

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Astronomia

Tesi di Laurea triennale

Il profilo apparente dello strato di sodio visto da un ELT

Relatore

Prof. Sergio Ortolani

Correlatori

Prof. Roberto Ragazzoni

Dr. Simone Di Filippo

Laureando

Kevin Campaci

Anno Accademico 2018/2019

Indice

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Turbolenza atmosferica | 7 |
| 1.1 | L'atmosfera | 7 |
| 1.2 | La turbolenza | 9 |
| 1.3 | Seeing | 11 |
| 1.4 | Propagazione attraverso l'atmosfera | 14 |
| 2 | Ottica Adattiva | 17 |
| 2.1 | Rappresentazione del fronte d'onda | 18 |
| 2.1.1 | Espansione in Polinomi di Zernike | 19 |
| 2.2 | Sensore di fronte d'onda | 20 |
| 2.2.1 | Sensore a 4 quadranti | 21 |
| 2.2.2 | Sensore di fronte d'onda Shack-Hartmann | 22 |
| 2.2.3 | Sensore di fronte d'onda a curvatura | 23 |
| 2.2.4 | Sensore di fronte d'onda a piramide | 25 |
| 2.3 | Ricostruzione del fronte d'onda | 28 |
| 2.4 | Specchi deformabili | 28 |
| 2.5 | Stelle guida | 30 |
| 2.6 | MCAO: Ottica adattiva multi-coniugata | 32 |
| 3 | Analisi e trattamento dei dati | 35 |
| 3.1 | Strato di Sodio | 35 |
| 3.2 | Profilo apparente dello strato di Sodio | 36 |
| 3.2.1 | Dati | 36 |
| 3.2.2 | Modello | 37 |
| 3.2.3 | Procedura | 37 |
| 4 | Conclusioni | 45 |
| A | Acronimi | 47 |
| B | Variabili | 49 |
| B.1 | Capitolo 1 | 49 |
| B.2 | Capitolo 2 | 50 |

INDICE

| | | |
|----------|---|-----------|
| B.3 | Capitolo 3 | 50 |
| C | Valori dei parametri del modello del sistema | 51 |
| C.1 | Valori dei parametri | 51 |
| D | Codice per la determinazione del profilo apparente | 53 |

Introduzione

La qualità e la risoluzione delle immagini astronomiche nelle osservazioni da terra sono affette da un deterioramento causato dalla presenza di moti turbolenti all'interno dell'atmosfera. Questo si traduce nella formazione di vortici che alterano la forma piana del fronte d'onda incidente e limitano la risoluzione intrinseca del telescopio altrimenti regolata dal solo limite di diffrazione. Un sistema di ottica adattiva è in grado di compensare in tempo reale la perturbazione ed è costituito principalmente di 4 elementi: un sensore di fronte d'onda, dispositivo in grado di rilevare le aberrazioni; un ricostruttore, computer che riceve ed elabora i dati generati dal sensore; uno specchio deformabile, superficie in grado di modellarsi per correggere le aberrazioni del fronte d'onda; infine si utilizza un oggetto di riferimento per la stima della distorsione. Le sorgenti guida possono essere sia naturali, note come NGS (Natural guide stars), che artificiali, dette LGS (Laser guide stars), prodotte attraverso l'utilizzo di un proiettore laser. Le stelle guida laser si suddividono a loro volta in due tipologie sulla base del processo che le genera: stelle guida al Sodio e stelle guida di Rayleigh. In questa tesi l'attenzione è rivolta alle stelle guida generate dalla fluorescenza degli atomi di Sodio. Lo strato di Sodio presente in atmosfera, generato dall'ablazione di meteore e polveri, è oggetto di studio in quanto presenta una distribuzione di densità altamente variabile. Lo scopo di questo lavoro di tesi è proprio quello di stimare un profilo apparente osservato da un telescopio di classe 40 m e determinarne qualitativamente l'evoluzione nelle varie sotto aperture lungo la pupilla del telescopio. Nel capitolo 1 viene esposto il concetto di turbolenza atmosferica e di seeing, analizzando i vari parametri che lo descrivono. Nel capitolo 2 è introdotto il sistema di ottica adattiva approfondendo la descrizione delle componenti. Il capitolo 3 descrive l'analisi e il trattamento dei dati per ricavare il profilo apparente.

INTRODUZIONE

Capitolo 1

Turbolenza atmosferica

1.1 L'atmosfera

L'atmosfera, oltre ad essere la componente essenziale per lo sviluppo e la preservazione della vita sulla terra, è considerata il principale ostacolo delle osservazioni astronomiche per telescopi *ground based*. L'atmosfera è, in prima approssimazione, un gas ideale definito da un modello nel quale:

- Le particelle hanno volume trascurabile
- Le forze attrattive tra di loro sono nulle
- Gli urti sono completamente elastici
- L'energia cinetica media aumenta all'aumentare della temperatura

Utilizzando l'equazione di equilibrio idrostatico (1.1) e l'equazione di stato dei gas perfetti (1.2) si può facilmente ricavare l'andamento verticale della pressione atmosferica attraverso i seguenti passaggi:

$$\frac{dP}{dz} = -\tilde{\rho}g \quad (1.1)$$

$$PV = \tilde{n}RT \quad (1.2)$$

dove P rappresenta la pressione, z l'altitudine dal livello del mare, g l'accelerazione di gravità, V il volume, \tilde{n} il numero di moli, R la costante dei gas ideali, T la temperatura e $\tilde{\rho}$ la densità. Considerando la densità nella forma:

$$\tilde{\rho} = \tilde{m} \frac{N}{V} \quad (1.3)$$

dove \tilde{m} è la massa molecolare ed N il numero di molecole, risolvendo l'equazione differenziale è possibile ricavare la **legge di Halley o barometrica**

CAPITOLO 1. TURBOLENZA ATMOSFERICA

(1.4) che descrive il profilo verticale della pressione:

$$P_z = P_0 e^{-z/H} \quad (1.4)$$

dove $P_0 = 101325$ Pa e rappresenta la pressione al livello del mare mentre $H = RT/mg$ è l'altezza di scala e va da 5000 m a 7000 m ed equivale allo spessore dell'atmosfera se considerata completamente omogenea in temperatura. La struttura termica dell'atmosfera è molto complessa e dipende principalmente dal gradiente termico verticale adiabatico. Partendo dal basso si distinguono: Troposfera, Stratosfera, Mesosfera e Termosfera. La Troposfera è caratterizzata da trasporto di calore convettivo generato da un gradiente verticale superiore al valore critico di instabilità convettiva. Il valore del gradiente termico adiabatico umido presente in Troposfera è $-0.6^\circ C/100 m$. Raggiunto il limite superiore della Troposfera, circa 1000 m, il processo convettivo viene completamente bloccato a causa dell'inversione termica. La Stratosfera è caratterizzata da un aumento di temperatura causato da un gradiente termico positivo che prosegue fino ad arrivare alla Mesosfera dove, a causa dell'inversione del gradiente termico, torna a diminuire fino alla Termosfera. In questo livello la temperatura comincia a risalire fino a raggiungere migliaia di gradi centigradi. La struttura termica dell'atmosfera è rappresentata in Figura (1.1).

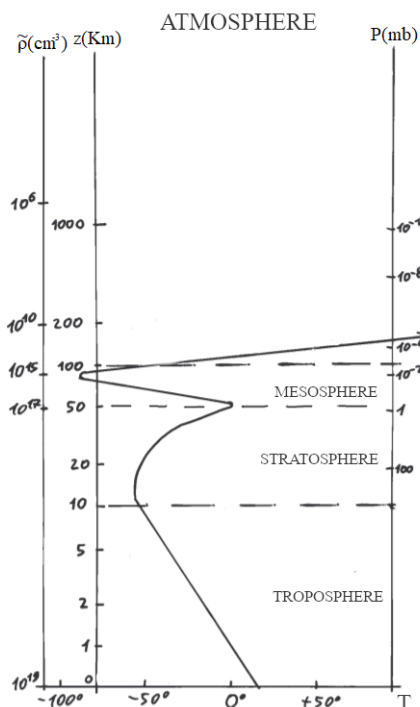


Figura 1.1: Struttura termica dell'atmosfera

1.2. LA TURBOLENZA

I principali elementi che dominano la chimica dell'atmosfera sono Azoto (78%), Ossigeno (21%) ed in minima quantità anche altri gas (CO₂,Ar,ecc...). I gas costituenti gli strati atmosferici sono i principali agenti che limitano le osservazioni a determinate lunghezze d'onda (1.2).

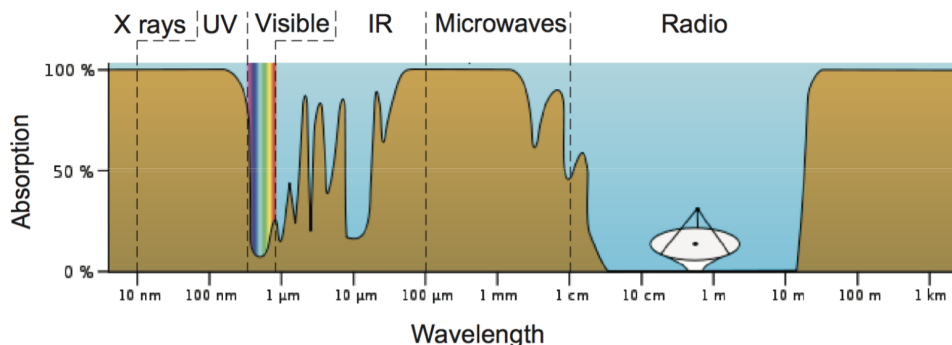


Figura 1.2: Rappresentazione dell'assorbimento atmosferico in funzione della lunghezza d'onda

L'atmosfera risulta completamente opaca a lunghezze d'onda corte (0.1-0.3) μm a causa dell'elevato coefficiente di assorbimento di O₂ ed N₂. Considerando lunghezze d'onda maggiori si aprono le cosiddette *finestre* dove l'atmosfera risulta trasparente e permette di osservare in modo efficace. Le zone in questione sono nel Visibile, nel vicino InfraRosso dove si notano 5 bande importanti (J,H,K,K,M dal sistema internazionale di Johnson) ed in tutta la banda Radio fino a qualche decina di metri dove la trasmissione è limitata dalla riflessione Ionosferica. L'atmosfera è inoltre responsabile di un altro effetto noto come turbolenza atmosferica.

1.2 La turbolenza

In atmosfera i moti possono essere di due tipi: laminare o turbolento. Il moto laminare è ordinato, caratterizzato da velocità non elevate rispetto alla viscosità e nel quale ogni strato di fluido scorre parallelamente allo strato adiacente. Il moto turbolento, invece, presenta strutture vorticosi di velocità differenti rendendo quindi la dinamica del fluido imprevedibile in maniera esatta. In atmosfera il passaggio da un regime all'altro è regolato da due quantità adimensionali:

- Il numero di Reynolds R_e che descrive il rapporto tra le forze di inerzia e le forze viscosi.

$$R_e = \frac{Lv}{\nu} \quad (1.5)$$

dove L è la lunghezza di scala, v è la velocità del fluido e ν è il coefficiente di viscosità. Il valore tipico in atmosfera del parametro di Reynolds

CAPITOLO 1. TURBOLENZA ATMOSFERICA

R_e è di circa 10^6 ($\nu \sim 1.50 \cdot 10^5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ per $T \sim 20^\circ\text{C}$, V pochi ms^{-1} , L da m a km). Il valore critico di transizione dipende sia dalla geometria del sistema sia dalla sua velocità. Per un fluido all'interno di una tubatura di sezione circolare il moto turbolento si innesca per un numero di Reynolds $R_e \geq 2000$.

- Il numero di Richardson R_i , invece, descrive il rapporto tra il gradiente verticale di temperatura e il gradiente di velocità del vento.

$$R_i = \frac{g}{T} \frac{(dT/dz) - \gamma}{(dv/dz)^2} \quad (1.6)$$

dove g è l'accelerazione di gravità, T la temperatura e γ il gradiente termico verticale adiabatico ($-0.6^\circ\text{C}/100\text{m}$). Il valore sotto il quale il regime turbolento è ulteriormente sostenuto dalle condizioni atmosferiche è 0.25.

L'innescio del regime turbolento provoca la formazione di vortici, con temperature ed indici di rifrazione diversi, i quali disperdono la loro energia attraverso un meccanismo a cascata. La dissipazione avviene in un regime compreso tra la *scala inferiore* l_0 e la *scala superiore* L_0 chiamato *Regime Inerziale*; la scala inferiore è la grandezza dei vortici più piccoli ed equivale alla dimensione sotto la quale gli effetti viscosi sono considerati non trascurabili mentre la scala superiore è la dimensione sopra la quale la turbolenza non è più correlata. Valori tipici di L_0 sono circa 10-20 m mentre quello di l_0 è circa 1 cm. In questo regime esiste una descrizione dello spettro di energia della turbolenza, evidenziato in Figura (1.3), formalizzata per la prima volta da A.N. Kolmogorov. L'energia associata ai vortici, in questa ipotesi, è proporzionale alla larghezza stessa delle celle turbolente, secondo la legge:

$$E \propto k^{-\frac{5}{3}} \quad (1.7)$$

dove $k=2\pi/L$. Per descrivere e quantificare la turbolenza è necessario conoscere le fluttuazioni dell'indice di rifrazione, causa principale delle distorsioni subite dal fronte d'onda. Risulta utile ricavare una grandezza che esprima le variazioni locali di temperatura:

$$C_T^2 = \frac{\langle (T(x) - T(x + dx))^2 \rangle}{dx^{2/3}} \quad (1.8)$$

dove dx è lo spostamento infinitesimo lungo x . In accordo con l'*equazione di Gladstone* è possibile ricavare il parametro di struttura dell'indice di rifrazione che descrive le variazioni locali di n :

$$C_n^2 = \left(77 \cdot 10^{-6} \frac{P}{T} \right)^2 \cdot C_T^2 \quad (1.9)$$

1.3. SEEING

La distribuzione verticale del parametro di struttura dell'indice di rifrazione è determinante nella stima dell'aberrazione subita dal fronte d'onda incidente, nota come *Seeing*.

