

UDK 330.115

Prethodno priopćenje

Prilježeno 10. listopada 1988.

**Dr. MILENA JOVIČIĆ,**  
Ekonomski fakultet Beograd

## UVOD

# EKONOMETRIJSKO OCENJIVANJE PRODUKTIVNOSTI LJUDSKOG I TEHNIČKOG FAKTORA\*

*Merenje produktivnosti faktora proizvodnje omogućava određivanje njihovog vrednosnog doprinosa ukupnoj proizvodnji, što ima izuzetan ekonomski značaj. Tradicionalna ekonomska teorija predstavlja proizvodnu funkciju uz pretpostavku da postoje dva utroška (rad i kapital), koji su kontinuelno varijabilni i supstitabilni u svakoj vrednosti funkcije. Zbog toga se proizvodna funkcija koristi za izražavanje efikasnosti proizvodnih mogućnosti na bazi tokova uloženog rada i usluga postojećeg kapitalnog stoka, pri čemu se pretpostavlja da su problemi tehnološke maksimizacije već rešeni.*

Merenje produktivnosti faktora proizvodnje odavno je okupiralo pažnju ekonomista. Jer dok je njihova optimalna kombinacija problem tehnološke prirode, određivanje njihovog vrednosnog doprinosa ukupnoj proizvodnji pitanje je od velikog ekonomskog značaja.

Tradicionalna ekonomska teorija predstavlja proizvodnu funkciju uz pretpostavku da postoje dva utroška — rad i kapital — koji su kontinuelno varijabilni i supstitabilni u svakoj vrednosti funkcije. Proizvodnja se, kao rezultat upotrebe tih utrošaka, posmatra (uz pretpostavku tehnološke optimizacije) kao jedinstvena maksimalna količina proizvoda pod datim uslovima, za svaku kombinaciju proizvodnih utrošaka.

Proizvodna funkcija prema tome predstavlja efikasne proizvodne mogućnosti na bazi tokova uloženog rada i usluga postojećeg kapitalnog stoka, pri čemu se pretpostavlja da su problemi tehnološke maksimizacije već rešeni. Zato se u dobijanju empirijskih ocena parametara proizvodne funkcije moraju koristiti ne podaci o postojećim količinama, već efektivno korišćenim nivoima proizvodnih utrošaka.

Svođenje svih proizvodnih utrošaka na samo dva (rad i kapital) predstavlja veliko pojednostavljenje, čak i uz pretpostavku da se svi proizvodni faktori zaista i mogu svesti na samo ova dva, jer postoje različiti vidovi ta dva faktora korišćena u proizvodnji. Ni sve vrste korišćenog kapitala ni sve vrste uloženog rada nisu homogene i teško ih je agregirati. Njihovo agregiranje bilo bi opravdano samo pod uslovom da je marginalna stopa supstitucije između bilo koje vrste jednog od tih faktora nezavisna od svake vrste drugog faktora, kao i pod uslovom da su ti agregati linearne homogene funkcije različitih podvrsta.<sup>1</sup> Zato se problemi agregacije javljaju već u okviru jednog preduzeća, a posebno u slučaju različitih vrsta proizvodnje, ili na još višem stepenu agregacije.

Osim ova dva faktora proizvodnje, ponekad se u primeni proizvodne funkcije u poljoprivredi kao nezavisni faktor tretira i zemljište, mada u opštem slučaju proiz-

\* Rad predstavlja dio istraživačkih rezultata potprojekta »Zakon vrijednosti u funkciji upravljanja razvojem«, kojeg kao dio projekta »Fundamentalna istraživanja u ekonomiji« financira SIZ znanosti SR Hrvatske u razdoblju 1987-1990. godine.

1) Videti o tome: Wallis, K.F.: *Topics in Applied Econometrics*, Gray-Mills Publishing, London 1973.

vodne funkcije može biti i više proizvodnih uložaka, a ponekad se u funkciju eksplicitno uključuje i neopredmećeni tehnički progres. No najčešće se tehnološkom progresu pripisuje rezidualni deo funkcije.

Budući da je proizvodna funkcija rezultat tehnoloških ograničenja, ona se ne može koristiti za testiranje ekonomskih hipoteza. Naime, stvarne opservacije su rezultat ekonomskih odluka u kojima je proizvodna funkcija samo jedno ograničenje. Stoga se ona koristi, uz teoriju marginalne produktivnosti, da obezbedi objašnjenje faktorskih cena i optimalne nivoa faktorskih uložaka i tako na makroekonomskom nivou igra centralnu ulogu u analizi rasta i raspodele. Međutim, na mikro nivou, problemi mogućnosti supstitucije i ekonomije obima otežavaju korišćenje proizvodne funkcije.

Raspoloživi podaci potrebni za ocenu parametara proizvodne funkcije na mikro nivou daju osnov za ocenu redukovane forme i otvaraju problem identifikovanosti funkcije, koja je samo jedna od jednačina šireg modela simultanih relacija. Cene, kapital, rad i proizvodnja determinišu se sistemom simultanih jednačina i nijedna od ovih varijabli ne može se posmatrati kao egzogeno data.

Proizvodna funkcija, prema tome, neće biti identifikovana ako se na primer uslovi marginalne produktivnosti ne mogu razdvojiti od nje.

Pretpostavlja se da je linija iste proizvodnje za različite kombinacije uložaka (izokvanta) konveksna — da marginalna stopa supstitucije opada pri većoj supstituciji jednog faktora drugim. (Pri smanjenju uložka jednog faktora, potrebno je sve više jedinica drugog faktora da nadoknadi smanjenje za jednu jedinicu uložka prvog faktora, da bi se proizvodnja održala nepromenjenom). Zato proporcionalna promena odnosa uložaka kao rezultat proporcionalne promene marginalne stope supstitucije mora biti pozitivna. Taj se odnos naziva elastičnost supstitucije:

$$(1.5) \quad \sigma = d \log (K/R) / d \log S > 0$$

i meri lakoću supstitucije među proizvodnim faktorima.

