Muntlig eksamen – får studentene bedre vist hva de kan?
En analyse av åtte studenters forståelse på muntlig eksamen i matematikk: rapport – NFR - prosjektet

Marianne Maugesten

Høgskolen i Østfold
Rapport 2010:7

Online-versjon (pdf)

Utgivelsessted: Halden

Høgskolen i Østfold har en godkjenningsordning for publikasjoner som skal gis ut i Høgskolens Rapport- og Arbeidsrapportserier.

Rapporten kan bestilles ved
henvendelse til Høgskolen i Østfold.
(E-post: postmottak@hiof.no)

Høgskolen i Østfold. Rapport 2010:7

ISBN: 978-82-7825-316-8
ISSN: 1503-2612

Innhold

1. Innledning

Muntlig eksamen har røtter tilbake til gresk-romersk tid. Bruken av muntlige eksamener avtok deretter for så å blomstre opp i middelalderen. I moderne tid med økende antall studenter har bruken avtatt (Dobson, 2008). I matematikkfaget hadde man i middelalderen skriftlig-muntlige tvekamper ved jobbsøking til universitetene. Når en stilling var ledig, og det meldte seg flere søkere, fikk hver søker stille den andre et visst antall spørsmål. Etter å ha arbeidet med spørsmålene en stund, møttes søkerne for å vise løsningene sine. Den som hadde klart flest oppgaver, fikk jobben (Nygaard m.fl., 1999). Dette må ha vært en kombinasjon av skriftlige løsninger presentert muntlig. Dagens doktorgradsavhandlinger presenteres muntlig. Selv om vi finner eksempler opp gjennom historien på muntlige eksamener i høyere utdanning, har den skriftlige eksamensformen dominert.

Kvalitetsreformen fra 2003 hadde en målsetting om at kvaliteten på høyere utdanning skulle bli bedre. Lærerne har rapportert om at vurderingsformene er det som har endret seg mest etter reformen. Variasjonsbredden har blitt større, likeså antall eksamener og arbeidskrav for å framstille seg til eksamen (Michelsen & Aamodt, 2007). Rapporten framhever at mappevurdering er tatt oftere i bruk, men sier lite om muntlig eksamen.

Hvilke argumenter tillegges vekt når institusjonen skal avgjøre om muntlig eksamen skal være en av evalueringsformene?
Av argumenter som taler til fordel for en muntlig eksamen er kravet om variasjon i evalueringsformene. I noen profesjonsutdanninger egner muntlig eksamen seg godt sammen med ferdighetsøvelser, for eksempel innen medisin og sykepleie. For lærere er kommunikasjon og bruk av språket en viktig del av jobben, og derfor kan muntlig eksamen være en god måte å forklare begreper og

framgangsmåter i lærerutdanningen. Muligheten til å vise IKT-ferdigheter og forståelse er også god ved muntlig eksamen i mange ulike utdanninger. Egen erfaring som sensor og eksaminator viser at man kan teste forståelsen til studentene godt ved muntlig eksamen fordi man har mulighet til å stille tilleggsspørsmål når forklaringer er uklare eller for dårlige.

Av argumenter som taler mot en muntlig eksamen, er at en veldig liten del av pensum prøves hos den enkelte kandidat ved eksaminasjonen. Det påstås å være en kostbar og tidkrevende eksamensform, og det er argumenter som tillegges vekt i våre dager. Mange påstår at studentene får bedre karakterer på muntlig eksamen. En undersøkelse blant førsteårs lærerstudenter ved HIØ våren 2007 viser at to tredeler av studentene tror det er lettere å få gode karakterer på en muntlig eksamen enn på en skriftlig (Kvifte, in press)

En muntlig eksamen er en eksamen der eksamensbesvarelsen gjøres muntlig i motsetning til en skriftlig eksamen. Selve den muntlige besvarelsen kan kombineres med en tidligere skriftlig individuell- eller gruppeoppgave. Oppgaven eller temaet kan også være gitt på forhånd slik at studentene kan forberede seg med eller uten hjelpemidler. Det er mange variasjoner.

Denne studien omhandler allmennlærerstudenter. Derfor er det naturlig å se om rammeplanen for allmennlærerutdanning sier noe om muntlig eksamen.
I Prinsipper for arbeids- og vurderingsformer (kapittel 2.4) skal institusjonene legge til rette for at studentene får erfaring med yrkesrelevante arbeids - og vurderingsformer. Vurderingsformene skal legges opp slik at studentene blir kjent med aktuelle vurderingsformer i grunnskolen og at studentene opplever varierte vurderingsformer, tilpasset arbeidsmåter og målene i studiet.

Matematikkfaget er omtalt i kapittel 3.4, og her er innholdet i opplæringa skissert, men det er ikke noe krav til bestemte vurderingsformer (Rammeplan, 2003).

I denne studien ønsket jeg å finne ut mer om lærerstudentenes forståelse av matematikk ved muntlig eksamen. Jeg har tatt opp lydfiler av åtte studenters besvarelser og analysert disse. I rapporten presenteres problemstillingen og forskerspørsmål i kapittel 2. Videre har jeg gått gjennom relevant teori om forståelse og begrepsforståelse samt lagt fram de undersøkelser som jeg har funnet på området. Det er gjort lite forskning på muntlig eksamen både her i landet og internasjonalt (Dobson, 2008). Metoden er beskrevet i kapittel 4. Kapittel 5 er analyse - og drøftingskapitlet, hvor jeg presenterer to ulike kjennetegn på forståelse av lærestoffet som jeg fant i mitt materiale. Jeg har også prøvd å karakterisere de studentene som forstår, og de studentene som sliter med forståelse. Som vedlegg til rapporten ligger portretter av de åtte studentene. Portrettene er et sammendrag av hver students eksaminasjon laget ut fra det transkriberte materialet. Ut fra funnene mine og at jeg selv underviser i matematikk, fant jeg det naturlig å ha med et kapittel der jeg kort drøfter fordeler og ulemper med muntlig eksamen ut fra teori, denne studien og egen erfaring. Rapporten avsluttes med en konklusjon der jeg påpeker hvor viktig de grunnleggende begrepene er for lærerstudenter. Dessuten bør resultatene av en slik studie og et valg av muntlig eksamen som eksamensform få konsekvenser for arbeids - og undervisningsmåter i kurset.

2. Problemstilling

Dette forskningsarbeidet er en del av et større prosjekt hvor flere avdelinger ved høgskolen er involvert. Høgskolen har blitt tildelt midler fra Norges forskningsråd, og navnet på prosjektet er ”Kvalitetsreformens vurderingsordninger i høgskolen”. Mitt hovedtema er muntlig eksamen.
Problemstillingen er: Hva kan muntlig eksamen fortelle oss om studentenes forståelse i den obligatoriske delen av matematikkfaget i allmennlærerutdanningen?

Vi bruker ofte begrepet forståelse, men det genererer også noen spørsmål. Hva er forståelse? Kan forståelse måles? Hvor lett /vanskelig er det å vurdere studenters forståelse? Forskningsspørsmål som jeg har stilt under arbeidet har vært: Hvor dyp forståelse /hva slags forståelse har studentene av lærestoffet? Hva kjennetegner studenter med god og med dårlig forståelse?
Med disse spørsmålene håper jeg å få svar på om studentene viser forståelse for lærestoffet de arbeider med og skal undervise senere, eller om de stort sett anvender en overflatetilnærming til læring.

Jeg går i min studie ikke inn på de affektive sidene ved eksamen eller på kommunikasjonen mellom de ulike aktørene i eksamenssituasjonen. Det er blant de faktorer som kan bety noe for studentenes presentasjon av lærestoffet på muntlig eksamen.

3. Teoridel

Begrepene ferdigheter, overflatelæring, dybdelæring, kompetanse, anvendelse, resonnement har vært sentrale når jeg har funnet fram teoristoff om forståelse av begreper og sammenhenger i matematikk. Forståelse innebærer evne til å gjenkjenne et begrep, bruke begrepet fleksibelt og å overføre eller oversette begrepet presist fra en situasjon til en annen (Gagatsis & Shiakalli, 2004). Å kunne bruke begreper i ulike situasjoner er avgjørende for forståelse, men også for utvikling av problemløsingsevner. Resonnement, forklaring, begrunnelse og anvendelse av kunnskapen inngår derfor i begrepet forståelse, slik jeg kommer til å bruke det i kapittel 5. Fra mitt synspunkt er det lite motstridende teori på disse områdene, kun ulike måter å beskrive studentenes læringsutbytte på.
I dette kapitlet presenteres ulike teoretikeres syn på forståelse, samt undersøkelser som sier noe om studenters forståelse. Jeg har valgt å dele teoristoffet i fire hovedpunkter 3.1 - 3.4 som også kan gå over i hverandre og vil ved gjennomgangen prøve å se de ulike teoretikernes syn på forståelse i lys av den definisjonen jeg har valgt.

3.1 Taksonomier

3.1.1 Blooms taksonomi

Vi bruker ofte begrepene taksonomi og klassifikasjon om hverandre, men Bloom mener det er en forskjell. En klassifikasjon kan ha tilfeldige elementer, men det har ikke en taksonomi. Taksonomien har spesielle strukturelle regler. Blooms taksonomi har fokus på det kognitive området. Holdninger hører til det affektive området hvor også følelser, innstillinger og verdier hører hjemme. Disse er ikke med i min framstilling. Det kognitive området er delt i seks nivåer. Fra lavest til høyest er det (Bloom, 1979):

1. Kunnskap - Bloom bruker dette begrepet, men vi sier ofte faktakunnskap.
2. Forståelse

3. Anvendelse
4. Analyse
5. Syntese
6. Vurdering

Fagområde, tidsramme, oppgavetyper og nivå tilsier at studentene i denne studien i eksamenssituasjonen ikke kommer lenger enn til anvendelse, nivå 3. Derfor er det de tre første nivåene jeg vier plass her. Jeg prøver å knytte de ulike nivåene til matematikkurset 102, slik at jeg får vist hva de kan bety i matematikkfaget.

1. Kunnskap = Faktakunnskap

Studentene viser innlærte kunnskaper ved å gjengi informasjon og fakta, liste opp kronologiske rekkefølger, gjengi regler uten forklaring, definere begreper uten forklaring og forståelse. Studentene viser faktakunnskapene på samme måte som de har lært dem. Vi kan gjerne kalle det papegøyemetoden. Fakta - og ferdighetskunnskap er en del av matematikkfaget. For å nå høyere nivåer i Blooms taksonomi, må man ha en verktøykasse, dvs. kunnskaper på nivå 1. Slik er det også i matematikk. Ved bare å ha faktakunnskap, kommer man ingen vei. Et eksempel på det i matematikkfaget er den lille multiplikasjonstabellen. Det hjelper ikke å kunne den lille multiplikasjonstabellen hvis du ikke vet hva du skal bruke den til og når du skal bruke den. Hvis du ikke forstår hvilken regneart du skal bruke i en praktisk oppgave, har du ikke bruk for multiplikasjonstabellen. I matematikkurset 102 forutsetter vi at studentene har en del faktakunnskap. Et eksempel er å kunne konstruere en sirkel, sette navn på og definere radius, diameter, korde, tangent, sentralvinkel og periferivinkel. Et annet er å tegne en rettvinklet trekant og skrive opp Pytagoras' setning. Innenfor praktisk regning kan faktakunnskapen være å definere prosent og vekstfaktor.

2. Forståelse

Bloom opererer med flere undernivåer på hovednivå 2. Et av dem er oversettelse. Her mener han at studentene skal oversette abstrakte ideer til konkrete og hverdagslige tanker og situasjoner. I matematikk kan det bety å oversette fra symbolspråk til en annen form, for eksempel hverdagsspråk, eller motsatt. Et annet nivå er forklaring. Studentene kan forklare lest materiale og gjengi det med egne ord. De kan forklare en framgangsmåte etter å ha lest et eksempel eller fått forklaring av andre. Det tredje nivået kalles ekstrapolering. Da kan studentene beregne ukjente størrelser ut fra kjente, og skille vesentlig informasjon fra uvesentlig. Forklaringene til studentene bygger på tidligere faktakunnskaper og erfaringer. Et eksempel her kan være at studentene får en oppgave der det er gitt flere opplysninger enn de trenger for utregningen.

3. Anvendelse
Hovedpoenget på dette nivået er at studentene kan anvende tidligere kunnskap. Det betyr å overføre det de har lært til nye situasjoner. På nivå 2 kan de forstå en algoritme, eller for eksempel forstå hvordan de bruker formlike trekanter for å beregne sider i trekanter. På nivå 3 kan de ikke bare løse problemet, men bruke opplysninger og tidligere kunnskap til å finne ut hva slags problem det er. De finner selv hvilke framgangsmåter som skal brukes. Forståelsen på nivå 2 er en forutsetning for anvendelsen. Eksempel: Studentene har en figur der de skal beregne sider. De må selv finne formlike trekanter og anvende det til beregning av sidene.

Blooms taksonomi viser at anvendelse er et høyere nivå enn forståelse, men forutsetter at studenten har forstått. Min valgte definisjon av forståelse inkorporerer anvendelse i definisjonen av forståelse. Å anvende kunnskapen i oppgaveregning er naturlig i en kort muntlig eksaminasjon som denne studien er. Derfor er det helt naturlig å se anvendelse og forståelse i sammenheng.

3.1.2 Biggs' SOLO taksonomi

Solo står for Structure of the Observed Learning Outcome (Pettersen, 2005), og denne taksonomien viser på samme måte som Blooms taksonomi kvalitative forskjeller på læringsresultatene (Biggs, 1991). Jeg gjør rede for de ulike nivåene i taksonomien og prøver selv å knytte dem opp til matematikkstoffet som er aktuelt i denne studien.

Nivå 1: Prestrukturelt nivå. Studenten har ikke forstått oppgaven og tatt skikkelig tak i den. Hvem som helst kan si noe om oppgaven på dette nivået. I matematikkemne 102 kan det være å si noe helt generelt om for eksempel prosent; hva det brukes til og hvor du møter prosent, hvordan det skrives osv. Eller om sirkelen kan det være at den er rund og finnes i mange romfigurer.

Nivå 2: Unistrukturelt nivå. Som navnet tilsier, tas bare et aspekt ved oppgaven eller begrepet opp. I mitt kurs kan det bety å kjenne til kun en måte å regne ut prosent på. Studenten har en formel og setter inn verdier i den. Dersom det er noe annet det spørres etter, kan ikke studenten svare. Han/hun har også lært en måte å regne ut sider i formlike trekanter, men ser ikke enklere framgangsmåter i noen tilfeller.

Nivå 3: Multistrukturelt nivå. Studenten kan bruke flere aspekter ved en oppgave, men de behandles separat. Eksempel: Studenten kjenner til flere framgangsmåter for å beregne sider i en mangekant, men ser på dem separat. Han/hun vurderer ikke når en måte er bedre enn en annen. Det er ingen sammenheng mellom begrepene og framgangsmåtene.

Nivå 4: Relasjonelt nivå. Dette står for en kvalitativ forskjell i forhold til de tidligere nivåene. Ord som sammenlikne, anvende, forklare, forstå og se sammenhenger preger dette nivået. Eksempel: Studentene vurderer hvilke framgangsmåter som bør benyttes ut fra opplysningene i oppgaven og ser sammenhenger mellom opplysninger og framgangsmåter.

Nivå 5: Utvidet abstraksjon. Studenter på dette nivået kan generalisere og overføre kunnskap til nye fagområder. Hovedfags- og mastergradsoppgaver bør være på dette nivået.

Beskrivelsen av det relasjonelle nivået hos Biggs rommer mye av det som ligger i definisjonen av forståelse som jeg bruker i denne oppgaven. Hos Biggs står begrepet forstå under relasjonell kategori med disse underbegrepene: sammenlikne, forklare, sammenhenger, analysere, relatere, anvende (Pettersen, 2005).

3.1.3 Gordon Joughin

Gordon Joughin er australsk forsker fra University of Wollongong. Han har arbeidet mye med ulike dimensjoner ved muntlig eksamen. I sin doktoravhandling ser han hvordan muntlig eksamen fortoner seg fra et studentperspektiv. En av dimensjonene ved muntlig eksamen er interessante for min studie. Det er innholdsdimensjonen, og den omfatter kunnskap og forståelse og anvendte problemløsingsevner. Han ser på kunnskap og forståelse på samme måte som Bloom, nemlig kunnskap som å gjengi metoder, fakta, mønster, mens forståelse er å forstå det kjente, ikke bare gjengi det. Anvendte problemløsingsevner er å kunne tenke på egenhånd og anvende den kunnskapsbasen eleven har (Joughin, 1998).

3.2 Dybde - og overflatelæring

Begrepene dybde- og overflatelæring viser til forskning på studenters læring, særlig skillet mellom dybde- og overflatetilnærming til læring (approaches to learning) som ble introdusert av Marton og Säljö på 1970 –tallet (Marton & Säljö, 2005). Dette grunnleggende, kvalitative skille mellom ulike måter å studere og lære på, inngår som sentralt element i en rekke studier om studenters læring i høyere utdanning.

En læringstilnærming defineres som en kombinasjon av studenters læringsintensjoner, motivasjon, oppfatninger av hva læring innebærer og anvendelsen av ulike læringsstrategier. Når studentene anvender en dybdetilnærming, kommer det til uttrykk som å forstå meningen med fagstoffet. De prøver å relatere kunnskapsstoffet til tidligere kunnskap og personlig erfaring på en aktiv og kritisk måte, slik det blant annet kommer til uttrykk i rapporten ”På hvilken måte påvirker eksamen studentenes læring?” (Dyrstad, 2001).

Brown m.fl.(1997) uttrykker dette skillet som søking etter forståelse (dybde) på den ene siden - og kunnskapssøking (overflate), på den andre.
Når studentene anvender en overflatetilnærming, har de kunnskapssøking som grunnleggende intensjon. Læringen kjennetegnes ved at de primært søker etter fakta og informasjon, og anvender gjerne enkle, mekaniske læringsstrategier som pugg og memorering for å kunne reprodusere lærestoffet, blant annet med tanke på prøver og eksamen. Resultatet blir som oftest at de tilegner seg spesifikke fakta og informasjon som er relativt løsrevet fra sammenhengen.

Studenter som anvender en dybdetilnærming, har søken etter forståelse som hovedintensjon. De er i utgangspunktet mindre interessert i fakta. Deres hovedfokus og interesse er å få tak i meningen med det de leser og arbeider med, noe som paradoksalt nok fører til at de husker viktige fakta godt. De prøver å relatere det de lærer til tidligere kunnskap, for dermed å få mer sammenheng og helhet i kunnskapen. For å oppnå dette, tar de i bruk flere læringsstrategier, mer avanserte repetisjonsstrategier og elaborerings – og organiseringsstrategier.

