



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

**ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

ΕΚΕΦΕ «ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ»

**ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΝΑΝΟΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΚΑΙ ΝΑΝΟΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ**

**ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΠΥΡΗΝΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΣΩΜΑΤΙΔΙΑΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ**



Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Φυσική και Τεχνολογικές Εφαρμογές»

Κβαντομηχανική προσέγγιση βαθμωτών πεδίων σε καμπυλωμένο χωροχρόνο

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

της Φανής Χρηστίδη

Επιβλέπων: Γιώργος Κουτσούμπας

Αθήνα, Ιούνιος, 2019

Περιεχόμενα

1	Μαθηματική και εννοιολογική θεμελίωση	7
1.1	Εισαγωγή	7
1.2	Στοιχεία γεωμετρίας	7
1.2.1	Πολλαπλότητα	7
1.2.2	Ανύσματα, Τανυστές, Τανυστής Riemann	8
1.2.3	Μετρική	12
1.2.4	Καμπυλότητα	13
1.3	Βαρύτητα	15
1.3.1	Αδρανειακό Σύστημα Αναφοράς	15
1.3.2	Νευτώνεια μηχανική, εθσ, γθσ	15
1.3.3	Γεωδαιτική εξίσωση	17
1.3.4	Εξισώσεις πεδίου του Einstein και λύση στο κενό	18
2	Μελανές οπές	23
2.1	Ο θάνατος των αστέρων	23
2.2	Σχηματισμός μελανών οπών	24
2.3	Μελανή οπή Schwarzschild	26
2.3.1	Γεωμετρία Schwarzschild	26
3	Χώρος S-AdS	29
3.1	Στοιχεία του χώρου	29
3.2	Διάδοση βαθμωτού πεδίου σε S-AdS χωροχρόνο	30
4	WKB ημικλασική προσέγγιση	35
4.1	Λύση WKB	35
4.2	Εφαρμογή σε φράγμα δυναμικού	36
5	Προσέγγιση WKB για βαθμωτά πεδία σε χώρο SAdS	41
5.1	Ακριβής λύση	41
5.2	Προσεγγιστική λύση	42
5.3	Αριθμητική επίλυση	45
6	Συμπεράσματα - Σχόλια	49
	Βιβλιογραφία	50

Περίληψη

Η παρούσα εργασία πραγματεύεται μία κβαντομηχανική προσέγγιση της συμπεριφοράς των βαθμωτών πεδίων, όταν αυτά βρίσκονται σε καμπυλωμένο χωροχρόνο. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιείται η προσέγγιση Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB approximation).

Αφορμή υπήρξε η μελέτη των Grain, Barrau που αφορούσε την προσέγγιση WKB δυναμικών βαθμωτών πεδίων σε καμπυλωμένο χωροχρόνο, με στόχο την προσέγγιση ήδη γνωστών ακριβών αποτελεσμάτων, καθώς και τη μελέτη συνθηκών για τις οποίες δεν έχουν αναπτυχθεί άλλες προσεγγίσεις.

Αρχικά γίνεται μία εισαγωγή και μία γενική περιγραφή των όρων που θα χρησιμοποιηθούν, καθώς και μία θεμελίωση των εξισώσεων που θα χρησιμοποιηθούν για την περιγραφή. Θεμέλια της γενικής σχετικότητας όπως η μετρική, οι τανυστές και η καμπυλότητα κρίθηκαν απαραίτητα στοιχεία, ώστε να χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια για να περιγράψουν τις μελανές οπές. Στη συνέχεια, γίνεται μία αστροφυσική αναφορά στις μαύρες τρύπες, καθώς και μία πιο στοχευμένη επανάληψη στις μελανές οπές του Schwarzschild και τη γεωμετρία τους. Ακολουθεί η περιγραφή του χώρου AdS και η κβαντομηχανική προσέγγιση WKB, και περιγράφεται η συμπεριφορά ενός βαθμωτού πεδίου εντός χώρου AdS και παρουσία μελανής οπής Schwarzschild. Εφαρμόζοντας την ημικλασική προσέγγιση WKB σε αυτή την περίπτωση, επιχειρείται η αριθμητική επίλυση για την εύρεση των ενεργειών.

Κλείνοντας, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου, Γιώργο Κουτσούμπα για την καθοδήγηση, τις συμβουλές και την υπομονή του, όχι μόνο στην παρούσα εργασία, αλλά και καθ' όλη τη διάρκεια της φοίτησής μου στο πρόγραμμα.

Ma is a Japanese word which can be roughly translated as "gap", "space", "pause" or "the space between two structural parts". The spatial concept is experienced progressively through intervals of spatial designation. In Japanese, ma, the word for space, suggests interval. It is best described as a consciousness of place, not in the sense of an enclosed three-dimensional entity, but rather the simultaneous awareness of form and non-form deriving from an intensification of vision.

Ma is not something that is created by compositional elements; it takes place in the imagination of the human who experiences these elements. Therefore, ma can be defined as experiential place understood with emphasis on interval.

Ma has also been described as "an emptiness full of possibilities, like a promise yet to be fulfilled", and as "the silence between the notes which make the music".

1 Μαθηματική και εννοιολογική θεμελίωση

1.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα εξοικειωθούμε με βασικές έννοιες και στοιχεία της γενικής θεωρίας της σχετικότητας και της γεωμετρίας. Δε θα γίνει αναλυτική εξαγωγή όλων των εξισώσεων, αλλά θα δοθεί μία περιγραφική εικόνα των εργαλείων που χρησιμοποιούνται στη μελέτη, καθώς και ορισμοί αντικειμένων για τη μαθηματική θεμελίωση και την κατανόησή τους.

1.2 Στοιχεία γεωμετρίας

1.2.1 Πολλαπλότητα

Στη φυσική, ορίζεται ως πεδίο δύναμης μία ιδιότητα του χώρου (ακόμα και απουσία μάζας) με φυσικές συνέπειες. Τα πεδία εν γένει αναπαρίστανται από έναν αριθμό ή έναν ταυστή με συγκεκριμένη τιμή για κάθε χωρικό και χρονικό σημείο. Ανάλογα με την ποσότητα φυσικής αναπαράστασης - η οποία θα χαρακτηρίζει μοναδικά το πεδίο-, ένα πεδίο μπορεί να είναι βαθμωτό (η φυσική αναπαράσταση είναι αριθμός), διανυσματικό (διάνυσμα), σπινωριακό (σπινόρας), ή ταυστικό (ταυστής).

Στην περίπτωση ενός ηλεκτροστατικού πεδίου, η κίνηση ενός φορτισμένου σωματιδίου εντός του πεδίου εξαρτάται από το πηλίκο $\frac{\text{φορτίο}}{\text{μάζα}}$, επομένως η εξίσωση περιγραφής της κίνησης δεν είναι μοναδική και η κίνηση διαφέρει από σώμα σε σώμα. Στην περίπτωση του πεδίου βαρύτητας όμως, όπου εδώ το φορτίο είναι η ίδια η μάζα, αυτό δεν ισχύει. Οι κινήσεις των σωμάτων μέσα σε ένα ομογενές βαρυτικό πεδίο θα περιγράφονται από την ίδια εξίσωση - δεδομένων των ίδιων αρχικών συνθηκών - η οποία εξαρτάται από την γεωμετρική κατάσταση του χωροχρόνου που βρίσκεται το σώμα. Η ιδιότητα αυτή του βαρυτικού πεδίου μπορεί να εκφραστεί από την ισχυρή αρχή της ισοδυναμίας. Η ισχυρή αρχή της ισοδυναμίας δηλώνει ότι η φυσική σε ένα μη επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς που βρίσκεται εντός πεδίου βαρύτητας g είναι ισοδύναμη με τη φυσική σε ένα σύστημα αναφοράς χωρίς βαρύτητα, το οποίο επιταχύνεται με επιτάχυνση $a = -g$.

Κατά την περιγραφή της κίνησης σε ελεύθερη πτώση με εργαλείο εκκίνησης

ένα σύστημα αναφοράς το οποίο εξαπλώνεται άκαμπτα στο χωροχρόνο, από κάποια απόσταση και έπειτα, ένα σώμα που πραγματοποιεί ελεύθερη πτώση θα έχει και φαινομενική επιτάχυνση λόγω του δεδομένου συστήματος αναφοράς. Για την υπέρβαση αυτού του προβλήματος, εισάγεται η έννοια του τοπικού συστήματος αναφοράς και η καμπύλωση της γεωμετρίας του χωροχρόνου, ενώ εγκαταλείπεται το σύστημα που εκτείνεται χωρίς όρια. Η μαθηματική δομή που είναι συμβατή με αυτή τη φυσική περιγραφή, ονομάζεται πολλαπλότητα (manifold) και αποτελεί έναν τοπολογικό χώρο, ο οποίος στη γειτονιά κάθε σημείου του είναι ομοιομορφισμός με ένα ανοιχτό υποσύνολο του ευκλείδειου χώρου.[4]

Αυστηρά μαθηματικά, τοπολογική πολλαπλότητα διάστασης n ορίζεται ο Τοπολογικός Χώρος V που πληροί τα εξής αξιώματα σημειακών συνόλων :

1. ο V είναι χώρος Hausdorff
2. ο V είναι συναφής
3. σε κάθε σημείο P του V υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο, που περιέχει το σημείο αυτό που είναι ομοιόμορφο προς ένα ανοιχτό σύνολο του \mathbb{R}^n .

Η χρήση της εξυπηρετεί την κατανόηση και εικονοποίηση πιο περίπλοκων τοπολογικά φυσικών εννοιών και δομών, μέσω των ισοδύναμων απλούστερων εννοιών του ευκλείδειου χώρου. Μία συνεπαγωγή που προκύπτει είναι η αρχή ισοδυναμίας του Einstein που δηλώνει πως οι νόμοι της φυσικής καταλήγουν τοπικά στους νόμους της ειδικής σχετικότητας.

1.2.2 Ανύσματα, Τανυστές, Τανυστής Riemann

Ως διάνυσμα είχε οριστεί το προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα σε ένα διδιάστατο επίπεδο χώρο. Κατ' αντιστοιχία, ως τετράνυσμα ορίζεται το προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα σε επίπεδο χώρο -χωροχρόνο- τεσσάρων διαστάσεων. Εάν σε κάθε σημείο P του χωροχρόνου ληφθούν όλα τα δυνατά ανύσματα που διέρχονται από το σημείο P , αυτά θα σχηματίσουν τον εφαπτόμενο χώρο στο P , T_p . Ο χώρος αυτός ονομάζεται διανυσματικός χώρος και αποτελεί το σύνολο των χαρτών $\omega : T_p \rightarrow \mathbb{R}$. Τα (δι)ανύσματα, καθώς και τα διανυσματικά πεδία, είναι καλώς ορισμένα γεωμετρικά αντικείμενα. [4]

Τα τετράνυσματα των οποίων τα άκρα χωρίζονται χωροειδώς, ονομάζονται χωροειδή και έχουν το χαρακτηριστικό ότι τα άκρα βρίσκονται εντός του κώνου

φωτός. Τετρανύσματα των οποίων τα άκρα χωρίζονται χρονοσειδώς, δηλαδή είναι εκτός της καμπύλης φωτός, ονομάζονται χρονοσειδή, ενώ τα τετρανύσματα που έχουν μηδενικό μήκος, δηλαδή τα άκρα τους συμπίπτουν, ονομάζονται φωτοσειδή.

Ένα βασικό εργαλειακό πλεονέκτημα των τετρανυσμάτων που τα καθιστά ικανά μέσα περιγραφής των φυσικών νόμων της σχετικότητας, είναι ότι παραμένουν αναλλοίωτα σε κάθε αδρανειακό σύστημα. Εκκινώντας από το χώρο F ο οποίος περιέχει όλες τις λείες συναρτήσεις της πολλαπλότητας M , δηλαδή C^∞ χάρτες $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, τότε κάθε καμπύλη διερχόμενη από το σημείο p , θα ορίζει έναν τελεστή στο δεδομένο σημείο. Ο τελεστής αυτός είναι η κατευθυνόμενη παράγωγος (directional derivative), της οποίας οι χάρτες στο σημείο p είναι $f \rightarrow df/d\lambda$. Εκκινώντας τώρα από ένα σύστημα με συντεταγμένες x^μ , η κατευθυνόμενη παράγωγος κατά μήκος μίας καμπύλης που περιγράφεται από $x^\nu = \text{σταθερά} \forall \nu \neq \mu$, παραμετροποιημένο ως προς x^μ δίνει τη μερική παράγωγο ως προς x^μ . Οι μερικές παράγωγοι συνθέτουν τη βάση των κατευθυνόμενων παραγώγων.