Kad elastičnost supstitucije iznosi nula, nije moguća supstitucija (faktori se kombinuju u fiksnoj proporciji), a što je veća vrednost elastičnosti supstitucije, to je lakša supstitucija među faktorima.

Za proizvodnu funkciju se po pravilu pretpostavlja da je homogena funkcija, naime da je porast proizvodnje proporcionalan porastu faktora, te da ne može doći do

(veće) proizvodnje bez (porasta) uložaka faktora. Pretpostavimo da se i rad i kapital povećaju nekim umnoškom, onda će proizvodnja porasti prema

$$(1.6) \quad f(hK, hR) = h^n f(K, R) = h^n P,$$

gde  $n$  predstavlja stepen homogenosti funkcije, naime stepen ekonomije obima, ili elastičnost razmere. Kad je  $n=1$ , prinosi ekonomije obima su konstantni (povećanje uložaka rezultira u povećanju proizvodnje u istom procentu), a rastući ili opadajući prinosi su označeni vrednošću  $n$  većom ili manjom od 1 (kad povećanje uložaka u određenom procentu dovodi do povećanja proizvodnje u većem, odnosno manjem procentu).

Važna osobina homogene funkcije data je Eulerovom teoremom, po kojoj je suma marginalnih proizvoda faktora ponderisanih količinama, faktora jednaka proizvodu pomnoženom stepenom homogenosti funkcije:

$$(1.7) \quad P' (K) K + P' (R) R = nP.$$

U slučaju linearne homogenosti proizvodne funkcije ( $n=1$ ), dakle u slučaju konstantnih prinosa, ako se faktori plaćaju u visini svojih marginalnih produktivnosti, time se upravo iscrpljuje proizvodnja, i nema ni gubitka ni viška proizvoda.

Linearna homogena proizvodna funkcija se može izraziti u »per capita« obliku, kao funkcija samo jedne varijable:

$$(1.8) \quad P/R = f (K/R, R/R).$$

Označimo sa  $k = K/R$  kapitalnu opremljenost rada, a sa  $p = P/R$  produktivnost rada (proizvod po radniku ili radnom času); onda se gornji izraz svodi na:

$$(1.9) \quad p = f (k),$$

odnosno na predstavljanje prosečnog proizvoda (po radniku) kao funkcije prosečne opremljenosti rada kapitalom. Budući da je odnos kapitala i rada determinisan tehnologijom, ovakva funkcija se može ocenjivati na uporedivim podacima u jednom vremenskom trenutku, ili na vremenskim serijama, ali uz uključivanje tehnološkog progressa.

U literaturi su obrađivani različiti oblici proizvodnih funkcija.<sup>2</sup> Ponekad se dele u grupe prema ekonomiji obima kao kriterijumu (na primer: funkcije sa opadajućim prinosima, funkcije sa sukcesivno rastućim i opadajućim prinosima). Ali daleko najpoznatija klasa proizvodnih funkcija su funkcije sa konstantnom elastičnošću supstitu-

2) Širi pregled daje Horvat, B.: *Ekonomska analiza, Proizvodnja i tehnološki progres*, PFV »Oekonomica«, Beograd 1972.

cije. Među funkcijama sa konstantnom elastičnošću supstitucije, izdiferencirane su funkcija sa nultom, jediničnom i konstantnom elastičnošću različitim od nule ili jedinice.

Kada se elastičnost supstitucije smatra konstantnom, to znači da se ona ne menja usled promena u relativnim količinama uložaka proizvodnih faktora ili usled promena u faktorskim cenama. Međutim, promene tehnologije proizvodnog procesa menjaju elastičnost supstitucije za svaki nivo faktorskih uložaka ili cena.

Nultu elastičnost supstitucije ima funkcija Leontiefa. Nju karakteriše fiksna proporcija uložaka faktora, tako da je za datu veličinu proizvodnje nivo faktora jedinstveno određen i supstitucija među njima je nemoguća. Primena ove funkcije je vrlo oskudna, zbog nerealnog ograničenja, osim u slučaju istraživanja na mikro nivou, kad na primer optimalna upotreba konkretne mašine zahteva fiksiran broj radnika (recimo dva).

Jedinična elastičnost supstitucije karakteriše Cobb-Douglasovu proizvodnu funkciju, a konstantna elastičnost supstitucije CES proizvodnu funkciju.

## 2. Cobb-Douglasova proizvodna funkcija (CD)

Funkciju za koju je karakteristična jedinična elastičnost supstitucije definisali su još pre pola veka Cobb i Douglas<sup>3</sup>. Njen oblik je multiplikativan:

$$(2.1) P = AK^a R^b$$

a stepen homogenosti je  $a+b$ , jer je

$$f(hK, hR) = A (hK)^a (hR)^b = h^{a+b} AK^a R^b = h^{a+b} P.$$

Otuda funkcija označava konstantne prinose ako je zbir eksponentata  $a+b$  jednak jedinici. Tada se proizvodnja po radniku može predstaviti kao sledeća funkcija kapitalne opremljenosti rada:

$$(2.2) p = Ak^a,$$

gde je  $p = P/R$ ,  $k = K/R$ .

Marginalni proizvodi rada i kapitala dobijaju se kao parcijalni izvodi funkcije s obzirom na relevantne argumente:

$$(2.3) P'(R) = bAK^a R^{b-1} = b(P/R); \\ P'(K) = aAK^{a-1} R^b = a(P/K).$$

Otuda su elastičnosti proizvodnje s obzirom na kapital i rad:

$$(2.4) P'(K)/(P/K) = a; P'(R)/(P/R) = b.$$

Zato, u slučaju da je  $a < 1$ , marginalni proizvod kapitala opada sa porastom kapitalne opremljenosti rada  $k$ .