Forklaringen på at noen studenter er mer tilbøyelige til å anvende en av de to hovedtilnærmingene, ligger i studentenes erfaring med og opplevelse av de krav undervisningen – og ikke minst eksamenssituasjon og – oppgaver, stiller dem overfor. Med andre ord spiller kontekstuelle forklaringer en viktig rolle (Pettersen, 2009). Flere studier framhever at elementer ved tradisjonelle muntlige og skriftlige eksamener fremmer overflatelæring. Det viser at det ikke bare er studentenes læring som må undersøkes, men også eksamensordninger og eksamensoppgaver. En studie som belyser dette, er en undersøkelse fra Danmarks Tekniske Universitet (DTU) (Pettersen, 2005). Til en eksamen i fysikk ved DTU ble studentene primært testet i praktisk beregningskompetanse hvor de skulle anvende riktig formel og utføre kompliserte utregninger. I etterkant ble studentene testet i forståelse av fagets grunnleggende begreper og metoder. Resultatene viste at 45 % av studentene stod på eksamen, men viste ikke akseptabel forståelse av grunnleggende begreper og metoder. Lignende forhold har kommet fram i en rekke studier (Prosser & Trigwell, 1999): De viser at studentene kan beherske komplekse regneoperasjoner, ha store mengder detaljkunnskap og bestå eksamen. Men når eksamensformen etterspør denne typen kunnskap, støtter den samtidig studentene til å anvende en overflatetilnærming. Det kommer på den annen side til uttrykk ved at mange av studentene er ute av stand til å vise om de har forstått det de har lært. De har misoppfatninger om viktige begreper og anvender kunnskapen dårlig – slik det blant annet viser seg i studien fra DTU.

3.3. Kompetansebegrepet

3.3.1. Kunnskapsløftet

Innenfor grunnopplæringen (1.-13. trinn) i Norge brukes begrepet matematisk kompetanse. Det innebærer å ha viten om, å forstå, utøve, anvende og kunne ta stilling til matematikk og matematikkdidaktikk i en mangfoldighet av sammenhenger, hvor matematikk inngår eller kan komme til å inngå (Niss & Jensen, 2002). Formålet med opplæringen er at elevene skal utvikle slik kompetanse. Kort kan dette sammenfattes til å ha ferdigheter (å kunne løse en likning), å forstå (hvordan man regner ut en side i en rettvinklet trekant ved å bruke Den pytagoreiske læresetningen) og å anvende matematikk (å forstå at man må bruke Den pytagoreiske læresetningen i en praktisk situasjon for å sjekke om en vinkel er rett der det ikke er oppgitt at setningen skal brukes). Det er mange likheter mellom kompetansebegrepet og Blooms taksonomier (3 første nivåer). Begrepet matematikkompetanse stemmer godt overens med den definisjonen av forståelse som er gitt i begynnelsen av kapitlet.

3.3.2 Timssrapporten

I Timssrapporten (Grønmo m.fl, 2008) deles oppgavene til grunnskoleelevene inn i kognitive kategorier. Disse er:

1. Å kunne: Huske fakta, gjenkjenne objekter og uttrykk, å beherske de fire regneartene for heltall, brøker og desimaltall, å hente informasjon fra tabeller og diagrammer, å utføre målinger og foreta klassifikasjoner
2. Å anvende: Bruke kunnskapene og ferdighetene sine til å velge metoder og strategier, representere informasjon, modellere situasjoner, følge instruksjoner og løse rutineproblemer.
3. Å resonnere: Tenke logisk, analysere situasjoner og sammenhenger, generalisere resultater, kombinere informasjon, begrunne påstander og løse problemer som ikke er rutinepreget.

Denne inndelingen stemmer godt overens med hva som ligger i kompetansebegrepet.

3.4 Begrepsforståelse

3.4.1 Hva betyr det å ha et godt begrep?

Solide begreper er grunnlaget for forståelse. I lydopptakene er det derfor naturlig å se på studentenes bruk av begreper og sammenheng mellom begreper og deres begrepsforståelse. Egne erfaringer fra tidligere undervisning og muntlig eksaminasjon viser at studentene har upresise begreper. Hvis vi knytter kompetansebegrepet (fakta/ferdighet, forståelse, anvendelse) opp til begreper i matematikk, menes det å ha et godt begrep å kunne regne med / konstruere begrepet (ferdighet), å forklare hvilke egenskaper begrepet har (forståelse) og å gi eksempler på og bruke begrepet i ulike situasjoner (anvendelse). Et eksempel fra geometrien om begrepet sirkel vil være: Å ha ferdighet er å konstruere sirkelen med en bestemt radius med passer. Egenskaper ved begrepet er at i sirkelen er avstanden fra sentrum til hvert punkt på sirkelen lik radius. Å bruke begrepet kan være å konstruere et punkt som har avstand 3 cm fra et gitt punkt A og 4 cm fra et gitt punkt B. To sirkler med disse to lengdene som radius vil skjære hverandre og være det søkte punktet. Da vet studenten at sirkel er et geometrisk sted. Selve definisjonen av begrepet kommer ofte fram når man ser på egenskapene, men elever og studenter kan definere et begrep på nivå 1 i forhold til Blooms taksonomi uten å ha en dypere forståelse av det.

Ved barns begrepslæring snakker vi ofte om abstrahering (trekke ut felles egenskaper og ignorere ulikheter), symbolisering (sette navn på felles egenskaper), diskriminering (hva hører med og hva hører ikke med) og generalisering (overføre begrepskriteriene til nye situasjoner) (Imsen, 2005). Disse 4 punktene passer inn under anvendelse og forståelse, mens det å kunne regne med et begrep uten å forstå det, altså det mekaniske, mangler i denne forklaringen av begrepslæring. Eksempel: Mange studenter / elever kan regne med logaritmer og løse oppgaver som krever logaritmeregning, men de har nødvendigvis ikke forståelse av begrepet og kan ikke anvende det i andre situasjoner enn de gitte. Jeg velger derfor kompetanseforklaringen når jeg sier at studenter har begrepsforståelse.

Breiteig &Venheim (2007) beskriver to viktige prinsipper for barns læring av begreper. Disse prinsippene passer også på studentenes læring. Begreper læres best ved bruk av eksempler og ikke først gjennom en definisjon. Det andre prinsippet lyder slik:

> *I matematikk går mye læring i retning av høyere ordens begreper. Mange eksempler vil allerede være begreper av lavere orden. Vi må være sikre på at elevene allerede har dannet disse lavere ordens begrepene og har dem tilgjengelige i sin bevissthet* (Breiteig & Venheim, 2007, s. 27).

3.4.2 Norsk matematikkråds undersøkelse

Annet hvert år siden 1984 har Norsk matematikkråd gjennomført en skriftlig matematikktest av begynnerstudenter på matematikkrevende studier. Norske lærerstudenter har deltatt i testen. Slik vet vi noe om studentenes bakgrunnskunnskaper. Det er ikke foretatt noen tilsvarende test muntlig. I 2007 viste resultatene at ingen studier hadde gjennomsnittsskår over 2/3 av total poengsum. Lærerstudentene kommer dårlig ut på undersøkelsen med gjennomsnittlig 31,3 % av oppgavene rett. Alle oppgavene er på ungdomsskolenivå. Det er fem av oppgavene som omhandler geometri og prosent, som også er tema i mitt prosjekt. Disse oppgavene er av spesiell interesse (Rasch-Halvorsen & Johnsbråten, 2007).

Nedenfor vises resultatene:

Oppgave 3, geometri	Regn ut volumet av figuren (Tegning av et ”hus” som består av et firkantet prisme og et trekantet prisme).	14 % av lærerstudentene svarer rett
Oppgave 8, geometri	Tegning av to formlike trekanter der vi vet to sider i den ene og en side i den andre. Skal regne ut den andre siden i trekant 2.	42 % av lærerstudentene svarer rett

Oppgave 15, geometri	Tegning av en rettvinklet trekant med en katet 3 cm og hypotenusen 5 cm. Hvor lang er den tredje siden? Fire valg, der $\sqrt{16}$ er det rette svaret.	35 % av lærerstudentene svarer rett
Oppgave 7, prosent	På Dal skole er det 135 jenter og 115 gutter. Hvor mange prosent er jenter?	24 % av lærerstudentene svarer rett
Oppgave 10, prosent	Ved salg av en vare i Norge ble det tidligere til vanlig lagt til 23 % merverdiavgift(moms). Hvor mange prosent av det vi betalte utgjorde merverdiavgiften? Gi svaret med en desimal.	2 % av lærerstudentene svarer rett

Hovedgrunnene til feilsvar på prosentoppgavene skyldes at studentene ikke behersker prosentbegrepet eller at de ikke behersker grunnleggende tallregning. De bruker ikke kalkulator i denne testen.

Det er viktig å ha med disse resultatene fordi de forteller noe om studentenes kunnskaper og forståelse ved starten av studiet. På den måten kan vi som lærere få greie på hvor vi bør starte undervisningen.

3.4.3 Prinsipplæring

Å lære og forstå matematikk innebærer å ha solide begreper, og se sammenhenger mellom begreper. Når begreper knyttes sammen, snakker vi om prinsipplæring. Slike setninger hvor begreper knyttes sammen, kan for eksempel være Pytagoras' setning som lyder slik: Kvadratet på hypotenusen er summen av kvadratene på hver av katetene. For å forstå denne setningen, er det nødvendig å forstå begrepene hypotenus, katet, kvadrat og sum. Å ha tilstrekkelig forståelse av begreper i forkant kalles loven om førnødvendig læring. I dagligspråket sier vi som lærere at grunnlaget må være i orden hos elevene før vi går videre i innlæringen. Dersom studenter / elever mangler eller har dårlige grunnleggende begreper, vil de kunne lære seg prinsipper utenat, og slik ha en overflatelæring. Men når de skal forklare og tegne prinsippene, vil mangelen på forståelse vise seg. Undersøkelsen fra Norsk matematikkråd viser at begynnerstudentene har manglende grunnleggende begreper. Opplæringen i høyere utdanning forutsetter at studentene har disse grunnleggende begrepene. Dermed er ikke grunnlaget i orden, og læringen blir ikke dybdeorientert (Imsen, 2005). Matematikkfaget, sammen med noen andre fag, er av en slik karakter at kunnskap bygges på hverandre. Å ha en dårlig grunnmur kan da få store følger for senere kunnskapsbygging.

4. Metode

I dette prosjektet har jeg brukt kvalitativ metode, som primært sier noe om det som finnes og er mindre opptatt av hvor ofte det finnes (Repstad, 2004). Jeg ønsker å beskrive forståelsen studentene viser på muntlig eksamen i matematikkurset 102 ved lærerutdanninga ved HiØ. Det er på ingen måte innlysende at resultatene herfra er overførbare til andre kurs eller til andre skoler.

4.1 Hva har jeg gjort?

Jeg har tatt opp lydfiler av muntlig eksamen våren 2008 med åtte studenter ved å bruke Windows Media Player. Hvert opptak er på rundt 30 minutter, og ble gjort direkte på pc. Behovet for ekstra utstyr var derfor minimalt. Jeg var selv til stede som forsker under eksaminasjonene og gjorde notater av den enkelte kandidaten underveis. Kandidatene laget tegninger og figurer til forklaringene under eksaminasjonen, og disse notatene er også med i mitt materiale. Det var en åpen observasjon der både studentene, eksaminator og sensor var informert om prosjektet og hadde sagt ja til lydopptak og bruk av lydfiler i etterkant. Observasjonen var passiv, i den forstand at jeg ikke hadde noen faglig samtale med kandidatene underveis. Men jeg ga aktive bidrag til hverdagslig småprat i for- og etterkant av selve eksaminasjonen.

Lydfilene ble transkribert av et firma og resulterte i rundt 20 sider for hver kandidat. Jeg har ikke brukt noe eget dataprogram under analysen. Tidlig i analyseprosessen lagde jeg et portrett av hver informant ut fra det transkriberte materialet. Det hjalp meg til å få en oversikt over materialet. Disse portrettene utgjør vedlegg 1.

4.2 Forsker på hjemmebane

I dette prosjektet har jeg vært en forsker på ”hjemmebane”. Forskningen har foregått på arbeideidsstedet mitt, Avdeling for lærerutdanning, ved HiØ. Det betyr at jeg kjente kurset, kandidatene, sensor og eksaminator på forhånd. Jeg har fire ganger tidligere undervist i emne 102 i matematikk og gjennomført muntlig eksamen i kurset. Vi har brukt de samme eksterne sensorene hver gang. Eksaminator er en kollega av meg. Dette semesteret (våren 2008) var jeg ikke lærer på kurset. Det har dermed vært viktig for meg å framstå som profesjonell under feltarbeidet og analysen og ikke være forutinntatt. Mange av erfaringene og opplevelsene under eksaminasjonene vil være kjente. Da kan det være vanskelig, som forsker, å undre seg over det som skjer i feltet (Repstad, 2004). På en annen side er det naturligvis fordeler ved å kjenne miljøet man forsker på. Jeg kan faget, kjenner til hvilke krav som stilles og hva som skjer underveis, slik at misforståelser og feilslutninger kan unngås. Jeg kjenner studentene fra tidligere. De samme studentene deltok på et matematikkurs jeg hadde ansvar for høsten før. I tillegg har jeg vært og er trinnleder for studentene. Det betyr at de kjenner meg godt og sa selv i forkant at det ikke gjorde noe at jeg satt der under eksaminasjonen. De mente at det ikke ville gjøre dem mer nervøse, og på meg syntes det ikke som om opptakssituasjonen påvirket studentene. For meg som lærer er forskningsarbeidet nyttig når jeg skal arbeide med det samme kurset senere. Jeg har fått mange ideer til arbeidsmåter og vektlegging av innhold i kurset ved å se det hele utenfra.

4.3 Beskrivelse av kurset

Matematikk1, emne 102, gir 10 studiepoeng og er en del av det obligatoriske matematikkurset på 30 studiepoeng i allmennlærerutdanninga. Temaene er praktisk regning og geometri. Samtidig skal studentene demonstrere bruk av regneark og geometriprogrammet GeoGebra i disse to matematiske emnene.

Undervisningen går over et halvt år med 6 timer undervisning per uke i 12 uker. Studentene er 3 uker i praksis.

Arbeidskrav for å gå opp til eksamen: Studentene må ha gjennomført og fått godkjent 7 av 9 rettinger av oppgaver. Studentene retter oppgavene for hverandre ut fra et løsningsforslag laget av lærer.

Eksamensform: Muntlig, individuell eksamen som varer 30 - 35 minutter. Studentene får oppgaven og har en halv times forberedelsestid uten andre hjelpemidler enn papir, blyant og kalkulator. De kan ikke ha med notater inn til eksaminasjonen. Selve eksamen er todelt: en matematikk- og didaktikkdel og en IKT- del. Studentene kan ha med de IKT- arbeidene de har gjort i løpet av kurset. De kandidatene jeg har lydopptak av, fikk oppgaver med minimalt av rent didaktikkstoff. Noen studenter trakk selv trådene til skole og elever i sine besvarelser. Den didaktiske biten blir ivaretatt i undervisningen og i praksisperiodene.

Eksempel på en oppgave i matematikk /- didaktikk: Forklar hva Pytagoras' setning går ut på, lag et regneeksempel, bevis setningen. Studentene skal også regne en oppgave med beregning av sider i en likebeint trekant og en oppgave med beregning av sider i en trekant med vinkler på 30 º, 60 º og 90 º.
Når studentene får en matematikkoppgave i geometri, er IKT-oppgaven om regneark og praktisk regning. Eksempel på en oppgave i IKT: Forklar hvordan du bygger opp et regneark som viser månedlig sparing over en viss tid. Når matematikkoppgaven er praktisk regning, er IKT-oppgaven bruk av geometriprogrammet GeoGebra.
Vurdering: den matematikk/didaktiske oppgaven teller mest, men både denne og IKT- delen må være bestått for å bestå eksamen.

4.4 Informantene.

Jeg gjorde først en henvendelse til 8 studenter via mail der jeg spurte om de ville være med i dette prosjektet. Alle var positive, men en av studentene trakk seg etter å ha fått mer informasjon. Det var en voksen dame som var usikker på eksamen og eksamenssituasjonen. Da fikk jeg positivt svar fra nestemann på lista. Jeg ønsket meg et allsidig datagrunnlag og ulike informanter. Av utvalget på 8 var det 4 kvinner og 4 menn som i alder var fra 20 år til 35 år. Jeg ønsket studenter som hadde ulikt faglig nivå. Derfor så jeg før utvelgelsen på karakterene studentene fikk på skriftlig eksamen til jul. Det betyr at de utvalgte studentene hadde karakterer fra A til E på forrige eksamen. Høst - og vårkurs bygger ikke på hverandre, men erfaringene mine fra tidligere tilsier at det er sammenheng mellom resultatene på de ulike matematikkursene.
Studentene ble informert om og ga samtykke til hva lydopptakene skulle brukes til. De er anonymisert, og lydopptakene slettes når forskningsarbeidet er avsluttet.

5 Funn og analyse.

5.1 Portrett av informantene

I vedlegg 1 har jeg laget et portrett av hver informant. Med det ønsker jeg å gi leseren et bilde av informantene. Portrettene er et sammendrag av de transkriberte lydfilene. I resten av kapitlet analyseres og drøftes funn fra materialet for å prøve å svare på problemstillingen.

5.2 Analyse og drøfting av funn

5.2.1 Hva er forståelse?

Begrepet forståelse står sentralt i problemstillingen, men kan man måle forståelse? Hva er egentlig forståelse på en muntlig eksamen i emne 102 i matematikk? Kan jeg med sikkerhet vite om en student har forstått – og når vet jeg i så fall at studenten har forstått?

Forståelse innebærer som beskrevet i kapittel 3 evne til å gjenkjenne et begrep, bruke det fleksibelt og å overføre eller oversette begrepet presist fra en situasjon til en annen (Gagatsis & Shiakalli, 2004). Evnen til å kunne overføre erfaringer og kunnskap fra en situasjon til en annen er avgjørende for begrepslæring, men også for utvikling av problemløsingsevner. Resonnement, forklaring, begrunnelse og anvendelse av kunnskapen inngår derfor i begrepet forståelse. Sammenhenger mellom begreper er også viktig i forståelsen. Det vises til teorikapitlet der forståelse går som en rød tråd gjennom stoffpresentasjonen.

I analysen har jeg gruppert funn fra det samlede transkriberte materialet som kjennetegner forståelse. Deretter beskriver jeg funn som karakteriserer studentsvar typisk for studenter som forstår godt, og svar fra de som ikke forstår så mye. Spørsmål som dukker opp er: hva er god forståelse, og hva er dårlig forståelse, og hvordan vises det? Forståelse må sees i forhold til målene for og nivået på kurset. Å gi gode begrunnelser med riktig begrepsbruk er et ytterpunkt i beskrivelse av forståelse, mens å ikke kunne svare, eller svare helt feil, er et motsatt ytterpunkt. Videre: Hva med de studentene som trenger spørsmål for å svare, eller de som svarer spørrende? I hvilken grad dokumenterer de forståelse slik begrepet anvendes i denne studien?