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} f &= \frac{d}{d\lambda} (f \circ \gamma) \\ &= \frac{d}{d\lambda} [(f \circ h^{-1}) \circ (h \circ \gamma)] \\ &= \frac{d(h \circ \gamma)^\mu}{d\lambda} \frac{\partial (f \circ h^{-1})}{\partial x^\mu} \\ &= \frac{dx^\mu}{d\lambda} \partial_\mu f \end{aligned} \tag{1}$$

Επομένως ισχύει ότι $\frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \partial_\mu$ και το σύνολο των μερικών παραγώγων αναπαριστούν μία καλή βάση για το διανυσματικό χώρο των κατευθυνόμενων παραγώγων και αποτελεί τον εφαπτόμενο χώρο T_p .

Οι 1-φόρμες υπάρχουν μόνο στο σημείο στο οποίο ορίζονται και δεν εξαρτώνται από στοιχεία άλλων σημείων. Επομένως, για να οριστεί η παράγωγος (η οποία είναι 1-φόρμα) μίας συνάρτησης στη γειτονιά ενός σημείου, δεν αρκεί η τιμή της στο σημείο. Οι επιπλέον πληροφορίες που απαιτούνται υπάρχουν στη βαθμίδα. Η δράση της βαθμίδας μίας συνάρτησης df πάνω σε ένα διάνυσμα $d/d\lambda$ θα δώσει την κατευθυνόμενη παράγωγο της συνάρτησης :

$$df\left(\frac{d}{d\lambda}\right) = \frac{df}{d\lambda} \tag{2}$$

Αν θεωρηθεί ότι οι συναρτήσεις f είναι οι συναρτήσεις συντεταγμένων x^μ , τότε η (3) γίνεται :

$$dx^\mu(\partial_\nu) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu \quad (3)$$

με το σύνολο των dx^μ να αποτελεί πλέον ένα κατάλληλο σύνολο για τις βάσεις της 1-φόρμας. Συνεπώς, σύμφωνα με τις ιδιότητες μετασχηματισμού των διανυσμάτων, ο μετασχηματισμός για τις 1-φόρμες (ανταλλοίωτος μετασχηματισμός) θα είναι :

$$dx^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} dx^\mu \quad (4)$$

ενώ ο μετασχηματισμός των στοιχείων :

$$\alpha_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \alpha_\mu \quad (5)$$

Μία επιπλέον γενίκευση των διανυσμάτων είναι οι τανυστές. Οι τανυστές αποτελούν γεωμετρικά αντικείμενα που περιγράφουν τις σχέσεις ανάμεσα σε διανύσματα, βαθμωτά μεγέθη ή άλλους τανυστές. Ένας τανυστής απεικονίζεται σαν μία πολυδιάστατη διάταξη αριθμητικών τιμών και η τάξη του είναι η διάσταση της διάταξης που απαιτείται για την απεικόνιση, ή ισοδύναμα, ο αριθμός των δεικτών που χρειάζονται για να ταυτοποιηθεί ένα στοιχείο αυτής της διάταξης. Για παράδειγμα, ένας γραμμικός μετασχηματισμός μπορεί να απεικονιστεί από ένα μητρώο (πίνακα), μία δισδιάστατη διάταξη και επομένως είναι τανυστής 2ης τάξης. Ένα διάνυσμα μπορεί να απεικονιστεί σαν μία μονοδιάστατη διάταξη (μητρώο μίας στήλης) και είναι τανυστής 1ης τάξης. Τα βαθμωτά μεγέθη είναι απλοί αριθμοί, συνεπώς τανυστές μηδενικής τάξης. [4]

Οι συνιστώσες ενός τανυστή μετασχηματίζονται με ένα πίνακα μετασχηματισμού για κάθε δείκτη. Αν ένας δείκτης μετασχηματίζεται σαν ένα διάνυσμα με τον αντίστροφο του μετασχηματισμού βάσης, καλείται ανταλλοίωτος και συμβολίζεται με έναν πάνω δείκτη. Εάν ο δείκτης μετασχηματίζεται με τον ίδιο το μετασχηματισμό βάσης, τότε καλείται συναλλοίωτος και συμβολίζεται με έναν κάτω δείκτη.

Η γενική σχέση μετασχηματισμού των ταχυστών είναι :

$$T^{\mu'_1 \dots \mu'_k}_{\nu'_1 \dots \nu'_l} = \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu'_k}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu'_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x^{\nu'_l}} T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \quad (6)$$

Ο μετασχηματισμός ενός ταχυστή μπορεί να προκύψει σε πιο απλοϊκή μορφή, εάν χρησιμοποιηθούν τα διανύσματα βάσης και οι 1-φόρμες ως μερικές παράγωγοι και βαθμίδες και αντικαθιστώντας στο μετασχηματισμό συντεταγμένων.

Ανταλλοίωτος ταχυστής τάξης 2 σε χώρο n διαστάσεων ονομάζεται ο ταχυστής $T^{\mu\nu}$ που μετασχηματίζεται μέσω του τύπου:

$$T'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} T^{\mu\nu} \quad (7)$$

Συναλλοίωτος ταχυστής 2^{ος} τάξης ονομάζεται ο ταχυστής $T_{\mu\nu}$ με εξίσωση μετασχηματισμού :

$$T'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} T_{\mu\nu} \quad (8)$$

Τέλος, ο μεικτός ταχυστής T^{α}_{β} μετασχηματίζεται μέσω του τύπου:

$$T^{\alpha}_{\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} T^{\mu}_{\nu} \quad (9)$$

Ένας ξεχωριστός ταχυστής με σημαντικές ιδιότητες είναι ο ταχυστής Riemann. Ο ταχυστής Riemann αντιστοιχεί έναν ταχυστή σε κάθε σημείο της πολλαπλότητας του Riemann (όπως για παράδειγμα ένα ταχυστικό πεδίο) που μετράει σε ποιο βαθμό ο μετρικός ταχυστής δεν είναι τοπικά ισομετρικός με τον αντίστοιχό του σε έναν Ευκλείδειο χώρο. Γεωμετρικά, περιγράφει την καμπυλότητα του χώρου.

Εκκινώντας από ένα διανυσματικό πεδίο V^{ρ} , η συναλλοίωτη παράγωγος του ταχυστή σε συγκεκριμένη κατεύθυνση θα μετράει τη μεταβολή του ταχυστή σε σχέση με εκείνον που θα είχε μεταφερθεί παράλληλα, καθώς η συναλλοίωτη παράγωγος ταχυστή στην κατεύθυνση παράλληλη με τη μεταφορά του είναι μηδέν. Ο μεταθέτης δύο συναλλοίωτων παραγώγων φανερώνει τη διαφορά μεταξύ δύο παράλληλων μεταφορών :

$$\begin{aligned}
[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\rho &= \nabla_\mu \nabla_\nu V^\rho - \nabla_\nu \nabla_\mu V^\rho \\
&= \partial_\mu (\nabla_\nu V^\rho) - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \nabla_\lambda V^\rho + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \nabla_\nu V^\sigma - (\mu \leftrightarrow \nu) \\
&= \partial_\mu \partial_\nu V^\rho + (\partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho) V^\sigma + \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \partial_\mu V^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda V^\rho - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho V^\sigma \\
&\quad + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \partial_\nu V^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma V^\lambda - (\mu \leftrightarrow \nu) \\
&= (\partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda) V^\sigma - 2\Gamma_{[\mu\nu]}^\lambda \nabla_\lambda V^\rho
\end{aligned} \tag{10}$$

όπου $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ το σύμβολο Christoffel που θα οριστεί στη συνέχεια.

Εάν αναγνωρισθεί ότι ο τελευταίος όρος δίνει τον τελεστή στρέψης $T_{\mu\nu}^\lambda = 2\Gamma_{[\mu\nu]}^\lambda$, η παραπάνω εξίσωση γράφεται ως :

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\rho = R_{\sigma\mu\nu}^\rho V^\sigma - T_{\mu\nu}^\lambda \nabla_\lambda V^\rho$$

όπου ορίσαμε τον τανυστή Riemann που περιγράφει την καμπυλότητα του χώρου :

$$\boxed{R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda} \tag{11}$$

1.2.3 Μετρική

Για τον καθορισμό της γεωμετρίας, είναι απαραίτητο το στοιχείο μήκους που περιγράφει την απόσταση μεταξύ δύο γειτονικών σημείων σε σχέση με τα διαστήματα συντεταγμένων τους σε ένα καθορισμένο σύστημα συντεταγμένων. [3, 4]

Στις καρτεσιανές συντεταγμένες, η απόσταση μεταξύ δύο γειτονικών σημείων του επιπέδου $P(x, y)$ και $Q(x + dx, y + dy)$ δίνεται από τον τύπο

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \tag{12}$$

Όμοια, στις πολικές συντεταγμένες, η απόσταση μεταξύ δύο σημείων $P(r, \varphi)$ και $Q(r + dr, \varphi + d\varphi)$ θα είναι

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2} \tag{13}$$

Η γεωμετρία μπορεί να αναχθεί σε ολοκληρώματα αποστάσεων μεταξύ γειτονικών σημείων. Από ένα σύστημα τεσσάρων συντεταγμένων x^μ για την αναπαράσταση όλων των σημείων και από την απόσταση μεταξύ δύο γειτονικών σημείων που διαχωρίζονται από διαστήματα dx^μ , προκύπτει ο ορισμός της μετρικής :

$$\boxed{ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu} \quad (14)$$

Ο συμμετρικός πίνακας $g_{\mu\nu}$ που εμφανίζεται είναι συνάρτηση της θέσης και ονομάζεται μετρική. Εφόσον είναι συμμετρικός 4×4 , έχει 10 ανεξάρτητα στοιχεία - στοιχεία διαγωνίου και άνω- και επειδή κατά τον μετασχηματισμό των τεσσάρων συντεταγμένων χρησιμοποιούνται τέσσερις αυθαίρετες συναρτήσεις, τα ανεξάρτητα στοιχεία μειώνονται σε $10 - 4 = 6$. Η μετρική δεν είναι δεδομένη για την ίδια γεωμετρία αλλά εξαρτάται από το σύστημα συντεταγμένων. Εάν για την περιγραφή της ίδιας γεωμετρίας αλλάξει το σύστημα συντεταγμένων, αλλάζει και η μετρική με νόμο μετασχηματισμού :

$$g_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} g_{\mu\nu} \quad (15)$$

1.2.4 Καμπυλότητα

Η καμπυλότητα στη γεωμετρία δίνει τον τρόπο με τον οποίο ένα γεωμετρικό αντικείμενο αποκλίνει από το επίπεδο. Η καμπυλότητα εξαρτάται από τη μετρική που καθορίζει τη γεωμετρία της πολλαπλότητας. Ο τρόπος που εκδηλώνεται βασίζεται στις "συνδέσεις" (connections) που συσχετίζουν τα διανύσματα στον εφαπτόμενο χώρο. [4] Μία ιδιαίτερη σύνδεση που κατασκευάζεται μέσω της μετρικής και εμπεριέχεται στο αντικείμενο είναι το σύμβολο Christoffel.

Το σύμβολο Christoffel δίνεται από τον τύπο :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \quad (16)$$

και εμφανίζεται στη συναλλοίωτη παράγωγο ώστε να συμπεριλάβει και την αλλαγή του χωροχρόνου κατά τη μετατόπιση ενός διανύσματος V^ν από ένα

σημείο του χώρου σε ένα άλλο απειροστά κοντά :

$$\nabla_{\mu} V^{\nu} = \partial_{\mu} V^{\nu} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\nu} V^{\sigma} \quad (17)$$

Κατά την παράλληλη μεταφορά ενός διανύσματος u^{μ} από το σημείο P στο σημείο P' , όταν τα σημεία αυτά απέχουν μεταξύ τους dx^{ρ} , το μέτρο του διανύσματος πρέπει να παραμείνει αμετάβλητο :

$$\begin{aligned} |u|_P^2 &= |u|_{P'}^2 \leftrightarrow \\ g_{\mu\nu}(P)u^{\mu}(P)u^{\nu}(P) &= g_{\mu\nu}(P')u^{\mu}(P')u^{\nu}(P') \end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(P') &\simeq g_{\mu\nu}(P) + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}}(P)dx^{\kappa} \\ u^{\mu}(P') &\simeq u^{\mu}(P) - \Gamma_{\sigma\kappa}^{\mu}(P)u^{\sigma}(P)dx^{\kappa} \end{aligned}$$

επομένως η προηγούμενη σχέση γίνεται :

$$\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} - g_{\mu\sigma}\Gamma_{\nu\kappa}^{\sigma} - g_{\sigma\nu}\Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma} \right) u^{\mu}u^{\nu}dx^{\kappa} = 0 \quad (18)$$

Εφόσον το διάνυσμα u^{μ} ήταν τυχαίο,

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} - g_{\mu\sigma}\Gamma_{\nu\kappa}^{\sigma} - g_{\sigma\nu}\Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma} = 0$$

Από τη σχέση αυτή με εναλλαγή των δεικτών και πρόσθεση των σχέσεων που εξάγονται, προκύπτει :

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} + \frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x^{\nu}} = 2g_{\sigma\nu}\Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma} \leftrightarrow \quad (19)$$

$$\Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\nu} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} + \frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x^{\nu}} \right) \quad (20)$$

Οι πληροφορίες για την καμπυλότητα της πολλαπλότητας εμπεριέχονται στον τανυστή Riemann.

