

DA/DA 9572 - 31

Die

WURZEL

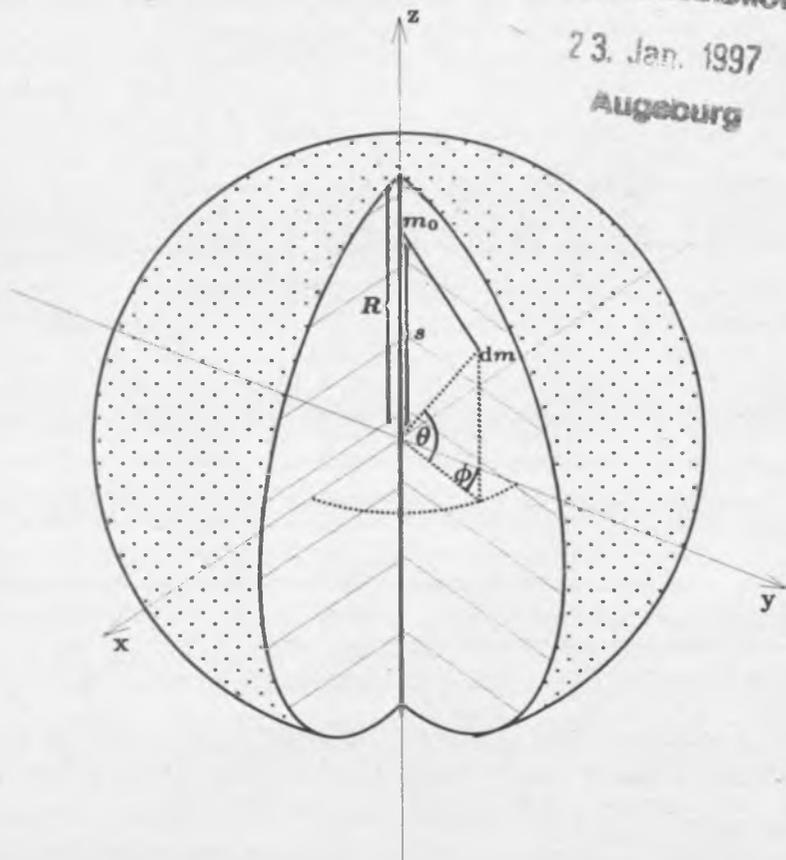
Zeitschrift für Mathematik 9509 1,00 DM

Jahresindex siehe Band 32,
Heft 1)

Universitätsbibliothek

23. Jan. 1997

Augsburg



Gegenseitiges Abrollen

In den vergangenen Jahren veranstaltete das *Zentrum für praktische Mathematik* an der Universität Kaiserslautern und der Technischen Hochschule in Darmstadt „Modellierungswochen“ für Teilnehmer von Mathematikwettbewerben in Rheinland-Pfalz und in Hessen. Ziel dieser Modellierungswochen ist die Bearbeitung *realer* Probleme, wobei die Modellierung als Übersetzung in die Sprache der Mathematik und die nachfolgende Bearbeitung mit dem Computer verstanden wird. Der 2. Autor hatte in der Modellierungswoche 1994 Gelegenheit, das nachfolgende Problem vorzustellen, das daraufhin gemeinsam von einer der Gruppen aus je fünf Schülern und zwei Lehrern bearbeitet wurde. Die hohe Motivation führte dazu, daß eine Problemlösung innerhalb einer Woche erreicht wurde und ein Computer-Programm implementiert wurde, das die Berechnung von Abrollkurven erlaubt. Der Themenkreis eignet sich evtl. für eine AG oder eine Projektwoche.

Aufgabenstellung

Es soll eine Pumpe konstruiert werden, die nach dem in Abb.1 gezeigten Prinzip arbeitet, sog. Wälzkolbenpumpe.

