

Sistemas hamiltonianos

Lic. Francisco Kordon

RESÚMEN. Los sistemas hamiltonianos definidos en variedades son sistemas dinámicos que nacen para formalizar la descripción de problemas de la mecánica clásica. Integrar un sistema hamiltoniano es, moralmente, conseguir ecuaciones no diferenciales para sus trayectorias. En este artículo hacemos una introducción a estos temas y en la última sección damos condiciones suficientes para integrar sistemas hamiltonianos y dar descripciones geométricas cualitativas de su dinámica.

Agradecimientos

Este trabajo está basado en mi tesis de licenciatura, realizada durante el segundo semestre de 2013 bajo la dirección de Sergio Grillo y con la colaboración de Javier Fernandez, ambos del Instituto Balseiro - Centro Atómico Bariloche. Les agradezco entonces a ellos por su excelente trabajo y aprovechamiento para agradecer también a César Massri y a Federico Quallbrunn por darme la oportunidad de publicar aquí.

1. Motivaciones desde la mecánica

Intentaremos motivar, de manera resumida y omitiendo algunos detalles, el uso de sistemas hamiltonianos en la mecánica clásica. Esto se hará sólo como motivación; para una explicación más apropiada del tema se recomienda recurrir, por ejemplo, a [4], [2] o [1], o incluso a [3] como referencia clásica en la física.

Consideremos un sistema de N partículas. La posición de cada partícula puede pensarse como un elemento de \mathbb{R}^3 , así que la posición del sistema se asocia a un punto de \mathbb{R}^{3N} . Las trayectorias de este sistema satisfarán las ecuaciones de Newton, esto es, la aceleración de cada partícula multiplicada por su masa coincidirá con la suma de las fuerzas que actúan sobre ella. Las fuerzas en cuestión pueden ser de todo tipo; pueden depender de las posiciones, de las velocidades. Supondremos aquí que no son sino conservativas o de vínculo. Por fuerza conservativa entenderemos aquélla que es derivada de un potencial que sólo depende de la posición, esto es, que se escribe

$$F = -\nabla V.$$

Aquí, como estamos en \mathbb{R}^{3N} , no nos preocupamos por la definición de gradiente o si conviene o no pensar las fuerzas como vectores o covectores.

Diremos que el sistema está sujeto a un vínculo —trataremos aquí sólo a los holónomos— si las trayectorias de las partículas deben vivir en la preimagen de 0 por una aplicación diferenciable $v : \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}$. En caso de tener varios vínculos v_1, \dots, v_k , (que suponemos independientes; sus diferenciales en cada punto son linealmente independientes), el sistema se moverá en $Q = \bigcap_{i=1}^k v_i^{-1}(0)$. Decimos que Q es el espacio de configuraciones del sistema; bajo ciertas hipótesis de regularidad, es una subvariedad de \mathbb{R}^{3N} . En este caso, $3N - k$ es el número de grados de libertad del sistema.

A los sistemas de partículas con vínculos se les puede asociar una aplicación de TQ a valores reales llamada lagrangiano. La energía cinética del sistema $T : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ se puede escribir como

$T(v) = \frac{1}{2}g(v, v)$, donde g es una métrica riemanniana en TQ . Si $V : Q \rightarrow \mathbb{R}$ es el potencial mecánico del sistema, el lagrangiano se define por, para $v \in T_qQ$,

$$L(v) = T(v) - V \circ p(v) = \frac{1}{2}g(v, v) - V(q). \quad (1.1)$$

Aún en presencia de vínculos, utilizando el principio de D'Alembert, puede deducirse que las trayectorias del sistema son aquellas que cumplen las ecuaciones de Euler-Lagrange: en cada carta $(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$ inducida en TQ por una carta (q^1, \dots, q^n) en Q se satisfará que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \quad (1.2)$$

para cada $1 \leq i \leq n$, donde $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ es el definido en (1.1).

Definición 1. Llamaremos sistema lagrangiano a un par (Q, L) donde Q es una variedad y $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación diferenciable. Las trayectorias del sistema son las curvas $t \mapsto \gamma(t) \in Q$ tales que en cada carta $(U, (q^1, \dots, q^n))$ se satisfacen las ecuaciones (1.2), las de Euler-Lagrange.

No vamos a estudiar la formulación lagrangiana de la mecánica sino la hamiltoniana y, para esto, hay que pasar por la transformada de Legendre. Si (Q, L) es un sistema lagrangiano, la transformada de Legendre consiste en una aplicación $\mathbb{F}L : TQ \rightarrow T^*Q$ definida por

$$\langle \mathbb{F}L(v), w \rangle = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} L(v + tw),$$

donde $v, w \in T_qQ$. A esta aplicación también se la denomina derivada a lo largo de la fibra de L . La expresión local es

$$\langle \mathbb{F}L(q, \dot{q}_1), (q, \dot{q}_2) \rangle = \left(q, \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} L(q, \dot{q}_1 + t\dot{q}_2) \right) = \left(q, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}_1) \cdot \dot{q}_2 \right).$$

Definición 2. El lagrangiano L se dice hiperregular si $\mathbb{F}L$ es un difeomorfismo.