Marginalna stopa supstitucije kapitala radom je

$$(2.5) S = P'(R)/P'(K) = b(P/R)/a(P/K) = (b/a)/(K/R),$$

a elastičnost supstitucije

$$(2.6) \sigma = d \log(K/R) / d [\log(b/a) + \log(K/R)] = 1.$$

### 2.1 Problem optimizacije

Pri rešavanju problema minimiziranja troškova (uz zadate cene faktora:  $i$  — cena kapitala i,  $w$  — nadnica, lični dohodak radnika po radnom času), pod ograničenjem zadate proizvodne funkcije, Lagrangeova funkcija

$$L = iK + wR - \mu [P - F(K, R)]$$

za postizanje minimuma troškova daje uslove prvog reda:

$$(2.7) L'(K) = i + \mu F'_K = 0; \\ L'(R) = w + \mu F'_R; P = F(K, R).$$

Odatle, deljenjem prve dve jednačine, optimalno rešenje se dobija pri izjednačenju marginalne stope supstitucije sa odnosom faktorskih cena:

$$(2.8) F'_K/F'_R = i/w,$$

a elastičnost supstitucije je data kao procentualna promena kapitalne opremljenosti rada usled jednogprocentne promene odnosa faktorskih cena:

$$\sigma = d \log(K/R) / d \log(w/i).$$

Za Cobb-Douglasovu funkciju, iz izraza za marginalnu stopu supstitucije (2.5) i uslova (2.8) sledi:

$$(b/a)/(K/R) = w/i,$$

odakle je

$$R = [(b/a)/(i/w)] K$$

što zamenjujući u proizvodnu funkciju daje vrednosti uložaka koje minimiziraju troškove ( $n = a+b$ ):

$$(2.9) K = (P/A)^{1/n} [(b/a)(i/w)]^{-b/n} \\ R = (P/A)^{1/n} [(a/b)(w/i)]^{-a/n}$$

i funkciju troškova koja se može iskazati u linearnom logaritamskom obliku:

$$(2.10) \log T = \log C + (1/n) \log P + (a/n) \log i + (b/n) \log w$$

gde je konstanta  $C = n(Aa^a b^b)^{-1/n}$ .

Ako se cena proizvoda označi sa  $c$ , problem maksimiranja profita uz ograničenje proizvodne funkcije rešava se preko Lagrangeove funkcije

3) Cobb C. W. — Douglas, P.: »A. Theory of Production«, *American Economic Review* (suppl.), vol. 18, 1928.

$$L = cP - iK - wR - \mu [P - F(K,R)]$$

sa uslovima prvog reda:

$$(2.11) \quad p = \mu, \quad \mu F'K = i, \quad \mu F'R = w,$$

odakle se pod pretpostavkom konstantnih prinosa dobijaju takozvani uslovi marginalne produktivnosti — za svaki proizvodni faktor, vrednost marginalnog proizvoda mora biti jednaka faktorskoj ceni:

$$(2.12) \quad w = c (bP)/R, \quad i = c (aP)/K.$$

Otuda, eksponenti originalne funkcije (2.1) a i b mogu se interpretirati kao udeli kapitala i rada u vrednosti proizvodnje:

$$(2.13) \quad a = iK/cP, \quad b = wR/cP.$$

Njihovo je, dakle, značenje višestruko; parametri a i b označavaju: a) elastičnost proizvodnje s obzirom na relevantni proizvodni faktor, b) udeo odnosnog proizvodnog faktora u vrednosti proizvodnje i c) zbir a+b predstavlja elastičnost razmera — stepen ekonomije obima.

## 2.2 Problemi ocenjivanja na uporednim podacima

Proizvodna funkcija i uslovi marginalne produktivnosti, pisani u logaritamskom obliku, daju linearni sistem relacija:

$$(2.14) \quad \begin{aligned} \log P_j - a \log K_j - b \log R_j - \log A &= \log u_{1j} \\ \log P_j - \log K_j - \log(i/c) + \log a &= \log u_{2j} \\ \log P_j - \log R_j - \log(w/c) + \log b &= \log u_{3j} \end{aligned}$$

U svaku jednačinu uključen je i stohastički član (greška jednačine) da označi slučajna odstupanja od utvrđene prosečne zavisnosti. U proizvodnoj funkciji greška  $u_{1j}$  predstavlja razlike u tehničkoj ili proizvodnoj efikasnosti pojedinih opservacija (u slučaju uporednih podataka j označava j-tog proizvođača). Greške  $u_{2j}$  i  $u_{3j}$  označavaju slučajne razlike pojedinih opservacija u ekonomskoj efikasnosti — uspešnosti u postizanju uslova marginalne produktivnosti (ako nije zadovoljeno  $u_{2j} = u_{3j} = 1$  ne postiže se maksimum profita).

Da bi se iz strukturne forme mogli dobiti koeficijenti redukovane forme, potrebno je da matrica parametara B uz endogene varijable modela ( $\log P$ ,  $\log K$ ,  $\log R$ ) bude nesingularna. A budući da je determinanta ove matrice:

$$\begin{vmatrix} 1 & -a & -b \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 - (a+b)$$

to je očigledno da u slučaju konstantnih prinosa ( $a+b=1$ ) ne možemo dobiti rešenja, jer ne postoji inverzna matrica  $B^{-1}$ . U stvari, moguće je pokazati<sup>4</sup> da uslov drugog reda za minimiziranje troškova zahteva da prinosi budu opadajući ( $a+b < 1$ ), a takođe i uslovi drugog reda za maksimiranje profita.<sup>5</sup>

Štaviše, ako se cene tretiraju kao konstantne vrednosti, umesto kao egzogene varijable (ako se smatraju varijablama morale bi da se razlikuju od opservacije do opservacije, što nije odlika perfektne konkurencije), onda se proizvodna funkcija ne može identifikovati, jer se u statističkom smislu ne razlikuje od linearne kombinacije druge dve funkcije. Uslovi marginalne produktivnosti (druge dve funkcije sistema) identifikovani su po uslovu reda, jer svaki isključuje po jednu endogenu varijablu sistema i uvodi još po jedno linearno homogeno ograničenje na parametre.

