det seg at kostnadsfunksjonen $K(x)$ per måned for en gitt type såpe er:

$$K(x) = ax^2 + bx + c \tag{7.9}$$

hvor $x =$ antall liter såpe produsert en bestemt måned, og a, b og c er konstanter.

Anta at prisen som Ello får for sitt såpeprodukt er p NOK/liter. Inntekten per måned for dette produktet dersom det selges x antall liter såpe per måned er:

$$I(x) = p \cdot x \tag{7.10}$$

c) Vis at det **totale resultatet** $TR(x)$ per måned for Ello er gitt ved:

$$\boxed{TR(x) = (p-b)x - ax^2 - c \qquad (7.11)}$$

d) Vis at antall liter såpe som må produseres en bestemt måned for å **maksimere** resultatet $TR(x)$ er gitt ved:

$$\boxed{x_{\max} = \frac{p-b}{2a} \qquad (7.12)}$$

Figur 7.1: Ello i Kristiansund.

e) Begrunn ved en *kort* regning hvorfor lign.(7.12) representerer et maksimum og ikke et minimum av $TR(x)$. Anta at konstanten a er positiv. [3]

f) Vis at det **maksimale** totale resultatet $TR_{\max} \equiv TR(x_{\max})$ er gitt ved:

$$\boxed{TR_{\max} = \frac{(p-b)^2}{4a} - c \qquad (7.13)}$$

For en bestemt type såpe er kostantene a, b og c gitt ved:

$$a = 0.001 \ \frac{\text{NOK}}{\text{liter}^2} \tag{7.14}$$

$$b = 10 \ \frac{\text{NOK}}{\text{liter}} \tag{7.15}$$

$$c = 3\,000 \ \ \text{NOK} \qquad \text{(faste kostnader)} \tag{7.16}$$

Anta at prisen som Ello får for sitt såpeprodukt er $p = 22$ NOK/liter.

g) Hvor mange liter såpe må Ello produsere per måned for å maksimere det totalte reslutatet $TR(x)$?

h) Hva er det maksimale resultatet $TR_{\max}$ som Ello kan oppnå per måned? [4]

■

[3] Tips: 2. derivasjonstesten.

[4] Her er vi på jakt etter tallverdien for $TR_{\max}$.

Oppgave 2: (finansmatematikk)

Innen finansmatematikk er det mange formler. To viktige formler i den sammenheng som vi har lært om i "*MAT100 Matematikk*" er:

$$\boxed{S_n^{\text{ann}} = K(1+r)\,\frac{(1+r)^n - 1}{r} \qquad (7.17)}$$

og

$$\boxed{K_0 = K\,\frac{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}{r} \qquad (7.18)}$$

a) Forklart *kort* hva disse formlene beskriver.
Hva slags restriksjon**er** må man ha på renten r for at formlene skal gjelde?

b) Ta utgangspunkt i lign.(7.17) og vis at denne ligningen kan løses med hensyn på K alene og skrives på følgende form:

$$K = \frac{rS_n^{\text{ann}}}{(1+r)\Big[(1+r)^n - 1\Big]} \tag{7.19}$$

Figur 7.2: Sparing.

c) Anta at du trenger 100 000 NOK om 4 år.
Du bestemmer deg for å sette av et *månedlig* beløp på K kroner de neste 4 årene.
Anta videre at renten er 4.5 % per år, dvs. den *månedlige* renten er:

$$r = \frac{0.045}{12} = 0.00375 \tag{7.20}$$

I løpet av 4 år er det

$$n = 12 \cdot 4 = 48 \tag{7.21}$$

månedlige terminer.