1.3 Βαρύτητα

Όπως ήδη αναφέρθηκε, σύμφωνα με τη γενική θεωρία της σχετικότητας, η βαρύτητα δε θεωρείται πλέον το αποτέλεσμα μιας δύναμης -όπως στη νευτώνεια φυσική-, αλλά είναι αποτέλεσμα της καμπύλωσης του χωροχρόνου, η οποία προκαλείται από την περιεχόμενη σε αυτόν μάζα και ενέργεια. [3]

1.3.1 Αδρανειακό Σύστημα Αναφοράς

Το σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιείται για να περιγράψει τις χωροχρονικές θέσεις των σημείων καλείται σύστημα αναφοράς (reference frame). Διαφορετικά συστήματα αναφοράς δηλώνουν απλά διαφορετικούς τρόπους αναπαράστασης των σημείων. Οι μετασχηματισμοί συντεταγμένων από ένα σύστημα αναφοράς σε ένα άλλο δηλώνει τον τρόπο σύνδεσης των διαφορετικών αναπαραστάσεων μεταξύ τους.

Ένα ελεύθερο σώμα στο οποίο δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις, σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων, θα διατηρήσει την κινητική του κατάσταση σχετικά με το συγκεκριμένο σύστημα, ανεξάρτητα από τη θέση του σε αυτό και την αρχική του διεύθυνση κίνησης. Το παραπάνω σύστημα συντεταγμένων ονομάζεται αδρανειακό σύστημα αναφοράς (inertial reference frame) και είναι το σύστημα εκείνο που διατηρεί αμετάβλητες τις εξισώσεις του Νεύτωνα. Η παράμετρος t που διατηρεί το ρυθμό μεταβολής των θέσεων των ελεύθερων σωμάτων σταθερό είναι ο χρόνος. [3]

1.3.2 Νευτώνεια μηχανική, εθσ, γθσ

Στη Νευτώνεια μηχανική, χρησιμοποιείται ο μετασχηματισμός του Γαλιλαίου, ο οποίος δηλώνει ότι όλοι οι αδρανειακοί παρατηρητές αντιλαμβάνονται με τον ίδιο τρόπο το χρόνο, ανεξάρτητα από τη θέση τους. Επομένως, οι νόμοι μετασχηματισμού των συντεταγμένων μεταξύ δύο αδρανειακών συστημάτων αναφοράς που έχουν σχετική μεταξύ τους ταχύτητα v , θα είναι :

$$x' = x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t$$

Οι μετασχηματισμοί αυτοί αφήνουν αναλλοίωτο το στοιχειώδες μήκος $ds'^2 = ds^2$, καθώς και την εξίσωση κίνησης ενός ελεύθερου σωματιδίου, όπως φαίνεται από τη Λαγκρανζιανή του σωματιδίου που παρέχει τις εξισώσεις κίνησης.

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (21)$$

Στην Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας εισάγονται δύο νέα αξιώματα, σύμφωνα με τα οποία :

1. Οι νόμοι της φύσης είναι ίδιοι σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Η διαπίστωση αυτή εμφανίζεται και στη Νευτώνεια Μηχανική, σε σχέση όμως με τη σχετικότητα του Γαλιλαίου.
2. Η ταχύτητα διάδοσης του φωτός στο κενό έχει την ίδια τιμή ($c = 2,998 * 10^8 m/s$) ως προς κάθε αδρανειακό παρατηρητή.

Για να ενσωματωθούν τα παραπάνω αξιώματα που περιγράφουν τα απόλυτα συστήματα και τη σταθερή ταχύτητα του φωτός στο κενό στη σχετικότητα του Γαλιλαίου και να συμπεριληφθούν οι εξισώσεις του Maxwell σε αυτές, εισάγονται νέοι κανόνες μετασχηματισμού των συντεταγμένων. Για καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $O'(x', y', z', t')$ το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα v ως προς το $O(x, y, z, t)$ κατά τη διεύθυνση του άξονα x προκύπτουν οι μετασχηματισμοί Lorentz:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \end{aligned}$$

$$\text{με } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Το στοιχείο μήκους παραμένει σταθερό, καθώς η απόσταση των σημείων θα πρέπει να παραμένει η ίδια σε όλα τα συστήματα που χρησιμοποιούνται για

να προσδιορίσουν τη θέση των σημείων.

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= -c^2 dt'^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 \end{aligned}$$

Το παραπάνω στοιχείο μήκους περιγράφει τη γεωμετρία του επίπεδου τετραδιάστατου χωροχρόνου (γεωμετρία Minkowski).

Οι παραπάνω περιπτώσεις αφορούσαν επίπεδους χώρους/χωροχρόνους, από όπου απουσίαζε η καμπυλότητα. Η Γενική Σχετικότητα είναι μία θεωρία βαρύτητας που αντιλαμβάνεται τα βαρυτικά φαινόμενα ως εκδήλωση της καμπύλωσης του τετραδιάστατου χωροχρόνου.

1.3.3 Γεωδαιτική εξίσωση

Η κατανομή ύλης και ενέργειας παραμορφώνει το χωροχρόνο γύρω της με αποτέλεσμα να μεταβάλλεται και η μετρική που τον περιγράφει. Τα σώματα εντός ενός πεδίου δεν έχουν τυχαίες τροχιές. Οι κινήσεις τους ακολουθούν τροχιές καθορισμένες από την κατανομή ενέργειας και ύλης, οι οποίες ονομάζονται γεωδαισιακές και αποτελούν εκείνες τις καμπύλες που καθιστούν το μήκος ακρότατο. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που χωρίζονται φωτειδώς από σημείο P στο χωροχρόνο ονομάζεται καμπύλη φωτός. Οι κοσμικές γραμμές σωματιδίων μη μηδενικής μάζας, δηλαδή η χωροχρονική τροχιά που διαγράφουν τα σωματίδια, θα βρίσκονται πάντα στο εσωτερικό του κώνου φωτός, επομένως η ταχύτητά τους θα είναι πάντα μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός.

Ο καμπυλωμένος χωροχρόνος τοπικά προσεγγίζεται από το χώρο Minkowski. Στον χώρο Minkowski που περιγράφεται από τρεις χωρικές συντεταγμένες και μία χρονική, για τη μετάβαση από σημείο A σε σημείο B, ισχύει η αρχή 'ελάχιστης' (ακρότατης) δράσης. Εάν $S = \int_B^A ds$ η δράση, αντικαθιστώντας σε αυτή το στοιχείο μήκους που αντιστοιχεί σε μια τιμή του ιδιοχρόνου τ :

$$ds = \sqrt{cdt^2 - dx^2} = \sqrt{-\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = d\sigma \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} = \tau_{AB}$$

και τότε ο ιδιόχρονος θα παρουσιάζει ακρότατο για τις κοσμικές γραμμές που ικανοποιούν τις εξισώσεις Lagrange:

$$\delta S = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \rightarrow \quad (22)$$

$$\frac{d}{d\sigma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu / d\sigma} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0 \rightarrow \frac{d}{d\sigma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = 0 \rightarrow \quad (23)$$

$$\mathcal{L} \frac{d}{d\tau} \frac{\partial x^\mu}{d\tau} = 0 \rightarrow \quad (24)$$

$$\boxed{\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0} \quad (25)$$

Η εξίσωση (25) που προκύπτει είναι η εξίσωση κίνησης για ένα ελεύθερο σωματίδιο σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς στον επίπεδο χωροχρόνο.

Στην περίπτωση που το σωματίδιο κινείται σε μια γενική χωροχρονική γεωμετρία αυθαίρετα καμπυλωμένης, με μετρική $g_{\mu\nu}(x)$ και στοιχείο μήκους $ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$, οι εξισώσεις των γεωδαισιακών θα είναι :

$$\mathcal{L}\left(\frac{dx^\alpha}{d\sigma}, x^\alpha\right) = \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma}} \quad (26)$$

ή αλλιώς

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0 \quad (27)$$

1.3.4 Εξισώσεις πεδίου του Einstein και λύση στο κενό

Η εξάρτηση της βαρυτικής αλληλεπίδρασης από την καμπύλωση του χωροχρόνου παρουσία ενέργειας και μάζας φανερώνεται στις εξισώσεις πεδίου του Einstein. Οι εξισώσεις αυτές συνδέουν την τοπική καμπυλότητα του χωροχρόνου - η οποία είναι μία καθαρά γεωμετρική ιδιότητα - με το μέτρο της πυκνότητας ύλης/ενέργειας, που αποτελεί φυσική ιδιότητα του χωροχρόνου. [3]

Το μέτρο της καμπυλότητας περιγράφεται με τη βοήθεια της καμπυλότητας Ricci $R_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu\kappa}^{\kappa}$ και η πυκνότητα ύλης/ενέργειας εκφράζεται από τον τανυστή ενέργειας/τάσης $T^{\mu\nu}$ σύμφωνα με τους παρακάτω τύπους :

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^{\kappa}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\kappa}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\kappa}\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa}\Gamma_{\nu\kappa}^{\lambda} \quad (28)$$

$$T^{tt} = \text{πυκνότητα ενέργειας} \quad (29)$$

$$T^{it} = \text{πυκνότητα ορμής στην κατεύθυνση } i \quad (30)$$

$$T^{ti} = \text{ροή ενέργειας} \quad (31)$$

$$T^{ij} = \text{τανυστής τάσης} \quad (32)$$

Επομένως, η εξίσωση Einstein παίρνει τη μορφή :

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}} \quad (33)$$

Μπορεί επίσης για λόγους κοσμολογικής συνέπειας να προστεθεί και η κοσμολογική σταθερά Λ , η οποία συνεισφέρει στον τανυστή ενέργειας/τάσης τον όρο $T_{\mu\nu}^{vacuum} = -\frac{\Lambda}{8\pi G}g_{\mu\nu}$. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση το αριστερό μέρος με έναν ενιαίο τανυστή, ο οποίος αποτελεί τον τανυστή καμπυλότητας Einstein $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$, αυτή απλοποιείται στην

$$\boxed{G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}} \quad (34)$$

Οι συνιστώσες της εξίσωσης αποτελούνται από 10 μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις για τους συντελεστές της μετρικής $g_{\mu\nu}$ και δεν είναι όλες γραμμικά ανεξάρτητες. Ο αριθμός των ανεξάρτητων εξισώσεων μειώνεται μέσω των ταυτοτήτων Bianchi στις 6 ανεξάρτητες.

$$\nabla_{\nu}(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) = 8\pi GR \text{ ταυτότητες Bianchi} \quad (35)$$

Η εξίσωση στο κενό, όπου οι πυκνότητες γίνονται μηδενικές $T_{\mu\nu} = 0$, θα εξαρτάται μόνο από την ενέργεια του κενού που δίνεται από την κοσμολογική σταθερά Λ . Θεωρούμε μία σφαιρικά συμμετρική λύση, ανεξάρτητη του χρόνου. Το στοιχείο μήκους που θα περιγράψει αυτή την περιοχή θα είναι επομένως αναλλοίωτο κάτω από το μετασχηματισμό $t \rightarrow -t$ και όροι πεπλεγμένοι $dx^i dt$ δε θα υπάρχουν, καθώς και όροι $drd\theta$, $drd\varphi$ λόγω σφαιρικής συμμετρίας. Η μετρική σε επίπεδο χωροχρόνο σε πολικές συντεταγμένες θα είναι η μετρική του Minkowski :

$$ds^2 = dt^2 - (dr^2 + d^2d\Omega^2) \quad (36)$$

Δεδομένων των παραπάνω, το στοιχείο μήκους σε χώρο με καμπυλότητα, θα εξαρτάται από δύο ακτινικά εξαρτώμενες εξισώσεις $f(r), h(r)$:

$$ds^2 = e^{f(r)} - (e^{h(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)) \quad (37)$$

Τα σύμβολα Christoffel υπολογίζονται από τη σχέση (20) και η καμπυλότητα Ricci από τη σχέση (11) την καμπυλότητα και από την εξίσωση Einstein στο κενό $R_{\mu\nu} = 0$, οι μόνες γραμμικά ανεξάρτητες εξισώσεις που απομένουν είναι οι παρακάτω :

$$G_{tt} = e^{-h} \left(\frac{h'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0 \quad (38)$$

$$G_{rr} = e^{-h} \left(\frac{f'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = 0 \quad (39)$$