Da bi se postigla identifikovanost proizvodne funkcije, bilo bi potrebno dodati nove egzogene varijable u druge dve funkcije sistema, ili uvesti nova ograničenja. Jedna mogućnost je dozvoliti da cene faktora variraju po opservacijama (napuštanje pretpostavke o potpuno slobodnoj konkurenciji). Druga je uključiti u uslov marginalne produktivnosti kapitala i nivo kapitalnog stoka sa početka perioda (prema teoriji delimičnog prilagođavanja, jer se promena investicija ne odvija trenutno i potpuno). Naravno, to bi onda zahtevalo uključivanje vremenskih serija u analizu.

Treća je mogućnost uvesti pretpostavku o striktnoj nezavisnosti tehničke i ekonomske efikasnosti (slučajnih komponenta jednačina), tako da se statistički može razlikovati prva jednačina sistema od linearne kombinacije druge dve, usled uvedenog ograničenja na greške jednačina.

S druge strane, pod izvesnim uslovima, kao što je to na primer slučaj sa proizvodnjom električne energije, ili drugih »javnih usluga«, kad se proizvodnja ne može pretvarati u zalihe već zavisi od tražnje i drugih uslova eksternih za proizvođača, nivo proizvodnje se ne tretira kao endogena, već predeterminisana varijabla,<sup>6</sup> pa se više ne postavlja pitanje identifikovanosti proizvodne funkcije.

Ocenjivanje parametara vrednosnog udela rada (b) može se vršiti i iz jednačine

4) Cramer, J.S.: *Empirical Econometrics*, North-Holland, Amsterdam 1969.

5) Wallis, K.F., op. cit., str. 35-38.

6) Nerlove, M.: Returns to Scale in Electricity Supply, u knjizi: Zellner, A. Ed.): *Readings in Economic Statistics and Econometrics*, Little & Brown Boston 1968.

uslova marginalne produktivnosti (2.12), što zahteva ocenjivanje stohastičke funkcije:

$$b(P_j/R_j) = (w/c) u_{3j} \quad j = 1, 2, \dots, N$$

Po logaritmovanju funkcije

$$\log b = \log [(wR_j)/cP_j] + \log u_{3j}$$

moguće je primeniti linearnu ocenu; ali za N opservacija  $\log b$  se može dobiti kao prosek:

$$(2.15) \log b = (1/N) \Sigma \log [(wR_j)/cP_j]$$

što predstavlja nepristrasnu i konzistentnu ocenu (ako je očekivana vrednost greške jednačine jednaka nuli).<sup>7</sup>

U stvari, ocena parametra  $b$  (kao antilog ocenjenog proseka) predstavlja geometrijsku sredinu udela rada u ukupnoj vrednosti proizvodnje u uzorku:

$$b = \sqrt[N]{\pi [(wR_j)/cP_j]}$$

Pretpostavka od koje se ovde polazi je da su marginalni proizvod rada i nivo nadnice izjednačeni, tako da je pitanje nagrađivanja rada besmisleno testirati. Ocene parametara  $a$  i  $b$  davaće sumu blisku jedinici,<sup>8</sup> ako se podaci formiraju prema računovodstvenoj konvenciji raspodele ukupne vrednosti proizvodnje na kapital i rad. Zato je korišćenje ovakvog računovodstvenog identiteta za ocenu, recimo, optimalnog nivoa kapitala kao proizvodnog utroška, novi problem identifikacije.

### 2.3 Problemi korišćenja vremenskih serija

Svoju popularnost Cobb-Douglasova proizvodna funkcija duguje velikom broju studija zasnovanih na vremenskim serijama,<sup>9</sup> u kojima se potvrđivala sa visokom statističkom značajnošću. Najčešće su ocenjene vrednosti parametara  $a$  i  $b$  davale zbir nesignifikantno različit od jedan, a funkcija u per capita obliku ocenu parametra sa znatno manjom standardnom greškom ocene, jer je izbegnuta multikolinearnost u funkciji (dva proizvodna faktora svedena na jednu eksplanatornu varijablu, odnos proizvodnih faktora).

7) Postupak je predložio Klein, L.R.: *A Textbook of Econometrics*, Row & Peterson, Evanston Ill., 1953, str. 226-236.

8) U stvari, korišćenje geometrijske sredine u oceni parametara  $a$  i  $b$ , davaće njihovu sumu nešto ispod jedinice, kako je pokazao Walters, A.A.: »Production and Cost Functions: An Econometric Survey«, *Econometrica*, Vol. 31/1963., str. 1-66.

9) Počevši od studije samog Douglasa, P.H.: »Are there laws of Production?«, *American Economic Review*, Vol. 38/1948., str. 1-41, u kojoj je »potvrđena« pretpostavka o konstantnim prinosima, i druga istraživanja su davala zaključke o jakoj regresionj vezi ove vrste na drugi rok.