Si L es hiperregular, podemos definir la función hamiltoniana. Primero, definimos la energía $E : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ por, para $v \in TQ$,

$$E(v) := \langle \mathbb{F}L(v), v \rangle - L(v);$$

ahora, el hamiltoniano correspondiente al lagrangiano L se define por

$$H := E \circ (\mathbb{F}L)^{-1}$$

y en coordenadas locales, si $(q, p) = \mathbb{F}L(q, \dot{q})$, es

$$H(q, p) = p \cdot \dot{q}(q, p) - L(q, \dot{q}(q, p))$$

En el caso en que L es un lagrangiano mecánico —es decir, uno como el de la ecuación (1.1)—, la transformada de Legendre se ve como

$$\mathbb{F}L(v) = g(v, -).$$

La aplicación $g^\flat : TQ \ni v \mapsto g(v, -) \in T^*Q$ es inversible por la no degeneración de la métrica; notemos su inversa por g^\sharp . Así, $(\mathbb{F}L)^{-1} = g^\sharp$ y el hamiltoniano es, para $\sigma \in T^*_qQ$,

$$H(\sigma) = \frac{1}{2}g(g^\sharp(\sigma), g^\sharp(\sigma)) + V(q).$$

La siguiente proposición, que no demostraremos, dice cómo se ven las ecuaciones de movimiento sobre T^*Q .

Proposición 3. Sean L un lagrangiano hiperregular y H la función hamiltoniana que recién definimos. Entonces $t \mapsto \gamma(t)$ es una trayectoria en Q del sistema lagrangiano si y sólo si se satisfacen localmente en T^*Q las ecuaciones

$$\frac{dq^i}{dt}(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(q(t), p(t)), \quad \frac{dp^i}{dt}(t) = -\frac{\partial H}{\partial q^i}(q(t), p(t)). \quad (1.3)$$

para $1 \leq i \leq n$.

Las (1.3) se conocen como las ecuaciones canónicas de Hamilton, y a H se la llama función hamiltoniana del sistema. Observemos que las trayectorias del sistema en T^*Q son soluciones de ecuaciones de primer orden, así que pueden entenderse como curvas integrales de un cierto campo vectorial.

La moraleja que se quiere dejar es, precisamente, que el problema de encontrar las trayectorias de un sistema mecánico de partículas se puede traducir a otro, que consiste en encontrar las curvas integrales de un campo definido en el fibrado cotangente al espacio de configuraciones.

Ejemplo 4. Consideremos una partícula de masa m moviéndose en \mathbb{R}^3 sujeta a una fuerza conservativa con potencial V , definida en algún abierto de \mathbb{R}^3 ; para fijar ideas, digamos que ese abierto es todo \mathbb{R}^3 . Según la segunda ley de Newton, si $q = (q^1, q^2, q^3)$ denota un punto genérico de \mathbb{R}^3 y $t \mapsto q(t)$ la trayectoria de la partícula, ésta cumplirá las ecuaciones diferenciales, para cada i ,

$$m \frac{d^2 q^i}{dt^2}(t) = -\frac{\partial V}{\partial q^i}(q(t)). \quad (1.4)$$

Este es un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden, es decir, aparece una derivada segunda. Para hacer de él un sistema de primer orden podemos considerar una nueva variable; ponemos, para cada i , $p_i = m\dot{q}^i$; se suele llamar momentos a estas nuevas variables. Las ecuaciones de Newton se dejan reescribir entonces como

$$\frac{dq^i}{dt}(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(q(t), p(t)), \quad \frac{dp^i}{dt}(t) = -\frac{\partial H}{\partial q^i}(q(t), p(t)), \quad (1.5)$$

con

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V(q). \quad (1.6)$$

Dado que las ecuaciones que tenemos que resolver son de primer orden, podemos entenderlas como las ecuaciones para las curvas integrales de cierto campo vectorial. Efectivamente, si notamos

$$\begin{aligned} X_H : \mathbb{R}^6 &\longrightarrow \mathbb{R}^6 \\ (q^1, q^2, q^3, p_1, p_2, p_3) &\mapsto \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \frac{\partial H}{\partial p_2}, \frac{\partial H}{\partial p_3}, -\frac{\partial H}{\partial q^1}, -\frac{\partial H}{\partial q^2}, -\frac{\partial H}{\partial q^3} \right)(q, p) \\ &= \left(\frac{p_1}{m}, \frac{p_2}{m}, \frac{p_3}{m}, -\frac{\partial V}{\partial q^1}, -\frac{\partial V}{\partial q^2}, -\frac{\partial V}{\partial q^3} \right)(q, p), \end{aligned}$$

tendremos que $t \mapsto (q(t), p(t))$ es una curva integral de X_H si y sólo si se cumplen las ecuaciones (1.3). Esto equivale también a que las $q(t)$ satisfagan las ecuaciones (1.4), que son las que teníamos originalmente. El campo vectorial X_H es un *campo hamiltoniano*.

2. Variedades simplécticas

Hablamos en la sección anterior de que podemos pensar al espacio de configuraciones de un sistema mecánico como una variedad; su fibrado cotangente es el lugar natural para desarrollar la mecánica hamiltoniana. Vamos a ver que este fibrado tiene una estructura, también natural, de variedad simpléctica y con esto en mente nos será razonable considerar sistemas hamiltonianos definidos directamente en variedades simplécticas. Repasamos primero un resultado sobre álgebras simplécticas cuya prueba puede verse en [1, II.3.1].

