

**TRANSMISIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS A TRAVÉS DE  
CRISTALES FOTÓNICOS PERIÓDICOS Y CUASIPERIÓDICOS  
DIELÉCTRICO -SUPERCONDUCTOR**

**MAURICIO RODRIGUEZ MORANTE**



**UNIVERSIDAD DEL VALLE  
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS  
DEPARTAMENTO DE FISICA  
SANTIAGO DE CALI  
2018**

**TRANSMISIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS A TRAVÉS DE  
CRISTALES FOTÓNICOS PERIÓDICOS Y CUASIPERIÓDICOS  
DIELÉCTRICO –SUPERCONDUCTOR**

**MAURICIO RODRIGUEZ MORANTE**

Trabajo de investigación para optar por  
el título de Maestría en Ciencias Física

Director

**JUAN CARLOS GRANADA ECHEVERRI**

Ph.D.

**UNIVERSIDAD DEL VALLE  
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS  
DEPARTAMENTO DE FISICA  
SANTIAGO DE CALI**

**2018**

**UNIVERSIDAD DEL VALLE**  
**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS**  
**DEPARTAMENTO DE FISICA**  
**SANTIAGO DE CALI**  
**2018**

**MAURICIO RODRIGUEZ MORANTE**  
**TRANSMISIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS ATRAVÉS DE**  
**CRISTALES FOTÓNICOS PERIÓDICOS Y CUASIPERIÓDICOS**  
**DIELÉCTRICO -SUPERCONDUCTOR**

Palabras clave:

Cristal fotónico

Banda prohibida fotónica

Matriz de transferencia

Nota de Aprobación:

El trabajo de grado titulado: “TRANSMISIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS A TRAVÉS DE CRISTALES FOTÓNICOS PERIÓDICOS Y CUASIPERIÓDICOS DIELECTRICO-SUPERCONDUCTOR”,

Presentado por: Mauricio Rodríguez Morante, para optar al título de Magister en Ciencias Físicas, fue revisado por el jurado y calificado como:

---

---

Director

---

Jurado

## **AGRADECIMIENTOS**

Mi sincero agradecimiento al Profesor Juan Carlos Granada Echeverri

## RESUMEN

Con base en el método de matriz de transferencia y en el marco del modelo fenomenológico de Gorter-Casimir, se estudia la estructura de bandas fotónica y el coeficiente de transmisión de los modos  $TE$  y  $TM$  en películas delgadas superconductoras y en cristales fotónicos unidimensionales conformados por capas de materiales convencionales alternadas por capas de materiales superconductores, prestando especial atención a arreglos cuasi periódicos de dichas capas en la secuencia de Fibonacci.

Al examinar el comportamiento de estas propiedades ópticas al variar la temperatura de la capa superconductora se estableció en particular que la variación de la temperatura permite modificar las frecuencias en las que ocurre la máxima transmisión de energía, así como las posiciones y los anchos de los intervalos de transmisión de energía. Se demuestra además que la cuasiperiodicidad disminuye (en todo el rango de temperaturas por debajo de la temperatura crítica) tanto el ancho de las frecuencias de transmisión como el de las brechas.

## **ABSTRACT**

In the frame of the transfer matrix method and the phenomenological Gorter-Casimir model, the photonic band structure and the transmission coefficient of  $TE$  and  $TM$  modes are studied in thin superconducting films and in one-dimensional photonic crystals formed by layers of conventional materials alternating with layers of superconducting materials, paying particular attention to quasi periodic arrangements of such layers in the Fibonacci sequence and comparing the results with those of an infinite periodic arrangement.

When considering the temperature dependence of such optical properties it was shown that by changing the temperature it is possible to modify the frequencies of maximal transmission, as well as the positions and the widths of the transmission bands. Additionally, it is established that the quasiperiodicity diminishes (for all temperatures below the critical temperature) the width of the bands and the gaps of the transmission spectra.

1. Introducción.	1
2. Modelo de Gorter - Casimir para superconductores.	4
2.1 Permitividad dieléctrica dependiente de la frecuencia y la temperatura en superconductores sin respuesta magnética.	5
3. Coeficiente de transmisión y curvas de dispersión de modos <i>TE</i> y <i>TM</i> en película superconductora	8
3.1 Geometría de los modos <i>TE</i> y <i>TM</i> .	8
3.2 Método de matriz de transferencia aplicado a una capa Superconductora.	10
3.3 Transmisión de ondas electromagnéticas a través de una película superconductora.	19
3.4 Curvas de Dispersión para Modos <i>TE</i> y <i>TM</i> guiados.	23
3.5 Curvas de Dispersión para Modos <i>TE</i> y <i>TM</i> localizados.	25
4. Propiedades del coeficiente de transmisión y diagrama de bandas para cristal fotónico periódico dieléctrico-superconductor.	28
4.1 Descripción del sistema periódico.	28
4.2 Coeficiente de Transmisión para modos <i>TE</i> y <i>TM</i> en Cristal Fotónico Periódico dieléctrico-superconductor.	29
4.3 Diagrama de bandas para modos <i>TE</i> y <i>TM</i> en cristal fotónico periódico dieléctrico-superconductor.	32
5. Propiedades del coeficiente de transmisión y diagrama de bandas para cristal fotónico Cuasiperiódico dieléctrico-superconductor .	35
5.1 Descripción del sistema cuasiperiódico tipo Fibonacci.	35
5.2 Coeficiente de transmisión para los modos <i>TE</i> y <i>TM</i> en cristal fotónico con la secuencia de Fibonacci S3.	36
5.3 Diagrama de bandas para modos <i>TE</i> y <i>TM</i> en un cristal cuasiperiódico .	37
5.4 Diagrama de bandas para modos <i>TE</i> y <i>TM</i> en un cristal fotónico con la secuencia de Fibonacci S3.	38
5.5 Coeficiente de transmisión para los modos <i>TE</i> y <i>TM</i> en cristal fotónico con la secuencia de Fibonacci S4.	42
5.6 Diagrama de bandas para modos <i>TE</i> y <i>TM</i> en un cristal fotónico con la secuencia de Fibonacci S4.	43
Conclusiones y perspectivas.	48
Bibliografía.	49
Apéndices.	50





# CAPÍTULO 1

## Introducción

Los cristales fotónicos son sistemas que se caracterizan por la modulación espacial de sus propiedades ópticas, en particular, de su índice de refracción (Sakoda K. (2005), Joannopoulos et al. (2008), Markoš and Soukoulis C.M. (2008)). Si la modulación espacial del índice de refracción ocurre en una dirección privilegiada, el sistema se denomina *cristal fotónico unidimensional* (1D); análogamente, si la modulación ocurre en dos o tres direcciones privilegiadas, el sistema se denomina, respectivamente, *cristal fotónico bidimensional* (2D) o *cristal fotónico tridimensional* (3D).

Si el sistema se caracteriza por tener un ordenamiento de largo alcance (periodicidad), es posible la aparición de intervalos de frecuencias, denominados brechas fotónicas (photonic band gaps), en los cuales la luz no se puede propagar a través de la estructura. La existencia de estas brechas está relacionada con la simetría de traslación espacial y sus propiedades dependen de las características físicas de los materiales constitutivos del sistema y de sus propiedades geométricas. Dado que dichos atributos físicos y geométricos se pueden manipular experimentalmente y dado el interés en controlar las propiedades de transmisión de la luz, los cristales fotónicos han sido objeto de intenso estudio durante las últimas décadas.

La forma más simple de un cristal fotónico es el cristal 1D, el cual consiste en una serie de capas alternantes con diferentes índices de refracción. La presencia de discontinuidades espaciales en el índice de refracción altera las propiedades de la estructura como un todo y lleva a que, en particular, el concepto de longitud de penetración pierda su sentido en el caso de una estructura 1D metal-dieléctrico y se pueda así controlar la absorción de la luz (Alejo-Molina et al. (2014)).

En los cristales fotónicos 1D se han estudiado, entre otras propiedades ópticas, la estructura de bandas fotónicas y la transmisión de ondas electromagnéticas. Muchos trabajos se han dedicado a estudiar cristales fotónicos 1D compuestos de arreglos periódicos de materiales convencionales tales como dieléctricos y metales (Hitoshi, and Atsushi (2004)), dieléctricos y cristales iónicos (Huang et al (2003), Becerra y Granada (2006)), sistemas magnéticamente ordenados (Costa and Vasconcelos (2013), Hsueh et al (2013), Rong-ke Qiu et al (2014)), piezoelectricos (Liu and Zhang (2011), Xu et al (2013)). Además de la existencia de brechas asociadas a la simetría de traslación, en sistemas cuyas propiedades ópticas presentan fuerte dispersión temporal (dependencia de las propiedades ópticas con la frecuencia) aparecen brechas cuyo origen físico no está asociado a la simetría traslacional del sistema sino a la existencia de regiones prohibidas en el espectro de los plasmones y los polaritones volumétricos. En sistemas magnéticamente ordenados se han hallado bandas magnónicas cuya estructura depende del ordenamiento paralelo o anti paralelo entre capas vecinas. En los sistemas con materiales piezoelectricos se presentan bandas resultado del acople entre fonones y fotones que ocurren no solo en el límite de grandes longitudes de onda, sino que se extienden a toda la zona de Brillouin. Cuando la celda unitaria del cristal fotónico consiste en una capa dieléctrica de material convencional y una capa de material

doblemente negativo (en la cual tanto la permitividad dieléctrica como la permeabilidad magnética son negativas y por lo tanto, el índice de refracción es negativo), aparece una brecha prohibida (denominada brecha  $\bar{n} = 0$ ) alrededor de la frecuencia a la cual se anula el índice de refracción efectivo de la celda unitaria (Reyes-Gómez et al. (2010), Agudelo-Arango et al. (2011)). Así mismo, se pueden construir cristales fotónicos con materiales simplemente negativos eléctricos (SNE) y simplemente negativos magnéticos (SNM), en los cuales es negativo el signo de su permitividad dieléctrica o de su permeabilidad magnética; en este tipo de materiales aparece una nueva brecha prohibida (denominada brecha  $\varphi_{\text{eff}} = 0$ ) la cual está alrededor de la frecuencia a la cual se anula la impedancia efectiva de la celda unitaria (Wang et al. (2004)). Tanto la brecha  $\bar{n} = 0$  como la brecha  $\varphi_{\text{eff}} = 0$  tampoco están asociadas a la simetría de traslación; tradicionalmente estas brechas no pueden coexistir simultáneamente, aunque recientemente se ha propuesto un sistema en el cual esta coexistencia se puede lograr (Moncada-Villa et al (2015)).

En las últimas décadas se ha prestado especial atención al estudio de cristales fotónicos cuasiperiódicos, en los cuales se pierde la simetría de traslación espacial, sin que se presente un desorden total, ya que se construyen siguiendo un procedimiento determinístico; de esta manera, se obtienen sistemas con propiedades únicas en su transmisión óptica, reflectividad, fotoluminiscencia, etc. (Macia (2012)). En particular, se han estudiado las propiedades de transmisión de la luz a través de multicapas fotónicas en arreglos tipo Fibonacci, observándose comportamientos de autosimilitud en el coeficiente de transmisión (Mauriz et al. (2009)); otros estudios han mostrado la posibilidad de modular el ancho de banda permitido en el coeficiente de transmisión (Reyes-Gómez et al. (2010)). El análisis de dichos sistemas cuasi periódicos se ha extendido al estudio de sistemas magnéticos en los cuales se ha analizado cómo la densidad de estados se ve afectada por el ordenamiento de las capas en la celda unitaria utilizada (Rychly et al. (2005), Coelho et al. (2010), Costa et al (2010)). Además, se ha demostrado que es posible modificar la frecuencia de corte y el ancho de los gaps introduciendo defectos en la estructura (Chung-An Hu et al. (2013)). La extensión del estudio de este tipo de estructuras cuasiperiódicas es muy rica y variada; en particular, en sistemas con metamateriales se modifica sustancialmente la estructura del coeficiente de transmisión, apareciendo una región de transmisión modulada por el ángulo de incidencia de la onda (Rahimi and Rezai (2013), Mei-Soong Chen et al. (2013)). También se han estudiado materiales polares uniaxiales ordenados según la secuencia tipo Rudin Shapiro (Zhi-Zhong Yan and Chuan Zeng Zhang (2013)). La importancia de todos estos estudios está en la posibilidad de reducir las pérdidas de energía, lograr mayor rapidez y capacidad en el transporte de información a través de los cristales fotónicos; más aún, se han incorporado nuevos materiales que aumentan el potencial de utilidad como el grafeno: en dicho sistema se ha observado invariancia en la frecuencia de corte al modificar el ángulo de incidencia de la onda (Al-sequefi and Belhadj (2015), Garcia-Cervantes et al. (2015)). La estructura de bandas en superredes con materiales piezoeléctricos ordenados según la secuencia de Fibonacci también ha sido estudiada (Liu and Zhang (2011)). Se destacan, además, los estudios de estructuras cuasi periódicas con semiconductores (Shramkova and Olkhovskiy (2011)), estructuras fractales con defectos (Rahimi (2014)), estructuras 2D cuasiperiódicas que incluyen materiales superconductores (Wan-guo et al. (2014)); cabe resaltar que el orden mayor de la celda Fibonacci afecta el comportamiento del coeficiente de transmisión

tanto para modos  $TE$  y  $TM$  como lo muestran (Reyes-Gómez et al. (2010)) en sistemas con metamateriales. En el trabajo de Ji-jiang W., Jin-xia (2012) se han estudiado las propiedades de los cristales fotónicos cuasi periódicos en arreglo tipo Fibonacci conformados por capas dieléctrico y superconductor, prestando atención a las propiedades del coeficiente de transmisión bajo incidencia normal; en dicho estudio el índice de refracción de la parte superconductor puede ser ajustado por la temperatura y la frecuencia de la onda. En particular, se determinó que la frecuencia de corte a partir de la cual hay transmisión de ondas electromagnéticas puede ser sintonizada ajustando el espesor de la capa superconductor o el espesor de la capa dieléctrica o la temperatura de la capa superconductor, concluyendo que el cambio en la frecuencia de corte se hace más notable ajustando el espesor de la capa superconductor más que el de la capa dieléctrica; adicionalmente, la frecuencia de corte se hace más sensible cerca de la temperatura crítica e influye en el régimen de aparición de resonancias de Fabry-Perot.

El estudio de las propiedades ópticas de sistemas cuasiperiódicos se ha hecho extensivo al caso de estructuras ternarias (Alejo-Molina et al (2014)), a estructuras tipo Fibonacci multiferróicas (Zhenghua et al. (2015)), a estructuras híbridas con capas de fullereno (Rahimi (2015)), así como a cristales magnónicos (Hsueh, Chen and Qiu (2013), Rong-ke, Te Huang, Zhi-dong Zhang (2014)). También se ha propuesto la utilización de pozos cuánticos como defectos en cristales y cuasicristales (Shaohui Xu et al. (2014)). Es de destacar que muchas de las ideas y desarrollos presentados anteriormente han sido extendidos para considerar sistemas periódicos y cuasiperiódicos conformados por los denominados metamateriales elásticos (cristales fonónicos) (Zhi-Zhong and Zeng Zhang (2012)).

Chung-An Hu ( 2013) y Hui-Chang Hung ( 2011) han descrito sistemas multicapas binarios periódicos del tipo  $\left(\frac{1}{2}\right)^N \left(\frac{2}{1}\right)^N$  donde 1 y 2 representan medios con permitividades dieléctricas y permeabilidades magnéticas constantes y positivas, mostrando que el rompimiento de simetría causa la aparición de un pico de transmisión total en la región prohibida de transmisión; dicho pico puede ser desplazado al introducir un defecto ya sea mediante una película superconductor (variando el ancho del defecto) o un semiconductor (variando la concentración).

En los anteriores trabajos al estudiar la propagación de ondas electromagnéticas a través de sistemas de multicapas no se ha enfatizado adecuadamente el papel que juega la temperatura en las propiedades ópticas de dichos sistemas cómo compite con otros factores en la definición de las respectivas propiedades electrodinámicas. En particular, es de esperar que estos efectos sean más notorios al introducir un material superconductor como parte constitutiva de un sistema de multicapas. Para aclarar dicho papel de la temperatura se estudiarán los campos, las curvas de dispersión y el coeficiente de transmisión en cristales fotónicos unidimensionales periódicos con capas superconductoras. Así mismo, se examinarán las propiedades electrodinámicas (curvas de dispersión y coeficiente de transmisión) de cristales fotónicos unidimensionales periódicos y cuasi periódicos con capas superconductoras en las configuración Fibonacci. El método a seguir en nuestro análisis es el de la matriz de transferencia (Markoš and Soukoulis (2008), Sánchez-Soto et al. (2012)).

## CAPÍTULO 2

### Modelo de Gorter -Casimir para superconductores

Las propiedades ópticas del material superconductor están gobernadas, en particular, por la función dieléctrica, la cual está determinada tanto por la dependencia con la frecuencia, como por la densidad de portadores superconductores. Esta última magnitud es función de la temperatura.

Uno de los modelos que permite determinar la densidad de los portadores superconductores en función de la temperatura es el modelo de Gorter-Casimir (Chandrasekar B.S. (1969), Chibueze and R. Chaudhury (2013)). En dicho modelo se consideran dos fluidos electrónicos con propiedades diferentes: uno de ellos describe las propiedades de los electrones en el estado normal, mientras que el segundo fluido describe las propiedades de los portadores en el estado superconductor. Si se supone que la transición superconductor es una transición de segundo orden, el estado superconductor se puede describir mediante un parámetro interno asociado a la fracción de portadores superconductores; dicho parámetro es igual a 1 para temperatura  $T=0$  y debe anularse a la temperatura de transición  $T=T_c$ .