Linearna aproksimacija Cobb-Douglasove funkcije, dobijena logaritmovanjem originalnog izraza, uz uključivanje stohastičkog člana koji predstavlja slučajna odstupanja u pojedinim periodima  $t$  od prosečne relacije, data je izrazom:

$$(2.16) \log P_t = \log A + a \log K_t + b \log R_t + u_t$$

Predstavljajući varijable kao centrirane vrednosti, obeležene malim slovom da označe vrednosti u pojedinačnim periodima merene odstupanjima od uzoračke aritmetičke sredine ( $\log p_t = \log P_t - \log P = \log [P_t/P]$ ), gde vrednost bez vremenskog indeksa označava prosek u uzorku), dobija se:

$$(2.17) \log(P_t/P) = a \log(k_t) + b \log(r_t) + (w_t + u_t)$$

pretpostaviti nepromenljive odnose cena, Leva strana ovog izraza može se pisati kao

$$(2.18) \log(P_t/P) = \log[1 + (P_t - P)/P]$$

A kako je moguće izraz  $\log(1+x)$  pojednostaviti:

$$\log(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - \dots \approx x, \quad -1 < x < 1$$

za male vrednosti  $x$ , jer svi članovi osim prvog u navedenoj seriji teže nuli zbog eksponenta većeg od 1, to se i izraz (2.18) može pisati aproksimativno

$$\log [1 + (P_t - P)/P] \approx P_t/P - 1,$$

tako da jednačina (2.17) postaje

$$(2.19) (P_t/P) - 1 = a [(K_t/K) - 1] + b [(R_t/P) - 1]$$

a proizvodnja se može predstaviti<sup>10</sup>:

$$(2.20) P_t = a (P/K) K_t + b (P/K) R_t + (1 - a - b) P.$$

S druge strane, budući da je realno pretpostaviti nepromenljive odnose cena, podaci zadovoljavaju istovremeno i računovodstveni identitet:

$$(2.21) P_t = (i/c) K_t + (w/c) R_t$$

tako da se može očekivati da je ispunjeno:

$$(2.22) i/c = a (P/K), \quad w/c = b (P/K), \\ 1 - a - b = 0.$$

Otuda se može očekivati da ocenjene elastičnosti proizvodnje s obzirom na rad i kapital, iz proizvodne funkcije, budu pri-

10) Prema: Wallis, K.F., op. cit., str. 46-48.

bližno iste ocenjenim faktorskim udelima u vrednosti proizvodnje, iz uslova marginalne produktivnosti ( $a \approx iK/cP$ ,  $b \approx wR/cP$ ), kao i da ocenjeni parametri pokazuju neznatno odstupanje od konstantnih prinosova. Ovo naravno stoga što se postavljena regresiona funkcija ne može razdvojiti od računovodstvenog identiteta.

Prema tome, visoko značajni statistički rezultati na osnovu kojih se može zaključiti da su konstantni prinosi, preovlađujući u većini proizvodnih grana, u velikom broju studija i na bazi dugoročnih vremenskih serija, samo su rezultat ocenjivanja računovodstvenog identiteta, umesto nezavisne proizvodne funkcije, koja bi se mogla identifikovati nezavisno od uslova marginalne produktivnosti.

#### 2.4 Uvođenje tehničkog progressa

Umesto konstantnog koeficijenta  $A$  kojim se predstavlja uticaj postojeće tehnologije u proizvodnoj funkciji (2.1), promene u tehnologiji do kojih dolazi tokom vremena, a koje se odražavaju kao pomaci proizvodne funkcije (za razliku od pomeranja pozicije duž proizvodne funkcije, usled promene kombinacije utrošaka), predstavljaju se kao funkcija vremena:

$$(2.23) \quad P_t = A(t) K_t^a R_t^b.$$

U pitanju je takozvani neopredmećeni tehnički progres (za razliku od opredmećenog, do koga dolazi usled novog investiranja u kapital ili rad, te uvođenja produktivnijih — nehomogenih jedinica proizvodnih faktora).

Osim toga, tehnički progres neutralan u Hicksovom smislu podrazumeva da promena tehnologije ne utiče na marginalnu stopu supstitucije, odnosno ne menja optimalnu proporciju faktorskih utrošaka, osim u slučaju promene odnosa faktorskih cena. Ne-neutralni tehnički progres, nasuprot tome, dovodi do povećanja marginalnog proizvoda jednog faktora u odnosu na drugi, tako da se odnos optimalnih količina utrošaka menja, te se može razlikovati tehnički progres kojim se šteti kapital (ako  $b$  opada u odnosu na  $a$ ) od progressa kojim se intenzivnije koristi kapital (kad  $a$  raste u odnosu na  $b$ ).

Zaobilazeći problem neidentifikovanosti Cobb-Douglasove funkcije za slučaj konstantnih prinosova, poći ćemo od opšteg oblika proizvodne funkcije:<sup>11</sup>

$$(2.24) \quad P_t = A(t) F(K_t, R_t),$$

koju diferenciramo po vremenu i delimo sa nivoom proizvodnje, da dobijemo proporcionalnu stopu promene proizvodnje. Ako se sa  $P'$  označi izvod po vremenu, onda je proporcionalna stopa promene:

$$P'/P = A'F(K_t, R_t)/P + AF'(K) K'/P + AF'(R) R'/P$$

odnosno, pod pretpostavkom da se faktorima isplaćuje vrednost njihovog marginalnog proizvoda:  $i = cP'(K)$ ,  $w = cP'(R)$ , a ako zadržimo oznake za faktorske udele u vrednosti proizvodnje:  $a = iK/cP$  i  $b = wR/cP$ , ispunjeno je:

$$a = P, (K) K'/P = AF'(K) K'/P;$$

$$b = P'(R) R'/P = AF'(R) R'/P$$

tako da pređašnja jednačina postaje:

$$(2.25) \quad P'/P = A'/A + aK'/K + bR'/R.$$

Pretpostavljajući konstantne prinose,  $a+b=1$  po Eulerovoj teoremi, i funkcija se može izraziti u per capita obliku,  $p = P/R$ . Proporcionalna stopa promene per capita izraza je

$$(2.26) \quad p'/p = P'/P - R'/R, \\ k'/k = K'/K - R'/R,$$

jer je izvod per capita proizvodnje po vremenu

$$p' = (P'/R) - (P/R^2) R'.$$

Zamenjujući izraze (2.26) u (2.25) dobija se

$$p'/p = A'/A + a(k'/k + R'/R) + (b-1)(R'/R),$$

što zbog jedinične sume faktorskih udela  $a+b=1$  daje:

$$(2.27) \quad p'/p = A'/A + a(k'/k).$$

Odatle se vidi da se godišnji indeks tehnološke promene može dobiti ako su poznati godišnji podaci o proizvodnji po radnom času, korišćenom kapitalu po radnom času, kao i udelu kapitala u vrednosti proizvodnje, tako što se izvod po vremenu ( $A'$ ) zamenjuje promenom u godišnjim podacima  $A(t) - A(t-1)$ .