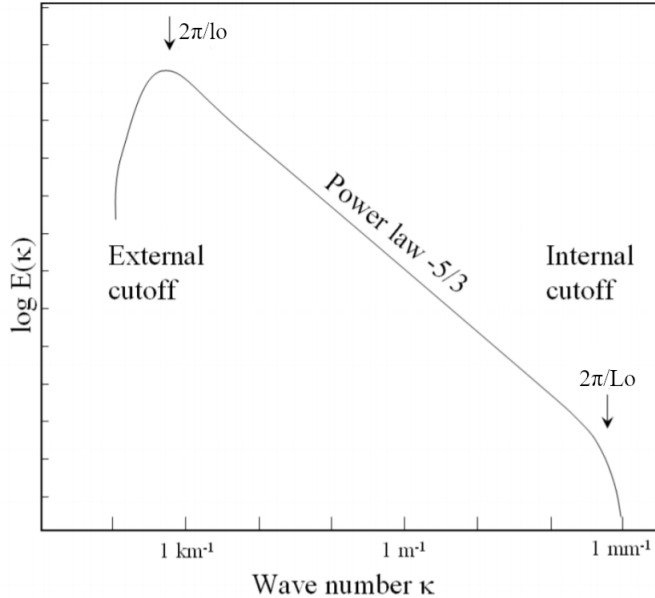


Figura 1.3: Spettro di Energia associato ai vortici in un regime turbolento dove il troncamento esterno ed interno sono rispettivamente a $2\pi/l_0$ e $2\pi/L_0$.

1.3 Seeing

Il Seeing astronomico è una misura degli effetti di aberrazione sulle immagini astronomiche causati dalla turbolenza atmosferica. Può essere espresso attraverso tre distinte descrizioni quali la FWHM (Full Width at Half Maximum), il parametro di Fried r_0 e il C_n^2 . Attraverso la FWHM, quantità che caratterizza la dispersione dei valori di una distribuzione, è possibile mettere in evidenza il fatto che il seeing sia un parametro variabile soprattutto a causa delle condizioni atmosferiche locali. Si considera soddisfacente il caso in cui la FWHM è circa $1''$. Tuttavia è possibile raggiungere anche valori vicini a $0.4''$ per siti di osservazione come Cerro Paranal. Un'ulteriore rappresentazione è fornita utilizzando il parametro r_0 il quale restituisce una risoluzione angolare limitata a circa λ/r_0 per specchi con apertura $D \geq r_0$. Per una descrizione più approfondita è altresì possibile esprimere il seeing attraverso i suoi principali effetti che dipendono dalla distribuzione verticale del parametro di struttura dell'indice di rifrazione C_n^2 (1.9). Risulta indispensabile introdurre i parametri fondamentali:

CAPITOLO 1. TURBOLENZA ATMOSFERICA

- Il *parametro di Fried* r_0 il quale definisce l'apertura oltre la quale lo scarto quadratico medio (RMS) di distorsione di fase è circa un radiante (1.10).

$$r_0 = \left[0.423 k^2 \sec \beta \int_{Path} C_n^2(z) dz \right]^{-\frac{3}{5}}, \quad (1.10)$$

dove l'integrale viene calcolato lungo il cammino ottico, β è l'angolo zenitale, k il numero d'onda e z la coordinata verticale. Si può facilmente risalire alla dipendenza dalla lunghezza d'onda considerando $k = 2\pi/\lambda$:

$$r_0 \propto (\lambda^{-2})^{-3/5} = \lambda^{6/5} \quad (1.11)$$

In assenza di turbolenza atmosferica la risoluzione del telescopio è condizionata dal solo limite di diffrazione. Introducendo il parametro di Fried si provoca una diminuzione della risoluzione angolare per telescopi con un'apertura $D \geq r_0$ portando lo strumento ad essere considerato *Seeing limited* cioè limitato dalla grandezza media delle celle turbolente. Valori tipici di r_0 nel visibile sono 10-20 cm.

- L'*angolo isoplanatico* θ_0 indica la grandezza angolare entro la quale l'RMS di aberrazione di fase relativo alla differenza di cammino ottico tra due sorgenti è minore di un radiante (1.12).

$$\theta_0 = \left[2.91 k^2 \sec^{\frac{8}{3}} \beta \int_{Path} C_n^2(z) z^{\frac{5}{3}}(z) dz \right]^{-\frac{3}{5}} \quad (1.12)$$

θ_0 può essere inoltre considerato come l'angolo oltre il quale la coerenza tra la luce della sorgente e quella della stella guida non è più assicurata. Confrontando l'equazione (1.12) con (1.10) si ottiene una relazione tra θ_0 ed r_0 :

$$\theta_0 = 0.314 \sec^{-1} \beta \frac{r_0}{\tilde{H}}$$

dove \tilde{H} è l'altezza media della turbolenza ed è definita come segue:

$$\tilde{H} = \left(\frac{\int_{Path} C_n^2(z) z^{\frac{5}{3}} dz}{\int_{Path} C_n^2(z) dz} \right)^{\frac{3}{5}} \quad (1.13)$$

L'angolo isoplanatico è di fondamentale importanza per i sistemi di ottica adattiva perchè limita la copertura di cielo, ossia la probabilità di trovare una stella sufficientemente brillante all'interno di θ_0 . Utilizzando l'equazione (1.12) ed assumendo $r_0=15$ cm a $\lambda = 0.55 \mu\text{m}$ e $\tilde{H}=10$ km, si ottiene un angolo isoplanatico di circa $1''$.

1.3. SEEING

- τ_0 : La statistica temporale della turbolenza può essere descritta sia dal vento che dall'evoluzione intrinseca dei vortici. Assumendo che il temposcala relativo alle variazioni delle celle turbolente sia molto maggiore rispetto al tempo impiegato dal vento per trasportare la turbolenza attraverso l'apertura (*ipotesi di Taylor*) si può considerare che le variazioni temporali siano generate dal trasporto dei vortici "congelati". Il temposcala necessario per la correzione è descritto da r_0 ed è chiamato *tempo di coerenza*

$$\tau_0 = 0.314 \frac{r_0}{v} \propto \lambda^{\frac{6}{5}}, \quad (1.14)$$

dove v è la velocità del vento. Valori tipici di r_0 e di v sono rispettivamente 10-20 cm e 20 ms^{-1} che restituiscono un valore di τ_0 pari a pochi millisecondi.

- L_0 : la *scala superiore* è un parametro che diventa importante per telescopi di grandi aperture (30-40 m) ed è la lunghezza caratteristica oltre la quale la luce non è più correlata. Valori tipici di L_0 sono poche decine di metri.

Il seeing è costituito principalmente da tre effetti che possono, in generale, coesistere, quali:

- La *Scintillazione* che è un effetto di variazione di intensità della sorgenti puntiformi. Ciò accade in quanto il fronte d'onda incidente subisce effetti di convergenza e divergenza ad opera delle celle turbolente portando alla formazione di fenomeni di interferenza. Dalla Figura (1.4) si può notare come la distanza dello strato turbolento e le dimensioni ridotte della pupilla portino ad un'intensificazione del fenomeno. Aperture maggiori, invece, mediano gli effetti di interferenza.
- Il *moto dell'immagine* è un effetto provocato dalle differenti inclinazioni con cui le porzioni perturbate di fronte d'onda entrano nella pupilla. Questo fenomeno è importante per aperture confrontabili con le dimensioni del fronte d'onda e decresce all'aumentare del diametro D . Il moto dell'immagine è il fenomeno più facilmente compensabile con i sistemi di ottica adattiva.
- L'*allargamento dell'immagine* è l'effetto prodotto dall'integrazione nel tempo delle diverse distorsioni subite dal fronte d'onda ed è esprimibile come segue:

$$\text{FWHM} \cong 5.6 \lambda^{-\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{\cos \beta} \int C_n^2(z) dz \right)^{\frac{3}{5}} \cong 1.035 \frac{\lambda}{r_0} \quad (1.15)$$

Il tempo scala di stabilizzazione dell'immagine è circa 10-20 s e costituisce il tempo di esposizione minimo per determinare la PSF (Poin

Spread Function) ossia la risposta di un sistema ottico ad una sorgente puntiforme. In assenza di aberrazione la PSF di una sorgente puntiforme corrisponderebbe al disco di Airy.

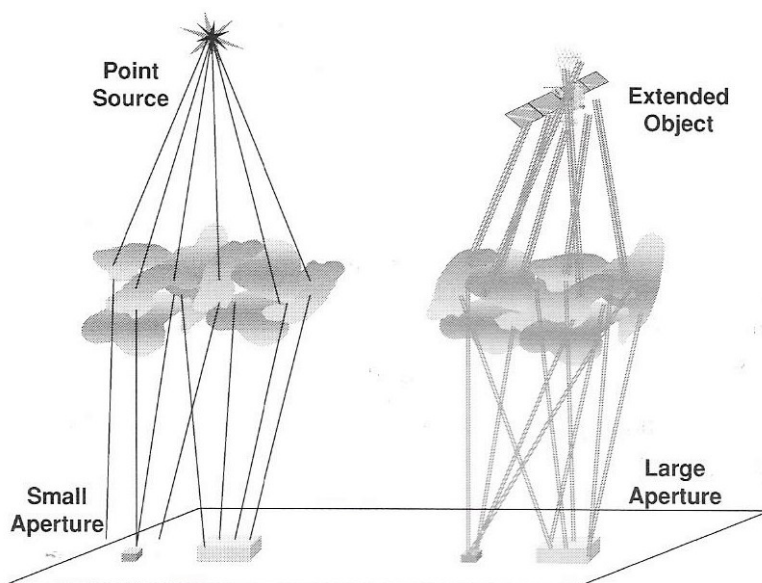


Figura 1.4: Rappresentazione della scintillazione di oggetti puntiformi ed estesi per piccole e grandi aperture

1.4 Propagazione attraverso l'atmosfera

Come anticipato in precedenza in assenza di aberrazione la risoluzione di un telescopio è limitata dalla sola *diffrazione*. Il fenomeno si verifica quando un fascio incontra un ostacolo generando onde elementari sferiche che, attraverso un processo di interferenza, producono delle zone di luce ed ombra. Considerando la diffrazione attraverso un'apertura circolare (pupilla del telescopio) l'intensità della radiazione in funzione dell'angolo α nel piano immagine è descritta dalla seguente equazione:

$$I(\alpha) = I_0 \left(\frac{2J_1(ka \sin \alpha)}{ka \sin \alpha} \right)^2 = I_0 \left(\frac{J_1(x)}{x} \right)^2, \quad (1.16)$$

dove I_0 è il picco del disco di Airy al centro, J_1 la funzione di Bessel di ordine 1 che descrive le armoniche cilindriche, k il numero d'onda, a il raggio dell'apertura. L'equazione (1.16) descrive la figura di diffrazione nota come *disco di Airy* rappresentato in Figura (1.5) che, nel caso di un telescopio, è l'equivalente della *Point Spread Function* (PSF) in assenza di aberrazioni. Il primo zero della funzione di Bessel è:

$$x = ka \sin \alpha = 3.8317 \quad (1.17)$$

1.4. PROPAGAZIONE ATTRAVERSO L'ATMOSFERA

Si trova quindi che l'angolo in cui cade il primo minimo di intensità è

$$\sin \alpha = \frac{3.8317}{ka} = \frac{3.8317 \lambda}{2\pi a} = 1.22 \frac{\lambda}{D}, \quad (1.18)$$

dove D è il diametro del telescopio. L'equazione (1.18) descrive la risoluzione angolare dello strumento ottico in assenza di aberrazione.

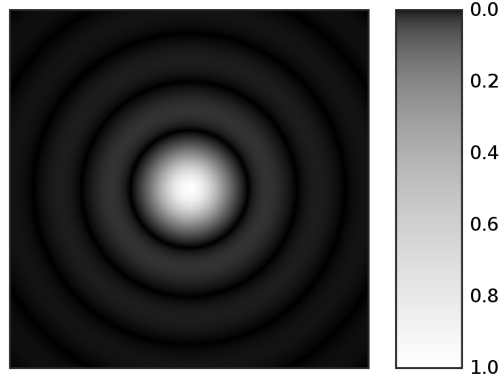


Figura 1.5: Rappresentazione numerica del disco di Airy con annessa scala di intensità

In presenza di turbolenza atmosferica è possibile valutare la qualità della correzione atmosferica attraverso il *rapporto di Strehl* (S) definito come il rapporto tra il picco della PSF in presenza di aberrazioni e il picco della PSF limitata dalla sola diffrazione:

$$S = \frac{PSF_{seeing}}{PSF_{dl}} \quad (1.19)$$

Se lo scarto quadratico medio di aberrazione di fase σ_ϕ è minore di 2 radianti il rapporto di Strehl può essere approssimato dalla cosiddetta *approssimazione di Marechal*:

$$S \approx e^{-\sigma_\phi^2} \quad (1.20)$$

$$\sigma_\phi^2 = 1.03 \left(\frac{d_0}{r_0} \right)^5 / 3 \quad (1.21)$$

CAPITOLO 1. TURBOLENZA ATMOSFERICA

Capitolo 2

Ottica Adattiva

L'*Ottica Adattiva* (AO) è uno strumento utilizzato per la correzione delle aberrazioni subite dal fronte d'onda nell'interazione con gli strati atmosferici turbolenti. L'idea venne inizialmente proposta dall'astronomo americano Horace W. Babcock (1953) che spiegava come le distorsioni atmosferiche potessero essere corrette attraverso l'utilizzo di uno specchio deformabile guidato da un sensore di fronte d'onda. I costi erano proibitivi per gli astronomi dell'epoca perciò l'idea venne abbandonata. Più tardi, durante la guerra fredda, la difesa americana sviluppò questo concetto per la compensazione dei disturbi atmosferici nel tracciamento dei satelliti sovietici. Il primo sistema di ottica adattiva venne costruito da Hardy alla fine degli anni 70 poi migliorato e installato nel 1982 al Air-Force Maui Optical Site nell'arcipelago delle Hawaii. Lo European Southern Observatory (ESO) sviluppò il primo prototipo chiamato "COME-ON" in Figura (2.1), successivamente aggiornato ("COME-ON-PLUS") e reso regolarmente funzionante per le osservazioni astronomiche.