με λύση :

$$\frac{d}{dr}(re^{-h}) = 1 \rightarrow e^{-h} = 1 + \frac{A}{r} \quad (40)$$

και για $G_{tt} = -G_{rr}$ προκύπτει ότι $f' = -h'$, δηλαδή :

$$e^f = e^B \left(1 + \frac{A}{r} \right) \quad (41)$$

Για να συνάδει αυτή η λύση με το Νευτώνειο όριο όταν $r \rightarrow \inf$ και να ισχύει η μορφή της στη νευτώνεια βαρύτητα, οι σταθερές A, B προκύπτουν (αν $c^2 \neq 1$) :

$$A = -\frac{2GM}{c^2}$$
$$B = 0$$

Επομένως, το στοιχείο μήκους προκύπτει :

$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)dt^2 - \left[\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2\right] \quad (42)$$

2 Μελανές οπές

2.1 Ο θάνατος των αστέρων

Η αστρική εξέλιξη, δηλαδή η πορεία της ζωής ενός άστρου από τη στιγμή του σχηματισμού του έως την τελική του πτώση, εξαρτάται κυρίως από τη μάζα του. Ο κύριος μηχανισμός παραγωγής ενέργειας που ζωοδοτεί το άστρο είναι οι πυρηνικές αντιδράσεις που συντελούνται στο εσωτερικό του. Οι βασικότερες αντιδράσεις και μεγαλύτερης συνολικά χρονικής διάρκειας είναι ο κύκλος πρωτονίου-πρωτονίου, ο κύκλος του άνθρακα και η αντίδραση τρία-α. Κατά τις πυρηνικές αντιδράσεις, η μάζα των στοιχείων πριν και μετά την αντίδραση δεν είναι ίσες αλλά παρουσιάζεται απώλεια μάζας, η οποία ακτινοβολείται και αυτές συντελούνται σχηματίζοντας όλο και βαρύτερα στοιχεία, έως το σχηματισμό σιδήρου. Στη συνέχεια η ενέργεια παρέχεται από σχάση. Οι αντιδράσεις αυτές παρέχουν τις απαιτούμενες πιέσεις που αναστέλουν τη βαρυτική κατάρρευση και εξισορροπούν το άστρο. Τα πυρηνικά αποθέματα όμως δεν είναι απεριόριστα. Όταν εξαντληθούν αυτά, είτε παρατείνεται η ισορροπία των συγκρουσιακών δυνάμεων του εσωτερικού του με μία νέα πηγή πίεσης, θερμική, να συγκρατεί τη βαρύτητα, είτε το άστρο καταρρέει κάτω από το βάρος του. Ο τρόπος που θα τελειώσει το άστρο θα καθοριστεί, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, από τη μάζα του. [6]

Στην περίπτωση ενός άστρου μικρής μάζας, το οποίο έχει σταματήσει να παράγει ενέργεια πυρηνικά, αυτό καταλήγει σε λευκό νάνο και συνεχίζει να ακτινοβολεί, καταναλώνοντας έτσι και τη θερμική του ενέργεια. Παρά τις υψηλές θερμοκρασίες στο εσωτερικό τους, οι πιέσεις των ιδανικών αερίων είναι ακατάλληλες να συγκρατήσουν τις βαρυτικές δυνάμεις. Τα ηλεκτρόνια (που λόγω των υψηλών πυκνοτήτων στο εσωτερικό, βρίσκονται σε κατάσταση εκφυλισμού) είναι εκείνα που παρέχουν την ικανή πίεση η οποία αντισταθμίζει τη βαρύτητα και προστατεύει το πρώην άστρο από την κατάρρευση. Η μέγιστη μάζα που μπορεί να έχει ένας λευκός νάνος δίνεται από το όριο Chandrasekhar και προκύπτει από την εξίσωση της υδροστατικής πίεσης με την πίεση εκφυλισμένων ηλεκτρονίων:

$$M \equiv M_{Ch} = 1.46 \left(\frac{\mu_e}{2}\right)^{-2} M_{\odot} \quad (43)$$

Όταν ένα αστέρι μεγάλης μάζας εξαντλήσει τα θερμοπυρηνικά του αποθέματα, τελειώνει τη ζωή του με μία θεαματική έκρηξη. Η βαρυτική κατάρρευση του πυρήνα σηματοδοτεί την έναρξη της υπερκαινοφανούς έκρηξης. Μετά το σχηματισμό ενός πυρήνα σιδήρου από τις καύσεις οξυγόνου και πυριτίου, τα φωτόνια

που έχουν πολύ υψηλές ενέργειες λόγω υψηλών θερμοκρασιών, μπορούν να διασπασούν τους πυρήνες σιδήρου σε σωματία α και πρωτόνια, καταναλώνοντας ενέργεια και μειώνοντας την πίεσή του περαιτέρω. Οι δυνάμεις βαρύτητας υπερσχύουν και το άστρο παρασύρεται από το βάρος του. Όσο καταρρέει ο πυρήνας, τα εξωτερικά στρώματα χάνουν την υποστήριξή τους αλλά επειδή οι διαδικασίες της κατάρρευσης γίνονται υπερηχητικά ενώ οι πληροφορίες για τα γεγονότα στον πυρήνα διαδίδονται ηχητικά προς τα έξω, τα στρώματα δεν ακολουθούν απευθείας την κατάρρευση. Η ομόλογη κατάρρευση του πυρήνα σταματά απότομα όταν η πυκνότητα γίνει της τάξεως της πυρηνικής, με αποτέλεσμα μία απότομη αναπήδηση και τη δημιουργία ενός ωστικού κύματος. Το ωστικό κύμα αυτό διαδίδεται προς τα έξω με μορφή έκρηξης. Όταν τα εξωτερικά στρώματα του αστέρα που εκτινάσσονται προς τα έξω, φτάσουν σε μία ικανή απόσταση, γίνονται οπτικά διαφανή και επιτρέπουν στην ακτινοβολία να διέλθει από μέσα και να φανερώσει το κεντρικό αντικείμενο που έμεινε ως υπόλειμμα της έκρηξης. Το κεντρικό αντικείμενο που αποτελούσε προηγουμένως τον αστρικό πυρήνα, αποτελεί πλέον μια αστρική δομή εξαρτώμενη από τη μάζα του πυρήνα σιδήρου, άρα και από τη μάζα του αρχικού αστέρα. Στην περίπτωση που ο αρχικός αστέρας είχε μάζα μικρότερη από $25M_{\odot}$, το κεντρικό αντικείμενο θα είναι ένας αστέρας νετρονίων, ενώ εάν η μάζα του αρχικού αστέρα ήταν μεγαλύτερη των $25M_{\odot}$, το υπόλειμμα είναι μια μελανή οπή.

2.2 Σχηματισμός μελανών οπών

Η γενική θεωρία της σχετικότητας είναι μία μετρική θεωρία της βαρύτητας και περιγράφει τη γεωμετρία του χωροχρόνου παρουσία μάζας και ενέργειας. Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή, η βαρύτητα δεν είναι πλέον το αποτέλεσμα μίας εφαρμοσμένης δύναμης, αλλά εγγενές χαρακτηριστικό του χώρου, ο οποίος έχει υποστεί καμπυλωτικές παραμορφώσεις λόγω της περιεχόμενης ακτινοβολίας και μάζας. Αποτελεί επομένως εκδήλωση της καμπυλότητας, η οποία είναι γεωμετρικό χαρακτηριστικό του χώρου. Οι πεδιακές εξισώσεις του Einstein καθορίζουν τον τρόπο με τον οποίο διαμορφώνεται η γεωμετρία του, καθώς και τη συμπεριφορά γύρω από την πηγή. Οι παραμορφώσεις αυτές της γεωμετρίας είναι πιο έντονες σε περιοχές γύρω από πηγές μεγάλης μάζας.

Οι αστρικές μελανές οπές αποτελούν ένα από τα πιο γοητευτικά αστροφυσικά αντικείμενα. Είναι κατάλοιπο της βαρυτικής κατάρρευσης του πυρήνα σιδήρου ενός αστέρα (δηλαδή ενός αστέρα μεγάλης μάζας), στον οποίο κάποια στιγμή οι δυνάμεις βαρύτητας υπερίσχυσαν της πίεσης. Κατά τη διάρκεια της κατάρρευσης, η κίνηση της ύλης γίνεται με πολύ μεγάλες ταχύτητες και εξίσου

μεγάλος θα είναι ο ρυθμός απαγωγής της ενέργειας μέσω εκπομπής βαρυτικών κυμάτων, με αποτέλεσμα το σύστημα να προσπαθεί να αποκτήσει σταθερότητα. [6]

Οι μαύρες τρύπες είναι καθαρά βαρυτικά φαινόμενα. Εφαρμόζοντας κβαντομηχανικές ιδέες σ' αυτά τα αντικείμενα, οι Bekenstein και Hawking βρήκαν πως η βαρύτητα και η κβαντομηχανική μπορούν να πλέξουν μια ολοκληρωμένη πρόταση για αυτά. Θεώρησαν ότι μετά τη βαρυτική κατάρρευση ενός άστρου -όποτε και έχει σχηματιστεί μελανή οπή και έχει επικρατήσει ισορροπία-, ένας εξωτερικός παρατηρητής είναι δυνατόν να αντιληφθεί τρία μόνο χαρακτηριστικά μεγέθη της μελανής οπής : τη μάζα, τη στροφορμή και το φορτίο της. Όλα τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά που αφορούν στην ύλη από την οποία σχηματίστηκε, εξαφανίστηκαν κατά την κατάρρευση. Η απώλεια αυτής της πληροφορίας σχετίζεται με την αρνητική εντροπία του συστήματος, την οποία ο Bekenstein συσχέτισε με το λογάριθμο των κβαντικών μικροκαταστάσεων που είναι συμβατές με τη μάζα και τη στροφορμή της μελανής οπής. Επιπλέον, κατά τον ορισμό της θερμοκρασίας της μελανής οπής μέσω του μηδενικού νόμου της θερμοδυναμικής, αυτή προκύπτει ανάλογη προς την επιφανειακή ένταση της βαρύτητάς της. [5]

Παρατηρείται επομένως, ότι ενώ μπορεί να αναμένεται η τελική κατάσταση της μαύρης τρύπας να είναι μία σύνθετη κατάσταση εξαρτώμενη από χαρακτηριστικά όπως οι πυκνότητες και οι κινήσεις των διάφορων αερίων, οι μη περιστρεφόμενες μαύρες τρύπες εν τέλει είναι πολύ απλά αστροφυσικά αντικείμενα. Ο Wener Israel απέδειξε ότι η απλότητα αυτή θα εκφράζεται μέσω απόλυτης σφαιρικότητας και ότι το μέγεθος τους θα εξαρτάται μόνο από τη μάζα τους. Στην αρχή, θεωρήθηκε πως για να ισχύει αυτή η συνθήκη απόλυτης σφαιρικότητας, ο σχηματισμός των μελανών οπών θα πραγματοποιείται μόνο κατά την κατάρρευση ενός απόλυτα σφαιρικού αστεριού, ερμηνεία που ερχόταν σε σύγκρουση με τη μορφή των πραγματικών αστεριών και εξιδανίκευε τη σφαιρική συμμετρία. Οι Penrose και Wheeler για την ερμηνεία της πρότασης του Israel πρότειναν πως οι διαδικασίες που συντελούνται κατά την κατάρρευση, οι γρήγορες κινήσεις και η απώλεια ενέργειας, σφαιρικοποιούν το άστρο έως αυτό να φτάσει τη στάσιμη κατάσταση όπου θα είναι απόλυτα σφαιρικό. Κατάυτό τον τρόπο, κάθε άστρο κατάλληλης μάζας χωρίς ιδιοπεριστροφή, ανεξάρτητα από το σχήμα και τη δομή του, θα καταλήξει σε μαύρη τρύπα απόλυτα σφαιρική, η οποία θα περιγράφεται πλήρως μόνο από τη μάζα της.

