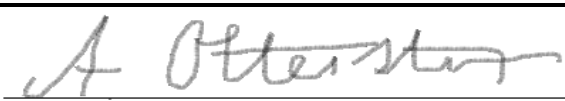




Universitetet  
i Stavanger

## DET TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

### MASTEROPPGAVE

Studieprogram/spesialisering:  Konstruksjoner og materialer Bygg	Vårsemesteret, 2011  Åpen / <del>Konfidensiell</del>
Forfatter: Anja Otterstrøm	 (signatur forfatter)
Fagansvarlig: Jonas Thor Snæbjørnsson Veileder(e): Jonas Thor Snæbjørnsson	
Tittel på masteroppgaven: Analyse av menneske-induserte vibrasjoner i dekker Engelsk tittel: Analysis of human-induced vibrations in slabs	
Studiepoeng: 30	
Emneord:  Dynamikk Vibrasjoner Menneske-indusert last Betong Sap2000	Sidetall: .....86.....  + vedlegg/annet: .....  Stavanger, ...15/06-2011..... dato/år

## Sammendrag

Menneske-induserte vibrasjoner er et økende problem, fordi mange bygg som bygges idag er flerbruksbygg med flere forskjellige funksjoner som kontorområder, butikker, restauranter, treningssenter m.m. under samme tak. Det blir derfor viktigere å sørge for at det tas hensyn til de ulike brukstypene ved prosjektering av byggene.

Denne oppgava er primært ei teori-oppgave, og tar for seg det ulike regelverket og anbefalingene som ligger til grunn for prosjektering av bygg utsatt for menneske-induserte vibrasjoner, spesielt fra dansing og aerobik. I tillegg blir flere forskjellige lastmodeller for aerobikliknende laster presentert og vurdert. Det finnes flere ulike måter å modellere slike laster, og de forskjellige lastene har ulike fordeler og ulemper. Det viser seg at de fleste modellene gir relativt like resultater, og det viktigste er å undersøke at egenfrekvensene ligger godt over lastfrekvensene.

# Innholdsfortegnelse

Forside .....	<b>Feil! Bokmerke er ikke definert.</b>
Sammendrag .....	2
Innholdsfortegnelse .....	3
Forkortelser og begreper .....	5
Generelt om funksjoner .....	5
Symbolregister: .....	5
Forord .....	7
1 Innledning .....	8
2 Vibrasjoner .....	10
2.1 Historikk .....	10
2.2 Grunnleggende vibrasjonslære .....	12
2.3 Menneske-induserte vibrasjoner .....	17
2.4 Vibrasjoner i dekker .....	19
2.5 Grenseverdier .....	20
2.5.1 Egenfrekvensgrenser .....	20
2.5.2 Vibrasjonsgrenser .....	21
2.6 Regelverk .....	24
2.6.1 Norsk standardverk .....	24
2.6.2 Britisk standard: BS 6399-1 .....	28
2.6.3 International Organization for Standardization: ISO 10137:2007 .....	28
3 Lastmodeller .....	33
3.1 Egenfrekvensmetode .....	33
3.2 Semisinusoid lastmodell .....	35
3.3 Forenkla fourierseriemodell .....	36
3.4 Gruppelastmodeller .....	38
3.5 Stokastisk, syntetisk lastmodell .....	42
3.6 Variabel massemodell .....	47
4 Analyser og resultater .....	49
4.1 Om analysene .....	49
4.2 Lastmodeller .....	50
4.2.1 Enkel semisinusmodell .....	50
4.2.2 Forenkla fourierseriemodell .....	51

4.2.3 ISOs fourierseriemodell.....	52
4.2.4 Enkel gruppelastmodell .....	53
4.2.5 Eksperimentell gruppelastmodell.....	54
4.2.6 Stokastisk, syntetisk lastmodell .....	55
4.2.7 Variabel massemodell.....	55
4.3 Sammenlikning av teoretiske lastmodeller .....	56
4.4 Analyse av enkelt dekke.....	58
4.4.1 Egenlast- og egenfrekvensanalyse .....	59
4.4.2 Resultater .....	61
4.5 Analyse av flerbruksbygg.....	68
4.5.1 Generelt om bygget og modellen .....	68
4.5.2 Modellering av dekket.....	70
4.5.3 Egenlast- og egenfrekvensanalyse .....	72
4.5.4 Resultater .....	75
5 Konklusjoner.....	83
5.1 Lastmodeller.....	83
5.2 Analyse av dekker.....	83
5.3 Standardverk.....	84
Referanseliste:.....	85

# Forkortelser og begreper

## Generelt om funksjoner

Det er gjennomgående brukt samme navn på parametre i formlene, i den grad de representerer samme variabel. Derfor er det i alle formlene brukt  $i$  for nummeret på den  $i$  harmoniske lastkomponenten, sjøl om det er brukt andre bokstaver i referansen hvor formelen er henta fra. For eksempel er det som symbol for fourierkoeffisienten brukt  $r$  i alle tilfeller, for lettere å kunne sammenlikne formlene. Symboler som er gitt forskjellig betydning i forskjellige kilder, er endra for å ikke skape forvirring om bruken.

Det gjøres oppmerksom på at lastperioden  $T_p = 1/f_p$ , og at kontaktratioen  $\alpha = t_p/T_p$ . Alle formlene er endra slik at de er entydig framstilt ved hjelp av de samme symbolene.

For faseforskyvningene  $\varphi_i$  er disse noen ganger negativt, og noen ganger positivt. Det må derfor bemerkes at de numeriske verdiene for  $\varphi_i$  ikke kan sammenliknes direkte.

Når det snakkes om vibrasjoner, gjelder dette vertikale vibrasjoner, altså vibrasjoner i z-aksen, dersom ikke annet er nevnt.

## Symbolregister:

$F(t)$  – dynamisk lastfunksjon

$t_p$  – kontakttid med golvet

$T_p$  - lastperiode

$K_p - F_p/G =$  dynamisk lastforsterkningsfaktor  $=\pi/2\alpha$

$F_{p,maks}$  - maksimal dynamisk last

$G$  - personens vekt i N (vanlig gående  $G \approx 800$  N)

$\alpha$  – kontaktratio  $\alpha=t_p/T_p$ ; andel av perioden hvor personen er i kontakt med golvet

$a_i$  - cosinusfunksjonens fourierkoeffisient nummer  $i$

$b_i$  - sinusfunksjonens fourierkoeffisient nummer  $i$

$r_i$  - fourierkoeffisient til den  $i$ -harmoniske lastkomponenten.

$f_p$  - aktivitetsfrekvens [Hz] ( $=1/T_p$ )

$\varphi_i$  - faseforskyvning av den  $i$ -harmoniske i forhold til den første harmoniske.

$n$  - totalt antall harmoniske lastkomponenter

$C(N)$  – gruppekoordinasjonsfaktoren

$i$  – nummer på den harmoniske lastkomponenten

$\beta$  – dynamisk lastfaktor, Allen

$w_p$  – påført last

$w$  – dekkets last (egenvekt)

$a_i/g$  – akselerasjonsgrense

## Forord

Da jeg først begynte å formulere denne oppgava, var jeg veldig usikker på hva jeg begikk meg inn på. Menneske-induserte laster er et helt nytt område for meg, og jeg måtte starte helt på null når det gjaldt kunnskap om temaet. Siden fagområdet er såpass lite regulert som det er, har det vært til tider svært vanskelig å få tak i relevant informasjon. De fleste artiklene jeg har brukt, er publisert i et utall forskjellige former i løpet av de siste tre tiår. Det har vært en stor oppgave å skaffe seg alt av artikler, utgatte standarder, presentasjoner, bøker og andre utgivelser, men det har for det meste gått greit. I den forbindelse ønsker jeg å rette en stor takk til bibliotekarene ved Universitetet i Bergen, Høyskolen i Bergen og Sintef Byggforsk, som gjennom hele perioden har hjulpet meg med litteratursøk, sendt meg artikler og standarder og gitt meg uunnværlig veiledning i litteratur- og referansejungelen.

Jeg vil gjerne takke til Multiconsult Bergen, som har hjulpet med med kontorplass, programvare, standardverk, gode råd og tips og ikke minst et hyggelig arbeidsmiljø.

Mange takk også til min veileder ved Universitetet i Stavanger, Jonas Thor Snæbjørnsson, som har inspirert meg til å velge tema og utforme problemstilling, svart på mine mange e-poster fortløpende og generelt vært til god støtte.

Tusen takk til Jan Holdus ved EDR for hjelp med programvare og lisens, og for kjappe tilbakemeldinger når jeg satt fast i Sap2000.

Til sist, men ikke minst, vil jeg takke min kjære Torbjørn Cornelius Sletbakk, som har vært utrolig støttende og tålmodig i den stressende innspurten.

# 1 Innledning

Det bygges stadig flere store bygg med flere funksjoner; skolebygg med gymsaler, kontorbygg med treningsrom, kjøpesentre med kontorplasser osv. I mange bygg oppdager man seinere problemer med vibrasjoner på grunn av dynamiske laster – det kan være på grunn av mennesker som går, mennesker som hopper og danser, tunge traller som rulles over golv etc. Vibrasjoner kan forplante seg vertikalt gjennom golv/tak, eller horisontalt gjennom dekker eller bjelker.

Denne oppgava har som formål å undersøke og presentere det faglige grunnlaget for vurderinger av *vertikale, menneske-induserte vibrasjoner i bygg*, primært fra *aerobikliknende øvelser*.

Opgava baserer seg på andres matematiske modeller og undersøkelser, og har ikke som formål å utvikle nye modeller for lastene. Det er i stor grad ei teori-oppgave, som presenterer noen, men absolutt ikke alle, lastmodellene som finnes på området i dag. Analysene vil dreie seg om å finne akselerasjonene for de ulike lastene, ikke de konkrete lastvirkningene som momenter og spenninger i dekkene. Hovedmålet vil være å sammenlikne lastmodellene i forhold til hverandre, ikke å gi grunnlag for den videre dimensjoneringa av bygget.

Det legges til grunn en grunnleggende kunnskap om, og forståelse av dynamiske prinsipper. Herunder antas grunnleggende kunnskap om stivhetsberegninger, og beregningsmetoder for egenfrekvenser og harmoniske responser. Det matematiske grunnlaget for løsning av differensiallikninger vil ikke bli gjennomgått.

I kapittel 2 vil generell dynamisk teori bli gjennomgått, i tillegg til mer spesiell teori på området vibrasjonsforplantning i bygg og toleransenivåer for vibrasjoner. Ulike standarder med regelverk for hvordan dynamiske laster skal modelleres, eller regelverk for grenseverdier for vibrasjoner vil bli presentert. I kapittel 3, vil ulike matematiske modeller for menneske-induserte laster vil bli gjennomgått og forklart.

De ulike lastmodellene vil så bli prøvd ut i kapittel 4. Først på en enkel, standard platekonstruksjon, for å få et grunnleggende sammenlikningsmateriale for de ulike last- og beregningsmodellene. Modellene vil deretter bli brukt i et eksempelprosjekt; flerbruksbygget Jonsvollkvartalet som skal



bygges i Bergen. Dette bygget skal blant annet inneholde flere treningssaler ved siden av et auditorium. Ulike lastmodeller vil bli påført de aktuelle arealene, og lastvirkningene fra eksempelet vil så bli sammenlikna med hverandre, og med eksisterende regelverk fra kapittel 2

I siste kapittel, kapittel 5, vil analysene bli diskutert og evaluert i forhold til hverandre og i forhold til toleransekrav i standardverk og teori. Erfaringer fra plateeksempelet og eksempelprosjektet vil bli sett i sammenheng med vurderinger av teorien.

## 2 Vibrasjoner

### 2.1 Historikk

Det har lenge vært observert problemer som følge av dynamiske laster i bygg og andre konstruksjoner. Spesielt har dette dreid seg om slanke, fleksible (gang)bruer. Allerede i 1821 påpekte Stevenson[1] vibrasjonsproblemer på grunn av dynamisk aktivitet i ei gangbru i Skottland, Dryburgh Chain-Bridge: "[The original bridge] had a gentle vibratory motion, which was sensibly felt in passing along it" ([1], s. 243). Dryburgh Chain-Bridge kollapsa seinere på grunn av vindlaster, men det er tydelig at også normale ganglaster skapte vibrasjonsmessige problemer for brua.



Figur 1: Dryburgh Chain-Brigde [2]

På begynnelsen av 1900-tallet blei dynamiske problemer modellert ved hjelp av ekvivalente statiske laster. Disse lastene blei brukt i en statisk bruddgrensevurdering, altså hvorvidt konstruksjonen tålte lastene, og ikke i bruksgrenseanalyse med tanke på byggets brukervennlighet. Men allerede på den tida var det forskere som undersøkte dynamiske virkninger av menneskers aktiviteter. Ifølge Jones[3] fant Moreland[4] allerede i 1905 ut at dynamisk last kan gi ei lastøkning på 50 % i forhold til statisk last. Seinere fant Tilden[5] ut at den dynamiske lastvirkninga fra én person kunne gi ei lastøkning på hele 171%, altså nesten ei tredobling av den statiske lasta.

Likevel blei dynamiske analyser med hensyn på resonansvurderinger ikke brukt i de ulike, nasjonale standardverkene. I stedet fokuserte en på lastvirkningene fra de ekvivalente statiske lastene. Sjøl om det blei gitt ekvivalente statiske laster som var flere ganger de tilsvarende fysiske statiske lastene, tok en ikke med i dimensjoneringa de ekstraordinære forskyvningene som oppstår i konstruksjoner ved resonans. Slik er fortsatt systemet for dimensjonering i bruddgrensetilstand i

norsk standard.

Tidligst ute med ”dynamiske” krav, var den kanadiske standarden fra 1970; NBCC-70[6]. Den stilte krav om at dekkets egenfrekvens ikke må være mindre enn 5 Hz, for å hindre at de påførte lastfrekvensene fra dansing og hopping ga resonans i dekket. Seinere, i NBCC-75[7], blei nedre egenfrekvensgrense økt til 10 Hz. Egenfrekvensgrenser er den enkleste formen for dimensjonering mot dynamiske laster, da den kun krever analyse av dekket, ikke av lasta.

Standarden som først brukte eksplisitt dynamisk analyse for overnevnte lastsituasjoner, var den kanadiske standarden NBCC-85[8]. Denne standarden ga eksplisitte verdier for laster fra mennesker som går og/eller hopper. Her blei det framsatt konkrete dimensjoneringsregler for å forhindre resonans. Den hadde stort fokus på aerobik- og danselignende laster, og bar preg av at lastene var tilrettelagt for relativt små menneskemengder med lav tetthet, altså med relativt stor avstand mellom seg. Den baserte seg på egenfrekvensanalyser, og enkle akselerasjonsvurderinger. Metoden er belyst av Allen[9] blir presentert og diskutert i kapittel 3.1.

På slutten av 80-tallet, kom Bachmann og Ammann[10] med sin semisiusoidfunksjon, hvor lasta fra hoppende mennesker blei framstilt som en slags halv sinuskurve, varierende over en periode. Det blei også lagd en fourierframstilling av den periodiske funksjonen, og denne modelleringa legger grunnlaget for nesten all moderne modellering av hoppende og dansende mennesker. Denne modellen blir presentert i kapittel 3.2.

I 1996 kommer den britisk standarden BS-6399-1:1996[11], med krav om dimensjoneringa av bygg med tanke på dynamiske menneskelaster. Før det hadde det i britisk standard (BS-6399:1984) kun vært advart mot vibrasjoner fra menneskemengder, men det fantes intet regelverk som viste hvordan slike problemer skulle takles. Etter BS-6399-1:1996 kan en bruke den gamle egenfrekvensmetoden, eller en konkret dimensjonering for dynamiske laster med henvisning til den praktiske veilederen BRE Digest 426:1997, som baserer seg på en modifisert versjon av Fourierseriemodellen til Bachmann og Ammann. Britisk standard og BRE Digest 426 blir diskutert ytterligere i kapittel 3.4.

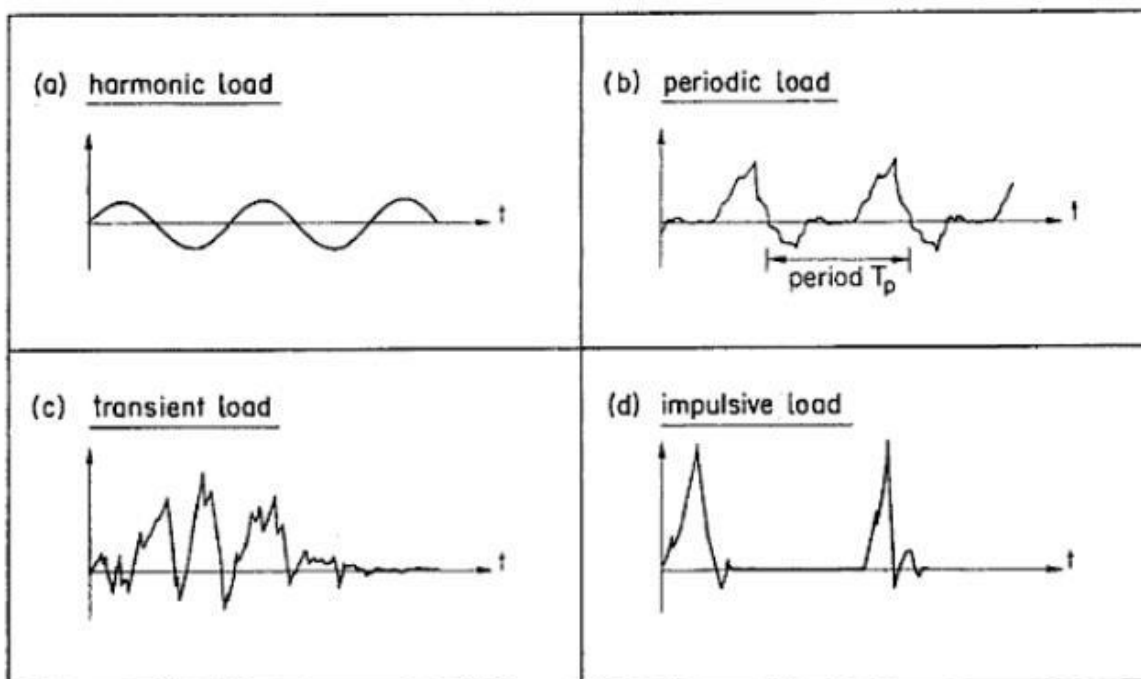
Utover 2000-tallet har det kommet stadig nye forslag til hvordan laster fra mennesker skal modelleres. Det legges for det første mer vekt på modelleringa av samhandling mellom hoppende

mennesker, altså hvordan graden av synkronisering mellom deltakerene influerer lastmagnitudene. Reduksjonsfaktorer for lastene introduseres, blant annet i ISO 10137:2007[12].

I tillegg settes det større fokus på hvordan sjøve lasta modelleres. En forsøker å modellere uregelmessigheter i den enkelte lastimpuls, som viser seg å ikke foregå like "semi-sinusoidal" som de jevne lastkurvene foreslått av Bachmann og Ammann. Et eksempel på dette, er arbeidet til Nhleko, Zingoni og Moya [13]. Foruten uregelmessigheter i den enkelte lastimpuls, finnes det også variasjoner mellom hver lastimpuls over tid. Det vil si at etterfølgende lastimpulser fra hopping ikke vil være like store på grunn, og en vil ha variasjoner i maksimal last over tid. Dette er blant annet tatt hensyn til i Racic og Pavics nye lastmodell[14]. Både begge overnevnte lastmodeller vil bli presentert grundigere i kapittel 3.

## 2.2 Grunnleggende vibrasjonslære

Det finnes ulike typer laster, hvor hovedskillet går mellom statiske (konstante) og dynamiske laster. I denne oppgava behandles dynamiske lasttilfeller, og derfor vil kun dynamiske laster behandles i teksten under. Av dynamiske laster, finnes det også flere forskjellige typer. En vanlig inndeling av de dynamiske lastene kan være *harmoniske*, *periodiske*, *transiente* og *impulsive* laster [10].



Figur 2: Ulike lasttyper. Henta fra figur 1.2 i [10].

*Harmoniske laster* er laster fra eksponentialfunksjoner  $F(t)=F_0 e^{i(2\pi f t + \varphi)}$ , sinusfunksjonen  $F(t)=F_0 \sin(2\pi f t + \varphi)$  eller cosinusfunksjonen  $F(t)=F_0 \cos(2\pi f t + \varphi)$  med konstant amplitude  $F_0$  [15]. Dette er ofte laster fra maskiner eller annet roterende utstyr som gir langvarig, jevn last. Hvis lasta er harmonisk, vil også den stasjonære responsen (se under) være harmonisk.

*Periodiske laster* er laster som ikke er jevnt ondulerende på samme måten som harmoniske laster. Lasta kan være ujevn og "tilfeldig" som på figuren over, eller systematisk som for eksempel ei trekantlast, over en viss periode  $T_p$ . Det samme lastmønsteret gjentar seg igjen og igjen i de følgende periodene. Periodiske laster kan uttrykkes ved hjelp av fourierrekker bestående av ledd av harmoniske lastkomponenter. Responsen vil da kunne bestemmes ved å løse differensiallikninga ledd for ledd.

*Transiente laster* er uregelmessige, ikke-harmoniske laster som ikke uten videre lar seg representere matematisk. Slike transiente laster framstilles ofte ved hjelp av responsspektre, og for dimensjonering mot slike laster brukes ofte designspektre lagd på grunnlag av responsspektrene. Responsen fra transiente laster kan også finnes ved hjelp av ulike matematiske metoder, som Duhamels integral. Transiente laster vil ofte være henta frå målinger, for eksempel akselerasjonsmålinger over et visst tidsrom fra et jordskjelv.

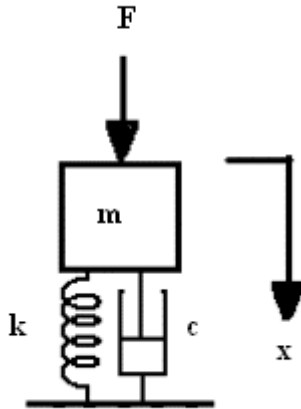
*Impulslaster* er kortvarige laster som enten påføres enkeltvis eller repetert over ei viss periode. De kjennetegnes gjerne ved at lasttida  $t_p$  er kortere enn "lastfri" tid. Impulsen kan være regulær i forma, eller irregulær som ei transient last. Visse impulslaster som repeteres over tid, kan uttrykkes ved hjelp av fourierrekker. Responsen fra impulslaster kan finnes ved hjelp av Duhamels integral, eller for fourierrekker ved leddvis løsning av differensiallikningene. Ulykkeslaster som kollisjoner er typiske impulslaster, mens laster fra hopping og aerobik kan anses som ei periodisk impulslast.

Dersom konstruksjonen blir utsatt for ei last som er periodisk, vil responsen variere over tid så lenge konstruksjonene er utsatt for lasta. Når lasta opphører, vil konstruksjonens bevegelse også opphøre, hvor ang tid det tar avhenger av dempinga.

Bevegelseslikninga for en dempa konstruksjon eller et dempa legeme med én frihetsgrad, utsatt for ei dynamisk last, er:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad [1]$$

hvor  $m$  er massen,  $c$  er dempninga og  $k$  er stivheten til systemet.  $F(t)$  er en lastfunksjon som varierer over tid.



Figur 3: Dempa legeme med én frihetsgrad

For periodiske laster, som gjentar seg sjøl etter en viss periode  $T_p$ , kan lastfunksjonen  $F(t)$ , som nevnt ovenfor, uttrykkes ved hjelp av ei fourierrekke:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos(2\pi i f_p t) + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \sin(2\pi i f_p t) \quad [2]$$

hvor  $a_i$  er cosinusfunksjonens fourierkoeffisient nummer  $i$ ,  $b_i$  er sinusfunksjonens fourierkoeffisient nummer  $i$  og  $f_p$  er lastfrekvensen gitt i Hz. På grunn av grunnleggende geometriske regler, kan dette også uttrykkes ved hjelp av kun en sinusfunksjon, slik at:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} r_i \sin(2\pi i f_p t - \varphi_i) \quad [3]$$

hvor  $r_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$  er fourierkoeffisient nummer  $i$ , og  $\varphi_i = \tan^{-1}(a_i/b_i)$  er faseforskyvninga mellom sinus- og cosinusfunksjonen i likning 3.

Ved å løse den inhomogene differensiallikninga, finner en den stasjonære, partikulære responsen til konstruksjonen[15]:

$$\begin{aligned}
x_p(t) = & \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i/k}{\sqrt{\left(1 - i^2 \left(\frac{f_p}{f}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi i \left(\frac{f_p}{f}\right)\right)^2}} \cos(2\pi i f_p t - \varphi_i) \\
& + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i/k}{\sqrt{\left(1 - i^2 \left(\frac{f_p}{f}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi i \left(\frac{f_p}{f}\right)\right)^2}} \sin(2\pi i f_p t - \varphi_i)
\end{aligned}
\tag{4}$$

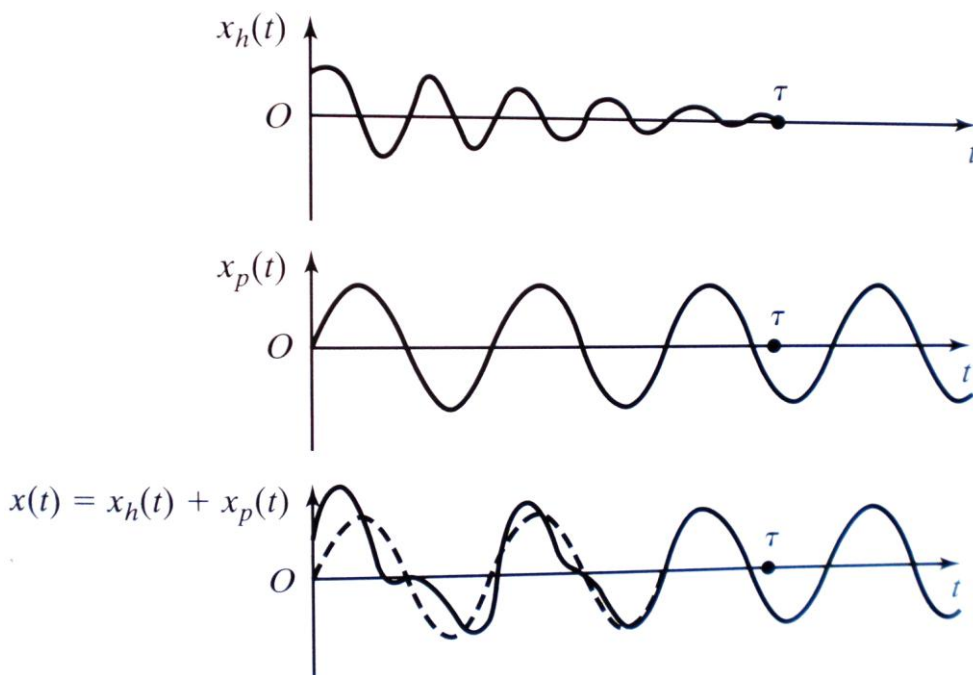
Den homogene responsen på den homogene differensiallikninga blir:

$$x_h(t) = e^{-2\pi\xi f t} (C_1 \cos(2\pi f t) + C_2 \sin(2\pi f t))
\tag{5}$$

hvor  $\xi$  er dempingsratioen til systemet,  $f$  er systemets egenfrekvens og  $C_{1,2}$  er koeffisienter som må finnes ved hjelp av differensiallikningas initialverdier  $x(0)$  og  $\dot{x}(0)$ . For bygg ligger stort sett dempingsratioen mellom 0 og 0,01. Større bygg har gjerne den dempingsratio helt nede i 0,02 eller mindre [12]. Et system med dempingsratio på  $\xi < 1$ , kalles et underdempa system.

Siden det er tale om et underdempa system, vil den transiente, homogene delen av løsninga,  $x_h(t)$ , gå mot null når  $t$  går mot uendelig. Men hvis vi er mest interessert i de største svingningene og mest alvorlige lastvirkningene, vil det være relevant å også ta med dette leddet i formelen for den totale responsen. Dermed får vi den totale responsen som summen av likning 4 og 5:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)
\tag{6}$$



Figur 4: Transient, stasjonær og total respons. Henta fra figur 3.2 i [15]

Bevegelseslikninga for en dempa konstruksjon eller et dempa legeme med flere frihetsgrader som er utsatt for ei periodisk last, er:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F(t) \quad [7]$$

hvor M er konstruksjonens massematrise, C er konstruksjonens dempningsmatrise, K er konstruksjonens stivhetsmatrise og F(t) er konstruksjonens lastmatrise.

For å finne de dynamiske egenskapene til en konstruksjon med flere frihetsgrader, kan en bruke egenvektorer. En *egenvektoranalyse* kan brukes til å finne den udempede konstruksjonens egenfrekvenser og egenmoder. For å finne disse, løser en egenverdiproblemet:

$$[K - \Omega^2 M] \Phi = 0 \quad [8]$$

hvor  $\Phi$  er konstruksjonens egenvektormatrise (egenmodene) og  $\Omega^2$  er konstruksjonens diagonale egenverdimatrise, hvor egenverdiene er  $\omega_n^2$ , og den sykliske frekvensen  $\omega_n$  [16]. Hvert egenverdi/egenvektor-par, kalles en egenvibrasjonsmodus, og det finnes like mange egenvibrasjonsmoder som frihetsgrader. Egenvibrasjonsmodene løses med hensyn på  $\omega_n$  og, ved hjelp av formelen for den sykliske frekvensen  $\omega_n = 2\pi f_n$ , finner en egenfrekvensene  $f_n = \omega_n/2\pi$  og



egenperiodene  $T_n = 1/f$ . For ytterlige forklaringer av egenvektoranalysen henvises til Rao[15].

Eigenverdiproblemet kan også løses ved hjelp av den lastavhengige Ritz-vektoranalysen. Den baserer seg på å gjøre om et system med flere frihetsgrader til et system med én frihetsgrad. Ritz-vektoren oppdateres for hver beregning av forskyvninga til systemet, basert på en initialfunksjon for lasta. Til forskjell fra egenvektoranalysen, som kalkulerer alle egenfrekvensene til systemet, tar Ritz-vektoranalysen utgangspunkt i en lastfunksjon og finner egenfrekvensene som eksiteres av denne. På denne måten utelukker man beregninga av egenfrekvenser som ikke vil ha betydning for strukturens respons. For forklaring av hvordan Ritz-vektoranalysen foregår, henvises til Clough og Penzien[17].