Pretpostavljajući da je inicijalna vrednost (u početnom, nultom, periodu)  $A(0) = 1$ , serija godišnjih indeksa tehničkog progressa se može konstruisati prema izrazu

$$(2.28) \quad A(t) = A(t-1) \{ 1 + [A(t) - A(t-1)/A(t-1)] \}$$

Za prvu polovinu ovog veka, u SAD ustanovljena je na ovaj način godišnja stopa tehnološkog progressa od 1,5% godišnje, što predstavlja vrlo snažan ushodni trend  $A(t)$ .<sup>12</sup> Na taj način se može ocenjivati i

11) Postupak je razvio Solow, R.M.: »Technical Change and the Aggregate Production Function«, *Review of Economics and Statistics*, vol. 39/1957, str. 312-320, takođe o knjizi Zellner, A. (Ed.), op.cit., (1968).

koji deo porasta produktivnosti treba pripisati tehnološkom progresu, a koji deo kapitalnoj opremljenosti rada, prema funkciji (2.27). Deljenjem godišnjih iznosa produktivnosti  $p(t)$  sa indeksima tehnološke promene  $A(t)$ , dobija se ocena porasta produktivnosti usled porasta kapitala. Tako je ustanovljeno u istoj studiji da se u razmatranom periodu u SAD 90% porasta produktivnosti može pripisati tehnološkom progresu, a samo 10% porastu kapitala.

Na ovaj način se u tehnički progres uključuje svako poboljšanje proizvodnog procesa koje se ne može pripisati porastu kapitala, pa i bolja obučenost i zalaganje radnika, dakle ljudski faktor uopšte. Naravno, problem ovakvog merenja je što zanemaruje promene u sastavu proizvodnje, pa se u tehnički progres uvrštava i poboljšana proizvodna struktura, u smislu većeg učešća sektora koji koriste komparativne prednosti.

Iznos produktivnosti korigovan za tehnički progres  $(p/A)$ , prema kapitalnoj opremljenosti rada, može se izraziti i prema Cobb-Douglasovoj formi proizvodne funkcije, jer pod uslovom konstantnih udela proizvodnih faktora u vrednosti proizvodnje (što se pokazalo kao realistična pretpostavka), ova se forma dobro prilagođava podacima:

$$(2.29) \log (p/A)_t = a \log k_t + u_t.$$

## 2.5 Ograničenja Cobb-Douglasove funkcije u primeni

Ovde ćemo se pozabaviti teorijskim ograničenjima Cobb-Douglasove funkcije i njihovom proverom u praksi, kao i problemima koji se javljaju u primeni funkcije. Pri tome se pod ograničenjima podrazumevaju sledeća svojstva funkcije: funkcionalni oblik, ekspanatorni faktori, ekonomija obima, multikolinearnost, merenje faktora i agregiranost, merenje proizvodnje, varijabilnost koeficijenata, simultanost relacija.

1. Kao što važi i za bilo koju drugu specifikaciju, i Cobb-Douglasova proizvodna funkcija predstavljaće dobru prezentaciju realnih podataka u zavisnosti od toga koliko je predložena specifikacija korektna. Ukoliko multiplikativna forma ili linearna po logaritmima dobro odlikava podatke, onda je opravdano koristiti je. Iako, u slučaju da nema ekstremnih vrednosti u podacima, linearna funkcija pokazuje isto tako dobro prilagođavanje podacima, multiplikativan oblik uticaja proizvodnih faktora je teorijski nužno koristiti, jer bi linearna funkcija davala »neekonomske« rezultate, ko na primer stalno rastuće prinose.

2. Pored rada i kapitala, kao dva osnovna proizvodna faktora, potrebno je u strukturni oblik modela uključiti i sve ostale faktore za koje se pouzdano zna da utiču na povećanje proizvodnje. U slučaju da se neki relevantan ekspanatorni faktor ne navede eksplicitno u specifikaciji funkcije, njegov uticaj će morati da bude pripisan drugim faktorima i ocene parametara funkcije će biti pristrasne. Takođe, budući da je uticaj izostavljenog faktora obuhvaćen greškom funkcije, njen raspored je takođe poremećen, pa ni statistički testovi više neće biti pouzdani.

3. Zbog jednostavnosti, često se ograničenje konstantnih prinosa nameće bez empirijskog opravdanja. Da bi se u praksi testirala hipoteza o konstantnim prinosisima ( $H_0: a+b=1$ ) prema alternativnoj hipotezi da su prinosi na primer rastući ( $H_1: a+b > 1$ ), ili opadajući ( $H_1: a+b < 1$ ), formira se statistika testa

$$t = [(a+b) - 1] \sqrt{[\text{Var}(a) + \text{Var}(b) + 2\text{Cov}(a,b)]} \quad (2.30)$$

koja ima Studentov raspored sa  $n-3$  stepeni slobode (za veličinu uzorka označenu sa  $n$  i tri ocenjivana parametra:  $a$ ,  $b$  i  $A$ ) Sa  $a$  i  $b$  predstavljene su ocene parametara, a u imeniocu su date ocene njihovih varijansi i kovarijanse. U slučaju da je apsolutna vrednost izračunate statistike veća od tablične  $t$ -vrednosti, odbacuje se nulta hipoteza u korist alternativne.