Si  $x$  es la fracción de electrones normales, en el modelo de Gorter-Casimir se postula que la energía libre del sistema de dos fluidos tiene la forma

$$F(x,T) = \sqrt{x}f_n(T) + (1-x)f_s \quad , \quad (2.1)$$

donde  $f_n(T) = -\frac{\gamma}{2}T^2$  es la energía libre para los electrones en estado normal,  $f_s(T) = -\beta$  es la energía de condensación asociada al superfluido. Al minimizar la energía libre con respecto a  $x$  se llega a la conclusión que la fracción de electrones normales que minimiza la energía libre presenta la siguiente dependencia con la temperatura:

$$x_n = \left(\frac{T}{T_c}\right)^4 \quad , \quad (2.2)$$

donde  $T_c = \sqrt{\frac{4\beta}{\gamma}}$  corresponde a la temperatura crítica del superconductor. Así, la densidad de portadores superconductores viene dada por:

$$x_s = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^4 \quad , \quad (2.3)$$

de tal forma que a la temperatura crítica se rompe la superconductividad y ya no hay electrones en estado superconductor.

Con base en este esquema fenomenológico se pueden elaborar modelos que permitan estudiar las propiedades ópticas de sistemas superconductores. En particular, se prestará atención a la dependencia con la frecuencia (dispersión temporal) de la permitividad dieléctrica.

## 2.1. Permitividad dieléctrica dependiente de la frecuencia y la temperatura en superconductores sin respuesta magnética.

La respuesta electromagnética del sistema superconductor se puede describir adecuadamente con el modelo de Gorter-Casimir en el marco de la teoría local de London. Se considera que la permitividad dieléctrica del sistema superconductor se puede representar como la suma de dos términos

$$\varepsilon = \varepsilon_n + \varepsilon_s$$

donde  $\varepsilon_n$  es la permitividad dieléctrica correspondiente a los portadores (de carga  $e_n$  y masa  $m_n$ ) en el estado normal y  $\varepsilon_s$  es la respectiva permitividad dieléctrica asociada a los portadores (de carga  $e_s$  y masa  $m_s$ ) en el estado superconductor.

Dado que el movimiento de los portadores normales es disipativo, la ecuación del movimiento de una carga, en presencia de un campo eléctrico oscilatorio  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$ , es

$$m_n \ddot{\mathbf{r}}_n = -m_n \gamma_n \dot{\mathbf{r}}_n - e_n \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}, \quad (2.4)$$

donde el primer término de la derecha da cuenta de los efectos disipativos. La solución de (2.4) tiene la forma

$$\mathbf{r}_n = -\left(\frac{e_n}{m_n}\right) \frac{1}{\omega^2 + i\gamma_n \omega} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}. \quad (2.5)$$

Si  $n_n$  es el número de portadores normales en unidad de volumen, en la aproximación local la polarización  $\mathbf{P}_n = n_n e_n \mathbf{r}_n$  tiene la forma:

$$\mathbf{P}_n = -\left(\frac{e_n^2 n_n}{m_n}\right) \frac{1}{\omega^2 + i\gamma_n \omega} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}. \quad (2.6)$$

Por otro lado, el movimiento de los portadores superconductores no es disipativo, por lo que la ecuación del movimiento de una carga aislada es  $m_s \mathbf{r}_s'' = -e_s \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$  y su respectiva solución tiene la forma  $\mathbf{r}_s = -\left(\frac{e_s}{m_s}\right) \frac{1}{\omega^2} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$ , lo que lleva a la siguiente expresión para la polarización asociada a la dinámica del sistema superconductor

$$\mathbf{P}_s = -\left(\frac{e_s^2 n_s}{m_s}\right) \frac{1}{\omega^2} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}, \quad (2.7)$$

donde  $n_s$  es la densidad del número de portadores superconductores.

De la polarización total  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$  y de la definición  $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$  (siendo  $\varepsilon_0$  es la constante dieléctrica del vacío) se obtiene la siguiente expresión para la susceptibilidad eléctrica del sistema:

$$\chi = -\left(\frac{\omega_{pn}^2}{\omega^2 + i\gamma_n \omega} + \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2}\right), \quad (2.8)$$

donde se han introducido las frecuencias de plasma características

$$\omega_{pn}^2 = \frac{n_n e_n^2}{m_n \varepsilon_0}, \omega_{ps}^2 = \frac{n_s e_s^2}{m_s \varepsilon_0}, \quad (2.9)$$

Si el conjunto de portadores está inmerso en un medio con permitividad dieléctrica relativa  $\varepsilon_\infty$ , la permitividad dieléctrica relativa del sistema es  $\varepsilon = \varepsilon_\infty + \chi$ . Por lo tanto,

$$\varepsilon = \varepsilon_\infty - \frac{\omega_{pn}^2}{\omega^2 + i\gamma_1 \omega} - \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2}, \quad (2.10)$$

En el modelo Gorter-Casimir se toma

$$m_1 = m_2 = m, e_1 = e_2 = e, n_n + n_s = n_0,$$

Por lo tanto, si  $n_0$  es la densidad de portadores a temperatura cero, la dependencia con la temperatura de las densidades de número portadores normales y superconductores está dada por las relaciones

$$n_n = n_0 \left(\frac{T}{T_c}\right)^4, \quad n_s = n_0 \left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^4\right]$$

Adicionalmente, si se consideran frecuencias tales, que  $\frac{\omega_p^2 \gamma_n}{\omega^3 + \gamma_n^2 \omega} \ll 1$ , donde  $\omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\epsilon_0}$ , se obtiene la siguiente expresión para la permitividad dieléctrica relativa:

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_\infty - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^4 \right] - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma_1^2} \left( \frac{T}{T_c} \right)^4. \quad (2.11)$$

Además de presentar la dispersión temporal (dependencia explícita con la frecuencia  $\omega$ ), la permitividad dieléctrica (2.11) depende de la temperatura, entendiéndose que dicha expresión es válida únicamente para temperaturas por debajo de la temperatura crítica. La relación (2.11) contiene tres clases de contribuciones: (i) la permitividad dieléctrica no dispersiva  $\epsilon_\infty$  asociada al medio dieléctrico en el cual están inmersos los portadores; (ii) un término no disipativo asociado a los portadores superconductores; (iii) un término disipativo relacionado con la polarización inducida por los electrones normales.

Si en la ecuación (2.11) consideramos que  $T \ll T_c$ , la densidad de los portadores normales es muy pequeña y la densidad de los portadores superconductores depende débilmente de la temperatura; entonces la permitividad dieléctrica relativa toma la forma:

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_\infty - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^4 \right]. \quad (2.12)$$

Las ecuaciones (2.11) y (2.12) serán de utilidad para el análisis de los sistemas a estudiar.



## CAPÍTULO 3

### Coeficiente de transmisión y curvas de dispersión para modos *TE* y *TM* en una película superconductora

#### 3.1 Geometría de los Modos *TE* y *TM*

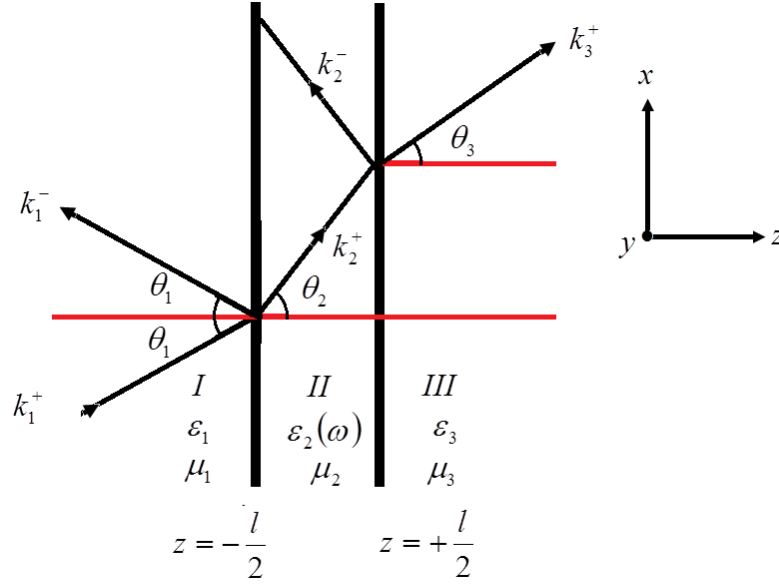
Las características de las ondas electromagnéticas en películas delgadas de diferentes materiales han sido objeto de estudio durante las últimas décadas (Cottam, and Tilley (1989), Albuquerque and Cottam (2004), Markoš and Soukoulis (2008), Solymar and Shamonina (2009)). En particular, se ha prestado atención a los modos que surgen en películas delgadas metálicas (plasmones), así como a los polaritones y a los modos polaritón-plasmón que pueden surgir en cristales iónicos dopados. Dentro de dicho estudio se han considerado películas delgadas con materiales de índice de refracción negativo (Solymar and Shamonina (2009)), así como sistemas donde se incluyen materiales exóticos como grafeno (Gumbs et al. (2016)) o aislantes topológicos (Granada and Rojas (2014)).

Si el espesor de la película  $l$  es mucho mayor que la longitud de onda  $\lambda$  de la correspondiente excitación electromagnética, los campos electromagnéticos excitados en las superficies se pueden considerar desacoplados y se tendrán dos modos electromagnéticos degenerados, con la misma frecuencia. Al decrecer la relación  $l/\lambda$ , los campos excitados en las superficies empiezan a solaparse, levantándose el degeneramiento en los modos electromagnéticos excitados. Aparecen así dos modos, asociados a las combinaciones en fase y en oposición de fase de los campos electromagnéticos en las superficies (Cottam, and Tilley (1989)).

En la presente sección se discuten los modos que surgen en una película superconductora *II* de espesor  $l$  que se extiende indefinidamente en el plano  $xy$ , con permeabilidad magnética  $\mu_2$  y permitividad dieléctrica dada por (2.11)

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_\infty - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^4 \right] - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma_1^2} \left( \frac{T}{T_c} \right)^4. \quad (3.1)$$

Las regiones  $z < -l/2$  y  $z > l/2$  están ocupadas por los materiales *I* y *III* con permitividades dieléctricas constantes  $\varepsilon_1, \varepsilon_3$  y permeabilidades magnéticas constantes  $\mu_1, \mu_3$ . Sobre el sistema incide desde el medio *I* una onda electromagnética con vector de propagación  $k_1^+$ ; parte de la energía de dicha onda se refleja mediante la onda con vector de propagación  $k_1^-$ , parte está representada en el medio *II* mediante las ondas con vectores de propagación  $k_2^+$ ,  $k_2^-$  y parte se transmite finalmente al medio 3, en el cual se propaga la onda electromagnética con vector de propagación  $k_3^+$ . La respectiva geometría del sistema se esquematiza en la Figura 3.1.



**Figura 3.1:** Geometría de una película superconductora inmersa en un medio de permitividad dieléctrica y permeabilidad magnética constantes. Los supra índices en los vectores de onda indican que la onda se mueve hacia la derecha (+) y hacia la izquierda (-). El plano de incidencia coincide con el plano  $xz$ .

El plano  $xy$  corresponde al plano de incidencia, conformado por el vector de propagación de la onda incidente y el vector normal a las superficies planas de división de los medios; por lo tanto los vectores de propagación de las ondas electromagnéticas tienen componentes en el plano de incidencia. Si se tiene en cuenta que el sistema es homogéneo en la dirección  $x$ , las respectivas componentes del vector de propagación son las mismas en los tres medios:  $k_{Ix} = k_{Iix} = k_{IIIx} = k_x$ . Por lo tanto, los vectores de propagación de las ondas consideradas tienen la forma  $\mathbf{k}_i^\pm = (k_x, \pm k_{iz})$ , donde  $i=I, II, III$ . Teniendo en cuenta que en cada uno de los medios los campos satisfacen la ecuación de onda, el cuadrado de la magnitud de propagación es

$$k_i^2 = k_x^2 + k_{iz}^2. \quad (3.2)$$

Las excitaciones electromagnéticas se pueden representar como la superposición de dos ondas:

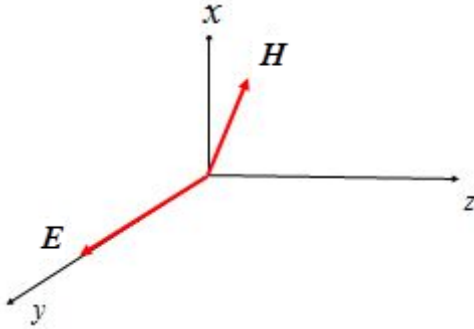
- ondas  $TE$ , en las cuales el campo eléctrico está polarizado en la dirección perpendicular al plano de incidencia (dirección  $y$ ):  $\mathbf{E}_i^\pm = (0, E_i^\pm, 0)$ ; en este caso el campo magnético está polarizado en el plano de incidencia:  $\mathbf{H}_i^\pm = (H_{ix}^\pm, 0, H_{iz}^\pm)$

(Figura 3.2a), donde  $H_{ix}^\pm = \mp \frac{k_{iz}}{\mu_i \omega} E_i^\pm$ ,  $H_{iz}^\pm = \frac{k_x}{\mu_i \omega} E_i^\pm$ .

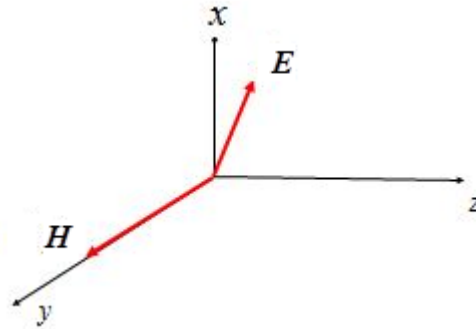
- ondas  $TM$ , en las cuales la intensidad magnética está polarizada en la dirección  $y$ :  $\mathbf{H}_i^\pm = (0, H_i^\pm, 0)$ ; por lo tanto, el campo eléctrico está polarizado en el

plano de incidencia:  $\mathbf{E}_i^\pm = (E_{ix}^\pm, 0, E_{iz}^\pm)$  (Figura 3.2b), donde  $E_{ix}^\pm = \pm \frac{k_{iz}}{\epsilon_i \omega} H_i^\pm$ ,

$$E_{iz}^\pm = -\frac{k_x}{\epsilon_i \omega} H_i^\pm.$$



**Figura 3.2a:** Representación esquemática de los campos electromagnéticos en el modo *TE*: el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  es perpendicular al plano de incidencia  $xz$ ; la intensidad magnética  $\mathbf{H}$  está polarizada en dicho plano.



**Figura 3.2b:** Representación esquemática de los campos electromagnéticos en el modo *TM*: la intensidad magnética  $\mathbf{H}$  es perpendicular al plano de incidencia  $xz$  y el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  está polarizado en dicho plano.

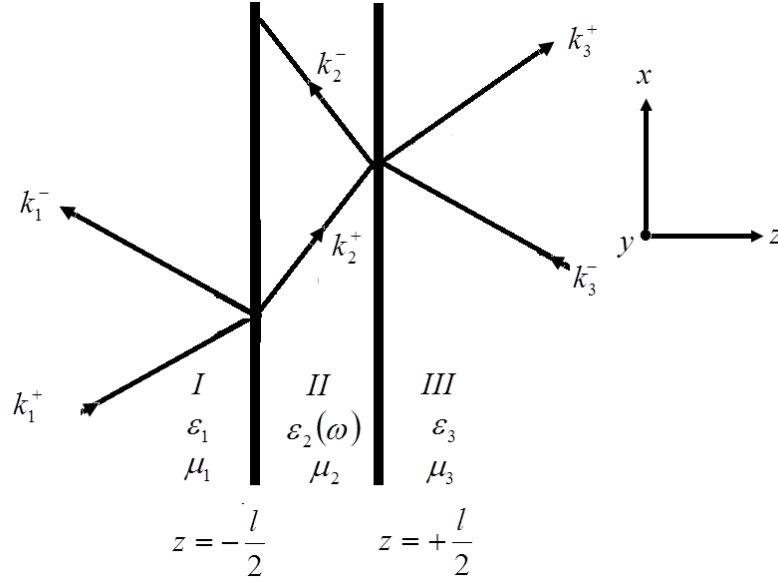
Cabe mencionar que entre las ecuaciones que describen los modos *TE* y los modos *TM* existe la relación de dualidad,

$$\mathbf{E}_i^\pm \rightarrow -\mathbf{H}_i^\pm, \mu_i \rightarrow \epsilon_i, \quad (3.3)$$

la cual se puede utilizar para obtener las relaciones de dispersión de un modo a partir de las del otro.

### 3.2. Método de matriz de transferencia aplicado a una capa superconductora

Las propiedades electrodinámicas del sistema descrito en la Figura (3.1) se pueden estudiar haciendo uso del formalismo del método de matriz de transferencia (Markoš and Soukoulis (2008), Sánchez-Soto et al. (2012)). Para obtener relaciones más generales, se considerará el sistema de la Figura (3.3), en el cual se han incluido la ondas con vector de propagación  $k_3^-$ .