- Um die Mechanik möglichst einfach zu gestalten, soll nur einer der beiden Kolben von einem Zahnrad angetrieben werden.
- Die Konturen der beiden Kolben sollen möglichst exakt aufeinander abrollen, um einen hohen Wirkungsgrad zu erreichen und den Verschleiß gering zu halten.
- Welche Möglichkeiten für die Kolbenformen ergeben sich, wenn man die Forderung des einfachen Antriebs fallen läßt? Liefern diese Formen Vorteile bezüglich des Durchsatzes oder Verschleißes (größeres Volumen bei gleicher Geschwindigkeit)?

Mathematische Grundlagen

Obige Aufgabenstellung ist verwandt mit dem Problem des Abrollens von unrunder „Rädern“ auf dazu passenden Straßen, welches z.B. in [3, 4] behandelt wird. Die Grundidee zur Lösung beider Aufgaben besteht *abstrakt formuliert* darin, Erhaltungsgrößen beim Abrollen in Differentialgleichungen zu übersetzen und diese für die Vorgabe spezieller Konturen zu lösen.

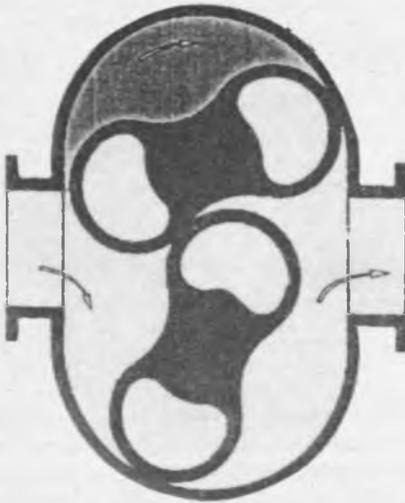


Abbildung 1 : (Links) Darstellung einer Wälzkolbenpumpe zur Erläuterung der Aufgabenstellung, (rechts) Fotografie von Zahnrädern auf verallgemeinerten Ellipsen im Technorama in Winterthur.

Betrachtet man „gleitfreie“ Abrollvorgänge (ohne Schlupf), dann kann man zeigen, daß der Berührungspunkt auf der Verbindungslinie beider Mittelpunkte liegen muß, vgl. [2]. In diesem Sinne stimmt die Aufgabenstellung nicht exakt mit dem in Abb.1 gezeigten Beispiel überein, da der Berührungspunkt sichtbar neben dieser Verbindungslinie liegt und die beiden Kolben Schlupf besitzen. Wir beschränken uns aber auf den reinen Abrollfall, um die Aufgabe in einem einfachen Rahmen zu halten.

Abb.2 zeigt die Geometrie zweier gleitfrei aufeinander abrollender Körper in Vergrößerung rund um den Berührungspunkt b . Hier sind beide Konturen in Polarkoordinaten dargestellt, die Radien r_1, r_2 sind Funktionen der Winkel φ_1, φ_2 , die verschieden orientiert sind, einmal im Uhrzeigersinn und einmal dagegen. Aus der Analyse der Abrollbewegung folgen die *Erhaltungsdifferentialgleichungen*. Diese Gleichungen drücken in mathematischer Form aus, was für eine gleitfreie Abrollbewegung natürlich ist:

- 1) Die Summe der beiden Radien ist konstant, d.h. die Mittelpunkte m_1, m_2 der aufeinander abrollenden Körper haben einen festen Abstand k . In der Form als Differentialgleichung heißt das, daß eine Änderung eines der beiden Radien eine entgegengesetzte Änderung des anderen Radius bedingt.

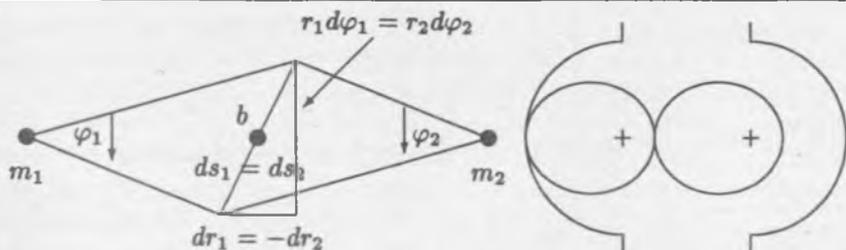


Abbildung 2: (Links) Geometrie gleitfrei aufeinander abrollender Körper in der Umgebung des Berührungspunktes b und (rechts) zwei in ihren Brennpunkten festgehaltene, aufeinander abrollende Ellipsen, vgl. Gleichung (5).