## 2.3 Menneske-induserte vibrasjoner

Mennesker som beveger seg, er på samme måte som andre masser som beveger seg *bevegelig nyttelast*. Men i motsetning til andre bevegelige laster, for eksempel lastetraller som trekkes over golv eller maskiner som roterer, er det ikke enkelt å modellere menneske-induserte laster med enkle, matematiske modeller. Hvert menneske vil ha forskjellig vekt, gangfrekvens og skrittlengde, og lastmodellen som skal påføres må være basert på en estimering og forenkling av disse egenskapene. Hvordan lastmodellen bør lages, vil også avhenge av antallet mennesker som beveger seg samtidig, og varigheten av aktiviteten/bevegelsen.

For om lag 30 år siden, begynte en først virkelig å sette fokus på menneske-induserte laster[18]. En opplevde blant annet gjentatte problemer med fotgjengerbruer som vibrerte kraftig under belastninga fra gående mennesker. Et av de mest kjente, nyere eksemplene på dette er Millenium Bridge i London, hvor de gående skapte kraftige vibrasjoner i brua.

Store menneskemengder kan ved synkronisert, rytmisk aktivitet, påføre konstruksjoner laster mange ganger de faktiske statiske lastene fra menneskemengden. I ekstreme tilfeller, vil dette kunne medføre sikkerhetsmessige problemer, altså problemer i bruddgrensetilstand. Dette vil kunne skje dersom de dynamiske lastene er av vesentlig størrelse, eller i tilfeller hvor resonans oppstår og svingeamplitudene blir betydelige[18]. Stort sett vil menneske-induserte vibrasjoner ikke være et sikkerhetsmessig problem, men vibrasjonene kan gå kraftig utover komforten til brukerne av bygget

eller konstruksjonen.

I vanlige flerbruksbygg med kontorer, auditorier etc. vil hovedproblema knytta til vibrasjoner gjelde konsentrasjon og ubehag for andre brukere. Mennesker er relativt sensitive for vibrasjoner, og også små vibrasjoner kan oppfattes ubehagelige. Men vibrasjoner kan også medføre skader på maskiner og materiell, eller på ikke-konstruktive bygningsdeler som vegger, himlinger etc.

Når en skal vurdere hvordan menneske-induserte laster eksiterer konstruksjoner, vil det være relevant hvor store menneskemengder det er tale om. Mennesker i grupper oppfører seg annerledes enn summen av mange enkeltmennesker isolert. Ved bevegelser på rockekonsserter, stadier, tribuner og andre steder hvor mennesker står tett, vil gjerne bevegelse i en del av gruppa spre seg videre i resten av menneskemengden. Når en står tett, vil det også være en høyere grad av synkronisering mellom deltakerne; står en skulder mot skulder vil bevegelsene fra de som står ved siden av være med på å "løfte" også de som ikke er aktivt med i bevegelsen. På den andre siden vil lasta fra ei større gruppe være mindre homogen enn fra en enkeltperson eller ei lita gruppe på få personer. At to kan hoppe i takt, vil være relativt sannsynlig, men for større grupper vil det være tilnærma umulig å få alle til å hoppe med samme frekvens og med samme kontakt med golvet eller bakken. Derfor blir ofte den økningen i last på grunn av dynamiske effekter lavere for grupper enn for enkeltindivider. Hvordan dette blir modellert i ulike lastmodeller, følger i kapittel 3.



*Figur 5: Hopping under aerobikøvelse. Henta fra [19].*

## 2.4 Vibrasjoner i dekker

Mange flerbruksbygg bygges i dag med en standard søyle/dekke-løsning; med gjennomgående søyler og store dekker med lange spenn. En slik struktur er sensitiv for vibrasjoner påført direkte på dekket. Slike vibrasjoner vil kunne forplante seg gjennom dekket både i vertikal og horisontal retning.

Reint konstruksjonsmessig er dette svært sjeldent et problem, da lastene fra vanlige menneske-induserte laster ikke vil oppnå spenninger over bruddspenningene. Problemet er heller at vibrasjonene oppfattes som plagsomme for byggets brukere. Mennesker som befinner seg i underliggende rom, kan oppleve støy og tak som rister, mens mennesker på samme plan kan opplever forstyrrende vibrasjoner forplante seg gjennom golvet, uten åpenbar, synlig kilde. Å bli utsatt for varige vibrasjoner kan medføre helseplager[20].

Tidligere blei store bygg bygd relativt kompakt, med korte spenn og tunge, kompakte dekker. I dag brukes det i mye større grad søyle/dekke-konstruksjoner med store spenn og tynnere dekker, for eksempel "lette" hulldekker og forspente betongdekker med spenn på godt over 15 meter. Denne typen konstruksjoner vil ofte ha lavere egenfrekvenser, og de er dermed mer sensitive for vibrasjoner. Det kan derfor være viktigere enn tidligere å ta dynamiske vurderinger i bruksgrensetilstand med i betraktninga ved design og dimensjonering av bygg.

Golv med store spenn som kun er dimensjonert for statiske laster, kan ha frekvenser helt nede i 4 - 6 Hz. For golv med mindre spenn, ligger ofte egenfrekvensen fra 6 - 9 Hz. Ganglast opptrer stort sett med en frekvens på 2 Hz, men er estimert til å variere fra 1,6 Hz til maksimalt 2,4 Hz. For dansing, hopping og andre liknende aktiviteter kan dette bli betydelig høyere.

Golv brukt som treningssal kan under aerobiksekvenser bli utsatt for lastfrekvenser på opptil 3,5 Hz, med antatte frekvenser på 1,8 - 3,4 Hz [21]. Dog vil massetettheten være relativt lav per m<sup>2</sup>, da øvelsene stort sett blir utført med utøverne spredt godt utover golvet – i motsetning til under rockekonsserter og på diskoteker, hvor deltakerne danser til dels med svært høy tetthet. Dekker med store spenn vil ofte kunne ha en egenfrekvens på helt ned til 4,5 Hz. Disse golvene vil kunne oppnå resonans fra den andre harmoniske frekvensen (opp til 2\*3,4 Hz), og også fra den tredje harmoniske frekvensen, altså 3\*3,4 Hz = 10,2 Hz. Tester gjennomført av Ji og Ellis har vist at frekvenser helt

opp til den sjette multipliserte av lastfrekvensen kan skape resonans[22].

## 2.5 Grenseverdier

Når vi skal vurdere effekten av dynamiske laster på bygg, finnes det to ulike regelverk å sammenlikne med. Den ene ”typen” regelverk regulerer konstruksjonens eller dekkets laveste tillatte egenfrekvens, altså setter det ei minstegrense for hva egenfrekvensen kan være, for å hindre resonans. Dette er ofte av sikkerhetsmessige grunner – vi snakker om dimensjonering i bruddgrensetilstand. Men for enkel dimensjonering i bruksgrensetilstand, kan også *egenfrekvensgrenser* bli brukt.

Men i teorien, og seinere også i ulike standardverk stilles det krav til hva slags vibrasjoner som kan tillates i bruksgrensetilstand. Dette er snakk om ikke-kritiske vibrasjoner som ”kun” vil medføre ulemper for brukerne og eventuelle mindre skader på byggets kledning, himling etc. Disse grensene kalles som oftest *toleranseverdier*, og er i stor grad basert på undersøkelser om hvor store vibrasjoner (akselerasjoner) brukerne tåler før de oppfatter det som plagsomt, forstyrrende eller ubehagelig.

De ulike grensene, enten det gjelder egenfrekvensgrenser eller vibrasjonsgrenser, presenteres her, og for regelverk i kapittel 2.6.

### 2.5.1 Egenfrekvensgrenser

Bachmann anbefaler grenseverdier for egenfrekvenser for sportsgolv, som skal sikre dem mot at det oppstår resonans:

*Armert betong:*  $f_n > 7,5 \text{ Hz}$

*Spennbetong:*  $f_n > 8,0 \text{ Hz}$

Disse verdiene skal fungere som en buffer mot resonans, det antas altså at dekkene ikke blir påvirket av lastfrekvenser som overskrider disse frekvensene. Utgangspunktet på for grenseverdiene er en lastfrekvens på 2,5 Hz.

Den tilbaknetrukne, norske standarden NS 3490: 2004[23] gir også grenseverdier for laveste tillatte

egenfrekvenser. Disse er vist i tabell 1.

Tabell 1: Laveste, anbefalte egenfrekvenser. Henta fra Tabell C.1 i [23]

Konstruksjonsdel i type bygning	Laveste egenfrekvens Hz
Boliger	5.5
Kontorer	4
Arealer med sports- og danseaktiviteter	8
Laboratorier og verksteder med særlig følsomt utstyr	10
Publikumstribuner, arealer med stående forsamlinger eller faste seter	7.5
Konsertarena	9

## 2.5.2 Vibrasjonsgrenser

Grenseverdiene for hvor store vibrasjoner som kan aksepteres i ulike miljø, blir vanligvis oppgitt i akselerasjon i forhold til grunnakselerasjonen (gravitasjonskrafta)  $g=9,81 \text{ ms}^{-2}$ . Hvor stor toleranseverdien er, varierer med hva slags miljø det er tale om – altså hva de berørte personene driver med når utsatt for vibrasjon. Generelt kan en si at jo nærmere en er vibrasjonskilden, jo høyere vibrasjonsverdier må tåles. Derfor er toleranseverdiene for rom hvor aktiviteten utøves, og brukerne følgelig er oppmerksom på, eller deltar i, aktiviteten, høyere enn for tilstøtende rom hvor brukerne ikke har visuell kontakt med vibrasjonskilden. I tillegg vil det naturligvis være av betydning hva slags aktivitet som bedrives. "Stille" aktiviteter som lesing og jobbing på kontor vil ha lavere grenseverdi for hva som kan tolereres enn for folk som er i bevegelse. Det er også i noen regelverk forskjeller på krav til boligbygg og kontorbygg, blant annet i ISO10137, Tabell C.1[12], som er gjengitt under i tabell 5.

Vertikale vibrasjoner i dekker vil normalt ikke være avgjørende for sikkerheten (bruddgrensetilstand), men bør kontrolleres i bruksgrensetilstand, spesielt i flerbruksbygg. I norske standarder finnes det ingen konkrete grenseverdier for vertikale vibrasjoner inne i bygg, men som retningslinjer kan kravene i kanadisk standard eller britisk standard brukes. I kommentarene til NBC(1985) [24] finnes det slike grenseverdier for ulike bruksområder for bygg:

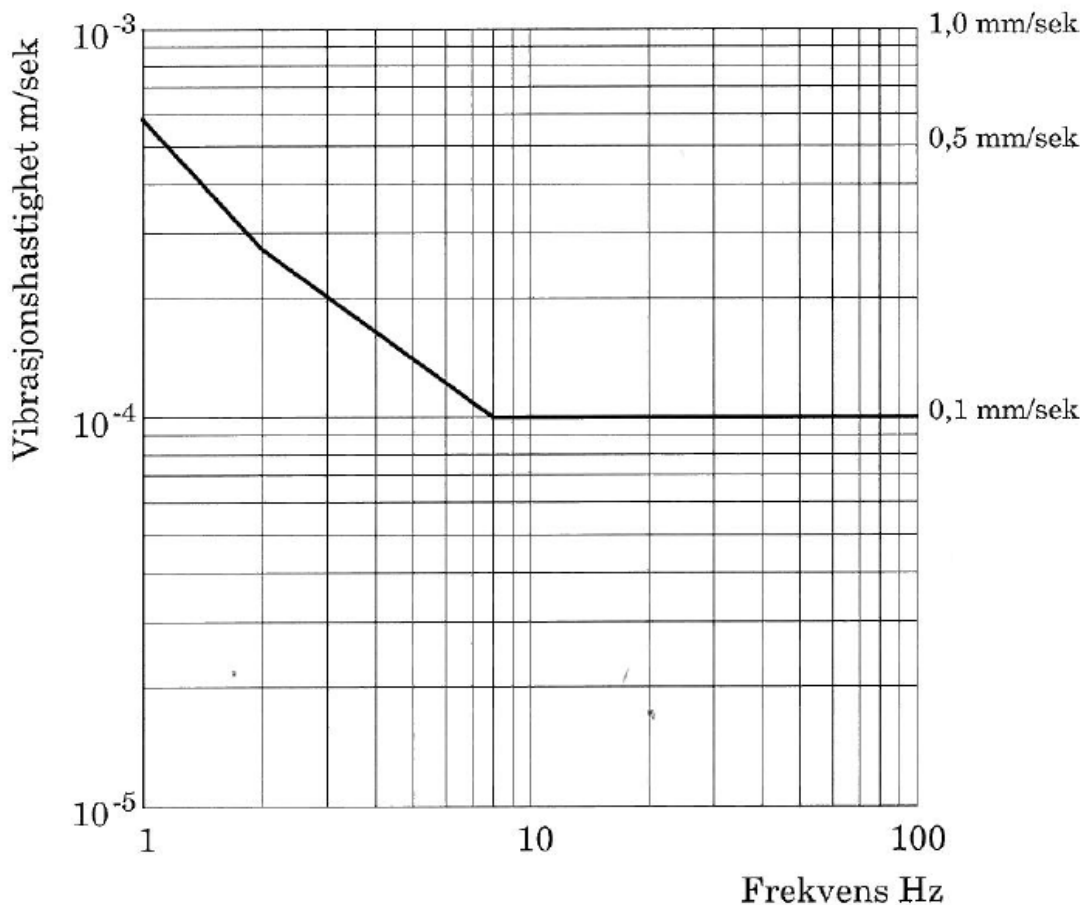
Tabell 2: Grenseverdier for vibrasjoner. Basert på verdier fra NBC(1985).

Miljøer påvirka av vibrasjoner	Toleranseverdi for akselerasjon [%]
Kontor og bolig	0,4g – 0,7g
Spising og vektløfting	1,5g – 2,5g
Kun [andre] rytmiske aktiviteter	4g - 7g

Allen[9] anbefaler følgende toleranseverdier, som er noe mer spesifikke enn verdiene i NBC(1985). For mennesker på kontorer, anbefaler Allen ei akselerasjonsgrense på 0,5% g. Mennesker som ser aktiviteten, kan akseptere vibrasjonsakselerasjoner på 2% g, mens mennesker deltakende i aktiviteten antas å kunne akseptere akselerasjonsverdier helt opp til 5% g. Disse verdiene er i samsvar med den nyere NBC(1990)[25].

Liknende verdier blir anbefalt av Bachmann[21]. Som maksimalverdi akselerasjon i sportsgolv, anbefaler han ei grense på 5% av g. Grenseverdier for hva som bør tolereres av vibrasjoner i kontorbygg over korte perioder (10-30 sykler), antas av Bachmann å ligge på 0,5% g. For auditorier, møterom, lesesaler etc. hvor det stilles høye krav til konsentrasjon, og som ikke har visuell kontakt med rommet hvor vibrasjonene blir påført, vil i følge Bachmann en lavere grense på 0,2% g være nødvendig. Dette er konservativt i forhold til NBC, Allen o.a.

Den nå tilbaketrunkne internasjonale standarden NS-ISO 2631-2:1994[26] kommer med toleranseverdier i bruksgrensetilstand, altså knytta til brukernes komfort og eventuelle forstyrrelser fra vibrasjoner. I denne standarden er det gitt ei basiskurve for toleranseverdier for fleraksiale vibrasjoner i bygninger, altså vibrasjoner ikke bare i z-retning, men også horisontale vibrasjoner. Verdiene i basiskurva er dog *vibrasjonshastighetsverdier*, ikke akselerasjonsverdier som verdiene til Bachmann/Allen o.a. En må merke seg at denne standarden er trukket tilbake, og at det i den nyere standarden NS-ISO 2631-2:2003, ikke finnes slike grenseverdier. NS-ISO 2631-2:1994 er likevel verdt å nevne, for den illustrerer hvordan grenseverdiene kan bli gitt. Betongelementforeningen bruker fremdeles disse grenseverdiene i sitt forslag til dimensjonering av dekker mot resonans.



Figur 6: Grenseverdier for vibrasjonshastighet. Henta fra[26].

Av Figur 6 ser vi at grenseverdiene for akseptable vibrasjoner ligger mellom  $0,1 \text{ mms}^{-1}$  og  $0,4 \text{ mms}^{-1}$ , avhengig av lastfrekvensen. For lastfrekvenser fra aerobik, som typisk ligger mellom 1,8 Hz og 3,4 Hz[21], vil grenseverdiene fra NS-ISO 2631-2:1994 ligge mellom  $0,15 \text{ mms}^{-1}$  og  $0,3 \text{ mms}^{-1}$ . Det er viktig å huske at disse verdiene er *informative*, ikke normative.

For å påvise at konstruksjonsdelen overholder vibrasjonsgrensene som blir valgt, må de valgte grensene sammenliknes med effektive vibrasjonsverdier. Den vanligste framgangsmåten, er å sammenlikne akselerasjonskriteriene med effektverdiene for akselerasjon beregna ved hjelp av rms(root-mean-square)-metoden[3]. De enkelte akselerasjonsverdiene er henta enten fra målinger, eller fra beregnede akselerasjoner fra beregningsprogrammer.

Etter likning C.1i NS 3940:2004[23] er akselerasjonens effektverdi,  $a_{\text{eff}}$ , gitt som:

$$a_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_i a_i^2(t) \Delta t} \quad [9]$$

hvor T er eksponeringstida til lasta (ikke egenperioden),  $a_i(t)$  akselerasjonen på tidspunktet  $t_i$  og  $\Delta t_i$  intervallet mellom hver av de målte eller beregnede akselerasjonsverdiene. Akselerasjonens effektverdi kan også beregnes ved hjelp av følgende integral, henta fra [3]:

$$a_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T a^2(t) dt} \quad [10]$$

## 2.6 Regelverk

Det stilles ulike krav til dimensjonering av dekker med hensyn på vibrasjoner fra dansing og aerobik. Som nevnt finnes det i norske standardverk ingen eksplisitte regler for hvordan de dynamiske analysene skal gjennomføres, men det stilles likevel visse krav for dimensjonering av dynamiske lasttilfeller. Disse kravene og anbefalingene blir gjort rede for i teksten under. Noen regelverk har kun regelverk som setter grenseverdier for akselerasjon eller vibrasjonshastighet (toleranseverdier), dette er gjort rede for i forrige kapittel.

I tillegg finnes det flere standardverk som behandler dynamiske menneske-laster eksplisitt, i følgende kapittel behandles to av dem: Britisk standard BS 6399-1[11] og internasjonal standard ISO 10137[12]. Dette er standarder som enten har vært tidlig ute med denne type regelverk, eller som er spesielt relevant for oss. BS 6399-1 og ISO 10137 vil bli presentert i teksten under. Det har ikke vært mulig å få tak i den kanadiske standarden NBC:2010, så denne vil verken bli diskutert eller vurdert.

### 2.6.1 Norsk standardverk

Det finnes også norsk regelverk med toleranseverdier for vibrasjoner, men ingen som gjelder direkte for vertikale menneske-induserte laster i bygg. Likevel vil noen av disse standardene presenteres i følgende kapittel, da grenseverdier for vibrasjonene satt i disse standardene også vil



kunne være relevante for vurderinger av vibrasjoner i bygg.

NS 3490: 2004[23], den nå tilbaketrunkne standarden for pålitelighet i konstruksjoner, hadde regler om vibrasjoner i bruksgrensetilstand. Sjøl om den er tilbaketrunket, er det relevant å se hva slags krav som blei stilt for vibrasjonsanalyser. I dennes kapittel 3.3 heter det at

”[Bruksgrensetilstandene kan kreve påvisninger som omfatter] vibrasjoner som forårsaker ubehag for mennesker, skade på byggverket og dets innhold eller andre mangler som begrenser byggets funksjonsdyktighet.”

I henhold til kapittel 7.3 er utgangspunktet at kvasi-statiske dynamiske laster modelleres ved hjelp av ekvivalente, statiske laster. Det sies også at

”Dersom konstruksjonens egenfrekvenser er i nærheten av lastfrekvensene, er det nødvendig å foreta en dynamisk konstruksjonsanalyse.”

Men det sies ingenting om mulige resonanseffekter fra lastfrekvensenes høyere harmoniske svingeformer, som en veit kan gi resonans i visse tilfeller[22].

I det informative Tillegg C gåes det gjennom ”forhold av betydning ved vurdering av konstruksjoner som er utsatt for vibrasjoner”. Det foreslås bruk av en kraft-tids-analyse av konstruksjonen for å finne lastvirkninger som forskyvninger og akselerasjoner over tid. En slik analyse kan blant annet brukes for å dimensjonere bygg utsatt for laster fra mennesker som danser.

Akselerasjonens effektverdi blir funnet ved hjelp av likning 9 eller 10. Beregna effektverdi skal sammenliknes med verdiene gitt i den også tilbaketrunkne NS-ISO 2631:1994, eller NS 8176:2005[27] som gir veiledning for vibrasjoner fra samferdsel.

For tilfeller hvor det ikke foreligger en god nok kraft-tidshistorie, foreslår standarden grenser for konstruksjonens laveste egenfrekvens. Dette vil si at konstruksjonen må dimensjoneres slik at den laveste egenfrekvensen er høyere enn verdiene oppgitt i standarden. De foreslåtte laveste egenfrekvensene er gitt i NS-3490:2004, i tabell 1.

NS-ISO 2631:1994 blei erstatta av en ny pålitelighetsstandard, NS-EN-1990:2002+NA:2008[28]

heretter omtalt som Eurokode 0, som ikke har noen eksplisitte grenseverdier for vibrasjoner. I henhold til kapittel 3.4 punkt 3(P), bør påvisninga i bruksgrensetilstand baseres på kriterier knyttet til følgende aspekter: "[V]ibrasjoner [som] forårsaker ubehag for mennesker; eller [som] begrenser konstruksjonens effektive bruk". Det sier derimot ingenting om hvordan denne påvisninga skal gjøres, og etter hvilke kriterier.

Dynamiske laster representeres i hovedsak som ekvivalente statiske laster, men i etter 4.1.5 (2) heter det at "[d]er dynamiske laster forårsaker betydelig akselerasjon i konstruksjonen, bør det utføres en dynamisk analyse av systemet". Analysene kan etter avsnitt 5.1.3 gjennomføres ved hjelp av dynamiske forsterkningsfaktorer, modalanalyse, tidshistorier eller frekvensintervaller. Hvilke grenser disse analysenes resultater skal vurderes opp mot, nevnes ikke eksplisitt. Dog kommer det fram i tillegg A, punkt A1.4.4 om vibrasjoner, at påvisninga i bruksgrensetilstand bør vurdere brukernes komfort og konstruksjonens eller konstruksjonsdelens funksjon. Det sies også i at konstruksjonens eller konstruksjonsdelens egenfrekvens bør "holdes høyere enn hensiktsmessige grenseverdier som avhenger av bygningens funksjon og av vibrasjonskilden". Dersom egenfrekvensen er "lavere enn den hensiktsmessige verdien, bør det foreta en mer avansert analyse av konstruksjonens dynamiske respons, medregnet vurdering av demping" i følge punkt A1.4.4 (3). Ingen slike "hensiktsmessige verdier" er gitt i standarden.

I tidligere standardverk for laster på konstruksjoner, NS-3491[29], fantes det ingen krav til gjennomføring av dynamiske lastanalyser, og resonante dynamiske virkninger er ikke tatt med i de tabulerte verdiene for nyttelastene. I stedet blei det brukt en statisk ekvivalent last på  $5 \text{ kNm}^{-2}$ . I det nye standardverket for laster på konstruksjoner, NS-EN 1991-1-1:2002/NA:2008[30], kjent som Eurokode 1, finnes det følgende regler for dynamiske menneske-induserte laster. For nyttelaster finnes det i kapittel 2.2, punkt 5(P) krav om at:

"Påvirkninger som forårsaker betydelig akselerasjon i konstruksjonen eller konstruksjonsdelene skal klassifiseres som dynamiske påvirkninger og skal tas i betraktning ved hjelp av dynamisk analyse".

For spesielle lastvirkninger av menneskelaster, heter det i denne standardens kapittel 2.2 punkt 3(P) at:

"Hvis det forventes at det oppstår resonansvirkninger fra synkronisert, rytmisk bevegelse blant folk eller fra dansing eller hopping, bør valg av lastmodell omfatte særskilt dynamisk

analyse".

Foreløpig finnes det ikke noe eksplisitt krav til hvordan slike analyser skal gjennomføres i praksis, og valg av lastmodell må, i henhold til det nasjonale tillegget NA:2008 kapittel 2.2 punkt 3, vurderes i det enkelte prosjekt. I den kommende analysen er derfor ikke den dynamiske lastanalysen basert på norsk standardverk, men internasjonalt eller andre lands standardverk eller matematiske modeller basert på forskning. Presentasjon av disse modellene følger i kapittel 3.

### Norske veiledere:

Betongelementboken, bind C[31] gir en forenkla veiledning for hvordan dekker kan dimensjoneres mot vibrasjoner. De oppgir en formel for laveste resonansfrekvens for enveisplater lik:

$$f_1 = \left( \frac{\pi}{2l^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad [11]$$

hvor  $l$  er fritt spenn i m,  $EI$  er stivheten i  $\text{Nm}^2$  og  $m$  er jevnt fordelt masse i  $\text{kgm}^{-1}$ .

For toveisplater som er opplagt på alle fire sider, er laveste resonansfrekvens:

$$f_1 = \left( \frac{\pi}{2} \right) \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D}{m}} \quad [12]$$

hvor  $a$  og  $b$  er platas sidekanter i meter og  $D$  er platestivheten i begge retninger i  $\text{Nm}^2\text{m}^{-1}$ .

Grensene som anbefales for akselerasjoner i dekker tilsvarer verdiene fra den tilbaketrunkne NS-ISO 2631-2:1994, se figur 6 over.

Betongelementforeningen har også lagd et hefte, *Svingninger av betongelementer*[32], med oversikt over svingninger i dekker, dette er tilgjengelig på internett. I tillegg er det lagd et regneark for dimensjonering av dekker mot vibrasjoner. Regnearket tar for seg enkel dimensjonering av bjelker, hulldekker eller DT-elementer, ved å beregne vibrasjoner i platestriper over ett eller flere spenn. Det brukes enkle semisinuskurver for modelleringa av den menneske-induserte lasta. Akseptkriteriene er henta fra [10], som bruker kriteriene fra den utgåtte ISO 2631:1980. Regnearket er tilgjengelig på Betongelementforeningens nettsider[33].

## 2.6.2 Britisk standard: BS 6399-1

Den britisk standarden for laster, *BS 6399-1:1996: Loading for buildings*[11], nevner eksplisitt ulike metoder å dimensjonere for menneske-induserte vibrasjoner, "live loads". Som hovedregel dimensjoneres menneske-laster i bruddgrensetilstand som ekvivalente statiske laster, slik som i NS-EN-1991. Men for spesielle laster som fra hopping og dansing, finnes det egne dimensjoneringsmetoder. De ulike metodene er ikke normative, men er en del av det informative Annex A. Dette annekset tar for seg laster som skyldes bevegelser som kan gi resonansvirkninger.

To alternative metoder er gitt for å dimensjonere for slike laster:

### 1. Dimensjonering av bygget for å unngå resonansvirkninger:

I tillegg til å dimensjonere bygget i henhold til de ekvivalente statiske tilleggslastene, skal en sørge for at byggets vertikale egenfrekvens uten tilleggslast er større enn 8,4 Hz, og at den horisontale egenfrekvensen er større enn 4 Hz.

### 2. Dimensjonering for dynamiske laster:

Bygg og konstruksjoner utsatt for dynamiske laster skal konstrueres for å tåle de dynamiske lastene. Det settes opp akseptable verdier for forskyvninger for forskjellige typer bygg som konstruksjonene ikke må overskride. Detaljert dimensjonering bør gjennomføres med hjelp av veiledningsdokumenter og rådgiving fra eksperter på området.

BS-6399 anbefaler at veiledningsdokumentet BRE Digest 426[36-37] av Ji og Ellis benyttes i dimensjoneringa i henhold til punkt 2. Disse dokumentene blir gjennomgått grundig i kapittel 3.4.

## 2.6.3 International Organization for Standardization: ISO 10137:2007

ISO 10137:2007[12] presenterer anbefalinger (altså informative grenser) for bygninger i *bruksgrensetilstand*, ikke bruddgrensetilstand. Den gjelder lineære analyser, hvor plastisitet ikke inntreer. Det anbefales likevel at for alvorlige dynamiske laster skal det gjennomføres en kontroll av hvorvidt resonans vil inntreffe, og spenninger, nedbøyinger og utmatting må kontrolleres.

Standarden omfatter vibrasjoner i bygget som skyldes menneskelaster, maskiner, bevegelige maskiner (kraner, trucker, traller etc.) og byggeaktivitet, samt eksterne laster som trafikklaster, byggevirksomhet m.m. Menneske-induserte dynamiske laster er eksplisitt behandla i standardens

kapittel 5.5, og det tas hensyn til repeterte koordinerte aktiviteter som aerobik og dans i kapittel 5.5.1

Vurderinga av vibrasjonene for laster som varierer over tid, men ikke stedlig, kan gjennomføres ved beregninger. Vibrasjonsnivåene bestemmes i to trinn:

1. matematisk modellering av konstruksjonens dynamiske karakteristika
2. beregning av responsen for mottaker ("reciever") av vibrasjonen

I Annex A brukes en standard fourierframstilling for de dynamiske kreftene i vertikal retning for én person:

$$F(t) = G \left[ 1 + \sum_{i=1}^n r_i \sin(2\pi f_p t + \varphi_i) \right] \quad [13]$$

hvor G er personens vekt i N,  $r_i$  er fourierkoeffisient til den  $i$ -harmoniske lastkomponenten,  $f_p$  er aktivitetsfrekvensen i Hz,  $\varphi_i$  er faseforskyvning av den  $i$ -harmoniske i forhold til den første harmoniske og n er totalt antall harmoniske lastkomponenter.

Tabell 3: Numeriske verdier for fourierkoeffisientene, henta fra Table A.1i [12]:

Aktivitet	Lastfrekvensområde [Hz]	Lasttetthet (vanlig verdi)	Fourierkoeff. $r_1$	Fourierkoeff. $r_2$	Fourierkoeff. $r_3$
Koordinert hopping	<b>1,5 – 3,5</b>	<b>1,25 m<sup>2</sup> per person</b>	<b>2,1 – 0,15</b> <i>(f)</i>	<b>1,9 – 0,17</b> <i>(2f)</i>	<b>1,25 – 0,11</b> <i>(3f)</i>

Anbefalte numeriske verdier for parametrene i likning 13 er vist i tabell 3. For de første tre fourierkoeffisientene  $r_1$ ,  $r_2$  og  $r_3$  kan en bruke henholdsvis 1,7, 1,0 og 0,4 som første tilnæringsverdi.

For ei gruppe med synkroniserte bevegelser, brukes formelen

$$F(t)_N = F(t) \cdot C(N) \quad [14]$$

hvor N er antall personer deltagende i aktiviteten

$C(N)$  kalles gruppekoordinasjonsfaktoren og avhenger av hvor god gruppas koordinasjon er. Denne er gitt i tabell 4.