2.3 Μελανή οπή Schwarzschild

2.3.1 Γεωμετρία Schwarzschild

Μία ειδική περίπτωση των πεδιακών εξισώσεων του Einstein είναι η εφαρμογή τους σε χώρους μεγάλης συμμετρίας. Οι εξισώσεις μελετήθηκαν και επιλύθηκαν από τον Karl Schwarzschild για την περίπτωση της γεωμετρίας του κενού για μια ακίνητη σφαιρικά συμμετρική μάζα. Η επίλυση των εξισώσεων πεδίου σε αυτή την περίπτωση, εμφάνισε τη μετρική έξω από το χώρο που καταλαμβάνει η βαρυτική μάζα, η οποία ονομάζεται μετρική Schwarzschild. [3] Όπως έγινε φανερό κατά την επίλυση της εξίσωσης, το στοιχείο μήκους της γεωμετρίας σε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων θα δίνεται από τον τύπο :

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) dt^2 - \left[\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2\right] \quad (44)$$

ή σε γεωμετροποιημένες συντεταγμένες όπου $c^2 = 1$,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left[\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\right] \quad (45)$$

Συμπυκνώνοντας τον παράγοντα της χρονικής συνιστώσας σε μια συνάρτηση της ακτίνας $h(r) = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)$ σε μονάδες $c^2 = 1$:

$$ds^2 = h(r) dt^2 - \frac{dr^2}{h(r)} - r^2 d\Omega^2 \quad (46)$$

Η παραπάνω εξίσωση περιγράφει τη γεωμετρία Schwarzschild και με τη βοήθειά της, μπορεί να υπολογιστεί η καμπύλωση του χωροχρόνου γύρω από τη μάζα, επομένως και η κινητική συμπεριφορά ενός σωματιδίου που βρίσκεται σε αυτόν. Οι μελανές οπές του Schwarzschild χαρακτηρίζονται μόνο από την ακτίνα τους, η οποία δίνεται από τον τύπο $r_g = 3 * 10^5 (M/M_o) cm$. Παρατηρούμε δηλαδή ότι η ακτίνα τους εξαρτάται μόνο από τη μάζα M της πηγής καμπυλότητας.

Η φυσική παράμετρος $r = \frac{2GM}{c^2}$ που εμφανίζεται στο στοιχείο μήκους, ονομάζεται ακτίνα Schwarzschild. Η ακτίνα Schwarzschild είναι χαρακτηριστικό

μέγεθος της καμπύλωσης και αντιστοιχεί στην ακτίνα της επιφάνειας που ορίζει τον ορίζοντα γεγονότων. Εάν συγκριθεί η παράμετρος αυτή με τον παράγοντα της ακτίνας στο βαρυτικό δυναμικό, φανερώνεται η ερμηνεία της σταθεράς M ως τη συνολική μάζα από την οποία απορρέει η καμπυλότητα. Οι μελανές οπές μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ανάλογα με την ακτίνα Schwarzschild που έχουν, ή ισοδύναμα, από την πυκνότητά τους. Εφόσον η ακτίνα εξαρτάται γραμμικά από τη μάζα, ενώ ο περικλειόμενος όγκος είναι ανάλογος της τρίτης δύναμης της ακτίνας, προκύπτει ότι οι μικρές μελανές οπές είναι πολύ πυκνότερες από τις μεγάλες.

Επειδή όλη η μάζα (και αυτή του αρχικού σώματος πριν την κατάρρευση σε μελανή οπή και αυτή που απορροφάται από τη μελανή οπή) συγκεντρώνεται στο "κέντρο", το σημείο εκείνο παρουσιάζει απειριζόμενη πυκνότητα και ονομάζεται σημειακή ανωμαλία singularity. Αυτή εμφανίζεται και στη μετρική Schwarzschild ως απροσδιοριστία για $r \rightarrow 0$ και είναι γνήσια ανωμαλία, δηλαδή δεν είναι αποτέλεσμα του μετασχηματισμού συντεταγμένων που χρησιμοποιήθηκε, αλλά εξηγείται φυσικά και δε θα μπορούσε να αποφευχθεί με χρήση άλλου συστήματος συντεταγμένων.

Η γεωμετρία Schwarzschild συγκρινόμενη με τη γεωμετρία μίας σφαιρικά συμμετρικής μάζας ακτίνας r στον τρισδιάστατο χώρο $ds^2 = r^2 d\Omega^2$ φανερώνει τις συμμετρίες ως προς τις γωνιακές συνιστώσες θ και ϕ . Η γεωμετρική ερμηνεία της συντεταγμένης r δεν αφορά όμως την απόσταση από κάποιο κέντρο στην περιγραφή της μελανής οπής αλλά συνδέεται με το εμβαδόν των σφαιρών σταθερού r λόγω της αναφερθείσας σφαιρικής συμμετρίας.

Ένα άλλο βασικό χαρακτηριστικό της μετρικής Schwarzschild είναι ότι για $r \rightarrow \infty$, αυτή ανάγεται στη μετρική του Minkowski με στοιχείο μήκους :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - [dr^2 + r^2 d\Omega^2] \quad (47)$$

το οποίο ερμηνεύεται ως κίνηση σε επίπεδο χωροχρόνο. Δηλαδή μακριά από το βαρυτικό πεδίο που προκαλεί η μάζα, ο χωροχρόνος είναι επίπεδος με αντίστοιχες συνέπειες στο παρευρισκόμενο σωματίδιο. Γίνεται δηλαδή φανερό ότι στο όριο μεγάλων αποστάσεων από την κεντρική μάζα που καμπυλώνει το χωροχρόνο, η φυσική ανάγεται στη φυσική της ΕΘΣ και η ελκτική δύναμη είναι η αναμενόμενη που προκύπτει από τη Νευτώνεια μηχανική. Ο όρος $\frac{2GM}{c^2 r}$ προσδιορίζει το βαθμό απόκλισης της γεωμετρίας Schwarzschild από τη γεωμετρία Minkowski.

Πιο συγκεκριμένα, η μετρική $g_{\mu\nu}$ θα δίνεται από τον παρακάτω τύπο :

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} g_{tt} & g_{tr} & g_{t\theta} & g_{t\varphi} \\ g_{rt} & g_{rr} & g_{r\theta} & g_{r\varphi} \\ g_{\theta t} & g_{\theta r} & g_{\theta\theta} & g_{\theta\varphi} \\ g_{\varphi t} & g_{\varphi r} & g_{\varphi\theta} & g_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(1 - \frac{2M}{r}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \frac{2M}{r})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{bmatrix} \quad (48)$$

3 Χώρος S-AdS

3.1 Στοιχεία του χώρου

Ως πολλαπλότητα ορίσαμε έναν τοπολογικό χώρο, ο οποίος ανάγεται τοπικά σε ευκλείδιο χώρο κοντά σε κάθε σημείο. Επομένως, κάθε σημείο μίας n -διάστατης πολλαπλότητας θα έχει μία γειτονική περιοχή που αποτελεί ομοιομορφισμό του ευκλείδιου χώρου n -διαστάσεων.

Μία ειδική περίπτωση πολλαπλότητας είναι η ψευδο-Riemannian πολλαπλότητα και είναι εξοπλισμένη με ένα συμμετρικό, λείο και μη εκφυλισμένο μετρικό τανυστή g . Εάν αυτή εφαρμοστεί σε ένα τανυστικό πεδίο, τότε η τιμή του βαθμωτού πεδίου που θα προκύψει σε κάθε σημείο της πολλαπλότητας μπορεί να είναι αρνητική, θετική ή μηδενική. Η Lorentzian πολλαπλότητα είναι μια πιο εξειδικευμένη περίπτωση της ψευδο-Riemannian, για την οποία η υπογραφή της μετρικής είναι $(1, n-1)$. Ο χώρος de Sitter είναι μία συμμετρική Lorentzian πολλαπλότητα σταθερής θετικής καμπυλότητας, ο n -διάστατος χώρος Anti-de Sitter (AdSn) σταθερής αρνητικής καμπυλότητας, ενώ ο χώρος Minkowski έχει καμπυλότητα μηδέν. Οι τρεις παραπάνω περιπτώσεις, εφαρμοζόμενες σε σύμπαν μηδενικής χωρικής και ενεργειακής πυκνότητας και κοσμολογικής σταθεράς θετικής, αρνητικής και μηδενικής κατ' αντιστοιχία με τις παραπάνω καμπυλότητες, αποτελούν ακριβείς λύσεις των εξισώσεων πεδίου του Einstein.

Στη γενική σχετικότητα, ο κενός AdSn χώρος αντιστοιχεί σε υπερβολική γεωμετρία και σε αρνητική κοσμολογική σταθερά. Η μετρική χωροχρόνου με αντικείμενο σφαιρικά συμμετρικό μάζας M και με κοσμολογική σταθερά $\Lambda = -\frac{(n-1)(n-2)}{2a^2}$, όπου a η ακτίνα του και $n = 4$ η διάστασή του (άρα το Λ γίνεται $\Lambda = -\frac{3}{a^2}$), θα είναι :

$$ds^2 = -h(r)dt^2 + \left(\frac{dr^2}{h(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\right) \quad (49)$$

όπου $h(r)$ η συνάρτηση κατάρρευσης [1] :

$$h(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{a^2} \quad (50)$$

3.2 Διάδοση βαθμωτού πεδίου σε S-AdS χωροχρόνο

Σε αυτή την περίπτωση, [1] η διάδοση άμαζων βαθμωτών πεδίων συζευγμένων ελάχιστα σε αυτό το χωροχρόνο δίνεται από τη λύση της εξίσωσης Klein - Gordon [1] :

$$\Phi^{;\mu}_{;\mu} = 0 \rightarrow \quad (51)$$

$$\square\Phi = 0 \rightarrow \square = \nabla_{\mu}\nabla^{\mu} = \partial_{\mu}\partial^{\mu} = \partial^2 \quad \text{flat χώρος} \quad (52)$$

$$\rightarrow \square = \nabla_{\mu}\nabla^{\mu}, \nabla_{\mu} = \partial_{\mu} + \Gamma_{\mu} \quad \text{καμπυλωμένος χώρος} \quad (53)$$

όπου $\Gamma_{\mu\rho}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\tau}(g_{\mu\tau,\rho} + g_{\rho\tau,\mu} - g_{\mu\rho,\tau}) = \frac{1}{2}g^{\mu\tau}g_{\mu\tau,\rho}$
 και $\frac{1}{2}g^{\mu\tau}g_{\mu\tau,\rho} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\rho}(\sqrt{-g})$
 επομένως η Klein - Gordon γίνεται :

$$\square\Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\mu}(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_{\nu}\Phi) = 0 \quad (54)$$

Για άμαζο πεδίο, αυτό μπορεί να αναλυθεί στις ιδιοκαταστάσεις κανονικής συχνότητας ω και γωνιακής στροφορμής ℓ :

$$\Phi(t, r, \theta, \varphi) = e^{-i\omega t}Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)R(r)$$

Η ακτινική εξίσωση $R(r)$, που αποτελεί τη γωνιακή συνιστώσα, περιγράφει πλήρως τη δυναμική του πεδίου και ικανοποιεί το ακτινικό κομμάτι της εξίσωσης Klein - Gordon. Αντικαθιστώντας το πεδίο στην εξ. (54), προκύπτει ότι :

$$\frac{d}{dr}(hr^2\frac{dR}{dr}) + (\frac{\omega^2 r^2}{h} - \ell(\ell + 1))R = 0 \quad (55)$$

Οι τιμές $\ell(\ell + 1)$ αντιστοιχούν στις ιδιοκαταστάσεις του γωνιακού μέρους της εξίσωσης 51.

Θέτοντας νέα ακτινική εξίσωση $u : R(r) = \frac{u(r)}{r}$ και με τη βοήθεια μίας νέας συντεταγμένης r^* που ονομάζεται tortoise coordinate με την ιδιότητα : $dr^* = \frac{dr}{h(r)}$, συνεπάγεται ότι :

$$\begin{aligned}
h \frac{d}{dr} \left(hr^2 \frac{dR}{r} \right) &= rh \frac{dh}{dr} \frac{du}{dr} + h^2 \frac{du}{dr} + rh^2 \frac{d^2u}{dr^2} \rightarrow \\
-uh \frac{dh}{dr} - h^2 \frac{du}{dr} &= rh \frac{d}{dr} \left(h \frac{du}{dr} \right) - h \frac{dh}{dr} u
\end{aligned}$$

και η 55 γίνεται :

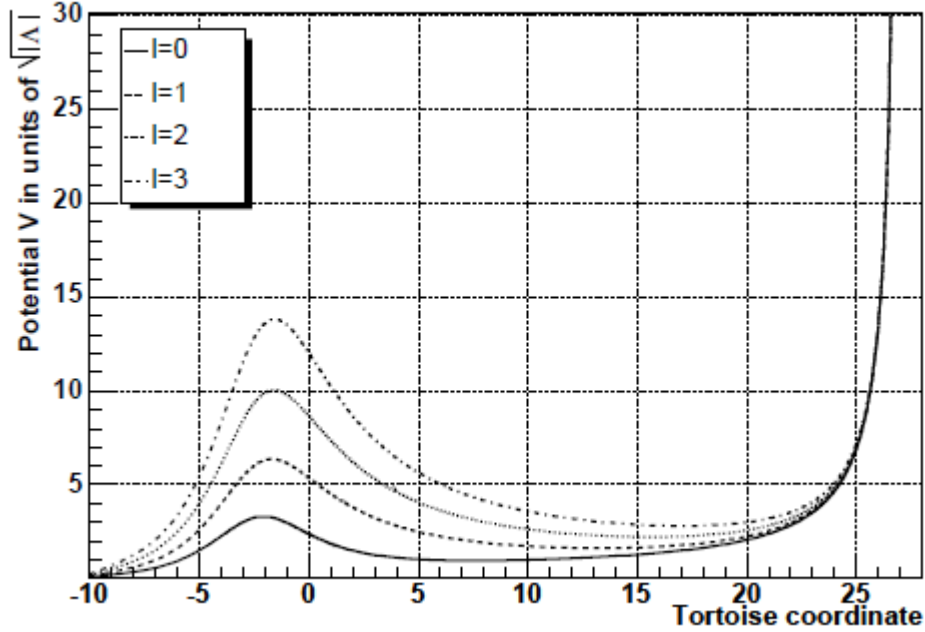
$$rh \frac{d}{dr} \left(h \frac{du}{dr} \right) - h \frac{dh}{dr} u + [\omega^2 r^2 - \ell(\ell + 1)h] \frac{u}{r} = 0 \rightarrow \quad (56)$$

$$-\frac{d^2u}{dr^{*2}} + h \left[\frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{dh}{dr} \right] u = \omega^2 u \quad (57)$$

Η εξίσωση αυτή έχει τη μορφή της Schroedinger με δυναμικό το οποίο ονομάζεται δυναμικό Regge - Wheeler [1] και ισούται με :

$$\boxed{V_{RW}^2(r) \equiv h \left[\frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{dh}{dr} \right]} \quad (58)$$

Γίνεται φανερό ότι ο τελεστής της ορμής $i \frac{\partial}{\partial r^*}$ ισούται με $\omega^2 - M(r^*)$, όπου $M(r^*) = h(r) \left(\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{dh}{dr} \right)$.