Hvor stort beløp K må du sette av i måneden for å få $S_n^{\text{ann}} = 100\,000$ NOK etter 4 år, èn termin etter at siste beløp er satt av?

d) Ta utgangspunkt i lign.(7.17) og vis at denne ligningen kan løses med hensyn på n og skrives på følgende form:

$$n \;=\; \frac{\ln\left(\frac{rS_n^{\text{ann}}}{K(1+r)} + 1\right)}{\ln(1+r)} \tag{7.22}$$

e) Anta istedet at renten er 6 %, dvs. den månedlige renten er:

$$r = \frac{0.06}{12} = 0.005 \tag{7.23}$$

Anta videre at du setter av det samme månedlige beløpet K som du fant i oppgave **2c**.

Hvor mange måneder må du nå spare for å få 100 000 NOK,
èn termin etter at siste beløp er satt av?

■

Oppgave 3: (priselastisitet og logistikk)

I denne oppgaven skal vi se på *priselastisiteten* til et produkt.
Vi skal studere etterspørselen sin følsomhet for endring i prisen på produktet. *Priselastisiteten* kan skrives på følgende halvmatematiske form:

$$E_p(x) \;=\; \frac{\%\text{-vis endring i etterspørselen}}{\%\text{-vis endring i prisen}} \tag{7.24}$$

Matematisk er denne *pris*elastisiteten gitt ved:

$$\boxed{E_p(x) \;=\; \frac{d\,x(p)}{dp}\cdot\frac{p}{x(p)} \qquad (7.25)}$$

hvor

$$x(p) \;=\; \text{etterspørselen av produktet} \tag{7.26}$$

$$p \;=\; \text{prisen på produktet} \tag{7.27}$$

Denne priselastisiteten $E_p(x)$ kan deles inn i 3 kategorier. Disse tre kategoriene er:

Uelastisk:	etterspørselen er **lite** følsom for prisendring.
Nøytralelastisk:	etterspørselen har **samme** følsomhet som prisen.
Elastisk:	etterspørselen er **følsom** for prisendring.

I vedlegget helt bakerst i denne eksamensoppgaven (1 side) finner en figur med en tallinje. På forskjellige plasser i denne tallinjen er det 3 bokser. I disse 3 boksene skal du skrive inn de 3 kommentarene nevnt ovenfor.

a) Fyll ut boksene i vedlegget med de 3 kommentarene ovenfor.

b) Deler av den røde linjen i vedlegget er stiplet, for $E_p(x) > 0$.
Hva betyr det at $E_p(x) > 0$? Gi en *kort* tolkning. [5]

[5] En kort begrunnelse på èn linje er nok.

Maersk er verdens største containerskipsoperatør. Anta at for en av rutene til Maersk mellom Norge og USA så kan sammenhengen mellom etterspørselen av antall containere som skal fraktes på denne ruten per måned, og prisen p per container for transporten, gitt ved:

$$\boxed{x(p) \;=\; 300 - p^2 \qquad\qquad (7.28)}$$

hvor

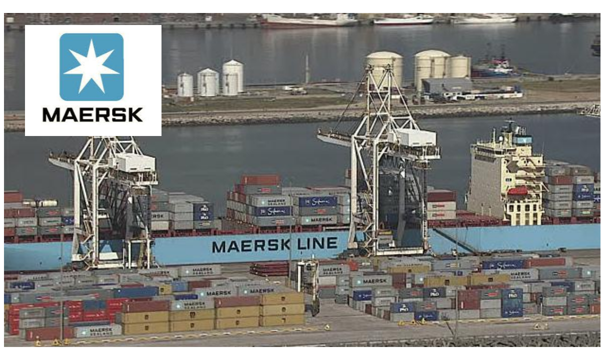
$$
\begin{aligned}
x(p) \;&=\; \text{etterspørsel av antall containere som skal transporteres} && (7.29)\\
&\quad\; \text{fra Norge til USA i måneden} && (7.30)\\
p \;&=\; \text{pris per container for transport mellom Norge og USA} && \\
&\quad\; \text{i 1000 NOK} && (7.31)
\end{aligned}
$$

c) Vis at priselastisiteten for den aktuelle ruten er gitt ved:

$$E_p(x) \;=\; -\frac{2p^2}{300 - p^2} \tag{7.32}$$

d) Hvor stor er priselastisiteten når $p = 5$?

e) Tolk resultatet i oppgave **3d**.