Proposición 5. Si V es un \mathbb{R} -espacio vectorial y $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ es un forma bilineal antisimétrica de rango r , entonces r es par. Además, poniendo $r = 2n$ se tiene que existe una base ordenada (v_i) de V en la que la matriz de a es

$$\begin{pmatrix} 0 & -I & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En otras palabras, si (ψ_i) es la base dual a la anterior, es $a = \sum_{i=1}^n \psi_{i+n} \wedge \psi_i$.

También, si $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal, tenemos definido su núcleo $\ker a = \{v \in V \mid a(v, w) = 0 \forall w \in V\}$. Decimos que a es no degenerada si $\ker a = 0$, es decir, si cada vez que $a(v, w) = 0$ para todo $w \in V$ debe ser $v = 0$.

Sean M una variedad y ω una sección diferenciable de

$$\coprod_{x \in M} \text{Bil}(T_x M, \mathbb{R}) \rightarrow M,$$

donde, si V es un \mathbb{R} -espacio vectorial, $\text{Bil}(V, \mathbb{R})$ denota las formas bilineales de V en \mathbb{R} . Diremos que ω es no degenerada si para cada $x \in M$, ω_x , que es una forma bilineal definida en $T_x M$, es no degenerada. En tal caso, podemos construir un difeomorfismo entre las secciones diferenciables del fibrado tangente y las del cotangente de M como sigue.

Definición 6. Si M y ω son los de recién, definimos $\omega^\flat : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \Omega^1(M)$ por

$$X \mapsto X^\flat = -\iota_X \omega = \omega(-, X).$$

Cuando ω es no degenerada, la aplicación que acabamos de definir es inversible y notamos su inversa por $\omega^\sharp : \alpha \mapsto \alpha^\sharp$.

Si M admite una 2-forma no degenerada ω , por la proposición 5 obtenemos que $\dim M$ es par, digamos $\dim M = 2n$. A partir de ω podemos construir una $2n$ -forma, poniendo $\nu = \omega^n$. Ésta resulta una forma de volumen en M : si $x \in M$, por la misma proposición podemos considerar (ψ_i) una base dual a $T_x M$ tal que $\omega_x = \sum_{i=1}^n \psi_{i+n} \wedge \psi_i$ y en consecuencia $\nu = n!(-1)^{\frac{n}{2}} \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_{2n}$. Hemos probado, pues, lo siguiente.

Proposición 7. Si una variedad M admite una 2-forma no degenerada, es de dimensión par. En tal caso, M es orientable y si ω es una tal forma y $\dim M = 2n$, ω^n es una forma de volumen.

El siguiente teorema, que data de 1882, establece que si M admite una 2-forma no degenerada que además es cerrada, se le puede conocer una expresión local. La prueba es la que aparece en [1], y es atribuida a Moser y Weinstein.

Teorema 8 (Darboux). Sea ω una 2-forma no degenerada en M , una variedad de dimensión $2n$. Entonces $d\omega = 0$ si y sólo si para cada $x \in M$ existe una carta (U, φ) tal que $\varphi(x) = 0$ y si $\varphi(x) = (x_1(x), \dots, x_n(x), y_1(x), \dots, y_n(x))$, es

$$\omega|_U = \sum_{i=1}^n dy_i \wedge dx_i. \quad (2.7)$$

Demostración. Si ω se escribe localmente como en (2.7), es evidentemente cerrada. Recíprocamente, supongamos que es cerrada y busquemos una carta en la que tiene esa expresión. Para esto, podemos suponer que $M = \mathbb{R}^{2n}$; fijemos $x = 0$. Sea ω_1 una forma constantemente igual a $\omega(0)$ y pongamos $\tilde{\omega} = \omega_1 - \omega$ y, para cada $0 \leq t \leq 1$, $\omega_t = \omega + t\tilde{\omega}$. Para cada t , $\omega_t(0) = \omega(0)$ es no degenerada, y entonces existe un entorno de 0 —digamos una bola— en que ω_t es no degenerada para todo t . Por el lema de Poincaré, $\omega = d\alpha$ allí; podemos suponer que $\alpha(0) = 0$. Sea $X_t = \omega_t^\sharp(\alpha)$. Tenemos localmente definido el flujo de X_t , llamémoslo g_t , con $g_0 = Id$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(g_t^* \omega_t) &= g_t^*(\mathcal{L}_{X_t} \omega_t) + g_t^* \frac{d}{dt} \omega_t = g_t^* dt_{X_t} \omega - g_t^* \tilde{\omega} = \\ &= g_t^*(-d\alpha - \tilde{\omega}) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $g_1^* \omega_1 = g_0^* \omega_0 = \omega$, así que g_1 da el cambio de coordenadas que transforma ω en la forma constante ω_1 . \square

Las cartas del teorema de Darboux serán llamadas cartas simplécticas, las funciones x_i , y_i coordenadas canónicas. Estamos en condiciones de hablar de variedades simplécticas.