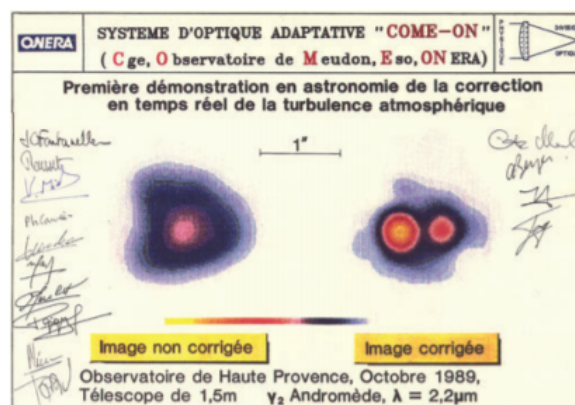


Figura 2.1: Prima immagine ottenuta con il sistema COME-ON

Come illustrato in figura (2.2) un sistema di ottica adattiva è composto principalmente da 4 elementi:

- Sensore di fronte d'onda
- Ricostruttore del fronte d'onda
- Specchio deformabile
- Stelle guida

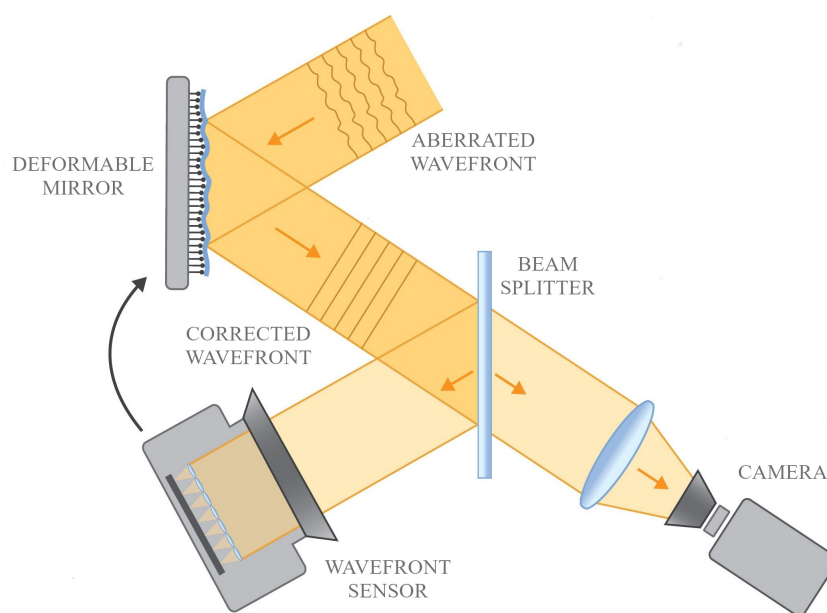


Figura 2.2: Rappresentazione di un sistema di Ottica Adattiva

Il fronte d'onda aberrato incontra prima lo specchio deformabile poi il sensore di fronte d'onda. La presenza del Beam Splitter fa sì che una parte del segnale venga rilevato dalla camera mentre l'altra dal sensore di fronte d'onda. Il sensore rileva le distorsioni e trasferisce allo specchio i segnali necessari alla correzione del fascio in arrivo. Prima di trattare nel dettaglio ogni singolo componente è bene descrivere come viene rappresentato il fronte d'onda perturbato.

2.1 Rappresentazione del fronte d'onda

Il miglior sistema di ottica adattiva è considerato quello che, in media, produce errori piccoli nella correzione delle aberrazioni subite dal fronte d'on-

2.1. RAPPRESENTAZIONE DEL FRONTE D'ONDA

da. Per risolvere questo problema è utile rappresentare il fronte d'onda attraverso un'espansione in serie di funzioni nota come *Polinomi di Zernike*.

2.1.1 Espansione in Polinomi di Zernike

Considerando un'apertura circolare di raggio unitario, descritta dalle coordinate polari ρ e θ con $\theta \in \{0, 2\pi\}$ e $\rho \in \{0, 1\}$, i polinomi di Zernike sono ortogonali reciprocamente ed esprimibili come prodotto di una parte radiale ed una angolare:

$$Z_n^m(r, \theta) = N_n^m R_n^m \begin{cases} \cos m\theta & m \geq 0 \\ \sin m\theta & m < 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

dove la costante di normalizzazione è descritta da:

$$N_n^m = \sqrt{\frac{2(n+1)}{1 + \delta_{mn}}} \quad (2.2)$$

mentre la parte radiale è rappresentata dalla seguente relazione

$$R_n^m = \sum_{s=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! [(n+m)/2 - s]! [(n-m)/2 - s]!} r^{n-2s} \quad (2.3)$$

L'indice m è noto come *frequenza azimutale* ed n *grado radiale*. Nella tabella (2.1) sono riportati i primi 15 modi.

| n | m=0 | m=1 | m=2 | m=3 | m=4 |
|---|---|--|---|--|---|
| 0 | $Z_1=1$ (piston) | | | | |
| 1 | | $Z_2=2\rho \cos \theta$ $Z_3=2\rho \sin \theta$ (tilt-tip) | | | |
| 2 | $Z_4 = \sqrt{3} (2\rho^2 - 1)$ (defocus) | | $Z_5 = \sqrt{6}\rho^2 \sin 2\theta$ $Z_6 = \sqrt{6}\rho^2 \cos 2\theta$ (astigmatism) | | |
| 3 | | $Z_7 = \sqrt{8} (3\rho^3 - 2\rho) \sin \theta$ $Z_8 = \sqrt{8} (3\rho^3 - 2\rho) \cos \theta$ (coma) | | $Z_9 = \sqrt{8}\rho^3 \sin 3\theta$ $Z_{10} = \sqrt{8}\rho^3 \cos 3\theta$ (trefoil) | |
| 4 | $Z_{11} = \sqrt{5} (\rho^4 - 6\rho^2 + 1)$ (spherical) | | $Z_{12} = \sqrt{10} (10\rho^4 - 3\rho^2) \cos 2\theta$ $Z_{13} = \sqrt{10} (10\rho^4 - 3\rho^2) \sin 2\theta$ (astigmatism) | | $Z_{14} = \sqrt{10}\rho^4 \cos 4\theta$ $Z_{15} = \sqrt{10}\rho^4 \sin 4\theta$ (ashtray) |

Tabella 2.1: Polinomi di Zernike Z_j con $j=1$ a 15 . n è il grado radiale mentre m è la frequenza azimutale.

Ogni aberrazione di fase $\phi(\vec{r})$ su una circonferenza di raggio unitario può essere espressa come una sommatoria di polinomi di Zernike nel seguente modo:

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j Z_j(\vec{r}) \quad (2.4)$$

dove a_j è noto come coefficiente di aberrazione ed è descritto da

$$a_j = \int U(\vec{r}) Z_j(\vec{r}) \phi(\vec{r}) d\vec{r} \quad (2.5)$$

con $U(\vec{r})$ funzione peso definita come:

$$\int U(\vec{r}) = \begin{cases} 1/\pi & r \geq 1 \\ 0 & r < 1 \end{cases} \quad (2.6)$$

I coefficienti di aberrazione seguono una distribuzione casuale quindi risulta necessario utilizzare un approccio statistico. La loro covarianza è data da:

$$\langle a_j a_k \rangle = c_{jk} \left(\frac{D}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \quad (2.7)$$

dove i coefficienti c_{jk} sono funzione del grado radiale (2). Utilizzando l'equazione (2.7) è possibile ricavare la relazione che descrive la varianza del fronte d'onda

$$\sigma_1^2 = \sum_{j=2}^{\infty} c_{jj} \left(\frac{D}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}}. \quad (2.8)$$

dove la sommatoria parte da $j=2$ trascurando il termine di ordine zero.

2.2 Sensore di fronte d'onda

Il sensore di fronte d'onda è uno dei componenti base del sistema di ottica adattiva ed il suo obiettivo è quello di stimare con accuratezza sufficiente la forma del fronte d'onda aberrato. Può essere composto da un dispositivo sensibile alla variazione di fase, un rilevatore caratterizzato da alta efficienza quantica (efficienza di conversione del segnale luminoso) e da basso rumore di lettura (*Read Out Noise*). A causa della non perfetta acromaticità del sensore, la rilevazione avviene tipicamente a lunghezze d'onda nel visibile dove la tecnologia dei rilevatori è più matura ed efficiente (1). Le perturbazioni atmosferiche producono 3 principali effetti sul fronte d'onda:

- *Piston*: E' il profilo medio di fase del fronte d'onda lungo la pupilla del telescopio. E' particolarmente importante durante le operazioni di interferometria.

2.2. SENSORE DI FRONTE D'ONDA

- *Tip-tilt*: E' l'inclinazione media del fronte d'onda rilevata dal sensore ed è descritta dai polinomi di Zernike Z_2 e Z_3 come mostrato in tabella (1). Questo effetto contiene un'importante porzione dell'aberrazione totale ed è la forma di correzione più semplice per un sistema di ottica adattiva.
- *Aberrazioni di ordine maggiore*: Sono le aberrazioni che producono deformazioni su scala più piccola. Producono deformazioni dell'ordine di r_0 che attraverso l'integrazione nel tempo provocano un allargamento dell'immagine limitando la risoluzione.

Esistono 4 principali tipi di WFS (Wavefront Sensor) destinati alla correzione degli effetti appena elencati:

- Tip-tilt:
 - Sensore a 4 quadranti
- Aberrazioni di ordine maggiore:
 - Sensore di fronte d'onda Shack-Hartmann
 - Sensore di fronte d'onda a curvatura
 - Sensore di fronte d'onda a piramide

2.2.1 Sensore a 4 quadranti

Utilizzato per la correzione del tip-tilt, questo tipo di sensore di fronte d'onda divide il fascio in 4 parti utilizzando 4 rilevatori. Posto nel piano focale, rileva lo spostamento del centroide, negli assi x ed y, utilizzando la differenza di energia raccolta separatamente dai 4 detector che lo compongono. La struttura di questo sensore è rappresentata in figura (2.3). Gli spostamenti del fronte d'onda lungo x e lungo y sono descritti dalle seguenti equazioni:

$$\text{ASSE X:} \quad S_x = \frac{(B + D) - (A + C)}{A + B + C + D} \quad (2.9)$$

$$\text{ASSE Y:} \quad S_y = \frac{(A + B) - (C + D)}{A + B + C + D} \quad (2.10)$$

dove S_x ed S_y sono i segnali lungo gli assi e dipendono dalla derivata prima del fronte d'onda mentre A,B,C,D rappresentano i flussi nei 4 quadranti del sensore. Come descritto in Figura (2.4) l'intervallo utile per la determinazione del tip-tilt è durante la crescita lineare di S_x (S_y), questo avviene quando il centroide viene rilevato dai 4 detector contemporaneamente. Si consideri, per esempio, il caso in cui lo spot si sposti e comprenda solamente i due quadranti di destra. Il segnale raggiungerà presto la saturazione, come evidenziato in Figura (2.4), portando ad un limite oltre il quale un'ulteriore

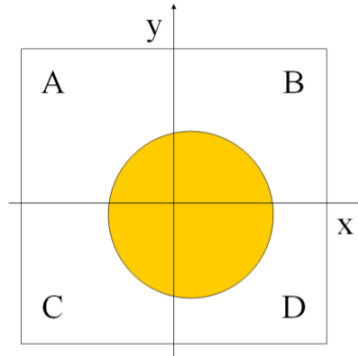


Figura 2.3: Rappresentazione del Quad Cell Wavefront Sensor

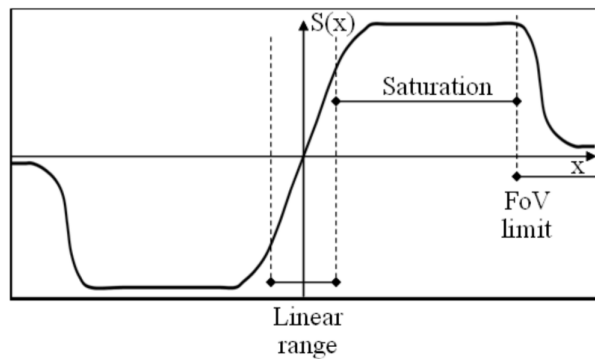


Figura 2.4: Profilo del segnale S_x in funzione dello spostamento lungo x

spostamento verso destra non produrrà più una variazione di segnale per la determinazione del tilt. La crescita lineare dei segnali è proporzionale alla dimensione dello spot, infatti, più la dimensione decresce più la curva diventa ripida traducendosi in una maggiore sensibilità.