5.2.2 Kjennetegn på forståelse

Fra materialet velger jeg å fokusere på to ulike kjennetegn på forståelse som vises tydelig i mitt materiale. Det er:

- Å begrunne og resonnere
- Å kunne og å anvende definisjoner av begreper i ulike kontekster

1. Å begrunne og resonnere

Ved å begrunne et svar viser studenten at han/hun er sikker på svaret. Han svarer ikke bare for å gi et svar. En av studentene, Anne, begrunner selv de korte, enkle svarene. Hun får spørsmål om hjørnesymbolet til et av de platonske legemene:

> *EKSAMINATOR: Hva er hjørnesymbolet til det, da?*
> *ANNE: Det er (3 3 3 3), fordi det møtes fire trekanter i hvert hjørne. Og så er det ikosaederet, det er tjue, består av tjue trekanter. Og så har vi...*

Her forklarer Anne at tretallene står for trekanter og at det er fire av dem betyr at fire trekanter møtes i hvert hjørne. Dette viser at Anne har forstått skrivemåten og vil kunne bruke den på andre platonske legemer, for eksempel ikosaederet:

> *EKSAMINTOR: Og hjørnesymbolet da?*
> *ANNE:(3 3 3 3 3), altså fem trekanter.*

I lydopptakene ser det ut til at studenter med svakere forståelse og dårligere evne til resonnement prøver å huske formler. Det viser at studentene har lest pensum, men det kan også bety at læringsstrategier og studieteknikk ikke er gode nok. Forteller det oss kanskje noe om hva slags fokus studentenes tidligere matematikkopplæring har hatt? Å huske en formel kan være en overflatekunnskap. De som resonnerer og forstår kan naturligvis også huske formler. Men hos de som viser forståelse, er det ikke formelen, men forklaringen fram mot formelen, som preger presentasjonen.

Anne resonnerer seg fram til formelen for overflatearealet av en sylinder. Hun tegner ved siden av og trenger ingen tilleggsspørsmål for å komme fram til formelen for overflatearealet. Forklaringen er enkel og vil kunne forstås av ungdomsskoleelever:

> *”Og da ser vi at vi har jo to sirkler, som er to ganger, og da må vi ta arealet av sirklene som er π * r*r. Det er for sirklene. Og så, den her... det rektangelet vi får her, det må jo ha samme lengde her som omkretsen rundt sirkelen. Det er 2 * π * r. Da tar man og legger til, eller, av den her da så blir det 2 π r * h. Da plusser man den: (2 * π * r*r) +(2 * π * r * h). Det kan man få litt finere ved å skrive (2 * π * r)(r + h). Det er overflata på en sylinder.”*

En annen informant, Hilde, sier først hva hun skal fram til. Hun forklarer hvordan Thales’ setning lyder og resonnerer seg fram til at periferivinkelen er halvparten av sentralvinkelen når de spenner over samme bue:

> *HILDE: Og så tegner jeg opp en... en sirkel igjen. Og Thales' setning sier jo at periferivinkelen er halvparten av sentralvinkelen. Her er sentrum... og det jeg skal vise dere da, det... huff, det ble ikke så pent nå.*
> *EKSAMINATOR: Nei, men det... det er min skyld at det ikke er linjal her, så...*
> *HILDE: Ja... men det er jo periferivinkelen. Og det er sentralvinkelen. Og da skal jeg vise at periferivinkelen er halvparten av sentralvinkelen. Og da tar jeg og stipler en sånn linje her sånn... så kaller jeg den for A, og så kaller jeg den for A. For de er like store, fordi at det her er en likebeint trekant, fordi at den siden er radius og den siden er radius. Kaller jeg den for B, og så kaller jeg den for B. Og til sammen utgjør A og B noe jeg kaller for U.... X, Y, Z. Og så tenker jeg at A + A + X = 180 grader, for alltid... vinkelsummen i en trekant er alltid 180 grader. Så tenker jeg B + B + Y = 180 grader. Mens X + Y + Z = 360 grader. Og da kan vi jo sette de her opp mot hverandre. A + A + X +B + B + Y =X + Y + Z. Og så forkorter vi, da får vi 2A + 2B = X, nei unnskyld, er lik Z. Det kan vi sette*

utenfor parentesen, 2(A + B) = Z. Og A og B er jo egentlig U, den lille periferivinkelen der. 2U = Z. Og da har jeg bevist at den er halvparten av den.

Hilde begrunner at trekanten er likebeint fordi to av sidene er like lange. Hun forklarer hele tiden det hun skriver og tegner. Både Anne og Hilde viser i disse utdragene at de forstår lærestoffet godt. Anne anvender sin første forklaring på en ny figur. I Hildes presentasjon er ikke oppgaven å vise anvendelser av Thales' setning, men å komme fram til setningen.

En annen student, Dina, fikk spørsmål om vinkelsummen i en mangekant og starter med formelen $(n - 2) \cdot 180^{\circ}$. Men hun trengte hjelp i form av spørsmål for å forklare hva formelen betyr, og hvordan hun skulle bruke den på en regulær sekskant. Ved hjelp av spørsmålene fra eksaminator ble hun guidet fram mot formelen hun selv har skrevet opp.

EKSAMINATOR: Hva er vinkelsummen i den sekskanten du har der? Hvordan kan du finne frem... komme fram til det?
*DINA: Jeg vil jo si liksom hva... at jeg skal fram til den der, da: (n - 2) * 180. Å komme fram til...*
EKSAMINATOR: Mm. Ja? Hvor kommer 180 inn i bildet her, i og med at den er med i den formelen du satte opp nå?
DINA: Ja, det er jo en trekant, så... jeg bør vel kanskje dele det inn i noen trekanter her?
EKSAMINATOR: Mm. Ja? Hvor mange trekanter fikk du der?
DINA: Der fikk jeg 4.
EKSAMINATOR: Kan du da, ut fra det, finne ut hvor stor vinkelsummen er i den sekskanten du har tegnet?
*DINA: Da vil jeg nesten ta sekskanten som den er, da. Minus 2 * 180... står litt stille.*
EKSAMINATOR: Hvor mange sa du at du fikk her?
DINA: Jeg fikk 4.
EKSAMINATOR: Og vinkelsummen i en trekant er...?
*DINA: 180... 180 * 4?*
EKSAMINATOR: Mm. Og da blir det? Eller, hva betegner det da? I forhold til den sekskanten?

DINA: Det betegner jo... det må jo bli summen av alle vinklene jeg får inni her?
*EKSAMINATOR: Ikke sant? Gjør det ikke det da? 4 * 180?*
DINA: 720...

Dina har helt tydelig lest. Hun har lært seg formelen for vinkelsummen i en mangekant, men er usikker på hva variabelen og tallene står for. Dette stemmer med mine egne erfaringer fra undervisningen. Det er viktig at studentene er med på og forstår utledningen av for eksempel en formel, men de trenger også trening i å bruke formelen i oppgaveregning.

Bengt, som skulle regne ut hvor mange prosent et tall er av et annet, startet med formelen og ville bruke et talleksempel (hvor mange prosent er 6480 av 18 000)

BENGT: Av det der? Ja... ja, da bare bruker jeg en sånn fo... jeg bare setter opp en sånn formel her sånn. Du skal finne hvor mye prosentvis det utgjør av det. Da setter jeg inn 18.000. Prosenten vet jeg ikke... er det greit at jeg gjør sånn, eller?
EKSAMINATOR: Vær så god, gjør det som du vil...
BENGT: E er jo... E er jo da, skal jeg sette inn summen her, eller?

En mye enklere utregning for å finne antall prosent, ville være å regne ut hvor stor brøkdel 6480 er av 18 000. Bengt virket usikker og måtte få bekreftelse på hvor E(som er et av beløpene) skulle settes inn.

Fra videregående skole er studentene vant til å bruke regelbok eller formelhefte. I arbeidet med matematikk ser vi i lærerutdanninga at studentene ut fra denne erfaringen ofte starter med å finne ut hvilken formel de skal bruke. I våre studier er vi mindre opptatt av å huske formler, fordi vi vil at studentene først og fremst skal forstå det de gjør. Naturligvis er det ingen ulempe å huske eller kunne finne fram de rette formlene, men det må ikke bli det viktigste. Innenfor forståelse og kompetansebegrepet er anvendelse av matematikk en sentral del. Derfor må studentene kunne anvende formelen eller begrepet. Vår begrunnelse overfor studentene er at de skal bli lærere og derfor må kunne forklare og forstå lærestoffet de skal arbeide med i skolen og ikke bare bli en ”formelbank”. Ved å forklare og begrunne bruker studentene språket. I følge Vygotsky blir språket da en hjelp i begrepsdannelsen.

2. Å kunne og å anvende definisjoner av begreper i ulike kontekster.
På en muntlig eksamen vil de situasjonene der studentene skal bruke matematiske begreper være relativt kjente. Helt nye kontekster vil oftest forekomme under arbeid med lærestoffet i løpet av semesteret.

Selv om studenter kan en definisjon, betyr ikke det at de kan anvende den og forstå hva som ligger i begrepet. For eksempel kan Grete definere sinus og cosinus til en vinkel:

> *Ja. Skal vi se... hvis jeg tegner en rettvinklet trekant, så har du jo... sinus er jo motstående katet delt på hypotenus. Og cosinus er hosliggende katet delt på hypotenus.*

Betyr det at Grete kan bruke sinus og cosinus til å regne ut sider og vinkler i rettvinklede trekanter? Mange tror kanskje det, men utdraget nedenfor viser noe annet.

> *EKSAMINTOR: Hvis du vet at den B-graden din er... ja, si 30 grader. Så vet du at den siden der er 4 centimeter. Kan du da regne ut den?*
> *GRETE: Ja. Skal vi se... skal jeg bruke kalkulatoren, holdt jeg på å si?*
> *EKSAMINATOR:Ja, vær så god.*
> *GRETE: Den her er jo ukjent, men da blir det jo... b er 4... nei, var det sinus eller cosinus du ba meg om å regne ut nå?*
> *EKSAMINATOR:Det blir opp til deg, egentlig, ut fra de opplysningene du vet om.*
> *GRETE:Ja, jeg tar sinus B er 4... 4 centimeter... a-en er jo ukjent... jeg ville jo egentlig, nå ville jeg bare fått et uttrykk. At a ganger sinus B er 4 centimeter.*
> *EKSAMINATOR: Går det an å regne det ut sånn som det står der nå?*
> *GRETE: Ja, å finne... går an å regne ut sånn som det står her nå?*
> *EKSAMINATOR:Sånn som du har satt opp der? Er det nok for å finne det...*
> *GRETE:Det er jo...*

EKSAMINATOR: Den... du skal finne den, ikke sant? Er det nok?
GRETE: Nei, det er ikke nok til å finne a-en.

Grete forstår ikke at hun må bruke verdien av sinus til 30 º for å komme videre i utregningen. Sensor ber henne finne sinus til 30 º på kalkulatoren, og hun blir forbauset når det blir 0,5 og greier ikke å bruke dette videre til å regne ut den søkte siden. Mange utregningsproblemer skyldes også at studentene har dårlige regnetekniske ferdigheter.

En annen av informantene, Frans, vet at kongruente trekanter dekker hverandre helt og kan legges oppå hverandre. Han har tidligere snakket om formlikhet og forholdet mellom sidene i formlike trekanter. Men han greier ikke å se at forholdet mellom sidene i kongruente trekanter må være 1 fordi sidene er parvis like store. Det kan bety at han ikke forstår hva målestokk eller forholdet mellom sidene betyr. Når for eksempel forholdet mellom sidene i to trekanter er 2, betyr det at alle sidene i den ene trekanten er dobbelt så store som i den opprinnelige trekanten.

"STUDENT: Mulig jeg blander inn litt formlikhet her nå. For det er jo sånn man regner formlikhet.
EKSAMINATOR: Ja, men... hva vil det bli hvis de er kongruente? Hva vil forholdstallet være da?
STUDENT: Da vil du få det samme forholdstallet der som der.
EKSAMINATOR: Ja, det er... men hva vil... for akkurat kongruens, hva vil forholdstallet være da?
STUDENT: 5,5/4... jeg vet ikke hva det blir på kalkulatoren, jeg."

Frans kan definere en sirkel: "En lukket kurve hvor alle punktene på kurven ligger like langt fra sentrum." Men han kan ikke, uten å få flere spørsmål fra eksaminator, komme fram til begrepene radius og diameter i sirkelen.
Hvordan kan han da bruke disse begrepene i andre situasjoner, og hva forstår han av sirkelens geometri? Det fører igjen til problemer med andre definisjoner.
Han definerer tangent uten å bruke begrepet radius:

”Den krysser, eller legger seg da på sirkelbuen. Som en rett linje på sirkelbuen.”

På liknende måte med Grete, hun kan forklare kongruensavbildninger, men når hun blir spurt om å utføre en slik avbildning, en speiling, greier hun ikke det.

”GRETE: Ja. Det er en isometri, en avbildning der alle avstander er beholdt da, for å si det sånn. Altså, kongruens er jo... hvis du har en kongruent figur og legger den oppå den andre så skal den være perfekt, på en måte. Den er helt lik.”

Hun vet videre at vi har fire ulike isometrier og kan navnene på dem. Grete skal vise speiling, som er en avbildning. Hun starter med en trekant og ei linje og skal nedfelle en normal til linja det skal speiles om. Det greier hun ikke. Grete mener hun skal oppreise en normal og forstår helt klart ikke forskjellen mellom å oppreise en normal og nedfelle en normal.

Disse eksemplene viser at det hjelper ikke å lære seg definisjoner utenat hvis man ikke kan bruke dem videre i en regneoppgave eller i et resonnement. For å kunne bruke nye begreper, må man få erfaring med dem og forstå dem. Erfaring fra egen undervisning viser også at studentene må trene på å bruke begrepene og formlene i oppgaver. På den annen side, Anne viser at hun kan en definisjon, men også kan bruke den videre i forklaringer. Hun har definert et arkimedisk legeme og bruker definisjonen til å forklare hvor mange og hvilke mangekanter legemet består av.

ANNE: Et arkimedisk legeme er et semiregulært legeme, altså det består av flere polyedre men med samme sidelengde, da.
EKSAMINATOR: Hvis jeg sier her at det legemet der består av tolv femkanter...
ANNE: Tolv femkanter... mm.
EKSAMINATOR: Kan du nå demonstrere at Eulers polyedersetning gjelder for den... det arkimediske legemet der?

ANNE: Ja, skal vi se... Det her er da femkanten, og her har vi én, to, tre, fire, fem... en sekskant. Skal vi se... h + f = k + 2. Da velger jeg først å se på flatene. Vi vet at det er tolv femkanter, og da må vi finne ut hvor mange sekskanter det er. Sekskanter... og da må vi finne ut hvor mange flater det er der. Skal vi se... da ser vi på femkanten: Tolv, for det vet vi at det er, og ganger med hvor mange sekskanter som er rundt, én, to, tre, fire, fem. Og så må vi dele på antall som hver femkant har sekskanter til felles. Her så er det to, den og den. Ja, det blir det.

Ved bare å høre definisjonen til Anne, vet vi ikke om hun har pugget eller om hun forstår. Hun burde for øvrig sagt polygon i stedet for polyeder. I slike oppgaver får studentene alltid oppgitt antallet til et av polygonene. Ut fra det skal de resonnere seg fram til Eulers polyedersetning. Det kan Anne. Hun forklarer tankegangen.

5.2.3 Teori knyttet opp mot funnene

Her vil jeg kort knytte resultatene fra 5.2.2 opp mot teorien som ble presentert i kapittel 3.

Stortingsmelding 11(2008-2009) om lærerutdanning sier at faglig trygghet gir godt grunnlag for å vurdere elevenes faglige nivå og utvikling i forhold til kompetansemålene for faget. Det må bety at det er viktig at studentene kan definere og vet hva begrepene innebærer for å kunne forklare dem for elevene senere, og for å forstå elevers tankegang. Norsk matematikkråds test viser at studenter ved starten av matematikkrevende studier mangler mange grunnleggende begreper og gjør feil på oppgaver som hører inn under grunnskolens pensum.

" I 2007 viser det seg at for studenter som begynner på matematikkrevende studier er det ingen av utdanningsveiene som i gjennomsnitt skårer så høyt som 2/3 av total poengsum på oppgaver som

tilhører grunnskolens pensum" (Rasch - Halvorsen & Johnsbråten, 2007, s. 11).

I lærerutdanninga kan vi ønske oss studenter som har bedre begynnerkunnskap, men når situasjonen er som matematikkrådets undersøkelse viser, må vi som lærerutdannere sørge for at studentene får mulighet til å tilegne seg denne grunnleggende kunnskapen. Dette betyr ikke at studentene tidligere ikke har arbeidet med lærestoffet, men måten det har blitt presentert på og arbeidet med, har ikke gitt det ønskede læringsutbyttet.

Matematikk består av byggesteiner. Dersom "grunnmuren" ikke er stødig nok, vil deler av byggverket kunne rase sammen. Kan ikke studentene de grunnleggende begrepene, vil videre læring ikke gi forståelse, men bare en overfladisk læring som innebærer at studentene husker definisjoner utenat, men ikke er i stand til å anvende begrepene. Et eksempel viste seg ved kongruensavbildninger. Grete kunne definisjonen, men var ute av stand til å bruke den til å utføre en speiling med passer og linjal. Generelt viser resultatene fra studien at studentene har lest pensum; de husker en del av det som er gjennomgått og arbeidet med i timene, men bakgrunnskunnskapene er så dårlige at "grunnmuren" slår store sprekker. Resultatene på eksamen blir dårlige. Nettopp fordi en del studenter har dårlige bakgrunnskunnskaper og forståelse (Rasch-Halvorsen & Johnsbråten, 2007) som matematikkrådets undersøkelse viser, kan studiene hos oss bli preget av overflatelæring og lite forståelse. Studentene mangler "knagger" å knytte kunnskapen opp mot. Jeg har ikke intervjuet studentene om deres læringstilnærming, bakgrunn og forberedelser. Derfor kan ikke jeg påstå at noen av studentene i min studie har tilegnet seg lærestoffet ved overflatelæring. Mine uttalelser er basert på det studentene viser i eksamenssituasjonen.

Begreper læres best ved bruk av eksempler og ikke først gjennom å presentere definisjonen (Breiteig & Venheim, 2007). Kan studentene ha hatt en matematikkundervisning der definisjonene har kommet først og ikke har vært knyttet opp mot varierte og relevante eksempler og kontekster?

Hvordan kan jeg knytte funnene opp til henholdsvis Blooms og Biggs' taksonomitenking?
Det jeg har sagt tidligere i dette kapitlet om begreper, viser at for å ha en god forståelse, må studentene mestre de grunnleggende begrepene. Har de ikke fakta- og ferdighetsforståelse på nivå 1, greier de heller ikke å forstå. Men å kunne definisjoner utenat, er heller ikke et bevis på forståelse. Det viste Grete da hun skulle utføre speiling. Et annet eksempel er Frans, som kunne definere en sirkel, men ikke kunne bruke definisjonen videre i arbeidet med sirkelen. Disse to eksemplene viser at studentene har kunnskap, men ikke forståelse.