Tabell 4: Gruppekoordinasjonsfaktorer for grupper med  $N \geq 50$ . Henta fra Table A.2 i [12]

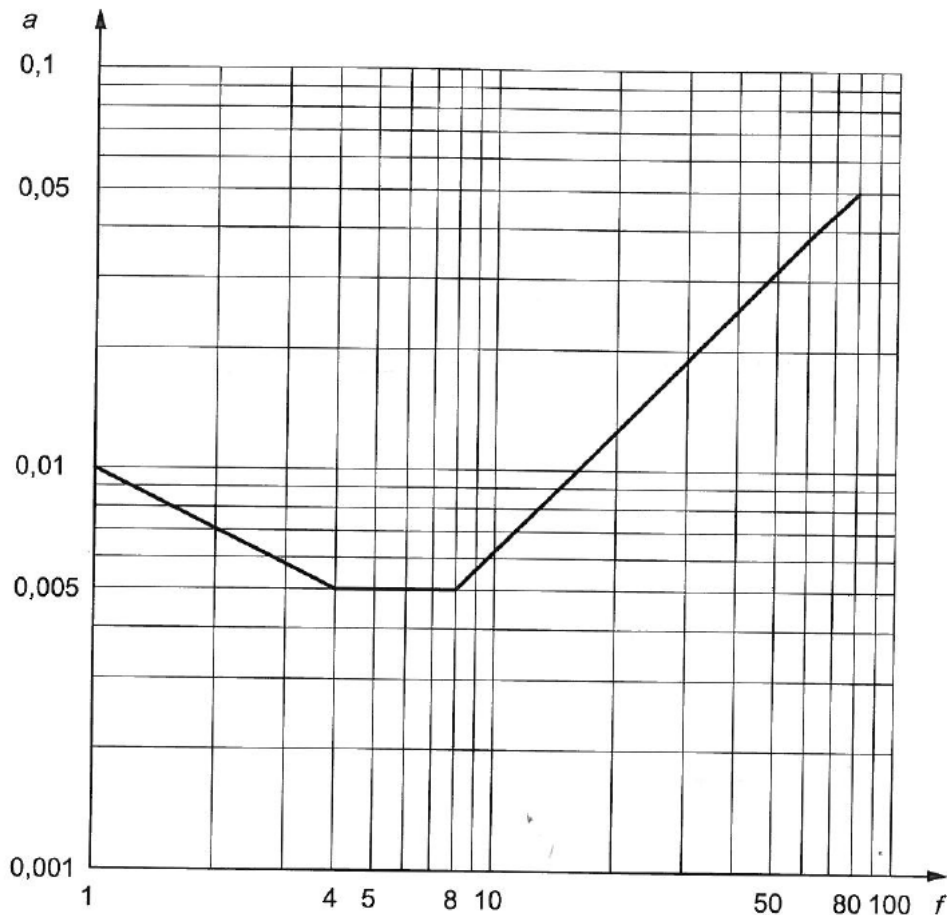
Koordinasjon	1. harmoniske svingeform	2. harmoniske svingeform	3. harmoniske svingeform
Høy	<b>0,80</b>	<b>0,67</b>	<b>0,50</b>
Middels	<b>0,67</b>	<b>0,50</b>	<b>0,40</b>
Lav	<b>0,50</b>	<b>0,40</b>	<b>0,30</b>

Disse verdiene brukes for vurdering av vibrasjonspåvirkninga for brukere av bygget som *ikke* deltar i aktiviteten. For grupper på fem eller færre personer, brukes en gruppekoordinasjonsfaktor på  $C(N)=1$ . Mellom fem og femti personer, brukes lineær interpolasjon. Faseforskyvninga for vertikale laster fra hopping antas å være 0.

Etter kapittel 6.2.1 regnes rytmiske aerobik/hoppe-aktiviteter til klasse B. For slike laster, som ikke er eksakt definerte, bør det også gjennomføres pålitelighetsanalyser. I Table B.1 anbefales metoder for å løse vibrasjonsproblemer av klasse B. For dynamiske lastfunksjoner anbefales løsning ved hjelp av matematiske modeller som frekvens-respons-funksjon, eller impuls-respons-funksjon.

Ulike dempingsverdier er gitt i annek B: For betongramme-bygg anbefales dempingskoeffisienten  $\xi = 2\%$  . For pre-design av forspente dekker anbefales dempingskoeffisienten  $\xi = 1,3\%$ .

Akseptable vibrasjonsnivåer, altså toleransegrenser, er gitt i ISO 10137, annek C og D.



Figur 7: Akselerasjonsgrenser. Henta fra figur C.1i [ISO]

Disse akselerasjonsgrensene ligger på mellom  $0,1 \text{ ms}^{-2}$  og  $0,5 \text{ ms}^{-2}$ , noe som tilsvarer verdier fra 1% til 5% av grunnakselerasjonen g.

For ulike typer bygg, ulike brukstidspunkt og ulike typer bruk, settes det lavere toleransegrenser enn normalverdiene i figur 7 over. Derfor multipliseres de generelle kravene med en multiplikasjonsfaktor, som gir ulike, mer konservative verdier for andre tilfeller:

Tabell 5: Multiplikasjonsfaktorer for vibrasjonsgrenser. Utsnitt av Table C.1i [12]

Place	Time	Multiplying factors to base curve (Figures C.1, C.2 and C.3) <sup>a</sup>	
		Continuous vibration and intermittent vibration <sup>b</sup>	Impulsive vibration excitation with several occurrences per day
Critical working areas (e.g. some hospital operating-theatres, some precision laboratories, etc.)	Day	1	1
	Night	1	1 <sup>c</sup>
Residential (e.g. flats, homes, hospitals)	Day	2 to 4 <sup>d</sup>	30 to 90 <sup>d, e, f</sup>
	Night	1,4	1,4 to 20
Quiet office, open plan	Day	2	60 to 128 <sup>g</sup>
	Night	2	60 to 128
General office (e.g. schools, offices)	Day	4	60 to 128 <sup>g</sup>
	Night	4	60 to 128
Workshops <sup>h</sup>	Day	8	90 to 128 <sup>g</sup>
	Night	8	90 to 128

NOTE 1 For evaluating the effects of a vibration signal containing two or more discrete frequency components, the root-mean-quad (r.m.q.) method can be employed (see ISO 2631-2:1989, Annex B).

NOTE 2 This Table has been adapted from ISO 2631-2:1989, Annex A.



### 3 Lastmodeller

De ulike modellene er kun overfladisk presentert i følgende kapittel. For grundige utledninger og verifisering av de ulike modellene refereres til originalartiklene eller -bøkene. Først presenteres de "enkleste" og eldste lastmodellene, deretter ulike nye modeller basert på andre matematiske modeller for lastene.

#### 3.1 Egenfrekvensmetode

Følgende framstilling er basert på Allens artikler *Building vibrations from human activities*[9] og *Floor vibrations from aerobics*[34].

Hopping produserer laster som ikke er sinusoidale, og som gir harmoniske lastkomponenter i tillegg til sjølve lastfrekvensen. Aerobik kan medføre resonans ikke bare for musikkens frekvens, altså deltakernes hoppefrekvens, men også andre og tredje harmoniske lastkomponent til musikkens rytmiske frekvens. Ytterligere harmoniske lastkomponenter kan i følge Allen bli neglisjert av praktiske grunner.

Beregningsmetoden baserer seg på den enkleste formen for vurdering av vibrasjoner i dekker, nemlig at dekkenes egenfrekvenser må være vesentlig større enn lastfrekvensen og dennes harmoniske lastkomponenter. Minimum tillatte egenfrekvens  $f_0$  kan beregnes ved hjelp av formel 5 i [9]:

$$f_0 = i \cdot f_p \sqrt{1 + \frac{2,0}{a_0/g} \cdot \frac{\gamma_i w_p}{w}} \quad [15]$$

hvor  $f_p$  er lastfrekvensen,  $i$  er nummer på den harmoniske lastkomponenten,  $\gamma_i$  er den dynamiske lastfaktoren fra tabell 6,  $w_p$  er den påførte areallasta fra deltakerne,  $w$  er dekkets egenvekt og  $a_0/g$  er akselerasjonsgrensa (toleransgrensa) valgt for den aktuelle bruken, uttrykt i forhold til grunnakselerasjonen  $g$ . Denne formelen tar hensyn til at de harmoniske lastkomponentene adderes sammen. Ved beregning for andre lasttyper, hvor en kun eksiterer konstruksjonen i lastfrekvensen, må en bruke faktoren 1,3 i stedet for 2,0.

Dersom (den laveste) egenfrekvensen er kjent, kan maksimalakselerasjonen fra de ulike harmoniske lastkomponentene beregnes. Den effektive maksimalakselerasjonen kan deretter sammenliknes med valgte krav til toleransegrenser. Maksimalakselerasjonen fra de enkelte harmoniske vibrasjonene, uttrykt i forhold til grunnakselerasjonen  $g$ , beregnes ved hjelp formel 2 i [9]:

$$\frac{a}{g} = \frac{1,3 \cdot \gamma \cdot w_p / w \cdot \sin 2\pi f_p t}{\sqrt{\left[\left(\frac{f_0}{f_p}\right)^2 - 1\right]^2 + \left[2\xi \frac{f_0}{f_p}\right]^2}} \quad [16]$$

Her er  $\xi$  dempingsratioen, og ellers er symbolene de samme som i formel 15. For egenfrekvenser større enn lastfrekvens,  $f_0 \geq 1,2 f$ , kan formel 16 forenkles. Ved hopping i kritisk lastfrekvens, kan man finne maksimalakselerasjonene fra de tre harmoniske lastkomponentene ved hjelp av likning 17, som er en modifisert versjon av likning 2(b) i [9]:

$$\frac{a_i}{g} = \frac{1,3}{\left(\frac{f_0}{f_p}\right)^2 - 1} \cdot \frac{\gamma_i \cdot w_p}{w} \quad [17]$$

Komponentene i formlene 16 og 17 finnes i tabell 6. Ved hjelp av formel 18, kan en finne den kombinerte, effektive maksimalakselerasjonen  $a_m$ , og denne sammenliknes med toleransegrensene nevnt i kapittel 2.2.1. For tre harmoniske lastkomponenter, altså når en bruker den beregnede  $a_m$  i stedet for  $a_i$ , brukes 2 i stedet for 1,3 i likning 16 og 17.

$$a_m = \left(a_1^{1,5} + a_2^{1,5} + a_3^{1,5}\right)^{\frac{1}{1,5}} \quad [18]$$

Tabell 6: Anbefalte dynamiske lastfaktorer, basert på Table 3 i [9]

Harmonisk lastkomponent	Lastfrekvens [Hz]	Dynamisk lastfaktor, $\gamma_i$
1	2 – 2,75	1,5
2	4 – 5,5	0,6
3	6 – 8,25	0,1

### 3.2 Semisinusoid lastmodell

En av de første, dynamiske lastmodellene, var Bachmann og Ammanns semisinuskurve, som blei presentert i *Vibrations in structures: induced by man and machines*[10]. Den illustrerer hvordan lasta påføres i perioden hvor hopperen er i kontakt med golvet, og periodene hvor hopperen er i lufta og det ikke påføres last på golvet.

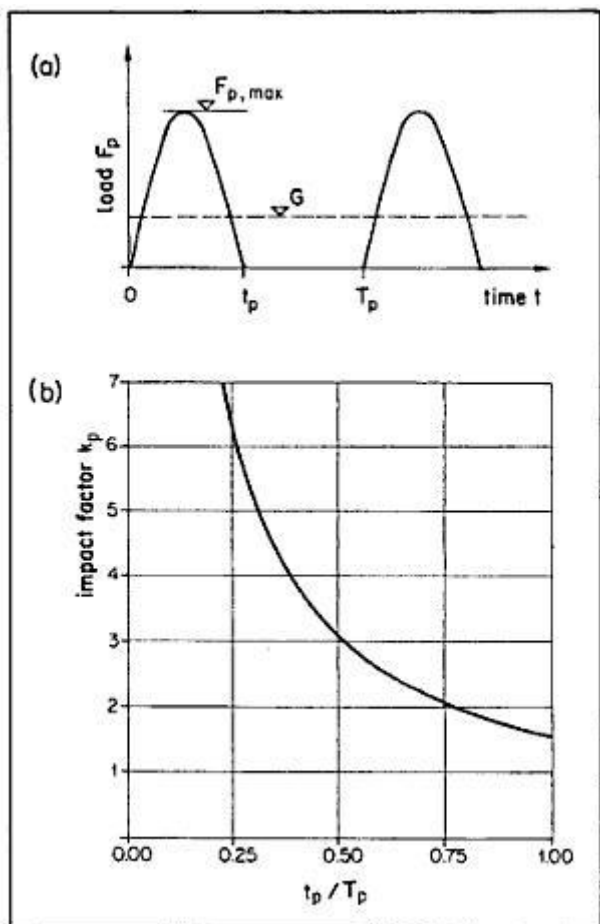
De semisinoidale kurvene som gjentas i periodiske lastsekvenser, kan for én person over én periode uttrykkes som:

$$F(t) = K_p G \sin\left(\pi \frac{t}{t_p}\right) \quad 0 \leq t \leq t_p \quad [19]$$

$$F(t) = 0 \quad t_p < t \leq T_p \quad [20]$$

hvor  $t_p$  er kontakttida med bakken,  $T_p$  er lastperioden,  $K_p = F_{p,\text{maks}}/G = \pi/2\alpha$  er den dynamisk lastfaktoren,  $F(t)$  er dynamisk last,  $G$  er personens vekt i N og  $\alpha$  er kontaktratio  $\alpha = t_p/T_p$ , altså andel av perioden hvor personen er i kontakt med golvet. Bachmann antar at vekta til en vanlig gående  $G \approx 800$  N.

Denne lastfunksjonen gjentas over tid, til ønska lastpåføringstidsrom er nådd. Ved valgt kontaktratio på 0,5 og lastperiode på 1 sekund, blir lastfunksjonen seende ut som på figur 8. Ulik kontaktratio gir ulik dynamisk forsterkningsfaktor.



Figur 8: a) Semisinuskurve b) Kontaktratioens innvirkning på den dynamiske forsterkningsfaktoren  $K_p$ . Henta fra figur 2.7 i [10]

### 3.3 Forenkla fourierseriemodell

Følgende framstilling er basert på kapittel 1.3 og anneks G i Bachmanns *Vibration problems in structures: Practical guidelines*[21].

Bachmann dimensjonerer mot resonans ved å sørge for at egenfrekvensen er større enn mulige påførte lastfrekvenser og deres andre og tredje harmoniske svingeform. For å dimensjonere et dekke mot dynamiske menneske-induserte laster, må en først beregne golvets laveste egenfrekvens. Deretter må den maksimale initialakselerasjonen fra aktiviteten beregnes, det vil si "støtkrafta" fra stegene eller hoppene. Heri må også antall deltakere tas i betraktning. Så må en finne golvets tilleggsdemping, avhengig av golvbelegg, materialbruk etc. Til sist må en sammenlikne kriteriene, altså finne ut om egenfrekvensen med eventuell demping er større enn påført lastfrekvens og dennes

harmoniske lastkomponenter. Dersom dette er tilfelle, vil resonans ikke oppstå, og konstruksjonen er trygg.

Dempinga vil være av vesentlig betydning for når resonans oppstår. I følge Bachmann kan en anta at kritisk dempingsratio i armert betong har verdi mellom 0,014 og 0,035, og for spennbetongdekker mellom 0,010 til 0,030. Disse verdiene er relativt lave, og medfører at konstruksjonene er svært sårbare for lastfrekvenser nær egenfrekvensene.

Tabell 7: Vanlige verdier for dempingsratioer. Henta fra Table 1.2 i [21]

Construction type	damping ratio $\zeta$		
	min.	mean	max.
Reinforced concrete	0.014	0.025	0.035
Prestressed concrete	0.010	0.020	0.030
Composite	0.008	0.016	0.025
Steel	0.006	0.012	0.020

Rytmiske menneske-induserte laster på over 20 sekunder leder til tilnærma periodiske laster. For bevegelser utført synkront til musikk, vil den dynamiske lasta øke nesten lineært med antall deltakere. Den dynamiske krafta for aktiviteten til én person over tid, uttrykt som en sum av den statiske lasta  $G$  og harmoniske lastkomponenter, vil være:

$$F(t) = G \left[ 1 + \sum_{i=1}^n r_i \sin(2\pi f_p t - \varphi_i) \right] \quad [21]$$

hvor  $r_i$  er Fourierkoeffisient til den  $i$ -harmoniske lastkomponenten,  $f_p$  er lastfrekvensen i Hz ( $=1/T_p$ ),  $\varphi_i$  er faseforskyvning av den  $i$ -harmoniske i forhold til den første harmoniske og  $n$  er totalt antall harmoniske lastkomponenter.

Det benyttes estimerte verdier for lastfrekvensene. For fitness- og aerobiktrening ligger antatt lastfrekvens  $f_p$  mellom 1,5 Hz og 3,4 Hz, men for dans som jazzdans og ballett antas lastfrekvensen å ligge noe høyere, mellom 1,8 Hz og 3,5 Hz. Hvilke frekvenser innenfor disse intervallene som skal benyttes, vil avhenge av en konkret vurdering av aktivitetene som skal foregå.

Bachmann legger opp til en vurdering som kun benytter de tre første harmoniske lastkomponentene, altså lastfrekvensen og dennes første, andre og tredje fourierkomponent. Ergo skal det i formelen over brukes  $n=3$ . For grupper, brukes de formel 21, med de foreslåtte verdiene fra tabell 8. Disse verdiene tar hensyn til gruppas lasttetthet. For å finne den dynamiske krafta for ei gruppe, velges lasttetthet og bruker denne til å beregne den jevnt fordelte lasta per kvadratmeter. Bachmann foreslår en lasttetthet på 0,25 personer per kvadratmeter for aerobik- og fitnessstrening. For ekstreme tilfeller kan lasttettheten velges helt opp til 0,5 personer per kvadratmeter. Med en personvekt på  $G=800N$  og en lasttetthet på 0,25 personer per kvadratmeter, gir det ei areallast på  $200 Nm^{-2}$ .

Tabell 8: Fourierkoeffisienter og faseforskyvning for ulike lasttyper og frekvenser. Basert på Table G.1i [21]).

Aktivitet	Type	Frekvens [Hz]	Fourierko eff. $r_1$	Fourierko eff. $r_2$	Fourierko eff. $r_3$	Faseforskyvn. $\Phi_{2,3}$	Lasttetthet [personer/m <sup>2</sup> ]
Løping		2,0-3,0	1,6	0,7	0,2		-
Hopping	Normal	2	1,8	1,3	0,7	$\pi (1 - f_p t_p)$	0,25
Hopping	Normal	3	1,7	1,1	0,5	$\pi (1 - f_p t_p)$	0,25
Hopping	Høy	2	1,9	1,6	1,1	$\pi (1 - f_p t_p)$	0,25
Hopping	Høy	3	1,9	1,3	0,8	$\pi (1 - f_p t_p)$	0,25
Dansing		2,0-3,0	0,5	0,15	0,1		~ 4 (opptil 6)

### 3.4 Gruppelastmodeller

Følgende framstilling er basert på Ji og Ellis' *Loads generated by jumping crowds: numerical modeling*[35], *BRE Digest 426: The response of structures to dynamic crowd loads, 1997*[36] og *BRE Digest 426: The response of structures to dynamic crowd loads, 2004*[37].

Ji og Ellis har utvikla flere analytiske metoder for å bestemme dekkers respons på dynamiske laster.

I tillegg til å benytte den allment kjente fourierrekkeметoder for beregning av lastfunksjonen, tar de hensyn til de lastreduserende effektene av ”dårlig” synkronisering i større grupper. For uten en generell modell for én persons hoppelast, presenteres to ulike modelleringsметoder for laster fra større grupper. Den første metoden er eldst, og stammer fra BRE Digest 426(1997), mens den andre metoden baserer seg på empiriske verdier, og blei presentert i det nyere BRE Digest 426(2004) .

I BS-6399:1996[11] Annex A er det, etter endringer gjort i 2002, eksplisitt referert til BRE Digest 426(1997) som et veiledende spesialistdokument. Dimensjonering av dekker i henhold til gjeldende britisk regelverk foregår derfor, dersom ikke andre mer nøyaktige metoder brukes, etter metoden som presenteres i følgende tekst.

Ji og Ellis legger til grunn en systematisering av framgangsmåten for dynamisk last-problemer [18]:

1. Karakterisering av lasta:

Det trengs kunnskap om antall mennesker deltakende i aktiviteten og deres vekt, fordeling av last over dekkets areal (lasttetthet), lastfrekvens etc.

2. Evaluering av vibrasjonenes karakteristika:

Kjennskap til dekkets egenskaper: stivhet, masse, innspenninger etc.

3. Beregning av dekkets respons på den dynamiske lasta.

Ji og Ellis har to forskjellige modeller generert på samme lest, nemlig ei fourierrekkeframstilling av den semisinusoide lastkurva. Den første modellen deres er en modell som skal representere lasta fra et individ som hopper. Deres undersøkelser [22] viser at laster helt oppe i sjetten harmoniske kan gi vibrasjonsproblemer i bygg, spesielt gjelder dette flerbruksbygg. Fourierserien deres kan derfor ta hensyn til de seks første harmoniske svingeformene ved å bruke seks ledd i fourierrekka.

Antall Fourierkoeffisienter som bør tas i bruk, avhenger av konstruksjonens egenfrekvens. Det anbefales å bruke  $I$  koeffisienter, hvor  $I$  er det første heltallet større enn  $f_1 / f_p$ , altså første egenfrekvens delt på lastfrekvensen. For dimensjonering i bruddgrensetilstand, anbefales bruk av minimum tre Fourierkomponenter. [36]

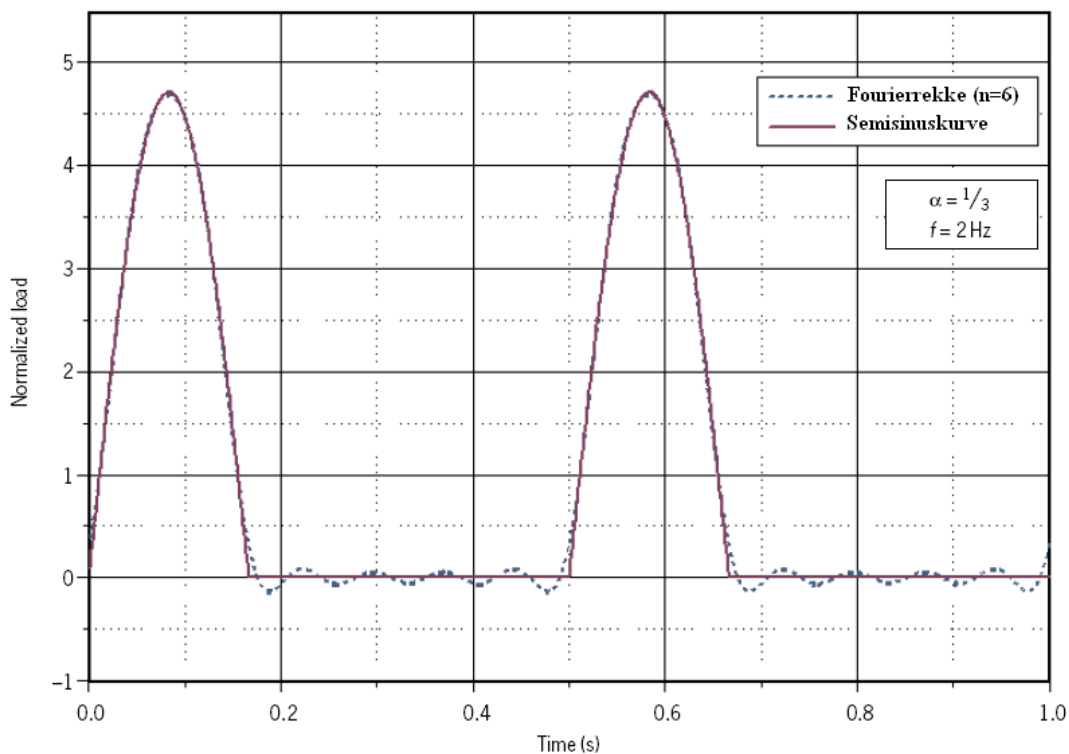
Lastfunksjonen for ett individs hopping, er den samme som Bachmanns fourierrekke:

$$F(t) = G \left[ 1 + \sum_{i=1}^n r_i \sin(2\pi i f_p t + \varphi_i) \right] \quad [22]$$

hvor  $r_i$  er Fourierkoeffisient til den  $i$ -harmoniske lastkomponenten,  $f_p$  er lastfrekvensen i Hz ( $=1/T_p$ ),  $\varphi_i$  er faseforskyvning av den  $i$ -harmoniske i forhold til den første harmoniske og  $n$  er totalt antall harmoniske lastkomponenter. Fourierkoeffisientene og faseforskyvningene for forskjellige kontaktratioer  $\alpha$  er gitt i tabell 9.

Tabell 9: Fourierkoeffisienter og faseforskyvninger. Henta fra Table 2 i [37]

		n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6
$\alpha=2/3$	$r_n$	9/7	9/55	2/15	9/247	9/391	2/63
	$\varphi_n$	$-\pi/6$	$-5\pi/6$	$-\pi/2$	$-\pi/6$	$-5\pi/6$	$-\pi/2$
$\alpha=1/2$	$r_n$	$\pi/2$	2/3	0	2/15	0	2/35
	$\varphi_n$	0	$-\pi/2$	0	$-\pi/2$	0	$-\pi/2$
$\alpha=1/3$	$r_n$	9/5	9/7	2/3	9/55	9/91	2/15
	$\varphi_n$	$\pi/6$	$-\pi/6$	$-\pi/2$	$-5\pi/6$	$-\pi/6$	$-\pi/2$



Figur 9: Sammenlikning av semisinusfunksjon og likning 22 med  $n=6$ . Modifisert versjon av figur 1 i [37].



### Enkel gruppelastmodell:

I BRE Digest 426(1996), blei denne individlastframstillinga lagt til grunn for en lastfunksjon for grupper som hopper og danser. For å ta hensyn til at ei gruppe bestående av flere mennesker ikke hopper fullstendig synkront, blei det foreslått en *dynamisk gruppeeffektsfaktor*  $C_e$ . I MathCad-eksempelet i samme artikkel blir denne satt til å være 2/3. Lastfunksjonen for grupper blir dermed

$$F(t) = G \left[ 1 + C_e \sum_{i=1}^n r_i \sin(2\pi i f_p t + \varphi_i) \right] \quad [23]$$

Fourierkoeffisientene og faseforskyvningene er de samme som for individlaster, ergo skal tabell 9 ovenfor brukes.

### Eksperimentell gruppelastmodell:

I tillegg til den ovenfor nevnte semisinoide lastfunksjonen, har Ji og Ellis utarbeida en modell for grupper som hopper. Denne modellen skal ta hensyn til endring i lastvirkninger ved større menneskemengder. Det er basert på gruppeinteraksjon og forskyvninger i lastfrekvens på grunn av dårligere dansesynkronisering – de tar utgangspunkt i at det ikke kan antas at store grupper danser like synkront som små grupper eller enkeltindivider.

Lastfunksjon for aerobiklaster på dekke med utstrekning i x- og y-retning over tid, kan uttrykkes ved hjelp av fourierserien:

$$F(x, y, t) = G(x, y) \left[ 1 + \sum_{i=1}^n r_{i,p} \sin(2\pi i f_p t + \varphi_i) \right] \quad [24]$$

hvor  $G(x,y)$  er tetthet og lastfordeling til menneskemengden i  $\text{Nm}^{-2}$ ,  $r_{i,p}$  er fourierkoeffisienten til den  $i$ -harmoniske lastkomponenten avhengig av  $p$  antall deltakere,  $f_p$  er lastfrekvensen,  $\varphi_i$  er faseforskyvninga til den  $i$ -harmoniske i forhold til den første harmoniske. Merk at  $G(x,y)$  er konstant når menneskemengden er jevnt fordelt på golvet.

For ei gruppe opp til 64 personer[37], har Ji og Ellis eksperimentelt funnet de tre første Fourierkoeffisientene til å være:

$$\begin{aligned}
 r_{1,p} &= 1,61 * p^{-0,082} \\
 r_{2,p} &= 0,94 * p^{-0,24} \\
 r_{3,p} &= 0,44 * p^{-0,31}
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

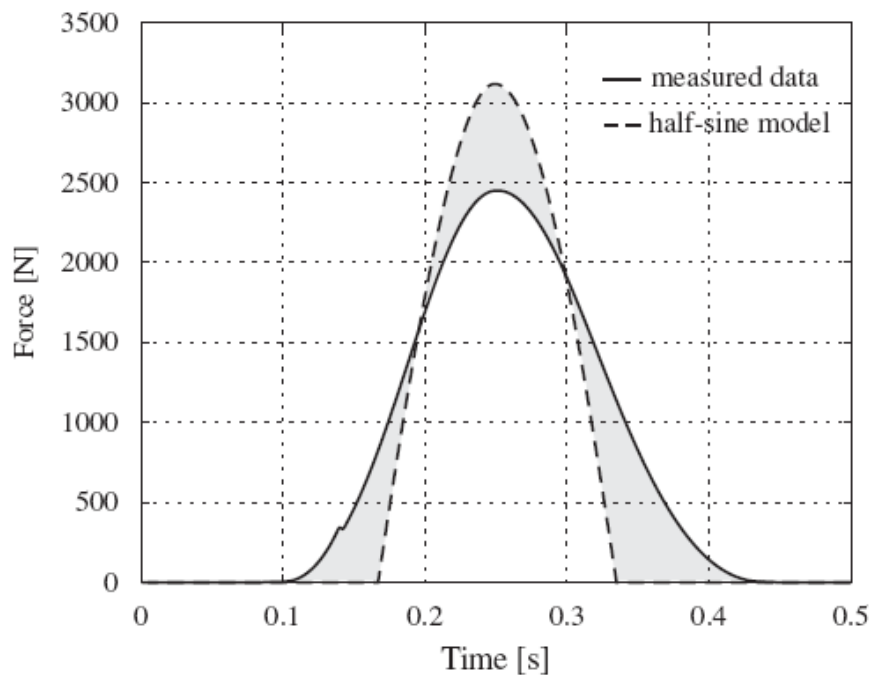
hvor  $p$  er antall deltakende personer, og  $p \leq 64$ .

Ved hjelp av Fourierkoeffisientene kan en også beregne faseforskyvninga. Tabell 9 med ulike verdier for faseforskyvning og fourierkoeffisientene for individ-laster kan også brukes for å finne faseforskyvningsverdiene for lastmodellen for grupper.