Ako pretpostavka o konstantnim prinosisima nije ispunjena ( $a+b \neq 1$ ), onda udeli faktora u vrednosti proizvodnje iznose  $a/(a+b)$  i  $b/(a+b)$  umesto  $a$  i  $b$ . Tada plaćajući faktorima vrednost njihovog marginalnog proizvoda trošimo više od vrednosti proizvodnje u slučaju rastućih prinosa ( $wR + iK > cP$ ), odnosno manje u slučaju opadajućih prinosa ( $wR + iK < cP$ ). Vrednost proizvodnje će se upravo iscrpiti samo ako faktore plaćamo prema odnosu njihovih eksponenata ( $a/b$ ), a ne prema njihovoj visini.

4. Korišćenje proizvodnih faktora uporedo u funkciji može dovesti do visokih standardnih grešaka ocena parametara, zbog visoke multikolinearnosti između rada — kapitala, posebno kad se radi o istovremenim podacima, a ne vremenskim serijama. Tada je, naime, tehnologija približno ista za sve opservacije, pa se može očekivati isti iznos kapitalne opremljenosti rada. S druge strane, ako bi se podaci agregirali za opservacije različite po tehnologiji, onda bi zaista multikolinearnost u funkciji bila manja, ali bi dobijene ocene parametara sada

12) Funkcija je ocenjivana za period 1909-1949, Solow, R.M., op.cit.

izgubile značenje, jer bi se odnosile na kombinacije heterogenih grana.

5. Step en agregiranosti u primeni proizvodne funkcije ne bira se proizvoljno. Naime, u slučaju multiplikativne funkcije, ako je ustanovljen oblik funkcije na nižem stupnju agregatnosti, prostim sabiranjem pojedinačnih slučajeva ne dobija se takav isti oblik funkcije i za njihov agregat. I obrnuto, oblik utvrđen za privrednu granu neće važiti i za firme unutar te grane. Ovo obeležje Cobb-Douglasove proizvodne funkcije mora se uvek imati na umu.

Teorijski, proizvodna funkcija predstavlja fizičku količinu proizvodnje kao rezultat korišćenja isto tako fizički izraženih količina proizvodnih utrošaka. Međutim, s obzirom na heterogenost jedinica svakog jedinog utroška (časovi rada su promenljivog kvaliteta, a kako je korišćenje kapitala u praksi teško meriti, zamenjuje se kapitalnim stokom, sa vrlo heterogenim sastavom), to su korišćeni agregati sa promenljivošću i često nepoznatom strukturom. To je naročito izraženo u slučaju agregacije na makroekonomskom nivou, gde se funkciji više ne može pripisati uobičajena važnost u objašnjenju tehničkih osobina pretvaranja proizvodnih utrošaka u gotov proizvod, i gde se zbog velike heterogenosti više ne mogu koristiti fizičke jedinice mere.

Budući da se u agregatnom predstavljanju proizvodnje i proizvodnih utrošaka kao ponderi fizičkim jedinicama mere javljaju njihove cene, to je kauzalni tok proizvodne funkcije u stvari preokrenut. Umesto fizičkog procesa transformacije proizvodnih utrošaka u gotov proizvod, sada parametri funkcije u stvari predstavljaju proces distribucije vrednosti proizvodnje na proizvodne faktore. Uostalom, proizvodnu funkciju, kako je već napomenuto, neopravdano je posmatrati izdvojeno iz konteksta ekonomske optimizacije, odnosno iz modela simultanih ekonomskih relacija.

Utrošak rada se obično meri ukupnim brojem utrošenih radnik-časova u periodu opservacije, ponderisanim najčešće nivoima plata, da se odslikaju relativni doprinosi u produktivnosti različitih nivoa složenosti rada i radnih kvalifikacija. Naravno, u slučaju alternativnog merenja uloženog rada ukupnim brojem zaposlenih radnika, taj broj se još mora korigovati efektivno utrošenim radnim časovima.

Kapital je u statističkim podacima obično već podeljen po sastavu (zgrade, zemljište, mašine, prevozna sredstva itd.) i agregira se sa cenama kao ponderima, naime predstavlja po vrednosti. Zbog variranja cena, nužno je da se sve cene predstavljaju kao stalne, sa istom bazom. U stvari, po-

jam »sadašnje vrednosti« sredstava, nasuprot »nabavnoj vrednosti« trebalo bi da uključi i koncept depresijacije (tehnoške i usled starosti mašina) i problem inflacije.

U cilju merenja korišćenja kapaciteta, u upotrebi su različite korekcije. Za industrijske grane u kojima se obilno troši energija predlaže se odnos relativnog utroška električne energije i goriva prema trendu na bazi maksimalnih vrednosti. Ponekad se istim postupkom ustanovljava odnos ostvarene prema potencijalnoj proizvodnji i indirektno iz toga zaključuje o indeksu korišćenja kapaciteta. A u našoj praksi, zbog visoke uvozne zavisnosti proizvodnje, moguće je korigovanje osnovnih sredstava indeksom uvoza reprodukcionog materijala. Naravno, sve što je iz toga potrebno dobiti je indeksno predstavljen porast usluge korišćenja kapitala u posmatranom periodu, budući da jedinice merenja ovog proizvodnog utroška i inače nisu fizičkog karaktera.

6. Postoji opcija u izražavanju proizvodnje prema neto ili bruto konceptu. Ako je, naime, proizvodnja merena kao »novododata vrednost«, onda se podrazumeva da osim vrednosti proizvodnje izražene proizvodnom funkcijom ukupni proizvod sadrži i vrednost utrošenog materijala. Obrnuto, pri predstavljanju proizvodnje po bruto principu, vrednost sirovina, pogonskog goriva i reprodukcionog materijala treba tretirati kao novi proizvodni utrošak (M):

(2.31)  $P = Ak^aR^bM^c$  umesto  $P = AK^aR^b + M$ , budući da i ovaj faktor može doprinosti (pozitivno ili negativno) ekonomiji obima, odnosno prirodi prinosa.