De sterke studentene kjenner til flere framgangsmåter ved beregninger og greier å velge den mest hensiktsmessige i oppgaven. Knyttet opp til Biggs taksonomimodell betyr det at de er nærmere et relasjonelt nivå der begreper som å forklare, relatere, anvende og sammenlikne brukes for å beskrive nivået. De som trenger noe mer hjelp, er nærmere et multistrukturelt nivå. De vil greie å finne løsninger ved litt tips og hjelp. De har kjennskap til mange framgangsmåter, men ser ikke hva som er mest hensiktsmessig å bruke. Et eksempel er Dina, som skal beregne en side i en rettvinklet trekant. Det enkleste er å bruke Pytagoras' setning, men Dina prøver seg på trigonometri. Der får hun problemer. De svakeste studentene greier bare å lære seg en framgangsmåte, gjerne knyttet opp til en formel, og er da på et unistrukturelt nivå. De finner løsninger på en oppgave når akkurat deres framgangsmåte kan brukes. Fra grunnopplæringen som disse studentene har gjennomgått, kan dette sammenliknes med at lærestoff vises ved et enkelt eksempel av lærer eller i ei

lærebok og at elevene øver seg på oppgaver der akkurat denne framgangsmåten kan brukes. Blant annet slik beskrives matematikkundervisningen gjennom en rapport som evaluerer L97 (Alseth, 2003). Disse elevene /studentene blir gode på akkurat denne framgangsmåten, men er ute av stand til å koble den til andre eksempler og se sammenhenger i matematikk. Evnen til å se sammenhenger er viktig å utvikle hos elever og studenter.
Det synes dermed å være en sammenheng mellom relasjonell forståelse hos Biggs og anvendelse hos Bloom.

5.2.4. Kjennetegn ved studenter som forstår – og ved de som sliter med å forstå

De studentene som forklarer, begrunner, resonnerer og bruker begreper og formler med ulik grad av hjelp, har noen kjennetegn som er framtredende i eksaminasjonene jeg har studert. På samme måte har de studentene som sliter noen kjennetegn.

I beskrivelsene av kjennetegn setter jeg opp ytterpunkter mellom å forstå godt og forstå dårligere. Jeg har valgt ut tre slike kjennetegn.
1. Å ta initiativ contra å måtte spørres ut.
2. Å ha presise begreper contra å ha upresise begreper.
3. Å ha relativt gode regneferdigheter contra å ha dårlige regneferdigheter.

1. Å ta initiativ contra å måtte spørres ut.
Ved å ta initiativ synes det som om studenten er mer sikker på lærestoffet og vet hvor vi vil med spørsmålet. De som trenger mange spørsmål for å komme fram til resultatet, virker usikre på om de tenker riktig og på hvor eksaminator vil. Anne får spørsmål om overflatearealet til ei kjegle. Hun trenger ingen spørsmål for å komme i gang, men forklarer og resonnerer seg fram til formelen uten inngripen fra eksaminator.

*ANNE: Ja. Da må jeg ha et nytt ark, kanskje. Skal vi se. Den ser da sånn ut. Og da vet vi at sidene er s. Hvis jeg klipper opp den her så får jeg en sirkel, sånn. Et lite sånn pizzastykke eller hva vi vil kalle det. Skal vi se, da gjør vi sånn... den her er jo den samme som den i sted. Den må jo være lik omkretsen rundt den her, så det blir 2 * π * r på den òg. Men den består egentlig av hele den her, som er... jeg må sette på s. Og... og den er jo, kan vi ta og regne på den først: (2 * π* r) / (2 * π * s), som er da den delen av det hele. Og så må jeg jo gange med arealet til hele den her, som er π * s2. Som var det da arealet på en sirkel, men her er da radiusen s. Og her så kan man forkorte. Den mot den, den mot den og den mot den. Så står man igjen med r * π * s. Men man må også ha med bunnen, som er π * r2, arealet... eller, på den sirkelen. Pluss r *π * s , og det kan man også skrive (π * r)(r +s). Det var kjegla.*

Bengt må spørres mer ut og virker derfor usikker. Han kjenner til at det er en sammenheng mellom brøk, desimaltall og prosent. Riktignok sier han hele tall i stedet for desimaltall. Men han må spørres om å sette opp en slik sammenheng. Er den påståtte usikkerheten tegn på at han har dårlig forståelse, eller er han bare nervøs?

BENGT: Nei, prosentregning det er jo...
EKSAMINATOR: Noen måter vi kan jobbe med prosentregning?
BENGT: Nei, i prosentregning er det jo viktig å se sammenhengen, da, i forhold til at du har prosent, og så har du brøk, og så har du hele tall for eksempel. Det er jo litt...
EKSAMINATOR: Kan du sette opp en sammenheng med...
BENGT: Ja, si en fjerdedel da, er lik 0,25... og... eller 25, da.
EKSAMINATOR: 25, som da blir... ?
BENGT: Som da blir?
EKSAMINATOR: Du skrev...
BENGT: Ja, det er... det er 25 prosent mener jeg, der sånn.

Dina trenger også spørsmål for å komme videre. Hun svarer riktig på spørsmålene, men tar ikke initiativ selv. Selv når hun svarer rett, ved å si trekanter og firkanter, må eksaminator spørre videre.

EKSAMINATOR: Mm? Kan du si litt om forskjellige typer regulære mangekanter?

DINA: Ja... kalles jo også polygoner, da. Og de blir navngitt etter hvor mange kanter det er.
EKSAMINATOR: Snakker om regulære, hvilke regulære mangekanter har vi hvis vi begynner på den med færrest kanter?
DINA: Trekanter... og firkanter?
EKSAMINATOR: Mm. Hva heter den regulære... en regulær trekant? Hva heter den?
DINA: En regulær trekant...
EKSAMINATOR: Hva er det som er spesielt når den er regulær?
DINA: Åja, da er alle sidene like lange, i hvert fall.
EKSAMINATOR: Mm. Hva kalles det da? En regulær trekant?
DINA: En likesidet trekant?

Vi ser at Dina svarer litt spørrende, og det kan tyde på at hun er i tvil om svaret er rett. Forstår Dina eksaminators spørsmål?

En mellomting mellom de litt usikre, slik som Dina, og de som tar initiativ selv, som Anne, er studentene som svarer rett, men ikke selv tar initiativ. De må få spørsmål for å komme videre og svarer korrekt og uten særlig tvil på spørsmålene de får. Det er altså ikke nødvendigvis slik at de som ikke tar initiativ, viser dårlig forståelse. I eksamenssituasjonen kan dårlig kommunikasjon mellom eksaminator og student og nervøse studenter være årsaker til at slike situasjoner oppstår.

Erik er eksempel på en student som prater mye og tar initiativ selv, men likevel ikke svarer på det han blir spurt om. Han blir ”avslørt” av sensor og eksaminator, og de stiller spørsmål for å få han inn på temaet igjen.

EKSAMINATOR: Er det noen forskjellige... spesielle beregninger vi gjør i forhold til sirkel?
ERIK: Altså, den består jo da av fortrinnsvis 360 grader... vi håper på det. Vi vet jo med flere eksempler at halvparten er 180, det er like mange grader som det er i en trekant. Så det lar seg også gjøre å konstruere, da, en rettvinklet trekant. Eller andre trekanter også, men... ja, innenfor den sirkelbuen som radien er.

EKSAMINATOR: Da er du inne på noe vinkelbegrep, ikke sant? Du snakker om 360 grader, kan du snakke om... si noen flere vinkelbegreper knyttet til sirkler? Som er spesielt knyttet til sirkler?
ERIK: Sånn som vi vet, at 360 grader er jo da... hvis jeg ikke hadde hatt noen av de andre linjene. Trukket diameteren, og så deler jeg på midten, 180 grader vinkel. Og i sted da jeg lagde en sirkelsektor, så konstruerte jeg eller tegnet opp 90 grader. Som gjør at innenfor sirkelen så er det jo ganske mange muligheter. Men det bør jo ikke være MER enn 360 grader. For hvis jeg klarer å få til det, da tror jeg jeg har gjort noe nytt og spennende.
EKSAMINATOR: Hvis jeg sier sentralvinkel, vet du hva som ligger i det?
ERIK: Ja, da er vi vel mer over på Thales igjen. Nærmer vi oss Thales.
EKSAMINATOR: Mm, kan du si litt mer rundt det.
ERIK: Thales? Sentralvinkel?
EKSAMINATOR: Kan du vise... ja, vise litt hva det går utpå... hvilke begreper vi har knyttet tilThales?

I utgangspunktet forventet eksaminator å høre om areal og omkrets av en sirkel, men da Erik startet med å snakke om vinkler, gikk hun over til å spørre om vinkler. Det er lite relevant innhold i det første Erik sier. Han svarer ikke på hva sentralvinkel er, men knytter begrepet opp til Thales' setning. Det er en sammenheng mellom de to. Forstår Erik hva han blir spurt om, eller er han så nervøs at ikke får med seg spørsmålet?

Det er viktig at studenter ikke får et inntrykk av at det bare er å prate for å få gode karakterer, men at det er viktig at innholdet er korrekt og relevant.
De studentene som viser forståelse ved at de begrunner, resonnerer og kan anvende definisjoner i nye situasjoner, ser ut til å være de samme som tar mest initiativ under eksaminasjonene i denne studien. Men her vil studentenes personlighet og erfaring spille en rolle. Noen synes å være mer "muntlige" enn andre. Men det ligger utenfor dette prosjektet å diskutere her.

2. Å ha presise begreper contra å ha upresise begreper.

Flere av studentene har problemer med å forklare og definere begreper og bruker grunnleggende begreper upresist. Begrepene som studentene bruker, kan i mange tilfeller forstås av tilhørerne sammen med tegninger og bruk av kroppsspråk. Men de er langt fra riktige. Elevene i grunnskolen vil i sin begrepsutvikling bevege seg fra upresise begreper knyttet opp mot eksempler til mer presise begreper. Men læreren må selv ha korrekte og solide begreper. Det er ikke tilstrekkelig å ha begrepene til ”privat” bruk. Når studentene senere skal bruke begrepene i sin profesjon som lærer, må hvert begrep tilpasses elevenes nivå. For å kunne tilpasse begreper til elevenes nivå, må læreren ha forstått innholdet i og anvendelsen av begrepet. Det holder ikke med en definisjon han/hun har lært utenat. Jeg kan ikke påstå at studentene med disse upresise begrepene har en dårlig forståelse, men de studentene som på andre områder av eksaminasjonen viser svakere forståelse, har også upresis og hverdagslig begrepsbruk.

Her følger observerte eksempler på å bruke feil begrep eller å ha upresis begrepsbruk. Det er lite interessant her å vise til studenter som har riktig begrepsbruk.

- Begrepet forkorte, som betyr å dividere med samme tall i teller og nevner i en brøk. Forkorting gjør ikke brøken mindre.

Et eksempel er utregning av hvor mye 20 % er av 1000 kr: $\frac{1000kr \cdot 20}{100}$

Studenten (Christoffer) sier at han stryker to nuller oppe og to nede. Det han mener, er at han forkorter med 100 i teller og i nevner. Sensor og eksaminator forstår hva han mener, men overført til dette regnestykket $\frac{21}{12}$, kan vi ikke si at vi stryker totallene og får en til svar.

Et annet eksempel på feil bruk av forkorting er når Hilde skal trekke sammen og deretter trekker fra samme tall på begge sider av en likning. Hun sier at hun forkorter på begge sider av likningen:

”Mens X + Y + Z = 360 grader. Og da kan vi jo sette de her opp mot hverandre. A + A + X + B + B + Y = X + Y + Z. Og så forkorter vi, da får vi 2A + 2B = X, nei unnskyld, er lik Z”.

Det er klart hva studenten mener, men begrepet forkorte er feil brukt. Hun burde sagt at hun trekker sammen like bokstaver.

- Begrepet katet. I en rettvinklet trekant heter den lengste siden hypotenus og de to andre sidene kateter.

Christoffer kaller siden i en vilkårlig trekant for katet når han skal nedfelle en normal for å finne radien i en innskrevet sirkel. Han bruker flere ganger katet om en vilkårlig side i trekanten, og virker usikker på hva han egentlig har gjort:

”EKSAMINATOR: Fikk du... nå tok du... nå står den normalen på vinkelavdelingslinjen din. Hva skal den stå normalt på?
CHRISTOFFER: På den ene kateten?”

- Avbildninger av punkter:

Grete sier at et punkt som er en avbildning av et annet punkt er parallelt med punktet. Hun sikter til skrivemåten for et avbildet punkt for eksempel A’:

”GRETE: A, og så en strek der oppe fordi den er parallell med A. Og da er det jo å gjøre det samme med alle punktene. Skal jeg gjøre det?”

Bildet av et punkt ligger like langt fra speilingslinja som punktet. Det kan være grunnen til at Grete mener de to punktene er parallelle.

Hverdagsforklaringer og bruk av eksempler i forklaringene gir også inntrykk av upresis begrepsbruk.

- Bruke eksempler:

Christoffer bruker eksempel når han skal forklare hva prosent er:

”Ja. Prosent, det er... 1 prosent er som 1 delt på 100, som er 0,01. Og det er... det er jo en ting som er veldig viktig å ha utgangspunkt i når man skal drive med prosentregning.”

Han gir en dårlig forklaring på hva vekstfaktor er:

”…For det er…vi gjør om prosent til et tall som vi kan bruke for å regne ut det vi ønsker.”

Men han kan gi et eksempel på at vekstfaktor kan brukes for å regne ut hvor mye et sparebeløp vokser til i løpet av et antall år. Det er riktig, slik at han vil få til en regneoppgave der spørsmålet er hvor mye 1000 kr vokset til på 10 år når rentefoten er 2 %. Men overfor kommende elever skal jo begrepet forklares. Det er han foreløpig ikke i stand til.

- ”Hverdagsforklaring” på enkle begreper

Frans forklarer hva en diameter er slik:

> *”FRANS: Og så er det diameter, det er hele veien over.”*

Det er forståelig hva han mener, men han unnlater å si at diameteren må gå gjennom sentrum, ellers er det en korde.

Tangent forklarer han slik:

> *”FRANS: Den krysser, eller den legger seg da på sirkelbuen. Som en rett linje på sirkelbuen.”*

I 5.2.2 ble det påpekt at ikke bare definisjonen er viktig, men også at begrepet kan brukes i andre og nye situasjoner har betydning for forståelse. Jeg mener forklaringene her er noe klønete, og som lærer bør du trene på å ha forklaringer som du kan gi uten å bruke tegninger og kroppsspråk ved siden av.

3. Å ha relativt gode regneferdigheter contra å ha dårlige regneferdigheter

En del av matematisk kompetanse er å ha fakta - og ferdighetskunnskap. Den fungerer som en verktøykasse for studentene i problemløsningsoppgaver og under utleding av resultater og formler. Det er ikke slik at studenter og elever først utvikler fakta - og ferdighetskunnskap og deretter problemløsningskompetanse. Denne utviklingen foregår side om side og påvirker hverandre. Kunnskaper læres best ved at de brukes i meningsfulle sammenhenger. Slike sammenhenger kan være problemløsing og utforsking. (Breiteig & Venheim, 2007).

Jakobsens studie viser at mange studenter (45 %) har regneferdigheter gode nok til å bestå eksamen, mens langt færre (30%) av studentene har begrepsforståelse god nok til å bestå eksamen (Pettersen, 2005). Resultatene er interessante og fra skriftlige eksamener, men vanskelig å knytte opp til denne studien av to årsaker. For det første viser ikke alle studentene tilstrekkelig utregninger på denne muntlige eksamen. Mer utregning er vanlig på en skriftlig eksamen. Min begrensede studie, men også erfaringen fra klasserommet, tilsier at våre studenter heller ikke er gode i mekaniske utregninger. For det andre må det legges til at studentbakgrunnen på en teknisk utdanning og lærerutdanning er ulike. I lærerutdanningen kreves ingen fordypning i matematikkfaget, mens det er vanlig på tekniske utdanninger.

Under dette punktet er det mest interessant å vise eksempler på relativt dårlig regneferdighet. Dina skal regne ut høyden i en trekant og bruker Pytagoras' setning. Hun har likningen $4 + a^2 = 16$, og sliter regneteknisk for å komme videre:

> *DINA: Skal vi se... regner ut den. Og så må jeg jo, for å få bort... det tallet som er opphøyd, så må jeg jo ta kvadratroten. 4, 16... nei, vent da. Minus 12. Minus a2 er lik minus 12.*
> *EKSAMINATOR: Hva er du ute etter å finne?*
> *DINA: Høyden.*
> *EKSAMINATOR: Ja. Og det er...?*
> *DINA: Eller* a^2*.*
> *EKSAMINATOR: Ja. Eller a.*
> *DINA: Ja. a, ja. Så jeg vil jo ta kvadratroten av den, da og så må jeg jo få bort minustegnet.*
> *EKSAMINATOR: Hvordan gjør du det da? Hvis du venter med å ta kvadratroten? Hva gjør du først da? Et lite grep... ?*
> *DINA: Ganger med -a?*
> *EKSAMINATOR: Du ganger med minus... hvis du tar og ganger med -1 på begge sider, så slipper du... eller hvis du hadde gjort her oppe, latt a stå på denne siden og heller*

flyttet 4 på den andre siden. Så hadde du fått 12 = a^2. Så slipper du minus. Det er det samme, og da kan du... og da begynner du å nærme deg mål.
DINA :Da har jeg 12.. $\sqrt{12}$. Jeg skjønner ikke den...
EKSAMINATOR: Det er bare... trykker du den så får du desimaltall. Så det er bare en liten sånn ekstra greie. Du får det i... du får det nøyaktig. Slik, og så gjør vi sånn. Og da får du tre komma...
DINA: Ja... 3,46. 3,5.

Å sette opp likningen til Pytagoras' setning er ikke problemet til Dina, men det regnetekniske med å løse denne enkle annengradslikningen er problematisk. Til tross for disse problemene greier Dina å gjennomføre beviset for setningen med noe hjelp fra eksaminator. Det viser at studentene har en del grunnleggende mangler fra tidligere opplæring, men de har faktisk prøvd å arbeide med og lese på det som er gjennomgått i dette kurset. Som lærerutdannere går vi ut fra at denne grunnleggende regningen er i studentenes verktøykasse. Det er den ikke, og det bør få noen følger for vår undervisning.

Erik prøver å vise Thales' setning og sliter med algebraen:

ERIK: Det er 2a eller a^2, pluss x er 180. Og så legger jeg da til den andre trekanten, $b^2 + Y$. Det blir da til sammen 360 grader. Da ser jeg at de to er like. Så setter jeg $x + y + v = a^2 + v$... nei, pluss x, pluss b^2 pluss y. Nå ser jeg at x og y er på begge sider. Så står jeg her med $v = a^2 + b^2$... unnskyld, 2ab.