2.2.2 Sensore di fronte d'onda Shack-Hartmann

Per correggere le aberrazioni di grado maggiore è necessario lavorare su lunghezze di scala tipiche del fronte d'onda stesso. Noto che le deformazioni più piccole hanno dimensioni tipiche del raggio di Fried r_0 , la pupilla del telescopio viene divisa in $N=D/d$ sotto aperture, dove D è il diametro del telescopio e d il diametro delle sotto aperture. Considerando di voler incrementare la precisione di campionamento del fronte d'onda, è inutile scendere al di sotto del limite imposto da $d = r_0$. Questo comporterebbe una minore illuminazione di ciascuna sub apertura senza, quindi, l'apporto di ulteriori informazioni. Lo Shack-Hartmann (SH-WFS) utilizza questo schema inserendo all'interno del cammino ottico un array di lenti che rappresenta,

2.2. SENSORE DI FRONTE D'ONDA

quindi, un array di sotto aperture. Il detector viene inserito nel piano focale. Il tip-tilt, in questo schema, corrisponde all'inclinazione del fronte d'onda su ogni sotto apertura e per la sua determinazione si utilizza un sensore a 4 quadranti per ognuna di queste. Come rappresentato in Figura (2.5) se la forma del fronte d'onda è priva di aberrazioni ogni spot generato da ognuna delle sotto aperture si troverà esattamente al centro del QC-WFS. Al contrario se il fronte d'onda presenta deformazioni ogni lente manderà a fuoco l'immagine in un punto decentrato rispetto al sensore di riferimento. Come sappiamo dal QC-WFS anche la sensibilità dello Shack-Hartmann dipende dalla grandezza dello spot e quindi dalla dimensione delle lenti. Considerando l'utilizzo di un sensore a 4 quadranti e assumendo spostamenti piccoli e dimensione dell'immagine piccola rispetto al quadrante, gli angoli di arrivo a_x e a_y sono descritti da:

$$a_x = \frac{\lambda}{2d} \frac{(A+C) - (B+D)}{A+B+C+D}; \quad a_y = \frac{\lambda}{2d} \frac{(A+B) - (C+D)}{A+B+C+D} \quad (2.11)$$

Prendiamo ora in considerazione l'errore associato allo Shack-Hartmann. L'incertezza legata alla posizione dello spot nel piano focale dipende dal numero di fotoni raccolti, i quali sono dominati da errori Poissoniani. Ipotezzando che la pupilla d'entrata riceva M fotoni in un determinato tempo di integrazione, ogni sotto apertura dell'array $N \times N$ riceverà $\eta = M/N^2$ fotoni. Il numero di fotoni collezionati dal sistema, quindi, sarà all'interno dell'intervallo $M \pm \sqrt{M}$ e l'errore propagatosi nel segnale relativo al Quad Cell WFS sarà

$$\Delta S_x = \frac{\lambda}{2d} \frac{(\frac{M}{2} \pm \frac{\sqrt{M}}{2}) - (\frac{M}{2} \pm \frac{\sqrt{M}}{2})}{M \pm \sqrt{M}} = \pm \frac{\lambda}{2d} \frac{\sqrt{M}}{M \pm \sqrt{M}} \approx \pm \frac{\lambda}{2d} \frac{1}{\sqrt{M}} \quad (2.12)$$

che si traduce in un'incertezza descritta dalla seguente relazione:

$$\epsilon_{SH} = \frac{\lambda}{r_0} \frac{1}{2\sqrt{M}} \quad (2.13)$$

Se consideriamo un fronte d'onda piano affetto solo da tilt tutti gli spot nello SH-WFS saranno decentrati della stessa quantità e nella stessa direzione, quindi

$$\epsilon_{SHtilt} = \frac{\lambda}{Nr_0} \frac{1}{2\sqrt{M}} = \frac{\lambda}{D} \frac{1}{2\sqrt{M}} \quad (2.14)$$

2.2.3 Sensore di fronte d'onda a curvatura

Il Sensore di fronte d'onda a curvatura (C-WFS) è molto diverso dai due incontrati finora, infatti, è in grado di rilevare la curvatura del fronte d'onda (derivata seconda) e non la sua inclinazione. Inventato da F.Roddier (6),

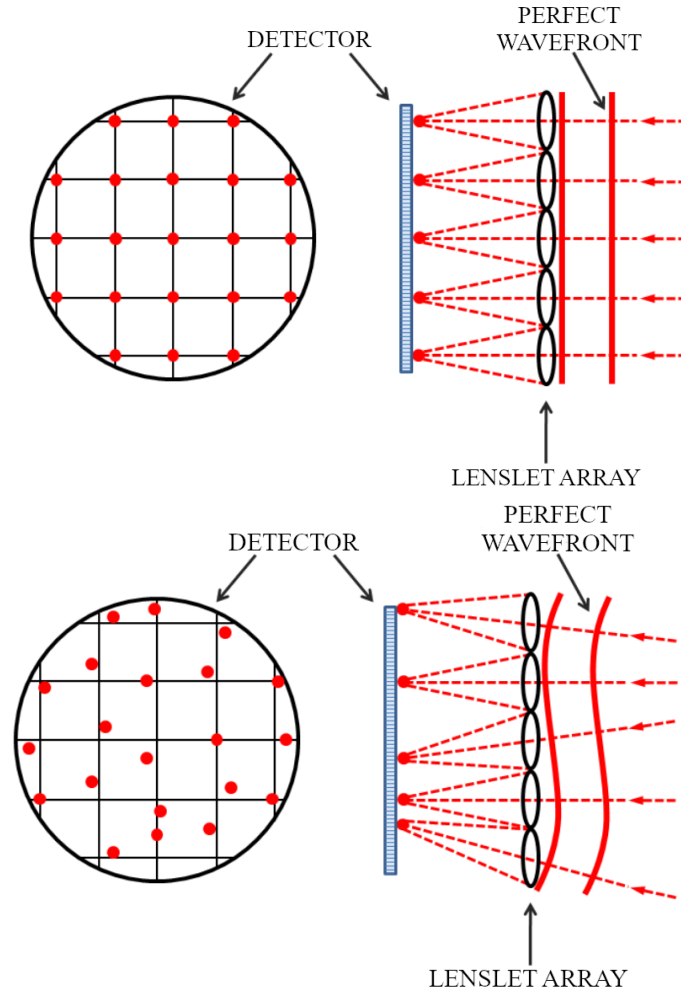


Figura 2.5: Schema di funzionamento dello SH WFS e differenza tra un fronte d'onda deformato ed uno piano

sfrutta il defocus dell'immagine causato dalla curvatura positiva o negativa del fronte d'onda. Come rappresentato in Figura (2.6) quando la curvatura è positiva viene formata un'immagine nel cosiddetto *intra-focal plane* che risulta più brillante rispetto a quella extra-focale, quando la curvatura risulta negativa, al contrario, l'immagine sarà formata nell'*extra-focal plane*. Per la derivazione della curvatura del fronte si posizionano due detector nei due piani citati precedentemente. La differenza normalizzata dell'intensità relativa ai due piani è proporzionale al Laplaciano del fronte d'onda come segue:

$$\frac{I_1(\vec{r}) - I_2(\vec{r})}{I_1(\vec{r}) + I_2(\vec{r})} \propto \nabla^2 W(\vec{r}) \quad (2.15)$$

2.2. SENSORE DI FRONTE D'ONDA

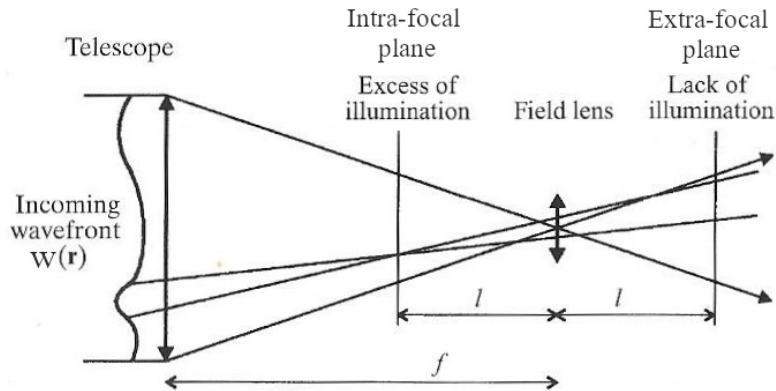


Figura 2.6: Schema del Curvature Wavefront Sensor dove l è la distanza dei due piani dal piano focale, f la lunghezza focale ed $W(r)$ il fronte d'onda

dove $I_1(\vec{r})$ e $I_2(\vec{r})$ sono le intensità relative all'intra-focale ed extra-focale, $W(\vec{r})$ il fronte d'onda.

2.2.4 Sensore di fronte d'onda a piramide

Il Sensore di fronte d'onda a piramide (P-WFS) è stato ideato da Roberto Ragazzoni (5) e sfrutta un prisma piramidale a base quadrata posto nel piano focale del telescopio, design basato sul "knife-edge test" di Foucault. Il fascio incidente relativo alla stella guida viene focalizzato nel vertice del prisma. Come si può notare dalla Figura (2.8) le 4 facce del prisma dividono la luce in 4 fasci che, attraverso un collimatore, producono 4 immagini differenti della pupilla sul detector. L'intensità di luce di ognuna delle 4 immagini è proporzionale alla luce che colpisce rispettivamente ognuna delle 4 facce del prisma.

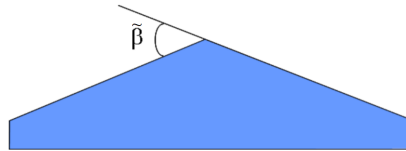


Figura 2.7: Angolo relativo al vertice del prisma

La distanza tra i centri delle pupille ($d_{centers}$) è descritta dall'angolo $\tilde{\beta}$ formato dal vertice del prisma e dalla lunghezza focale f_{coll} del collimatore

$$d_{centers} = \tilde{\beta}(n - 1)f_{coll} \quad (2.16)$$

dove n è l'indice di rifrazione del prisma.

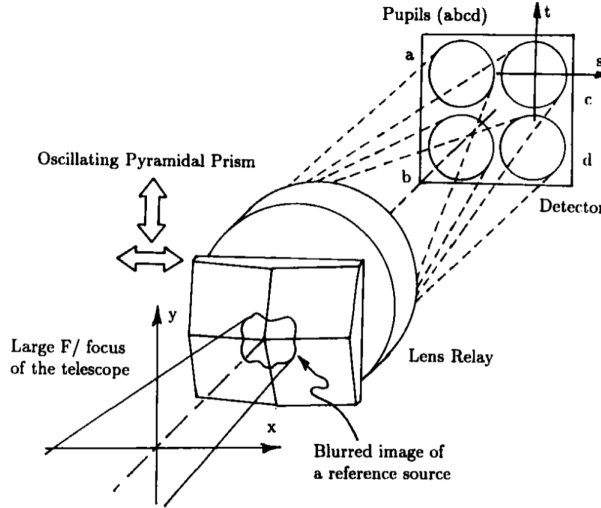


Figura 2.8: Schema del sensore di fronte d'onda a piramide dove (x,y) sono coordinate relative al piano immagine ed (s,t) sono relative al piano della pupilla sul detector (5)

Per la determinazione del tilt il P-WFS si comporta esattamente come un sensore a 4 quadranti dove le 4 celle sono rappresentate dalle 4 pupille intere. Per il calcolo dell'inclinazione si procede esattamente come nelle equazioni (2.9) e (2.10) dove A,B,C,D sono i flussi integrati delle 4 pupille. Il vantaggio del sensore a piramide è che l'intera pupilla viene quadruplicata nel detector perciò anche le sotto aperture sono focalizzate direttamente nelle 4 immagini nel piano del CCD. La determinazione delle aberrazioni di ordine maggiore avviene, quindi, considerando il tilt locale di ognuna delle sotto aperture (4 sono rappresentate dai quadrati colorati in Figura (2.9)) considerando le stesse equazioni valide per il QC-WFS dove si considera la differenza di intensità di ognuna sub apertura nelle 4 immagini.

Il sensore porta con se altri vantaggi rispetto allo Shack-Hartmann di seguito elencati:

- *Riduzione dell'errore poissoniano:* La dimensione dello spot nel vertice della piramide è circa $\frac{\lambda}{D}$, quindi l'errore associato è:

$$\epsilon_P = \frac{\lambda}{D} \frac{1}{2\sqrt{M}} = \frac{\epsilon_{SH}}{N} \quad (2.17)$$

2.2. SENSORE DI FRONTE D'ONDA

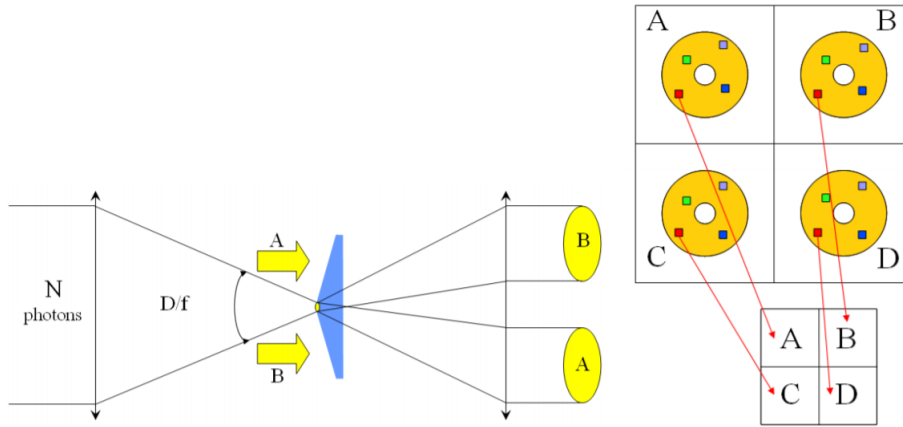


Figura 2.9: Rappresentazione delle sub aperture relative alle 4 pupille

dove λ è la lunghezza d'onda, D il diametro della pupilla, M il numero di fotoni, ϵ_{SH} è l'errore relativo allo SH-WFS ed N è il numero di lenti che compongono l'array.