**Figura 3.3:** Geometría del sistema a considerar para la obtención de la matriz de transferencia..

Se consideran inicialmente los modos *TE* polarizados. En este caso el campo eléctrico de las ondas electromagnéticas en los diferentes medios tiene únicamente componente en la dirección normal al plano de incidencia:  $\mathbf{E}_i = E_i \mathbf{e}_y$  ( $i=1, 2, 3$ ) y se pueden representar en la forma

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \left\{ E_1^+ \exp \left[ ik_{1z} \left( z + \frac{l}{2} \right) \right] + E_1^- \exp \left[ -ik_{1z} \left( z + \frac{l}{2} \right) \right] \right\} \exp(ik_x x), & z < -l/2 \\
 E_2 &= \left\{ E_2^+ \exp(ik_{2z} z) + E_2^- \exp(-ik_{2z} z) \right\} \exp(ik_x x), & -l/2 < z < l/2 \\
 E_3 &= \left\{ E_3^+ \exp \left[ ik_{3z} \left( z - \frac{l}{2} \right) \right] + E_3^- \exp \left[ -ik_{3z} \left( z - \frac{l}{2} \right) \right] \right\} \exp(ik_x x). & z > l/2
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

La componente tangencial de la intensidad magnética  $H_{ix}^\pm = \mp \frac{k_{iz}}{\mu_i \omega} E_i^\pm$  en las diferentes regiones tiene entonces la forma

$$\begin{aligned}
 H_{1x} &= \frac{k_{1z}}{\mu_1 \omega} \left\{ -E_1^+ \exp \left[ ik_{1z} \left( z + \frac{l}{2} \right) \right] + E_1^- \exp \left[ -ik_{1z} \left( z + \frac{l}{2} \right) \right] \right\} \exp(ik_x x), & z < -l/2 \\
 H_{2x} &= \frac{k_{2z}}{\mu_2 \omega} \left\{ -E_2^+ \exp(ik_{2z} z) + E_2^- \exp(-ik_{2z} z) \right\} \exp(ik_x x), & -l/2 < z < l/2 \\
 H_{3x} &= \frac{k_{3z}}{\mu_3 \omega} \left\{ -E_3^+ \exp \left[ ik_{3z} \left( z - \frac{l}{2} \right) \right] + E_3^- \exp \left[ -ik_{3z} \left( z - \frac{l}{2} \right) \right] \right\} \exp(ik_x x) & z > l/2
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

La continuidad de las componentes tangenciales de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  en las fronteras  $z=-l/2$ , y  $z=l/2$  llevan a las siguientes relaciones entre las amplitudes de los campos

$$E_1^+ + E_1^- = \frac{1}{f_2} E_2^+ + f_2 E_2^-, \quad (3.6a)$$

$$-\frac{k_{1z}}{\mu_1} E_1^+ + \frac{k_{1z}}{\mu_1} E_1^- = -\frac{k_{2z}}{\mu_2} \frac{1}{f_2} E_2^+ + \frac{k_{2z}}{\mu_2} f_2 E_2^-, \quad (3.6b)$$

$$f_2 E_2^+ + \frac{1}{f_2} E_2^- = E_3^+ + E_3^-, \quad (3.6c)$$

$$-\frac{k_{2z}}{\mu_2} f_2 E_2^+ + \frac{k_{2z}}{\mu_2} \frac{1}{f_2} E_2^- = -\frac{k_{3z}}{\mu_3} E_3^+ + \frac{k_{3z}}{\mu_3} E_3^-. \quad (3.6d)$$

donde se ha introducido la notación  $f_2 = \exp\left(i \frac{k_{2z} l}{2}\right)$ .

Las anteriores expresiones se pueden reagrupar de la siguiente forma: (Apéndice 1)

$$\begin{pmatrix} E_2^+ \\ E_2^- \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} f_2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{f_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} & 1 - \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} \\ 1 - \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} & 1 + \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{pmatrix}, \quad (3.7a)$$

$$\begin{pmatrix} E_3^+ \\ E_3^- \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\mu_3 k_{2z}}{\mu_2 k_{3z}} & 1 - \frac{\mu_3 k_{2z}}{\mu_2 k_{3z}} \\ 1 - \frac{\mu_3 k_{2z}}{\mu_2 k_{3z}} & 1 + \frac{\mu_3 k_{2z}}{\mu_2 k_{3z}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{f_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2^+ \\ E_2^- \end{pmatrix}. \quad (3.7b)$$

Introduciendo las matrices

$$M_{ji}^s = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\mu_j k_{iz}}{\mu_i k_{jz}} & 1 - \frac{\mu_j k_{iz}}{\mu_i k_{jz}} \\ \mu_i k_{jz} & \mu_j k_{iz} \\ 1 - \frac{\mu_j k_{iz}}{\mu_i k_{jz}} & 1 + \frac{\mu_j k_{iz}}{\mu_i k_{jz}} \\ \mu_i k_{jz} & \mu_j k_{iz} \end{pmatrix}, \quad M_m^{\text{hom}}(d_m) = \begin{pmatrix} \exp(ik_{mz} d_m) & 0 \\ 0 & \exp(-ik_{mz} d_m) \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

de las anteriores expresiones se obtiene la siguiente relación entre las amplitudes de los campos eléctricos en las regiones III y I:

$$\begin{pmatrix} E_3^+ \\ E_3^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11}^s & M_{12}^s \\ M_{21}^s & M_{22}^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{pmatrix}, \quad M^s = M_{32}^s M_2^{\text{hom}}(l) M_{21}^s \quad (3.9)$$

La magnitud  $M^s$  es la matriz de transferencia de los modos  $TE$  y es el resultado de la composición de las matrices más elementales  $M_{ij}^s$ ,  $M_m^{\text{hom}}(d_m)$ , donde  $M_{ij}^s$  es la matriz de transferencia a través de la interface del medio  $i$  al medio  $j$ , mientras que  $M_m^{\text{hom}}(d_m)$  corresponde a la matriz de transferencia a través de una capa con espesor  $d_m$  del medio homogéneo  $m$ .

Con base en las anteriores relaciones, para las componentes de la matriz de transferencia de los modos  $TE$   $M^s = M_{12}^s M_2^{\text{hom}}(l) M_{23}^s$  se obtienen las siguientes expresiones (Markoš and Soukoulis (2008)): (Apéndice 2)

$$\begin{aligned}
M_{11}^s &= \frac{1}{2} [1 + z_{31}^s] \cos k_{2z} l + \frac{i}{2} [z_{32}^s + z_{21}^s] \sin k_{2z} l, \\
M_{21}^s &= \frac{1}{2} [1 - z_{31}^s] \cos k_{2z} l + \frac{i}{2} [z_{32}^s - z_{21}^s] \sin k_{2z} l, \\
M_{21}^s &= \frac{1}{2} [1 - z_{31}^s] \cos k_{2z} l - \frac{i}{2} [z_{32}^s - z_{21}^s] \sin k_{2z} l, \\
M_{22}^s &= \frac{1}{2} [1 + z_{31}^s] \cos k_{2z} l - \frac{i}{2} [z_{32}^s + z_{21}^s] \sin k_{2z} l,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

donde

$$z_{ij}^s = \frac{\mu_i k_{jz}}{\mu_j k_{iz}}. \tag{3.11}$$

De manera análoga se puede considerar la onda con polarización  $TM$ : en este caso es la intensidad magnética  $\mathbf{H}$  de las ondas electromagnéticas en los diferentes medios la que tiene únicamente componente en la dirección normal al plano de incidencia. Con base en la dualidad (3.3) existente entre las ecuaciones de los modos  $TE$  y  $TM$  se puede escribir de inmediato

$$\begin{pmatrix} H_3^+ \\ H_3^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11}^p & M_{12}^p \\ M_{21}^p & M_{22}^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1^+ \\ H_1^- \end{pmatrix}, \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
M_{11}^p &= \frac{1}{2} [1 + z_{31}^p] \cos k_{2z} l + \frac{i}{2} [z_{32}^p + z_{21}^p] \sin k_{2z} l, \\
M_{21}^p &= \frac{1}{2} [1 - z_{31}^p] \cos k_{2z} l + \frac{i}{2} [z_{32}^p - z_{21}^p] \sin k_{2z} l, \\
M_{21}^p &= \frac{1}{2} [1 - z_{31}^p] \cos k_{2z} l - \frac{i}{2} [z_{32}^p - z_{21}^p] \sin k_{2z} l, \\
M_{22}^p &= \frac{1}{2} [1 + z_{31}^p] \cos k_{2z} l - \frac{i}{2} [z_{32}^p + z_{21}^p] \sin k_{2z} l,
\end{aligned} \tag{3.13}$$

donde

$$z_{ij}^p = \frac{\varepsilon_i k_{jz}}{\varepsilon_j k_{iz}}. \quad (3.14)$$

Las relaciones obtenidas se pueden utilizar para considerar el caso de la (Fig. 3.1) cuando sobre el sistema incide desde el medio  $I$  una onda electromagnética con vector de propagación  $k_1^+$ . Como se indicó anteriormente, parte de la energía de dicha onda se refleja mediante la onda con vector de propagación  $k_1^-$ , parte está representada en el medio  $II$  mediante las ondas con vectores de propagación  $k_2^+$ ,  $k_2^-$  y parte se transmite finalmente al medio 3, en el cual se propaga la onda electromagnética con vector de propagación  $k_3^+$ . Se tienen entonces las relaciones

$$\begin{pmatrix} E_3^+ \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11}^s & M_{12}^s \\ M_{21}^s & M_{22}^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} H_3^+ \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11}^p & M_{12}^p \\ M_{21}^p & M_{22}^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1^+ \\ H_1^- \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

de donde se obtienen las siguientes relaciones para las amplitudes de los campos  $(E_1^-, H_1^-)$ ,  $(E_2^+, H_2^+)$  de las ondas reflejadas y transmitidas (Apéndice 3):

$$E_1^- = r_s E_1^+, \quad E_3^+ = t_s E_1^+, \quad H_1^- = -\frac{M_{21}^p}{M_{22}^p} H_1^+, \quad H_3^+ = \left( \frac{\det M^p}{M_{22}^p} \right) H_1^+, \quad (3.16)$$

con las amplitudes de reflexión y transmisión dadas por

$$r_{s,p} = -\frac{M_{21}^{s,p}}{M_{22}^{s,p}}, \quad t_{s,p} = \frac{\det M^{s,p}}{M_{22}^{s,p}}. \quad (3.17)$$

Para los promedios temporales de las componentes normales a la superficie de los vectores de Poynting de las ondas incidente, reflejada y transmitida  $TE$ -polarizadas se tienen las siguientes expresiones (Apéndice 4):

$$S_z^{s-inc} = \frac{c^2}{8\pi} \frac{\text{Re } k_{1z}}{\mu_1 \omega} |E_1^+|^2, \quad S_z^{s-refl} = -\frac{c^2}{8\pi} \frac{\text{Re } k_{1z}}{\mu_1 \omega} |r_s|^2 |E_1^+|^2, \quad S_z^{s-tr} = \frac{c^2}{8\pi} \frac{\text{Re } k_{3z}}{\mu_3 \omega} |t_s|^2 |E_1^+|^2. \quad (3.18)$$

Por lo tanto, los coeficientes de reflexión y transmisión (que indican el porcentaje de energía reflejada y transmitida) de las ondas  $TE$ -polarizadas son

$$R_s = \frac{-S_z^{s-refl}}{S_z^{s-inc}} = |r_s|^2, \quad T_s = \frac{S_z^{s-tr}}{S_z^{s-inc}} = \frac{\text{Re } k_{3z} \mu_1}{\text{Re } k_{1z} \mu_3} |t_s|^2. \quad (3.19a)$$

De manera análoga, para las ondas  $TE$ -polarizadas los respectivos coeficientes de reflexión y transmisión son

$$R_p = |r_s|^2, T_p = \frac{\text{Re} k_{3z}}{\text{Re} k_{1z}} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} |t_s|^2. \quad (3.19b)$$

Supóngase ahora que en los medios *I* y *III* se tienen ondas fuertemente localizadas en las superficies  $z=-l/2$  y  $z=+l/2$ . Ello implica que los campos asociados a las ondas electromagnéticas en los medios *I* y *III* deben decrecer exponencialmente para  $z \rightarrow -\infty$  en el medio *I* y para  $z \rightarrow +\infty$  en el medio *III*, es decir, para el caso de una onda TE polarizada la estructura de los campos es

$$\begin{aligned} E_1 &= E_1^- \exp(ik_x x) \exp\left[\kappa_{1z} \left(z + \frac{l}{2}\right)\right], & z < -l/2 \\ E_2 &= \exp(ik_x x) \left\{ E_2^+ \exp(ik_{2z} z) + E_2^- \exp(-ik_{2z} z) \right\}, & -l/2 < z < l/2 \\ E_3 &= E_3^+ \exp(ik_x x) \exp\left[-\kappa_{3z} \left(z - \frac{l}{2}\right)\right], & z > l/2 \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde

$$\kappa_{(1,3)z} = \sqrt{k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{(1,3)} \mu_{(1,3)}}. \quad (3.21)$$

Esta estructura se puede obtener de las relaciones (3.4) tomando en ellas  $-ik_{(1,3)z} = \kappa_{(1,3)z}$ ,  $E_1^+ = 0$ ,  $E_3^- = 0$ . Por lo tanto, la relación entre las amplitudes de los campos en los medios *I* y *III* toma la forma  $\begin{pmatrix} E_3^+ \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11}^s & M_{12}^s \\ M_{21}^s & M_{22}^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ E_1^- \end{pmatrix}$ , de donde se obtienen las siguientes expresiones para las amplitudes de las ondas:

$$E_3^+ = M_{11}^s E_1^-, M_{22}^s E_1^- = 0.$$

Dado que  $E_1^- \neq 0$ , la relación  $M_{22}^s E_1^- = 0$  implica que para la existencia de modos evanescentes se debe cumplir  $M_{22}^s = 0$  con  $\kappa_{(1,3)z} = -ik_{(1,3)z}$ , es decir, (Apéndice 5)

$$\left(1 + \frac{\mu_3 \kappa_{1z}}{\mu_1 \kappa_{3z}}\right) \cos k_{2z} l - \left(\frac{\mu_3 k_{2z}}{\mu_2 \kappa_{3z}} - \frac{\mu_2 \kappa_{1z}}{\mu_1 k_{2z}}\right) \sin k_{2z} l = 0.$$



Esta expresión es la ley de dispersión de los modos  $TE$  evanescentes. En este caso, para el elemento  $M_{11}^s$  se tiene (Apéndice 6)

$$M_{11}^s = \left( 1 + \frac{\mu_3 \mathcal{K}_{1z}}{\mu_1 \mathcal{K}_{3z}} \right) \cos k_{2z} l.$$

De manera similar, la ley de dispersión de los modos  $TM$  evanescentes tiene la forma

$$\left( 1 + \frac{\varepsilon_3 \mathcal{K}_{1z}}{\varepsilon_1 \mathcal{K}_{3z}} \right) \cos k_{2z} l - \left( \frac{\varepsilon_3 k_{2z}}{\varepsilon_2 \mathcal{K}_{3z}} - \frac{\varepsilon_2 \mathcal{K}_{1z}}{\varepsilon_1 k_{2z}} \right) \sin k_{2z} l = 0$$

y para elemento  $M_{11}^p$  se tiene  $M_{11}^p = \left( 1 + \frac{\varepsilon_3 \mathcal{K}_{1z}}{\varepsilon_1 \mathcal{K}_{3z}} \right) \cos k_{2z} l.$

El caso particular  $\varepsilon_1 = \varepsilon_3$ ,  $\mu_1 = \mu_3$  corresponde al de una película inmersa en un medio con permitividad dieléctrica  $\varepsilon_1$  y permeabilidad magnética  $\mu_1$ . En este caso las anteriores relaciones toman la forma (Apéndice 7)

$$\cot k_{2z} l = \frac{1}{2} \left( \tilde{z}_{12}^{(s,p)} - \frac{1}{\tilde{z}_{12}^{(s,p)}} \right),$$

$$M_{11}^{(s,p)} = 2 \frac{\left( \tilde{z}_{12}^{(s,p)} - \frac{1}{\tilde{z}_{12}^{(s,p)}} \right)}{\left( \tilde{z}_{12}^{(s,p)} + \frac{1}{\tilde{z}_{12}^{(s,p)}} \right)}, \quad \tilde{z}_{12}^s = \frac{\mu_1 k_{2z}}{\mu_2 \mathcal{K}_{1z}}, \quad \tilde{z}_{12}^p = \frac{\varepsilon_1 k_{2z}}{\varepsilon_2 \mathcal{K}_{1z}}.$$

Utilizando la identidad  $\cot k_{2z} l = \frac{1}{2} \left[ \cot \frac{k_{2z} l}{2} - \tan \frac{k_{2z} l}{2} \right]$ , la anterior relación lleva a la siguiente ecuación algebraica (Apéndice 8)

$$\cot^2 \frac{k_{2z} l}{2} - \left( \tilde{z}_{12}^{(s,p)} - \frac{1}{\tilde{z}_{12}^{(s,p)}} \right) \cot \frac{k_{2z} l}{2} - 1 = 0.$$

Cuyas soluciones son (Apéndice 9)

$$\cot \frac{k_{2z}l}{2} = \tilde{z}_{12}^{(s,p)}, \quad \tan \frac{k_{2z}l}{2} = -\tilde{z}_{12}^{(s,p)}.$$

Para el campo en la región II se tiene (Apéndice 10) la siguiente relación entre las amplitudes  $E_2^+, E_2^-$ :

$$\frac{E_2^+}{E_2^-} = f_2^2 \frac{(\tilde{z}_{12}^s - i)}{(\tilde{z}_{12}^s + i)}.$$

Para el modo TE correspondiente a la relación de dispersión  $\cot \frac{k_{2z}l}{2} = \tilde{z}_{12}^{(s,p)}$  esta relación entre las amplitudes  $E_2^+, E_2^-$  se convierte en (Apéndice 11)  $\frac{E_2^+}{E_2^-} = 1$  y por lo tanto

$E_2 = 2E_2^+ \exp(ikx) \cos(k_{2z}z)$ , es decir, la componente tangencial del campo eléctrico en la región es una función par de la coordenada  $z$ , lo que indica que los valores de dicho campo en las superficies de la película están en fase.

De manera análoga, para el modo  $TE$  correspondiente a  $\tan \frac{k_{2z}l}{2} = -\tilde{z}_{12}^{(s,p)}$  se tiene

$E_2 = 2iE_2^+ \exp(ikx) \sin(k_{2z}z)$ , es decir, la componente tangencial del campo eléctrico en la región es una función impar de la coordenada  $z$ , lo que indica que los valores de dicho campo en las superficies de la película están en oposición de fase.

La anterior discusión se presentó en el contexto de las ondas  $TE$ . Para los modos  $TM$  las expresiones se pueden escribir a partir de las relaciones anteriores con base en la simetría dual (3.3) referenciada anteriormente.