Han er her midt inni resonnementet, men det er ikke selve resonnementet som er viktig i denne sammenhengen. Erik ser ikke forskjell på 2a og a^2 og på $a^2 + b^2$ og 2ab. Igjen, dette er en vanlig svakhet hos en del av lærerstudentene. De har i mange tilfeller dårlige regneferdigheter i algebra. Hva det skyldes, går jeg ikke inn på her. Men også Erik går løs på et bevis, som han greier med noe hjelp.

6. Er muntlig eksamen en god evalueringsform i dette matematikkurset?

Svaret på dette spørsmålet er ja, og jeg skal prøve å begrunne det ut fra teori, funn, validitet og reliabilitet og egen erfaring som eksaminator og sensor. Det er vanskelig for meg, som mangeårig lærer i grunnskolen og i lærerutdanninga, å ikke ta hensyn til egne erfaringer i dette kapitlet. Derfor kommer mine synspunkter tydelig fram her, samtidig som det som finnes av forskning på området, presenteres. Noen argumenter for muntlig eksamen blir nevnt i innledningen til rapporten. Med svaret ovenfor mener jeg ikke at alle skriftlige eksamener skal byttes ut med muntlige, men det er viktig å kjenne til og vurdere ulike evalueringsformer slik at alle studenttyper kan få vist styrker og svakheter. Det er også viktig å vurdere hvilke evalueringsformer som passer til ulike kurs.
I forbindelse med problemstillingen i dette prosjektet, er det på sin plass å stille spørsmålet: Er det lettere å måle forståelse på muntlig eksamen?

6. 1 Argumenter for en muntlig eksamen:

6.1.1 Matematikkfaglige innhold.

Geometri er et visuelt tema. Konstruksjoner og tegning av figurer sammen med en forklaring gir mulighet for å vise god oversikt over lærestoffet. Andre slike områder i matematikk er statistikk og funksjonslære. Alle disse temaene kan også knyttes opp til bruk av IKT og dynamisk programvare. Framgangsmåter og begrunnelser i disse temaene er dermed lettere å vise på en muntlig eksamen.

6.1.2 Oppfølgingsspørsmål

Ved en muntlig eksamen har både sensor og eksaminator mulighet til å stille oppfølgingsspørsmål dersom svaret er uklart eller ufullstendig. Studenten har også mulighet til å gi tilleggsopplysninger dersom han føler den første forklaringen ikke er tilstrekkelig for eksaminator og sensor. Joughin (1998) mener studentene får mulighet til å vise forståelse gjennom oppfølgingsspørsmål fra læreren. Han mener muntlig eksamen fremmer en dypere tilnærming til læring. Med det menes blant annet å relatere lærestoffet til tidligere kunnskap og erfaring og å se etter mønstre og underliggende prinsipper. Studentene blir mer opptatt av å omforme enn bare å reprodusere kunnskap. Naturligvis kan tilleggsspørsmålene også vise at studenten ikke forstår. Et tilleggsspørsmål kan også hjelpe studenten i gang med eksaminasjonen og være oppklarende. Dette kan være tilfelle dersom oppgaven oppfattes som uklar av studenten.

Ved DTU viste det seg at studentene på en skriftlig eksamen behersket ulike beregninger i oppgaver godt. Men når de ble testet i grunnleggende begreper i etterkant, var det færre som fikk bestått. De har ferdighetene, men mangler forståelsen.

> *"At de studerende er gode til at gennomføre ret kompliserede beregninger, kan således ikke tages som et udtryk for at de har forstået fagets centrale begreper (*Lauvås & Jacobsen, 2002, s. 32*)*

Vygotskys teori om den nærmeste utviklingssonen er en god begrunnelse for muntlig eksamen både med tanke på hva studentene kan vise at de kan og særlig ved måten studentene arbeider med lærestoffet på forhånd. Den nærmeste utviklingssonen eller den proximale sonen er det nivået studenten er på vei mot og kan klare med litt hjelp. Ved å samarbeide med andre studenter i forkant av eksamen, vil studentene oppleve at språket og samhandlingen med andre vil bidra til at de forstår mer og arbeider seg mot mer solide kunnskaper og forståelse. Medstudenter, men også lærere og eksaminatorer, fungerer som "støttende stillas" (Høines, 1998).

Argumentet med oppfølgingsspørsmål er etter min mening et av de viktigste aspektene ved en muntlig eksamen som bidrar til å få fram studentenes forståelse.

6.1.3 Profesjonstilknytning

Et annet positivt argument er å kunne knytte eksamensformen opp til framtidig yrke. Joughin (1998) bruker også dette argumentet og knytter det til yrkespraksis og ”det virkelige liv”. Læreryrket er ”muntlig”, og derfor er en muntlig eksamen en god trening i å stå foran så vel elever som foreldre for å forklare noe. Mer enn på denne eksamen, kan oppgavene vinkles mot didaktiske problemstillinger. Da vil mulighetene for refleksjon i forhold til framtidig yrke være viktig.

En av de fem grunnleggende ferdighetene i grunnskolen er ”Å uttrykke seg muntlig” (LK06). Det innebærer å uttrykke hvordan man har tenkt, å argumentere for løsningsmetoder og å stille spørsmål til andres og egen framstilling av lærestoffet. Studentene skal arbeide i grunnskolen og trenger kunnskaper i og erfaring med denne grunnleggende ferdigheten. Det kan de få ved forberedelser og gjennomføring av muntlig eksamen. Dersom studenter og elever får spørsmål om hva en god lærer er, vil mange svare at det er en lærer som forklarer slik at de forstår. For å forklare slik at andre forstår, må man forstå selv. Studenter mener de må forstå mer ved en muntlig eksamen (Joughin, 1998).

6.1.4 Personlig eksamensform

Joughin har studert studentenes egen opplevelse av muntlig eksamen. De sier at det er en mer personlig eksamensform. Ved skriftlig eksamen er du bare et nummer i rekka, mens ved muntlig eksamen står du foran andre mennesker og blir direkte assosiert med besvarelsen. Dette kan naturligvis føre til at studentene blir mer nervøse og usikre, men det kan også føre til at de tar mer tak i studiet og forbereder seg bedre og på en annen måte til muntlig eksamen. Det kan videre føre til bedre resultater og bedre forståelse (Joughin, 1998).

Mange studenter motiveres av muntlig eksamen og forbereder seg bedre og mer enn foran tradisjonelle skriftlige eksamener (Oakley & Hencken, 2005) . En undersøkelse ved HIØ våren 2007 bekrefter dette (Kvifte, in press). Den viser at omtrent halvparten av studentene forbereder seg annerledes til muntlig enn skriftlig eksamen. En av studentene sier:

> *"Til skriftlig er det bare pugging av stoff, og jeg sitter stort sett for meg selv og leser. Hvis jeg forbereder meg til muntlig, pleier jeg som regel å få andre til å stille meg spørsmål eller jeg leser eller forteller høyt for noen."*

En annen student sier:

> *"Diskuterer i større grad med flere det stoffet vi har til muntlig. Vi skal jo tross alt prate på eksamen. Leser mer alene når det er skriftlig."*

På spørsmål om studentene ønsker muntlige eller skriftlige eksamener sier to tredeler at de foretrekker skriftlig, mens i underkant av en tredel foretrekker muntlig. Samtaler med studenter viser at de føler seg "avkledd" på muntlig og ikke blir så anonyme som på en skriftlig eksamen.

6.1.5 Validitet og reliabilitet

Hvorvidt muntlig eksamen er en god eksamensform for dette kurset, må også vurderes i forhold til denne formens validitet og reliabilitet. Validitet betyr gyldighet, og når vi vurderer validiteten til en eksamen, prøver vi å svare på om eksamen prøver det den er tiltenkt å skulle prøve (Lauvås & Jakobsen, 2002). Da må vi se på eksamensoppgavene og emneplanen for faget. Det er tre hovedmål for emne 102. Det første målet angår det som er aktuelt å teste på eksamen, og det er at studentene skal

- utvikle solide matematiske kunnskaper innenfor geometri og praktisk regning, herunder bruk av passende IKT - programvare

De andre to målene ivaretas gjennom praksis, praksisprosjekt og arbeidskrav gjennom semesteret. Eksamensoppgavene (10 stk) dekker hele grunnskolens pensum under hovedemnene geometri og måling i Kunnskapsløftet samt trigonometri. Blant oppgavene er også noen bevis som vi anser som viktige for å få en grunnleggende forståelse for grunnskolens lærestoff, men som ikke er pensum i grunnskolen, for eksempel beviset for Pythagoras' læresetning og Thales' setning. Praktisk regning handler i hovedsak om prosentregning og vei, fart og tid. Lærestoffet i alle oppgavene er gjennomgått i timene i løpet av semesteret, og det har vært bra frammøte til timene. Sammenliknet med skriftlig eksamen blir studentene testet i en smalere del av pensum på muntlig eksamen fordi de trekker en oppgave fra pensum. Men samlingen av oppgaver studentene trekker sin oppgave fra, dekker hele pensum. På muntlig eksamen er det også lettere å bevege seg inn på andre beslektede emner enn det er ved skriftlig eksamen. Det er sjelden kandidaten kun besvarer den ene oppgaven de får. Eksaminator og sensor har under hele eksaminasjonen mulighet til å stille tilleggsspørsmål i temaet eller i beslektede temaer som kandidaten kommer inn på. Det ovenstående handler om validitet i oppgavene, og den må sies å være god. Men det er også snakk om validitet i vurderingen. Den sistnevnte har jeg ikke gått inn på i min studie. Det bør kort nevnes at vi ikke har utarbeidet egne kriterier for de ulike karakterene, men følger beskrivelsene av karakterer fra Nasjonalt råd for lærerutdanning. Det er en helt klar oppfatning hos sensor og eksaminator i denne studien at vurderingen bygger på studentenes forståelse. Ved fastsetting av karakter er det hele tiden hva studentene har forstått, som er i fokus. Om studenten har gjort en feil som vedkommende har rettet opp, blir ikke det sett på som negativt. Studenter som får E og F blir grundig diskutert slik at vi er sikker på at vurderingen er rettferdig. Ingen karakterer var endelig fastsatt før alle studentene hadde blitt eksaminert. For å si noe om validiteten i vurderingen, burde jeg analysert lydopptak av karakterdiskusjonene. Det har jeg ikke gjort. Denne delen er svært interessant og har vært gjenstand for forskning (Dobson, 2007).

Når det gjelder reliabilitet, må vi spørre om vi får samme resultat dersom vi gjentar eksaminasjonen med de samme oppgavene på et senere tidspunkt. Behandles alle likt av sensor? Får alle samme vanskegrad på oppgaven? Vurderer to sensorer samme besvarelse til lik karakter? Vanskegraden på oppgavene har vi på forhånd bestrebet oss på skal være lik. De temaene som det er arbeidet mest med, er de det er laget flest oppgaver om. Fire av kandidatene ble sensurert av en sensor, mens de fire siste ble sensurert av en annen sensor. Som observatør opplevde jeg at begge sensorene vektla forståelse og evne til resonnement hos studentene ved fastsetting av karakterene. Flere momenter som jeg ikke har tatt opp, vil ha betydning for reliabiliteten. Å se bare på læringsutbyttet og ikke på kommunikasjon og holdninger som kan påvirke karaktersetting, gjør at jeg ikke kan vurdere reliabiliteten i denne studien.

6.2 Argumenter mot muntlig eksamen

6.2.1 Bedre karakter?

Et argument som ofte brukes mot muntlig eksamen er at karakterene blir bedre enn på en skriftlig eksamen. Ingen av studentene i denne studien fikk bedre karakter på muntlig enn de fikk på skriftlig i høstsemesteret selv om det var i et annet tema (tallære og problemløsing). Men vi kan også si til skeptikerne: Kanskje får vi fram mer av det studentene kan ved muntlig eksamen? Jeg har også forståelse for at det personlige møtet kan gjøre det vanskeligere å stryke studenter her enn når de bare utgjør et nummer på et papir på skriftlig eksamen. Det handler etter min mening ikke om eksamensformen, men om hvilke kriterier vi har for de ulike karakterene.

I studien til Oakley konkluderes det med at resultatene på muntlig eksamen viser signifikant korrelasjon med andre vurderingsformer, spesielt med skriftlig eksamen. Man kan stole på karakterene på muntlig eksamen. Denne eksamensformen motiverte studentene til å forberede seg bedre i forkant av eksamen (Oakley & Hencken, 2005).

6.2.2 Praktiske argumenter

Her nevnes først og fremst økonomi. Det påstås at det er dyrt å gjennomføre muntlig eksamen fordi den ofte er mer tidkrevende og reise og opphold for sensorer kan være en stor utgift.

7. Konklusjon

Problemstillingen i denne studien var: Hva kan muntlig eksamen fortelle oss om studenters forståelse i den obligatoriske delen av matematikkfaget i allmennlærerutdanningen? Analysen viser at flere av studentene har mangler i den grunnleggende forståelsen og spesielt at de har upresise begreper. Graden av forståelse av lærestoffet varierer også, fra god forståelse med evne til resonnement til mer mekanisk læring av formler og framgangsmåter.
Man må også i en slik studie spørre om oppgavene og spørsmålene er gode nok til å få fram forståelse. Tester de primært ferdigheter, eller er forståelse sentralt? Er det sammenheng mellom undervisnings – og arbeidsform i studiet og eksamensformen?

I Rammeplan for allmennlærerutdanningen under faget matematikk står det at formålet med matematikkfaget i lærerutdanningen er at studentene skal bli i stand til å undervise etter gjeldende læreplan for grunnskolen på en faglig trygg og reflektert måte, og gi dem et grunnlag for å utvikle sine kunnskaper og arbeidsmåter (Kunnskapsdepartementet, 2003). Er studentene faglig trygge nok når de får dårligste ståkarakter på eksamen? Jeg mener nei. Denne studien har vist at flere av studentene er usikre på mange grunnleggende begreper og at de viser varierende grad av forståelse og refleksjon. Karakterskalaen går fra A til E, og dette innebærer et stort spenn i kunnskap. Om karakteren E står det i beskrivelse av karakterer fra Nasjonalt Råd for lærerutdanning: " E tilfredsstiller minimumskravene, men heller ikke mer. Kan ikke bruke kunnskapen selvstendig." Vi skal bruke hele karakterskalaen. Det må bli opptil de som ansetter om de vil ha en student med karakteren E i et matematikkemne.

Denne studien viser at det er mange gode argumenter for en muntlig eksamen i matematikkfaget. Det er grunn til å stille spørsmålet: får studentene bedre vist hva de kan på muntlig eksamen?

Vedlegg 1 – til kap.5

5.1 Portrett av informantene

5.1.1 Student 1 - Anne

Oppgave: Platonske legemer, overflateareal, regneark

Anne starter med å forklare hva platonske legemer er, og å gi eksempler på de fem platonske legemene. Hun forklarer hva hjørnesymbol er og begrunner skrivemåten for hjørnesymbol. Hun får spørsmål om å forklare Eulers polyedersetning (H + F = K + 2), forklarer hva bokstavene står for og begynner å forklare setningen på heksaederet (terningen). Hun resonnerer seg først fram til feil antall hjørner og flater, men ser av figuren at det er feil og tar seg inn.

> *"Skal vi se... Eulers polyedersetning er jo H + F = K +2, altså hjørner pluss flater er lik kanter pluss to. Hjørner, da kan vi se her... nei, nå må jeg tenke... ja. Da tar vi den ene firkanten og ser antall hjørner i den. Det er fire. Og så ganger det med seks, for det er seks firkanter. Da får vi jo 24hjørner. Nei, vent litt nå... én, to... nå tenkte jeg feil. Skal vi se... én, to, tre, fire, fem, seks, sju, åtte hjørner er det jo. Selvfølgelig, for vi har ett hjørne her, ett hjørne der, der og ett der, og like under. Så da har vi åtte. Og flater, det sa jeg jo i sted, det er jo én... vi har fire rundt og to oppå som er seks. Og kanter, da kan man ta... skal vi se, da kan man se på en firkant og gange med antall hjørner. Altså fire ganger... nei, det var, herlighet, det er jo åtte av dem. Seks, og så gange med fire og dele på to..."*

Neste spørsmål er vinkelsum i en mangekant. Hun husker først formelen og forklarer deretter hvorfor formelen er slik ved regning og ved tegning. Deretter gir hun et eksempel på at den virker. Hun forklarer også begrepet hjørnevinkel.

> *"Ja, det kan man gjøre ved å tegne... skal vi se, skal vi bevis... sånn for eksempel. Kan man også ta en sekskant sånn. Her kan man dele den inn i to trekanter, den kan man dele inn i tre, og den kan man dele inn i fire. Og da ser man, i en firkant da... firkant... så har vi to ganger 180. Vi vet jo at én trekant er 180 grader, og her har vi to. I femkanten så har vi én, to, tre. Tre ganger 180 grader. Og her så, én, to, tre, fire ganger 180 grader. Og det her var jo sekskant, og da ser man at 6, det er jo... 6-2, altså n, er sekskanten, minus 2, det er 4 i det tilfellet. Og femkanten: 5 minus 2 er 3, altså 3 * 180. Og i firkanten: 4 minus 2 er 2, ganger 180. Og så kan man*

*finne hver vinkel ved å ta (n-2)*180 og dele på n, da. For eksempel her, når man får 360 grader, og hvis vi deler på 4 så får man jo da 90. Og da forteller det om hva vinkelen i hvert hjørne...”*

Neste spørsmål er overflateareal. Først er det en sylinder. Hun tegner og resonnerer seg fram til formelen. Til slutt faktoriserer hun uttrykket slik: $2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r + h)$. Anne bruker begrepet plusser sammen arealet av sirklene og rektangelet i stedet for adderer. Ellers bruker hun mer ”matematiske” begreper:

”*Og da ser vi at vi har jo to sirkler, som er to ganger, og da må vi ta arealet av sirklene som er π * r*r. Det er for sirklene. Og så, den her... det rektangelet vi får her, det må jo ha samme lengde her som omkretsen rundt sirkelen. Det er 2 * π * r. Da tar man og legger til, eller, av den her da så blir det 2 π r * h. Da plusser man den: (2 * π * r*r) +(2 * π * r * h). Det kan man få litt finere ved å skrive (2 * π * r)(r + h). Det er overflata på en sylinder.”*

Deretter utleder hun overflatearealet av ei kjegle ved å forklare, tegne og arbeide seg selvstendig fram til formelen for overflatearealet av kjegla. Også det svaret faktoriseres.

Det siste matematikkspørsmålet er hva et arkimedisk legeme er og å bruke Eulers polyedersetning på det. Eksaminator har en tegning av et slikt legeme. Anne forklarer hva et arkimedisk legeme er ved å bruke riktige begreper: ” Et arkimedisk legeme er et semiregulært legeme, altså det består av flere polyedre med samme sidelengde.” Hun arbeider seg fram mot Eulers setning ved å tegne og forklare. Hun retter egne feil på antall flater. Når det gjelder hjørner, greier hun å finne antallet etter et spørsmål fra eksaminator.