- *Variazione del campionamento spaziale:* Attraverso il rebinning del CCD è possibile cambiare la dimensione delle sotto aperture così da diminuire il rumore di lettura. La dimensione ottimale è quella del raggio di Fried dividendo l'immagine della pupilla in D/r_0 sotto aperture. Una dimensione inferiore ad r_0 porterebbe ad un sovracampionamento con una conseguente perdita di luce.
- *Sensibilità maggiore nel Closed Loop :* Nel Closed Loop la dimensione dello spot nel vertice della piramide tende, dalla grandezza seeing limited $\theta_{SL} = \frac{\lambda}{r_0}$, a diventare più piccolo fino al caso ideale di limite di diffrazione $\theta_{DL} = \frac{\lambda}{D}$. La diminuzione della dimensione dello spot provoca un'aumento della sensibilità e un conseguente aumento del rapporto segnale rumore (SNR). L'aumento del SNR provoca un aumento del limite teorico della magnitudine osservabile perciò, per esempio, con un telescopio di classe 10 m è possibile osservare a magnitudini 1-2 mag maggiori rispetto ad altri sensori di fronte d'onda. La diminuzione della dimensione dello spot fa sì che la linearità venga ridotta portando ad una minore stabilità del sensore. Per ovviare a questo problema viene generata una modulazione, ovvero un movimento oscillatorio attorno al vertice della piramide così da far passare lo spot in tutte le facce ad una frequenza maggiore rispetto a quella di lettura del CCD.

2.3 Ricostruzione del fronte d'onda

Il sensore di fronte d'onda, oltre a rilevare inclinazioni e curvature, deve essere in grado di derivare i comandi da inviare allo specchio deformabile (2.4). I dati raccolti dal sensore di fronte d'onda sono rappresentati dal vettore \vec{S} mentre il vettore contenente i voltaggi da inviare allo specchio è rappresentato da un vettore $\vec{\phi}$ formato dai valori della fase. La relazione tra questi due vettori è descritta dalla seguente equazione

$$\vec{S} = \mathbf{A} \vec{\phi} + \vec{n} \quad (2.18)$$

dove \mathbf{A} è nota come *matrice di interazione*, \vec{n} è il vettore relativo al rumore. Per la determinazione di $\vec{\phi}$ il sistema ricava una matrice \mathbf{B} chiamata *matrice di ricostruzione*, legata ad \mathbf{A} dalla relazione

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A}^{-1}) \mathbf{A}^T \quad (2.19)$$

Nella maggior parte dei casi l'inversione risulta particolarmente difficile perché $(\mathbf{A}^T \mathbf{A}^{-1})$ è singolare. Un possibile approccio per la descrizione di \mathbf{B} è quello di utilizzare il *metodo modale* cioè rappresentare il fronte d'onda con una serie di coefficienti derivanti dall'espansione in serie dei polinomi di Zernike Z_{ij} descritti dall'equazione (2.4). La complessità di calcolo di questi ricostruttori cresce come $O(N^2)$ dove N sono i gradi di libertà del sistema. Il tempo di risposta deve essere sempre più piccolo perciò è facile intuire che la complessità di ricostruzione per telescopi di prossima generazione diventi presto insostenibile.

2.4 Specchi deformabili

La funzione dello specchio deformabile è quella di correggere le aberrazioni del fronte d'onda utilizzando le informazioni ricevute dal sensore di fronte. Generalmente composto da un array di attuatori collegati ad una superficie ottica (specchio) sottile che si deforma in funzione del movimento degli attuatori stessi. I principali parametri che descrivono uno specchio deformabile sono i seguenti:

- *Numero di attuatori*: determinano i gradi di libertà che il sistema è in grado di correggere. Il numero di attuatori è proporzionale a D^2 dove D è il diametro del telescopio. Per esempio lo specchio deformabile M4 di E-ELT è progettato per montare un numero pari a 5190 attuatori.
- *Tempo di risposta*: è il tempo impiegato dallo specchio per eseguire i comandi imposti dal sensore.

2.4. SPECCHI DEFORMABILI

- *Escursione massima (stroke)*: è l'estensione massima degli attuatori da una posizione centrale nulla di riferimento, può essere positiva o negativa. Valori tipici sono compresi in un range che va da ± 1 a ± 30 micrometri.
- *Spaziatura*: è la distanza tra i centri degli attuatori.

Esistono varie tecnologie utilizzate per la realizzazione di specchi deformabili. Di seguito dividiamo due categorie differenziate dal tipo di attuatori:

- *Specchi deformabili con attuatori piezoelettrici*: gli attuatori piezoelettrici sfruttano la piezoelettricità, ossia la possibilità di deformare in una determinata direzione un materiale generando una differenza di potenziale. Le principali tipologie di specchi che utilizzano questa tecnologia sono *gli specchi bimorfi* e *gli specchi segmentati*.
 - *Specchi bimorfi*: consistono in due superfici piezoelettriche legate insieme ognuna con uno stato di polarizzazione inverso all'altro lungo l'asse ortogonale alla superficie. Un array di elettrodi è inserito all'interno di quest'ultime. La superficie superiore funge da specchio. Questo tipo di specchi sono anche chiamati *specchi a curvatura*, questo perché quando viene applicata una carica ad un elettrodo una superficie si contrae e di conseguenza l'altra si espande generando così una curvatura locale. Grazie al loro peso esiguo si possono montare su una piattaforma tip-tilt così da non aggiungere ottiche al sistema.
 - *Specchi segmentati*: sono formati da una serie di specchi di eguali forma e dimensione controllati separatamente. Per non utilizzare un numero eccessivo di specchi ogni segmento viene dotato di 3 gradi di libertà: piston e tip-tilt, questo comporta l'utilizzo di un numero tre volte maggiore di attuatori rispetto a specchi solo piston. Valori tipici del numero di attuatori sono qualche migliaio. Gli specchi principali di grandi telescopi come JWST rappresentato in Figura (2.10), Keck ed il futuro E-ELT utilizzano questa tecnologia.

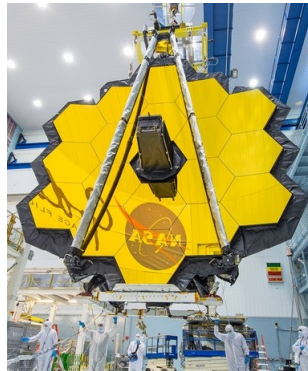


Figura 2.10: Specchio primario segmentato di James Webb Space Telescope

- *Specchi deformabili senza attuatori piezoelettrici:* non utilizzano la piezoelettricità ma attuatori elettromagnetici. I principali sono *gli specchi a membrana, gli specchi secondari deformabili* e i più recenti *MOEMS*.
 - *Specchi a membrana:* sono costituiti da una membrana riflettente deformata da forze elettrostatiche in una camera a vuoto parziale.
 - *Specchi deformabili secondari:* sono utilizzati per eliminare eventuali ottiche aggiuntive al sistema. Consistono in uno specchio convesso sottile la cui forma è controllata da attuatori elettromagnetici. Sono installati in telescopi come il Magellan Telescope, il Large Binocular Telescope e nel Very Large Telescope come evidenziato in Figura (2.11).
 - *MOEMS (Micro-Optical-Electrical-Mechanical System):* per la correzione della turbolenza su telescopi estremamente grandi (30-50 m) alla lunghezza d'onda del visibile sono richiesti specchi con un eccessivo numero di attuatori. Per ovviare a questo problema sono stati ideati i cosiddetti *MOEMS* cioè specchi creati utilizzando la microlitografia. Hanno stroke molto ridotti e dimensioni limitate ma dalla loro parte hanno tempi di risposta quasi nulli e costi molto contenuti.

2.5 Stelle guida

Per la correzione della turbolenza nelle immagini astronomiche è necessario l'utilizzo di una sorgente, affiancata all'oggetto scientifico, per la determinazione delle aberrazioni chiamata stella guida (GS). Le stelle guida devono

2.5. STELLE GUIDA

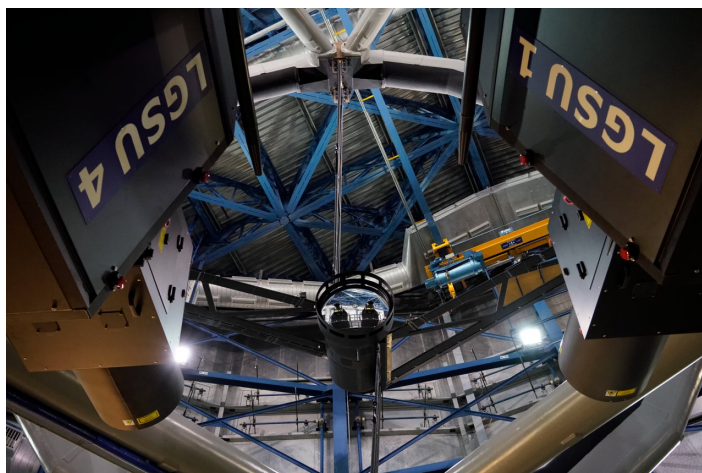


Figura 2.11: Specchio secondario deformabile di VLT

trovarsi all'interno dell'angolo isoplanatico (1.3) per far sì che la correzione sia accettabile. Queste sorgenti possono essere di due tipi: *stelle guida naturali* (NGS) o *stelle guida laser* (LGS).

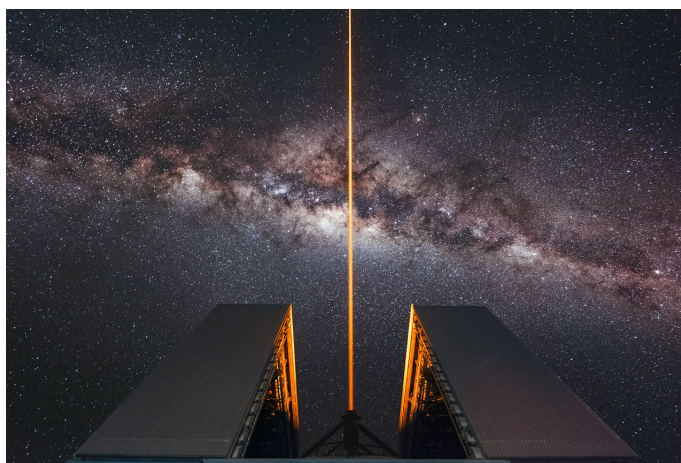


Figura 2.12: Stella guida laser di VLT

- *Stelle guida naturali*: esistono due problemi che sorgono utilizzando questo tipo di sorgenti guida, l'anisoplanatismo e il campionamento del cielo. Il primo fa sì che la stella debba essere vicino all'oggetto da osservare. Il secondo causa la necessità di una stella brillante. Per esempio, nel vicino infrarosso, si richiede una stella di almeno 16 magnitudini. Questo fa sì che le porzioni di cielo osservabili diminuiscano drasticamente, soprattutto quando si osserva in direzione del piano galattico, a causa dell'assorbimento delle polveri interstellari.

- *Stelle guida laser*: i problemi di campionamento del cielo e di anisoplanatismo possono essere risolti utilizzando delle sorgenti laser artificiali. Esistono due distinti meccanismi usati per le LGS, il primo sfrutta lo scattering Rayleigh su zone atmosferiche dense (z circa 30 Km) mentre il secondo utilizza il processo fisico della fluorescenza degli atomi di Sodio, questo concetto verrà descritto nel dettaglio nel prossimo capitolo. Le stelle guida laser portano con se deficit non trascurabili. La distanza finita della sorgente artificiale dallo specchio del telescopio fa sì che la porzione di atmosfera campionata non sia un cilindro ma un cono (*effetto cono*), ciò comporta la perdita di importanti informazioni sulla turbolenza degli strati più alti come rappresentato in Figura (2.13). Il tip-tilt non può essere determinato utilizzando una LGS perchè la posizione della stella guida è corrotta dalla propagazione verso l'alto del fascio attraverso gli strati turbolenti, ciò comporta l'utilizzo di una NGS per la correzione del tip-tilt. La NGS utilizzata insieme alla LGS può avere magnitudini superiori non danneggiando, quindi, il campionamento del cielo. Un'altro problema riguarda lo spessore dello strato di Sodio che rende l'immagine della sorgente non puntiforme ma allungata simile ad un sigaro. Per ovviare a questo problema è in fase di sviluppo un sensore di fronte d'onda chiamato INGOT basato sul sensore a piramide.