Es preciso recordar que las soluciones obtenidas corresponden a modos evanescentes en las regiones I, III externas a la película, en las cuales se debe cumplir la condición  $k_{1z}^2 \leq 0$ , que corresponde a  $\omega \geq \frac{ck_x}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}$ . Sin embargo, en la región II se pueden presentar las

siguientes posibilidades:

(i)  $k_{2z}^2 > 0$ : Si  $\epsilon_2 \mu_2 > \epsilon_1 \mu_1$  es posible la existencia de una región en el plano  $(k_x, \omega)$  tal, que

$\frac{ck_x}{\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}} < \omega < \frac{ck_x}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}$ . En este caso  $k_{2z}$  es real y por lo tanto el campo eléctrico (3.20) de los

modos  $TE$  tienen un comportamiento oscilatorio a lo largo de la película superconductora y

las leyes de dispersión de los modos simétrico y antisimétrico son ecuaciones trascendentales con múltiples soluciones correspondientes a modos guiados dentro de la

película. Las respectivas leyes de dispersión son semejantes a las que surgen en el problema de determinar los niveles energéticos de una partícula confinada en un potencial cuadrado unidimensional.

(ii)  $k_{2z}^2 < 0$ : En este caso  $\omega < \frac{ck_x}{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}$  y  $k_{2z} = i\kappa_{2z}$ , por lo que las leyes de dispersión

describen modos cuyos campos están preferencialmente localizados en las superficies de la película.

Los resultados de la anterior discusión se resumen en las siguientes tablas, donde las expresiones para los modos *TM* se han hallado con base en (3.3).

	Modos guiados $\varepsilon_2\mu_2 > \varepsilon_1\mu_1$ $\frac{ck_x}{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}} < \omega < \frac{ck_x}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}$	Modo simétrico (en fase)	Modo antisimétrico (en oposición de fase)
<i>TE</i>	Ley de dispersión	$\cot \frac{k_{2z}l}{2} = \frac{\mu_1 k_{2z}}{\mu_2 \kappa_{1z}}$	$\tan \frac{k_{2z}l}{2} = -\frac{\mu_1 k_{2z}}{\mu_2 \kappa_{1z}}$
	Campo eléctrico al interior de la película	$E_2 \propto \cos(k_{2z}z)$	$E_2 \propto \sin(k_{2z}z)$
<i>TM</i>	Ley de dispersión	$\cot \frac{k_{2z}l}{2} = \frac{\varepsilon_1 k_{2z}}{\varepsilon_2 \kappa_{1z}}$	$\tan \frac{k_{2z}l}{2} = -\frac{\varepsilon_1 k_{2z}}{\varepsilon_2 \kappa_{1z}}$
	Campo magnético al interior de la película	$H_2 \propto \cos(k_{2z}z)$	$H_2 \propto \sin(k_{2z}z)$

Modos localizados $\omega < \frac{ck_x}{\sqrt{\epsilon_2\mu_2}}$		Modo simétrico (en fase)	Modo antisimétrico (en oposición de fase)
<i>TE</i>	Ley de dispersión	$\coth \frac{\kappa_{2z}l}{2} = -\frac{\mu_1\kappa_{2z}}{\mu_2\kappa_{1z}}$	$\tanh \frac{\kappa_{2z}l}{2} = -\frac{\mu_1\kappa_{2z}}{\mu_2\kappa_{1z}}$
	Campo eléctrico al interior de la película	$E_2 \propto \cosh(\kappa_{2z}z)$	$E_2 \propto \sinh(\kappa_{2z}z)$
<i>TM</i>	Ley de dispersión	$\coth \frac{\kappa_{2z}l}{2} = -\frac{\epsilon_1\kappa_{2z}}{\epsilon_2\kappa_{1z}}$	$\tanh \frac{\kappa_{2z}l}{2} = -\frac{\epsilon_1\kappa_{2z}}{\epsilon_2\kappa_{1z}}$
	Campo magnético al interior de la película	$H_2 \propto \cosh(\kappa_{2z}z)$	$H_2 \propto \sinh(\kappa_{2z}z)$

Los resultados obtenidos se ilustrarán para medios no magnetizables, cuyas permeabilidades magnéticas son iguales a las del vacío.

### 3.3. Transmisión de ondas electromagnéticas a través de una película superconductora

Considérese la transmisión de ondas electromagnéticas con polarizaciones *TE* y *TM* a través de una película superconductora de espesor  $l$ , inmersa en un medio con permitividad dieléctrica  $\epsilon_2$ . Se supone que la densidad de electrones normales es muy baja en comparación con la densidad de electrones superconductores; por esta razón en (2.11) se desprecia el tercer término y la permitividad dieléctrica de la capa superconductora tiene la siguiente expresión

$$\epsilon_2(\omega) = \epsilon_\infty - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^4 \right]. \quad (3.22)$$

El coeficiente de transmisión (que es la fracción normal de energía electromagnética que sale de la película superconductora respecto a la fracción normal de energía electromagnética que entra en la película) para los modos *TE* y *TM* se obtiene a partir de las expresiones (3.19a,b) y es proporcional a la expresión

$$\Gamma = \frac{1}{|M_{22}^{(s,p)}|^2}. \quad (3.23)$$

Es importante señalar que el coeficiente de transmisión toma el valor de la unidad cuando el módulo del elemento 2-2 de la matriz de transferencia es igual a 1. Esta condición permite obtener la relación para las frecuencias  $\omega$  de transferencia total de energía tanto para modos *TE* como *TM*: recordando que  $M_{22}^{(s,p)} = \cos k_{2z}l - \frac{i}{2}[z_{12}^{(s,p)} + z_{21}^{(s,p)}]\sin k_{2z}l$  se tiene  $|M_{22}^{(s,p)}|^2 = 1 + \frac{1}{4}[z_{12}^{(s,p)} - z_{21}^{(s,p)}]^2 \sin^2 k_{2z}l$  y por lo tanto  $|M_{22}^{(s,p)}|^2 = 1$  cuando:

$$k_{2z}l = m\pi, \quad (3.24)$$

donde  $m$  es entero positivo. Utilizando la ecuación (3.23) y la ley de Snell  $\sin \theta_2 = \frac{\sin \theta_1}{\sqrt{\epsilon_2}}$  se

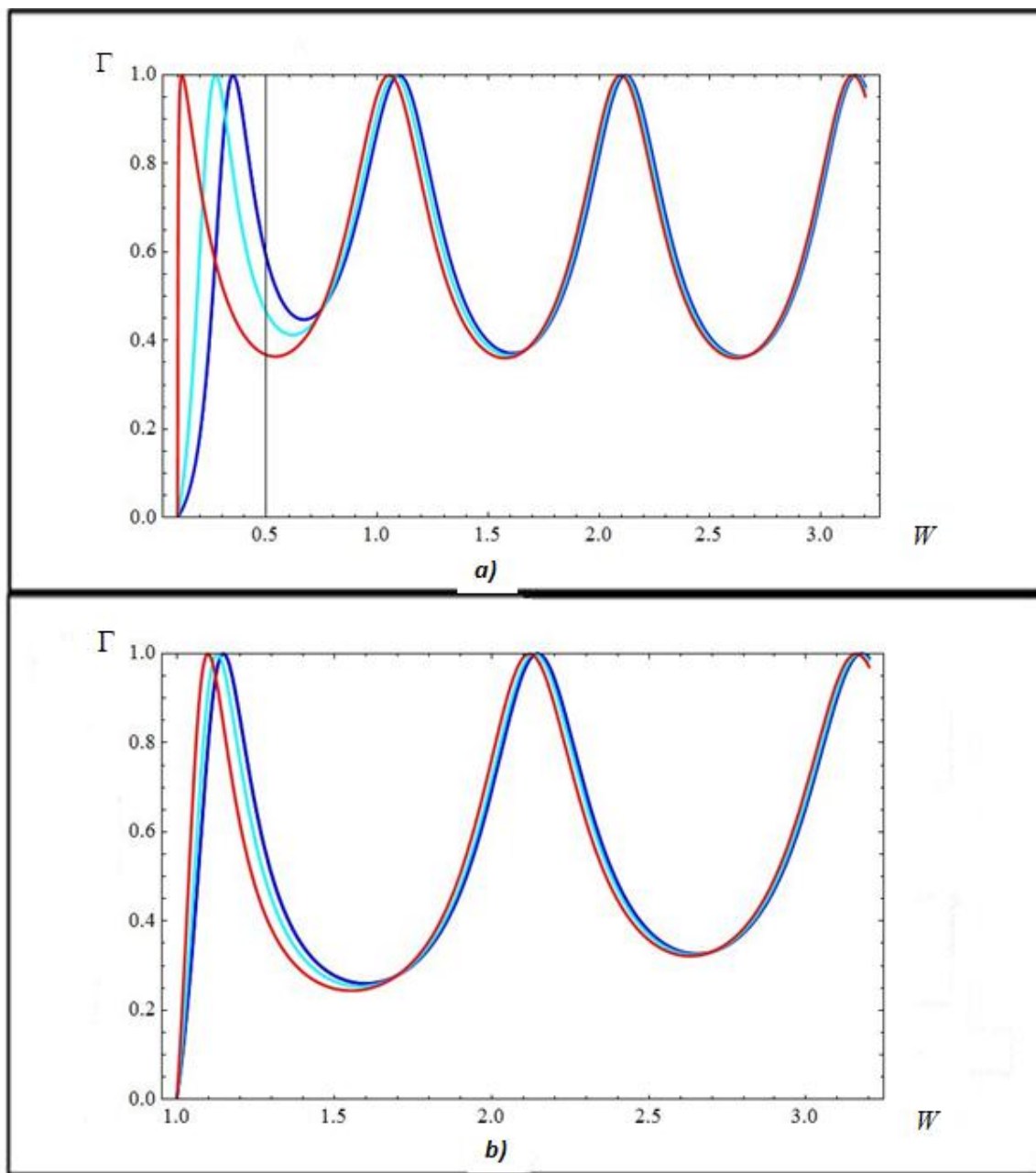
llega a la relación:

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_\infty}} \sqrt{\frac{m^2 c^2 \pi^2}{l^2} + \omega_p^2 \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^4 \right] + \sin^2 \theta_1}. \quad (3.25)$$

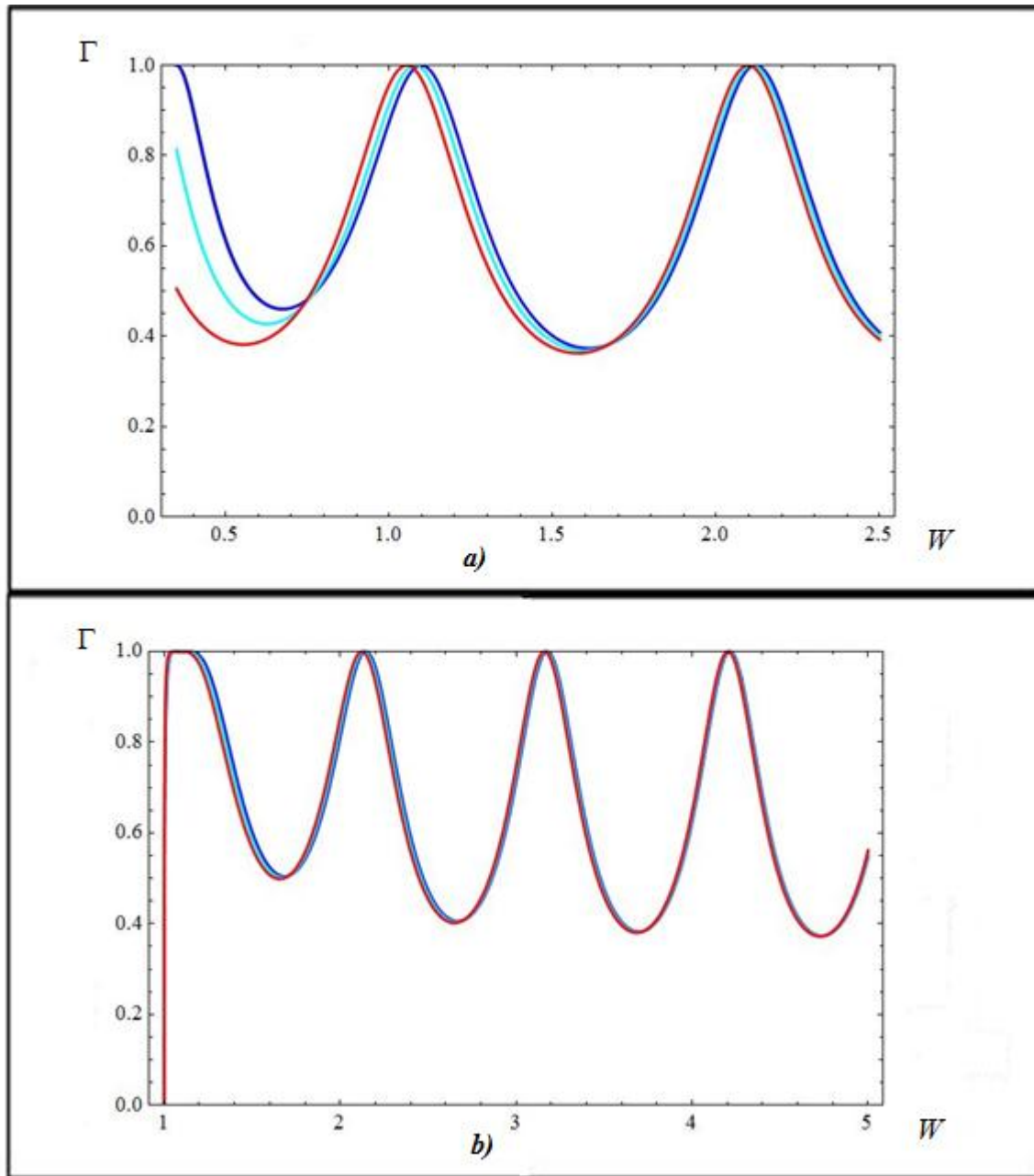
Dicha expresión nos permite hallar las frecuencias de transmisión total de la energía electromagnética incidente (resonancias de Fabry-Perot) dado el ángulo de incidencia de la onda electromagnética. Nótese que en el marco del modelo de Gorter-Casimir la posición de las resonancias de Fabry-Perot depende de la temperatura.

A continuación mostramos el comportamiento del coeficiente de transmisión para diferentes valores de la componente  $x$  del vector de onda normalizado para los modos *TE* y *TM*. Los resultados se reportan en términos de las magnitudes adimensionales

$$K_x \equiv k_x l, \quad W \equiv \frac{\omega l}{c}, \quad W_p \equiv \frac{\omega_p l}{c}.$$



**Figura 3.4:** Coeficiente de transmisión para modos  $TE$  en una película superconductora en función de la frecuencia normalizada  $W \equiv \frac{\omega l}{c}$  para diferentes valores de temperatura: la línea azul corresponde a la temperatura  $T = 0.4T_c$ , la línea azul claro corresponde a la temperatura  $T = 0.7T_c$ , la línea roja correspondería a la temperatura  $T = T_c$ . El vector de onda normalizado  $K_x \equiv k_x l$  toma los valores  $a) K_x = 0.1$ ,  $b) K_x = 1$ . Las curvas se han construido para el valor  $W_p \equiv \frac{\omega_p l}{c} = 1$ .



**Figura 3.5:** Como en la Figura 3.4, pero para el coeficiente de transmisión de modos  $TM$ .

En estas Figuras se destacan las siguientes características del coeficiente de Transmisión:

1. Para un valor dado de  $\kappa_x$ , a medida que aumenta la temperatura aparece un corrimiento hacia la región de menores frecuencias en los picos de transmisión total de la energía electromagnética, siendo este corrimiento más notorio para el pico de transmisión de más baja frecuencia. Este comportamiento se entiende al comparar los términos  $\frac{m c \pi}{l}$ ,

$$\omega_p \sqrt{1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^4} \text{ en (3.25).}$$

2. A medida que aumenta la temperatura, el ancho entre las frecuencias sucesivas correspondientes a máxima transmisión aumenta. Esto se puede notar, ya que dichos anchos pueden ser calculados con la expresión:

$$\Delta\omega = \frac{c^2 \pi^2 (2m+1)}{l^2 \left[ \sqrt{\frac{(m+1)^2 c^2 \pi^2}{l^2} + \alpha \omega_\rho^2 + \sin^2 \theta_1} + \sqrt{\frac{m^2 c^2 \pi^2}{l^2} + \alpha \omega_\rho^2 + \sin^2 \theta_1} \right]}, \quad \alpha = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^4.$$

3. A medida que se incrementa la componente normalizada  $\kappa_x$ , se está incrementando el ángulo de incidencia  $\theta_1$ , por lo que hay un corrimiento de las frecuencias de transmisión total hacia la región de mayores frecuencias. El menor valor que pueden tomar dichos anchos para un valor fijo de temperatura ocurre para incidencia normal, esto es cuando  $\theta_1 = 0^\circ$  y el mayor valor que pueden tomar dichos anchos para un valor fijo de temperatura ocurre para incidencia tangencial, esto es cuando  $\theta_1 = 90^\circ$ .