- 2) Beide Konturen haben im Berührungspunkt b die gleiche Momentangeschwindigkeit ($v_1 - v_2 = 0$) und auf beiden Konturen wird in der Umgebung von b die gleiche Länge $ds_1 = \sqrt{dr_1^2 + r_1^2 d\varphi_1^2} = \sqrt{dr_2^2 + r_2^2 d\varphi_2^2} = ds_2$ abgerollt.

Mit Gleichung (1), $dr_1 = -dr_2$, folgt daraus Gleichung (2):

$$r_1(\varphi_1) + r_2(\varphi_2) = k = \text{konst.} \Rightarrow dr_1 = -dr_2 \quad \text{Abstand} = \text{konst.} \quad (1)$$

$$r_1 d\varphi_1 = r_2 d\varphi_2, \text{ d.h. } r_1 \omega_1 = r_2 \omega_2 \quad \text{Wälzbedingung} \quad (2)$$

Um nun aus den Erhaltungsgleichungen gleitfrei aufeinander abrollende Konturen zu berechnen, kann man auf zwei Arten vorgehen:

- Man gibt die Kontur eines der beiden Körper in Polarkoordinaten ($r = r(\varphi)$) an und versucht die Erhaltungsgleichungen aufzulösen. Dies wird in den meisten Fällen nicht explizit möglich sein, und man muß numerische Näherungslösungen verwenden.
- Man gibt die Drehwinkel als Funktionen der Zeit vor, löst die so entstehenden Differentialgleichungen und erhält die Konturen als Funktion der Winkelgeschwindigkeiten ($r_1 = r_1(\omega_1), r_2 = r_2(\omega_2)$). Auch hier wird in den meisten Fällen keine explizite Lösung zu finden sein, aber es gibt einen interessanten Spezialfall, den wir unten betrachten wollen.

Lösungen

- a) Nach Vorgabe eines Körpers setzt man Gleichung (2) in Gleichung (1) ein und leitet eine Integralgleichung zur Berechnung des Winkels φ_2 als Funktion des Winkels φ_1 und der Form $r_1(\varphi_1)$ her (konstanter Abstand k):

$$\varphi_2(\varphi_1) = \int_0^{\varphi_1} \frac{r_1(\varphi)}{k - r_1(\varphi)} d\varphi, \quad r_2(\varphi_2(\varphi_1)) = k - r_1(\varphi_1). \quad (3)$$

Eine analoge Gleichung tritt auch bei der Behandlung von Straßen und Rädern auf. Die hier auftretenden Integrationen können i.a. nicht mehr geschlossen dargestellt werden. Daher berechnet man den Radius $r_{1,i} = r_1(\varphi_{1,i})$ des bekannten Körpers an einigen Stellen $\varphi_{1,i}$, $i = 1 \dots N$ und wertet für diese Stellen das Integral numerisch aus. Aus $r_2 = k - r_1$ erhält man dann auch den Radius des gesuchten (zweiten) Körpers. Hierbei ist der Abstand k der beiden Mittelpunkte unbekannt und muß zu Beginn iterativ ermittelt werden. Man setzt dabei voraus, daß die zweite Kurve geschlossen sein soll, also das Verhältnis der beiden Umfangslängen rational ist (im einfachsten Fall 1:1). In einer Intervallschachtelung wird k solange variiert, bis $\varphi_2(2\pi) = 2\pi$ ist. Diese Methode wurde von den Schülern in dem Programm PUMPE implementiert, das zur Erzeugung der in Abb.3 gezeigten Konturen verwendet wurde. In einigen Fällen, z.B. den im nächsten Abschnitt betrachteten verallgemeinerten Ellipsen, kann man allerdings geschlossene Darstellungen für die Konturen und den Abstand k finden.