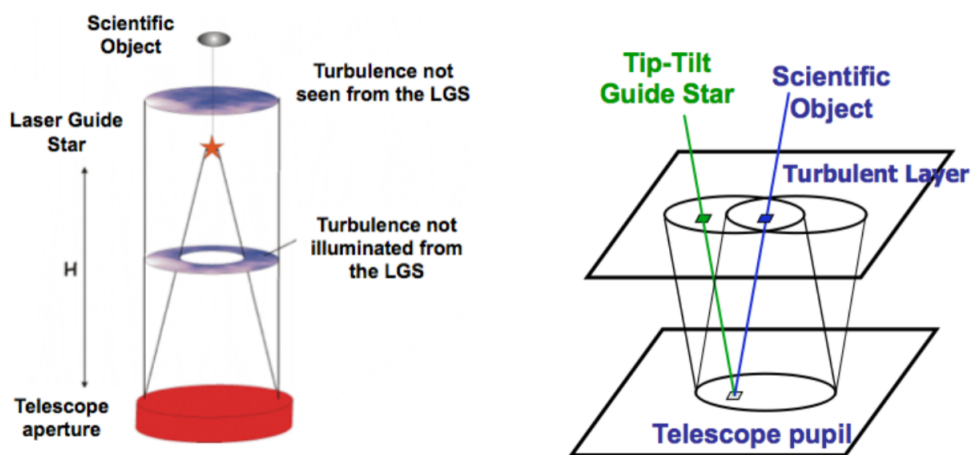


Figura 2.13: Rappresentazione dell'effetto cono

2.6 MCAO: Ottica adattiva multi-coniugata

Il principale problema della SCAO (Single-conjugate adaptive optics), ossia il sistema di ottica adattiva che si serve dell'utilizzo di una sola stella gui-

2.6. MCAO: OTTICA ADATTIVA MULTI-CONIUGATA

da, è l'anisoplanatismo. Ciò comporta che la PSF lungo il campo di vista non risulti costante. La richiesta di una sorgente brillante sufficientemente vicina all'oggetto da osservare aggrava ulteriormente la situazione riducendo il campionamento del cielo. Per aumentare, quindi, l'area di correzione è necessario l'impiego di un certo numero di stelle guida laser in grado di restituire un campionamento dell'intero volume 3D della turbolenza, questa tecnica è chiamata *ottica adattiva multi-coniugata*. Il concept si basa sull'utilizzo di più specchi deformabili otticamente coniugati a strati di atmosfera di altezza variabile e ad una serie di sensori di fronte d'onda che osservano vari punti del campo di vista. La frazione di cielo che può essere corretta dipende dalla cosiddetta *metapupilla* ossia la sovrapposizione delle singole pupille relative alle stelle guida ad una determinata altitudine come rappresentato in figura (2.14). Come accennato precedentemente la correzione

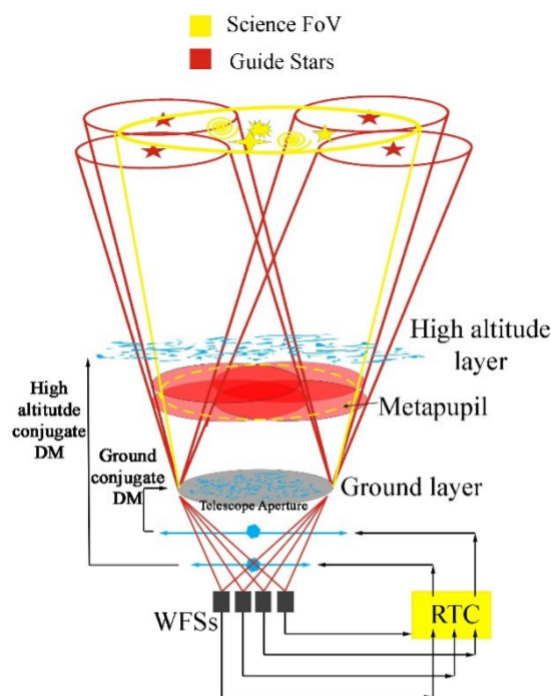


Figura 2.14: Concept di un sistema di ottica adattiva multi-coniugata

sull'intero campo di vista avviene grazie all'utilizzo di specchi deformabili che sono coniugati ognuno ad uno strato turbolento. Per avere maggiori risultati si potrebbe idealmente inserire uno specchio per ogni strato inteso ma questo comporterebbe costi elevati e complicazioni sulla struttura del sistema. Di solito si utilizzano 2 o 3 specchi deformabili. Ci sono due tipi di tecniche utilizzate nell'ottica adattiva multi-coniugata: *star oriented* e *layer oriented*.

- *Star oriented*: viene utilizzato un sensore di fronte d'onda per ogni stella guida utilizzata. Ogni sensore riceve informazioni che poi, attraverso algoritmi di ricostruzione, vengono utilizzate per ricreare il profilo tridimensionale della turbolenza e per guidare gli specchi deformabili. Il dispendio computazionale di questa tecnica è molto elevato a causa dell'elevato numero di dati da elaborare.
- *Layer oriented*: questo sistema inserisce un sensore di fronte d'onda otticamente coniugato ad ognuno degli specchi deformabili. Essendo ogni specchio coniugato ad uno strato turbolento, si associa ad ogni sensore di fronte d'onda uno strato in modo tale che esso osservi il pattern di sovrapposizione delle stelle a quella determinata altezza coniugata (8). I vantaggi di questa tecnica sono molteplici: la luce delle varie sorgenti si sovrappone aumentando il rapporto segnale rumore e la quantità di sensori di fronte d'onda è pari al numero di specchi e non a quello delle stelle guida. Inoltre il costo computazionale è notevolmente ridotto. Di seguito, in Figura (2.15), la rappresentazione delle due tecniche.

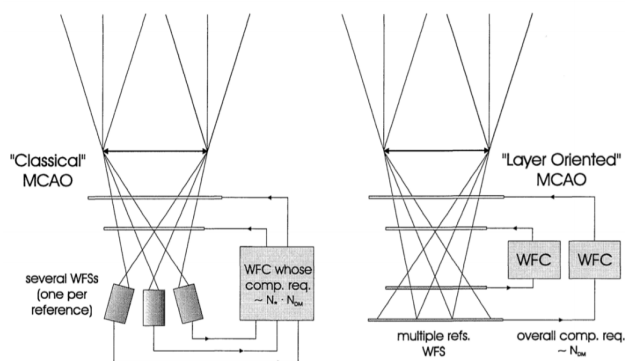


Figura 2.15: A sinistra è rappresentata la tecnica *star oriented* mentre a destra la *layer oriented*

Capitolo 3

Analisi e trattamento dei dati

3.1 Strato di Sodio

Nella Mesosfera, a circa 92 Km di altitudine, è presente uno strato di Sodio che ricopre l'intero pianeta generato dall'ablazione di meteore e polveri interplanetarie. Lo spessore medio è di 15.8 ± 0.4 km, i suoi limiti inferiore e superiore medi sono rispettivamente 81.67 ± 0.12 km e 104.86 ± 0.30 km con un'altitudine media pari a 90.8 ± 0.1 km (4). Sotto il limite inferiore, il Sodio, tende a creare composti con Ossigeno ed Idrogeno mentre oltre l'estremità superiore può sopravvivere solamente sottoforma di ioni. La tecnica utilizzata per ricavare informazioni sulla densità di questo strato è la tecnologia LIDAR (Laser Imaging Detection and Ranging). Un fascio laser viene diretto verso l'atmosfera, il tempo trascorso tra l'emissione dell'impulso e la ricezione del segnale di retrodiffusione caratterizza la distanza e la forma dell'oggetto osservato, nel nostro caso l'abbondanza di atomi di Sodio. Attraverso questa tecnica si è osservato che lo strato è spesso composto da substrati occasionali che si fondono e si mescolano in un lasso di tempo molto breve. Come è possibile notare dalla Figura (3.1) il profilo di densità degli atomi di Sodio lungo questo livello è altamente variabile (7). Il principale utilizzo dello strato di Sodio riguarda la formazione delle stelle laser artificiali in questo caso utilizzando il fenomeno di scattering risonante. Il laser viene sintonizzato ad una frequenza pari alla transizione della riga D2 del Sodio, in questo modo l'elettrone risulta eccitato e riemette una radiazione di lunghezza d'onda pari a 589 nm, ritornando al suo stato fondamentale. Le righe D1 e D2 producono il noto "doppietto del Sodio" e sono delle cosiddette righe telluriche ossia formate da un processo di assorbimento

dovuto all'atmosfera terrestre. Quel che ne risulta è un oggetto dalla forma allungata la cui lunghezza è determinata dall'angolo di osservazione.

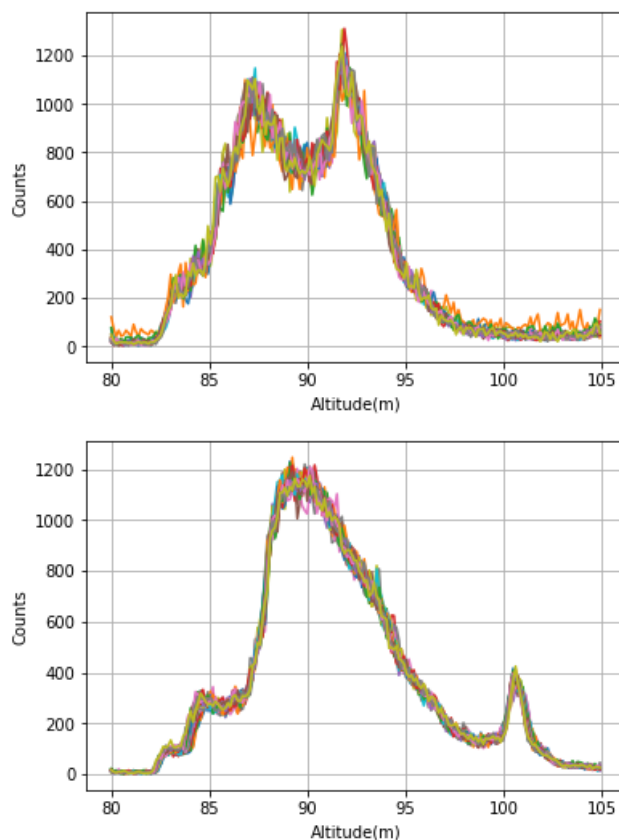


Figura 3.1: Confronto di due profili di densità dello strato di Sodio ricavati dall'analisi di Angel Otarola

3.2 Profilo apparente dello strato di Sodio

3.2.1 Dati

Per lo scopo oggetto di questa tesi sono necessari due profili:

- *Profilo di densità dello strato di Sodio:* I dati che descrivono la distribuzione di densità dello strato sono stati acquisiti da Thomas Pfrommer e Paul Hickson (3) usando un sistema LIDAR ad alta risoluzione installato al telescopio di classe 6m Large Zenith Telescope vicino a Vancouver (Canada), successivamente selezionati, analizzati e normalizzati da Angel Otarola, Systems Scientist alla TMT Observatory

3.2. PROFILO APPARENTE DELLO STRATO DI SODIO

Corporation. Ogni profilo rappresentato in Figura (3.1) è ottenuto dalla sovrapposizione di 30 profili ottenuti con una risoluzione temporale di 10 secondi e spaziale di 126.5m che, considerando un range di altezza da 80000 m a 105047 m, suddivide lo strato in 198 livelli.

- *Profilo d'intensità del fascio laser:* Si assume una distribuzione Gaussiana normalizzata con una deviazione standard $\sigma_L=0.5''$. La sigma viene assunta tale a causa della divergenza del fascio laser di $1''$.

3.2.2 Modello

Il modello utilizzato, rappresentato in Figura (3.2), è caratterizzato da un sistema di coordinate cartesiane con l'origine degli assi posta in corrispondenza del proiettore laser. L'ascissa, positiva verso sinistra, indica la distanza dei vari punti dello specchio dal proiettore mentre l'ordinata indica l'altitudine. Lo specchio utilizzato è il primario di E-ELT (European Extremely Large Telescope) con un diametro di 38.55 m i cui bordi distano rispettivamente 40.666 m e 2.116 m dall'origine degli assi. La distanza del centro della pupilla può assumere due diversi valori rispettivamente pari a 21.391m e 21.137m. In questo caso viene utilizzato il valore maggiore cioè 21.391m. Nella parte superiore della rappresentazione si noti che lo strato di Sodio è caratterizzato da un profilo di densità.

3.2.3 Procedura

Le tre distribuzioni di densità dello strato di Sodio utilizzate sono tre profili del catalogo fornito da Angel Otarola: il profilo numero 1 è caratterizzato da due picchi di densità, il profilo 2 presenta una struttura quasi gaussiana con un solo picco centrale e un secondo picco molto più contenuto ed infine il profilo numero 3 è descritto da una struttura molto particolare caratterizzata da una parte quasi piana e un picco molto accentuato. I profili, rappresentati di seguito nelle Figure (3.3), (3.4), (3.5), sono stati considerati all'interno di un range di altezza che va da 80000 m a 105000 m e sono denominati rispettivamente $N_1^j(y)$, $N_2^j(y)$ ed $N_3^j(y)$. Il profilo di intensità del laser viene chiamato $g(y)$. Il profilo apparente, denominato $S_i^j(y)$ dove $i=1,2,3$ rappresenta il profilo utilizzato e $j=A,B,C$ la sotto apertura considerata, è stato ricavato attraverso la stesura di un codice in linguaggio di programmazione Python utilizzando il comando *convolve* del modulo *numpy*. Il codice viene inserito in Appendice (D)