Definición 9. Una forma simpléctica en una variedad M es una 2-forma cerrada no degenerada ω . Una variedad simpléctica (M, ω) es una variedad M junto con una forma simpléctica ω .

Ejemplo 10. En $\mathbb{R}^{2n} = \{(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)\}$ puede ponerse una estructura simpléctica ω . La definimos dando su matriz en la base canónica $\{e_i, \tilde{e}_i\}$ $[\omega]$:

$$[\omega] = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix},$$

donde I_n denota la matriz identidad de tamaño $n \times n$. Si $(dq^1, \dots, dq^n, dp_1, \dots, dp_n)$ es la base dual a la canónica, se escribe $\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq^i$.

Sea (M, ω) una variedad simpléctica. Si ponemos $\nu_\omega = \frac{(-1)^{n/2}}{n!} \omega^n$, razonando como antes de la Proposición 7, ésta resulta una forma de volumen y, en virtud del teorema de Darboux, se tiene que en cartas simplécticas es

$$\nu_\omega = dx_1 \wedge \dots \wedge x_n \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n. \quad (2.8)$$

Definición 11. Sean (M, ω) y (N, ρ) variedades simplécticas. Una aplicación diferenciable $f : M \rightarrow N$ es simpléctica o transformación canónica si $f^* \rho = \omega$.

Observemos que si $f : (M^{2n}, \omega) \rightarrow (N^{2n}, \rho)$ es simpléctica, como los elementos de volumen ν_ω y ν_ρ se obtienen a partir de las formas simplécticas, se tendrá que f conserva la forma de volumen. También, para cada x en M se pueden tomar coordenadas simplécticas y lo propio puede hacerse en $f(x)$. En estas coordenadas, f es la identidad, y en particular f es un difeomorfismo local.

En mecánica, típicamente el planteo del problema sucede en el fibrado cotangente del espacio de configuraciones Q . Allí puede ponerse una 2-forma diferencial no degenerada y exacta, y de esta manera hacer de T^*Q una variedad simpléctica. Para una demostración del siguiente teorema, se sugiere recurrir a [1].

Teorema 12. Sea Q una variedad, escribamos $M = T^*Q$ y llamemos $\pi : M \rightarrow Q$ a la proyección. Si $\alpha \in M$, definimos

$$\begin{aligned} \theta_\alpha : T_\alpha M &\rightarrow \mathbb{R} \\ w &\mapsto \langle \alpha, d\pi_\alpha(w) \rangle. \end{aligned}$$

Entonces $\theta : \alpha \mapsto \theta_\alpha$ es una 1-forma en M y su diferencial es una forma simpléctica en M , con lo que $(M, d\theta)$ resulta una variedad simpléctica.

Puede recuperarse del Teorema 12 que los fibrados cotangentes son orientables. Como ω es no degenerada, la aplicación definida en la Definición 6 induce un difeomorfismo entre TQ y T^*Q , y de esta manera también recuperamos que los fibrados tangentes son orientables.

Llamemos $\omega = d\theta$. Si notamos (q^1, \dots, q^n) a las coordenadas en Q y $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ las de M , obtenemos las siguientes expresiones locales:

$$\theta = \sum_{i=1}^n p_i dq^i, \quad (2.9)$$

$$\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq^i. \quad (2.10)$$

La 1-forma canónica tiene una propiedad que la caracteriza: para todas las 1-formas β de Q vale que $\beta^* \theta = \beta$. En efecto, si $\beta \in \Omega^1(Q)$ y $v \in T_q Q$,

$$\begin{aligned} \langle \beta^* \theta(q), v \rangle &= \langle \theta(\beta(q)), d\beta_q(v) \rangle = \langle \beta(q), d\pi_{\beta(q)} d\beta_q(v) \rangle \\ &= \langle \beta(q), d(\pi \circ \beta)_q(v) \rangle = \langle \beta(q), v \rangle, \end{aligned}$$

en virtud de la regla de la cadena y de que $\pi \circ \beta = 1_Q$.

3. Sistemas hamiltonianos

Una familia bastante amplia de sistemas dinámicos es la de los que se describen mediante una variedad y un campo vectorial en ella; las trayectorias del sistema son las curvas integrales de este

campo. En muchos casos, este campo es un campo gradiente: si f es una función a valores reales definida en la variedad y g es una métrica riemanniana, el campo vectorial que define el sistema dinámico es el único X tal que $g(X, -) = df$.

Algo muy similar puede hacerse cuando, en vez de considerar una variedad riemanniana, se considera una variedad simpléctica. El campo hamiltoniano asociado a una función f será aquél que al contraer a la forma simpléctica coincide con (menos) la diferencial de f . La antisimetría de la forma simpléctica llevará a propiedades conservativas de los campos hamiltonianos: esto no sucede típicamente con los campos gradientes, donde la simetría de la métrica induce más bien propiedades disipativas.

Definición 13. Sean (M, ω) una variedad simpléctica y $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Definimos el campo vectorial hamiltoniano asociado a H , X_H , como el único campo vectorial que cumple

$$\omega(Y, X_H) = \langle dH, Y \rangle \quad (3.11)$$

para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$, o, equivalentemente, $-\iota_{X_H}\omega = dH$. La existencia de este campo está garantizada por la no degeneración de ω .