### 3.5 Stokastisk, syntetisk lastmodell

Følgende framstilling er basert på Radic, Pavic m.fl.s artikler *Stochastic approach to modelling of near-periodic jumping loads*[14] og *Mathematical model to generate near-periodic human jumping force signals*. [38]

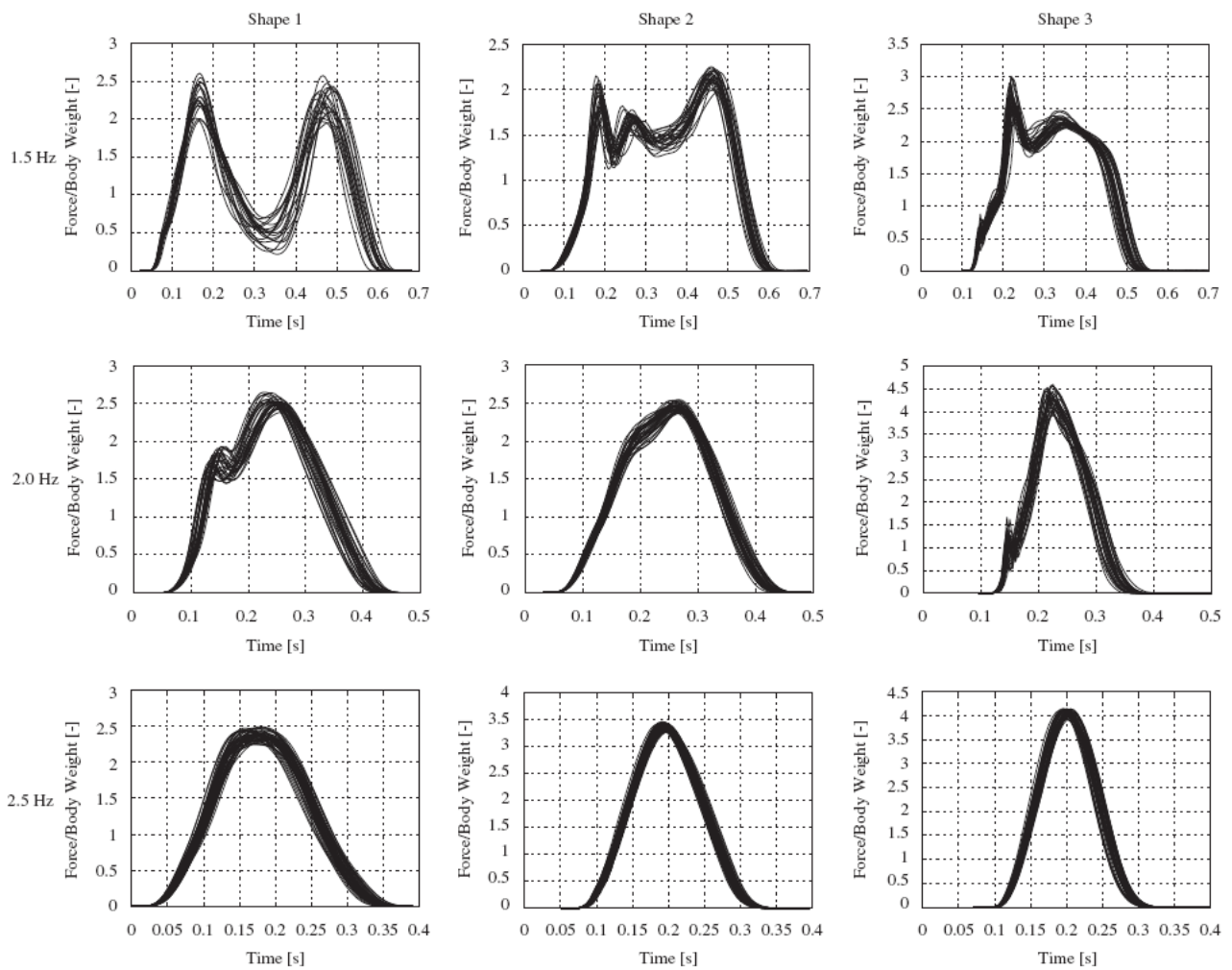
Radic, Pavic m.fl. (heretter kalt RP) har utvikla en teori for hvordan en kan modellere menneskelaster, basert på tolkning av eksperimenter. Modellen er bygd på en stokastisk eller smalband-tilnærming heller enn den tradisjonelle semisinusurvefunksjonen som vanligvis blir brukt for å modellere hoppelaster. Modellen til RP skal på en mer korrekt måte kunne modellere intensitetsvariasjonen mellom hoppene i krafta fra foten/føttene mens de er i golvet, og modellen hevdes å være mindre konservativ enn den vanlige semisinusurve-metoden. I tillegg skal modellen bedre modellere hvordan lastimpulsene ser ut.



Figur 10: Enkel lastpuls henta ut fra målinger, sammenlikna med likning 22. Henta fra Figure 2 i [14].

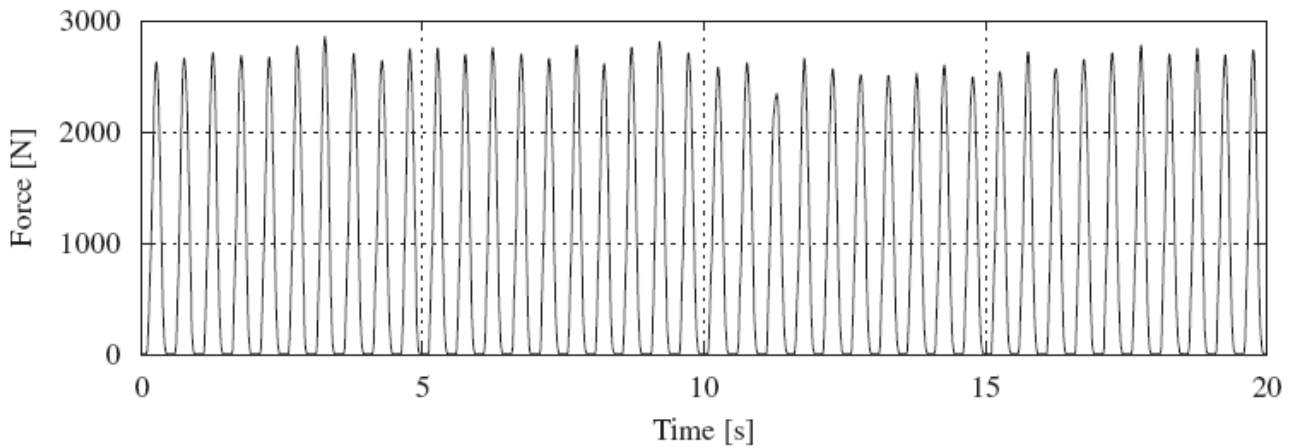
Den ofte brukte semisinuskurvefunksjonen har for få Fourierledd til å kunne modellere høyere frekvensområder nøyaktig. Tester[22] viser at laster helt oppe i sjetten harmoniske kan gi vibrasjonsproblemer i bygg, spesielt gjelder dette flerbruksbygg. Derfor vil det være nødvendig å benytte seg av en modell som også representerer de høye frekvensområdene. Den stokastiske modellen til RP vil derfor kunne gi et bedre bilde av lastfunksjonen når lastene (hoppene) ikke er utført perfekt periodisk.

Selve lasta fra hoppet varierer etter frekvensen. Ved lave frekvenser (<2 Hz) vil lasta fordele seg i ei lastkurve med to topper. Ved høyere frekvenser, rundt 2 Hz, vil lastkurva være tilnærma rombeforma. Ved høyfrekvenshopping, altså for høyere frekvenser enn 2 Hz, vil lastkurva tilnærme seg ei semisinuskurve. Det vil derfor være viktig å tilpasse lastmodellen lastfrekvensen, slik at en får en lastmodell som er mest mulig lik den reelle belastninga.



Figur 11: Ulike former på målte lastpulser for ulike lastfrekvenser. Henta fra figur 6 i [14]

RP har lagd en modell som best mulig skal kunne representere variasjonene (irregulariteten) i hvert enkelt hopp, og i den totale hoppsekvensen. Dette vil være spesielt viktig i frekvensområdet rundt 2 Hz, hvor en, som en blant annet kan se av figur 11, vil kunne ha store variasjoner for lastpulsens form. RPs modell baserer seg på summering av to eller flere Gauss-funksjoner.



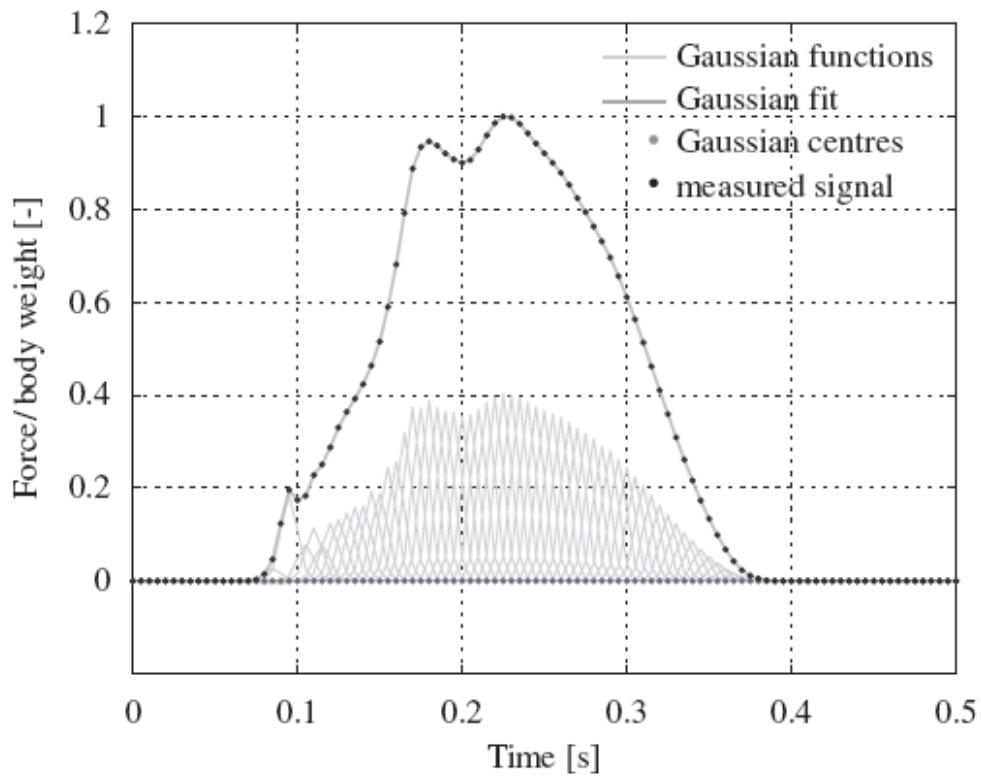
Figur 12: Målt kraft på golv fra én persons hopping i 2 Hz. Henta fra figur 1i [22]

I en vanlig hoppeperiode, vil lastene variere fra hopp til hopp på grunn av dårlig synkronisering med musikken eller at hopperen blir sliten. Denne modellen skal også omfatte disse variasjonene i enkelthopp over en lastperiode med konstant frekvens. Det som er spesielt med RPs modell, er at størrelsen på de etterfølgende hoppene ikke blir bestemt ut fra fullstendig tilfeldige parametre, men avhenger av parametrene fra forrige hopp. Dette er basert på undersøkelser gjort av Sims, Blakeborough og Williams [39], som viser at hopperne justerer hoppene sine etter hvordan forrige hopp var. Etter et ”for langsomt” hopp, justerer hopperne seg slik at påfølgende hopp blir raskere enn gjennomsnittsperioden, og omvendt.

Hvert hopp, altså hver lastpuls, kan enhetsnormaliseres og på den måten modelleres som en gaussisk tilpassa lastpuls (”Gaussian fit”):

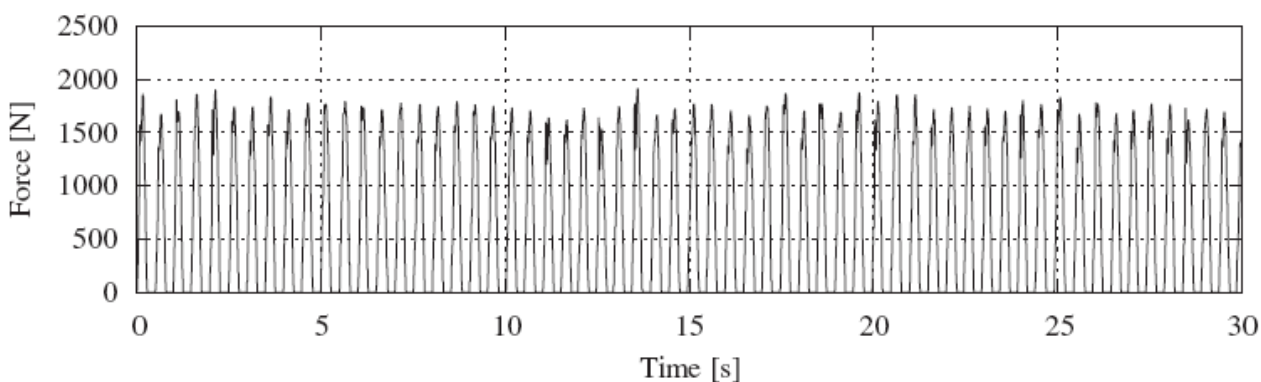
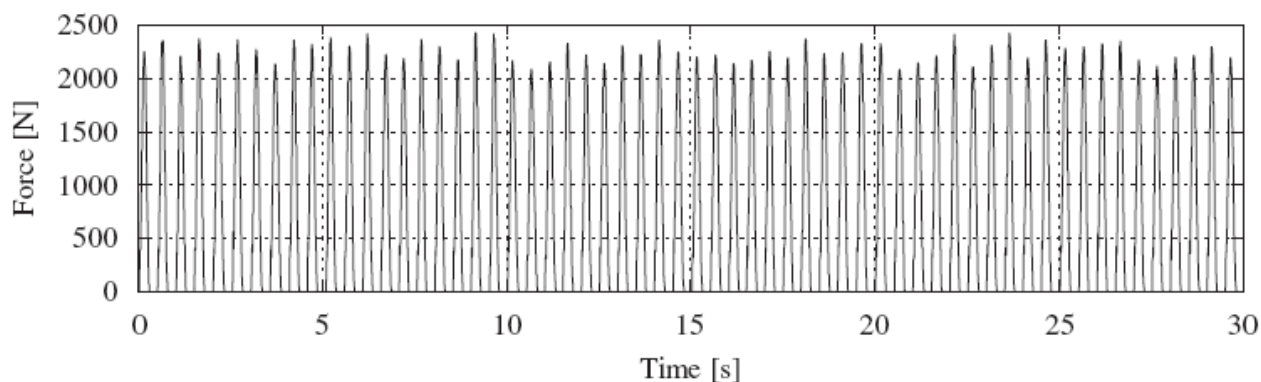
$$Z_k(t) = \sum_{r=1}^{100} A_{k,r} e^{-\left(\frac{(t-t_{k,r})^2}{2b_{k,r}^2}\right)} \quad [26]$$

hvor  $t$  er definert mellom 0 og 0,5, altså  $t \in [0,0,5]$  og  $k = 1, \dots, 42$ . Amplituden  $A_{k,r}$  er høyden av den  $r$ 'te gaussiske funksjonen, og kan bli uttrykt ved  $A_{k,r} = \alpha_k \text{ mg}$  for massenormaliserte amplituder.  $t_{k,r}$  er tidspunktet  $A_{k,r}$  når sitt toppunkt, og  $b_{k,r}$  er bredden på den gaussiske lastpuls  $A_{k,r}$ . Figur 13 viser et plot av  $Z_k(t)$  over en periode, med de gaussiske funksjonene marker i lysegrått.



Figur 13: Eksempel på enhetsnormalisert puls. Henta fra figur 12 i [14]

For å finne en syntetisk lastpuls, brukere en målte verdier fra hopp til å generere  $Z(t)$ . For forskjellige målinger utført av RP, har de funnet syntetiske lastmodeller for én person som hopper lik figurene nedenfor. Maksimalkreftene fra lastmodellene varierer, alt ettersom hvor tung vedkommende som blei målt var. For å finne de syntetiske lastfunksjonene, skaleres de enhetsnormaliserte lastpulsene etter hopperens kroppsvekt. Dette gir syntetiske lastfunksjoner som vist i figur 14 under. For nøyaktig framgangsmåte, henvises til artikkelen [14].



Figur 14: Eksempler på syntetiske lastfunksjoner generert fra hoppere med ulik vekt. Henta fra figur 21 i [14]

RP's stokastiske lastmodell kan også brukes for å modellere stokastiske laster fra større grupper, som fra aerobik. Det kan gjøres ved at de individuelle lastene blir summert med tilfeldige faseforskyvinger fra annen teori, men RP mener at det er indikasjoner på at denne metoden ikke stemmer overens med virkeligheten. De anbefaler at det gjøres ytterligere undersøkelser på området ”modellering av gruppelaster”.

### 3.6 Variabel massemodell

Følgende framstilling er basert på Nhleko, Zingoni og Moyos artikkel *A variable mass model for describing load impulses due to periodic jumping*[13]

Nhleko, Zingoni og Moyo (heretter kalt NZM) har vurdert semisinuskurva som ligger til grunn for dimensjonering av hoppende menneskelast i henhold til britisk standard BS 6399:1996[11]. De hevder at denne funksjonen ikke gir et tilstrekkelig godt bilde av lastsituasjonen som oppstår ved

hopping ved frekvenser vesentlig under 2 Hz, altså lavfrekvenshopping. I stedet presenterer de en ny modell basert på modellering av et pseudovariabelt massesystem, det vil si en massemodell. Denne modellen hevdes å kunne representere alle frekvensområder, ikke bare lavfrekvenshopping.

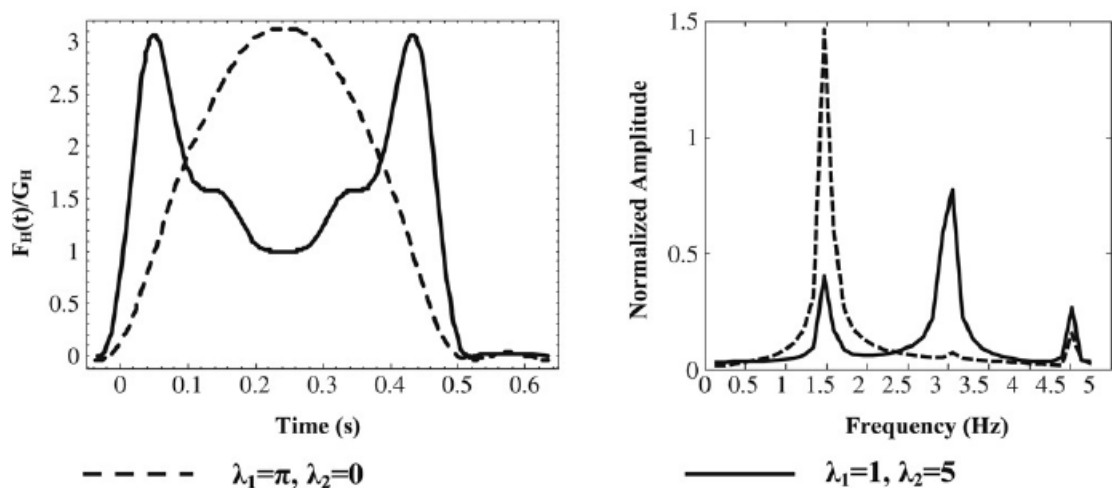
Den generelle variable massemodellen baserer seg ikke kun på hoppefrekvens og hoppernes vekt, men også hastigheten de hopper i. Det vil si at parametrene masse, demping og stivhet avhenger av tid, ergo har man en lastfunksjon med  $m(t)$ ,  $c(t)$  og  $k(t)$ .

Den generell modellen for last fra hopping foreslås uttrykt som:

$$F_H(t) = -\lambda_1 g \cdot m_H(t) + \lambda_2 \cdot \dot{m}_H(t) \cdot u_H(t) \quad [27]$$

hvor  $m_H(t)$  tilsvarer lastfunksjonen  $F(t)$  fra den semisinusoide lastfunksjonen i likning 19 og 20.  $u_H(t)$  er hastighetsfunksjonen til en hoppende personer over tid,  $\lambda_{1,2}$  er impulsformfaktorer,  $G_H$  er utøvernes masse per enhetsareal og  $g$  er gravitasjonskrafta  $g=9,81 \text{ ms}^{-2}$ . Impulsformfaktorene er konstante, og avhenger av formen på målte lastimpulser fra eksperimenter. Ved å prøve og feile, kan en variere impulsformfaktorene slik at lastfunksjonen  $F(t)$  viser en impulscurve for ett hopp som tilsvarer formen på den målte lastimpulsen fra en hoppeserie med den valgte frekvensen. Ulike, målte lastimpulsformer for forskjellige frekvenser er vist i figur 11 over.

For bestemte impulsformfaktorer, vil formen på være gitt. En illustrasjon av lastimpulser med forskjellige lastimpulsfaktorer er gitt i figur 15.



Figur 15: Impulsfaktorenes effekt på lastimpulsen form og den dominante harmoniske lastfrekvensen. Henta fra figur 7 i [13]



## 4 Analyser og resultater

### 4.1 Om analysene

For å få et mer forståelig bilde av forskjellene i de ulike modellene, vil det tas utgangspunkt i to ulike konstruksjoner og påføre de enkelte lastene på hver av disse. Resultatene vil kunne si noe om hvor konservative de forskjellige modellene er, og ville kunne gi indisier på hvilke modeller som egner seg best. Det vil være naturlig å anta at de nyeste modellene vil være mest korrekte i forhold til virkeligheten, men siden de eldre modellene, Allens egenfrekvensmetode og Bachmanns forenklete fourierrekke, er enklere å gjennomføre, vil det være interessant å se i hvilken grad disse resultatene samsvarer med de nyere metodenes resultater.

Analysene skal gjennomføres ved hjelp av beregningsprogrammet SAP2000. Sap2000 er et analyseprogram som er spesialdesigna for bruk på fagverk, rammestrukturer og dekker. Programmet har muligheter for å kjøre en rekke normale, statiske analyser, men har i tillegg en rekke mer avanserte analyseteknikker for dynamiske analyser. Det kan blant annet kjøre ulike jordskjelvanalyser med responsspektre, bølgelastanalyser, fottrinnanalyser (varierende last i tid og rom) på dekker og bruer, og tidshistorieanalyser ved hjelp av forhåndsdefinerte eller egenkonstruerte last-tidshistorier[40] Det er den sistnevnte analysemetoden som er brukt i dette prosjektet. For mer informasjon om programmet, anbefales programmets analysemanual [16].

Først gjennomføres en analyse av et enkelt dekke; kvadratisk og kun leddforankra i hvert hjørne. Egenfrekvensene finnes ved hjelp av SAP2000. Så vil hele arealet bli påført lasta fra den enkelte modellen, og resultatene vil sammenliknes. Deretter vil en modell av det aktuelle dekket fra et prosjektert flerbruksbygg utsettes for de samme beregningene. Først vil egenfrekvensene beregnes, og deretter vil de ulike lastmodellene påføres i det aktuelle området (treningssalen) for å se hva slags konsekvenser de vil få.

Det tas utgangspunkt i en "standard" lastfrekvens for alle beregningene på 2 Hz, dersom ikke annet er nevnt eksplisitt for den enkelte modell. For aerobik er dette en frekvens som ligger midt i normalspekteret av lastfrekvenser, og som derfor antas å være representativt for den type beregninger som skal gjennomføres. I andre analyser, hvor en har helt konkrete frekvenser å forholde seg til, bør naturligvis disse brukes i stedet. Eventuelt kan det gjennomføres flere analyser,

med frekvenser over et breiere spekter, for eksempel  $f_1=1,5$  Hz,  $f_2=2,0$  Hz og  $f_3=2,5$  Hz. Dette vil ikke gjøres i denne oppgava.

## 4.2 Lastmodeller

Det er antatt en gruppetetthet på 0,25 personer per kvadratmeter. Dette må antas å være en vanlig størrelse på en aerobikklasser. Gruppetettheten er valgt i henhold til tabell 8. Ved å anta lasta fra et normalt menneske til  $G=800$ N, gir gruppetettheten ei jevnt fordelt, statisk last på

$$G(x,y) = 800 \text{ N} * 0,25 \text{ pers } m^{-2} = 200 \text{ Nm}^{-2} \quad [28]$$

Dette er ganske lavt i forhold til andre statiske laster påført bygget, men vil kunne gi større utfall på grunn av den dynamiske forsterkningseffekten. For alle lastmodellene, er det først funnet et uttrykk for  $F(t)$  i henhold til beskrivelsene i kapittel 3. For å bedre kunne sammenlikne de ulike lastmodellene, blir lastene uttrykt som normaliserte laster. Det vil si at de er uttrykt i forhold til den statiske lasta  $G(x,y)$ , og hvor den normaliserte lastfunksjonen  $Q$  er:

$$Q(t) = F(t) / G(x,y) \quad [29]$$

På denne måten er det enkelt å se hvor stor den dynamiske lastforsterkninga blir i forhold til det enkelte individs statiske last. I analysene i Sap2000, er de lastfunksjonene  $F(t)$  påført deler av dekket.

En kontaktratio for rytmiske aktiviteter på  $\alpha=0,5$  i henhold til [37] er antatt. Lasta påføres dekket i et tidsrom på totalt 10 sekunder.

### 4.2.1 Enkel semisinusmodell

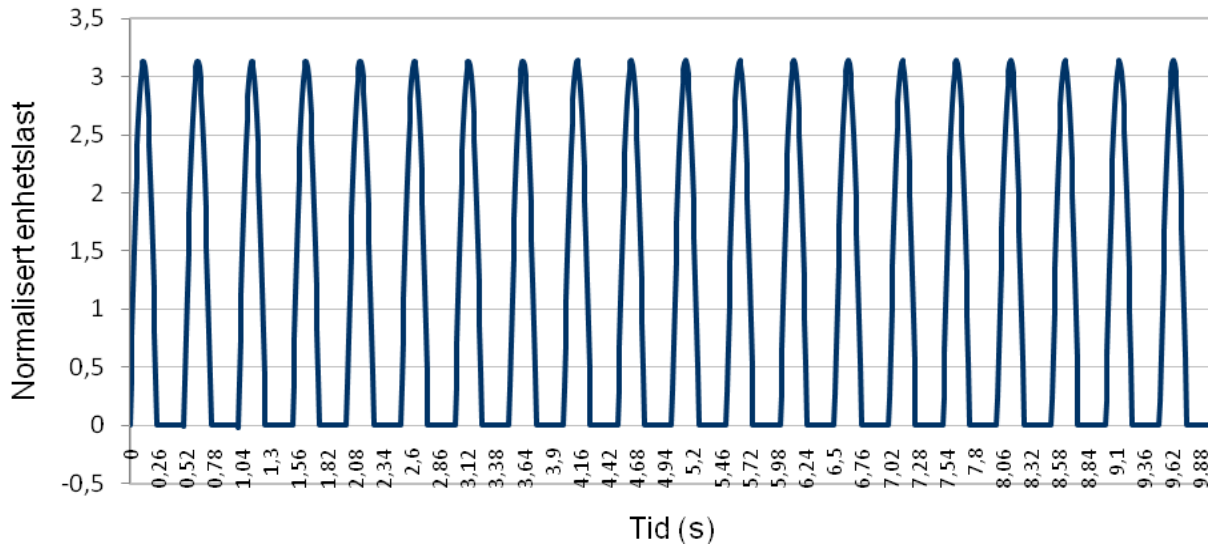
Semi-sinusmodellen er den enkleste, mest grunnleggende lastmodellen. Lastene er uttrykt over én periode. Denne lastsekvensen gjentas over et tidsrom på 10 sekunder, noe som med  $T_p = 0,5$  s gir totalt 20 lastsykler.

Innsatt i likning 19 og 20, tilsvarer det en last på:

$$F(t) = \pi \cdot 200 Nm^{-2} \sin(4\pi t) \quad [30]$$

$$Q(t) = \pi \cdot \sin(4\pi t) \quad [31]$$

Den har altså en lastforsterkningsfaktor på 3,14, altså at den dynamiske lasta blir 3,14 ganger statisk last.



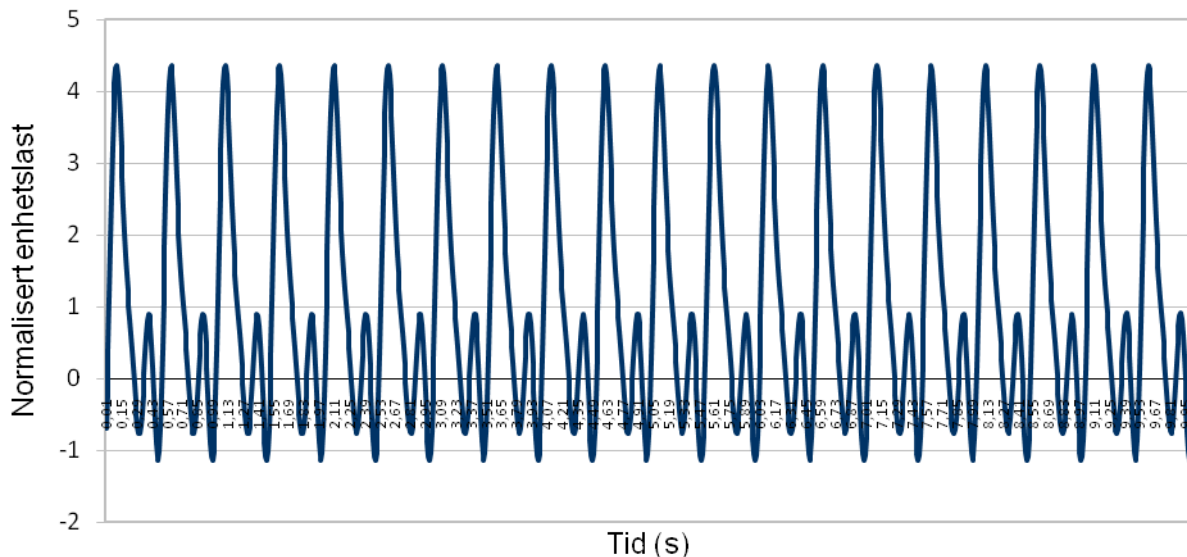
Figur 16: Beregna lastfunksjon fra semisinusmodellen, likning 30 og 31.