### 3.4. Curvas de dispersión para modos *TE* y *TM* guiados

En el intervalo de frecuencias  $\frac{c k_x}{\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}} < \omega < \frac{c k_x}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}$ , bajo la relación de parámetros

$\epsilon_2 \mu_2 > \epsilon_1 \mu_1$ , las leyes de dispersión en la película superconductora corresponden a modos guiados, en los cuales, como se indicó anteriormente, los campos eléctrico y magnético presentan comportamiento oscilatorio al barrer la coordenada espacial  $z$  a lo largo de la película. En la Figura 3.6 se ilustran las curvas de dispersión correspondientes a los modos *TE* guiados simétricos, cuya ley de dispersión  $\omega = \omega(k_x)$  se obtiene de los ceros de

$\coth \frac{\kappa_{2z} l}{2} = \frac{\mu_1 \kappa_{2z}}{\mu_2 \kappa_{1z}}$ . Para un valor dado del vector de onda en el intervalo de frecuencias

considerado, existen diferentes modos, caracterizados por el número entero  $n=1, 2, 3, \dots$



Se nota que las curvas de dispersión inician sobre la recta  $\kappa_{1z} = 0$  (correspondiente a la ley de dispersión de la luz en el vacío) y las frecuencias de arranque se obtienen de la ecuación (Apéndice 12)  $\frac{\omega^2}{c^2} [\varepsilon_2(\omega)\mu_2 - \varepsilon_1\mu_1] = \left(\frac{2n\pi}{l}\right)^2$ , cuya solución para el caso de una película en el vacío es

$$\omega = \frac{c}{l} \sqrt{\frac{\alpha + (2n\pi)^2}{\varepsilon_{2\infty} - 1}}, \alpha = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^4 \quad (3.26)$$

Dada la dependencia de la permitividad dieléctrica del superconductor con la temperatura  $T$ , se esperaría que dichos puntos de arranque también dependieran de  $T$ . Sin embargo, un análisis numérico elemental evidencia que dicha dependencia es débil, ya que en el rango de temperaturas  $0 < T < T_c$ , la magnitud  $\alpha$  es mucho menor que  $(2n\pi)^2$ ; las curvas de dispersión forman ángulos relativamente grandes con respecto a la línea de luz  $\omega = ck_x$ , y crecen monótonamente con  $k_x$ . Para grandes valores del vector de onda ( $k_x l \gg 1$ ) las curvas de dispersión tienden asintóticamente a la ley de dispersión:

$$\omega = \frac{c}{l} \sqrt{\frac{\alpha + (k_x l)^2}{\varepsilon_{2\infty}}} \approx \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{2\infty}}} k_x \quad (3.27)$$

que corresponde a la ley de dispersión de un material aislante con permitividad dieléctrica  $\varepsilon_2(\omega \rightarrow \infty) = \varepsilon_{2\infty}$ .

La velocidad de grupo de los modos tiene la forma (Apéndice 13)

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \omega_n}{\partial k_x} = \left( \frac{1+f}{\varepsilon_2 \mu_2 + f \varepsilon_1 \mu_1} \right) \frac{ck_x}{\omega_n}, \quad f(k_x, \omega_n) = \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{1}{\kappa_{1z} l} \left[ \frac{2 \cos^2 \frac{k_{2z} l}{2}}{1 + \frac{\sin k_{2z} l}{k_{2z} l}} \right].$$

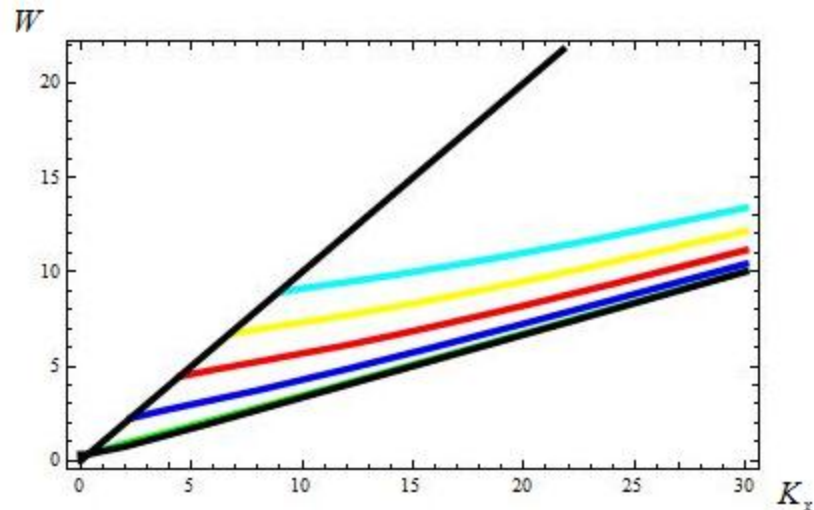
Para un valor dado de  $k_x$  la función  $f(k_x, \omega_n)$  decrece con  $n$ . Por lo tanto la velocidad de grupo del modo  $\frac{\partial \omega_{n+1}}{\partial k_x}$  es menor que  $\frac{\partial \omega_n}{\partial k_x}$  para el mismo valor de  $k_x$ .

Los anteriores resultados se consolidan en la Figura 3.6.

La anterior discusión se presentó para los modos  $TE$  simétricos guiados. Para los modos  $TE$  anti simétricos el comportamiento cualitativo de las leyes de dispersión es semejante al descrito para los modos simétricos  $TE$  con la siguiente diferencia: las curvas de dispersión inician sobre la recta  $\kappa_{1z} = 0$  en las frecuencias de arranque

$\omega = \frac{c}{l} \sqrt{\frac{\alpha + [(2n+1)\pi]^2}{\varepsilon_{2\infty} - 1}}$ , razón por la cual las frecuencias de estos modos son ligeramente superiores a las de los modos simétricos.

Para los modos  $TM$  guiados (tanto simétricos como anti simétricos) los resultados son cualitativamente semejantes a los expuestos para los modos  $TE$ , salvo que las curvas de dispersión de los modos  $TM$  son tangentes a la línea de luz  $\omega=ck_x$  en los puntos de arranque, en contraste con los ángulos relativamente grandes de las curvas de dispersión de los modos  $TE$ .



**Figura 3.6.:** Curvas de dispersión para modos  $TE$  guiados en fase, a temperatura cero. La recta negra superior representa la ley de dispersión  $W = K_x$ ; la recta negra inferior representa la ley de dispersión  $W = \frac{K_x}{\sqrt{\epsilon_\infty}}$ . Los modos para  $n=1,2,3,4,5$  están representados, respectivamente, por las líneas verde, azul, roja, amarillo y azul claro.

### 3.5. Curvas de dispersión para modos $TE$ y $TM$ localizados

Consideremos inicialmente el caso límite  $l \rightarrow \infty$  (correspondiente a dos medios semi infinitos). Las leyes de dispersión de los modos  $TE$  y  $TM$  se reducen a

$$\frac{\kappa_1}{\mu_1} + \frac{\kappa_2}{\mu_2} = 0,$$

$$\frac{\kappa_1}{\epsilon_1} + \frac{\kappa_2}{\epsilon_2} = 0.$$

Para medios no magnetizables  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ , la ley de dispersión de los modos  $TE$  se reduce a la ecuación

$$\sqrt{k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1} + \sqrt{k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2(\omega)} = 0,$$

la cual no tiene solución real, para ningún valor real dado de  $k_x$ .

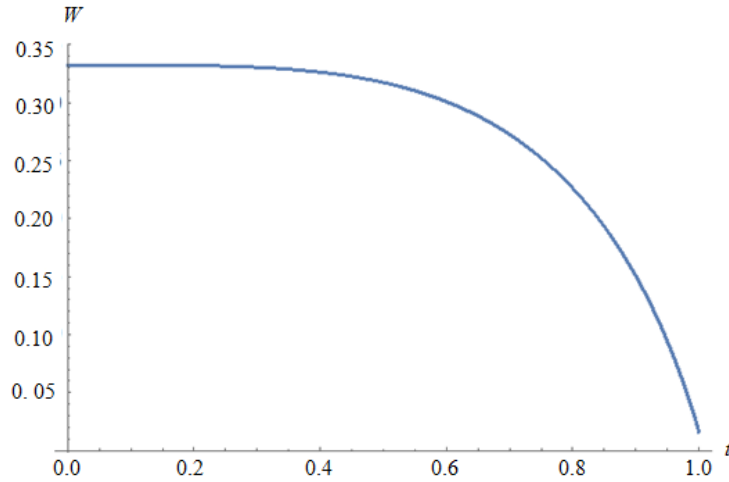
Así, para los medios considerados en la región del espectro  $\omega < \frac{ck_x}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}$  solo existen modos

localizados con polarización  $TM$ . En la región del espectro donde se pueden despreciar los efectos de retardo  $\left(k_x \gg \frac{\omega^2}{c^2} \text{Max}[\varepsilon_{(1,2)}, \mu_{(1,2)}]\right)$ , se tiene  $\kappa_{(1,2)z} = \sqrt{k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{(1,2)} \mu_{(1,2)}} \approx k_x$  y la

ley de dispersión de los modos  $TM$  toma la forma  $\varepsilon_2(\omega) + \varepsilon_1 = 0$  (ver apéndice 14). La solución de dicha ecuación da cuenta de la frecuencia de la excitación superficial que surge en la superficie entre un dieléctrico y un superconductor cuya permitividad dieléctrica se describe en el marco del modelo Gorter-Casimir. Esta frecuencia presenta una notable dependencia con la temperatura, tomando su valor máximo  $\omega_{\text{max}}^2 = \frac{\omega_p^2}{\varepsilon_\infty + \varepsilon_1}$  a temperatura

ceros. En la temperatura de transición el valor de dicha magnitud es  $\omega_s^2 = \frac{\omega_p^2 - \gamma^2(\varepsilon_\infty + \varepsilon_1)}{\varepsilon_\infty + \varepsilon_1}$

El comportamiento de la frecuencia característica  $\omega_s$  con la temperatura se ilustra en la Figura 3.7.



**Figura 3.7:** Frecuencia del modo localizado  $TM$  en función de  $t = \frac{T}{T_c}$ . A medida que la temperatura de la película se acerca a la temperatura crítica, la frecuencia del modo superficial converge.

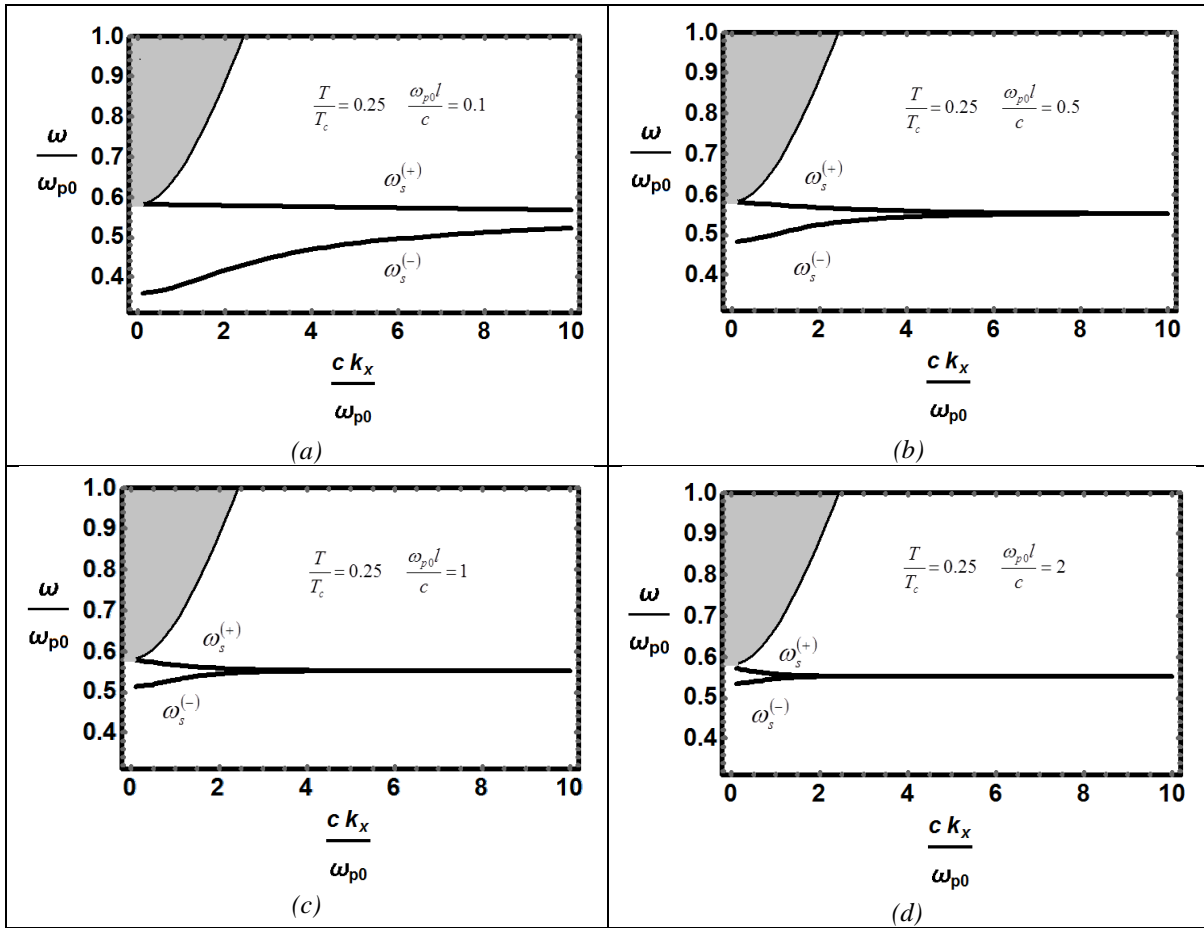
Si consideramos que los efectos del tercer término de la permitividad dieléctrica son muy pequeños y el ancho de la película  $l \rightarrow \infty$ , la frecuencia del modo superficial converge a un único valor dado por la expresión (Apéndice 15)

$$\omega_s^2 = \frac{\alpha}{\varepsilon_\infty + \varepsilon_1} \omega_p^2. \quad (3.28)$$

La discusión anterior corresponde al caso  $l \rightarrow \infty$ . Consideremos ahora los modos electromagnéticos localizados *TM* que surgen en una película de espesor  $l$  finito. Las frecuencias de estos modos corresponden a las soluciones de la ecuaciones

$$\coth \frac{\kappa_{2z} l}{2} = -\frac{\varepsilon_1 \kappa_{2z}}{\varepsilon_2 \kappa_{1z}}, \quad \tanh \frac{\kappa_{2z} l}{2} = -\frac{\varepsilon_1 \kappa_{2z}}{\varepsilon_2 \kappa_{1z}}.$$

Como se indicó anteriormente, la primera relación describe el modo simétrico  $\omega_s^{(+)}$  (en fase) que corresponde a una distribución simétrica del campo magnético en el interior de la película, mientras que la segunda relación describe el modo antisimétrico  $\omega_s^{(-)}$  (en oposición de fase), con una distribución antisimétrica del campo magnético en el interior de la película. El comportamiento de dichos modos en función de la magnitud del vector de propagación  $k_x$  y para diferentes espesores de la película se ilustra en la Figura 3.8.



**Figura 3.8** Ley de dispersión de los modos  $TM$  localizados tanto en fase como en oposición de fase para diferentes espesores de la película superconductora y para temperatura  $T=0.25T_c$ . Las curvas de dispersión corresponden a diferentes espesores  $l$  de la película superconductora correspondientes a los siguientes valores del parámetro adimensional  $\omega_p l/c$ : (a)  $\omega_p l/c=0.1$ , (b)  $\omega_p l/c=0.5$ , (c)  $\omega_p l/c=1$ , (d)  $\omega_p l/c=2$ .

Para películas delgadas ( $\omega_p l/c < 1$ ) es mayor el intervalo de valores de  $k_x$  donde es notorio el desdoblamiento entre los modos  $\omega_s^{(+)}$ ,  $\omega_s^{(-)}$ . Esto se debe a que en la región de grandes longitudes de onda ( $k_x l \ll 1$ ) los campos electromagnéticos inducidos en las superficies de la película superconductora se superponen, comportándose el sistema como osciladores acoplados. A medida que el ancho de la película aumenta, el desdoblamiento de los modos superficiales desaparece y ambas frecuencias coinciden con la del modo superficial  $\omega_s$  (3.28) de un sistema dieléctrico semi-infinito/superconductor semi-infinito.

## CAPÍTULO 4

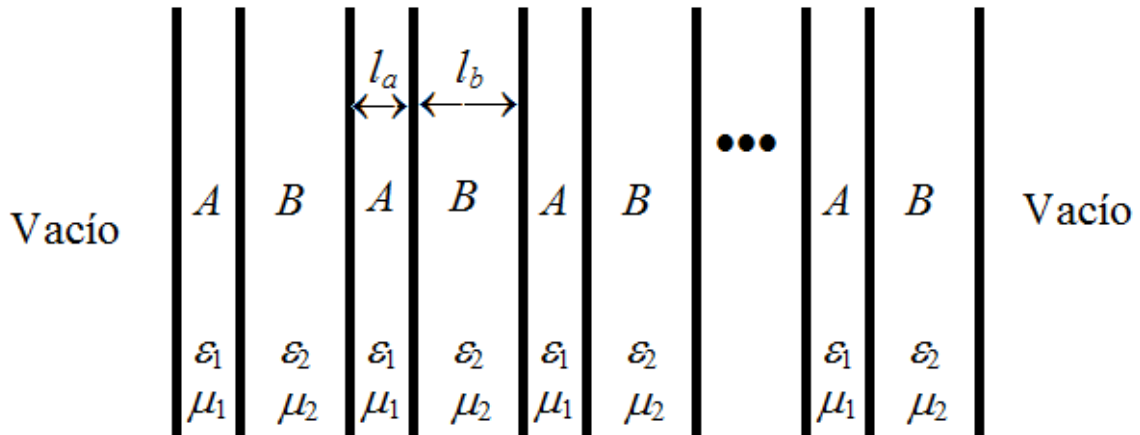
### Propiedades del coeficiente de transmisión y diagrama de bandas para un cristal fotónico periódico dieléctrico-superconductor

#### 4.1. Descripción del sistema periódico

Consideremos un sistema periódico cuya celda unitaria consta de dos capas dieléctricas A y B de espesores  $l_a, l_b$  y permitividades dieléctricas  $\varepsilon_1, \varepsilon_2(\omega)$ , donde

$$\varepsilon_2(\omega) = \varepsilon_\infty - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^4 \right] - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma_1^2} \left( \frac{T}{T_c} \right)^4.$$

El período  $l$  de este sistema es  $l = l_a + l_b$ . Las capas se extienden indefinidamente en las direcciones  $x$  e  $y$  mientras que a lo largo de la dirección  $z$  la permitividad dieléctrica varía periódicamente. La respectiva geometría se indica en la Figura 4.1 para un sistema (inmerso en el vacío) de  $N$  celdas unitarias.