Llamamos a la terna (M, ω, H) sistema hamiltoniano; las trayectorias del sistema son las curvas integrales de X_H .

Observemos que $X_H = \omega^\sharp(dH)$; esta concisa escritura de el campo hamiltoniano nos será útil en varios cálculos en lo sucesivo.

Ejemplo 14. Sea (M, ω, H) un sistema hamiltoniano. Sean $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ coordenadas canónicas para ω . Encontremos una expresión local de X_H en estas coordenadas. Pongamos, omitiendo el símbolo de sumatoria, $X_H = a^i \frac{\partial}{\partial q^i} + b_i \frac{\partial}{\partial p_i}$. Como $\omega = dp_i \wedge dq^i$, es $-\iota_{X_H}\omega = a^i dp_i - b_i dq^i$. Ahora, como queremos que esto sea igual a $dH = \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i$, debe ser $a^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ y también $b_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$. Por lo tanto, en estas coordenadas, se escribe

$$X_H = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i}. \quad (3.12)$$

En particular, $(q^1(t), \dots, q^n(t), p_1(t), \dots, p_n(t))$ es una trayectoria del sistema si y solo si, para todo $1 \leq i \leq n$, es

$$\frac{dq^i}{dt}(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(q(t), p(t)), \quad \frac{dp^i}{dt}(t) = -\frac{\partial H}{\partial q^i}(q(t), p(t)).$$

Las ecuaciones de recién son las llamadas ecuaciones de Hamilton o ecuaciones canónicas: son las mismas que (1.3). Si pensamos que H es el hamiltoniano (sin dependencia explícita en el tiempo) de un sistema mecánico en el sentido clásico, recuperamos la formulación hamiltoniana más conocida de los problemas de mecánica, como aparecen por ejemplo en el libro de Goldstein [3] o en el de Landau, o en el apunte [7].

Proposición 15. Si (M, ω, H) es un sistema hamiltoniano, y $t \mapsto c(t)$ es una curva integral de X_H , entonces H es constante a lo largo de c .

Demostración. Para ver que $H(c(t))$ es constante en t , veremos que su derivada se anula:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} H(c(t)) &= dH_{c(t)} \dot{c}(t) = \langle dH_{c(t)}, X_H(c(t)) \rangle \\ &= -\omega(X_H(c(t)), X_H(c(t))) = 0, \end{aligned}$$

en virtud de la antisimetría de ω . □

Observemos, continuando el paralelismo entre campos hamiltonianos y gradientes introducido al principio de esta sección, que la reciente proposición no es cierta en caso de tener campos gradientes: de hecho, las curvas integrales del gradiente son, en cada punto, las direcciones de máximo crecimiento de la función.

Ejemplo 16. La proposición anterior también puede probarse usando las expresiones locales encontradas en el Ejemplo 14:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} H(c(t)) = \langle dH_{c(t)}, \dot{c}(t) \rangle = \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial h}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial H}{\partial q^i} \right) = 0,$$

con $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ coordenadas canónicas.

Otro hecho para destacar es que los flujos de los campos hamiltonianos son transformaciones canónicas, y en particular preservan el volumen. En el caso en que nuestra variedad simpléctica viene de la mecánica clásica, recuperamos el llamado Teorema de Liouville que aparece en textos clásicos como [7] o [3].

Proposición 17. Sean (M, ω, H) un sistema hamiltoniano y ϕ_t el flujo del campo. Entonces, para cada t , $\phi_t^* \omega = \omega$.

Demostración. Veremos que $\phi_t^* \omega$ es constante en t . En efecto, usando la conocida relación entre flujos y derivadas de Lie, obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \phi_t^* \omega &= \phi_t^* \mathcal{L}_{X_H} \omega = \phi_t^* (\iota_{X_H} d\omega + d\iota_{X_H} \omega) \\ &= \phi_t^* (0 - ddH) = 0, \end{aligned}$$

puesto que ω es cerrada. Ahora, como $\phi_0 = 1_M$, resulta que $\phi_t^* \omega = \phi_0^* \omega = \omega$ cualquiera sea t . \square

En general, no todos los campos vectoriales son campos hamiltonianos; es decir, no es cierto que para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ exista una función $f \in C^\infty(M)$ tal que $X = X_f$. Ciertamente, se requiere es que $\omega(-, X)$ sea exacta para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ y esto no es para nada cierto en general, ni siquiera localmente. En virtud de la igualdad $\mathcal{L}_X \omega = d\iota_X \omega$ (ω es cerrada) y del Lema de Poincaré, que un campo X sea localmente hamiltoniano es equivalente a que la derivada de Lie de la forma simpléctica respecto de X se anule.

Por supuesto, un campo hamiltoniano es localmente hamiltoniano, así que una condición necesaria para que un campo X sea hamiltoniano es que $\mathcal{L}_X \omega = 0$. Ahora, para que efectivamente lo sea se necesita que además $\iota_X \omega$ sea exacta. En particular, si el primer grupo de cohomología de De Rham de M es nulo, los campos hamiltonianos son exactamente los localmente hamiltonianos.