#### 4.2.2 Forenkla fourierseriemodell

Verdiene for  $G$ ,  $r_i$  og  $f_p$  og  $\varphi_i$  som brukes er henta fra tabell 8. Det er valgt normal hopping, med frekvens på 2 Hz. Faseforskyvninga for annen og tredje lastkomponent, blir da  $\varphi_{2,3} = \pi (1 - f_p t_p) = 0,5\pi$ . Bachmanns forenkla fourierrekkemodell gir dermed følgende last på dekket:

$$F(t) = 200 Nm^{-2} * [1 + 1,8 \sin(4\pi t) + 1,3 \sin(8\pi t - 0,5\pi) + 0,7 \sin(12\pi t - 0,5\pi)] \quad [32]$$

$$Q(t) = 1 + 1,8 \sin(4\pi t) + 1,3 \sin(8\pi t - 0,5\pi) + 0,7 \sin(12\pi t - 0,5\pi) \quad [33]$$



Figur 17: Beregna lastfunksjon fra Bachmanns forenkla fourierserie

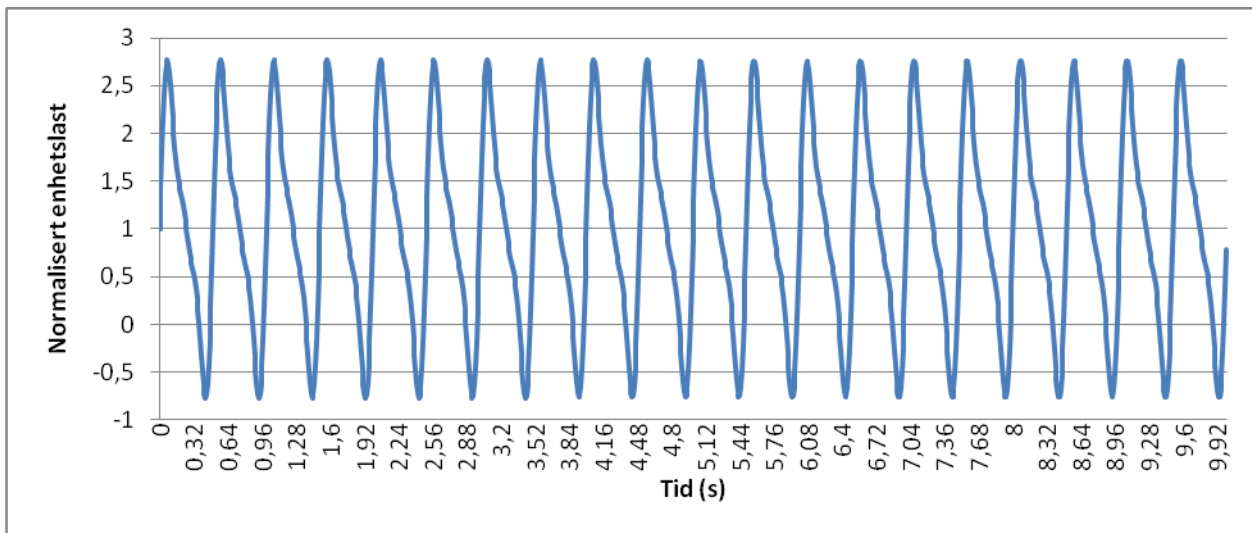
#### 4.2.3 ISOs fourierseriemodell

For å finne fourierkoeffisientene, brukes tabell 3. Tilnæringsverdiene 1,7, 1 og 0,4 velges som fourierkoeffisienter. Disse skal så multipliseres med gruppekoordinasjonsfaktorene fra tabell 4. For å finne riktige gruppekoordinasjonsfaktorer for 36 personer, brukes interpolasjon. Dette gir  $C_1(36)=0,77$ ,  $C_2(36)=0,66$  og  $C_3(36)=0,58$ . Faseforskyvninga for hopping er  $\varphi_1 = 0$ .

Det er oppgitt en lasttetthet på 1,25 kvadratmeter per person, noe som tilsvarer 0,8 personer per kvadratmeter, eller  $640 \text{ Nm}^{-2}$ . Dette er en verdi som er anvendelig for hopping på områder som konserter og stadier, hvor folk står relativt tettpakka. For aktivitet i en aerobiksal er dette tallet derimot veldig høyt. For å få sammenliknbare verdier for den dynamiske lasta fra aerobiken, brukes i stedet den tidligere utregnede areallasta  $G(x,y)=200\text{Nm}^{-2}$ . Innsatt i likning 13 gir det:

$$F(t) = 200 \text{ Nm}^{-2} * [ 1 + (1,31 \sin (4\pi t) + 0,66 \sin (8\pi t) + 0,23 \sin (12\pi t))] \quad [34]$$

$$Q(t) = 1 + (1,31 \sin (4\pi t) + 0,66 \sin (8\pi t) + 0,23 \sin (12\pi t)) \quad [35]$$



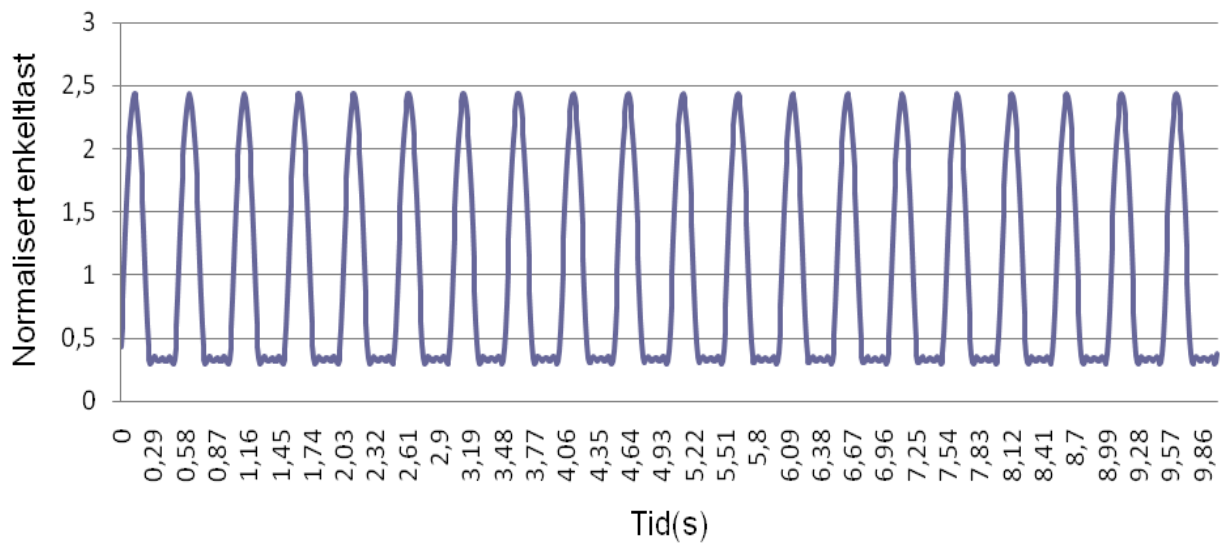
Figur 18: Beregna lastfunksjon fra ISOs fourierserie

#### 4.2.4 Enkel gruppelastmodell

For grupper tar Ji og Ellis utgangspunkt i semisinusiod-modellen. De bruker seks ledd i fourierserien, og faseforskyvningene varierer i hvert ledd. Fourierkoeffisientene er henta fra tabell 9. Det antas en  $C_e$ -verdi på  $C_e=2/3$ , som tilsvarer verdien i MathCad-eksempelet i [36]. Med kontaktratio  $\alpha=0,5$  gir det:

$$F(t) = 200 \text{ Nm}^{-2} * [ 1 + 2/3 * (\pi/2 \sin (4\pi t) + 2/3 \sin (8\pi t - \pi/2) + 2/15 \sin (16\pi t - \pi/2) + 2/35 \sin (24\pi t - \pi/2)) ] \quad [36]$$

$$Q(t) = 1 + 2/3 * (\pi/2 \sin (4\pi t) + 2/3 \sin (8\pi t - \pi/2) + 2/15 \sin (16\pi t - \pi/2) + 2/35 \sin (24\pi t - \pi/2)) \quad [37]$$



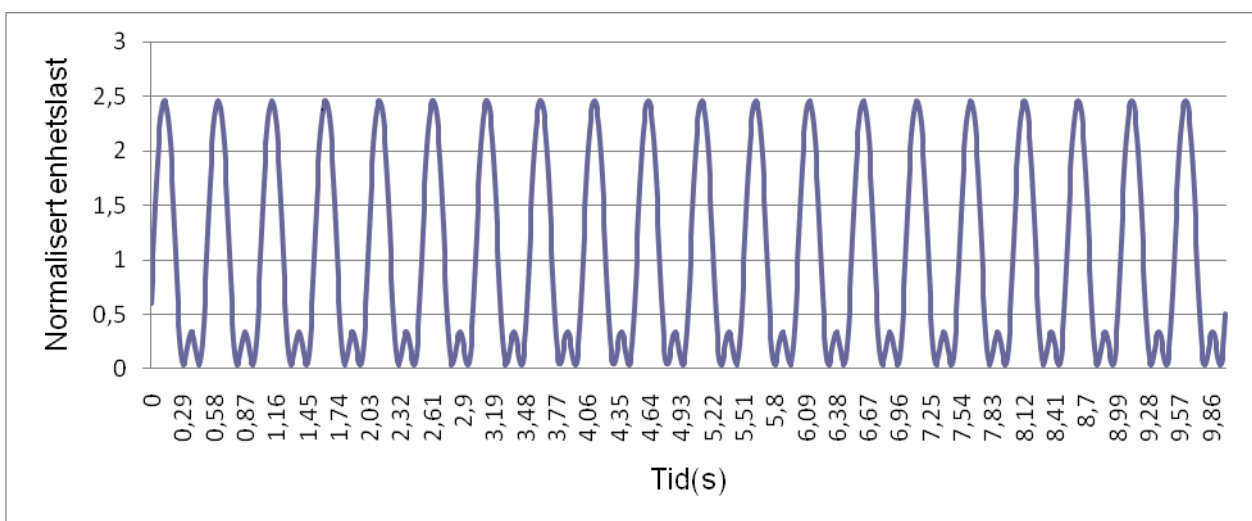
Figur 19: Beregna lastfunksjon fra Ji og Ellis' enkle gruppelastmodell

#### 4.2.5 Eksperimentell gruppelastmodell

Ved å velge  $p=36$ , som vist i kapittel 4.1, beregnes de tre fourierkoeffisientene ved hjelp av likningene [25]. Det gir fourierkoeffisientene  $r_{1,36}=1,20$ ,  $r_{2,36}=0,40$  og  $r_{3,36}=0,14$ . Dermed får vi en lastfunksjon på:

$$F(x,y,t) = 200Nm^{-2} * [1 + 1,20 \sin(4\pi t) + 0,40 \sin(8\pi t - \pi/2) + 0,14 \sin(12\pi t)] \quad [38]$$

$$Q(t) = 1 + 1,20 \sin(4\pi t) + 0,40 \sin(8\pi t - \pi/2) + 0,14 \sin(12\pi t) \quad [39]$$

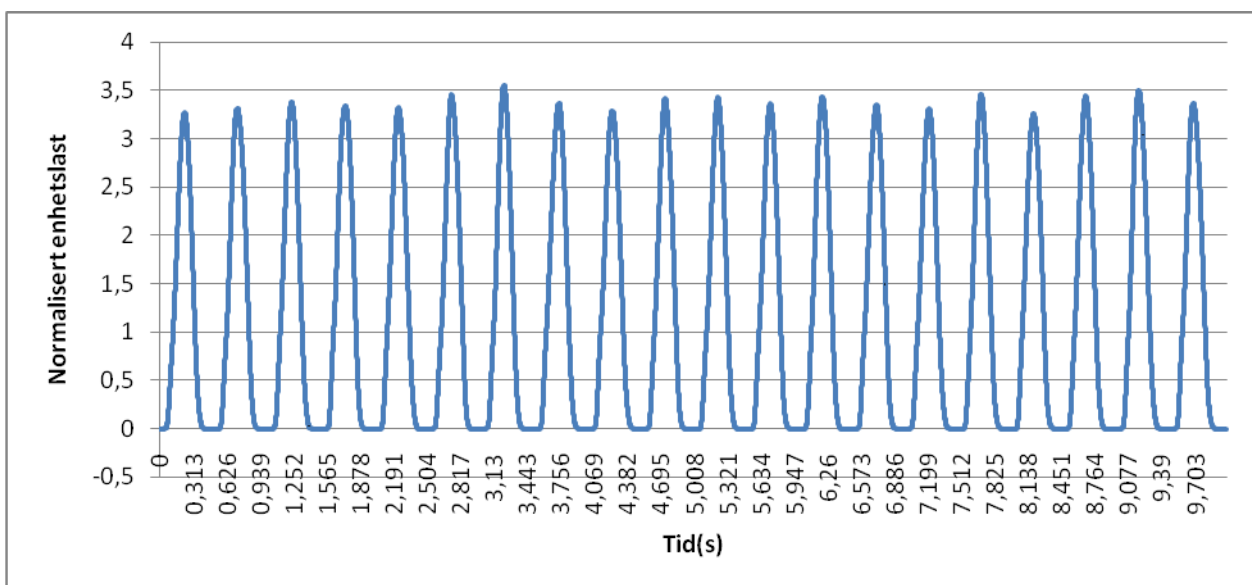


Figur 20: Beregna lastfunksjon fra Ji og Ellis' empiriske gruppelastfunksjon

## 4.2.6 Stokastisk, syntetisk lastmodell

Da det ikke er gjennomført noen eksperimenter i forbindelse med denne masteroppgava, har det ikke kunne gjøres noen matematisk behandling av innhenta forsøksmateriale for å lage en stokastisk, syntetisk lastmodell. I stedet blir det brukt en syntetisk lastmodell for én person, laget av Dr. Racic ved University of Sheffield. Denne modellen er generert ved hjelp av metoden forklart i kapittel 3.5 og [14, 38] Lastfunksjonen er deretter normalisert i forhold til statisk last for én person, slik at lasta  $Q(t) = F(t)/G$ . Den normaliserte lasta  $Q(t)$  blir deretter påført arealet med en jevnt fordelt statisk last på  $200\text{Nm}^{-2}$ , som beregna tidligere.

Det er ikke lagt inn faseforskyvninger for gruppelast, slik som det antydes bør gjøres i kapittel 3.6. Dette skyldes at RP sjøl sier at metoden med faseforskyvninger ikke er tilfredsstillende. Det er derfor valgt å bruke modellen med individlaster og gange opp med jevnt fordelt areallast fra deltakerne. Dette vil være konservativt sammenlikna med Bachmanns modell, ISO-modellen og de to gruppemodellene til Ji og Ellis, som alle tar hensyn til gruppevirkninger.



Figur 21: Normalisert lastfunksjon fra Dr. V. Racic.

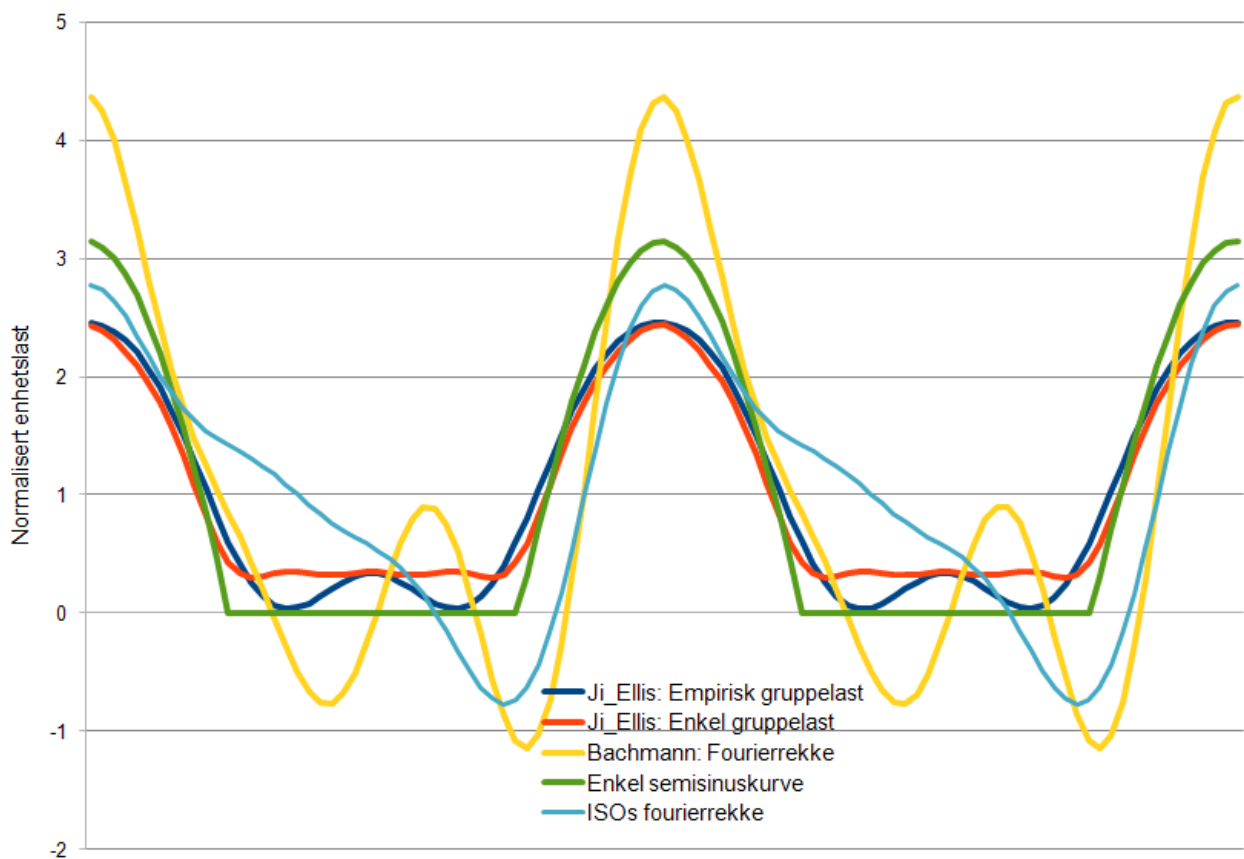
## 4.2.7 Variabel massemodell

NZMs variable massemodell krever manuell utregning av impulsformfaktorene. Ved innsetting av ulike verdier for impulsformfaktorene i likning 27, viser det seg at  $\lambda_1=\pi/$  og  $\lambda_2=0$  gir en impulskurve lik målte verdier for impulsen ved 2 Hz. Disse impulsformfaktorene tilsvarer den enkle gruppelastmodellen til Ji og Ellis i likning 23, bare uten den dynamiske gruppelastfaktoren , og det

er derfor ikke hensiktsmessig å gjennomføre analysene to ganger med samme lastmodell. For andre lastfrekvenser vil NZMs modell være mer hensiktsmessig å bruke.

### 4.3 Sammenlikning av teoretiske lastmodeller

Figur 22 er et utsnitt av de normaliserte lastkurvene, over et tidsrom på 1 sekund. Siden lastene ikke har toppunkt på samme tidspunkt, er de forskjøvet i tid for å gi best mulig sammenlikningsgrunnlag. Siden den syntetiske modellen til RP ikke har konstant maksimallast, er den ikke tatt med i figuren.



Figur 22: Sammenlikning av ulike lastmodeller.



Tabell 10: Maksimal, dynamiske lastforsterkning fra de ulike lastmodellene, normaliserte lastverdier.

<b>Semisinus</b>	<b>3,134</b>
<b>Bachmann</b>	4,354
<b>ISO</b>	2,768
<b>JE_enkel</b>	2,435
<b>JE_empirisk</b>	2,457
<b>Syntetisk</b>	3,183

I tabell 10 er den dynamiske lastforsterkninga fra den syntetiske modellen tatt med, sjøl om den varierer over tid. Den gjennomsnittlige maksimalverdien fra den genererte lastfunksjonen på 10 sekunder er valgt, for å illustrere funksjonens dynamiske forsterkning i forhold til statisk last.

Ji og Ellis' empiriske gruppelastfunksjoner, som på figuren over er markert i mørkeblått og rødt, gir tydelig lavere last enn de andre tre lastfunksjonene. Dette skyldes at en ikke regner med at alle aerobik-utøverne hopper. Som en ser av figur 22, er Bachmanns forenklete modell, som på figuren er gul, mer konservativ enn de andre modellene.

Når en sammenlikner Bachmanns forenklete fourierserie som gir ei dynamisk forsterkning på 4,35 ganger statisk last, med de andre lastene som gir dynamiske forsterkninger mellom 2,44 og 3,18 ganger statisk last, ser en at det er stor forskjell. Bachmanns forenklete fourierseriemodellen med tabulerte fourierkoeffisienter, er altså mellom 35% og 76% høyere enn de andre modellene.

Bachmann sier sjøl[21] at:

”Når de beregnede verdiene for  $k_p$  sammenliknes med de målte verdiene fra eksperimenter, viser disse at  $k_p$  stemmer rimelig godt overens med virkeligheten for  $f_p \approx 3$  Hz. For høyere (4 Hz) og lavere (2 Hz) frekvenser, vil halv sinusmodellen gi omlag 30% for høye verdier.”<sup>1</sup>

Men bruker en de beregnede verdiene, er altså tallet enda høyere. Det må derfor kunne sies at Bachmanns forenklete modell er for konservativ, og at den ikke gir et korrekt bilde på hvordan de dynamiske lastene vil være. Dog er Bachmanns modell den nest eldste av modellene, og at det er kommet endringer i modelleringsmetodene som tar mer hensyn til gruppevirkninger er ikke til å

---

<sup>1</sup> Egen oversettelse

undres over. Den utviklinga som har foregått på utviklinga av lastmodeller, må heller sies å være en naturlig utvikling ettersom en har tilgang til gamle modeller og kan justere disse etter nyere målinger.

Bruker en derimot Ji og Ellis' enkle eller empiriske fourierserie som er spesialtilpassa laster for grupper, ser vi at den dynamiske lasta kun er henholdsvis 2,44 eller 2,49 ganger høyere enn statisk last, altså enda lavere enn den enkle semisinuskurva. Dette skyldes trolig at Ji og Ellis' modeller tar hensyn til dårligere synkronisering mellom deltakerne i aktiviteten, og at den dynamiske effekten derfor ikke vil være like stor som når alle hopper fullstendig synkront, slik vi antar for den enkle semisinuskurva og Bachmanns fourierseriemodell. En kan anta at dette vil være nærmere den reelle lasta som oppstår fra hopping.

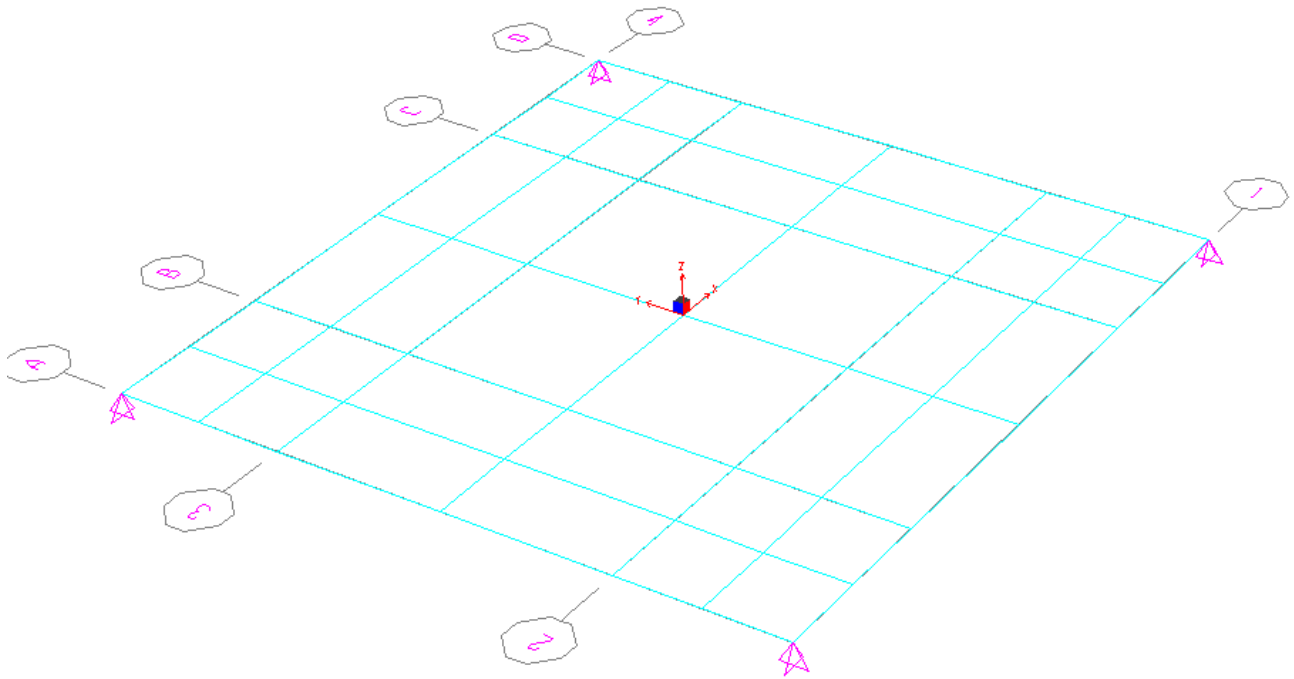
ISOs fourierseriemodell gir en helt annen fasong på lastfunksjonen enn de andre modellene, og den har lenger tid  $t_p$  hvor utøverne har kontakt med golvet, sjøl om det er tatt utgangspunkt i samme kontaktratio og samme  $t_p=0,25s$ . Dette kan føre til at ISO-modellen gir større respons enn de andre modellene – det vil vise seg i analysene av konstruksjoner i de neste kapitlene.

RP's syntetiske lastmodell kan ikke direkte bli sammenlikna med de andre modellene, siden denne baserer seg på laster som varierer over tid, i motsetning til de fire overnevnte modellene som alle har konstant maksamplitude. RP's modell har en maksimalamplitude som varierer fra 3,56 ganger statiske last på det meste, og 2,91 på det minste. Den ligger altså i det øvre sjikt for normalisert dynamisk last. Men som nevnt i kapittel 4.2.6, er dette en konservativ modell. Hadde man brukt en gruppereduksjonsfaktor tilsvarende Ji og Ellis' enkle gruppelastmodell, altså  $2/3$ , ville den syntetiske modellen gitt den laveste dynamiske lastforsterkninga.

#### **4.4 Analyse av enkelt dekke**

Et enkelt, kvadratisk dekke på 12x12m, se figur 22, er modellert i Sap2000. Dekket er plasstøpt, armert betong med tjuknelsen 300 mm. Betongens egenvekt er satt til  $2500\text{kgm}^{-3}$ , noe som gir ei egenlast på arealet til  $750\text{kgm}^{-2}$ . Stivhetsparametrene som er brukt er automatiske parametre fra programmet. Dekket er modellert med tynne skallelementer. Det er brukt betong med fasthetsklasse 30, altså B30. For denne betongen er E-modulen gitt i Eurokode 2[41]:  $E_{cm}=33000\text{ MPa}$ . Poissons

ratio er valgt etter Irgens *Fasthetslære*[42] til  $\nu = 0,15$ . Varmeutvidelseskoeffisienten  $\alpha = 10 \text{ e}^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ . Det er antatt en dempningskoeffisient på  $\xi=0,02$ , i henhold til Bachmann[21]. En gruppetetthet på 0,25 personer per kvadratmeter er valgt i henhold til tabell 8, noe som tilsvarer ei gruppe på 36 personer på det kvadratiske dekket.



Figur 23: Enkelt, kvadratisk dekke

#### 4.4.1 Egenlast- og egenfrekvensanalyse

Egenfrekvensanalysen er gjennomført med egenlast tilsvarende sjølve betongens last, altså  $750 \text{ kgm}^{-2}$ . For enkelhets skyld er ikke andre egenlaste som påstøp, golvbelegg etc. tatt med i beregningene.

I egenfrekvensanalysen i Sap2000 er egenfrekvensene beregna ved hjelp av egenvektorer, for å finne flest mulige lave egenfrekvenser, også egenfrekvenser som ligger svært nære i verdi. I lastanalysen i Sap2000 er det brukt Ritz-vektorer, som er lastavhengige og vil gi bedre resultater ved bruk av tidshistorieanalyser ("time-history analyses") og responsspektrumanalyser. Ritz-vektorer fanger bedre opp egenmodiene som eksiteres av påførte dynamiske laster[43].

I egenfrekvensanalysen er kun de første 10 egenfrekvensene beregna, da det anses å være mer enn tilstrekkelig for å få gode analyser av laster med frekvens rundt 2 Hz og disses harmoniske frekvenser. Det må påpekes at  $f_2 = f_3$  og  $f_7 = f_8$  på grunn av symmetri i dekket, og at det dermed i realiteten kun brukt de åtte første egenfrekvensene.

Tabell 11: Egenfrekvenser for kvadratisk dekke, beregna ved hjelp av egenvektorer.

TABLE: Modal Periods And Frequencies						
OutputCase	StepType	StepNum	Period	Frequency	CircFreq	Eigenvalue
Text	Text	Unitless	Sec	Cyc/sec	rad/sec	rad2/sec2
MODAL	Mode	1	0,388807	2,572	16,16	261,15
MODAL	Mode	2	0,173879	5,7511	36,135	1305,8
MODAL	Mode	3	0,173879	5,7511	36,135	1305,8
MODAL	Mode	4	0,138957	7,1965	45,217	2044,5
MODAL	Mode	5	0,075837	13,186	82,852	6864,4
MODAL	Mode	6	0,065128	15,354	96,474	9307,2
MODAL	Mode	7	0,057173	17,491	109,9	12078
MODAL	Mode	8	0,057173	17,491	109,9	12078
MODAL	Mode	9	0,042038	23,788	149,46	22339
MODAL	Mode	10	0,037951	26,35	165,56	27411

Med laveste egenfrekvens på kun 2,57 Hz og lastfrekvens på 2 Hz, er det veldig sannsynlig at det vil oppstå resonans i dekket. Også de to neste frekvensene, på 5,75 Hz og 7,20 Hz ligger innenfor henholdsvis den tredje og fjerde harmoniske svingeformen. Den lave frekvensen skyldes trolig store spennvidder sammen med et relativt tungt dekke. Hadde en valgt et lettere hulldekke i stedet for et kompakt dekke, ville vekta blitt redusert fra rundt 750kgm<sup>-2</sup> til rundt 400-450 kgm<sup>-2</sup>[44], og frekvensen ville blitt høyere.

En første egenfrekvens på  $f_1=2,57$  Hz, gir  $I = \text{Int}(f_1 / f_p) = 2$ , altså bør en bruke minst to fourierkomponenter. I de påførte lastene er det brukt tre eller seks fourierkomponenter, alt ettersom hvilken lastmodell det gjelder. Dette er vist for hver av modellene.

I tillegg til den tidligere gjennomførte egenfrekvensanalysen ved bruk av egenvektorer, er det gjennomført en analyse ved bruk av Ritz-vektorer. Når en analyserer egenfrekvensene ved hjelp av Ritz-vektorer, tar analysen hensyn til hvilke frekvenser som eksiteres av lasta. Vi får dermed et annet sett med egenfrekvenser som er lastavhengige. Siden vi bruker tre eller seks fourierkomponenter i lastfunksjonene, er det valgt å kun finne de seks første egenfrekvensene.