Figur 7.3: Maersk.

f) Bruk svaret fra oppgave **3d** til å finne hvor mye den %-vise etterspørselen vil endre seg dersom prisen på containertransporten øker med 5 %. [6]

g) Hva slags pris p må Maersk sette for at priselastisiteten skal være nøytralelastisk?

■

Figur 7.4: Maersk.

[6] Bruk gjerne lign.(7.24). Du skal finne "%-vis endring i etterspørselen" når du vet at:

$$\text{\%-vis endring i prisen} \; = \; 5 \; \% \tag{7.33}$$

Dette betyr at du vet nevneren i lign.(7.24). Og du skal finne telleren.

Oppgave 4: (logistikk og lagerkostnader)

Hustadmarmor AS i Elnesvågen er en bedrift som leverer "*slurry*" til industrien. Slurry er en hvit flytende masse som blant annet brukes til bleking av papir (se figur 7.5).

Det finnes to typer slurry, type 1 og type 2. Disse to typene slurry kan lagres i samme tank siden en tank kan deles to. Med variablene

$$x_1 \;=\; \text{antall tonn slurry av type 1 som lagres i en tank} \quad (\text{ i 1000 tonn }) \tag{7.34}$$
$$x_2 \;=\; \text{antall tonn slurry av type 2 som lagres i en tank} \quad (\text{ i 1000 tonn }) \tag{7.35}$$

og siden en tank har en kapasitet på 100 000 tonn, så har vi betingelsen:

$$g(x_1, x_2) \;=\; x_1 + x_2 \;=\; 100 \tag{7.36}$$

Anta at lagerkostnadene per uke forbundet med å lagre slurry av type 1 og 2 er henholdsvis: (i NOK)

$$C_1(x_1) \;=\; x_1^2 + 400x_1 \tag{7.37}$$
$$C_2(x_2) \;=\; x_2^2 + 300x_2 \tag{7.38}$$

Den totale lagerkostnaden per uke, $C(x_1, x_2) = C_1(x_1) + C_2(x_2)$, er dermed: (i NOK)

$$C(x_1, x_2) \;=\; x_1^2 + 400x_1 \;+\; x_2^2 + 300x_2 \tag{7.39}$$

I tillegg må selvsagt størrelsene x_1 og x_2 være positive, dvs. $x_1 \geq 0$ og $x_2 \geq 0$.

Figur 7.5: Hustadmarmor. Slurry.

a) Hustadmarmor ønsker å *minimere* den totale lagerkostanden $C(x_1, x_2)$.
Bruk Lagrange multiplikator metoden til å finne den x_1 og den x_2
som gir *minst* total lagerkostnad $C(x_1, x_2)$. [7]