Ejemplo 18. Si en el toro T^2 identificamos las coordenadas angulares x, y ; $\omega = dy \wedge dx$ es una forma simpléctica. Si $a, b \in \mathbb{R}$, consideramos el campo vectorial definido por $X(x, y) = (a, b)$. Es $\iota_X \omega = a dy - b dx$, que es evidentemente cerrada, y por lo tanto X es localmente hamiltoniano. Sin embargo, X no es hamiltoniano globalmente: si $X = X_H$, de la compacidad de T^2 se sigue que H tiene, por ejemplo, un máximo local y allí se anula su diferencial, mientras que $\iota_X \omega$ nunca es cero.

Si (M, ω) es una variedad simpléctica, puede definirse en ella lo que llamaremos corchetes de Poisson. Éstos ya aparecían en los textos clásicos de mecánica y resultaban de gran utilidad; el concepto se ha generalizado bastante desde entonces.

Definición 19. Sea (M, ω) una variedad simpléctica. Si $f, g \in C^\infty(M)$, el corchete de Poisson entre f y g es, por definición, el elemento de $C^\infty(M)$ dado por

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g). \quad (3.13)$$

Notemos que esto es igual a $-\iota_{X_f} \iota_{X_g} \omega$ y también a $X_f(g)$.

Observemos que de la antisimetría de ω sigue que $\{f, g\} = -\{g, f\}$ cualesquiera sean $f, g \in C^\infty(M)$. La siguiente propiedad ilustra la utilidad de los corchetes de Poisson en la consideración de constantes de movimiento, esto es, en las funciones a valores reales que son constantes en las trayectorias del sistema.

Proposición 20. Sea (M, ω) una variedad simpléctica y $f, g \in C^\infty(M)$.

(i) Es $\{f, g\} = \mathcal{L}_{X_f} g = -\mathcal{L}_{X_g} f$.

(ii) Si $h \in C^\infty(M)$, la aplicación $\mathfrak{g} \mapsto \{h, g\}$ es una derivación en $C^\infty(M)$.

(iii) Como consecuencia de lo anterior, f es constante en las curvas integrales de X_g si y sólo si $\{f, g\} = 0$.

Demostración. Para el primer inciso, observemos que $\mathcal{L}_{X_f}g = \iota_{X_f}dg = -\iota_{X_f}\iota_{X_g}\omega$, esto último es el corchete entre f y g . El segundo es consecuencia directa del primero.

Para el último, sea ϕ_t el flujo del campo X_f . Se tiene

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (g \circ \phi_t) = \phi_t^* \mathcal{L}_{X_f}g = \phi_t^* \{f, g\}.$$

El lado derecho se anula sólo cuando $\{f, g\}$, y el lado izquierdo se anula si y solo si $g \circ \phi_t$ es constante en t , i.e., si g es constante en las trayectorias de X_f . \square

Debido a la antisimetría del corchete de Poisson, se tiene que f es constante en las curvas integrales de X_g si y sólo si g lo es en las de X_f . Se deduce, también de la antisimetría, que en un sistema hamiltoniano el hamiltoniano es constante en las trayectorias del sistema.

Ejemplo 21. Si $f, g \in C^\infty(M)$, escribamos la expresión de su corchete de Poisson en coordenadas canónicas $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$. Era $\{f, g\} = X_f(g)$ y usando la expresión (3.12) obtenemos

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i},$$

lo que coincide con la expresión usual del corchete de Poisson que aparece en los textos clásicos de mecánica —a menos, depende de las convenciones, de un signo—.

El corchete de Poisson puede utilizarse también para escribir las ecuaciones de movimiento sin mencionar explícitamente a la forma simpléctica. En algún punto, esto es una motivación para considerar sistemas dinámicos cuyas ecuaciones de movimiento estén dadas por expresiones como las que siguen, pero que el corchete de Poisson no provenga de una forma simpléctica. Más aún, existe la noción de álgebra de Poisson, que consiste de un álgebra asociativa sobre un anillo conmutativo equipada con una estructura de Lie que es una derivación en cada coordenada: $C^\infty(M)$ es un álgebra de Poisson sobre \mathbb{R} .

Proposición 22. Sean (M, ω, H) un sistema hamiltoniano, y ϕ_t el flujo del campo X_H . Entonces, si $f \in C^\infty(M)$, es

$$\left. \frac{d}{dt} (f \circ \phi_t) = \{H, f \circ \phi_t\}. \quad (3.14)$$

Demostración. Es, en virtud de la relación entre el flujo de un campo y la derivada de Lie respecto de él,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} (f \circ \phi_t) &= \left. \frac{d}{dt} \phi_t^* f = \phi_t^* \mathcal{L}_{X_H} f = \right. \\ &= \mathcal{L}_{X_H}(f \circ \phi_t) = \{H, f \circ \phi_t\}, \end{aligned}$$

como queríamos probar. \square

Para terminar la sección, observemos que el corchete que definimos satisface la llamada *identidad de Jacobi*: es, si $f, g, h \in C^\infty(M)$,

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{h, f\}, g\} + \{\{g, h\}, f\} = 0.$$

Puede encontrarse en [5], [2] o [1] una prueba de esta afirmación. Como consecuencia, se tiene que $C^\infty(M)$ junto con el corchete es un álgebra de Poisson.