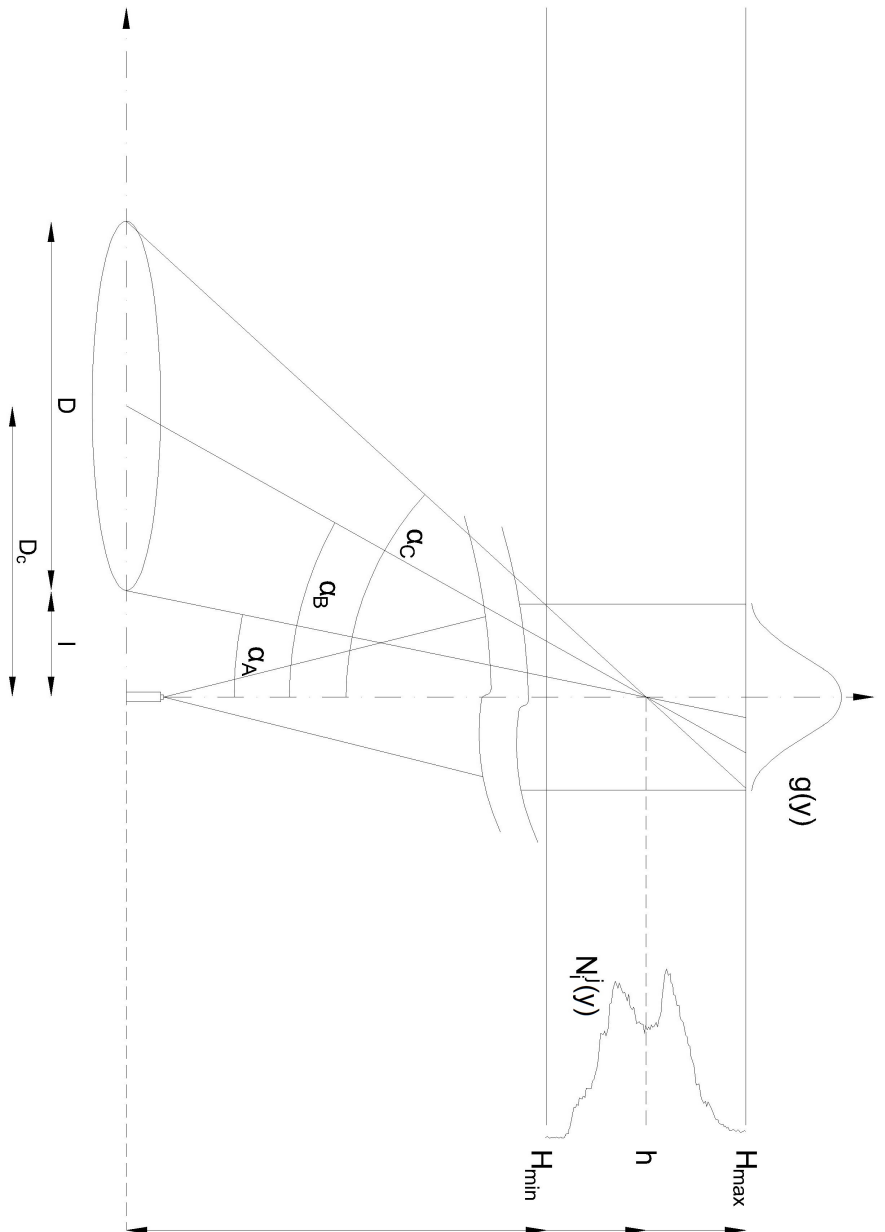


Figura 3.2: In questa rappresentazione D è il diametro del telescopio, l la distanza tra il proiettore laser e il bordo interno dello specchio, D_c la distanza tra il lanciatore e il centro del telescopio, H_{min} ed H_{max} sono rispettivamente l'altezza del bordo inferiore e superiore dello strato di Sodio, h rappresenta l'altezza media dello spessore mentre α_A , α_B ed α_C rappresentano gli angoli generati tra l'asse delle ordinate e la congiungente sotto apertura-strato di Sodio. I valori di queste variabili sono riportati in appendice.

3.2. PROFILO APPARENTE DELLO STRATO DI SODIO

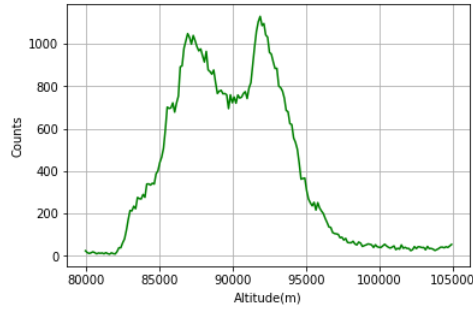


Figura 3.3: Profilo 1

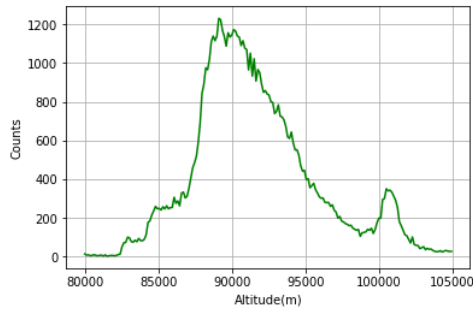


Figura 3.4: Profilo 2

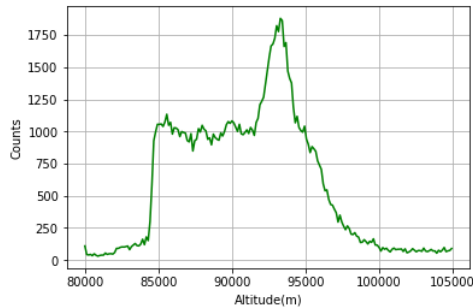


Figura 3.5: Profilo 3

L'evoluzione del profilo lungo tutta l'apertura del telescopio viene descritta utilizzando tre sotto aperture poste a 2.116 m, 21.391 m e 40.66 6m rispettivamente denominate A,B, C. Di seguito vengono descritti i tre casi associati alle tre sotto aperture considerate:

- **CASO A:** nella prima ipotesi viene analizzata la sotto apertura posta a 2.116 m dal proiettore laser che produce un angolo α_A pari a $4.744''$. La distribuzione $g(y)$, avente una $\sigma_L=0.22$ m, viene proiettata nella congiungente ottenendo un profilo $g_A(y)$ avente una sigma pari a:

CAPITOLO 3. ANALISI E TRATTAMENTO DEI DATI

$$\sigma_L^A = \frac{\sigma_L}{\sin(\alpha_A)} \approx \frac{\sigma_L}{\alpha_A} = 9565.400m \quad (3.1)$$

dove viene assunto che per angoli molto piccoli $\sin(\alpha_A)$ è circa α ed $N_1^j(y)$ può considerarsi costante. Viene effettuata quindi una convoluzione tra $N_1^j(y)$ e $g_A(y)$ per ottenere il profilo apparente richiesto. Qui di seguito, in Figura (3.6), sono rappresentati i tre profili apparenti, $S_1^A(y)$, $S_2^A(y)$ ed $S_3^A(y)$, ed il profilo $g_A(y)$ osservati dalla sotto apertura A.

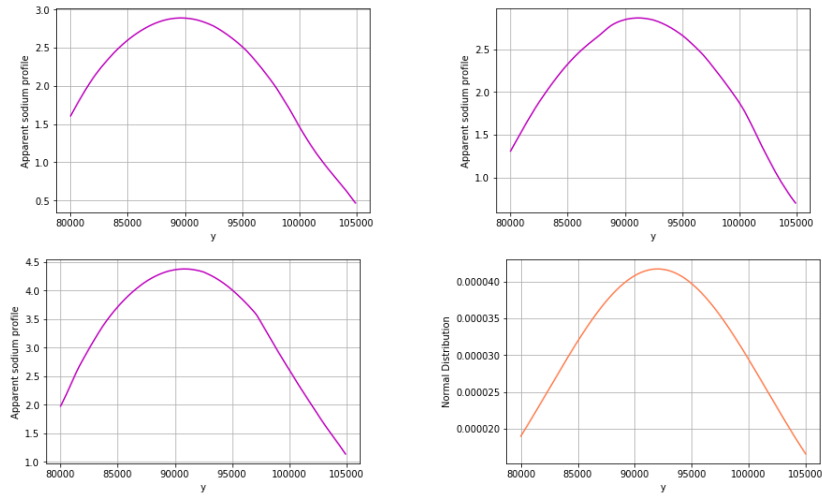


Figura 3.6: Rappresentazione grafica dei tre profili apparenti visti dalla sotto apertura A (magenta) ed il profilo gaussiano $g_A(y)$ (arancione). In alto a destra è rappresentata la convoluzione relativa al profilo 1, in alto a destra quella relativa al numero 2 mentre in basso a sinistra quella relativa al numero 3.

- **CASO B:** si studia la sotto apertura B posta a 21.391 m dal proiettore laser che genera un angolo α_B pari a 47.959". Il profilo Gaussiano $g_B(y)$ presenta una sigma:

$$\sigma_L^B \approx \frac{\sigma_L}{\alpha_B} = 946.189m \quad (3.2)$$

Effettuata la convoluzione, in Figura (3.7) sono riportati i tre profili apparenti, $S_i^B(y)$ e il profilo $g_B(y)$ osservati dalla sotto apertura B.

- **CASO C:** Infine è trattata la sotto apertura C con un angolo $\alpha_C=91.273''$ che produce sigma per $g_C(y)$ pari a:

$$\sigma_L^C \approx \frac{\sigma_L}{\alpha_C} = 497.569m \quad (3.3)$$

3.2. PROFILO APPARENTE DELLO STRATO DI SODIO

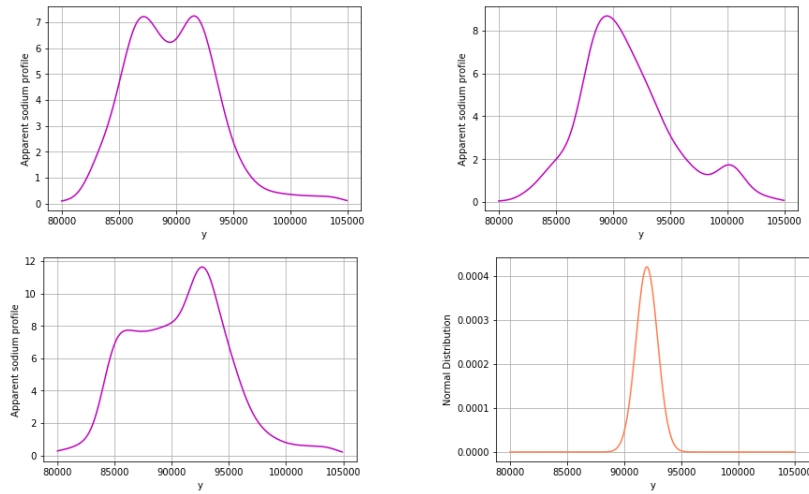


Figura 3.7: Rappresentazione grafica dei tre profili apparenti visti dalla sotto apertura B (magenta) ed il profilo gaussiano $g_B(y)$ (arancione). In alto a destra è rappresentata la convoluzione relativa al profilo 1, in alto a destra quella relativa al numero 2 mentre in basso a sinistra quella relativa al numero 3.

Una volta eseguita la convoluzione qui di seguito si può notare, in Figura (3.8), come la qualità del profilo risulti nettamente migliore rispetto ai due casi precedenti. Si può notare la maggiore quantità di feature e di dettagli. Ciò si traduce in un profilo apparente molto più strutturato e difficile da analizzare.

Fino ad ora sono stati riportati i casi in cui si mostravano i tre diversi profili osservati dalla stessa sotto apertura ma non producono informazioni sull'evoluzione del profilo lungo l'apertura del telescopio. Risulta utile far risaltare lo stesso profilo lungo i tre diversi punti dello specchio così da mettere in mostra le principali variazioni. Di seguito sono riportate le evoluzioni dei singoli profili lungo le tre sotto aperture rispettivamente divisi nei casi 1,2,3:

- **CASO 1:** Il profilo numero 1 è caratterizzato dalla presenza di due picchi di densità a circa 87 e 92 Km di altezza. In Figura (3.9) è rappresentata l'evoluzione del profilo apparente partendo dalla sotto apertura A:

CAPITOLO 3. ANALISI E TRATTAMENTO DEI DATI

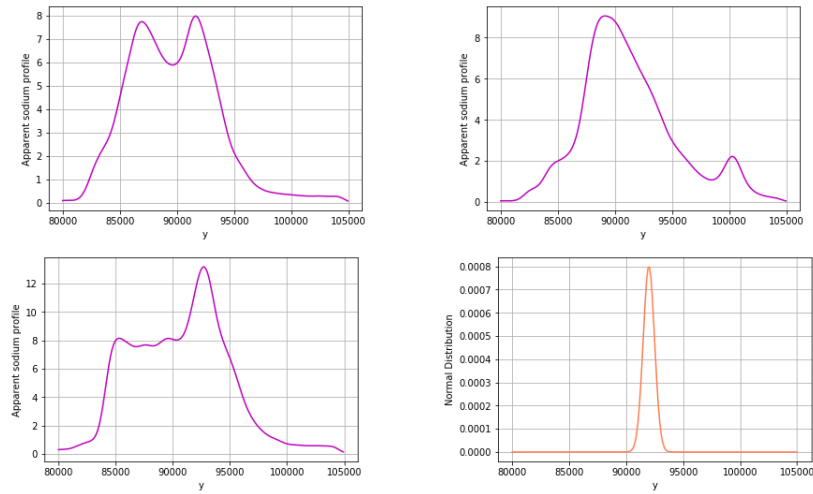


Figura 3.8: Rappresentazione grafica dei tre profili apparenti visti dalla sotto apertura C (magenta) ed il profilo gaussiano $g^C(y)$ (arancione). In alto a destra è rappresentata la convoluzione relativa al profilo 1, in alto a destra quella relativa al numero 2 mentre in basso a sinistra quella relativa al numero 3.

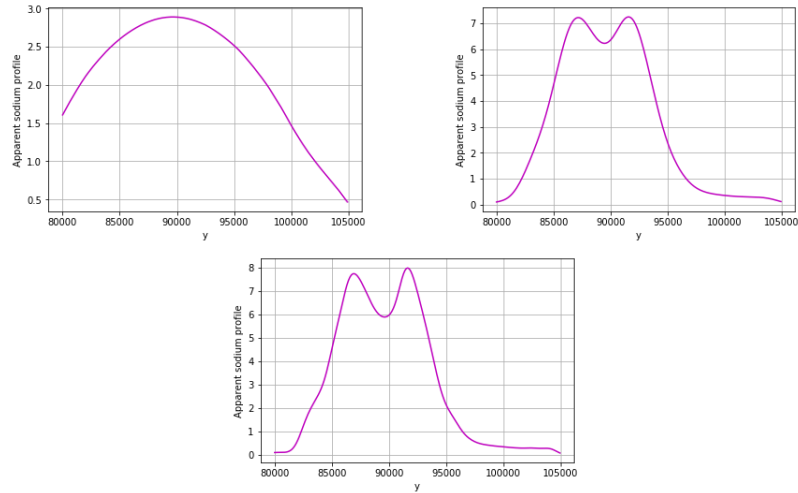


Figura 3.9: Rappresentazione grafica dell'evoluzione del profilo S_1^j lungo l'apertura del telescopio. In alto a sinistra è raffigurato il profilo visto dall'apertura A, in alto a destra dalla B mentre in basso al centro dalla C.