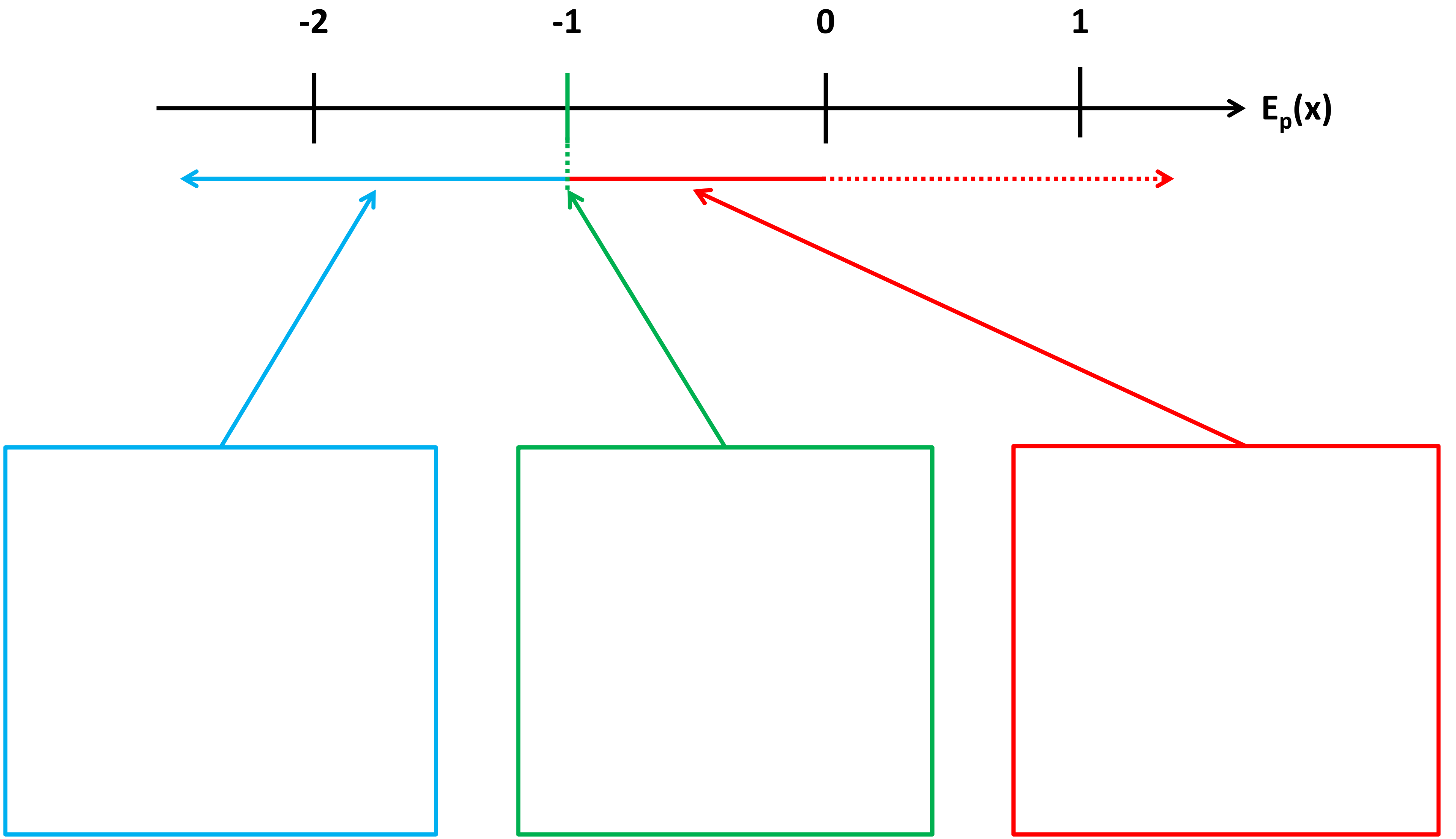
b) Hva er den minste samlede lagerkostnaden C_{min} for Hustadmarmor
i denne sammenheng?

■

[7] For å være helt sikre på at man finner minimum av lign.(7.39), og ikke et maksimum, må man gjøre mer analyse.

Men en slik analyse behøver du *ikke* å gjøre her. Du trenger heller *ikke* å sjekke randen.

Vedlegg: **Kandidatnummer:** ____________________



(Dette vedlegget skal legges ved i din besvarelse).