Neste del av eksamen er spørsmål om regneark. Først forklarer Anne hvorfor regnearket er så praktisk.

”Et regneark som er veldig praktisk sånn sett med at man... vi henviser til celler og ikke til tall. Så derfor så kan jo Excel regne ut riktig selv om man forandrer tallet inne i en celle.”

Hun forklarer hvordan regnearket virker og forklarer formler og hvorfor noen celler er låst og hvordan det virker ved kopiering. Hun forklarer forskjellen på et serielån og et annuitetslån og har laget regneark på hver av dem. Hun blir bedt om å lage et diagram som viser disse to lånetypene. Hun valgte bare å markere avdragene, men burde valgt både avdrag og renter. Til slutt forklarer hun hvordan Hvis-funksjonen virker ved å ta fram et eksempel.

> *"Her har man en Hvis-funksjon hvor da for eksempel bilfirma skal se om bilen er en tapsbil eller bonusbil. For summen skal være da over 5.000 for at det er en bonusbil, og hvis den er under 5.000 så er den en tapsbil. Så da setter man jo at hvis det som står i kolonnen før er over 5.000, og det er sant, så skal det stå "Bonusbil", og hvis det ikke er sant så skal det stå "Tapsbil". Så her stemmer jo det at det ikke er sant, at det ikke er over 5.000, så derfor står det "Tapsbil". Mens der så er det jo over 5.000, og da står det "Bonusbil"."*

5.1.2 Student 2 - Bengt

Oppgave: Prosentregning, GeoGebra (innskrevet sirkel, avbildninger). Studenten trenger litt hjelp til å komme i gang. Han mener det er viktig å se sammenhengen mellom prosent og brøk og hele tall. Han burde sagt desimaltall i stedet for hele tall.

> *"Nei, i prosentregning er det jo viktig å se sammenhengen, da, i forhold til at du har prosent, og så har du brøk, og så har du hele tall for eksempel."*

Studenten skal gi et eksempel på dette, men sliter og ser ut til å ha vansker med å forstå spørsmålene til eksaminator. Greier etter hvert 25 % og 0,25 og en firedel.

> *"STUDENT:Ja, si en fjerdedel da, er lik 0,25... og... eller 25, da.*
> *EKSAMINATOR: 25, som da blir...?*
> *STUDENT:Som da blir?*
> *EKSAMINATOR:Du skrev...*
> *STUDENT:Ja, det er... det er 25 prosent mener jeg, der sånn."*

Eksaminator spør om ulike måter å regne prosent på. Hun tenker på å regne ut en viss prosent av et tall og å regne ut hvor mange prosent et tall er av et annet. Bengt kommer med et eksempel på den første framgangsmåten: å regne ut hvor mye du skal betale i skatt. Kommer selv inn på vekstfaktor uten å nevne begrepet, for å regne direkte ut hvor mye du har igjen av 18000 kr når du har betalt 36 % skatt.

Når han skal finne hvor mange prosent et tall utgjør av et annet tall, trekker han fram en formel. Han er usikker hva bokstavene i formelen står for og strever med å manipulere bokstavene slik at den ukjente kommer alene på den ene siden av likhetstegnet.

> *"STUDENT:Av det der? Ja... ja, da bare bruker jeg en sånn fo... jeg bare setter opp en sånn formel her sånn. Du skal finne hvor mye prosentvis det utgjør av det. Da setter jeg inn 18.000. Prosenten vet jeg ikke... er det greit at jeg gjør sånn, eller?*
> *EKSAMINATOR:Vær så god, gjør det som du vil...*
> *STUDENT:E er jo... E er jo da, skal jeg sette inn summen her, eller?*
> *EKSAMINATOR:Ja, hvis du vil kan du jo gjøre det, men...*
> *STUDENT:Og så får jeg summen her sånn. Så må jeg gjøre om den formelen her så jeg får p alene, som en ligning. Skal jeg gjøre det?*
> *EKSAMINATOR:Ja, du kan godt vise hvordan du gjør det. Så kan vi se hvordan...*
> *STUDENT:Og da skal jeg ha p alene, da må jeg ha... først ganger jeg med 100, så får jeg 100 ganger der sånn, på hver side. Så står jeg med 100... grunntallet, prosenten... forkorter jeg vekk den der. Nei, det blir bare g * p. Er lik 100 e...da tar jeg videre og så forkorter bort g'en, grunntallet. Da står jeg igjen med p = (1oo e) / g. Hvis jeg ikke er for rask nå... nei?"*

Så skal han forklare vekstfaktor, som han brukte i beregninger tidligere. Han sliter med å komme fram til at vekstfaktoren er 1,07 når det er en økning på 7 %. Men han kan regne ut hvor mye 10 kr har vokst til på 40 år når renta er 7 %. Bengt har vanskeligheter med å forklare, men kan regne ut.

> *"STUDENT:Ja, hvis du setter inn 10 kroner i banken, da. Og renta er på 7, da. Ganger jeg med 7, deler på hundre, for å få prosentvis på den der sånn. Og da får jeg jo en sum som er 10,07. Det er rente etter ett år, hvis det har stått inne i ett år. Og så kan du ta de andre, da får du etter to eller tre eller fire eller fem år."*

Neste spørsmål er om serielån og annuitetslån. Bengt vet at noe er fast og noe varierer i disse lånetypene, men er veldig utydelig. Blander inn fastrente. Greier ikke å svare riktig selv om eksaminator legger svaret i munnen på han og stiller veldig ledende spørsmål.

”STUDENT:Serielån er vel... da er det faste beløp.
EKSAMINATOR:Mm... hva er fast og hva er... hva er fast av det og hva er... ja, hva forandrer seg?
STUDENT:Eh...
EKSAMINATOR:Hva er fast på annuitetslån og hva er fast på serielån?
STUDENT:Ja, det er sikkert det motsatte av det jeg sa...
EKSAMINATOR:Nei, bare... bare forklar det, når jeg sier det...
STUDENT:Det som er, det er at på en av dem så er det at terminbeløpet blir mindre og mindre enn den andre.
EKSAMINATOR:Mm. Fordi?
STUDENT:Fordi...
EKSAMINATOR:Hvorfor blir terminbeløpet mindre og mindre?
STUDENT:Fordi restgjelda blir mindre...
EKSAMINATOR:Ja, og hva beregnes av restgjelda, som vi også må betale når det er snakk om lån?
STUDENT:Gebyrer... eller renter, da.
EKSAMINATOR:Ikke sant? Og det beregnes jo da av restgjelda. Da blir terminbeløpet mindre og mindre fordi hva er fast da?
STUDENT:Renta?
EKSAMINATOR:Avdraget.
STUDENT:Avdraget.”

GeoGebraoppgave: Oppgaven er å konstruere en innskrevet sirkel i en trekant og å gjøre rede for ulike avbildninger. Bengt starter med å lage innsirkelen i en trekant. Han gjør riktig helt til han skal finne radien i den innskrevne sirkelen. Han halverer vinklene i trekanten, finner skjæringspunktet som er sentrum i sirkelen. For å finne radien i den innskrevne sirkelen, må han nedfelle en normal fra sentrum i sirkelen og til sidene i trekanten. Han forstår ikke hint fra eksaminator og vil gjerne konstruere en midtnormal. Han gjentar stadig midtnormal.

”EKSAMINATOR:Ja... finne avstanden ned til en av sidene. Hvordan ville du gjort det? Du har et punkt, du har en side...
STUDENT:Ja ja... her sånn for eksempel da, så lenge den er 90 grader da, så...
EKSAMINATOR:Ja, er den 90 grader?

STUDENT:Nei, det... da er det jo eventuelt å bruke noe tangens og litt sånt, da.
EKSAMINATOR:Ja... må vi bruke tangens nå, for å konstruere inn sirkelen?
STUDENT:For å konstruere inn sirkelen?"

Avbildninger er neste oppgave i GeoGebra. Bengt tegner en trekant og speiler den om ei linje. Deretter utfører han en rotasjon. Han får spørsmål om fordeler ved å bruke GeoGebra og svarer at det er lettvint og at det kan brukes i utforsking. Men det er usikkert om han vet hva som ligger i utforsking:

"EKSAMINATOR:Hvordan ville du jobbet videre med den for å utforske den?
STUDENT:Nei, du kan jo forandre vink... hvis du forandrer vinkelen du tenker på, eller?
EKSAMINATOR:Ja, nei, i og med at vi bare bygger litt videre på det du sier. Med utforskning og...
STUDENT:Ja, du kan... du har jo, du kan jo parallellforskyve videre og sånn, hvis du tenker på det..."

5.1.3 Student 3 – Christoffer

Oppgave: Prosent og GeoGebra

Christoffer skal først forklare hva prosent er og gjør det med et eksempel og ikke med en definisjon. Han forstår framgangsmåten "å gå veien om 1":

"Ja. Prosent, det er... 1 prosent er som 1 delt på 100, som er 0,01. Og det er... det er jo en ting som er veldig viktig å ha utgangspunkt i når man skal drive med prosentregning. Hvis, for eksempel, du skal regne ut 20 prosent av 100, for eksempel, så ville jeg tatt 100 og delt på 100 for å finne ut hvor mye 1 prosent er. Og så ganget det med 20, for å finne ut hvor mye 20 prosent av 100 er. "

Christoffer er opptatt av formelen med grunnbeløp og prosent.

"Og det, ved å bruke den teorien (dele på hundre for å finne en prosent: min komm), så kan man komme fram til en formel for det, for enkel prosentregning. Og det er grunnbeløpet eller grunntallet du tar utgangspunkt i, og ganger det med prosenten og så dele på 100. Og da... da får du svaret, holdt jeg på å si."

Når han skal finne hvor mange prosent et tall er av et annet, bruker han formelen. Han vet hva de ulike variablene i formelen står for, og hvordan han skal regne for å få den ukjente alene på en side:

> *”STUDENT: Hvis du har for eksempel 200 da, som avslag. Og så er du interessert i å finne ut hvor mange prosent det er. Skal vi se... det er jo 100 under, for det er jo det vi deler på. Og så trenger vi grunnbeløpet også da.*
> *EKSAMINATOR: Ja. Det er bare å sette opp et vilkårlig tall, og det kan du velge selv.*
> *STUDENT: Si 1.000, da. Da må vi flytte så vi får p alene på en side. Og da må vi først gange med 100 på hver side for å få... så ganger vi 100 med 200 her, da får vi...da får vi 20.000. Da kan vi stryke den der, og står igjen med 1.000 * p. Så deler vi på 1.000 på hver side. Da kan vi stryke 1.000 her, står igjen med p = ... deler på 20.000, stryker tre nuller. 20... 20 står igjen, prosenten er 20. Så det er 20 prosent avslag.”*

Forstår han dette, eller er det mekanisk regning? Han kan gi et eksempel på å finne antall prosent: 20 elever i en klasse, 9 av dem er gutter. Hvor mange prosent er da gutter?

Deretter skal Christoffer forklare hva vekstfaktor er. Han gir en dårlig forklaring:

> *”Ja. Jeg sa jo tidligere at 1 prosent er 1 hundredel, 0,01. Og det er viktig å huske når det er... når vi snakker om vekstfaktor. For det er... vi gjør om prosent til et tall som vi kan bruke for å regne ut det vi ønsker.”*

Men Christoffer kan komme med et eksempel på når han bruker vekstfaktor, for eks. ved sparing over flere år. Gjennom dette eksemplet forklarer han hvordan han får en vekstfaktor på 1,05 riktig. Han får spørsmål om vekstfaktor mindre enn 1 og sliter med et eksempel. Han gir et dårlig eksempel med å tilbakebetale et lån:

> *”Det er vanskelig å tenke på det på sparket, men hvis du har... hvis du har et lån, for eksempel, som du har betalt... du vet at du har betalt 5 prosent av det lånet. Da ville jo det... da, å finne ut hvor mye lån du har igjen da,*

så vil du kunne bruke den vekstfaktoren jeg har tegnet her til å finne ut det."

Christoffer får spørsmål om annuitetslån og serielån, men er litt usikker på hva som er fast, renta eller avdragene i et av lånene:

> *"Det er vel at serielån så er det faste terminbeløp. I annuitetslån, mener jeg, så er det faste terminbeløp hele veien, og i serielån så reguleres de."*

Deretter står GeoGebra for tur. Oppgaven er å innskrive en sirkel i en trekant og gjøre rede for ulike avbildninger. Han forklarer hvordan han vil innskrive en sirkel i en trekant. Sier hvordan han vil gjøre det med passer og linjal og ved å konstruere i GeoGebra. Viser at han forstår forskjellen på å konstruere og å bruke verktøyet halvere vinkler. Men han sliter med å finne radien i den innskrevne sirkelen. Han kan ikke si noe om hvordan han finner den korteste avstanden fra sentrum til en av sidene. Bruker flere ganger katet om en vilkårlig side i trekanten, og virker usikker på hva han egentlig har gjort.

> *"EKSAMINATOR: Fikk du... nå tok du... nå står den normalen på vinkelavdelingslinjen din. Hva skal den stå normalt på?*
> *STUDENT: På den ene kateten?"*

Han gir en grei forklaring på hvordan GeoGebra kan brukes videre som et dynamisk verktøy. Han viser både speiling og parallellforskyving og forstår hva en vektor er.

5.1.4 Student nr. 4 - Dina

Oppgave: Vinkelsum i regulære mangekanter, Pytagoras' setning, Excel.
Dina definerer først mangekant som polygon navngitt etter hvor mange kanter den har. Hun må gis noen ekstra spørsmål for å komme på at den likesidete trekanten er den regulære mangekanten med færrest kanter. Da kommer kvadratet som neste regulære mangekant fort. Hun tar utgangspunkt i formelen for vinkelsummen for mangekant, $(n - 2) \cdot 180^\circ$. Dina er mer opptatt av formelen

enn av forklaringen på hvorfor det er to mindre enn antall kanter som 180 skal multipliseres med.

> *”STUDENT: Jeg vil jo si liksom hva... at jeg skal fram til den der, da: (n - 2) * 180. Å komme fram til...”*
> .
> .
> *”Kan du da, ut fra det, finne ut hvor stor vinkelsummen er i den sekskanten du har tegnet?*
> *STUDENT: Da vil jeg nesten ta sekskanten som den er, da. Minus 2 * 180... står litt stille.*
> *EKSAMINATOR: Hvor mange sa du at du fikk her?*
> *STUDENT: Jeg fikk 4.*
> *EKSAMINATOR: Og vinkelsummen i en trekant er...?*
> *STUDENT: 180... 180 * 4?*
> *EKSAMINATOR: Mm. Og da blir det? Eller, hva betegner det da? I forhold til den sekskanten?*
> *STUDENT: Det betegner jo... det må jo bli summen av alle vinklene jeg får inni her?*
> *EKSAMINATOR: Ikke sant? Gjør det ikke det da? 4 * 180?”*

Hun svarer på hvordan man finner hjørnevinkelen når man vet vinkelsummen. Hun bruker formelen på en tikant, men er usikker på om det er hjørnevinkelen eller vinkelsummen hun finner.

Dina får beskjed om å tegne en regulær trekant og gjør det. Hun nedfeller en normal og forklarer hvordan det gjøres. Sidene i trekanten er 4 cm, og Dina vet at høyden halverer den motstående siden. Hun får i oppgave å regne ut høyden i trekanten og foreslår å bruke cosinus fordi hun kjenner en vinkel og den hosliggende kateten. Hun vet også at høyden er den andre kateten, men forandrer ikke forslaget til tangens:

> *”EKSAMINATOR: Hvorfor vil du bruke cosinus?*
> *STUDENT: Fordi jeg kjenner jo vinkelen og den hosliggende kateten. Og så har jeg jo på en måte fått meg en rettvinklet trekant her, da.*
> *EKSAMINATOR: Men hva skal du finne?*
> *STUDENT: Jeg skal finne den andre kateten.”*

Eksaminator foreslår at beregningen kan gjøres på en annen måte ved en kjent setning, og da kommer Dina på Pytagoras’ setning. Hun kan hypotenus^2 = katet^2

+ $katet^2$ og kan forklare setningen med ord. Hun trenger hjelp til utregningen av likningen og sliter når hun får minus på begge sider av likhetstegnet. Det er tydelig regnetekniske problemer.

> *"STUDENT: Skal vi se... regner ut den. Og så må jeg jo, for å få bort... det tallet som er opphøyd, så må jeg jo ta kvadratroten. 4, 16... nei, vent da. Minus 12. Minus a i andre er lik minus 12.*
> *EKSAMINATOR: Hva er du ute etter å finne?*
> *STUDENT: Høyden.*
> *EKSAMINATOR: Ja. Og det er...?*
> *STUDENT: Eller a i andre.*
> *EKSAMINATOR: Ja. Eller a.*
> *STUDENT : Ja. a, ja. Så jeg vil jo ta kvadratroten av den, da og så må jeg jo få bort minustegnet.*
> *EKSAMINATOR: Hvordan gjør du det da? Hvis du venter med å ta kvadratroten? Hva gjør du først da? Et lite grep... ?*
> *STUDENT: Ganger med -a?*
> *EKSAMINATOR: Du ganger med minus... hvis du tar og ganger med -1 på begge sider, så slipper du... eller hvis du hadde gjort her oppe, latt a stå på denne siden og heller flyttet 4 på den andre siden. Så hadde du fått 12 = a i andre. Så slipper du minus. Det er det samme, og da kan du... og da begynner du å nærme deg mål."*

Deretter får hun spørsmål om hun kan bevise Pytagoras' setning. Dina tegner opp et stort kvadrat med et lite kvadrat og fire rettvinklede trekanter inni. Hun trenger noen spørsmål for å komme videre, for eksempel hva siden i det største kvadratet er. Da sier hun a og b her og a og b der og at "de må settes sammen" i stedet for å multipliseres:

> *"STUDENT: Arealet av det er jo a og b her og a og b der.*
> *EKSAMINATOR: Hva gjør du med den?*
> *STUDENT: Setter dem sammen...*
> *EKSAMINATOR: Ja, kan du sette det opp?*
> *STUDENT: Ja... skal vi se... a pluss b... vi skal jo ha det i annen... og så... har jeg det lille kvadratet."*

Regneteknisk går det bedre videre, men hun trenger noen spørsmål for å gjøre seg ferdig med beviset.

Til slutt er det Exceloppgaven. Hun får spørsmål om hva Excel er og forklarer hvordan regnearket er bygd opp, og hva det kan brukes til.

> *"EKSAMINATOR: Hva er Excel?*
> *STUDENT: Det er et regneark... bygd opp av celler og kolonner, for å utføre... du kan sette opp budsjett... ja, utføre regnskap. Du har masse formler og funksjoner du kan bruke."*

Eksaminator må spørre ekstra om hva fordelen med Excel er. Dina sliter med å bruke summerformelen fordi hun bruke maskinen til læreren. Tar deretter opp sin egen maskin. Hun har et regneark for serielån og forklarer hvorfor noen av cellene har dollartegn og andre ikke.