**Figura 4.1.** Representación de un sistema periódico de dos capas: la capa A representa un dieléctrico de permitividad dieléctrica relativa  $\varepsilon_1$  y permeabilidad magnética relativa  $\mu_1 = 1$ ; la capa B representa un superconductor con permeabilidad magnética  $\mu_2 = 1$  y permitividad dieléctrica relativa

$$\varepsilon_2(\omega) = \varepsilon_\infty - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^4 \right] - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma_1^2} \left( \frac{T}{T_c} \right)^4.$$

Determinemos el coeficiente de transmisión de los modos  $TE$  y  $TM$  que se pueden propagar en este sistema. Siguiendo el formalismo del método de matriz de transferencia, el coeficiente de transmisión del sistema de la Figura 4.1 se puede construir a partir de las matrices de transferencia de la interface del medio  $i$  al medio  $j$   $M_{ij}^{(s,p)}$  y de la matriz de transferencia a través de una capa con espesor  $d_m$  del medio homogéneo  $m$   $M_m^{\text{hom}}(d_m)$ . El proceso de transmisión a través de las  $N$  capas inmersas en el vacío se entiende como los siguientes seis procesos: (i) la transmisión desde el vacío al medio  $B$  en la superficie derecha, (ii) la transmisión a través del medio homogéneo  $B$ , (iii) la transmisión desde medio  $B$  al medio  $A$ , (iv) la transmisión a través de  $N-1$  celdas  $AB$ , (v) la transmisión a través del medio homogéneo  $A$ , (vi) la transmisión desde el medio  $A$  al vacío en la superficie izquierda. Las respectivas matrices que describen estos procesos son (i)  $M_{B0}^{(s,p)}$  (ii)  $M_B^{\text{hom}}(d_b)$  (iii)  $M_{AB}^{(s,p)}$  (iv)  $M_{\text{celda}}^{(s,p)} = M_{AB}^{(s,p)} M_B^{\text{hom}}(d_b) M_{BA}^{(s,p)} M_A^{\text{hom}}(d_a)$  (v)  $M_A^{\text{hom}}(d_a)$  (vi)  $M_{0A}^{(s,p)}$  y por lo tanto la matriz de transferencia es (ver apéndice 16)

$$M^{\text{crist-fot}(s,p)} = M_{0A}^{(s,p)} M_A^{\text{hom}}(d_a) \left[ M_{\text{celda}}^{(s,p)} \right]^{N-1} M_{AB}^{(s,p)} M_B^{\text{hom}}(d_b) M_{B0}^{(s,p)}, \quad (4.1)$$

y depende de la matriz de transferencia de la celda y del número de celdas en el cristal.

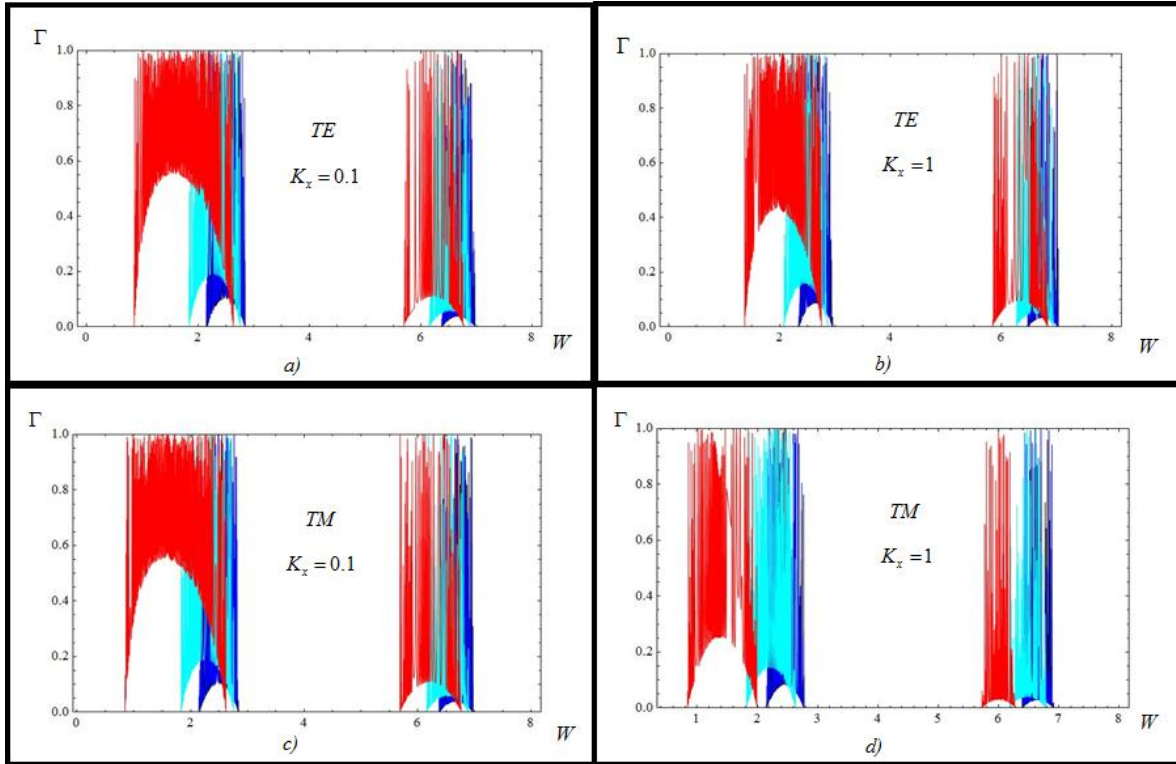
El respectivo coeficiente de transmisión para los modos  $TE$  y  $TM$  es

$$\Gamma = \frac{1}{\left| M_{22}^{\text{crist-fot}(s,p)} \right|^2}. \quad (4.2)$$

Para un cristal periódico de  $N=600$  celdas obtenemos los resultados que se presentan en las siguientes secciones.

#### 4.2. Coeficiente de transmisión para los modos $TE$ y $TM$ en un cristal fotónico periódico dieléctrico-superconductor.

Se ha estudiado el coeficiente de transmisión variando la componente sobre el eje  $x$  del vector de onda normalizado y hemos prestado atención al primer y segundo intervalos de frecuencias de transmisión, obteniendo los siguientes resultados para modos  $TE$  y  $TM$  (Figura 4.2).



**Figura 4.2:** Coeficiente de transmisión para un cristal periódico dieléctrico-superconductor con  $N=600$  celdas. El panel superior (inferior) corresponde a los modos  $TE$  ( $TM$ ) para los valores  $K_x=k_x l=0.1$  (panel izquierdo) y  $k_x l=1$  (panel derecho), respectivamente. Los colores asignados a las bandas corresponden a las siguientes temperaturas del sistema:  $T = 0.4T_c$  (azul),  $T = 0.8T_c$  (azul claro),  $T = T_c$  (rojo).

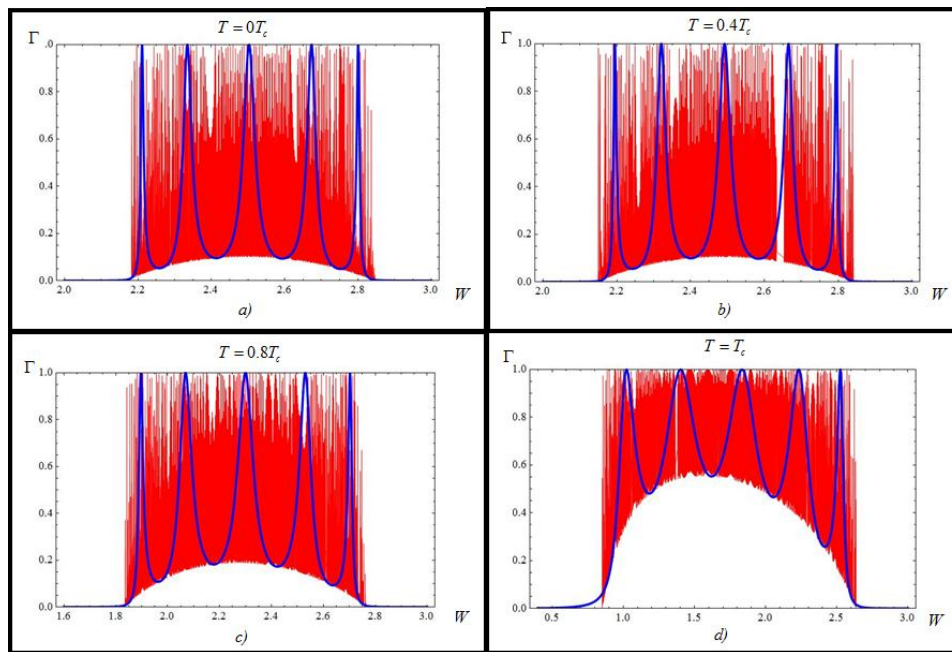
Se observa que, para una temperatura dada  $T < T_c$ , la banda de transmisión más baja (tanto para los modos  $TE$  como de los modos  $TM$ ) experimenta los mayores cambios al incrementar el valor de la magnitud  $K_x=k_x l$ , observándose el incremento del ancho de la banda con la temperatura, así como el desplazamiento de los bordes inferior y superior de la banda a la región de menores frecuencias, siendo más notorio dicho desplazamiento para el borde inferior de la banda. Para la segunda banda se observa un proceso similar, aunque ocurre en una región más estrecha de valores de frecuencia. Al variar la temperatura, para un valor dado de  $K_x$ , se observa que el ancho de las bandas de transmisión se incrementa con la temperatura, siendo más notorio este efecto para el menor valor de  $K_x$ . Estos efectos conjuntos llevan a la reducción en el ancho de los gaps de los modos  $TE$  y  $TM$  y al aumento en la región permitida de transmisión al incrementar la temperatura, lo cual se entiende en el marco del modelo de Gorter-Casimir, ya que al aumentar la temperatura (en el rango  $T < T_c$ ) la densidad de portadores superconductores disminuye y al despreciar el papel de los portadores normales, el comportamiento del sistema termina acercándose al de un dieléctrico convencional.



Arafa et al. (2012) han hecho un estudio comparativo del coeficiente transmisión en sistemas multicapa periódicos, dieléctrico-dieléctrico y dieléctrico-metal , concluyendo que el aumenta en los sistemas multicapa dieléctrico –metal y el coeficiente de transmisión decae a medida que aumenta la frecuencia.

En la anterior discusión se consideró un cristal fotónico finito de 600 celdas. En las Figura 4.3 se ha ilustrado la variación del coeficiente de transmisión con el número de celdas de los modos  $TE$  en cristal periódico, prestando atención al primer intervalo de frecuencias de transmisión.

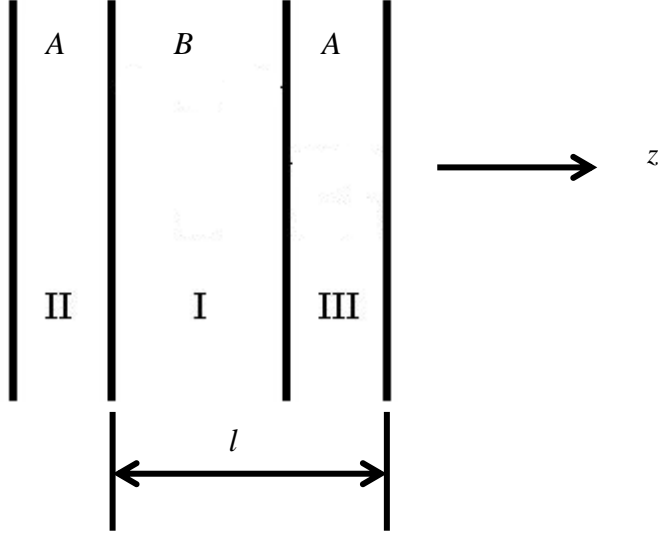
Nótese que el incremento en el número de celdas aumenta el número de resonancias de Fabry-Perot, tal como era de esperar: para un sistema de  $N$  celdas se observan  $N-1$  resonancias. El aumento en la temperatura provoca un corrimiento hacia la región de menores frecuencias de la frecuencia inicial de transmisión total, así como un incremento en el ancho de la banda de transmisión y un aumento del coeficiente de transmisión en los mínimos dentro de la banda de transmisión. Al variar la componente en el eje  $x$  del vector de onda normalizado incidente, se genera un corrimiento hacia la región de mayores frecuencias de la frecuencia inicial de transmisión total. Para los modos  $TM$  se tiene un comportamiento cualitativamente similar, siendo la frecuencia inicial de transmisión insensible al cambio de la componente  $x$  del vector de onda.



**Figura 4.3:** Coeficiente de transmisión del modo  $TE$  en un cristal fotónico dieléctrico-superconductor finito a diferentes temperaturas: a)  $T = 0T_c$ , b)  $T = 0.4T_c$ , c)  $T = 0.8T_c$ , d)  $T = T_c$ , el vector de onda normalizado corresponde  $K_x = 0.1$ . La línea azul (roja) corresponde a un cristal fotónico finito constituido por 6 (600) celdas, respectivamente.

### 4.3. Diagrama de bandas para modos $TE$ y $TM$ en cristal fotónico periódico.

Se examina ahora la ley de dispersión de los modos que surgen en el caso de un cristal fotónico periódico infinito. En la Figura 4.5 se ilustra la respectiva geometría : la celda que se repite es el bloque formado por las capas  $AB$ ; la capa  $A$  corresponde al material dieléctrico, mientras que la capa  $B$  es la película superconductora.



**Figura 4.4.** Geometría de un cristal fotónico dieléctrico-superconductor periódico infinito. La celda que se repite es el bloque formado por las capa  $AB$ , donde la capa  $A$  es el dieléctrico y la capa  $B$  es la película superconductora. Dada la periodicidad del sistema es posible aplicar el teorema de Bloch.

Examinemos el caso de los modos  $TE$ . De acuerdo con el formalismo de la matriz de transferencia, los campos en la superficie derecha de la  $N+1$  celda están relacionados con los campos en la superficie derecha de la  $N$  celda mediante la relación

$$\begin{pmatrix} E_{N+1}^+ \\ E_{N+1}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11}^{celda(s)} & M_{12}^{celda(s)} \\ M_{21}^{celda(s)} & M_{22}^{celda(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_N^+ \\ E_N^- \end{pmatrix},$$

donde  $M_{celda}^{(s,p)} = M_{AB}^{(s,p)} M_B^{hom}(d_b) M_{BA}^{(s,p)} M_A^{hom}(d_a)$ , tal como se definió en la sección anterior.

Por otro lado, debido a la periodicidad del sistema los campos  $\begin{pmatrix} E_{N+1}^+ \\ E_{N+1}^- \end{pmatrix}$  están relacionados

con los campos  $\begin{pmatrix} E_N^+ \\ E_N^- \end{pmatrix}$  mediante el Teorema de Bloch

$$\begin{pmatrix} E_{N+1}^+ \\ E_{N+1}^- \end{pmatrix} = \exp(iql) \begin{pmatrix} E_N^+ \\ E_N^- \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, se tiene

$$\begin{pmatrix} M_{11}^{celda(s)} - \lambda & M_{12}^{celda(s)} \\ M_{21}^{celda(s)} & M_{22}^{celda(s)} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_N^+ \\ E_N^- \end{pmatrix} = 0, \quad \lambda = \exp(iql).$$

Así, los valores propios  $\lambda_1, \lambda_2$  de la matriz de transferencia se obtienen a partir de la ecuación (ver apéndice 17 )

$$\lambda^2 - \text{Tr}(M_{celda}^{(s,p)})\lambda + \det(M_{celda}^{(s,p)}) = 0.$$

Si se considera que la parte imaginaria de la permitividad dieléctrica del superconductor es despreciable, entonces  $\det M^{celda(s)} = 1$ ,  $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_1 = \exp(iql)$ ,  $\lambda_2 = \exp(-iql)$ ,  $\lambda_1 + \lambda_2 = 2\cos(ql)$  y por lo tanto

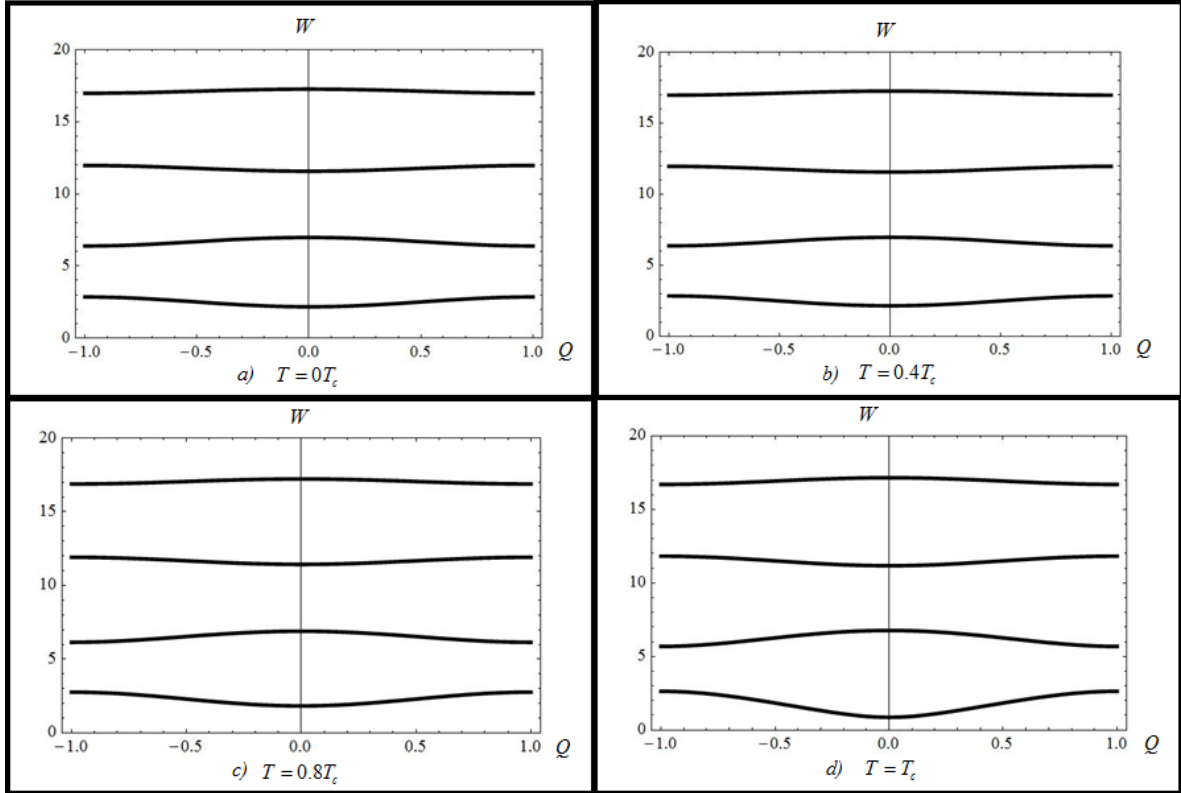
$$\cos(ql) = \frac{1}{2} \text{Tr}(M_{celda}^{(s,p)})$$

(4.1)

Esta ecuación se normaliza definiendo las magnitudes adimensionales  $Q = \frac{ql}{\pi}$ ,  $K_x \equiv k_x l$ ,  $W \equiv \frac{\omega l}{c}$ ,  $W_p \equiv \frac{\omega_p l}{c}$ . Al fijar un valor de la magnitud del vector de onda adimensional  $K_x \equiv k_x l$ , para cada punto dentro de la zona de Brillouin  $-1 \leq Q \leq 1$  la relación (4.1) se convierte en una ecuación trascendental para la frecuencia adimensional  $W$ . Se obtiene así el diagrama de bandas para los modos  $TE$  y  $TM$  que surgen en el cristal fotónico considerado. Los resultados se ilustran en las figuras 4.6 para los modos  $TE$ , siendo los resultados para los modos  $TM$  cualitativamente similares.