Σχήμα 1: Το δυναμικό που βλέπει ένα βαθμωτό πεδίο σε SAdS χωροχρόνο συναρτήσει της συντεταγμένης tortoise(r^*), όπου $r_H = 0.1$, $\eta \ll 1$

Η εξίσωση αυτή είναι όμοια με την τελεστική εξίσωση Hamilton - Jacobi :

$$H^2 = p^2 + V^2(r^*) \rightarrow \quad (59)$$

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = (-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + V^2(\xi))\psi \quad (60)$$

και αποτελεί το κβαντομηχανικό ανάλογο της κλασικής εξίσωσης κίνησης για ένα δοκιμαστικό σωματίδιο σε χώρο Schwarzschild. Επομένως, παρατηρείται ότι η διάδοση ενός βαθμωτού πεδίου σε χώρο τύπου Schwarzschild βασίζεται σε ένα κλασικό πρόβλημα που περιγράφεται από τη δράση S ως λύση της εξίσωσης :

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r^*}\right)^2 + V^2(r^*) = \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2$$

Η εξίσωση αυτή διαφέρει ελαφρώς από τη σχετικιστική Hamilton - Jacobi για άμαζο σωματίδιο εντός χωρικού δυναμικού. Εν γένει, για την περιγραφή της διάδοσης σωματιδίου σε χωρικό δυναμικό χρησιμοποιείται η λαγκρανζιανή : $\mathcal{L} = -m\sqrt{1-u^2} - V(r^*)$, ενώ στην παραπάνω περίπτωση μπορεί να θεωρηθεί ότι η μάζα για το ελεύθερο σωματίδιο είναι συνάρτηση της θέσης $\mathcal{L} = -V(r^*)\sqrt{1-u^2}$.

Εφόσον λοιπόν η εξίσωση 57 έχει τη μορφή της Schroedinger :

$$\left(\frac{d^2}{d\xi^2} + p^2(\xi)\right)\psi(\xi) = 0$$

μπορεί να εφαρμοστεί η ημικλασική προσέγγιση για τη διάδοση βαθμωτού πεδίου σε χώρο τύπου Schwarzschild με δεδομένη την παραπάνω \mathcal{L} .

4 WKB ημικλασική προσέγγιση

Η WKB αποτελεί μία προσεγγιστική μέθοδο για την επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων και χρησιμοποιείται στην κβαντομηχανική όταν το δυναμικό ή η συχνότητα μεταβάλλεται αργά και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση των δέσμιων καταστάσεων της ενέργειας σε πηγάδι δυναμικού, καθώς και για τη μελέτη του φαινομένου σήραγγας.

4.1 Λύση WKB

Η χρονοανεξάρτητη κυματική εξίσωση ενός σωματιδίου που κινείται εντός δυναμικού V δίνεται από την εξίσωση Schroedinger [8, 10] :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = E\psi \quad (61)$$

και ορίζοντας τον κυματικό αριθμό k ως :

$$k^2(x) = \frac{2m(E - V(x))}{\hbar^2} \quad (62)$$

απλοποιείται στην:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -k^2(x)\psi \quad (63)$$

Εάν η κυματοσυνάρτηση ψ του σωματιδίου γραφεί σε εκθετική μορφή

$$\psi(x) = \frac{C}{\sqrt{k(x)}} e^{\pm i \int_0^x k(x) dx} \quad (64)$$

η οποία περιγράφει ένα σωματίδιο το οποίο κινείται στον άξονα x με φορά προς τα δεξιά με συνεχώς μεταβαλλόμενο κυματαριθμό k . Η κυματοσυνάρτηση αυτή δηλαδή αναπτύσσεται ημικλασικά και ύστερα μεταβάλλεται αργά η φάση ή το πλάτος της. Προκύπτει λοιπόν

$$-\frac{d\psi}{dx} = ik(x)\psi \quad (65)$$

και

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} = i\frac{dk}{dx}\psi - k^2\psi \quad (66)$$

Μια σύγκριση της τελευταίας με την παραπάνω εξίσωση Schroedinger φανερώνει ότι η εκθετική λύση που δόθηκε για την κυματοσυνάρτηση είναι μια προσεγγιστική λύση της εξίσωσης Schroedinger, δεδομένου ότι ο πρώτος όρος της εξίσωσης (9) είναι αμελητέος συγκριτικά με το δεύτερο όρο. Ο περιορισμός αυτός εκφράζεται μαθηματικά ως

$$|k'| \ll k^2$$

ή αλλιώς

$$\frac{k}{k'} \gg k^{-1}$$

Η παραπάνω διαδικασία ονομάζεται προσέγγιση WKB και η λύση της κυματοσυνάρτησης 64 που προτάθηκε ονομάζεται λύση WKB και ισχύει μακριά από τις έντονες μεταβολές του δυναμικού, όπως οι περιοχές που το δυναμικό αλλάζει πρόσημο.

4.2 Εφαρμογή σε φράγμα δυναμικού

Η μελέτη αφορούσε την περιοχή όπου η ενέργεια είναι μεγαλύτερη του δυναμικού $V(x)$ -δηλαδή είναι κλασικά επιτρεπτή περιοχή- και το k είναι πραγματικός αριθμός. Στην περίπτωση όπου το σωματίδιο συναντήσει ένα φράγμα δυναμικού από το οποίο αποκλείεται κλασικά, σε εκείνη την περιοχή η ενέργεια θα είναι μικρότερη του δυναμικού και το $k(x)$ κατ' επέκταση θα είναι φανταστικό. Θεωρώντας ότι το φράγμα εκτείνεται από $x = x_1$ έως $x = x_2$, η λύση της WKB εντός του φράγματος γράφεται ως:

$$\psi(x) = \psi_1 e^{-i \int_{x_1}^x |k(x)| dx} \quad (67)$$

όπου το πλάτος

$$\psi_1(x) = \psi_0 e^{i \int_0^{x_1} k(x) dx} \quad (68)$$

Σύμφωνα με την προσέγγιση, η πυκνότητα πιθανότητας εντός του φράγματος δυναμικού είναι εκθετικά φθίνουσα συνάρτηση

$$|\psi(x)|^2 = |\psi_1(x)|^2 e^{-2 \int_{x_1}^x |k(x)| dx} \quad (69)$$

όπου ο παράγοντας του εκθετικού είναι η πυκνότητα πιθανότητας στο αριστερό όριο του φράγματος δυναμικού. Προκύπτει, ομοίως, ότι η πυκνότητα πιθανότητας στο δεξί όριο του φράγματος, καθώς και για $x > x_2$ θα είναι :

$$|\psi(x_2)|^2 = |\psi_1(x)|^2 e^{-2 \int_{x_1}^{x_2} |k(x)| dx} \quad (70)$$

Από το λόγο των παραπάνω πυκνοτήτων πιθανότητας στο δεξί και αριστερό άκρο του φράγματος μπορεί να υπολογιστεί η πιθανότητα το σωματίδιο ερχόμενο από αριστερά να διαπεράσει το φράγμα και να βρεθεί στην δεξιά περιοχή (και αντίστροφα) μέσω φαινομένου σήραγγας. [10] Η πιθανότητα αυτή θα είναι :

$$|T|^2 = \frac{|\psi_2|^2}{|\psi_1|^2} = e^{-2 \int_{x_1}^{x_2} |k(x)| dx} \quad (71)$$

Η μονοδιάστατη εξελισσόμενη κυματοσυνάρτηση με χρονική εξάρτηση θα περιλαμβάνει και όρο χρόνου, οπότε για τις επιτρεπτές περιοχές $E > V(x)$:

$$\psi(x, t) \simeq \frac{C}{\sqrt{k(x)}} e^{\pm i \int_0^x k(x) - \frac{iEt}{\hbar} dx} \Rightarrow \quad (72)$$

$$\psi(x, t) \simeq \frac{C}{\sqrt[4]{p(x)}} e^{\pm i \int_0^x p(x) - \frac{iEt}{\hbar} dx} \quad (73)$$

από τη σχέση ορμής - ενέργειας $p(x) = \sqrt{2m(E - V(x))}$, ενώ για τις κλασικά απαγορευμένες περιοχές όπου $E < V(x)$ όπου η σχέση ορμής ενέργειας τροποποιείται στην $|p(x)| = \sqrt{2m(V(x) - E)}$:

$$\psi(x, t) \simeq \frac{C'}{\sqrt{k_2(x)}} e^{\pm \int_0^x k_2(x) - \frac{iEt}{\hbar} dx} \Rightarrow \quad (74)$$

$$\psi(x, t) \simeq \frac{C'}{\sqrt[4]{|p(x)|}} e^{\pm \frac{1}{\hbar} \int_0^x |p(x)| - \frac{iEt}{\hbar} dx} \quad (75)$$

Για τη μελέτη των δέσιμων καταστάσεων μέσω της WKB, θα θεωρήσουμε ένα δυναμικό $V(x)$ με δύο σημεία αναστροφής, στα οποία εξισώνεται η ενέργεια με το δυναμικό $V(x) = E$ και ένα ολικό ελάχιστο V_{min} .

Η κυματοσυνάρτηση εκτός της επιτρεπτής περιοχής (δηλαδή στις περιοχές I, III) θα έχει εκθετική μορφή, ενώ εντός της (περιοχή II) θα έχει ημιτονοειδή μορφή. Στα σημεία αναστροφής όμως, θα πρέπει η κυματοσυνάρτηση να είναι συνεχής, όπως και η παράγωγός της.

Στο πρώτο σημείο αναστροφής x_1 η κυματοσυνάρτηση αριστερά (περιοχή I) και δεξιά (περιοχή II) του x_1 θα είναι :

$$(I) : \frac{1}{(V(x) - E)^{1/4}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x \sqrt{2m(V(x)-E)} dx} \quad (76)$$

$$(II) : \frac{2}{(E - V(x))^{1/4}} \cos\left[\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x \sqrt{2m(E - V(x))} dx - \frac{\pi}{4}\right] \quad (77)$$

ενώ στο δεύτερο σημείο αναστροφής x_2 η κυματοσυνάρτηση αριστερά (περιοχή II) και δεξιά (περιοχή III) του x_2 θα είναι αντίστοιχα :

$$(II) : \frac{2}{(E - V(x))^{1/4}} \cos\left[-\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_2} \sqrt{2m(E - V(x))} dx + \frac{\pi}{4}\right] \quad (78)$$

$$(III) : \frac{1}{(V(x) - E)^{1/4}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x \sqrt{2m(V(x)-E)} dx} \quad (79)$$

Μπορεί, κατ' αυτό τον τρόπο να προσδιοριστεί η συνθήκη για τις επιτρεπτές ενέργειες, καθώς οι δύο εκφράσεις για την εξίσωση (II) θα πρέπει να είναι σύμφωνες μεταξύ τους :

$$\left[\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x \sqrt{2m(E - V(x))} dx - \frac{\pi}{4}\right] - \left[-\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_2} \sqrt{2m(E - V(x))} dx + \frac{\pi}{4}\right] = n\pi \quad (80)$$

\Rightarrow

$$\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(E - V(x))} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (81)$$

5 Προσέγγιση WKB για βαθμωτά πεδία σε χώρο SAdS

Το βασικό πλεονέκτημα της ημικλασικής αυτής μεθόδου είναι ότι δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα σε τάξη μεγέθους για την προσέγγιση καταστάσεων, τις οποίες δεν έχουν καταφέρει να προσεγγίσουν προς το παρόν άλλες μέθοδοι. Τα χβαντικά πεδία παρουσιάζουν ιδιαίτερες ιδιότητες και συμπεριφορές όταν βρίσκονται σε καμπυλωμένους χωροχρόνους. Οι συμπεριφορές αυτές γίνονται πιο έντονες σε περιοχές όπου εμφανίζονται μαύρες τρύπες ή εάν υπάρχει κοσμολογική σταθερά στις εξισώσεις πεδίου. Η μέθοδος WKB χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία για την περιγραφή της διάδοσης άμαζων βαθμωτών πεδίων συζευγμένων ελάχιστα, για στατικό και σφαιρικά συμμετρικό καμπυλωμένο υπόβαθρο τύπου Schwarzschild.