Høgskolen i Molde

Eksamen i

MAT100 Matematikk

Eksamensdag	**:**	**Fredag 10. juni 2016**
Tid	**:**	**09:00 – 13:00 (4 timer)**
Faglærer/telefonnummer	**:**	**Molde:** **Per Kristian Rekdal / 924 97 051** **Kristiansund:** **Terje Bach / 932 55 838**
Hjelpemidler	**:**	**KD + formelsamling fra 2015**
Antall sider inkl. forsiden	**:**	**12**
Målform	**:**	**Norsk (bokmål)**

Noen generelle råd:

- **Skriv rett inn. Ikke bruk så mye tid på kladding.**
- **Kladdark skal ikke leveres inn. De blir ikke sensurert.**
- **Det er totalt 4 oppgaver. Dvs. i *gjennomsnitt* èn time per oppgave.**

Oppgave 1: (økonomi)

Denne oppgaven handler blant annet om økonomi, kostnad og enhetskostnad.
Først et teorispørsmål, deretter skal vi anvende teorien på en bedrift som er opptatt av både økonomi og logistikk.

Anta at en bedrifts totale kostnader ved produksjon og salg av x antall enheter er $K(x)$.
Tilhørende total enhetskostnad $TEK(x)$, dvs. gjennomsnittlig kostnad per enhet,
er da definert ved:

$$TEK(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{K(x)}{x} \tag{8.1}$$

for $x > 0$.

Enhetskostnadens minimumsverdi $TEK_{\min}$ er bestemt at betingenelsen

$$\boxed{\frac{d\,TEK(x)}{dx} \;=\; 0 \qquad (8.2)}$$

eller

$$\boxed{\frac{d\,K(x)}{dx} \;=\; TEK(x) \qquad (8.3)}$$

a) Vis at lign.(8.2) og (8.3) er ekvivalente, dvs. at ligningene beskriver ett og samme utsagn. [1]

[1] Tips: Start med definisjonen av $TEK(x)$ i lign.(8.1). Deriver denne med hensyn på x og sett den deriverte lik null, slik som lign. (8.2) sier. Til slutt vil du ende opp med lign.(8.3).

Belysningsprodusenten Glamox produserer lysartikler for blant annet offshore og maritim industri.

En av lampene som Glamox selger er "*FL60*", se figur 8.1.
Anta at prisen $p(x)$ på en lampe av typen FL60 varierer med antall enheter x som produseres og selges, og er gitt ved formelen:

$$p(x) = 18 - 0.006x \qquad , \qquad 0 \leq x \leq 3000 \tag{8.4}$$

i antall 100 NOK.
Anta at Glamox sine totale kostnader ved produksjon og slag av x antall lamper er:

$$\boxed{K(x) = 0.004x^2 + 4x + 4500 \qquad (8.5)}$$

også det i antall 100 NOK.

b) Finn Glamox sin inntektsfunksjon $I(x) = x \cdot p(x)$, og vis at fortjenesten $F(x)$ er gitt ved:

$$F(x) = -0.01x^2 + 14x - 4500 \tag{8.6}$$

c) Glamox går med overskudd når fortjenesten er positiv, dvs. $F(x) > 0$.
Sett opp fortegnsskjema og finn for hvilke verdier av x Glamox går med overskudd. [2]

Figur 8.1: FL60 fra Glamox.

[2]Bruk "ABC-formelen", se formelsamling.

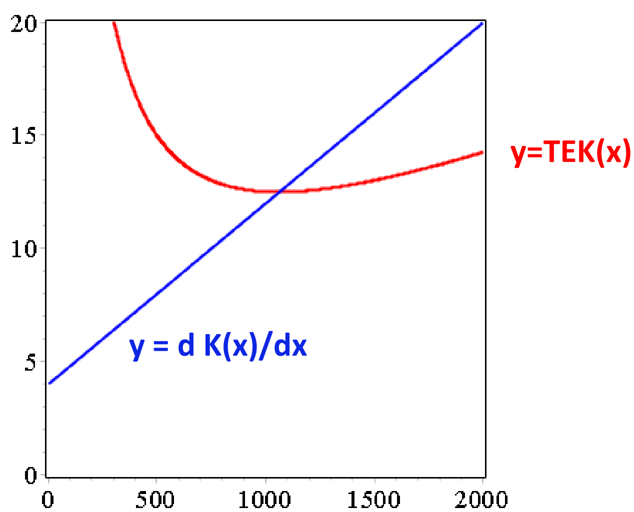
d) Total enhetskostnad $TEK(x)$, dvs. gjennomsnittlig kostnad per lampe, er definert ved lign.(8.1).