b) Bei Vorgabe von Winkelgeschwindigkeiten sind die Radien der Körper als Funktionen der Zeit vorgegeben. Setzt man nämlich Gleichung (1) in Gleichung (2) ein und löst nach den Radien auf, so erhält man:

$$r_1(t) = \frac{k\omega_2(t)}{\omega_1(t) + \omega_2(t)}, \quad r_2(t) = \frac{k\omega_1(t)}{\omega_1(t) + \omega_2(t)}. \quad (4)$$

Zwei Fälle, die eine geschlossene Darstellung besitzen, sind a) *logarithmische Spiralen* und b) *Ellipsen*. Die vorgegebenen Winkelfunktionen werden invertiert und in Gleichung (4) in die Funktionen für r_1 und r_2 eingesetzt:

$$\text{a) } \varphi_{1/2}(t) = \pm m \ln(1 \pm t), \quad -1 < t < 1 \Rightarrow \omega_{1/2}(t) = \frac{m}{1 \pm t}, \quad m \in \mathbb{R}$$

$$t = \mp 1 \pm \exp(\pm \varphi_{1/2}/m) \Rightarrow r_{1/2}(\varphi) = \underbrace{\frac{k}{2}(1 \pm t)}_{r=r(t)} = \underbrace{\frac{k}{2} \exp(\pm \varphi_{1/2})}_{r=r(\varphi)}.$$

$$\text{b) } \tan\left(\frac{\varphi_{1/2}}{2}\right) = (1 \pm \varepsilon)t, \quad 0 < \varepsilon < 1 \Rightarrow \omega_{1/2} = \frac{2(1 \pm \varepsilon)}{1 + (1 \pm \varepsilon)^2 t^2}$$

$$r_{1/2}(t) = \frac{c}{1 \pm \varepsilon} \frac{1 + (1 \pm \varepsilon)^2 t^2}{1 + (1 - \varepsilon^2)t^2} \Rightarrow r_{1/2}(\varphi) = \frac{c}{1 \pm \varepsilon \cos(\varphi_{1/2})}. \quad (5)$$

Wie man aus den Erhaltungsgleichungen sieht, liefert jede Lösung $r_1(t)$, $r_2(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ weitere Lösungen, indem man $r_1(t)$ und $r_2(t)$ beibehält, aber die Winkel mit einem konstanten Faktor multipliziert: $r_{1/2}^{\text{neu}}(t) = r_{1/2}(t)$, $\varphi_{1/2}^{\text{neu}}(t) = n\varphi_{1/2}(t)$. Damit die neue Lösung eine geschlossene Kurve ist, d.h.

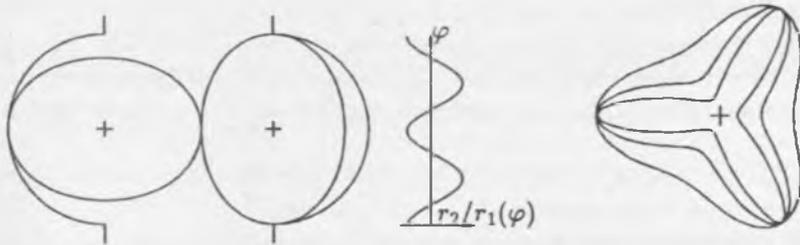


Abbildung 3: Mit dem Programm PUMPE berechnete gleitfrei aufeinander abrollende Konturen: (links) In ihren Mittelpunkten festgehaltene Ellipsen mit dem Übersetzungsverhältnis als Funktion des Drehwinkels und (rechts) verallgemeinerte Ellipsen mit $n = 3$ für $\varepsilon = 0.25, 0.5, 0.75$, vgl. Gleichung (6).

$r(\varphi) = r(\varphi + 2\pi)$ gilt, wählt man $n \in \mathbb{N}$. Aus dem Fall b) erhält man so eine ganze Familie von Kurven in geschlossener Darstellung, die im konstanten Abstand k gleitfrei aufeinander abrollen:

$$k = \frac{2c}{1 - \varepsilon^2}, \quad r_{1/2,n}(\varphi) = \frac{c}{1 \pm \varepsilon \cos(n\varphi/2)}, \quad \varphi \in [0, 2\pi). \quad (6)$$

Die Einführung des Parameters n von Gleichung (5) zu (6) ist eine andere Form der Verallgemeinerung von Kegelschnitten, als sie in [1] beschrieben wurde.