5.1 Ακριβής λύση

Για την εύρεση της ακριβούς λύσης για το φάσμα άμαζου βαθμωτού εμβαπτυσμένου σε χώρο S-AdS, χρησιμοποιείται η εξίσωση 59, με $\tau = \tau/R$, $\rho = 2\arctan(\frac{r}{R} + \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}) - \frac{\pi}{2}$ και η διαφορική εξίσωση

$$\frac{\cos^2 \rho}{\sin^2 \rho} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\cos^2 \rho}{\sin^2 \rho} \frac{dR}{d\rho} \right) + \left(\nu^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{\sin^2 \rho} \right) R = 0 \quad (82)$$

Με αλλαγή συντεταγμένων [1] :

- $z = \cos 2\rho = \frac{\cos^2 \rho - \sin^2 \rho}{\cos^2 \rho} = 1 - \frac{\sin^2 \rho}{\cos^2 \rho}$
- $R(\rho) = \sin^\ell \rho \cos^\beta \rho P(\rho)$

η διαφορική εξίσωση αποκτά τη μορφή :

$$(1 - z^2) \frac{d^2 P}{dz^2} + (b - a - (a + b + 2)z) \frac{dP}{dz} + n(n + a + b + 1)P(z) = 0 \quad (83)$$

Οι περιορισμοί τους οποίους πρέπει να ικανοποιούν οι παράμετροι β, a, b, n είναι :

$$\begin{aligned}
a + b + 2 &= \ell + 1 + \beta \\
b - a &= \beta - 2 - \ell \\
\beta(\beta - 3) &= 0 \\
n(n + a + b + 1) &= \frac{1}{4}(v^2 - (\ell + \beta)^2)
\end{aligned}$$

Με την ικανοποίηση των παραπάνω, προκύπτει και η ακτινική συνιστώσα της Klein - Gordon συναρτήσεως των πολυώνυμων Jacobi :

$$\boxed{R(\rho) = \sin^\ell \rho \cos^3 \rho P_{(\nu-\ell-3)/2}^{\ell+1/2, 3/2}} \quad (84)$$

Η λύση αυτή οδηγεί στο ακριβές ενεργειακό φάσμα για το πεδίο :

$$\boxed{(\omega_{n,\ell})_{(n,\ell) \in \mathbb{N}^2} = \left(\frac{2n + \ell + 3}{R} \right)_{(n,\ell) \in \mathbb{N}^2}} \quad (85)$$

5.2 Προσεγγιστική λύση

Κατά την ημικλασική προσέγγιση [1], χρησιμοποιείται η εξίσωση που αντιστοιχεί στο γωνιακό και χρονικό μέρος της εξίσωσης Klein - Gordon :

$$\left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + V(\xi^2) \right) \psi(\xi, t) = -\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi(\xi, t)}{\partial t^2} \quad (86)$$

με το γωνιακό μέρος να διαχωρίζεται με τη χρήση σφαιρικών αρμονικών και με

$$V_\ell^2(r^*) = \frac{1}{R^2 \cos^2(r^*/R)} \left[\frac{\ell(\ell + 1)}{\tan^2(r^*/R)} + 2 \right] \quad (87)$$

όπου $r^* \equiv R \arctan(r/R) \in [0, \pi \frac{R}{2}]$.

Γίνεται επομένως φανερό ότι το δυναμικό που αντιλαμβάνεται ένα βαθμωτό πεδίο είναι ένα πηγάδι δυναμικού για κάθε τροχιακή στροφορμή $\neq 0$. Ως αποτέλεσμα, αυτά παρουσιάζουν διακριτό ενεργειακό φάσμα.

Εάν χρησιμοποιηθεί η συντεταγμένη r_H που αντιστοιχεί στην ακτίνα του ορίζοντα γεγονότων της μαύρης τρύπας (η οποία αντιστοιχεί στην πραγματική θετική ρίζα του $h(r) = 0 \rightarrow \frac{r_H^3}{R^2} - 2M + r_H = 0$), το στοιχείο μήκους γίνεται :

$$ds^2 = (1 - \frac{r_H}{r})dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_H}{r}} - r^2 d\Omega^2 \quad (88)$$

και η συντεταγμένη $r^* = r + r_H \ln(r - r_H)$.

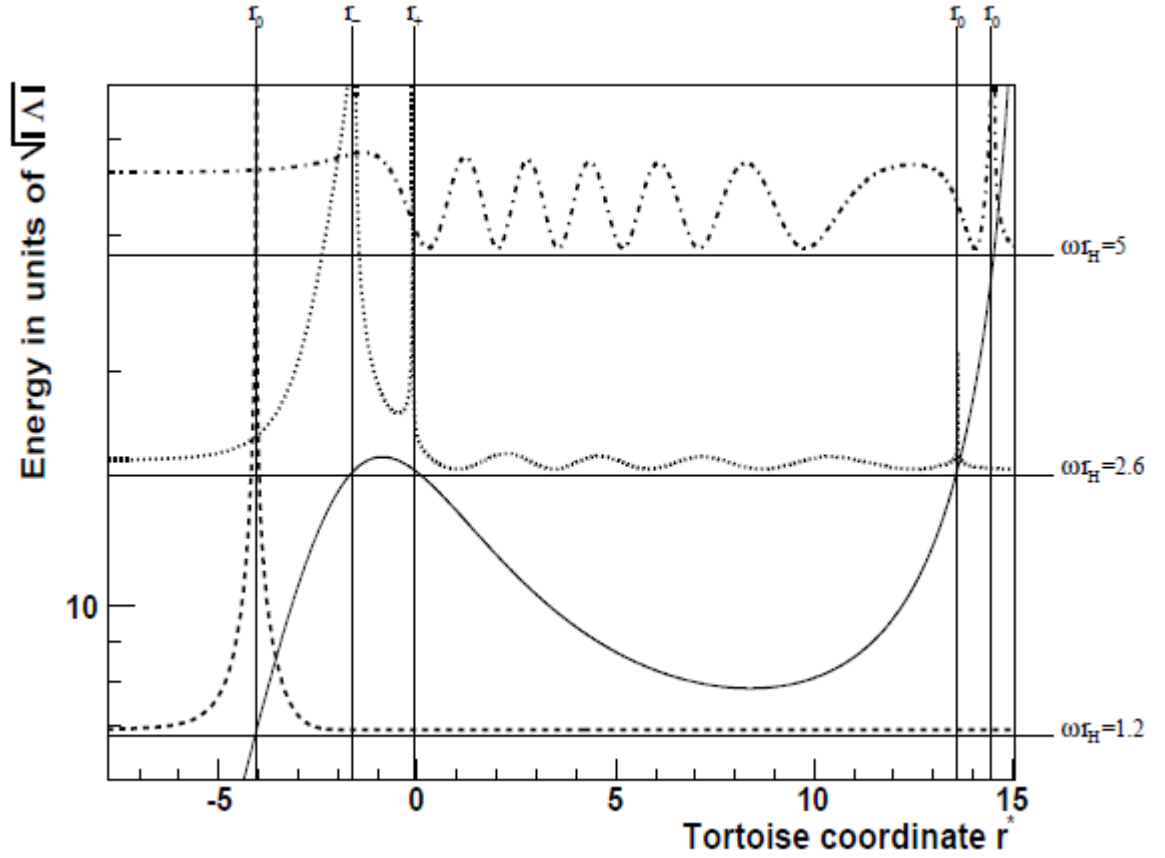
Το δυναμικό που αντιλαμβάνεται το βαθμωτό γράφεται ως :

$$V_\ell^2(r) = [1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{R^2}][\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} + \frac{2}{R^2}] \quad (89)$$

και εξαρτάται από τη μεταβλητή $\eta = \frac{r_H}{R}$. Στην περίπτωση που το $\eta \ll 1$, η ακτίνα ορίζοντα της μελανής οπής είναι μικρότερη από την ακτίνα καμπυλότητας του χώρου AdS, ενώ για $\eta \gg 1$ η ακτίνα του ορίζοντα γίνεται μεγαλύτερη από την ακτίνα καμπυλότητας που χαρακτηρίζει το χώρο. Στην παρούσα εργασία, εξετάστηκε η περίπτωση όπου $\eta \ll 1$.

Η λύση για τις στάσιμες καταστάσεις $\psi(r^*, t) = \psi_r(r^*)e^{-i\omega t}$ που προκύπτει από την εξίσωση 57 θα είναι η εξίσωση κίνησης με πραγματικό θετικό ω το οποίο καθορίζει τις λύσεις της προσέγγισης WKB. Ως αποτέλεσμα, το πρόβλημα χωρίζεται και εξετάζεται σε τρεις διαφορετικές περιοχές-περιπτώσεις που περιγράφονται από τα εκάστοτε σημεία αναστροφής.

- περιοχή I : $\omega < V_{min}^\ell$ που διαθέτει ένα σημείο αναστροφής r_- πριν από το σημείο στο οποίο μεγιστοποιείται η καμπύλη $r_- < r_{max}$.
- περιοχή II : $V_{min}^\ell < \omega < V_{max}^\ell$ με τρία σημεία αναστροφής. Το σημείο r_o αντιστοιχεί στο όριο χωρικού απειρισμού, ενώ τα r_\pm αποτελούν τα σημεία αριστερά και δεξιά από το σημείο τοπικού μέγιστου της καμπύλης δυναμικού όπου η ενέργεια ω εξισώνεται με το δυναμικό.
- περιοχή III : $V_{max}^\ell < \omega$ με ένα σημείο αναστροφής r_o που αντιστοιχεί, όπως στην περιοχή II, στο σημείο απειρισμού της πιθανότητας.



Σχήμα 2: Πυκνότητες πιθανότητας ως συναρτήσεις της συντεταγμένης r^* και βαθμωτό δυναμικό (συνεχής γραμμή) του $l = 6$ για $\eta = 10$. Η διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί στην περιοχή I ($\omega < V_{min}^l$), η διάστικτη γραμμή στην περιοχή II ($V_{min}^l < \omega < V_{max}^l$) και η μεικτή γραμμή αντιστοιχεί στην περιοχή III ($V_{max}^l < \omega$).

Χρησιμοποιώντας την ημι-κλασική προσέγγιση, υπολογίζονται τα επίπεδα ενέργειας μέσω αριθμητικής επίλυσης της εξίσωσης :

$$2 \int_{r_+}^{r_0} \frac{\sqrt{\omega_{n,\ell}^2 - V_\ell^2(r)}}{h(r)} dr - (2n + 1)\pi = 0 \quad (90)$$

5.3 Αριθμητική επίλυση

Σε αυτή τη μέθοδο, προτιμάται η συντεταγμένη r αντί της r^* που χρησιμοποιήθηκε στην περιγραφή του AdS. Όλες οι μεταβλητές που συναντώνται στην εξίσωση 89 ορίστηκαν στην αρχή του προγράμματος ως σταθερές τιμές, επομένως οι συναρτήσεις V^2, h, M θα είναι συναρτήσεις της r , καθώς και της R . Ορίζοντας, όπως αναφέρθηκε, την $\eta \equiv r_H/R$, και τοποθετώντας συγκεκριμένες τιμές για τους κβαντικούς αριθμούς n, ℓ και για την ακτίνα του ορίζοντα r_H , η μόνη εισαγωγή που μένει αόριστη είναι η ζητούμενη ενέργεια. - Η ενέργεια εκφράζεται στη μελέτη ως συχνότητα ω , καθώς σε όλη την ανάλυση της κίνησης σωματιδίου, εκφραζόταν ως η συχνότητα που αντιστοιχεί στην ενέργεια του σωματιδίου σε ένα AdS σύμπαν. Η συχνότητα αυτή προκύπτει μιγαδικός αριθμός $\omega = \omega + i\Gamma$ με πραγματικό μέρος το ω και φανταστικό μέρος το Γ , το οποίο βρίσκεται μέσω του υπολογισμού :

$$\Gamma = \omega |A^2|, \quad (91)$$

οπου

$$|A^2| = e^{-2 \int_{r_-}^{r_+} \frac{\sqrt{V^2 - \omega^2}}{h(r)} dr} \quad (92)$$

Η μελέτη διαχωρίστηκε σε περιπτώσεις σταθερών τιμών για τα η και σε υποενότητες αυτών των περιπτώσεων. Αρχικά, ορίστηκε η $\eta = 0.05$, η οποία όπως αναφέρθηκε παραπάνω πρέπει να είναι αρκούτως μικρή, καθώς οι περιπτώσεις $\eta \ll 1$ παρουσιάζουν μεγαλύτερο φυσικό ενδιαφέρον. Στη συνέχεια ορίζεται δεδομένη ακτίνα $r_H = 2.0$ και δεδομένοι κβαντικοί αριθμοί $\ell = 0, n = 0$. Αναζητείται επομένως η ενέργεια ω που ικανοποιεί την εξίσωση 90.