Tabell 12: Egenfrekvenser for kvadratisk dekke, beregna ved hjelp av Ritz-vektorer

TABLE: Modal Periods And Frequencies						
OutputCase	StepType	StepNum	Period	Frequency	CircFreq	Eigenvalue
Text	Text	Unitless	Sec	Cyc/sec	rad/sec	rad2/sec2
MODAL	Mode	1	0,388807	2,572	16,16	261,15
MODAL	Mode	2	0,065128	15,354	96,474	9307,2
MODAL	Mode	3	0,035919	27,84	174,93	30599
MODAL	Mode	4	0,027629	36,194	227,41	51716
MODAL	Mode	5	0,019547	51,158	321,44	103320
MODAL	Mode	6	0,011348	88,123	553,69	306570

#### 4.4.2 Resultater

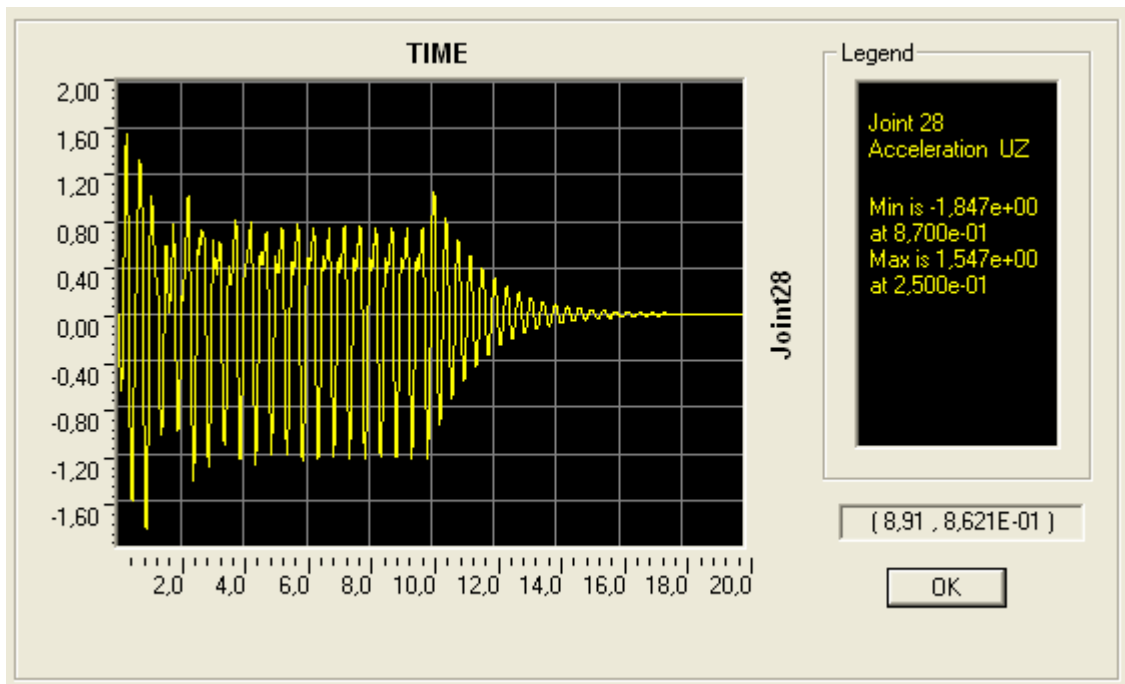
I teksten under følger en oversikt over beregnede verdier for akselerasjoner henta fra Sap2000. Det er kun henta ut akselerasjonsverdier i vibrasjonsretninga, altså i vertikal retning. I analysen under er akselerasjonen over tid kun henta ut for det mest kritiske punktet i konstruksjonen.  $A_{eff}$  er beregna ut fra akselerasjon/tid-verdiene fra Sap2000, ved hjelp av likning 9. Det ville vært konservativt å velge kun de første 10 sekundene, for da er vibrasjonene størst. Men det er i stedet valgt et tidsrom T på 11 sekunder, for å få med litt av den frie vibrasjonen i tillegg til vibrasjonene under lastpåføringstida de første 10 sekundene.

I tillegg til akselerasjonsverdier er det henta ut pseudoakselerasjonsspektre for de ulike lastmodellene, for å se hvordan de ulike harmoniske frekvensene, altså de multipliserte av lastfrekvensen, akselererer konstruksjonene.

De overnevnte kommentarene om resultatene gjelder også for analysen av dekket i flerbruksbygget i kapittel 4.3.

#### Akselerasjonsverdier

Grenseverdiene for akselerasjoner i på sportsgolv som dette dekket er 5% av g etter Bachmann, kapittel 2.5.2. I ISO-standarder finnes det ingen verdier som gjelder spesielt for sportsgulv, men det vil være naturlig å ta utgangspunkt i de høyeste verdiene, for "Workshop" i tabell 5, som gir ei grense på 0,56g, altså 5,6% av g.



Figur 24: Eksempel på akselerasjon over tid på dekkets midtpunkt, beregna med semisinusmodellen.

For det enkle dekket er det henta ut verdier midt på strukturen, i joint 28. De største nedbøyingene, og dermed også akselerasjonene, vil på grunn av den jevnt fordelte lasta skje på midten av kvadratet. Akselerasjonene er omregna for å være uttrykt i prosent av grunnakselerasjonen  $g$ . I tillegg til de effektive akselerasjonsverdiene fra Sap2000, er akselerasjonen beregna ved hjelp av Allens metode fra kapittel 3.1:

Tabell 13: Beregning av effektiv akselerasjon ved hjelp av Allens metode.

Påvisning for kvadratisk dekke:

$a_1/g$	0,08 $m/s^2$
$a_2/g$	0,03 $m/s^2$
$a_3/g$	0,0054 $m/s^2$
$a_1$	8 % $g$
$a_2$	3 % $g$
$a_3$	0,54 % $g$
$a_m$	9,3 % $g$

Den effektive akselerasjonene fra de ulike lastmodellene er lista opp i tabell 14.

Tabell 14: Absoluttverdier for akselerasjon for knutepunkt 28 i det enkle, kvadratiske dekket

Lastmodell	$A_{\text{eff}}$ i %g
Semisinusmodell	7,150
Bachmann	9,709
ISO	5,888
JE enkel modell	4,802
JE empirisk modell	5,274
RP's modell	7,345
Allens metode	9,300

Ikke overraskende gir Bachmanns forenklete fourierrekkemodell de høyeste akselerasjonene, dette stemmer overens med at denne lastmodellen er den som gir den høyeste dynamiske lastforsterkninga. Alle lastmodellene gir høye verdier for de effektive akselerasjonene, det er kun Ji og Ellis' enkle gruppelastmodell som gir akselerasjonsverdier under 5% av g.

Ved å sammenlikne akselerasjonsverdiene fra lastmodellene, med toleransegrensene fra kapittel 2.5.2, ser vi at de ligger godt over akseptabelt nivå. De vanlige toleranseverdiene for golv hvor det utøves aktivitet, ligger på 5% av g. Dog må det nevnes at det er gjort undersøkelser på dekker med akselerasjonsverdier på over 30% av g, hvor det ikke var tilløp til uro eller klager på vibrasjoner. [21] Men verdiene er likevel høye, og en må anta at et slik dekke ikke vil kunne brukes til aerobikliknende aktiviteter. Det kunne en allerede ha kommet fram til ved å vurdere egenfrekvensverdiene, som lå svært nære lastfrekvensen.

### Pseudoakselerasjonsspektre

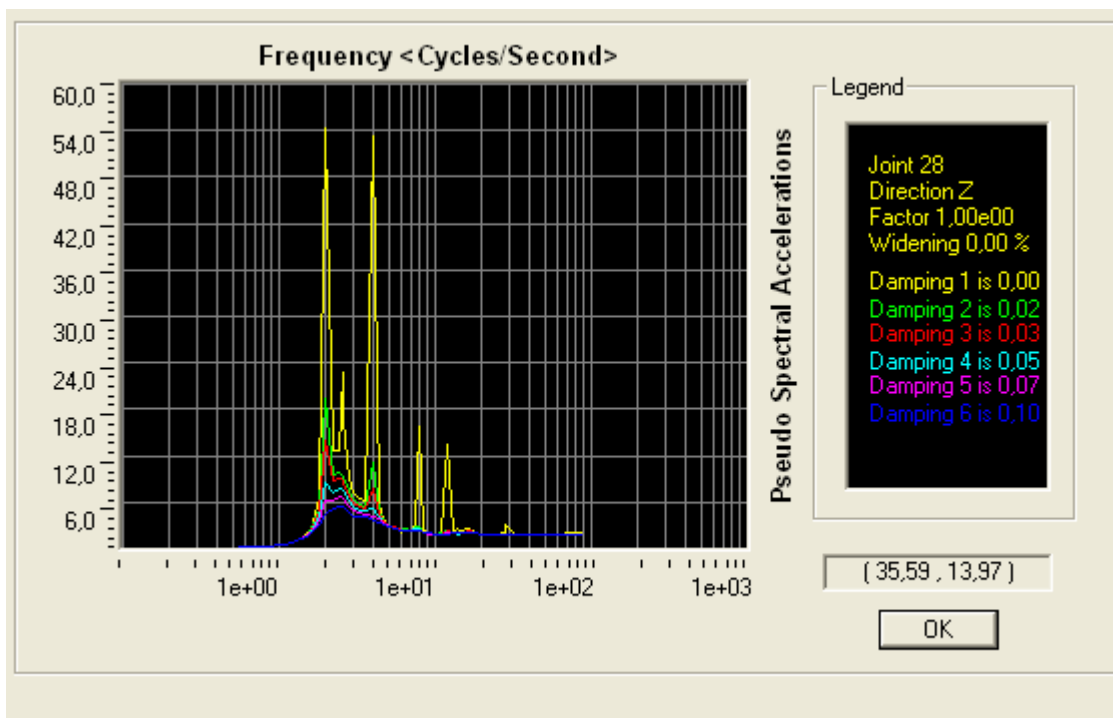
Vurderingene er gjort med utgangspunkt i demping på 0, som vil være mest kritisk og lettest og sammenlikne.<sup>2</sup> For alle responsspektrumkurvene, ser vi at dekket blei dominert av responsen fra

<sup>2</sup> Siden dempingsratioen er såpass lav, er det valgt å ikke ta med de høyeste dempingsverdiene for alle responsspektra. 2

lastfrekvensen på 2 Hz og dennes første harmoniske frekvens på 4 Hz. Men både ISOs og Bachmanns fourierseriemodell ser vi at den første harmoniske hadde større innvirkning enn lastfrekvensen. Dette til tross av at modellene er ganske ulike både i dynamisk forsterkning og i form, jamfør kapittel 4.3.

Både Bachmanns og ISOs fourierserier og Ji og Ellis' empiriske modell har tilnærma all respons fra de tre første frekvensene på 2Hz, 4 Hz og 6 Hz, altså lastfrekvensen og de to neste harmoniske. Dette skyldes at alle disse tre modellene kun bruker tre fourierkoeffisienter.

RP's syntetiske modell, kanskje noe overraskende, domineres kun av de to første frekvensene. Siden RP's modell er den modellen som i størst grad er basert på reelle verdier, kan dette tyde på at det kun er disse to frekvensene som dominerer responsen, men dette er det ikke holdepunkt for å si sikkert.

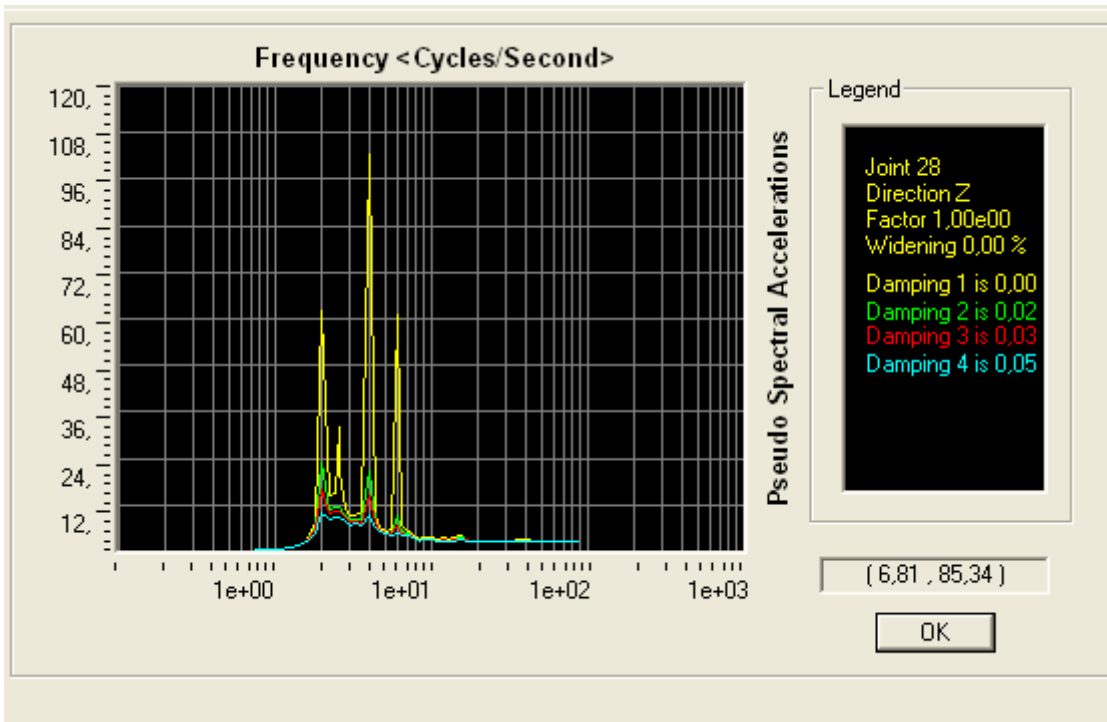


Figur 25: Responsspektrumkurve for Semisinusmodell

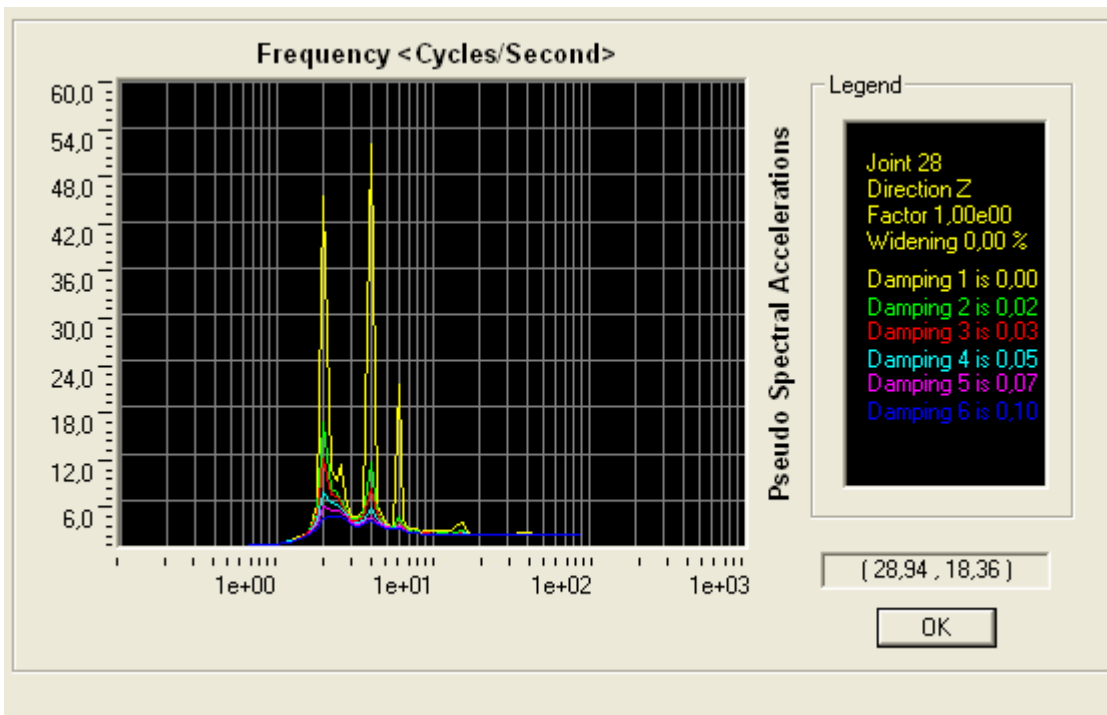
---

2Det er kun tatt med i noen av plottene for sammenlikningas del.

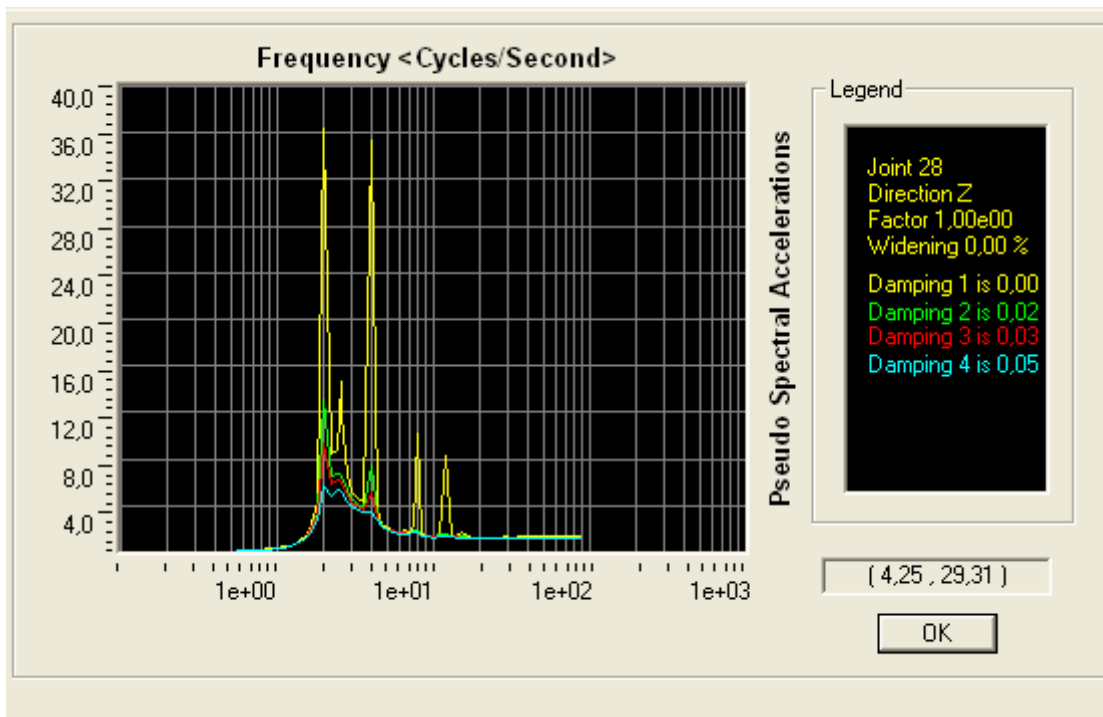




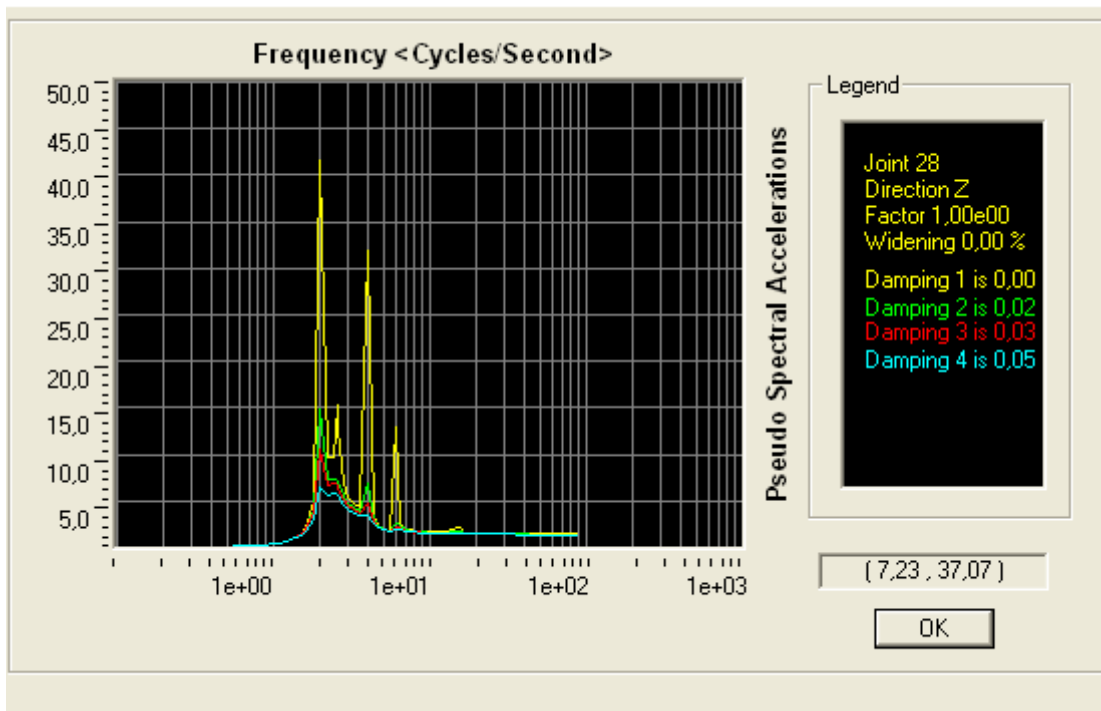
Figur 26: Resonsspektrumkurve for Bachmanns fourierseriemodell



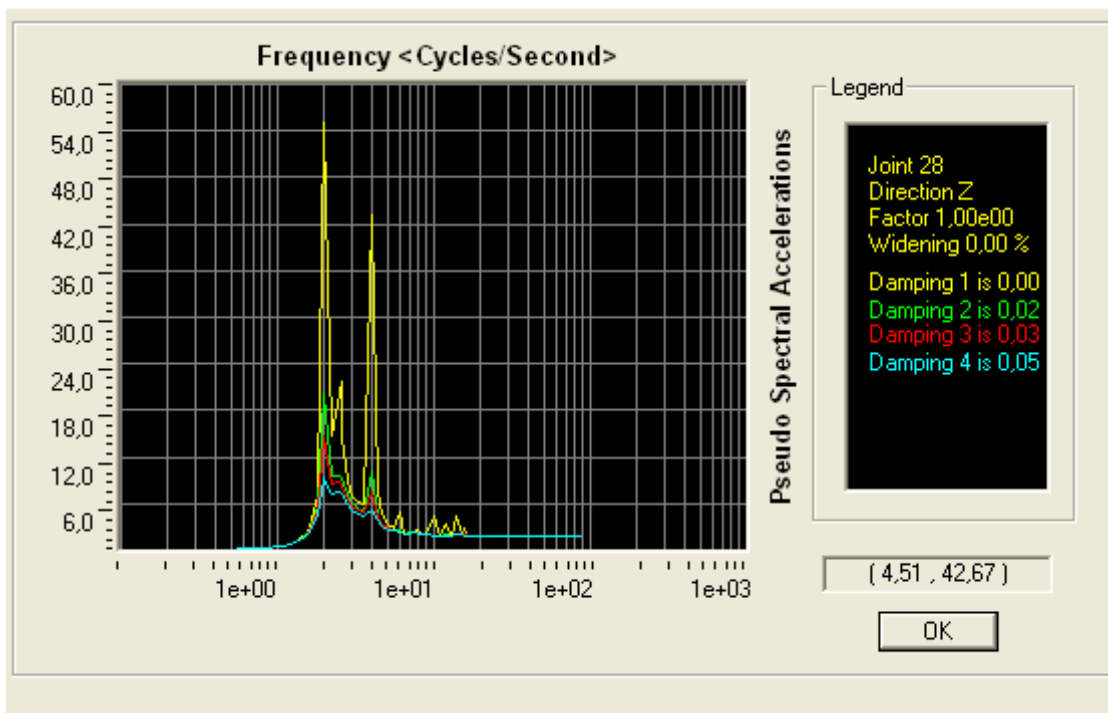
Figur 27: Resonsspektrumkurve for ISOs fourierseriemodell



Figur 28: Responsspektrumkurve for Ji og Ellis' enkle gruppelastmodell



Figur 29: Resonsspektrumkurve for Ji og Ellis' empiriske gruppelastmodell

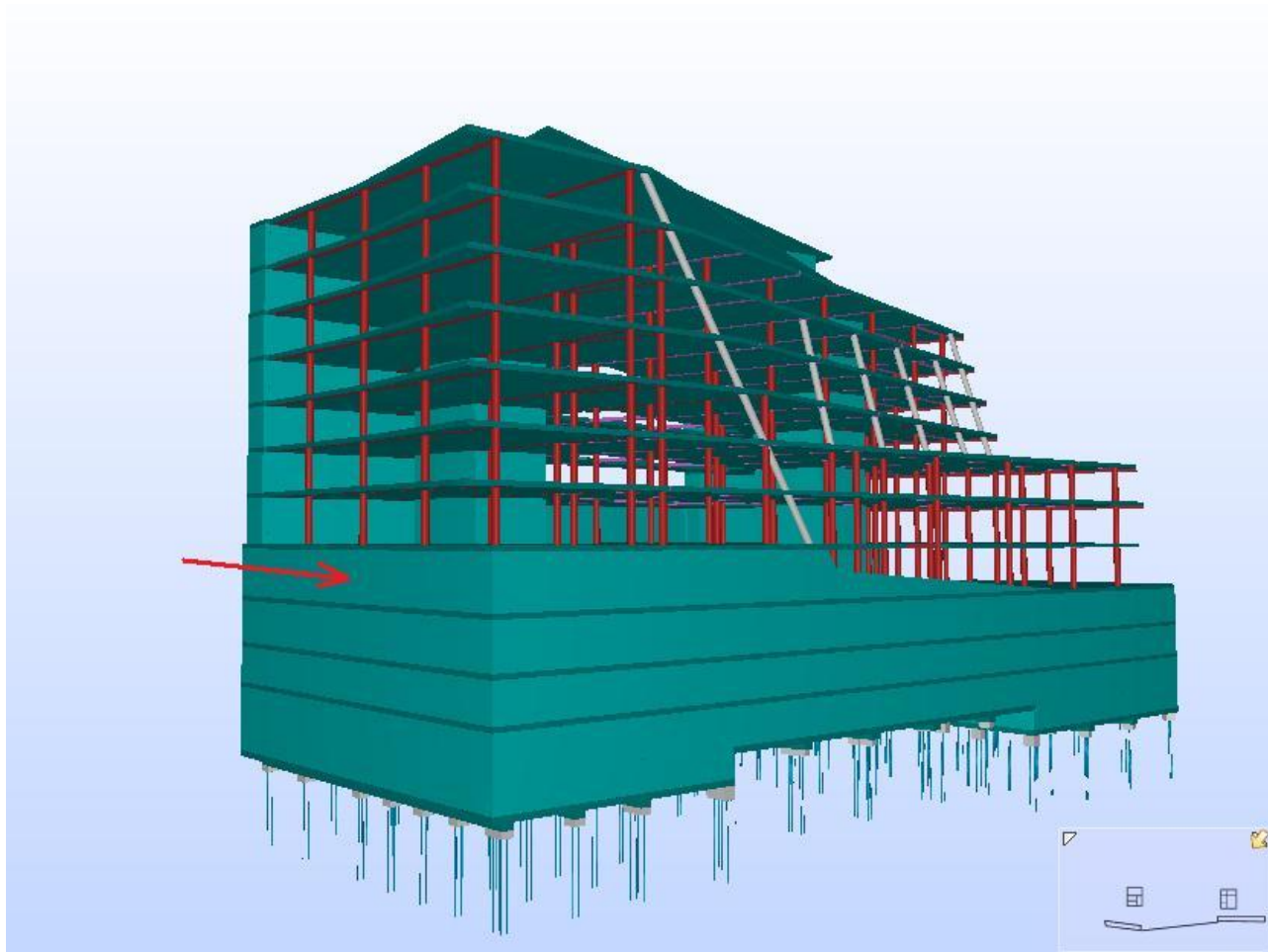


Figur 30: Resonsspektrumkurve for RPs syntetiske mode

## 4.5 Analyse av flerbruksbygg

### 4.5.1 Generelt om bygget og modellen

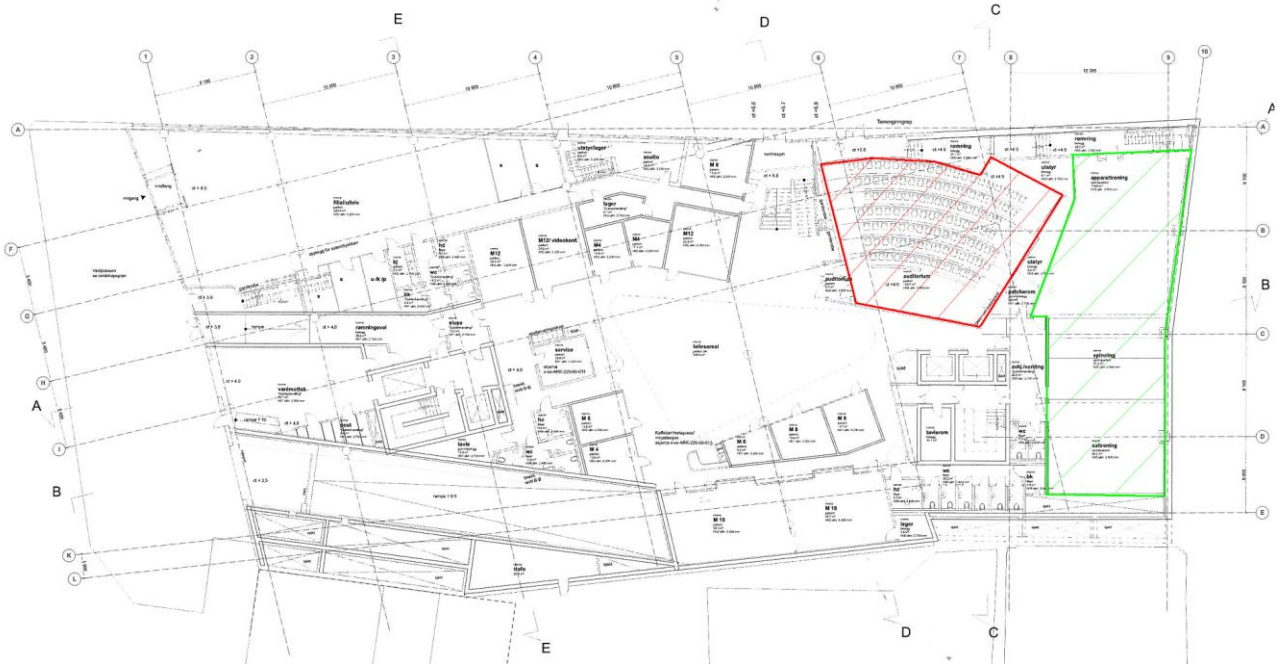
Bygget som skal analyseres er et elleve-etasjes bygg hvor de fire nederste etasjene ligger helt eller delvis under bakken. Bygget er asymmetrisk i både i plan og oppriss. I tillegg har det en gjennomgående åpning i dekket fra øverste etasje til og med første etasje.