4. Integrabilidad Liouville

Daremos en lo siguiente una definición de integrabilidad de sistemas hamiltonianos. Es cierto que cuanto más constantes de movimiento moralmente independientes tenga un sistema hamiltoniano, más condicionada estará su dinámica y ciertamente será más accesible encontrar sus trayectorias. El teorema clave de esta sección, el de Liouville-Arnold, da condiciones suficientes para encontrar

las trayectorias del sistema a menos de cuadraturas; un sistema hamiltoniano que esté en las hipótesis del teorema se dirá integrable Liouville. Según comenta Arnold, *¡¡el teorema cubre todos los problemas de dinámica que han sido integrados hasta el presente día!!* [2, pág 273]. Por supuesto no daremos una demostración de esta altisonante afirmación; sí algunos ejemplos donde se aplica el teorema, ni bien lo hayamos formulado.

Sean (M, ω) una $2n$ -variedad simpléctica, $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ suave y X_H su campo hamiltoniano asociado; notemos al sistema hamiltoniano así determinado (M^{2n}, ω, H) .

Definición 23 (Integrabilidad Liouville). El sistema hamiltoniano es integrable Liouville si existen funciones $f_1, \dots, f_n \in C^\infty(M)$ tales que

1. f_1, \dots, f_n son integrales de X_H , es decir, son constantes a lo largo de sus curvas integrales;
2. f_1, \dots, f_n son independientes: $\{df_i(x)\}_{i=1}^n$ es linealmente independiente para todo x en M ;
3. $\{f_i, f_j\} = 0$ para cualesquiera i, j ; y, por último,
4. Los campos $X_i := \omega^\sharp(df_i) \in \mathfrak{X}(M)$ son completos: sus curvas integrales tienen dominio \mathbb{R} .

La descomposición de M^{2n} en componentes conexas de las superficies de nivel de $f = (f_1, \dots, f_n)$ se llama la foliación de Liouville correspondiente al sistema integrable X_H , y a la postre resulta no depender de f . En efecto, esto sigue de que cada una de estas componentes conexas puede obtenerse como la clausura de la unión de las imágenes de las trayectorias que allí empiezan. El teorema de Liouville describe la estructura de la foliación de Liouville cerca de hojas regulares, que son la preimagen de valores regulares. Vale aclarar o recordar que $c \in \mathbb{R}^n$ es un valor regular de f si $\{df_i(x)\}_{i=1}^n$ es linealmente independiente para cada $x \in M_c = f^{-1}(c)$.

Teorema 24 (Liouville-Arnold). *Fijemos (M^{2n}, ω, H) un sistema hamiltoniano integrable Liouville y sea M_c una hoja de $f = (f_1, \dots, f_n)$. Entonces*

1. M_c es una variedad de dimensión n , Lagrangiana ($\omega = 0$ allí) e invariante respecto a X_i para todo i ;
2. y si M_c es conexo y compacto, entonces es difeomorfo a T^n , el llamado toro de Liouville.
3. La foliación de Liouville es trivial en un entorno del toro de Liouville: existe un entorno U de M_c que es difeomorfo a $T^n \times D^n$ por un difeomorfismo que preserva las hojas, y más aún:
4. en $U = T^n \times D^n$ hay un sistema de coordenadas, las variables ángulo-acción $s_1, \dots, s_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n$, donde las primeras son coordenadas en el disco y las últimas en el toro, tales que

$$(a) \quad \omega = \sum d\varphi_i \wedge ds_i,$$

(b) las variables de acción dependen exclusivamente de f , y

(c) el flujo de X_H en las coordenadas ángulo-acción se endereza: las derivadas de s_i y de φ_i son nulas y constantes, respectivamente.

Ejemplo 25. Consideremos el caso de una partícula que se puede mover en una sola dirección sujeta a la acción de un potencial $V = V(x)$, que depende sólo de la distancia a un punto fijo. El espacio de configuraciones es de dimensión 1, el fibrado cotangente de dimensión 2, y se tiene una constante de movimiento, la energía. Supongamos que V tiene la pinta de la Figura 1. A energía constante, el movimiento será oscilatorio: las hojas M_c son difeomorfos al toro de dimensión 1.

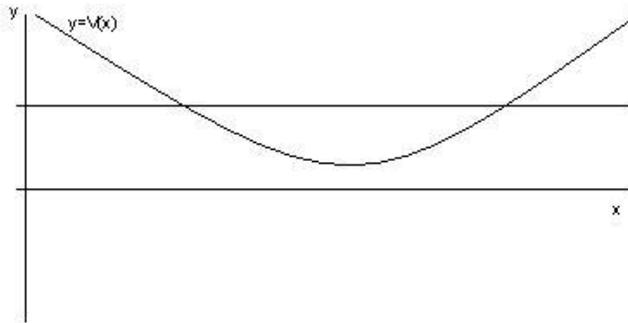


Figura 1: Primer potencial

Consideremos ahora el caso de la Figura 2. Aquí, si la energía tiene valores no negativos, M_{E_1} será difeomorfo a \mathbb{R} y si no, M_{E_2} lo será al toro de dimensión 1.