i) For hvilken verdi av x inntreffer minste enhetskostnad?

ii) Begrunn, med en *kort* regning, hvorfor det stasjonære punktet du fant i deloppgaven foran er et minimum, og ikke et maksimum. [3]

iii) Finn minste enhetskostnad.

I figur 8.2 nedenfor ser du plott av kurvene $y = \frac{d\,K(x)}{dx}$ og $y = TEK(x)$.



Figur 8.2: Plott av $y = \frac{d\,K(x)}{dx}$ og $y = TEK(x)$.

e) Finn grensekostnaden $\frac{d\,K(x)}{dx}$.

[3]Tips: Betrakt $TEK''(x)$.

f) Fra figur 8.2 ser vi at kurvene $y = \frac{d\,K(x)}{dx}$ og $y = TEK(x)$ har et skjæringspunkt.

Finn ved regning, ikke avlesning fra figuren, skjæringspunktet mellom $y = \frac{d\,K(x)}{dx}$ og $y = TEK(x)$. [4]

g) Sammenlign svaret fra oppgave **1d** med svaret fra oppgave **1f** og svar på/kommenter følgende:

- Er svarene sammenfallende?
- Stemmer dette med kurvene i figur 8.2? Gi en *kort* begrunnelse.

■

[4] Her skal du altså finne x og y når kurvene $y = \frac{d\,K(x)}{dx}$ og $y = TEK(x)$ er like.

Oppgave 2: (petroleumslogistikk)

Anta at verdens totale forbruk av olje i år 2020 er 30 milliarder fat, dvs.

$$f = 30 \cdot 10^9 \ \text{ fat olje} \tag{8.7}$$

hvor 10^9 er èn milliard.

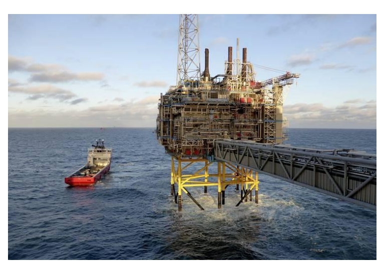
La oss i denne oppgaven bruke notasjonen:

$$\begin{aligned} a_1 &= \text{verdens totale oljeforbruk i år 2021} \\ a_2 &= \text{verdens totale oljeforbruk i år 2022} \\ &. \\ &. \\ a_n &= \text{verdens totale oljeforbruk } n \text{ år etter år 2020} \end{aligned} \tag{8.8}$$

Analytikere i OPEC, "*Organization of the Petroleum Exporting Countries*", har estimert at forbruket av olje i verden vil øke med 4 % per år etter år 2020.

Det betyr at i 2021 så vil verdens totale oljeforbruk være: $a_1 = f\,1.04^1$
Og i 2022 er det totale oljeforbruk være: $a_2 = f\,1.04^2$

a) Hvor stort vil forbruket av olje være på verdensbasis i år 2027, dvs. hva er a_7?



Figur 8.3: Olje.

Verdens samlede forbruk av olje n år etter år 2020 er da:

$$S_n^{\text{forbruk}} \;=\; a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \;=\; \sum_{i=1}^{n} a_i \tag{8.9}$$

b) Hva slags type rekke representerer a_i, hvor $i = 1, 2, ...n$?

c) Vis at summen S_n^{forbruk} er gitt ved:

$$\boxed{S_n^{\text{forbruk}} = 26f\,(1.04^n - 1) \qquad (8.10)}$$

d) Hvor stort er verdens totale oljeforbruk i 10 årsperioden fra og med 2021 og til med 2030?