*Figur 31: Modell av flerbruksbygg, treningsområdet er marker med pil.*

I grunnetasjen, etasje 0, er det planlagt flere treningsrom. Disse treningsrommene er planlagt mot syd, altså i delen av grunnetasjen som ligger under bakken. Det er planlagt en del av arealet til apparattrening, en del av arealet til spinning og en del av arealet til saltrening, hvor det vil foregå ulike treningstyper, for eksempel aerobik, yoga og dansing. Det er denne delen av treningsarealene som ville være mest kritisk. Den eksakte plasseringa av treningsrommet er ennå ikke bestemt, men det er mulig at aerobiken vil foregå nærmest vegg i vegg med et stort auditorium som er planlagt i

samme etasje, se figur 24. Dette vil kunne ha innvirkning på bruken av auditoriet, jamfør toleranseverdiene i kapittel 2.5.2. I etasjen under treningsarealene er det planlagt garderober i tilknytning til treningssalene. En vil dermed kunne anta at brukerne av disse arealene er klar over aktiviteten som foregår i etasjen over, og at eventuelle vibrasjonsvurderinger må foretas ut fra mildere kriterier, altså høyere toleranseverdier, enn det som kan aksepteres for brukerne av auditoriet.



Figur 32: Modell av flerbruksbygg, treningsareal (grønt) og auditorium (rødt) er markert.

For enkelhets skyld er det valgt samme antall brukere i treningssalen i flerbruksbygget som på det enkle, kvadratiske dekket. Dermed kan en for Ji og Ellis' gruppelastmodell bruke samme beregnede lastmodell som for det kvadratiske dekket. Lasta er påført et areal på ca.  $124 \text{ m}^2$ , noe som tilsvarer størrelsen på treningssalen. Dette er noe mindre enn det kvadratiske dekket, og sånn blir lasttettheten noe høyere enn for kvadratet ( $\sim 0,3$  personer per kvadratmeter), men dette er ikke tatt hensyn til under beregninga av dekket. Forskjellen tilsvarer om lag 4 kg per kvadratmeter, og antas å ikke ha noen særlig innvirkning på lastene.

#### 4.5.2 Modellering av dekket

Som en kan se av figur 24 over, er bygget svært komplisert. For å lette modelleringa, er det gjort en del forenklinger av modellen som blir brukt i programmet. For det første antas det at de dynamiske lastene fra aerobiken, kun vil ha innflytelse på dekket selv. Lastene er såpass små at en kan anta at de ikke vil ha innflytelse på søylene slik at søylene virker som fjærer. Søylene er stive og fungerer som fastholdte støtter.

I utgangspunktet anses søylene å være innspente i dekket. Men for å modellere dette kan en anse søylene som enten ledd, faste innspenninger eller som søyler som er leddede mot dekket, men fastholdt i andre enden, altså mot dekkene første etasje og underetasjen. Basert på undersøkelsene gjort av E. El-Dardiry et al.[45] er den mest korrekte modellen en søyle/dekke-modell, hvor dekket er fastholdt av leddede søyler som er fast innspente i andre enden. Likevel velges en enklere modellering, hvor søylene regnes som fast innspente i dekket. Dette gir for det første en enklere modelleringsjobb. For det andre er ikke søylene vertikale, de heller opptil 15 grader i forhold til vertikalplanet, og virkningen av søylene kan dermed ikke antas å være helt tilsvarende som i El-Dardirys artikkel. Dessuten er søylene modellert som innspenninger i forprosjektet til bygget, og det vil derfor være mest naturlig å benytte samme modelleringsmetode.

Ved valg av innspente søyler, blir konstruksjonen dermed noe stivere enn ved bruk av leddede søyler – og følgelig blir egenfrekvensene noe for høye. I El-Dardirys undersøkelse var denne økningen i egenfrekvens på om lag 8,5% for laveste egenfrekvens. Dette er ikke til sikker side, og for konstruksjoner som skal dimensjoneres i bruddgrensetilstand bør en da heller bruke den konservative metoden; å anse søylene som fastholdt i ledd, men med tre roterende frihetsgrader. I dette prosjektet, hvor hovedfokuset ligger på sammenlikning av lastmodeller i bruksgrensetilstand, anses det å være tilstrekkelig å modellere søylene som innspenninger.

Veggene regnes som stive, og fungerer som fast innspenning langs deler av dekketidene.

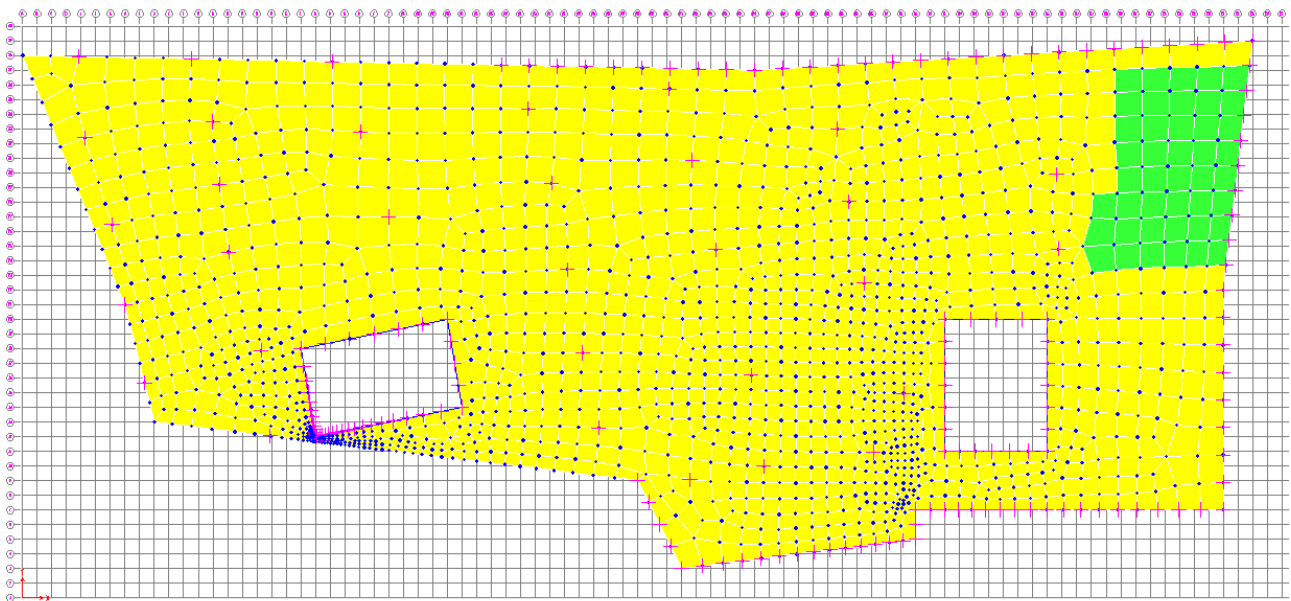
Dekket, med en total lengde på over 80m, er modellert i Sap2000. Dekket er et 400mm tjukt

hulldekke, med ekstra påstøp på 100mm, altså total tjukkelse  $t=500\text{mm}$ . Dette gir egenlast betong på  $5\text{kNm}^{-2}$ . I tillegg kommer andre egenlast fra isolasjon og golvbelegg på totalt  $2,7\text{kNm}^{-2}$ . Dermed brukes total egenlast dekke på  $7,7\text{kNm}^{-2}$ .

Dekket er modellert med tynne skallelementer. Stivhetsparametrene som er brukt er automatiske parametre fra programmet. Det er brukt betong med fasthetsklasse 30, altså B30. For denne er det gitt i Eurokode 2[41]:  $E_{cm}=33000\text{MPa}$ . Poissons ratio er valgt til  $\nu = 0,15$  [42].

Varmeutvidelseskoeffisienten  $\alpha = 10 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ . Det er antatt en dempningskoeffisient på  $\xi=0,05$  i henhold til angivelser i forprosjektet. Dette er trolig noe høyt, da vanlige dempningskoeffisienter for liknende bygg ligger på mellom 1% og 3% - se for eksempel Bachmann [21].

For enkelhets skyld er det valgt samme antall brukere i treningssalen i flerbruksbygget som på det enkle, kvadratiske dekket. Dermed kan en for Ji og Ellis' gruppelastmodell bruke samme beregnede lastmodell som for det kvadratiske dekket. Lasta er påført et areal på ca.  $124\text{m}^2$ , noe som tilsvarer størrelsen på treningssalen. Dette er noe mindre enn det kvadratiske dekket, og sånn blir lasttettheten noe høyere enn for kvadratet ( $\sim 0,3$  personer per kvadratmeter), men dette er ikke tatt hensyn til under beregninga av dekket. Forskjellen tilsvarer om lag  $4\text{kg}$  per kvadratmeter, og antas å ikke ha noen særlig innvirkning på lastene.



Figur 33: Dekke med markering av påført last i grønt.

### 4.5.3 Egenlast- og egenfrekvensanalyse

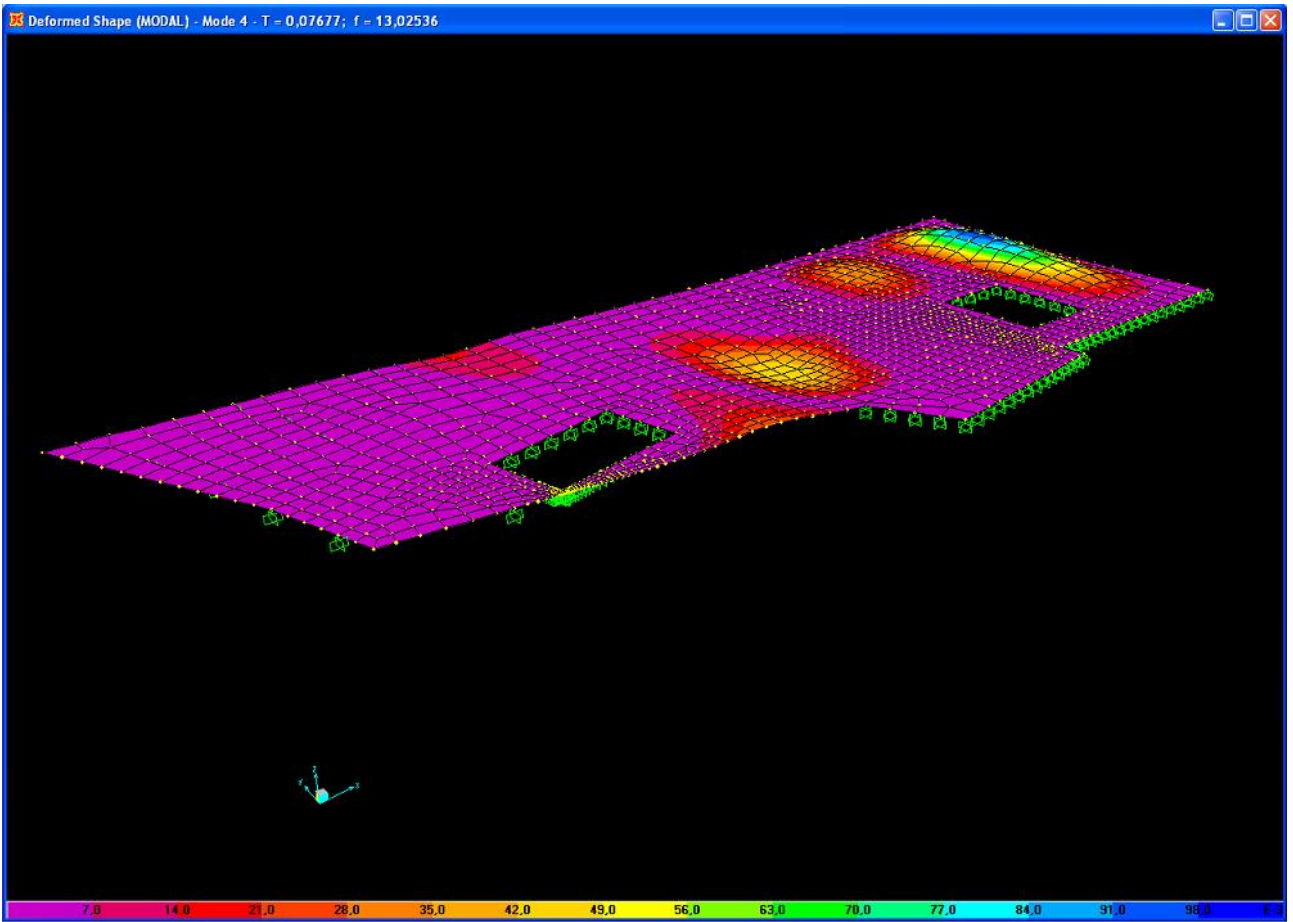
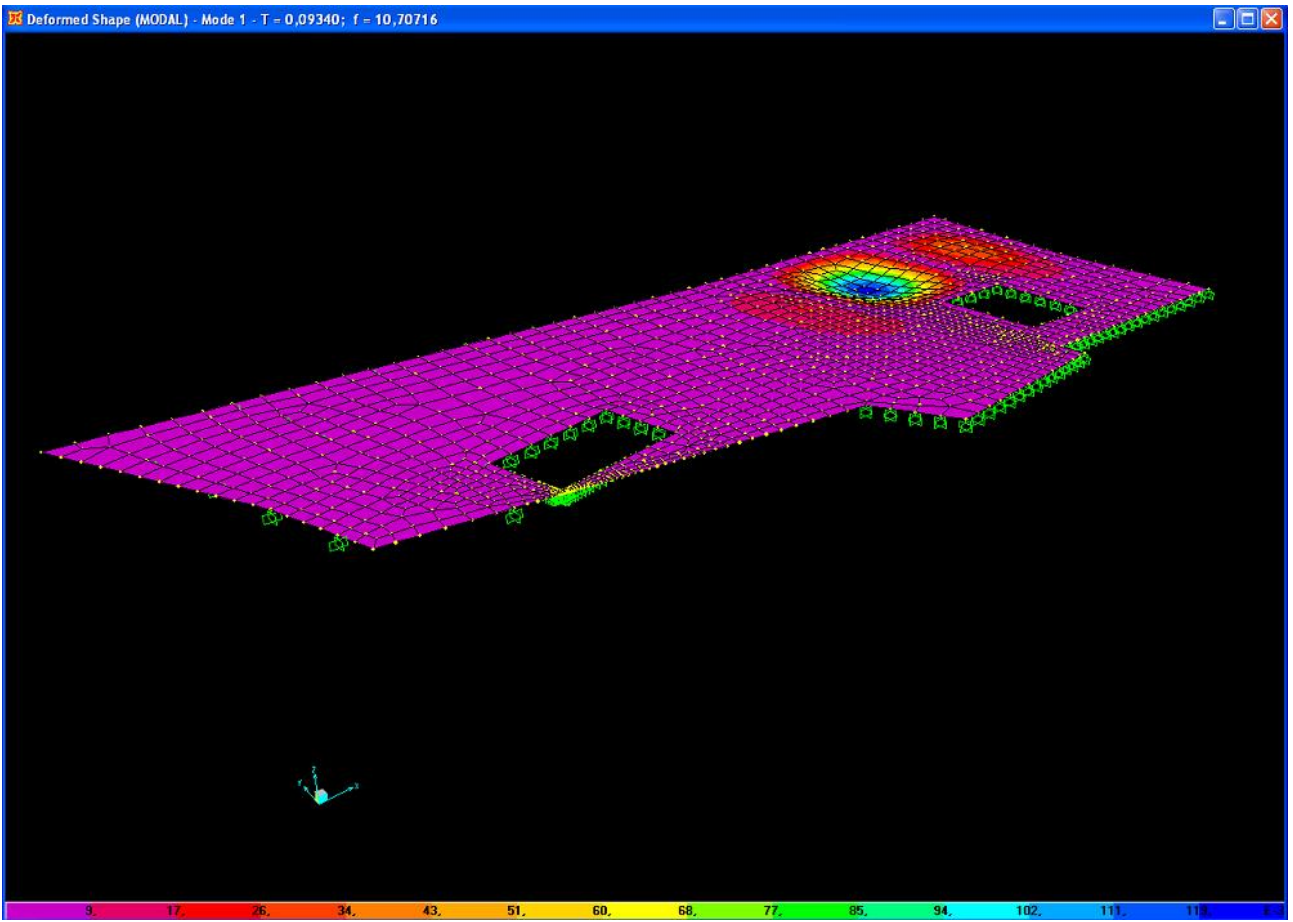
Egenfrekvensene til dekket er først beregna i Sap2000 ved hjelp av egenvektorer, som for det enkle, kvadratiske dekket. Det er beregna ti egenfrekvenser. Siden dekket ikke er symmetrisk, vil de beregnede egenfrekvensene kun opptre en gang, ikke flere slik de gjorde for det kvadratiske dekket. Det er viktig å ha med et større spekter av egenfrekvenser her, fordi det er vesentlig å finne ut av hvor på dekket en vil få de største forskyvningene når de forskjellige egenmodene eksiteres.

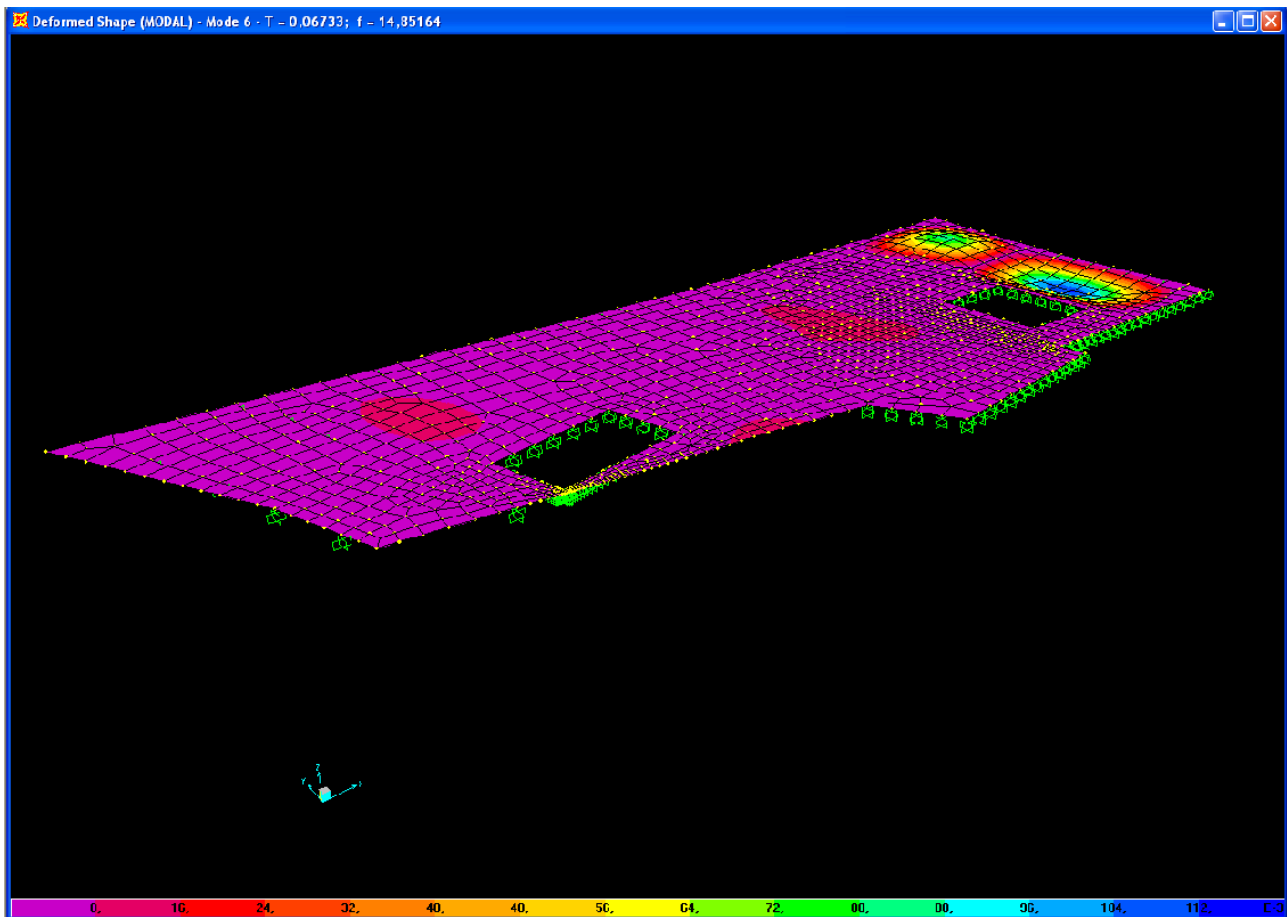
Tabell 15: Egenfrekvenser for dekket, beregna med egenvektorer

TABLE: Modal Periods And Frequencies						
OutputCase	StepType	StepNum	Period	Frequency	CircFreq	Eigenvalue
Text	Text	Unitless	Sec	Cyc/sec	rad/sec	rad2/sec2
MODAL	Mode	1	0,093395	10,707	67,275	4525,9
MODAL	Mode	2	0,081731	12,235	76,876	5909,9
MODAL	Mode	3	0,077496	12,904	81,077	6573,5
MODAL	Mode	4	0,076773	13,025	81,841	6697,9
MODAL	Mode	5	0,067997	14,706	92,404	8538,4
MODAL	Mode	6	0,067333	14,852	93,316	8707,8
MODAL	Mode	7	0,066619	15,011	94,316	8895,5
MODAL	Mode	8	0,065181	15,342	96,396	9292,3
MODAL	Mode	9	0,064661	15,465	97,172	9442,4
MODAL	Mode	10	0,05982	16,717	105,03	11032

De ti laveste egenfrekvensene for dekket spenner altså over et relativt lite intervall. Den laveste egenfrekvensen på 10,7 Hz er over fem ganger lastfrekvensen, så i utgangspunktet vil det være naturlig at det først og fremst er den moden som blir eksitert. Men siden egenfrekvensene eksiterer ulike deler av det store dekket, er det ikke nødvendigvis slik at del laveste frekvensene har størst innflytelse på den totale responsen. Figur 34 viser de tre egenmodene som gir mest utslag for det kritiske området ved auditoriet.







Figur 34: Utvalgte svingeformer til dekket ved ulike egenfrekvenser: a)  $f=10,7$  Hz, b)  $f=13,0$  Hz og c)  $f=14,9$  Hz

I tillegg til egenfrekvensanalyse ved bruk av egenvektorer, er det gjennomført en analyse ved bruk av Ritz-vektorer. Når en analyserer egenfrekvensene ved hjelp av Ritz-vektorer, tar analysen hensyn til hvilke frekvenser som eksiteres av lasta. Vi får dermed et annet sett med egenfrekvenser som er lastavhengige. Siden vi bruker tre eller seks fourierkomponenter i lastfunksjonene, er det valgt å kun finne de seks første egenfrekvensene. Verdiene finnes i tabell 16.

Tabell 16: Egenfrekvenser for dekket, beregna med Ritz-vektorer

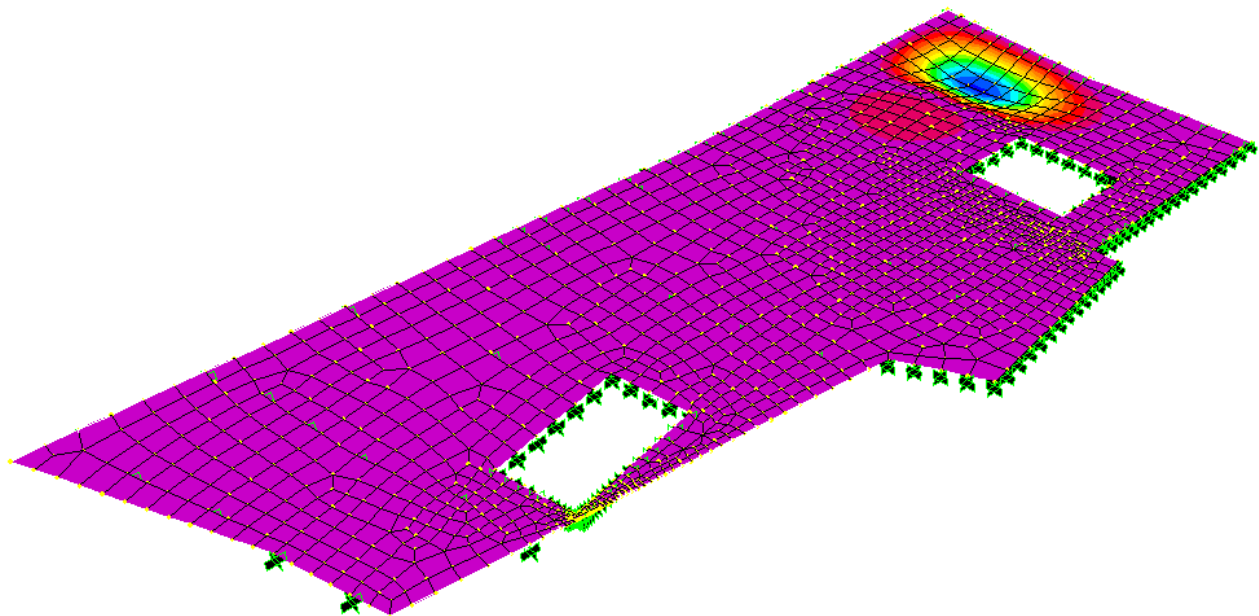
TABLE: Modal Periods And Frequencies						
OutputCase	StepType	StepNum	Period	Frequency	CircFreq	Eigenvalue
Text	Text	Unitless	Sec	Cyc/sec	rad/sec	rad2/sec2
MODAL	Mode	1	0,093395	10,707	67,275	4526
MODAL	Mode	2	0,076939	12,997	81,664	6669
MODAL	Mode	3	0,06755	14,804	93,015	8651,8
MODAL	Mode	4	0,055107	18,146	114,02	13000
MODAL	Mode	5	0,033009	30,295	190,35	36233
MODAL	Mode	6	0,017699	56,499	354,99	126020

Det er ganske store forskjeller i de beregnede egenfrekvensene fra egenvektoranalysen og Ritz-vektoranalysen. Det skyldes hovedsakelig at Ritz-vektoranalysen også tar hensyn til påført last. Da den menneske-induserte lasta kun er påført i et lite område av dekket, vil det være naturlig at det er det området og nærliggende områder som blir eksiterte, ikke områder med lavere egenfrekvens, men som ligger på andre siden av konstruksjonen. På samme måte ville vi fått andre egenfrekvenser fra Ritz-analysen dersom vi påførte lasta på en annen eller større del av dekket.

Når en ser på egenfrekvensene fra Ritz-vektorene, er de tre første nesten identiske med de tre frekvensene i figur 34. Dette skyldes at Ritz-vektorene tar hensyn til at lasta er påført i dette området, og det vil derfor være disse egenfrekvensene som får størst innvirkning på svingningene.

#### 4.5.4 Resultater

I figur 35 er svingeformen til dekket i flerbruksbygget plottet. Dette er svingeformen som oppsto for alle lastmodellene.

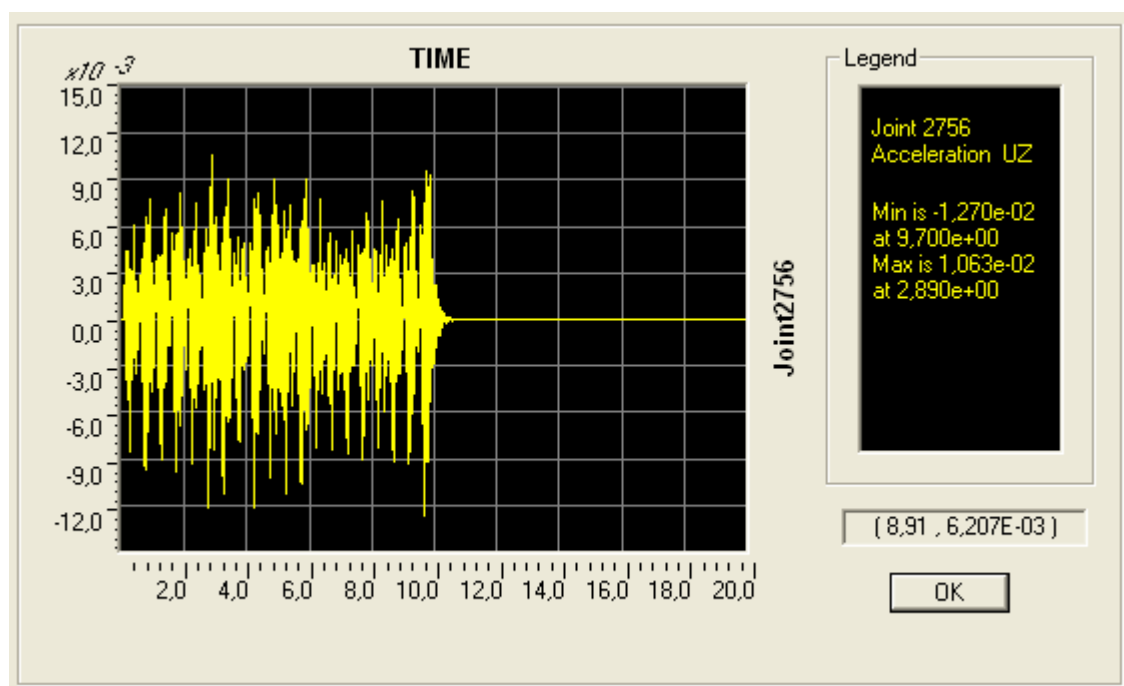


Figur 35: Svingeform for dekket under ei lastpåvirkning på 2 Hz.

## Akselerasjonsverdier

Ved å bruke ISO-standarden, som gir toleranseverdier avhengig av frekvens og bruk av området utsatt for konstruksjonen, finner man en grenseverdi på 0,14g for kontorbygg, noe som tilsvarer 1,4% av g. Bruker en Bachmanns verdier, krever de at akselerasjonen skal være mindre enn 0,5% av g.

For dekket i flerbruksbygget, er det vanskeligere å vite hvilke akselerasjonsverdier som er relevante. Siden det kritiske området for vibrasjoner, er auditoriet, vil det være naturlig å ta utgangspunkt i de vibrasjonene som oppstår der. Det er derfor valgt å hente ut vibrasjonsverdier for det mest kritiske knutepunktverdiene i auditoriet. For ulike lastmodeller, vil dette være ulikt knutepunkt.



Figur 36: Eksempel på akselerasjon over tid for knutepunkt 2756, beregna med RPs lastmodell.