S obzirom na heterogeni karakter jedinica proizvodnje, njen agregatni izraz se može predstaviti samo vrednošću. Tada je međutim korišćeni podatak rezultat ne samo upotrebe proizvodnih faktora, već i uticaja tražnje, politike cena, poreza, supstitucija itd. Takođe, neke proizvodne faktore, kao preduzetništvo, radni odnosi i uslovi, tehnički progres i drugo, nemoguće je meriti. Stoga greška proizvodne funkcije obuhvata sve ove greške merenja i izostavljanja relevantnih faktora. Cilj istraživača morao bi biti da se ta greška smanji i dovede na meru samo slučajnog i zanemarljivog (po značaju) sadržaja. A to se može postići samo preciznijim merenjem i finijom dezagregacijom heterogenih sadržaja (i proizvodnje i proizvodnih faktora).

7. Po definiciji Cobb-Douglasove proizvodne funkcije, parametri a i b su konstantne vrednosti, za sve nivoe proizvodnje i utrošaka faktora. Njihova interpretacija, međutim, kao elastičnosti proizvodnje, udela faktora u vrednosti proizvodnje, ili u zbiru



elastičnosti razmera (stepena homogenosti funkcije), dozvoljava, šta više nameće, verovatnost promena ovih parametara pod određenim uslovima. Da ostavimo za trenutak po strani ograničenje da je elastičnost supstitucije faktora uvek jednaka jedinici, suprotno empirijskim istraživanjima.

Definisanje varijabilnih parametara u ekonometrijskim modelima najčešće je zasnovano na određenim pretpostavkama,<sup>13</sup> i u zavisnosti od verovatnosti ovih različitih pretpostavki u praksi, treba se opredeljavati za odgovarajući tip modela, u okviru klase Cobb-Douglasove proizvodne funkcije.

Međutim, varijabilna elastičnost supstitucije zahteva korišćenje sasvim drugog tipa proizvodne funkcije, VES (varijabilna elastičnost supstitucije),<sup>14</sup> dok u slučaju konstantne elastičnosti ali različite od jedinice — CES proizvodne funkcije.

8. Već je nagoveštena neispravnost u tretiranju samo proizvodnog nivoa kao zavisne varijable, a utrošaka faktora kao potpuno nezavisnih, egzogenih varijabli u modelu proizvodnje. Naime, proizvodna funkcija se mora posmatrati kao deo šireg modela simultanih međuzavisnosti, jer bi se u protivnom dobijale vrlo pristrasne ocene parametara. Kako proizvođač donosi odluke o optimalnim nivoima proizvodnje i utrošaka proizvodnih faktora sasvim simultano, ili se bar može očekivati da postoji povratna sprega u odnosima između proizvodnje i nivoa

proizvodnih faktora, to se i ovi nivoi moraju tretirati kao endogene varijable, odnosno za svaki od njih modelu priključiti po jedna jednačina koja determiniše pravilo njegovog formiranja.

Najčešće se kao pravila za određivanje optimalnih nivoa proizvodnih utrošaka, uz proizvodnu funkciju, koriste uslovi marginalne produktivnosti (model 2.14), uz implicitnu pretpostavku perfektno konkurencije na svim tržištima. Tada se naime, iz procedure maksimiranja razlike između prihoda i troškova, dobijaju uslovi za optimum količine utroška svakog proizvodnog faktora. O problemima identifikovanosti proizvodne funkcije u tim uslovima već je bilo reči. Međutim, uključivanje realističnije pretpostavke neperfektno konkurencije otvara problem endogeno određenih faktorskih cena, osim nivoa utrošaka, po raznim opservacijama (proizvođačima).

Dodatni je problem ocenjivanje modela simultanih jednačina, jer primena metoda običnih najmanjih kvadrata dovodi do pristrasnih i nekonzistentnih ocena, kao što je poznato. Zato je potrebno predvideti primenu, recimo, metoda dvostepenih najmanjih kvadrata u dobijanju konzistentnih ocena parametara, koji se može koristiti u ocenjivanju i tačno i prekomerno identifikovanih jednačina.

S druge strane, ako se može verovati u međusobnu zavisnost ekonomske i tehnološke efikasnosti pojedinih proizvođača (zavisnost grešaka različitih jednačina), pod uslovom da je identifikovanost (bilo tačna bilo prekomerna) svih jednačina postignuta, treba predvideti primenu metoda trostepenih najmanjih kvadrata, da bi se postigla puna efikasnost (uz konzistentnost) ocena.<sup>15</sup>

13) U principu, modeli varijabilnih koeficijenta se klasifikuju u dve grupe: slučajni koeficijenti (koji imaju istu aritmetičku sredinu i varijansu za svaku opservaciju) i koeficijenti koji reflektuju sistematske promene (naročito u vremenim serijama), stohastičke ili nestohastičke prirode. Videti o tome: Judge, G.G. et al.: *Introduction to the Theory and Practice of Econometrics*, John Wiley, New York 1982, str. 503-514.

14) Revankar, V.S.: »A. Class of Variable Elasticity of Substitution Production Functions«, *Econometrica*, January 1971.

15) O metodima ocenjivanja modela simultanih jednačina videti, npr. Jovičić, M.: *Ekonometrijski metodi*, Savremena administracija, Beograd 1981.

Milena Jovičić

### Summary

#### ECONOMETRIC EVALUATION OF PRODUCTIVITY OF HUMAN AND TECHNICAL FACTORS

Measuring productivity of the production factors enables determining their valuable contribution to the total output, which is of an extraordinary economic importance. Traditional economic theory represents production function assuming that there are two uses (labour and capital) which are continually variable and substitutive in all function value. Therefore production is used to express efficiency of production possibilities on the basis of flows of work done and services of the existing capital stock, supposing that the problems of the technological maximization have already been solved.