Anta at verdens kjente reserver R av olje ved utgangen av 2020 er estimert til å være:

$$R = 1.5 \cdot 10^{12} \;\; \text{fat olje} \tag{8.11}$$

e) Vis at antall år de kjente oljereservene R vil rekke dersom man ikke finner mer olje etter 2020, er gitt ved:

$$\boxed{n \;=\; \frac{\ln\left(\frac{R}{26f} + 1\right)}{\ln 1.04} \qquad (8.12)}$$

f) Dersom verden ikke finner mer olje enn de kjente oljereservene R, ved hvilket år vil verden gå tom for olje?

■

Oppgave 3: (økonomi og finansmatematikk)

Innen finansmatematikk er det mange formler. To viktige formler i den sammenheng som vi har lært om i "*MAT100 Matematikk*" er:

$$\boxed{S_n^{\text{ann, u}} = K\,\frac{(1+r)^n - 1}{r} \qquad (8.13)}$$

og

$$\boxed{K_0 = K\,\frac{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}{r} \qquad (8.14)}$$

for konstant rente $r > 0$.

Formelen $S_n^{\text{ann, u}}$ beskriver summen av oppspart kapital når man setter av samme kapitalen K ved begynnelsen av hver termin i n antall terminer.
Summen $S_n^{\text{ann, u}}$ er da oppspart beløp umiddelbart etter at siste beløp er avsatt.

K_0 beskriver den nåverdien man må ha dersom man skal ta ut/betale tilbake samme beløp K i n terminer fremover.

a) Ta utgangspunkt i lign.(8.14) og vis at denne ligningen kan løses med hensyn på K alene og skrives på følgende form:

$$K = \frac{K_0 r}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}} \tag{8.15}$$

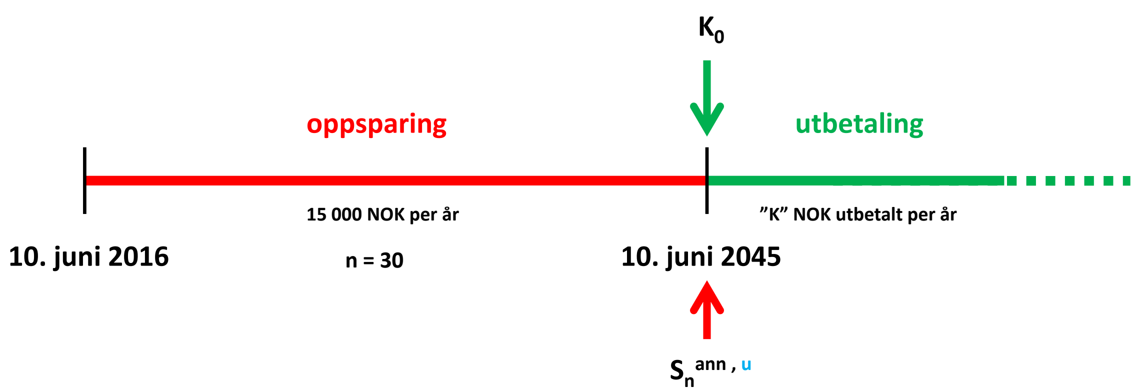
b) Ta atter en gang utgangspunkt i lign.(8.14) og vis at denne ligningen kan løses med hensyn på n alene og skrives på følgende form:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{1}{1-\frac{K_0 r}{K}}\right)}{\ln(1+r)} \tag{8.16}$$

Ola Johansen er 40 år og ønsker å sette av penger til sin pensjon.
Vi skal bruke lign.(8.13)-(8.16) for å se nærmere på pensjonen til Ola.

Han bestemmer seg for å sette av et årlig beløp på $K = 15\,000$ NOK med første innbetaling i dag, dvs. 10. juni 2016.
Siste beløp blir satt inn 10. juni 2045, dvs. det settes inn totalt $n = 30$ årlige beløp.