Se nota que los efectos de temperatura son más manifiestos en la primera banda fotónica, siendo menos notorios en la segunda banda y prácticamente despreciables en las sucesivas bandas. Ello obedece al hecho que para los parámetros elegidos, la frecuencia característica de las oscilaciones de plasma asociadas a los portadores superconductores es comparable a las frecuencias de la primera banda.

A medida que la temperatura crece en el intervalo  $0 < T < T_c$ , la dispersión de la primera banda es más notoria, especialmente en la vecindad del centro de la zona de Brillouin ( $Q=0$ ) y las frecuencias correspondientes decrecen monótonamente con el incremento de la temperatura. Por otro lado, las frecuencias de la primera banda, cercanas al borde de la zona de Brillouin ( $Q=\pm 1$ ) son afectadas en menor medida por la temperatura, experimentando un leve decrecimiento al aumentar  $T$ . Esto lleva al aumento en la velocidad de grupo con el aumento de la temperatura para valores dados de  $Q$  en la región intermedia entre el centro y el borde de la zona de Brillouin.



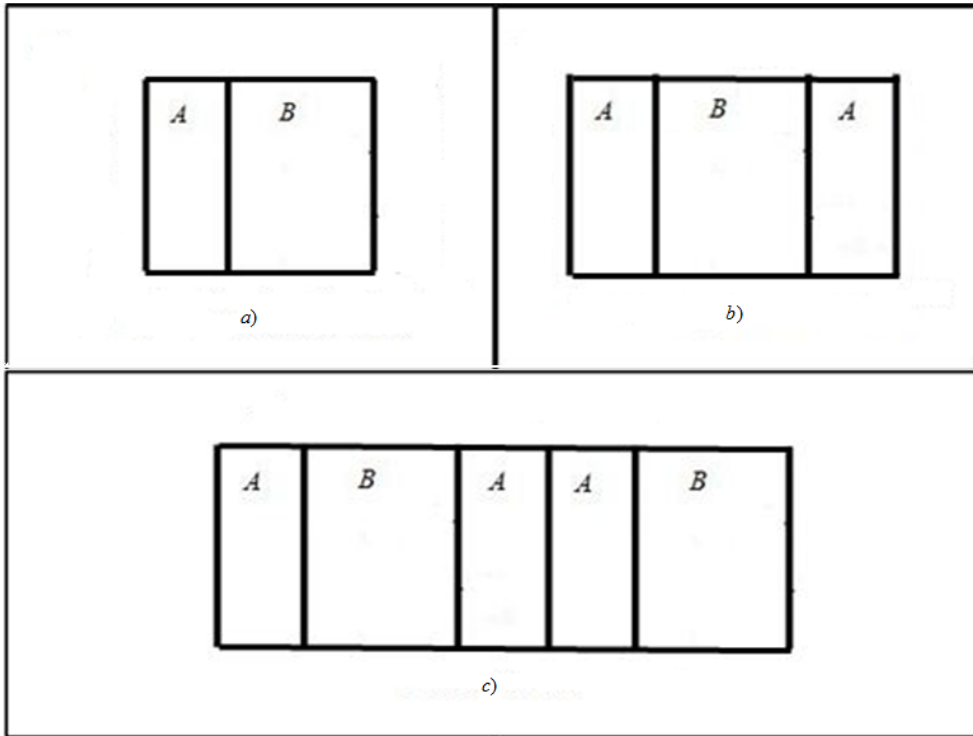
**Figura 4.5:** Diagrama de bandas para el modo  $TE$ , en cristal fotónico periódico dieléctrico-superconductor a diferentes temperaturas: a)  $T = 0T_c$ , b)  $T = 0.4T_c$ , c)  $T = 0.8T_c$ , d)  $T = T_c$ . La componente  $x$  del vector de onda normalizado es  $K_x = 0.1$ .

## CAPÍTULO 5.

### Propiedades del coeficiente de transmisión y diagrama de bandas para un cristal fotónico cuasi periódico dieléctrico-superconductor.

#### 5.1 Descripción del sistema cuasi periódico tipo Fibonacci.

Consideremos ahora un sistema cuasi periódico cuya celda unitaria consta de las capas formadas por la secuencia de Fibonacci  $S_{m+2} = S_{m+1}S_m$  donde  $S_0 = B$  y  $S_1 = A$ , siendo  $A$  la capa dieléctrica y  $B$  la capa superconductor de espesores  $l_0, l_1$  y permitividades dieléctricas  $\epsilon_1, \epsilon_2(\omega)$  respectivamente. El período  $l_{m+2}$  de este sistema es  $l_{m+2} = l_{m+1} + l_m$ . Las capas se extienden indefinidamente en las direcciones  $x$  e  $y$ ; a lo largo de la dirección  $z$  la permitividad dieléctrica varía cuasiperiódicamente. La respectiva geometría se indica para diferentes celdas Fibonacci de la siguiente forma:



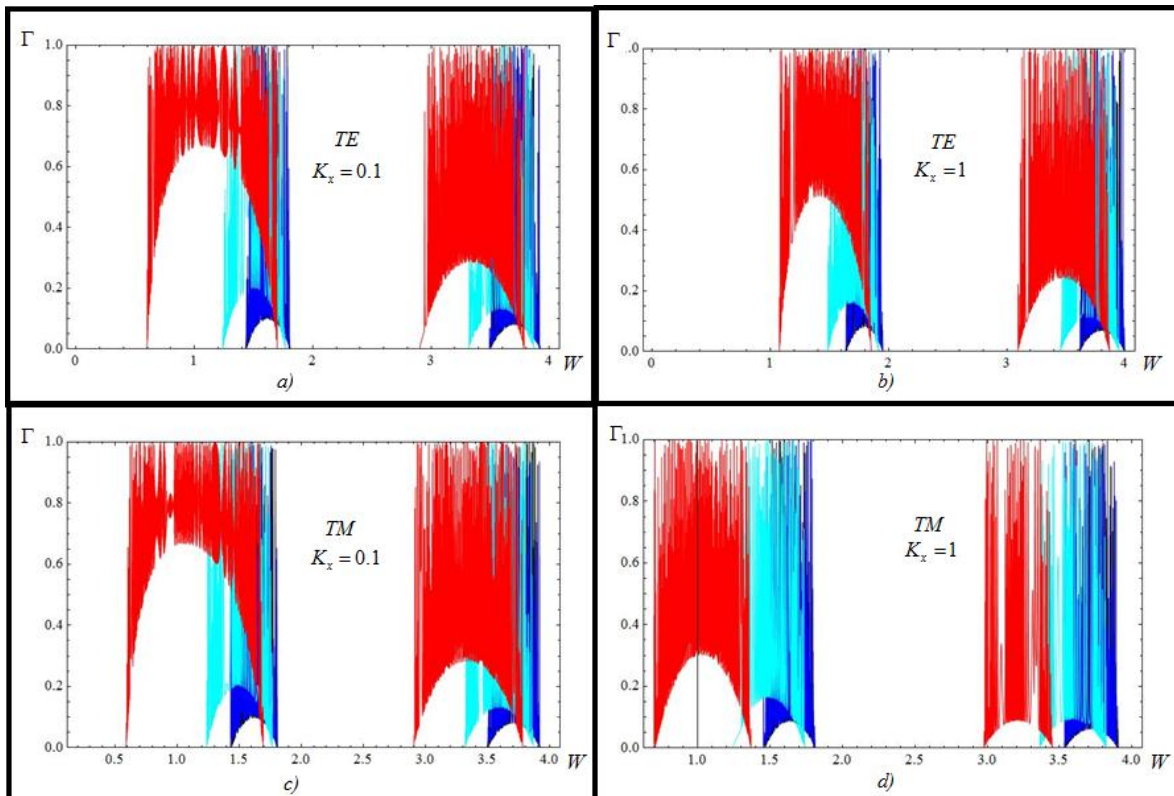
**Figura 5.1:** Geometría de la celda unitaria para cristal fotónico cuasi periódico Fibonacci, en los casos:

- a)  $S_2 = S_1S_0 = AB$  de longitud  $l_2 = l_1 + l_0$
- b)  $S_3 = S_2S_1 = ABA$  de longitud  $l_3 = 2l_1 + l_0$
- c)  $S_4 = S_3S_2 = ABAAB$  de longitud  $l_4 = 3l_1 + 2l_0$

Es importante notar que el arreglo  $S_2$  corresponde al cristal fotónico periódico estudiado con anterioridad.

## 5.2. Coeficiente de transmisión para los modos $TE$ y $TM$ en un cristal fotónico con la secuencia de Fibonacci S3.

Se ha estudiado el coeficiente de transmisión variando la componente sobre el eje  $x$  del vector de onda normalizado y hemos prestado atención en el primer y segundo intervalo de frecuencias de transmisión, obteniendo los siguientes resultados tanto para modos  $TE$  y  $TM$  para los diferentes modos.



**Figura 5.2:** Coeficiente de transmisión para los modos  $TE$  (panel superior) y los modos  $TM$  (panel inferior) para cristal fotónico con la secuencia de Fibonacci S3, construido con 600 celdas. Los diferentes colores corresponden al espectro de transmisión a temperaturas  $T = 0T_c$  (color negro),  $T = 0.4T_c$  (color azul),  $T = 0.8T_c$  (color azul claro),  $T = T_c$  (color rojo).

Con el aumento de la temperatura desde cero hasta la temperatura crítica de la transición superconductor, se observa:

- 1) La reducción en el ancho de los gaps de los modos  $TE$  y  $TM$
- 2) Un corrimiento hacia la región de menores frecuencias en la primera frecuencia de transmisión total.
- 3) Un aumento en la región permitida de transmisión.
- 4) En comparación con el arreglo periódico podemos observar una disminución en el ancho de las frecuencias de transmisión y una disminución en el ancho de frecuencias no permitidas de transmisión.

Cabe mencionar que en el trabajo de Ji-Jiang (2012) se estudia la primera banda permitida del coeficiente de transmisión para incidencia normal en sistemas multicapa dieléctrico-superconductor en arreglos tipo Fibonacci de orden superior al estudiado por nosotros, prestando especial énfasis al comportamiento de la frecuencia más baja de transmisión. De acuerdo con estos autores con estos autores, Adicionalmente, estos autores al aumentar la temperatura la primera frecuencia de transmisión total se desplaza hacia la región de menores frecuencias, lo que se corresponden con los resultados reportados en las Figuras 5.2a y 5.2c.

### 5.3. Diagrama de bandas para modos $TE$ y $TM$ en un cristal fotónico cuasi periódico

Debido a la cuasi periodicidad del sistema se puede mostrar que al aplicar el teorema de Bloch para los modos  $TE$  y  $TM$  y el método de matriz de transferencia la ecuación (4.1) sigue siendo válida pero en la forma:

$$\cos(ql_m) = \frac{1}{2} \text{Tr}(M_{\text{celda}}^{(s,p)}), \quad (5.1)$$

donde la matriz  $M_{\text{celda}}^{(s,p)}$  depende de la secuencia de Fibonacci que se esté estudiando. En particular, se consideran los siguientes casos (ver apéndice 18):

$$\text{Cuasi cristal S2, } M_{\text{celda}}^s = [M_{AB}^s M_B^{\text{hom}}(d_b) M_{BA}^s M_A^{\text{hom}}(d_a)],$$

$$\text{Cuasi cristal S3, } M_{\text{celda}}^s = [M_A^{\text{hom}}(d_a) M_{AB}^{(s,p)} M_B^{\text{hom}}(d_b) M_{BA}^{(s,p)} M_A^{\text{hom}}(d_a)],$$

Cuasi cristal S4,

$$M_{\text{celda}}^s \equiv [M_{AB}^{(s,p)} M_B^{\text{hom}}(d_b) M_{BA}^{(s,p)} M_A^{\text{hom}}(2d_a) M_{AB}^{(s,p)} M_B^{\text{hom}}(d_b) M_{BA}^{(s,p)} M_A^{\text{hom}}(d_a)].$$

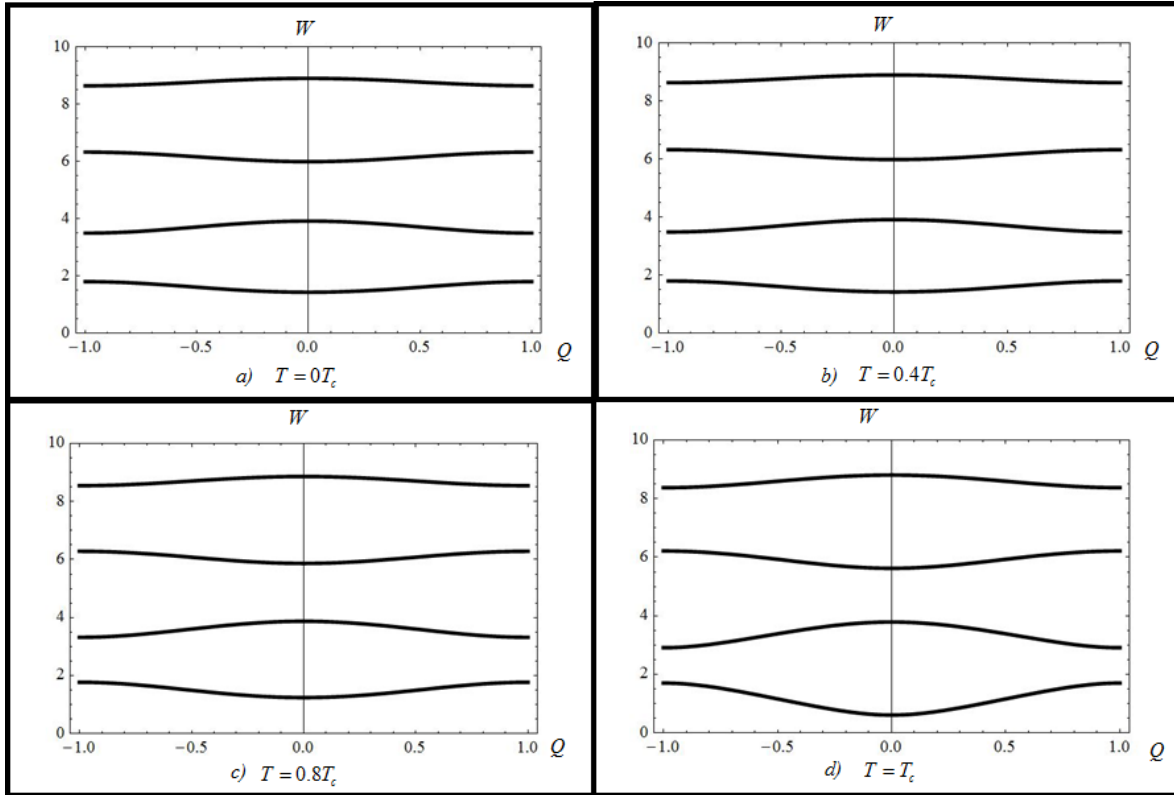
donde  $M_A^{\text{hom}}(d_a)$ ,  $M_{AB}^s$ ,  $M_B^{\text{hom}}(d_b)$ ,  $M_{BA}^s$  corresponden, respectivamente, a las siguientes matrices de transferencia: propagación a través del medio homogéneo  $A$ , transmisión del medio  $A$  al medio  $B$ , propagación a través del medio homogéneo  $B$  y transmisión del medio  $B$  al medio  $A$ .