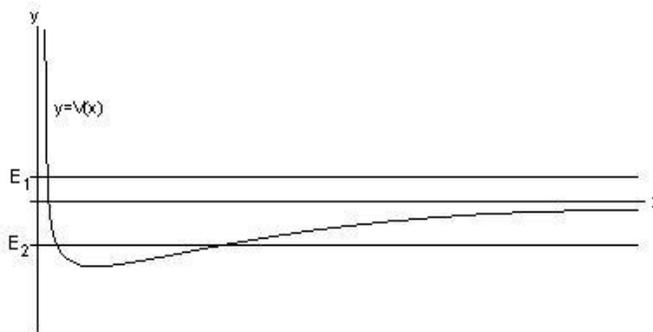


Figura 2: Segundo potencial

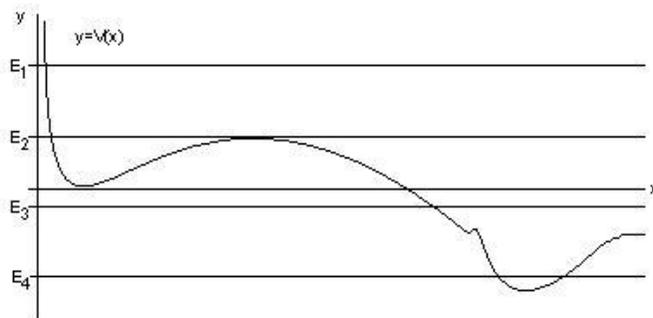


Figura 3: Tercer potencial

Por último, miremos el potencial de la Figura 3. Las hojas aquí no son todas conexas, y, dependiendo de cuál es el valor de la energía, algunas componentes conexas son difeomorfas al toro y otras a \mathbb{R} .

Ejemplo 26. Si en un sistema hamiltoniano (M^{2n}, ω, h) con $n = 2$ —que en el caso mecánico corresponde a un sistema con espacio de configuraciones de dimensión 2, *i.e.*, de dos grados de libertad— se tiene una constante de movimiento independiente del hamiltoniano, entonces

el sistema es integrable por cuadraturas. Por ejemplo, los problemas de fuerzas centrales, que consisten en dos partículas interactuando entre sí con fuerzas en la dirección que las une, la posición del sistema se describe dando la posición del centro de masa y el vector que une a las dos partículas; se conservan el momento angular y la energía: son entonces integrables. Famosos son los casos en que la fuerza es de gravedad o elástica. La coordenada angular se moverá en un toro de dimensión 1 y, de hecho, puede verse que pasando al potencial efectivo, la coordenada radial puede estudiarse mirando gráficos de potencial como en el ejemplo anterior.

Ejemplo 27. El conocido *trompo de Lagrange* es un trompo simétrico fijado en O , y sujeto a la acción de la fuerza de gravedad mg , como muestra la Figura 4.

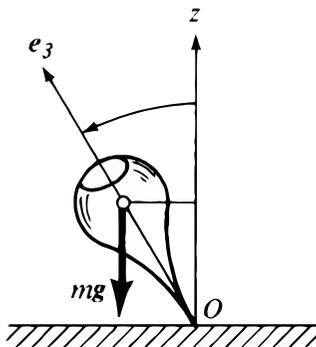


Figura 4: El trompo de Lagrange

Se tienen tres constantes de movimiento: primero, el hamiltoniano, que es la energía; segundo y tercero, las proyecciones del momento angular en los ejes z y e_3 , que llamaremos M_z y M_3 —esto se debe a la simetría de rotación del trompo alrededor de cada eje, como puede verse con el Teorema de Noether, pero también puede verificarse haciendo la cuenta a mano—. Puede verificarse que estas constantes de movimiento están en involución. Más aún, las superficies de nivel del hamiltoniano H son compactas. Se tiene entonces, por el Teorema 24, que para todas las condiciones iniciales que no degeneran (h, M_z, M_3) —que son, según Arnold, ¡la mayoría!— el movimiento del trompo es periódico en las tres coordenadas angulares: las trayectorias en el espacio de fases suceden en el toro tridimensional dado por $(H, M_z, M_3) = cte$; las correspondientes tres frecuencias se llaman frecuencias de revolución, precesión y nutación.

Referencias

- [1] R. ABRAHAM Y J. MARSDEN, *Foundations of Mechanics*, Addison–Wesley, 1978.
- [2] V. I. ARNOLD, *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer, 1989.
- [3] H. GOLDSTEIN, *Classical mechanics*, Addison–Wesley, 1980.
- [4] S. GRILLO, *Introducción a la Mecánica Lagrangiana y Hamiltoniana*, III Encuentro de Geometría Diferencial, La Falda, Agosto 06–11, 2007.
- [5] P. LIBERMANN Y C.M. MARLE, *Symplectic geometry and analytical mechanics*, Springer, 1987.
- [6] J. E. MARSDEN AND A. WEINSTEIN, *Reduction of symplectic manifolds with symmetry*, Reports on Mathematical Physics **5** (1974), 121–130.
- [7] F. O. MINOTTI, *Apuntes de Mecánica Clásica*, disponible en <http://www.lfp.uba.ar/minotti/mecanica/cursomec.pdf>.