Anta at renten er $r = \frac{5\,\%}{100\,\%} = 0.05$ i resten av oppgaven.



Figur 8.4: Først sparing. Så utbetaling.

c) Hvor stort beløp $S_n^{\text{ann, u}}$ har Ola spart opp den 10. juni 2045, dvs. like etter at siste innskudd er satt inn i banken?

d) Den 10. juni 2045 så ønsker han å ta ut det oppsparte beløpet fra oppgave **3c** i faste årlige beløp de neste $n = 10$ årene.

Hvor stor blir den årlige utbetalingen disse 10 årene?

e) Dersom Ola istedet bestemmer seg å ta ut 60 000 NOK i året i pensjon, hvor lenge rekker da det oppsparte beløpet fra oppgave **3c**? [5]

f) Anta at Ola kun ønsker å leve på renten av sin pensjon $S_n^{\text{ann, u}}$.

Hvor mye kapital K må Ola sette av årlig fra og med år 2016 til og med år 2045, dvs. $n = 30$, dersom han skal få utbetalt 55 000 NOK per år som pensjonist? [6]

■

Figur 8.5: Pensjon.

[5] Tips: bruk en av formlene fra en av deloppgavene foran.
[6] Denne oppgaven er litt vanskelig. Ikke bruk for mye tid på den dersom du ikke får den til.

Oppgave 4: (økonomi)

En student ved Høgskolen i Molde har et budsjett på 8500 NOK per måned som hun skal bruke på bensinutgifter og husleie.

Anta at prisen på bensin er 15 NOK per liter. Anta videre at den typiske husleieprisen på hybler i Molde er 250 NOK per kvadratmeter. Dermed:

$$p_x = 15 \text{ NOK/liter} \qquad \text{(gode nr. 1)} \tag{8.17}$$

$$p_y = 250 \text{ NOK/m}^2 \qquad \text{(gode nr. 2)} \tag{8.18}$$

Budsjettligningen for studenten er da $p_x x + p_y y \leq m$, dvs.:

$$\boxed{15x + 250y \leq 8500 \qquad (8.19)}$$

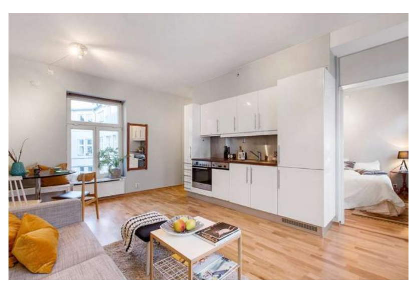
hvor $m = 8500$ NOK er samlet budsjett per måned for de to godene og

$$x = \text{antall liter bensin per måned} \qquad \text{(gode nr. 1)} \tag{8.20}$$

$$y = \text{antall kvadratmeter m}^2 \text{ på hybelen} \qquad \text{(gode nr. 2)} \tag{8.21}$$

Anta at nytten ved forbruk at bensin x (gode 1) og husleiegifter y (gode 2) er bestemt av nyttefunksjonen: ($x > 0$ og $y > 0$)

$$\boxed{U(x,y) = 2\ln(x) + 15\ln(y) \qquad (8.22)}$$



Figur 8.6: Bensin og hybel.

a) Regn ut nytten $U(x, y)$ for $x = 60$ og $y = 25$.

b) Vis at $x = 60$ og $y = 25$ er innenfor budsjettet.

c) Hvor mye bensin x og hvor stor hybel y kan studenten leie for å *maksimere* nytten $U(x, y)$ innenfor budsjettets rammer? [7] [8]

d) Hvor mye av budsjettet på 8500 NOK brukes dersom nytten maksimeres?

■

[7] Dvs. finn x og y som gir størst nytte $U(x, y)$. Bruk Lagrange multiplikator metoden.

[8] Ta det for gitt at $U(x, y)$ oppnår et globalt maksimum med budsjettligningen som bibetingelse.