De effektive akselerasjonsverdiene for auditoriet er beregna på samme måte som verdiene for det enkle, kvadratiske dekket. Allens metode er ikke benytta, da den baserer seg på modellering av enklere konstruksjoner enn dekket i flerbruksbygget. Den vil ikke kunne forutsi reaksjonene i en annen del av dekket enn der hvor lasta påføres.

Tabell 17: Effektive akselerasjonsverdier i auditoriet

Lastmodell	$A_{\text{eff}}$ i %g
Semisinusmodell	0,076
Bachmann	0,058
ISO	0,035
JE enkel modell	0,048
JE empirisk modell	0,019
RP's modell	0,040

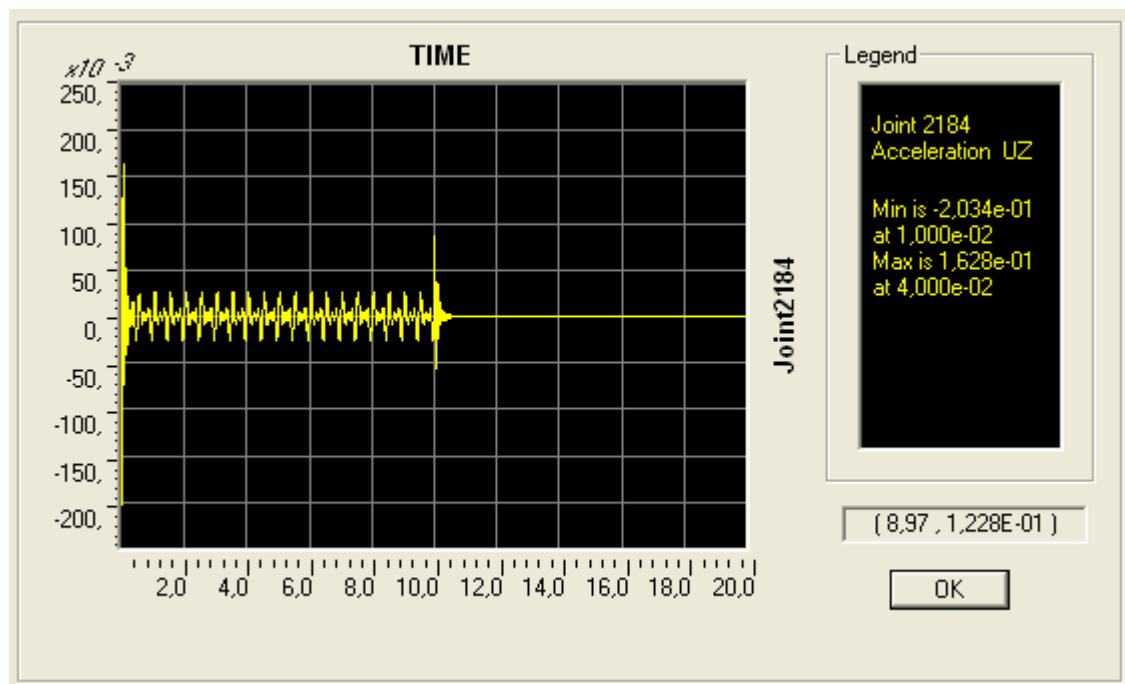
Det er stor variasjon mellom de effektive akselerasjonsverdiene  $a_{\text{eff}}$ , beregna ved hjelp av likning 9. Men som vanlig gir Bachmanns fourierseriemodell størst utslag. Alle verdiene er dog veldig små i forhold til toleranseverdiene i kapittel 2.5.2. Det er ingen fare for at vibrasjonene skal skape problemer for bruken av auditoriet.

I tillegg til akselerasjonene i auditoriet, er det henta ut akselerasjonsverdier i selve treningssalen, for å se hva slags vibrasjoner som vil kunne oppfattes av deltakerene sjøl. Disse verdiene må vurderes opp mot samme kriterier som det kvadratiske dekke, altså mot en akselerasjonsgrense på 5% av g. Det er kun maksimalverdiene fra knutepunktet med høyest akselerasjon som er henta ut.

Tabell 18: Effektive akselerasjonverdier i treningssal

Lastmodell	$A_{\text{eff}}$ i %g
Semisinusmodell	0,299
Bachmann	0,314
ISO	0,170
JE enkel modell	0,167
JE empirisk modell	0,101
RP's modell	0,167

En kan se av tabell 18 at verdiene ligger godt under grenseverdien satt for golv med sportsaktivitet. Også den konservative verdien fra Bachmanns fourierseriemodell ligger under grenseverdien med god margin. Det kan dermed konkluderes med at det ikke vil oppstå problematiske vibrasjoner i treningssalen.



Figur 37: Eksempel på akselerasjon over tid for knutepunkt 2184, beregna med ISOs fourierserie

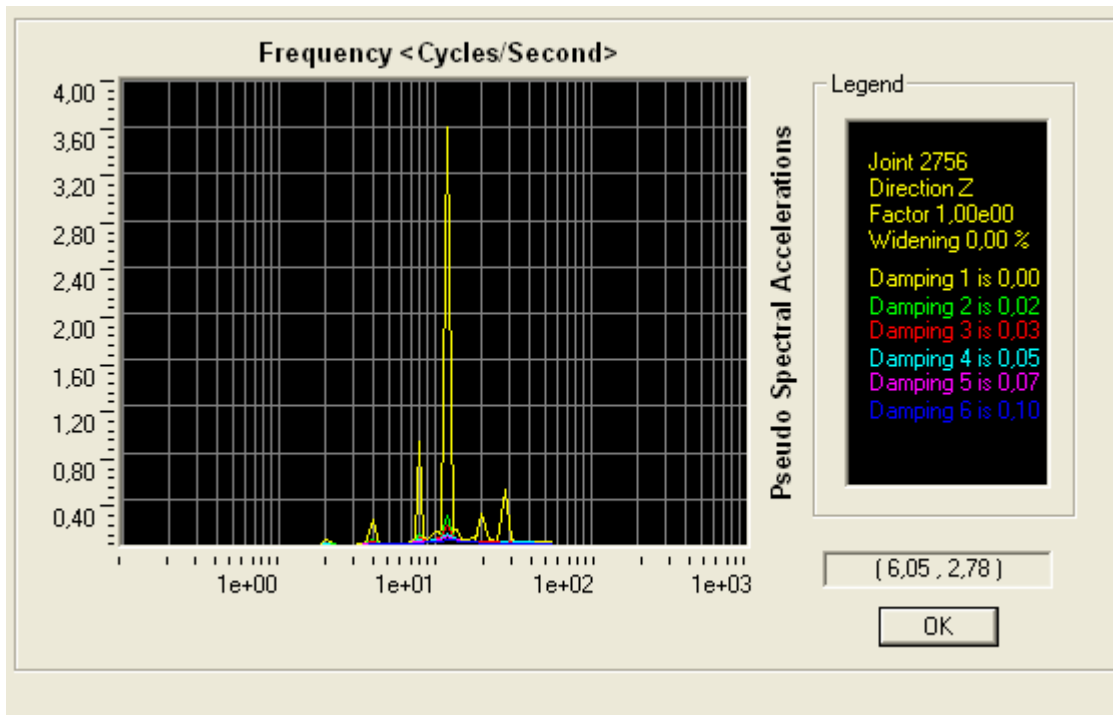
### Pseudoakselerasjonsspektre

Det er kun foretatt pseudospektervurdering av akselerasjonene i auditoriet.

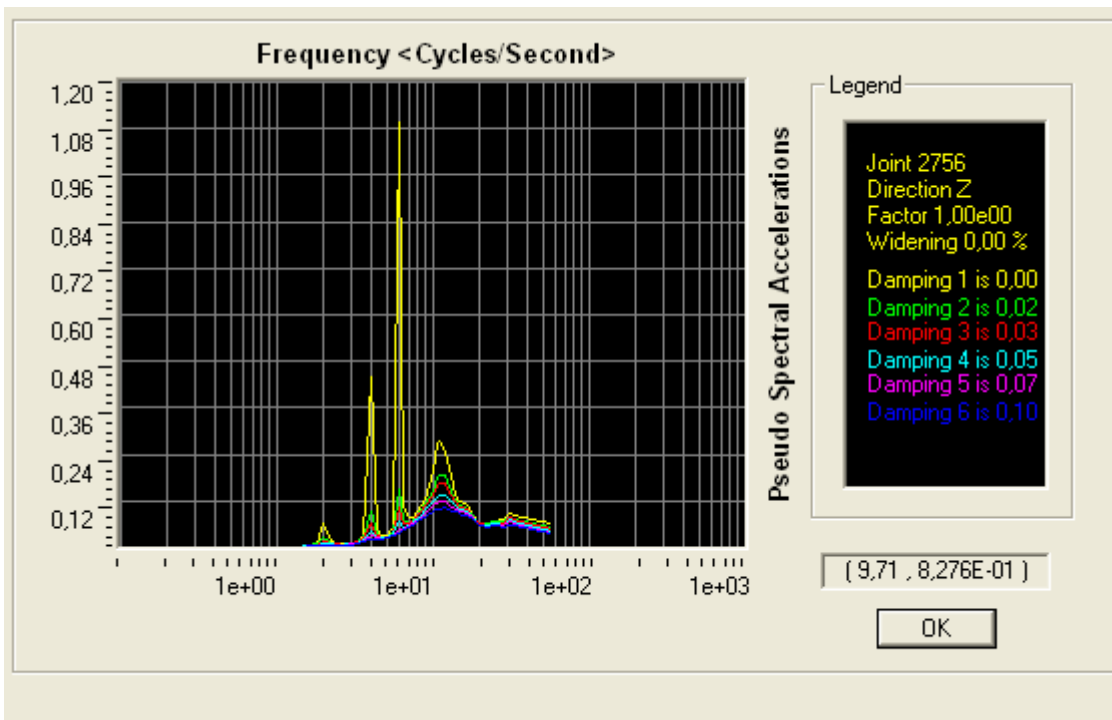
Ved å se på de ulike responspektrene, ser vi at konstruksjonen eksiteres i forskjellige multipliserte av lastfrekvensen for de ulike lastmodellene. Responsen for de forskjellige lastmodellene domineres primært av frekvensområdene rundt 4 Hz, 6 Hz, 10 Hz, 12 Hz og 14 Hz, men man kan se at helt opp til den fjortende harmoniske lastfrekvensen, det vil si 30 Hz, er med på å eksitere strukturen. De hoveddominante frekvensene er 6 Hz og 12 Hz. 12 Hz er den harmoniske lastfrekvensen som ligger nærmest dekkets laveste egenfrekvens på 10,7Hz, så det er naturlig at den dominerer mye av responsen.

Ellers kan man se at det er veldig stor spredning i responspektret fra lastfunksjon til lastfunksjon.

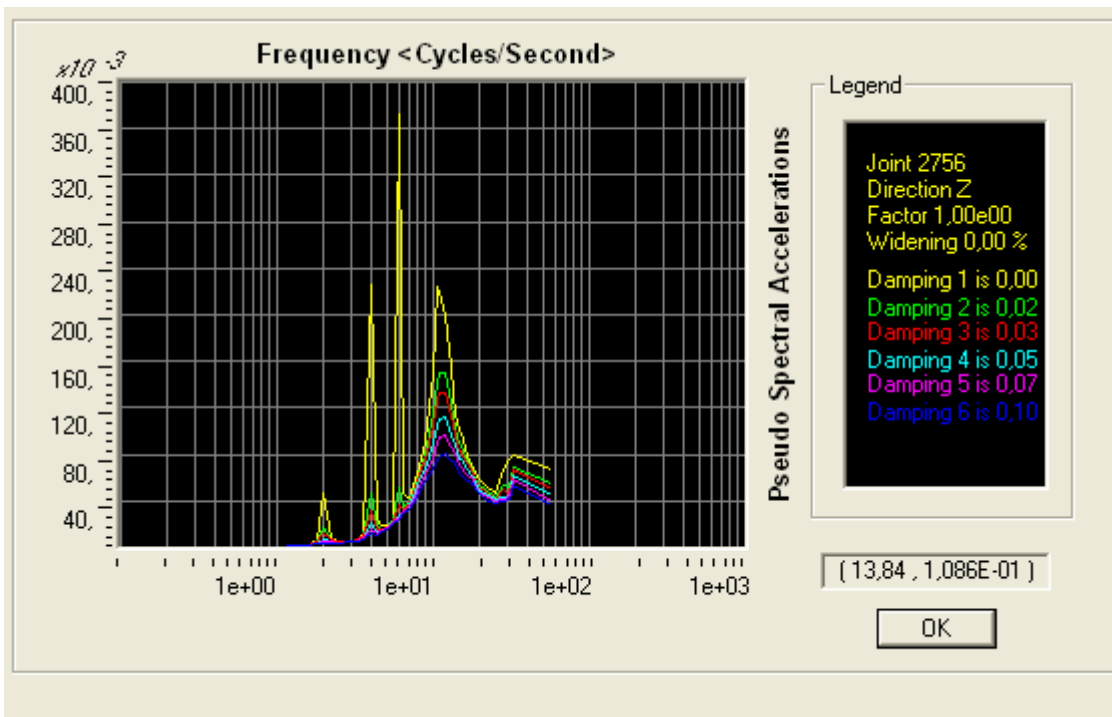
Dette viser at det ikke nødvendigvis kun er egenfrekvensene som er avgjørende for de største responsene, men at lastfunksjonen, sjøl med samme frekvens, vil kunne være utslagsgivende for hvilke egenmoder som blir dominerende.



Figur 38: Responsspektrumkurve for semisinusmodellen

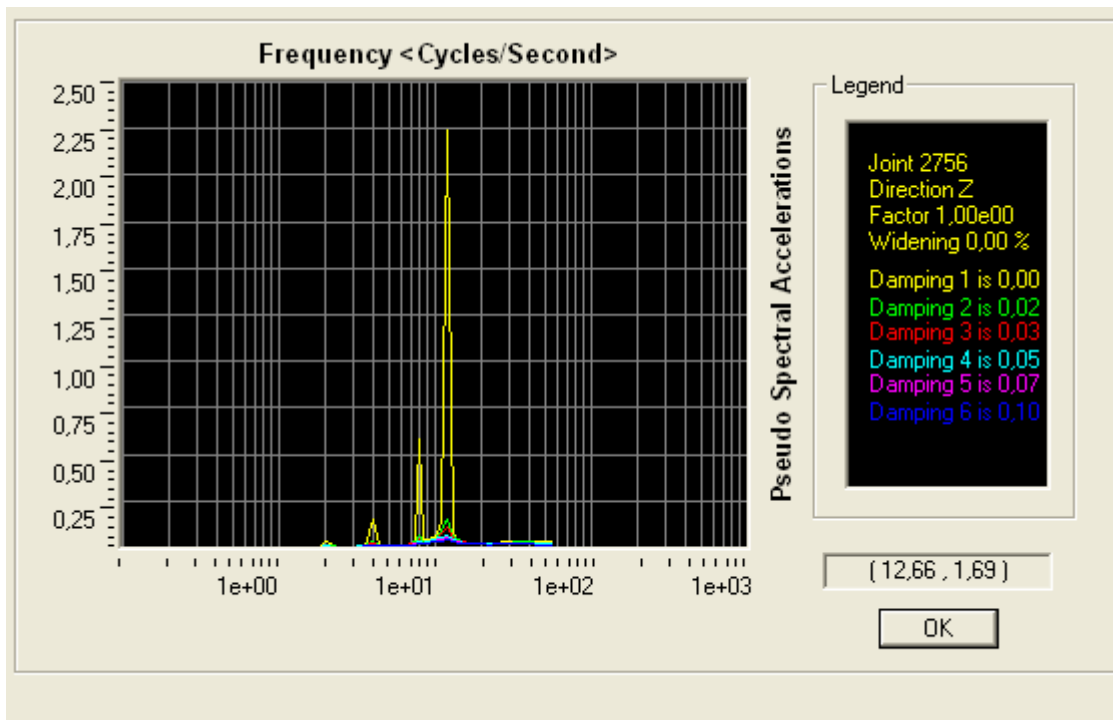


Figur 39: Resonsspektrumkurve for Bachmanns fourierseriemodell

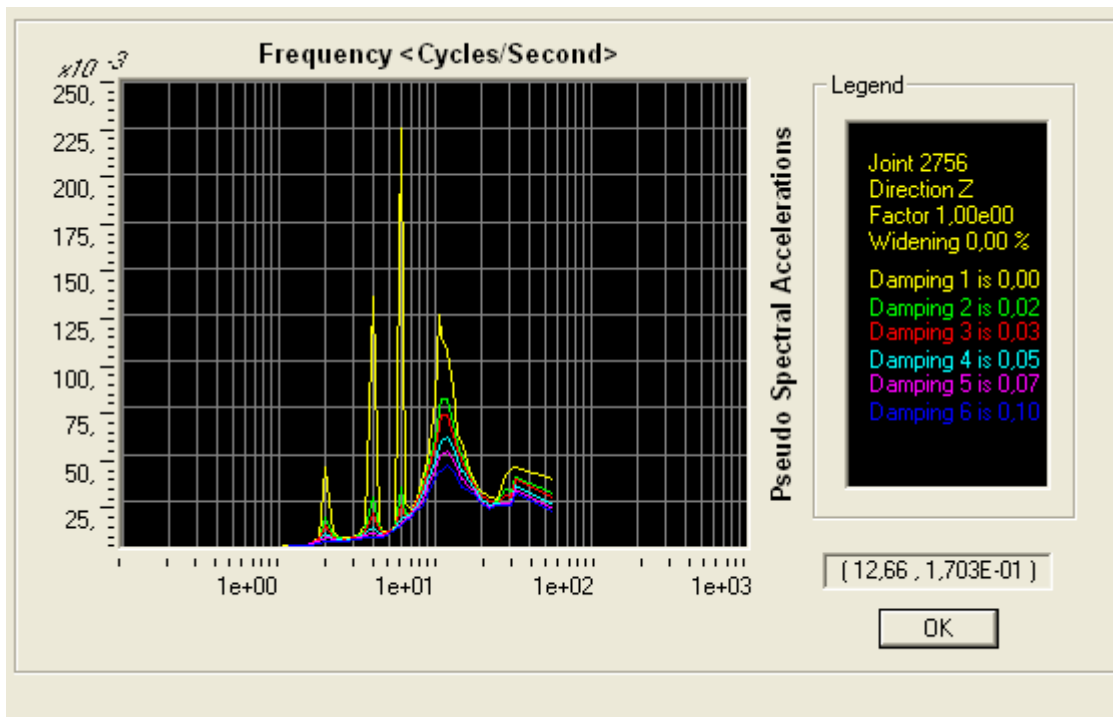


Figur 40: Resonsspektrumkurve for ISOs fourierseriemodell

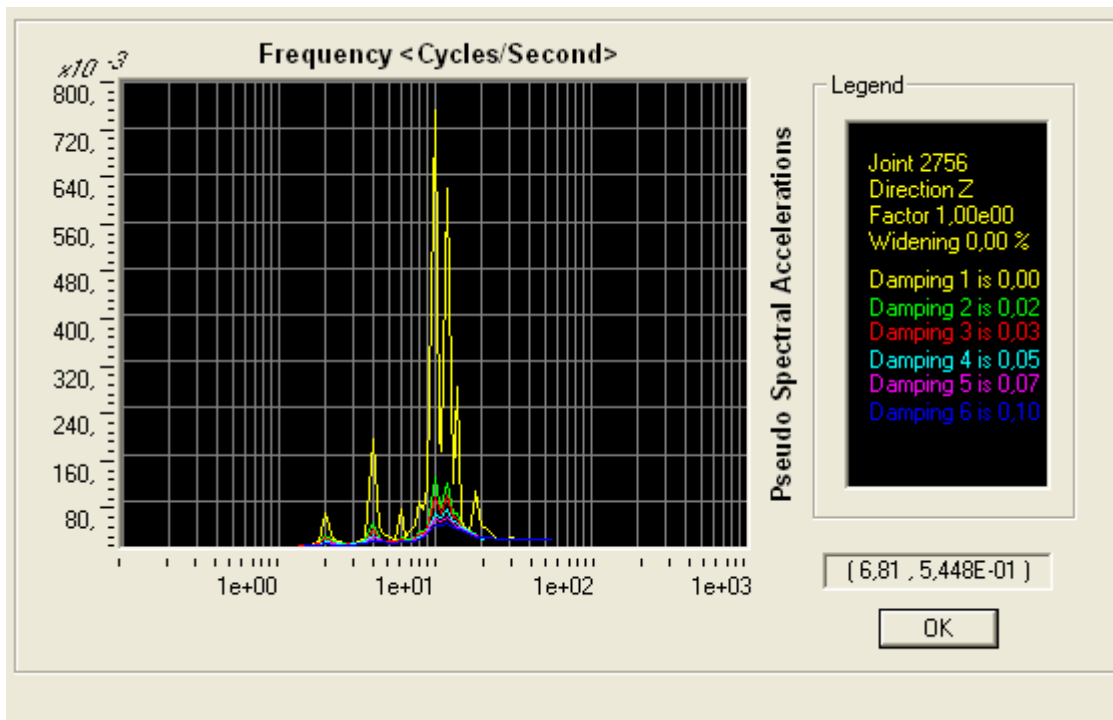




Figur 41: Resonsspektrumkurve for Ji og Ellis' enkle modell



Figur 42: Resonsspektrumkurve for Ji og Ellis' eksperimentelle modell



Figur 43: Responsspektrumkurve for RPs syntetiske modell

## 5 Konklusjoner

### 5.1 Lastmodeller

Det viser seg ganske tydelig i alle analysene, at Bachmanns fourierseriemodell er ganske mye mer konservativ enn de andre modellene. Den gir vesentlig mye høyere verdier for akselerasjonene i alle tre undersøkte arealer. Foruten den funksjonen, gir de andre lastmodellene relativt lik respons. Det er tydelig at det er viktig å ta hensyn til gruppeeffekten ved hopping, altså at man ikke har 100% koordinasjon.

Da det ikke er foretatt noen eksperimentelle målinger, er det ikke grunnlag for å si noe om hvilken lastmodell som er mest korrekt.

### 5.2 Analyse av dekker

Det enkle, kvadratiske dekket er en ekstremt ugunstig konstruksjon med tanke på vibrasjoner. Det er viktig å huske på at dekker som i utgangspunktet er tynne og tunge, vil være ugunstige i vibrasjonsøyemed. Som hovedregel kan man si at jo tynne dekket er, jo lavere egenfrekvens får det, og dermed vil det lettere kunne eksiteres av menneske-induserte laster.

Det viser seg likevel, at for en vanlig betongkonstruksjon med søyle/dekke-system, vil systemet være tilstrekkelig stivt til å kunne unngå problematiske vibrasjonssituasjoner. På et dekke i et vanlig flerbruksbygg, kun dimensjonert for statiske laster, lå alle vibrasjonsverdiene uansett lastmodell, under grensene for hva som kan aksepteres av vibrasjoner – både for utøverne sjøl og for andre brukere av bygget. Det vil likevel være klokt å undersøke vibrasjonene som oppstår i ulike lasttilfeller, særlig for tynne dekker.

Det virker som om det viktigste aspektet ved en vibrasjonsanalyse for menneske-induserte laster, er å sørge for at konstruksjonens egenfrekvenser er større enn lastfrekvensene.

### **5.3 Standardverk**

Norge har ikke et tilfredsstillende regelverk når det gjelder vertikale vibrasjoner i bygg. Det finnes regelverk på liknende områder; horisontale vibrasjoner og vibrasjoner fra samferdsel og lignende, men etter NS 3490 blei trukket tilbake, er det ingen veiledning i norsk regelverk for hvilke kriterier som må oppfylles.

Et standardverk for vurdering av vertikale vibrasjoner i bygg bør inkorporeres i norsk regelverk. Ved å bruke standardiserte grenseverdier i bruksgrensetilstand, for eksempel tilsvarende de i ISO 10137, vil man sikre at bygget vil kunne benyttes til de ønskede bruksområder, også for brukere og installasjoner som er sensitive mot vibrasjoner.

## Referanseliste:

---

- 1 Stevenson R. Description of bridges of suspension, Edinburgh: The Edinburgh Philosophical Journal [elektronisk tidsskrift], 1821; 5 (10): s.237-256 Tilgjengelig fra:  
<http://books.google.com/books?id=STgwAAAAYAAJpg=PA237#v=onepage&q&f=false>
- 2 Bilde: Structurae [Internett], tilgjengelig fra: <http://en.structurae.de/photos/index.cfm?JS=137>
- 3 Jones CA, Reynolds P, Pavic A. Vibration serviceability of stadia structures subjected to dynamic crowd loads: A literature review, Journal of Sound and Vibration, 2011; 330: s.1531–1566
- 4 Moreland R. The weight of a crowd, Engineering, 1905; 79: s. 551.
- 5 Tilden CJ. Kinetic effects of crowds, Proceedings ASCE 39, 1913; (3) , s.325–340.
- 6 NBC:1970: National Building Code of Canada, National Research Council of Canada, 1970.
- 7 NBC:1975: National Building Code of Canada, National Research Council of Canada, 1975.
- 8 NBC:1985: National Building Code of Canada, National Research Council of Canada, 1985.
- 9 Allen DE. Building vibrations from human activities, ACI Concrete International: Design and Construction, 1990; 12 (6): s.66-73
- 10 Bachmann H., Ammann W. Vibrations in structures: induced by man and machines, Zürich: IABSE-AIPC-IVBH, , 1987
- 11 BS 6399:1996 Loading for buildings - Part 1: Code of practice for dead and imposed loads
- 12 ISO 10137:2007: Bases for design of structures—serviceability of buildings and walkways against vibration.
- 13 Nhleko S, Zingoni A, Moyo P. A variable mass model for describing load impulses due to periodic jumping, Engineering Structures, 2008; 30 s.1760-1769
- 14 Radic V, Pavic A. Stochastic approach to modelling of near-periodic jumping loads, Mechanical Systems and Signal Processing, 2010; 24 s.3037-3058
- 15 Rao SS. Mechanical vibrations, 4. utgave, Malaysia: Prentice Hall, 2005
- 16 CSI Analysis Reference Manual, For SAP2000, ETABS, SAFE and CSIBridge, Berkley: Computers and Structures Inc., 2010
- 17 Clough RW, Penzien J. Dynamics of structures, 2. utgave, Singapore: McGraw-Hill, 1993
- 18 Ji T, Ellis BR. Floor vibrations induced by dance-type loads: theory, The Structural Engineer, 1994; 72 (3): s.37-44
- 19 Bilde: Hopping under aerobikøvelse [Internett], tilgjengelig fra <http://healthplux.com/wp-content/uploads/2010/05/Aerobic-Exercise.jpg>
- 20 Griffin MJ. Handbook of human vibrations, London: Elsevier Academic Press, 1990
- 21 Bachmann H. et al. Vibration problems in structures: Practical guidelines, Basel: Birkhøfer, 1995
- 22 Ji T, Ellis BR. Floor vibrations induced by dance-type loads: verification, The Structural Engineer, 1994: 72 (3): s.45-50
- 23 NS 3490:2004: Prosjektering av konstruksjoner, Krav til pålitelighet.
- 24 Associate Committee on National Building Code: “Serviceability Criteria for Deflection and Vibration”, Supplement to the National Building Code of Canada, Commentary A to Part 4, National Research Council of Canada, Ottawa, 1985

- 
- 25 NBC:1990: National Building Code of Canada, National Research Council of Canada, 1990.
- 26 NS-ISO 2631-2: 1994: Bedømmelse av hvordan helkroppsvibrasjoner virker inn på mennesker, Del 2: Vibrasjoner i bygninger (1 Hz til 80 Hz)
- 27 NS 8176:2005:Vibrasjoner og støt, Måling i bygninger av vibrasjoner fra landbasert samferdsel og veiledning for bedømmelse av virkning på mennesker.
- 28 NS-EN 1990:2002+NA:2008: Eurokode: Grunnlag for prosjektering av konstruksjoner
- 29 NS 3491-1:1998: Prosjektering av konstruksjoner, Dimensjonerende laster, Del 1: Egenlaster og nyttelaster
- 30 NS-EN 1991-1-1:2002+NA:2008: Eurokode 1: Laster på konstruksjoner, Del 1-1: Allmenne laster, Tetthet, egenvekt, nyttelaster i bygninger
- 31 Brekke A. Svingninger og vibrasjoner I: Betongelementboken, Bind C, Del 1, 2. opplag, Oslo: SP Grafisk, 2006
- 32 Tekstbok: Svingninger av betongelementer [Internett], Betongelementforeningen, tilgjengelig fra: [www.betongelement.no/svingninger/www/frameset1.htm](http://www.betongelement.no/svingninger/www/frameset1.htm)
- 33 Regneark: Svingninger av betongelementer [Internett], tilgjengelig fra <http://www.betongelementforeningen.no/svingninger/#>
- 34 Allen DE. Floor vibrations from aerobics, Canadian Journal of Civil Engineering, 1990; 17 (5): s.771-779
- 35 Ji T, Ellis BR. Loads generated by jumping crowds: numerical modeling, The Structural Engineer, 2004 [Tilgjengelig fra: <http://personalpages.manchester.ac.uk/staff/tianjian.ji/research/papers/b5-crowdjumping1.pdf>]
- 36 Ji T, Ellis BR. BRE Digest 426: The response of structures to dynamic crowd loads, Watford: Building Research Establishment, 1997
- 37 Ji T, Ellis BR. BRE Digest 426: The response of structures to dynamic crowd loads, 2004 ed., Watford: Building Research Establishment, 2004 [Tilgjengelig fra <http://www.scribd.com/doc/52577109/BRE-Response-of-structures-to-dynamic-loads>],
- 38 Radic V, Pavic A. Mathematical model to generate near-periodic human jumping force signals, Mechanical Systems and Signal Processing, 2009; 24 s.138-152
- 39 Sim JHH, Blakeborough A, Williams M. Statistical model of crowd jumping loads, ASCE Journal of Structural Engineering, 2008; 134 (12), s.1852-1861.
- 40 Sap2000 [Internett], tilgjengelig fra: <http://www.edr.no/produkter/bim/sap2000>
- 41 NS-EN 1992-1-1:2004+NA:2008: Eurokode 2: Prosjektering av betongkonstruksjoner, Del 1-1: Allmenne regler og regler for bygningen
- 42 Irgens F. Fasthetslære, 5. utgave, Tapir, Trondheim, 1996
- 43 CSI Wiki Knowledge Base: Ritz vectors vs. Eigen vectors [Internett], tilgjengelig fra <https://wiki.csiberkeley.com/display/kb/Ritz+vectors+vs.+Eigen+vectors>
- 44 Contiga: Produktinformasjon hulldekker [Internett], tilgjengelig fra <http://www.contiga.no/produkter/betongprodukter/hulldekker.html>
- 45 El-Dardiry E et al.: Improving FE models of a long-span flat concrete floor using natural frequency measurements, Computers & Structures, 2002; 80, s.2145-2156