> *"EKSAMINATOR: Du har med et dollartegn der. Hvorfor har du det?*
> *STUDENT: Det er for å låse cellene?*
> *EKSAMINATOR: Men hvorf... når gjør du det?*
> *STUDENT: Det gjør jeg når jeg ikke vil at de skal forandre seg på samme måte som de andre, da. Når det er noe som jeg vil ha konstant."*

Hun har problemer med begrepene serielån, renter og hva som er konstant og blir mer forvirret av spørsmålene. Hun lager et stolpediagram, men virker forbauset over hva som kommer opp.

5.1.5 Student nr. 5 - Erik

Oppgave: Sirkelen, Thales setning, kongruens, Excel

Eksaminator spør først hva en sirkel er og forventer å høre at det er alle punkter som ligger like langt fra ett punkt, sentrum. Erik konstruerer en sirkel og begynner å snakke om radius, diameter og tangent og senere sektor. Men han definerer ikke en sirkel.

> *"STUDENT: Altså, jeg holdt på å si, sånn i [uforståelig] sirkelen er jo den, egentlig, som man slår med passer i bunnen, sånn. Det er en sirkel som jeg da nå har konstruert. Den har forholdsvis mange muligheter. Den har en radie, blant annet. Halvparten er radie. Så har jeg diameteren... den har... altså, den kan jo ha forskjellige... den kan ha en tangent som ligger langsmed... kant i kant."*

Han blir spurt om han kjenner til noen spesielle beregninger i forhold til sirkel. Her hadde vi nok forventet oss utregning av omkrets og areal:

> *"STUDENT: Altså, den består jo da av fortrinnsvis 360 grader... vi håper på det. Vi vet jo med flere eksempler at halvparten er 180, det er like mange grader som det er i en trekant. Så det lar seg også gjøre å konstruere, da, en rettvinklet trekant. Eller andre trekanter også, men... ja, innenfor den sirkelbuen som radien er."*

Eksaminator griper fatt i vinkelbegrepet og spør om det er noen vinkelbegreper knyttet til sirkelen. Erik kommer ikke med periferi- og sentralvinkel, men forklarer at det kan være 360, 180 og 90 grader, men ikke mer enn 360 grader. Eksaminator spør så om sentralvinkel, og studenten kommer selv inn på Thales' setning. Da starter han på den generelle setningen om at sentralvinkelen er dobbelt så stor som periferivinkelen når de spenner over samme bue. Erik lager tegning, setter navn på de ulike vinklene. Han resonnerer riktig, og der han gjør feil i resonnementet, retter han opp feilen selv. Men han har problemer med algebra og gjør elementære feil som at a + a er a^2 og a + b = ab osv. Han kan uttale hva setningen går ut på. Deretter blir han spurt om spesialtilfellet av denne setningen (trekant der diameteren er hypotenusen), og det viser han på en tegning, men han kan ikke si hvorfor vinkel C er 90 grader. Han bare gjentar at den er 90 ^{o}. Rett svar burde være at vinkelbeina spenner over diameteren, altså 180 ^{o}, og dermed er den en periferivinkel. Det betyr at han ikke kan bruke setningen.

Erik har mange upresise begreper:

> *"Den... hvorfor, altså, den ligger jo på sirkelbuen. Og uansett hvor jeg hadde plassert den på sirkelbuen så hadde den vært 90 grader i forhold til sentrumspunkt og diameter. Nå, holder jeg på å si, hadde den vært nøyaktig på midten nå, så hadde de to gradene der vært 45 der. Og så hadde den vært... den vært dobbelt så stor som den. Det er den ikke nå."*

Deretter får han et spørsmål om kongruens og åpner med å si at kongruens er formlikhet. Han blir bedt om å utdype det og sier da at figurene kan ha ligget oppå hverandre og dekket hverandre helt.

”Altså, hvis du tar en... den trekanten der, rettvinklet trekant. Den er jo lik den,[uforståelig] to like trekanter. Og de kan jo ha ligget oppå hverandre, og fylle hverandre helt ut.”

Han kan kongruenssetningene, men bruker begrepet standardisert trekant. Han er klar på at trekantene ikke er kongruente hvis bare tre vinkler er like store. Da er de formlike, sier han. Dette griper eksaminator tak i, og Erik sier at trekanter som er formlike nødvendigvis ikke er kongruente:

”For... de trekantene kan godt være formlike, men de... de er ikke kongruente.
EKSAMINATOR: Ja. Det er som du sier, at ja, da er de ikke formlike. Det var det du nevnte i starten, at kongruens er formlikhet. Da går du bort fra det, ikke sant?
STUDENT: Det kan være... de kongruente... når de er kongruente kan de være formlike, men de kan ikke være formlike... altså, hvis de er formlike så er de ikke nødvendigvis kongruente. Ja, det var det jeg sa.”

Excel: Her er han flink. Han lager raskt et regneark, kan fortelle mye om bruken av det og demonstrerer bruken av Hvissetningen. Men han svarer på noe helt annet når eksaminator spør om hvilke typer cellereferanser som er brukt i et eksempel han har laget. Når han blir spurt om et eksempel på bruk av fast cellereferanse, finner han det i eksemplet og redegjør for det. Han har gode forklaringer på diagram og på serielån og annuitetslån:

”Ja. Jeg fjerner den først... serielån er ganske enkelt. Her betaler jeg rett og slett et fast avdrag, og i tillegg til avdraget så kommer jo da rentene. Og så valgte jeg å legge inn gebyr første gang, som gjør at første terminbeløpet mitt her er 4.000 kroner. Og avdraget er det samme hele tiden, og rentene... rentene peker jo alltid tilbake igjen på restgjelda. Så rentene synker jo også, og da ser du at det går her fra da 2.900 og ned til 2.100. Som gjør at jeg i løpet av 10 år på dette her betaler jeg da 26.500. Men hvis jeg velger et annuitetslån, noe veldig mange velger fordi at det er et fast terminbeløp – her er da terminbeløpet 2.000 kroner. Det er noe låntager har bestemt seg for. Og da er... rentene er jo, her også, det er jo prosenten av restgjelda. Og gebyret. Det betyr at det blir like mye å betale i avdrag første gang. Og så ser vi da videre at det er den... og avdraget stiger jo fordi rentene synker. Det er sånn... restgjelda blir lavere, og da blir jo prosentsatsen da... det blir samme prosentsats, men tallet blir lavere. Som gjør da at vi etter hvert betaler høyere avdrag. Da betalte vi

da 30.421 kroner, mot 26.500. Og det betyr at jeg har betalt 3.921 kroner mer på 20.000."

Han viser andre bruksområder enn de som er gjennomgått i timen(løsing av problemløsingsoppgave og ukeplan).

Til slutt spør sensor om han kan gi en definisjon av sirkel og da svarer han at "det er like langt fra sentrum til…hele veien":

"Ja... altså, jeg kan... en sirkel er... jeg holdt på å si, det er jo... det er like langt fra sentrum til... hele veien. Jeg holdt på å si, passeren er jo noe man kan lære å tegne med, som elevene lærer å tegne med før de lærer å konstruere med. Og gjøre kjent det begrepet at når man tegner... altså, det som heter å tegne en runding faktisk er å konstruere en sirkel. "

Deretter kommer det mye om 360 grader og å tegne en sirkel, men ingen korrekt definisjon. Sensor spør også om han vet hva et geometrisk sted er. Han svarer ja på at han vet hva det er, men gir feil svar deretter: "på en diameter så er jo den linjen som krysser … eller jeg sier krysser da, går inntil ". Når sensor deretter presiserer geometrisk sted i forhold til sirkel, svarer han "sentrum".

5.1.6 Student nr. 6 - Frans

Tema: Sirkelen, periferivinkler/sentralvinkler, kongruens, Excel

Frans starter med å gi en korrekt definisjon på en sirkel: "En lukket kurve hvor alle punktene på kurven ligger like langt fra sentrum."

Men når han blir spurt om begreper knyttet til sirkelen (radius, diameter, tangent osv) forstår han ikke hvilke begreper det er snakk om. Han må guides fram til at avstanden fra sentrum til sirkelperiferien er radius. Da kommer han på diameter:

"EKSAMINATOR: Kan du si litt om forskjellige begreper tilknyttet en sirkel?
STUDENT: Ja, det er...
EKSAMINATOR: Du kan godt bruke ark hvis du ønsker det.
STUDENT: Jeg er litt usikker på hva... begreper du mener, da.
EKSAMINATOR: Altså, navn vi setter på... altså, som er tilknyttet en sirkel, da. Navn vi setter på, forskjellige geometriske begreper tilknyttet sirkelen. Her har du passer, hvis du trenger det.

STUDENT: Forskjellige...
EKSAMINATOR: Du har allerede nevnt én... en gitt avstand, ikke sant, fra sentrum? Det er jo et begrep.
STUDENT: Ja. Jeg er litt usikker på hvor du vil...
EKSAMINATOR: Hva sa du var definisjonen av en sirkel?
STUDENT: At det er en lukket kurve som er... hvor alle punktene på kurven ligger like langt fra sentrum. Et sentrum p, for eksempel.
EKSAMINATOR: Ja? Hva heter den avstanden du nå nettopp sa?
STUDENT: Det er radius.
EKSAMINATOR: Ikke sant? Nå er du i gang, vet du. Det er én.
STUDENT: Og så er det diameter, det er hele veien over."

Han blir spurt om sentralvinkel og periferivinkel.

"STUDENT: Jeg vet ikke om jeg... du har jo vinklene, for eksempel da, hvis jeg skal ta dem.
EKSAMINATOR: Ja, det er også noen begreper knyttet til dem.
STUDENT: Sentralvinkelen som ligger i vinkelen, og periferivinkelen...
EKSAMINATOR: Kan du tegne det opp?
STUDENT: Ja, hvis du har en vinkel sånn, da. Og så har du... her har du sentralvinkelen og her ute har du periferivinkelen."

Han vet at det er en sammenheng mellom disse i Thales' setning. Når han blir bedt om å snakke mer om Thales' setning, tegner han kongruente trekanter. Han blir guidet bort fra at trekantene som kommer fram i Thales setning, må være kongruente og sier til slutt at periferivinkelen er halvparten av sentralvinkelen. Dette greier han ikke å bevise. Deretter vil eksaminator vite hva kongruente trekanter er:

"STUDENT: Nei, kongruent er at det er to like trekanter som en kan legge oppå hverandre og så dekke hele området. Det er kongruens."

Tidligere har han sagt at kongruente trekanter har parvis like store sider og vinkler. Det er riktig, men ble ikke bekreftet av eksaminator.
Eksaminator kommer inn på flere sirkelbegreper: Sirkelsektor, tangent og sekant. Når han får spørsmål om sirkelsektor, sliter han og prøver seg med sekant. Eksaminator prøver å hjelpe til med om han vet hva et sektordiagram er for noe. Han greier ikke å forklare hva en sirkelsektor er, men kan tegne en.

Eksaminator må stille spørsmål for å få han til å si at sirkelsektoren har toppunkt i sentrum av sirkelen. Frans kommer selv inn på tangent, men har en upresis forklaring:

> *"STUDENT: Den krysser, eller den legger seg da på sirkelbuen. Som en rett linje på sirkelbuen."*

Deretter blir han spurt om hvilke beregninger han kan gjøre i forbindelse med en sirkel. Han kan både omkretsen og arealet og nevner selv begrepet pi som et forholdstall. Litt historikk om størrelsen av pi kan han. Han viser at han kan legge en avstand rundt sirkelen litt over tre ganger, men må ha hjelp for å få fram at det er diameteren som skal gå litt over tre ganger rundt sirkelbuen. Det virker som om han ikke forstår hva eksaminator er ute etter. Til slutt kommer han fram til diameteren:

> *"EKSAMINATOR: Ja, men hvilken avstand trekker du da... bruker du rundt her?*
> *STUDENT: Hvilken avstand jeg bruker rundt her? Det må være... det er en tredjedel av hele sirkelbuen, som jeg...*
> *EKSAMINATOR: Ja, og... og hva er en tredjedel av den? Hvilken avstand er det du tar utgangspunkt i? Hvilken avstand er det du bruker 3,14 ganger rundt her?*
> *STUDENT: Det er... den avstanden som jeg bruker 3,14 ganger rundt her, det er en tredjedel av hele omkretsen rundt. Jeg kan ikke få sagt det bedre...*
> *EKSAMINATOR: Hva tar du utgangspunkt i? Hvordan finner du omkretsen da?*
> *STUDENT: Det er diameteren jeg tar utgangspunkt i."*

Deretter vil eksaminator høre mer om kongruente trekanter. Frans gjentar at trekantene kan legges oppå hverandre og dekker hverandre helt. Kongruenssetninger har han ikke hørt om, men han tegner to trekanter som er kongruente og setter opp forholdet mellom sidene i samme trekant. Han forstår ikke eksaminators spørsmål som kan hjelpe ham til at forholdet mellom tilhørende sider er lik en.

> *"STUDENT: Mulig jeg blander inn litt formlikhet her nå. For det er jo sånn man regner formlikhet.*

EKSAMINATOR: Ja, men... hva vil det bli hvis de er kongruente? Hva vil forholdstallet være da?
STUDENT: Da vil du få det samme forholdstallet der som der.
EKSAMINATOR: Ja, det er... men hva vil... for akkurat kongruens, hva vil forholdstallet være da?
STUDENT: 5,5/4... jeg vet ikke hva det blir på kalkulatoren, jeg."

Excel: Han sier at "excel er et hjelpemiddel for regneark". Han får spørsmål om å sette opp regnestykker for å vise hvordan regnearket fungerer og viser sparing over flere år. Eksaminator peker på vekstfaktor og spør hva det heter. Han forstår ikke spørsmålet, men når eksaminator nevner vekstfaktor, kan han forklare hva 1,025 som vekstfaktor betyr:

"STUDENT: Ja, vekstfaktor ja. For du har... det som blir vekstfaktoren her da, det er jo da 1,025. Fordi det er 2,5% du skal øke med hvert år. Og derfor så setter jeg 1 pluss og så det som er vekstfaktoren. Og da... og det deler vi da på... ja, her... 1+ renteveksten delt på 100. Og da får du vekstfaktoren 1,025."

Sensor spør om fast og relativ cellehenvisning, og Frans forstår ikke spørsmålet selv om han har brukt det i regnearket. Han sier: "Tenker du på den låste formelen eller"? Han sier om en låst celle: "B3 den har jeg låst fordi jeg skal … fordi det er 10 år". Forklaringen videre med relativ henvisning er ikke god. Han greier å forklare hvordan han vil lage grafisk framstilling av sparingen. Forklaring på serielån og annuitetslån er grei, men han vet ikke at serielån lønner seg økonomisk. Han blir spurt enda en gang om hvorfor det er fornuftig å bruke Excel, og hvorfor det er enkelt. Han svarer:

"STUDENT: Nei, for du får en oversikt, og så kan du sette inn formler og... bare dra nedover og... så får du en fin oversikt over hva som..."

5.1.7 Student nr. 7 – Grete

Oppgave: Kongruensavbildninger, trigonometri, Excel

Grete starter bra med å si at kongruensavbildninger er:

”STUDENT: Ja. Det er en isometri, en avbildning der alle avstander er beholdt da, for å si det sånn. Altså, kongruens er jo... hvis du har en kongruent figur og legger den oppå den andre så skal den være perfekt, på en måte. Den er helt lik.”

Hun vet at vi har fire ulike isometrier og kan navnene på dem. Grete skal vise speiling, som er en avbildning. Hun starter med en trekant og ei linje og skal nedfelle en normal til linja det skal speiles om. Hun mener hun skal oppreise en normal og forstår helt klart ikke forskjellen mellom å oppreise en normal og nedfelle en normal:

”STUDENT: En rett linje over... altså, opprette en normal fra hvert punkt over til den andre siden.
EKSAMINATOR: Men hvordan gjør du det?
STUDENT: Oppreiser... jeg tenkte jeg skulle oppreise normaler...
EKSAMINATOR: Når oppreiser du en normal? Opp-reiser en normal...
STUDENT: Når du skal ha en rett vinkel. Eller...
EKSAMINATOR: Hvordan står den... hvordan vil du ha den linja til å stå i forhold til punktet ditt?
STUDENT: En normal står jo 90 grader opp.
EKSAMINATOR: Men du tar utgangspunkt i punktet, ikke sant? I A? Står normalen da 90 grader opp fra A?
STUDENT: Nei. Den skal jo den veien.
EKSAMINATOR: Du tenkte på nedfelling? Nedfelling av normal?
STUDENT:Ja...”

Hun har vanskeligheter med å forstå spørsmålene og sliter med en del begreper. Når hun har speilet et punkt, kaller hun det A’:

”STUDENT: A, og så en strek der oppe fordi den er parallell med A. Og da er det jo å gjøre det samme med alle punktene. Skal jeg gjøre det?”

Hun blir spurt om rotasjon og vet at man må ha en vinkel for å rotere, men setter ikke av et punkt å rotere om. Hun forstår ikke hvor hun skal konstruere 90 grader som er rotasjonsvinkelen og innrømmer etter en del hint og spørsmål at hun ikke husker det.

Grete blir bedt om å forklare hva en symmetri er:

”STUDENT: Når en figur er symmetrisk, så har den en... identitetsavbildning i tillegg til en annen symmetri. Eller den har for

eksempel rotasjon, eller speiling. Så for eksempel hvis man har et rektangel, så har... så har den 4 typer symmetrier."

Hun forklarer videre symmetri i et rektangel som eksempel. Eksaminator vil ha fram at linja hun bretter om, er symmetrilinja, men Grete forstår ikke hintene.

"EKSAMINATOR: Hva kalles de linjene du har fått på arket ditt nå?
STUDENT: Eh... h og l.
EKSAMINATOR: Ja, det... du kan godt kalle dem det, men hva er h og l, hvis du skulle sette bokstaver på det? Du har forsåvidt sagt det, men... den linja der, hva kaller du den?
STUDENT: Eh, hva mener du? Hva...
EKSAMINATOR: Ja, hva har du... du har... du har satt l på den. Hva er... hva, hvilken funksjon har den linja der?
STUDENT: Den deler rektangelet, på... ja, den deler rektangelet?"

Deretter får hun spørsmål om regulære mangekanter. Hun starter med en regulær trekant og kommer ikke på at den heter likesidet trekant, men mener den heter et platonsk legeme. Eksaminator sier det er romfigur, og da foreslår Grete kongruent. Når eksaminator sier det er likesidet trekant, sier Grete: "Jeg trodde du mente noe annet". Hun kommer fram til at det er tre speilingssymmetrier. Hun sliter med å forklare rotasjonssymmetriene og foreslår først at trekantene roteres 180 grader. Etter hvert sier hun tre rotasjoner : "Da vil det være 360 til slutt. Og så 240 og 180. Eller 90, 180 og…" Hun blir bedt om å markere rotasjonsvinkelen og trenger masse hjelp for å vise vinkelen og komme fram til at det roteres 120 ^{o} hver gang:

"SENSOR: Mm. Så da blir den første rotasjonsvinkelen, første gangen de faller sammen, det er 120 grader. Neste gang...
STUDENT: Ja... ja, det er jo... ja, det er 120 grader tre ganger, sånn at det blir 360 når du er tilbake i utgangspunktet."