In questo modo è possibile apprezzare l'incremento della qualità e della risoluzione andando verso il bordo esterno del telescopio. Dalla sotto apertura A si vede una struttura Gaussiana che richiama il profilo di intensità del laser ma priva di dettagli e di informazioni sul profilo stesso. Considerando la sotto apertura B cominciano ad emergere i

3.2. PROFILO APPARENTE DELLO STRATO DI SODIO

primi particolari e si iniziano a notare i due picchi caratterizzanti il profilo numero 1. Infine dalla sotto apertura C si osserva il profilo migliore contraddistinto da una maggiore presenza di dettagli e dal quale si possono ricavare maggiori informazioni sulla distribuzione di densità dello strato.

- **CASO 2:** Il profilo numero 2 invece è descritto da una distribuzione quasi Gaussiana che presenta un secondo picco di dimensioni ridotte sulla parte destra. Di seguito viene rappresentato il profilo apparente visto dalle differenti sotto aperture:

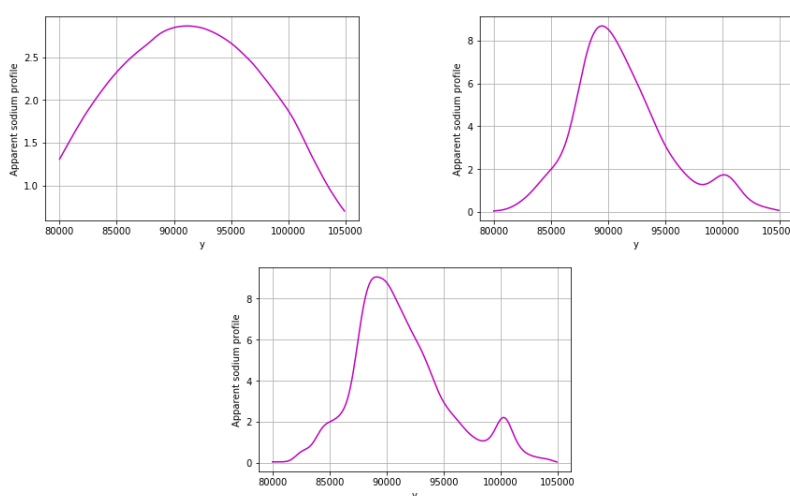


Figura 3.10: Rappresentazione grafica dell'evoluzione del profilo S_2^j lungo l'apertura del telescopio. In alto a sinistra è raffigurato il profilo visto dalla sotto apertura A, in alto a destra dalla B mentre in basso al centro dalla C.

Anche in questo caso il profilo osservato dalla sotto apertura A equivale ad una struttura non ben definita. Dalla sotto apertura B la forma della distribuzione si fa più dettagliata e si distingue il secondo picco anche se molto smussato. Dalla posizione più esterna è apprezzabile la forma quasi originale del profilo caratterizzata dalla presenza del secondo picco e la presenza di ulteriori dettagli.

- **CASO 3:** Nell'ultima fase è trattato il profilo numero 3 che presenta una parte quasi piana seguita da un picco isolato. In Figura (3.11) è riportata l'evoluzione del profilo apparente generato dalla distribuzione di densità numero 3. Dalla sotto apertura A, come nei due casi precedenti, è presente una struttura che assomiglia ad un profilo Gaussiano priva di particolari e utili informazioni. Dalle sotto aperture B e C si può notare un considerevole miglioramento soprattutto in que-

CAPITOLO 3. ANALISI E TRATTAMENTO DEI DATI

st'ultima nella quale si può apprezzare chiaramente la differenza tra la parte piana e il picco ben definito.

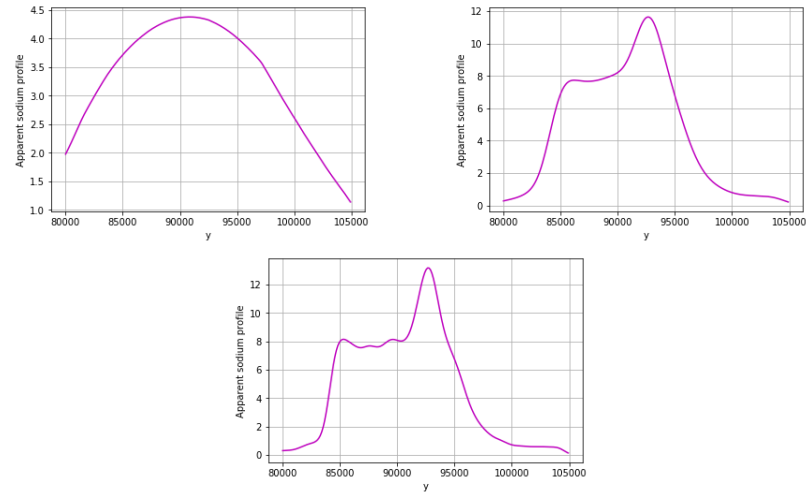


Figura 3.11: Rappresentazione grafica dell'evoluzione del profilo S_3^j lungo l'apertura del telescopio. In alto a sinistra è raffigurato il profilo visto dalla sotto apertura A, in alto a destra dalla B mentre in basso al centro dalla C.

Capitolo 4

Conclusioni

L'ottica Adattiva è stata introdotta per la correzione delle aberrazioni causate dagli strati turbolenti presenti in atmosfera. Uno dei principali problemi di cui soffre un sistema di ottica adattiva classico è la necessità di avere una sorgente all'interno dell'angolo isoplanatico per la deduzione della turbolenza. Sono state così introdotte le stelle guida artificiali. Possono essere prodotte attraverso due distinti meccanismi fisici: lo scattering Rayleigh su zone dense dell'atmosfera oppure il fenomeno della fluorescenza degli atomi di Sodio. Lo strato di Sodio, quindi, ricopre un ruolo fondamentale nella correzione della turbolenza atmosferica. In questo lavoro di tesi è stato utilizzato un campione di tre profili di densità dello strato di Sodio con distribuzioni diverse tra di loro. Il fine era quello di derivare un profilo apparente per ogni profilo di partenza e determinarne qualitativamente l'evoluzione lungo 3 diverse sotto aperture di un telescopio estremamente grande, in questo caso E-ELT. Per raggiungere tale scopo è stata assunta una distribuzione Gaussiana per descrivere il profilo di intensità del laser. Dall'evoluzione dei tre diversi profili apparenti dello strato di Sodio si può evincere che attraverso l'incremento dell'angolo θ , cioè utilizzando le sotto aperture poste a maggiore distanza dall'origine degli assi, si trova una distribuzione di densità sempre più dettagliata e ricca di particolari. Questa caratteristica suggerisce che, osservando attraverso la porzione di specchio più lontana dal proiettore, la stella guida laser presenti una struttura molto più complicata da analizzare. Ciò si traduce in una maggiore complessità nella correzione della turbolenza atmosferica. Utilizzando angoli α ridotti, al contrario, si riscontra un profilo di densità estremamente smussato il quale rende le zone adiacenti al proiettore laser le più favorevoli. Considerando, però, che durante le osservazioni il profilo viene mediato lungo tutta l'apertura possiamo considerare il risultato ottenuto accettabile in quanto il profilo ricavato non presenta lo stesso grado di complessità della distribuzione reale osservata attraverso la tecnica LIDAR. Nell'utilizzo di un telescopio di grande diametro, quindi,

CAPITOLO 4. CONCLUSIONI

è necessario considerare questo problema in quanto la distanza della sotto apertura più lontana dall'origine degli assi diviene importante . Ciò comporta un incremento dell'effetto e di conseguenza la perdita di efficienza nella correzione della turbolenza nelle zone più lontane dal proiettore.

Appendice A

Acronimi

FWHM= Full width at half maximum

RMS= Root mean square

PSF= Point spread function

AO= Adaptive optics

WF= Wavefront

QC-WFS= Quad cell wavefront sensor

SH-WFS= Shack-Hartmann wavefront sensor

C-WFS= Curvature wavefront sensor

P-WFS= Pyramid wavefront sensor

GS= Guide star

LGS= Laser guide star

NGS= Natural guide star

SCAO= Single-conjugate adaptive optics

MCAO= Multiconjugate adaptive optics

LIDAR= Laser imaging detection and ranging

TMT= Thirty meter telescope EELT= European extremely large telescope

APPENDICE A. ACRONIMI

Appendice B

Variabili

B.1 Capitolo 1

P= Pressione

z= Altitudine

g= gravità

V= Volume

\tilde{n} = Numero di moli

R= Costante dei gas

T= Temperatura

$\tilde{\rho}$ = densità

\tilde{m} = massa molecolare

N= numero di molecole

P₀= Pressione al livello del mare

H= Altezza di scala

L= Lunghezza di scala

v= Velocità

ν = Coefficiente di viscosità

γ = Coefficiente verticale adiabatico

D= Diametro del telescopio

β = Angolo zenitale

k= Numero d'onda

λ = Lunghezza d'onda

\tilde{H} = Altezza media della turbolenza

h= Altezza strato turbolento

a= Raggio apertura circolare (diffrazione)

ϕ = Fronte d'onda

A= Ampiezza

ϕ_p = Aberrazioni rimaste

B.2 Capitolo 2

m = Frequenza azimutale

n = Grado radiale

a_j = Coefficienti di aberrazione

$U(\vec{r})$ = Funzione peso

S_x/S_y = Segnali lungo gli assi per un QC-WFS

d = Diametro delle sub-aperture

N = Gradi di libertà del sistema

$W(\vec{r})$ = fronte d'onda

\vec{n} = vettore rumore

B.3 Capitolo 3

l = Distanza tra puntatore laser e bordo interno del telescopio

D_c = Distanza tra il puntatore laser e il centro del telescopio

h = Altezza media dello strato di sodio

α = angolo formato dall'asse delle ordinate e dalla congiungente sottoaperture-strato di sodio

H_{min} = altezza bordo inferiore dello strato di sodio

H_{max} = altezza bordo superiore dello strato di sodio

Appendice C

Valori dei parametri del modello del sistema

C.1 Valori dei parametri

$$D = 38.550\text{m}$$

$$l = 2.116\text{m}$$

$$D_c = 21.391\text{m}$$

$$h = 92000\text{m}$$

$$\alpha_A = 4.744''$$

$$\alpha_B = 47.959''$$

$$\alpha_C = 91.273''$$

$$H_{min} = 80000$$

$$H_{max} = 105000$$

*APPENDICE C. VALORI DEI PARAMETRI DEL MODELLO DEL
SISTEMA*

Appendice D

Codice per la determinazione del profilo apparente

```
import matplotlib.pyplot as plt
import math
import scipy.stats
import numpy as np
df=np.genfromtxt("sodium_profiles_14JUL2010_case07.dat")
g = 91.273/3600
t = (g * np.pi)/180
xp = df[0, :]
y = df[1, :]
x = xp * 1000
plt.plot(x, y, color = 'g')
plt.xlabel('Altitude(m)')
plt.ylabel('Counts')
plt.grid()
plt.show()
mean = 92000
sigmag = 0.22/np.sin(t)
x1 = np.linspace(80000, 105000, 198)
y1 = (1/(sigmag * math.sqrt(2 * math.pi))) * math.e ** (-(x1 - mean) *
*2/(2 * sigmag **2))
plt.plot(x1, y1, color = 'coral')
plt.grid()
plt.xlabel('y')
plt.ylabel('NormalDistribution')
plt.show()
xc = np.convolve(x, x1, mode = 'same')
yc = np.convolve(y, y1, mode = 'same')
```

APPENDICE D. CODICE PER LA DETERMINAZIONE DEL
PROFILO APPARENTE

```
plt.plot(x,yc,color = ' m')  
plt.xlabel('y')  
plt.ylabel('Apparentsodiumprofile')  
plt.grid()  
plt.show()
```

Bibliografia

- [1] R. DAVIES AND M. KASPER, *Adaptive Optics for Astronomy*, ARA&A, 50 (2012), pp. 305–351.
- [2] R. J. NOLL, *Zernike polynomials and atmospheric turbulence*, Journal of the Optical Society of America (1917-1983), 66 (1976), pp. 207–211.
- [3] T. PFROMMER AND P. HICKSON, *High-resolution lidar observations of mesospheric sodium and implications for adaptive optics*, J. Opt. Soc. Am. A, 27 (2010), pp. A97–A105.
- [4] T. PFROMMER AND P. HICKSON, *High resolution mesospheric sodium properties for adaptive optics applications*, A&A, 565 (2014), p. A102.
- [5] R. RAGAZZONI, *Pupil plane wavefront sensing with an oscillating prism*, Journal of Modern Optics, 43 (1996), pp. 289–293.
- [6] F. RODDIER, *The effects of atmospheric turbulence in optical astronomy*, Progress in Optics, 19 (1981), pp. 281–376.
- [7] S. J. THOMAS, D. GAVEL, AND R. KIBRICK, *Analysis of on-sky sodium profile data from Lick Observatory*, Appl. Opt., 49 (2010), p. 394.
- [8] C. VÉRINAUD, C. ARCIDIACONO, M. CARBILLET, E. DIOLAITI, R. RAGAZZONI, E. VERNET-VIARD, AND S. ESPOSITO, *Layer Oriented multi-conjugate adaptive optics systems: performance analysis by numerical simulations*, in Adaptive Optical System Technologies II, P. L. Wizinowich and D. Bonaccini, eds., vol. 4839 of Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series, Feb 2003, pp. 524–535.