Όταν βρεθεί η ενέργεια αυτή, αλλάζουμε τον κύριο κβαντικό αριθμό σε $n = 1, 2, \dots$ και αναζητούμε εκ νέου την ενέργεια. Οργανώνοντας τις παραπάνω τιμές, προχωράμε αλλάζοντας την τροχιακή στροφορμή σε $\ell = 1, 2, \dots$ και καταγράφοντας τις νέες ενέργειες για κάθε υποπερίπτωση με διαφορετικό n .

Οι τιμές της ενέργειας που ικανοποιούν τους όρους που τέθηκαν ταυτόχρονα με την εξίσωση 90, παρουσιάζονται παρακάτω.

$$\ell = 0$$

n	$(n + 1/2)\pi$	I	ω^2	ω	Γ
0	1.571	1.573	0.0045	0.067	0.0038
1	4.712	4.714	0.0132	0.115	0.0284
2	7.854	7.868	0.0255	0.160	0.1404
3	10.996	-	-	-	-

$$\ell = 1$$

n	$(n + 1/2)\pi$	I	ω^2	ω	Γ
0	1.571	1.558	0.0053	0.073	10^{-7}
1	4.712	4.701	0.0199	0.141	$3 * 10^{-6}$
2	7.854	7.852	0.0351	0.187	$2 * 10^{-5}$
3	10.996	10.946	0.0538	0.232	10^{-4}

$$\ell = 2$$

n	$(n + 1/2)\pi$	I	ω^2	ω	Γ
0	1.571	1.571	0.0144	0.120	$2 * 10^{-8}$
1	4.712	4.722	0.0282	0.168	$5 * 10^{-7}$
2	7.854	7.879	0.0462	0.215	$6 * 10^{-6}$
3	10.996	10.989	0.0612	0.261	$6 * 10^{-5}$

$$\ell = 3$$

n	$(n + 1/2)\pi$	I	ω^2	ω	Γ
0	1.571	1.572	0.0212	0.146	10^{-11}
1	4.712	4.714	0.0375	0.194	$5 * 10^{-10}$
2	7.854	7.879	0.0582	0.241	$9 * 10^{-9}$
3	10.996	10.996	0.0828	0.288	10^{-7}

Διατηρώντας σταθερή την ακτίνα $r_H = 2.0$ και αλλάζοντας την τιμή του $\eta = 0.1$, οι τιμές της ενέργειας για τους διάφορους κβαντικούς αριθμούς n, ℓ παρουσιάζονται παρακάτω.

$$\ell = 0$$

n	$(n + 1/2)\pi$	I	ω^2	ω	Γ
0	1.571	1.569	0.0176	0.13	0.045
1	4.712	-	-	-	-
2	7.854	-	-	-	-
3	10.996	-	-	-	-

$$\ell = 1$$

n	$(n + 1/2)\pi$	I	ω^2	ω	Γ
0	1.571	1.577	0.0342	0.1849	0.0015
1	4.712	4.719	0.0733	0.2707	0.048
2	7.854	-	-	-	-
3	10.996	-	-	-	-

$$\ell = 2$$

n	$(n + 1/2)\pi$	I	ω^2	ω	Γ
0	1.571	1.573	0.0563	0.2373	$8 * 10^{-5}$
1	4.712	4.718	0.1065	0.3263	$6 * 10^{-4}$
2	7.854	7.862	0.1692	0.4113	0.016
3	10.996	10.997	0.2406	0.4905	0.26

$$\ell = 3$$

n	$(n + 1/2)\pi$	I	ω^2	ω	Γ
0	1.571	1.577	0.0834	0.2888	$5 * 10^{-8}$
1	4.712	4.709	0.1438	0.3792	$4 * 10^{-6}$
2	7.854	7.864	0.2184	0.4673	$1.6 * 10^{-4}$
3	10.996	10.980	0.3041	0.5515	0.0038

6 Συμπεράσματα - Σχόλια

Κατά τη μελέτη της συμπεριφοράς ενός βαθμωτού πεδίου που ζει στην περιοχή του πεδίου βαρύτητας μίας μελανής οπής Schwarzschild σε χώρο AdS, διαπιστώθηκε ότι μπορεί να εφαρμοστεί επιτυχώς η προσεγγιστική μέθοδος WKB για την επίλυση των εξισώσεων της μορφής Schroedinger.

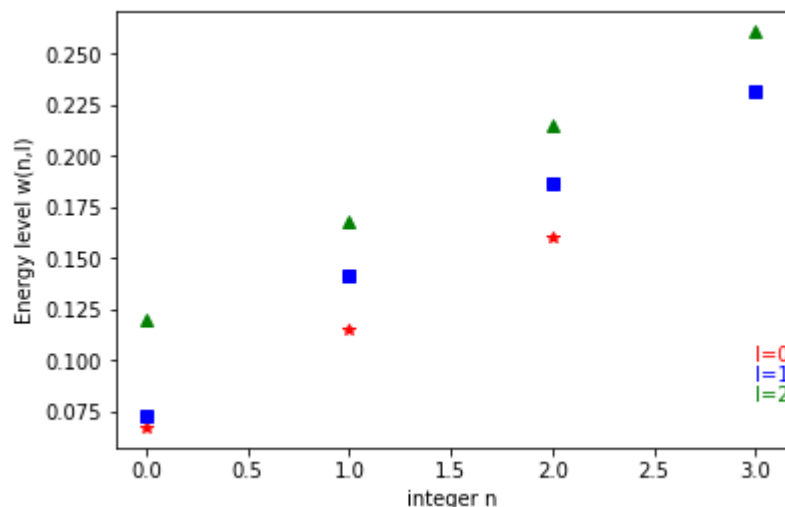
Αρχικά γίνεται φανερό ότι όσο αυξάνεται η στροφορμή, αυξάνει και η ενέργεια ω του βαθμωτού πεδίου. Όπως ήδη αναφέρθηκε, οι κβαντικές δέσμιες καταστάσεις σε μελανή οπή SAdS δίνονται από τη λύση της εξίσωσης 57, με ενέργειες γωνιακής συχνότητας ω . Επομένως, όσο μεγαλύτερη είναι η αριθμητική τιμή της στροφορμής, τόσο μακροβιότερες είναι οι δέσμιες καταστάσεις.

Επίσης, κατά τη μελέτη των παραπάνω αποτελεσμάτων, φαίνεται πως με μία αλλαγή (διπλασιασμό) της αδιάστατης μεταβλητής $\eta = r_H/R$, οι ενέργειες που αντιστοιχούν σε ίδιους κβαντικούς αριθμούς (n, ℓ) αυξάνονται, οδηγώντας στην εμφάνιση πυκνότερων δέσμιων καταστάσεων. Με την αλλαγή αυτή, οι δεσμιες καταστάσεις γίνονται όλο και πιο ασταθείς και σε κάποιο σημείο εξαφανίζονται, με αποτέλεσμα το βαθμωτό να αφήνεται στο έλεος της μελανής οπής. Η τιμή για την ακτίνα του ορίζοντα διατηρήθηκε σταθερή και αντιστοιχεί στη θετική πραγματική ρίζα της συνάρτησης $h(r) = 0 \rightarrow 2M = r_H(1 + \frac{r_H^2}{R^2})$.

Επισημαίνεται ότι η τιμή της μεταβλητής $\eta = r_H/R$ λήφθηκε $\eta \ll 1$, όπου η ακτίνα της μελανής οπής είναι σημαντικά μικρότερη από την ακτίνα καμπυλότητας του χώρου AdS. Για $\eta \gg 1$, το πεπερασμένο όριο του δυναμικού εμφανίζεται μόνο σε μεγάλες τιμές της στροφορμής. Έτσι, οι τιμές $\eta \ll 1$ παρουσιάζουν μεγαλύτερο φυσικό ενδιαφέρον.

Επιπλέον, το εύρος Γ συμπεριφέρεται προβλέψιμα. Με αύξηση της μεταβλητής η , αυξάνει για τους ίδιους κβαντικούς αριθμούς. Όμοια συμπεριφέρεται και για συγκεκριμένη στροφορμή ℓ , καθώς, αύξηση του κβαντικού αριθμού n συνεπάγεται αύξηση του εύρους. Αυτό παρουσιάζεται λόγω αύξησης της πιθανότητας φαινομένου σήραγγας. Αντίθετα, για δεδομένο κβαντικό αριθμό n , αύξηση της στροφορμής επιφέρει μείωση του εύρους Γ καθώς το πηγάδι δυναμικού είναι βαθύτερο.

Μία εικονοποίηση των παραπάνω φαίνεται στο διάγραμμα που παρατίθεται και δίνει τις μεταβολές της ενέργειας συναρτήσει των αλλαγών των κβαντικών αριθμών.



Σχήμα 3: Ενεργειακά επίπεδα $\omega_{n,\ell}$ συναρτήσει των κβαντικών αριθμών (n, ℓ) σε μονάδες $1/R$

Συμπεραίνεται, επομένως, πως καθίσταται δυνατή η χρήση ημικλασικών μεθόδων για την επίλυση εξισώσεων της μορφής Schroedinger εφαρμοσμένων σε βαθμωτά πεδία εντός στατικού και σφαιρικά συμμετρικού καμπυλωμένου υποβάθρου. Από το σύνολο της μελέτης εξάγεται ότι οι ημικλασικές μέθοδοι είναι οι πλέον χρήσιμες για την εξέταση των δυναμικών βαθμωτών πεδίων σε καμπυλωμένο χωροχρόνο, καθώς συχνά δε μπορούν να εξαχθούν οι ακριβείς λύσεις.

Αρχικά, το ακτινικό τμήμα της εξίσωσης Klein-Gordon γράφεται σε μία πιο διαχειρίσιμη μορφή, με χρήση της μεταβλητής tortoise ώστε να ανεξαρτητοποιηθεί η συνάρτηση από τη μετρική. Σε αυτή την περίπτωση, η συμπεριφορά των βαθμωτών πεδίων περιγράφεται από μία μονοδιάστατη εξίσωση τύπου Schroedinger η οποία μπορεί να μελετηθεί και να επιλυθεί με ημικλασική μέθοδο. Το κλασικό πρόβλημα που εμπεριέχει το κβαντομηχανικό, βασίζεται σε μία ελαφρώς διαφορετική εξίσωση, τη Hamilton-Jacobi, όπου πλέον το δυναμικό αντικαθίσταται από το τετράγωνο αυτού. Εφαρμόζεται σε αυτή η ημικλασική μέθοδος για τη μελέτη του βαθμωτού πεδίου σε SAdS χώρους για να εξαχθούν οι ενέργειες των βαθμωτών πεδίων.

Αναφορές

- [1] J. Grain and A. Barrau, A WKB approach to scalar fields dynamics in curved space-time, Nuclear Physics B Volume 742, Issues 1–3, 15 May 2006
- [2] J. Grain and A. Barrau, Quantum Bound States Around Black Holes, European Physical Journal C 53(4) , March 2007.
- [3] J. Hartle, Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity, Addison-Wesley, 2003
- [4] S. Carroll, Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity, Pearson, 2003.
- [5] F. Shu, *Αστροφυσική Τόμος I: Αστέρες* Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, 2013.
- [6] Α. Μαστιχιάδης και Ε. Αντωνοπούλου, *Αστροφυσική I, σημειώσεις από τις παραδόσεις*, ΕΚΠΑ, Αθήνα, 2007.
- [7] Α. Μαστιχιάδης, Ε. Αντωνοπούλου και Μ. Κοντιζά, *Αστροφυσική II, σημειώσεις από τις παραδόσεις*, ΕΚΠΑ, Αθήνα, 2005.
- [8] Σ. Τραχανάς, *Κβαντομηχανική I*, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, 2009.
- [9] Σ. Τραχανάς, *Κβαντομηχανική II*, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, 2009.
- [10] Lesson 20: Intro to WKB approximation, Steve Spicklemire, 2013 "<https://www.youtube.com/watch?v=HQbJI9xzi5Q>".
- [11] Man Of No Ego - Blinkers Removed (432hz album) ft. Osho, "<https://www.youtube.com/watch?v=GRe3GUaw1iU&t=3061s>".