Neste oppgave er trigonometri. Hun starter med å si at det er trekantmåling og at det brukes på rettvinklede trekanter. I tillegg sier hun at cosinussetningen og sinusproporsjonen brukes på vilkårlige trekanter:

”STUDENT: Trigonometri er trekantmåling. Det bruker vi på rettvinklede trekanter. Men det er jo noen unntak, eller... sånn som for eksempel cosinussetningen og sinusproporsjon, der kan vi bruke trigonometri på alle vilkårlige trekanter.”

Hun tegner en rettvinklet trekant og kan definere sinus og cosinus. Hun sliter veldig når hun skal regne ut en side og vet en side og en vinkel på 30 grader. Hun greier ikke å bruke definisjonen når hun skal finne noe annet enn sinus til vinkelen. Den ukjente, som er en av sidene i trekanten, står på høyre side i likheten, og det gjør det vanskelig. Hun blir forbauset når hun på kalkulatoren ser at sin 30^o er en halv.

Excel: Grete skal forklare hva Excel er:

”STUDENT: Det er et regnearkprogram. Og det kan brukes til de fleste matematiske og økonomiske utregninger. Og cellene... eller, det som er veldig spesielt med de da, er jo at cellene på en måte kommuniserer, eller hva... de kan på en måte snakke med hverandre, eller... ja. Er det noe jeg skal...?”

Hun sier hun bare kan markere og dra nedover. Grete sier hun har hørt om ulike cellereferanser, men husker ikke hva forskjellen er. Men hun foreslår selv å låse en celle.

”STUDENT: Renta er jo 7%, så den ville jeg låst med hjelp av dollartegn. For den er alltid det samme. Men, som for eksempel neste gang renten skal regnes så skal den jo regnes av... da blir det 22.000. Så da kan jeg ikke bruke E7 den gangen. Her, så her må jeg jo ha... her må jeg jo ha... nå skulle jeg hatt avdrag her også, men det er kanskje litt dårlig tid, så jeg bare... hvis jeg gjør bare sånn...”

Hun nevner selv å bruke Hvis- setning, men kan ikke demonstrere det. Hun forklarer veldig springende.

”STUDENT: Ja... nei, da... for egentlig så er det jo veldig automatisk, og da ville en gjort feil i forhold til det man skal betale. Så da bruker du HVIS-formelen til å... til å justere sånn at du får det beløpet som er riktig, da. Sånn, «hvis restbeløpet er mindre enn det som er avdraget», på en måte, så bruker du HVIS-formelen til å korrigere det.”

Grete mangler grunnleggende ferdigheter som å nedfelle en normal. Men hun vet at sinusproporsjonen og cosinussetningen brukes på vilkårlige trekanter.

5.1.8 Student nr. 8 - Hilde

Oppgave: Sirkler, Thales' setning, kongruenssetninger, Excel

Hilde blir bedt om å definere en sirkel.

> *"EKSAMINATOR: Start med definisjonen av sirkelen.*
> *STUDENT: Den er helt rund... jeg tror jeg starter med å tegne en, jeg. Hvis det går bra?"*

Hun forklarer med ord og begreper på tegningen:

> *"STUDENT: Forskjellige navn på sirkelen, forskjellige linjer. Jeg tenker at vi har sentrum i sirkelen, som er i midten. Den linja som går fra sentrum og ut til sirkelbuen kaller vi for radius. Jeg er på rett spor nå, ikke sant? Det er sånn du tenker ja? Og så tenker en korde, det er et linjestykke som går mellom to punkter på... på sirkelen. Og hvis den korden går gjennom sentrum så blir jo det en diameter. Det ble også egentlig nesten en sekant, fordi at det var jo et linje... en linje som bare gikk gjennom sirkelen uten noen endepunkter. Området mellom korden og sirkelbuen det kaller vi for segment, mens det her er en sektor. En linje som berører sirkelen bare i ett punkt kalles for tangent... skal jeg konstruere en tangent?"*

Hilde konstruerer tangenten fra et punkt til en sirkel ved å bruke Thales' setning. Det er en mer komplisert konstruksjon enn å konstruere en tangent i et punkt på sirkelen.

Hun trenger litt hjelp for å svare på om sirkelen er et geometrisk sted:

> *"STUDENT: Ja, fordi at en radius den har jo lik avstand rundt hele sirkelen. Så det blir jo et geometrisk sted."*

Hilde tar selv initiativet til å si noe om arealet av en sirkel. Forklarer hvordan man har sett på det historisk og dermed forklare det for elever:

> *"STUDENT:Fordi at det er jo πr^2. Og så er det noe med hvordan vi kommer fram til det. Og da tenker jeg at vi har et stort kvadrat. Og så har vi et lite kvadrat inni der. Det blir ikke helt rett, men... og så har vi en sirkel her. Og den siden er 2r. Eller, de... de er jo like, naturligvis, for det er jo et kvadrat, så de er jo 2r begge deler. Og den her, og den her. Så*

*tenker jeg areal av stort kvadrat, det er jo 2r * 2r, som blir 4r². Og så tenker jeg areal av lite kvadrat, det blir jo grunnlinje ganger høyde. For jeg tenker at her er det egentlig en trekant... her. Og da blir jo grunnlinja 2r. Og så må jeg gange den med høyden som er r, og så deler jeg den på 2. Men jeg gjør jo... jeg gjør jo ikke det, fordi at det er to trekanter. Så da blir jo arealet av det lille kvadratet 2r². Men sirkelen, den ligger jo mellom det lille kvadratet og det store kvadratet. Sånn at den er større enn det lille kvadratet samtidig som den er mindre enn det store kvadratet. Og da tenker jeg som så at 2r², det lille kvadratet, og at det er mindre enn πr², og at det da igjen er mindre enn 4r², som er da det store kvadratet."*

Det samme gjør hun med pi og bruker skjerf eller tråd til å forklare hvordan størrelsen pi kommer fram:

"STUDENT: Bruke dette, for eksempel? Tatt en... men du har jo brukt en ulltråd i timen. Men jeg... vanligvis så går jeg med skjerf, derfor tenkte jeg at jeg kunne ha brukt det. Men uansett, at en da tar lengden på diameteren, får den lengden i det legemet en skal bruke til å trekke rundt. Og når en da tar den tråden eller skjerfet og trekker rundt sirkelen, så ser man jo at det blir... går 3 ganger rundt, og så en liten dæsj til. Og dermed så... det er jo lange utredninger for hvordan man kommer fram til 3,14, men altså, det sier jo noe om... eller illustrerer, hvordan vi har kommet fram til det."

Hilde har problemer med å forstå hva det spørres etter når eksaminator vil ha fram sentralvinkel og periferivinkel:

"STUDENT: For når jeg tenker vinkler nå, så har jeg tenkt sånn: Vinkel, den består jo av to linjer som er sammen i et toppunkt. Det er klart at to radiuser blir jo en vinkel. Og så, sånn som...
EKSAMINATOR: Hvor er den vinkelen nå, i forhold til. Kan du peke på hvor vinkelen er?
STUDENT: Å ja, sånn, unnskyld, her. Der er vinkelen.
EKSAMINATOR: Hva heter den vinkelen der?
STUDENT: Det er en spissvinkel, hvis du tenker på det?
EKSAMINATOR: Ja, sånn sett, men i forbindelse til sirkelen... hva heter den vinkelen der når vi har snakket om en sirkel? Det er jo tilknyttet et geometrisk sted også, dette her.
STUDENT: Ja... jeg tenker at det her er sirkelbuen..."

Hun vil vise Thales ’ setning og forklarer begrepene periferivinkel og sentralvinkel og tegner og resonnerer seg fram til at periferivinkelen er halvparten av sentralvinkelen når de spenner over samme bue:

> *”STUDENT:Ja... men det er jo periferivinkelen. Og det er sentralvinkelen. Og da skal jeg vise at periferivinkelen er halvparten av sentralvinkelen. Og da tar jeg og stipler en sånn linje her sånn... så kaller jeg den for A, og så kaller jeg den for A. For de er like store, fordi at det her er en likebeint trekant, fordi at den siden er radius og den siden er radius. Kaller jeg den for B, og så kaller jeg den for B. Og til sammen utgjør A og B noe jeg kaller for U.... X, Y, Z. Og så tenker jeg at A + A + X = 180 grader, for alltid... vinkelsummen i en trekant er alltid 180 grader. Så tenker jeg B + B + Y = 180 grader. Mens X + Y + Z = 360 grader. Og da kan vi jo sette de her opp mot hverandre. A + A + X + B + B + Y = X + Y + Z. Og så forkorter vi, da får vi 2A + 2B = X, nei unnskyld, er lik Z. Det kan vi sette utenfor parentesen, 2(A + B)= Z. Og A og B er jo egentlig U, den lille periferivinkelen der. 2U = Z. Og da har jeg bevist at den er halvparten av den.”*

Hun kaller å faktorisere 2A + 2B = 2(A + B) og trekke fra samme verdi på begge sider (X og Y), for å forkorte.

Hun får spørsmål om hun kjenner et spesialtilfelle der Thales’ setning blir brukt og viser på tegning en trekant med en 90 graders vinkel og hvor godt dette kan vises i GeoGebra.

Neste spørsmål er kongruenssetningene. Hilde vet at det er 4 kongruenssetninger. Hun forklarer forskjell på to likesidete trekanter som er formlike, men ikke nødvendigvis kongruente. Hun forklarer de fire kongruentsetningene.

Sensor vil gjerne at Hilde skal konstruere en tangent til en sirkel fra et punkt på sirkelen. Hun må ha hjelp, men viser hele tiden at hun resonnerer og bruker det hun kan.

> *”EKSAMINATOR: Du sier at den står vinkelrett på... hva står den vinkelrett på? Eller...?*
> *STUDENT: På sirkelbuen?*
> *SENSOR: Ja, men kan noe stå vinkelrett på en bue?*
> *STUDENT: Nei, det går ikke. For det kan jo ikke, nei, det får den ikke gjort.*

.
.
STUDENT: Nei, for jeg må ha en linje... så må jeg ha en normal der, tenker jeg.
SENSOR: Ja. Kan du uttrykke med ord hva det er 90 grader mellom?
STUDENT: Mellom radiusen og tangenten. Eller diameteren.”

Excel: Hun forklarer hvordan regnearket er bygd og gir en god forklaring på hvordan regnearket kan brukes med formler. Hun får fram nytten av regnearket.

*”STUDENT: Hver av dem har sitt... sitt navn, sin henvisning. Den kaller vi for A1. Den kaller vi for B4, og da blir det jo markert her oppe med bokstaver og tall. Jeg tenker som så at Excel, det forenkler jo regneoperasjoner utrolig. Hvis jeg for eksempel sier at min timelønn... ja, altså, du kan jo skrive så mye du vil inni en celle, men altså... nå må jeg hoppe til neste celle for å skrive timelønna mi. Og så kan jeg skrive antall timer, som da er 5, for eksempel. Og så er det da lønna jeg får av det her. Setter en markør i den cellen, og da er jeg nødt til å starte med et likhetstegn, fordi at enhver formel i Excel starter jo med =. Og da tar jeg altså, i stedet for å skrive det her så tar jeg og markerer den. Og så tar jeg gangetegnet, med den, og trykker Enter. Og det er lønna mi jeg får... det var stavefeil da, «lønn». Det er 500 kroner. Og da ser jeg jo, på funksjonslinja her så kan jeg jo se hva jeg egentlig har gjort med formelen C4*C5. Så kan jeg jo for eksempel si at jeg jobber 7 timer i stedet, og da endrer jo den seg. Fordi at formelen er jo den samme, men jeg har endret timene. Og det er vel egentlig det som er det geniale med Excel, at da kan du bare gå inn og endre... endre én celle. Hvis jeg for eksempel... nå bare viser jeg sånn littegrann?”*

Hilde nevner selv relative og absolutte cellereferanser og hvordan de fungerer når hun kopierer. Hun lager diagram og forklarer hvordan en Hvissetning fungerer (hva hun skal sette inn i ulike celler):

”Student: Og så tenkte jeg også å vise noe annet, for jeg tenkte på det med HVIS-setning... det er jo også en oppgave som... som det er vist til. Her er det jo, at hvis 1.000 kroner er... eller beløpet da, som er 1.000 kroner, for da henviser jeg jo til den cella da. Hvis det er mindre enn 2.000 så skal det stå «beklager» nedover hele veien her. Og hvis det er mer enn 2.000 så skal det være «hurra». Og det står det jo også oppe i den funksjonslinja her, for her står det jo hele tiden hva det er. Og nå kan du... ja, og nå kan du helt sikkert program... hvis du er god på det her, programmere inn det her. Men ellers så går det an å trykke på

funksjonstasten, og så skrive inn da den logiske testen. Og det jeg ville ha var jo hvis summen, 2.000, var mindre enn 2.000 så skulle det stå «beklager». At den var sann. Hvis den var usann så skulle det stå «hurra».”

Hun har en rett forklaring på serielån og annuitetslån:

> *”STUDENT: Serielån, der er jo avdraget fast og terminbeløpet endrer seg, mens annuitetslån der er jo terminbeløpet fast og avdraget endrer seg. Og det har vi også gjort noe på, som viser det... her er jo serielånet, og der er annuitetslånet.”*

Litteraturliste

Alseth, B. m.fl. (2003): *Endringer og utvikling ved L97 som bakgrunn for videre planlegging og justering – matematikkfaget som kasus*. Notodden: Telemarksforskning.

Biggs, J. (editor)(1991): *Teaching for Learning. The view from cognitive psychology*. Acer. Australia.

Bloom, B. (1979): *Taxonomy of educational objectives. Book 1. Cognitive domain*. Longman. London.

Breiteig, T. & Venheim, R. (2007): *Matematikk for lærere 1*. Universitetsforlaget.

Brown, G. m.fl. (1997): *Assessing Student Learning in Higher Education. Routledge*. London and New York.

Dobson, S. (2007): Teoretisering rundt muntlig eksamen - en kvalitativ tilnærming. *I Norsk pedagogisk tidsskrift - Nr. 02*

Dobson, S. (2008): *Theorising the academic Viva in Norwegian Higher Education*. Phd 2008. London University.

Dyrstad, K. H. (2001): *På hvilke måter påvirker eksamen studenters læring?*. Pedagogisk forskningsinstitutt. Blindern. http://www.admin.uio.no/sta/laeringsmiljo/eksamenspavirkning.html

Emneplan for emne 102 i Studieplan med emnebeskrivelse, nettadresse: http://www.hiof.no/index.php?ID=14865&lang=nor&function=dumpBeskrivelse&module=studieinfo&type=studieme&key=314&view=printer

Eneroth, B. (1989): *Hur mäter man "vackert"? Grundbok i kvalitativ metod*. Gøteborg

Gagatsis, A. & Shiakalli, M. (2004): Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *In Educational Psychology, Vol.24, No.5.*

Grønmo, L. m.fl (2008): *Tegn til bedring. Timssrapporten*. ILS. www.timss.no

Høines, M. J. (1998): *Begynneropplæringen. Fagdidaktikk for barnetrinnets matematikkundervisning*. Caspar.

Imsen, G. (2005): *Elevens verden. Innføring i pedagogisk psykologi*. Universitetsforlaget.

Jakobsen, A. m.fl. (1999): *Hovedrapport fra Kvalitetsudviklingprosjektet ”Faglig Sammenhæng”*. Skriftserie nr. 1 DTU 1999.

Joughin, G. (1998): *Dimensions of oral assessment and student approaches to learning*. Nettadresse: http://www.tedi.uq.edu.au/conferences/A_conf/papers/Joughin.html

Joughin, G. (1998): Dimensions of Oral Assessment. *In Assessment and Evaluation in Higher Education,Vol.23, No.4, 1998.*

Kvale, S. (1996): Eksamen som konstruksjon av kunnskap. *I Uniped nr.3/00*

Kvifte, B. (in press): *Muntlig eksamen sett fra studentperspektiv*. Rapport Høgskolen i Østfold.

Lauvås, P. & Jakobsen, A. (2002): *Exit eksamen - eller? Former for summativ evaluering i høgre utdanning*. Cappelen Akademisk forlag.

Læreplan for grunnskolen. Kunnskapsløftet, LK06. Utdannings - og forkningsdepartementet. 2006.

Marton, F. & Säljö, R. (2005): Approaches to learning. In F.Marton, D Hounsell, & N.J.Entwistle (Eds): *The experience of Learning*,3.ed. Edinburgh: Scottish Academic Press.

Michelsen, S. & Aamodt, P.O. (2007): *Evaluering av Kvalitetsreformen*. Sluttrapport. Norges forskningsråd.

Niss, M. og Jensen, H. (2002): Kompetencer og matematiklæring. *Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie nr. 18 -2002.*

Oakley, B. & Hencken, C. (2005): Oral Examination Assessment Practices: Effectiveness and Change with a First Year Undergraduate Cohort. *Journal of Hospitality, Leisure, Sport and Tourism Education. Portsmouth.*

Pettersen, R. C. (2005): *Kvalitetslæring i høgre utdanning. Innføring i problembasert didaktikk.* Universitetsforlaget.

Pettersen R. C.(2009): Strategier, motivasjon og tilnærminger til læring. I R. Svanberg & H.P. Wille (red): *LA STÅ. Læring på veien mot den profesjonelle lærer*. Oslo: Gyldendal Akademisk.

Prosser, M. & Trigwell, K. (1999): *Understanding Learning and Teaching. The experience in Higher Education*. Open University press. Great Britain.

Rammeplan for lærerutdanning, 2003. Utdannings- og forskningsdepartementet.

Rasch-Halvorsen, A. & Johnsbråten, H. (2007): *Norsk matematikkråds undersøkelse. Høsten 2007*. HiT, Notodden. http://teora.hit.no/dspace/bitstream/2282/508/1/norsk%20matematikkr%c3%a5d.pdf

Repstad, P. (2004): *Mellom nærhet og distanse. Kvalitative metoder i samfunnsfag*. Universitetsforlaget.

Skagen,K. & Ytreberg, Ø. (2004): Hva vet vi om muntlig eksamen? En kritisk gjennomgang. *I Brekke: Norsk Lærerutdanningsdidaktikk i endring. Høgskoleforlaget.*

Stortingsmelding nr. 11(2008 – 2009): *Læreren. Rollen og utdanninga*. Kunnskapsdepartementet.

Sutherland, R. (2007): *Teaching for Learning Mathematics*. Open University Press. New York.

Trigwell, K. & Sleet, R. (1990): Improving the relationship between assessment results and student understanding. *In Assessment and Evaluation in Higher Education, vol15, nr3. Sydney.*

Aamodt, P.O m.fl.(2007): *Læringsutbytte i høyere utdanning*. Rapport 40/2007. NIFU STEP.