Schluß

Abschließend kann man fragen, wo die Grenzen der Betrachtungen liegen. Wie wir gesehen haben, ist es für einige Beispiele möglich, geschlossene Darstellungen zu finden, während andere zumindest numerisch gelöst werden können. In [2] wird z.B. gezeigt, daß die Fläche F der Kolben für verallgemeinerte Ellipsen nur von der Wahl der Parameter ε und c abhängt, aber nicht von n , vgl. Abb.3:

$$F := \int_0^{2\pi} r^2(\varphi) d\varphi$$

ε	F/F_0 [%]	ρ_{min}, ρ_{max}
0.25	61	0.6, 1.67
0.50	36	0.33, 3.0
0.75	21	0.14, 7.0

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{c^2}{(1 + \varepsilon \cos(n\varphi))^2} d\varphi$$

$$= F(\varepsilon)$$

Die Tabelle zeigt für die in Abb.3 dargestellten verallgemeinerten Ellipsen einige Werte der Kolbenfläche (prozentual auf den Kreis mit maximalen Radius bezogen) und Extrem- und Mittelwerte des Übersetzungsverhältnisses (Quotient $\rho := r_1/r_2$). Man erkennt, daß bei steigender Exzentrizität das geförderte Volumen, die Differenz zwischen Kreisfläche und Körpervolumen, vgl. die schraffierte Fläche in Abb.1, steigt, aber gleichzeitig die Extremwerte des Übersetzungsverhältnisses weiter auseinander liegen.

Um eine *echte* Pumpe zu realisieren, muß man beide Körper in ein Gehäuse einpassen, dessen Abmessungen von den maximalen Radien bestimmt werden. Hier ist zum einen der Kontakt zwischen den Kolben und der Wand nicht perfekt dicht zu realisieren, und man sollte je nach Fördergut Formen mit mehreren Förderkammern bevorzugen. Zum anderen variiert bei geringerem Volumen der Kolben deren Übersetzungsverhältnis während einer Umdrehung stark, so daß es andauernd zu Beschleunigung und Abbremsung kommt, vgl. Abb.3. Hierdurch erhöht sich der Verschleiß, durch den Abrieb zwischen beiden Kolben. Dies kann verbessert werden, wenn man anstelle der reinen Abrollbewegung eine Bewegung mit Schlupf verwendet.

Im Rahmen dieses Artikels ist nur eine sehr verkürzte Darstellung möglich. Die Schüler haben durch die Analyse des Abrollvorgangs die Erhaltungsgleichungen gefunden und aufbauend auf diesen die numerische Berechnung von Gegenkonturen implementiert. Beim Test verschiedener Formen fielen die besonderen Eigenschaften von Ellipsen auf, die später formelmäßig von den Autoren ausgearbeitet wurden, vgl.[2]. Die gezeigten Abbildungen liefern als Momentaufnahmen nur einen unzureichenden Eindruck von den Abrollvorgängen. Kopiert man die Abbildungen (vergrößert) auf Karton und schneidet die Konturen aus, dann läßt sich auch die Dynamik studieren.

Literaturverzeichnis

- [1] C.GROSS, T.-K.STREMPER, *Verallgemeinerte Kegelschnitte*, Wurzel, No.12, (1996)
- [2] C.GROSS, T.-K.STREMPER, *Abrollen*, in Vorbereitung
- [3] L.HALL, S.WAGON, *Roads and Wheels*, Math.Magazine, Vol.65, No.5, (1992), pp283-301
- [4] I.STEWART, *Math.Unt.: Eckige Räder*, Spektrum der Wissenschaft, No.1, (1994), pp10-13

Christian Groß, Torsten-Karl Stempel
Darmstadt

`gross/stremel@mathematik.th-darmstadt.de`