Esta ecuación se normaliza haciendo  $Q = \frac{ql_m}{\pi}$  por lo que la ecuación a resolver toma la

$$\text{forma: } \cos(Q\pi) = \frac{1}{2} \text{Tr}(M_{\text{celda}}^{(s,p)}) \quad (5.2)$$

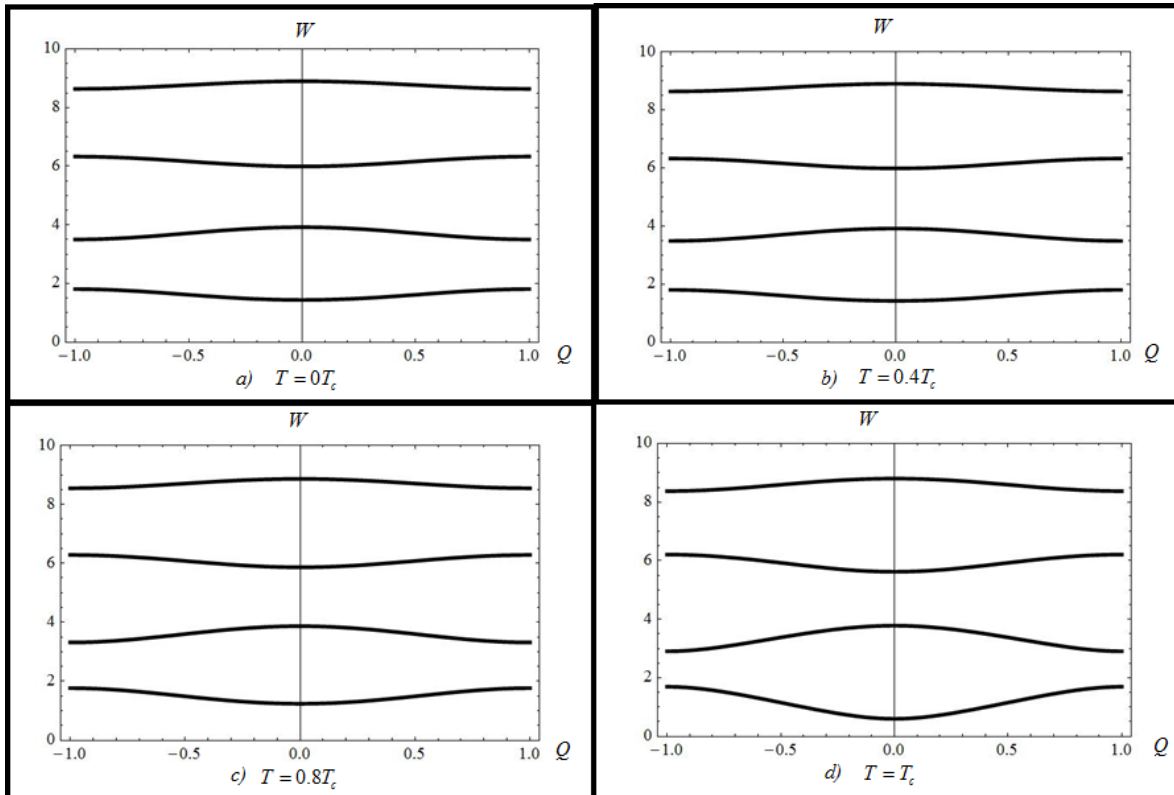
Al resolver la ecuación se obtiene el diagrama de bandas para un cristal fotónico cuasi periódico tanto para modos  $TE$  como para modos  $TM$ . Los resultados para dicho diagrama de bandas para un cristal fotónico cuasi periódico Fibonacci S3 se ilustran en las figura 5.3, para modos  $TE$ , y en las figura 5.4, para modos  $TM$ .

#### 5.4. Diagrama de bandas para modos $TE$ y $TM$ en cristal fotónico con la secuencia de Fibonacci S3



**Figura 5.3:** Diagrama de bandas del modo  $TE$  en cristal fotónico con la secuencia de Fibonacci S3 a diferentes temperaturas : a)  $T = 0T_c$ , b)  $T = 0.4T_c$ , c)  $T = 0.8T_c$ , d)  $T = T_c$ . La componente en el eje  $x$  del vector de onda normalizado es  $K_x = 0.1$





**Figura 5.4.** Diagrama de bandas para el modo  $TM$  en un cristal fotónico con la secuencia de Fibonacci S3 a diferentes temperaturas : a)  $T = 0T_c$ , b)  $T = 0.4T_c$ , c)  $T = 0.8T_c$ , d)  $T = T_c$ . La componente en el eje  $x$  del vector de onda normalizado es  $K_x = 0.1$

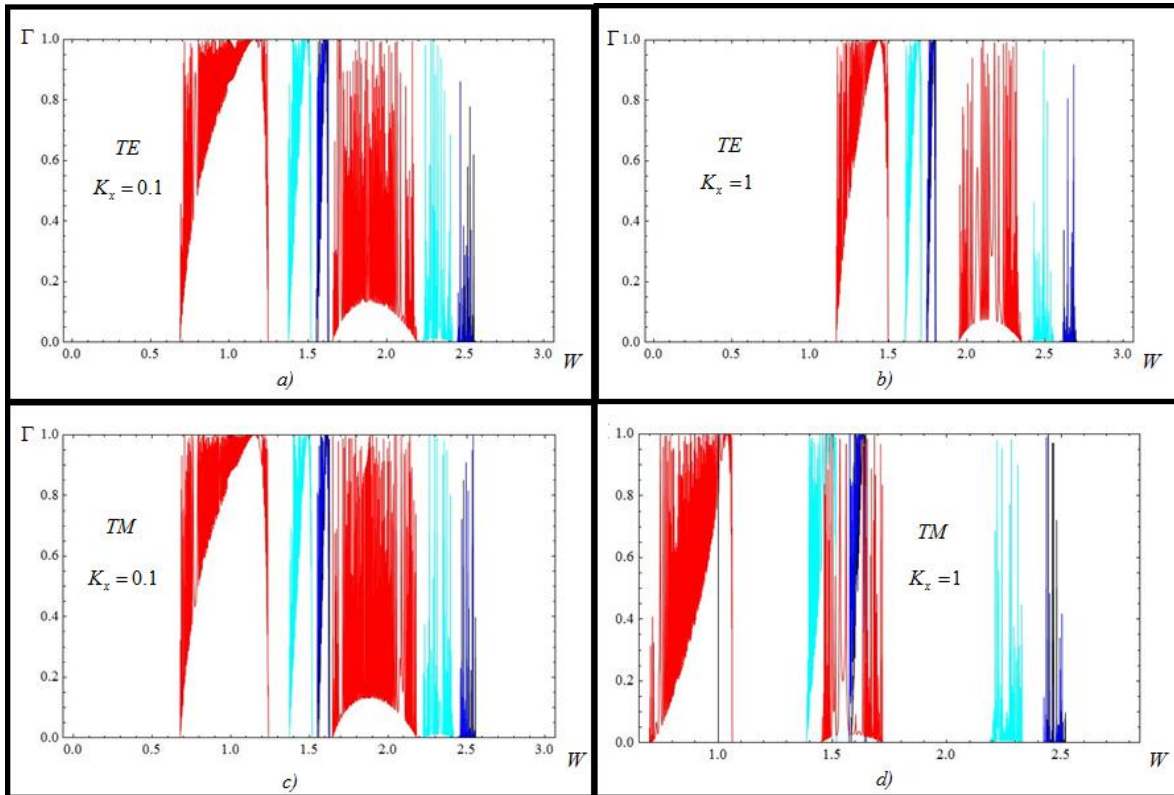
Respecto a las figuras anteriores se pueden hacer las siguientes observaciones:

- 1) En este caso se puede confirmar el desplazamiento a la región de menores frecuencias de las frecuencias iniciales de transmisión total a medida que aumenta la temperatura de la capa superconductora.
- 2) El ancho del primer gap disminuye a medida que aumenta la temperatura de la capa superconductora.
- 3) El aumento en la velocidad de grupo con el aumento de la temperatura.

Al comparar con el sistema periódico convencional, se nota que en sistema Fibonacci considerado el intervalo de frecuencias en el que existe un número dado de bandas es menor al correspondiente en el sistema periódico con dos capas por celda unitaria. Ello obedece, en parte a que la introducción de la secuencia Fibonacci incrementa el período de la celda unitaria.

### 5.5. Coeficiente de transmisión para los modos $TE$ y $TM$ en un cristal fotónico con la secuencia de Fibonacci S4.

Se ha estudiado el coeficiente de transmisión variando la componente sobre el eje  $x$  del vector de onda normalizado y hemos prestado atención al primer y segundo intervalos de frecuencias de transmisión, obteniendo los siguientes resultados tanto para modos  $TE$  y  $TM$  para los diferentes modos



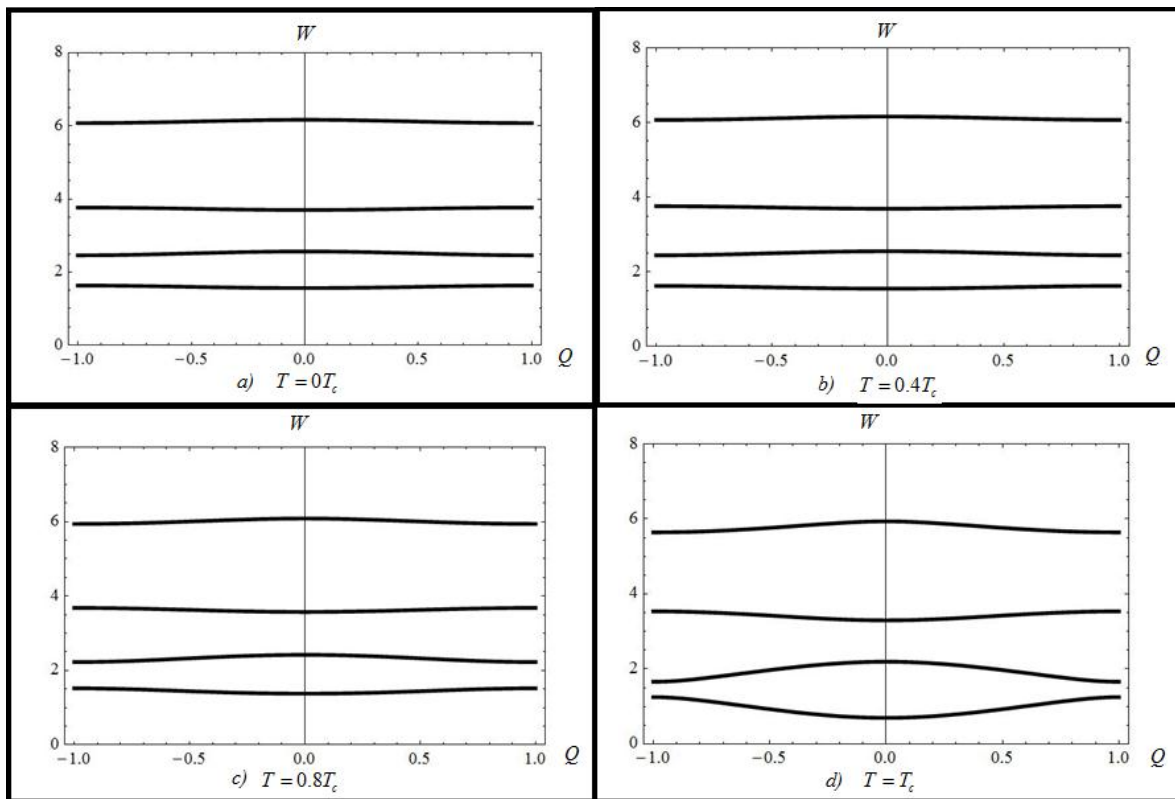
**Figura 5.5** Coeficiente de transmisión para los modos  $TE$  (panel superior) y los modos  $TM$  (panel inferior) para un cristal fotónico con la secuencia de Fibonacci S4, construido con 600 celdas. El color negro corresponde al espectro de transmisión a temperatura  $T = 0T_c$  en el cristal, El color azul corresponde al espectro de transmisión a temperatura  $T = 0.4T_c$  en el cristal, El color azul claro corresponde al espectro de transmisión a temperatura  $T = 0.8T_c$  en el cristal, El color rojo corresponde al espectro de transmisión a temperatura  $T = T_c$  en el cristal.

Con el aumento de la temperatura desde cero hasta la temperatura crítica de la transición superconductora, se observa:

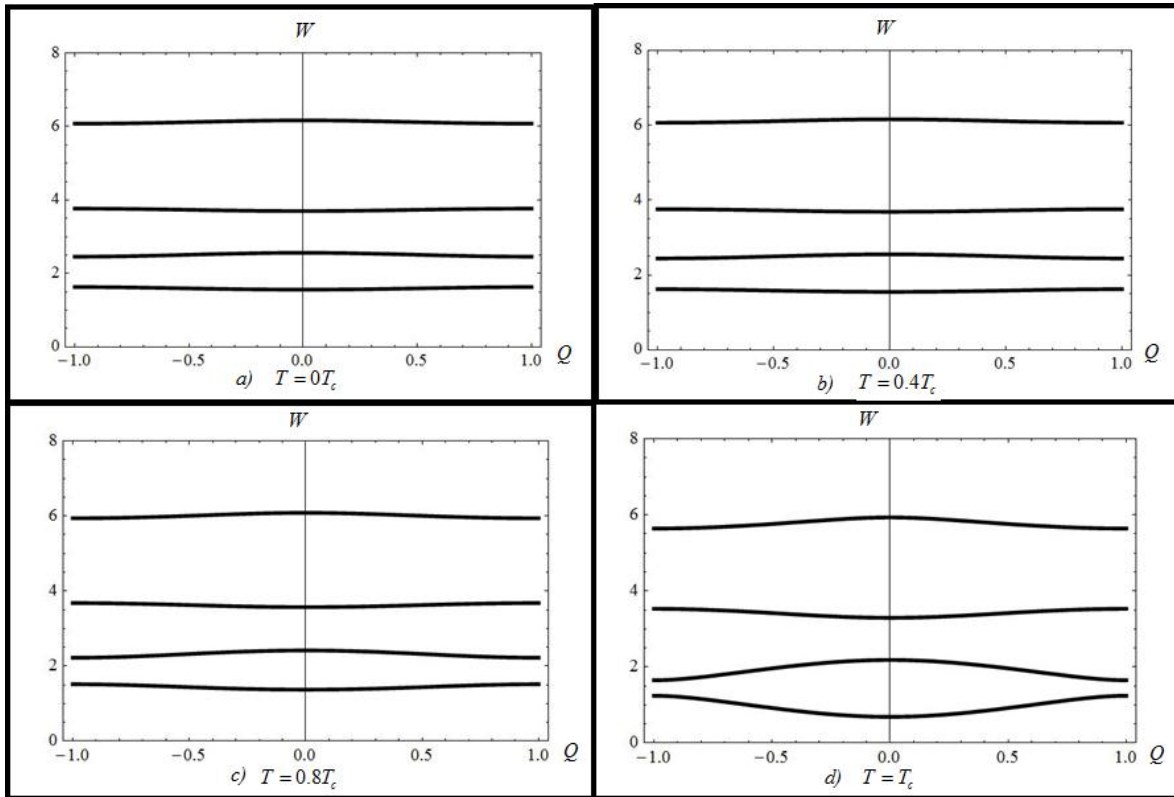
- 1) La reducción en el ancho de los gaps de los modos  $TE$  y  $TM$
- 2) Un corrimiento hacia la región de menores frecuencias en la primera frecuencia de transmisión total.
- 3) Un aumento en la región permitida de transmisión.

4) En comparación con el arreglo periódico y el arreglo tipo Fibonacci S3 podemos observar una disminución en el ancho de las frecuencias de transmisión y una disminución en el ancho de frecuencias no permitidas de transmisión.

### 5.6. Diagrama de bandas para modos $TE$ y $TM$ en cristal fotónico con la secuencia de Fibonacci S4



**Figura 5.6:** Diagrama de bandas modo  $TE$ , en cristal fotónico con la secuencia de Fibonacci S4 a diferentes temperaturas : a)  $T = 0T_c$ , b)  $T = 0.4T_c$ , c)  $T = 0.8T_c$ , d)  $T = T_c$ . La componente en el eje  $x$  del vector de onda normalizado es  $K_x = 0.1$



**Figura 5.7:** Diagrama de bandas modo  $TM$ , en cristal fotónico con la secuencia de Fibonacci S4 a diferentes temperaturas: a)  $T = 0T_c$ , b)  $T = 0.4T_c$ , c)  $T = 0.8T_c$ , d)  $T = T_c$ . La componente en el eje  $x$  del vector de onda normalizado es  $K_x = 0.1$

Respecto a las figuras anteriores se pueden hacer las siguientes observaciones:

- 1) En este caso se puede confirmar el desplazamiento a la región de menores frecuencias de las frecuencias iniciales de transmisión total a medida que aumenta la temperatura de la capa superconductora.
- 2) El ancho del primer gap disminuye a medida que aumenta la temperatura de la capa superconductora.
- 3) El aumento en la velocidad de grupo con el aumento de la temperatura.
- 4) El comportamiento de bandas planas que se ven levemente alteradas con el aumento de la temperatura, hasta cerca a la temperatura crítica donde se ven fuertemente modificadas
- 5) La aparición de las primeras bandas prohibidas y permitidas de transmisión ocurren cada vez en un intervalo de frecuencia más pequeño a medida que aumenta el orden Fibonacci de la celda del cuasicristal fotónico, esto es debido a que la posición de las bandas es inversamente proporcional a la longitud de las celda.

6) En general para los sistemas multicapa cuasiperiódicos estudiados se ha podido verificar el comportamiento observado por Ji-Jang ( (2012) Optik **123**, 986), en el cual la frecuencia mínima de transmisión de ondas electromagnéticas es sensible a la temperatura; en particular, cuando la temperatura está cerca de la temperatura crítica se observa que dicha frecuencia decrece con el incremento de la temperatura, mostrando que tanto el ancho de la banda permitida como el ancho de la banda prohibida de transmisión de ondas electromagnéticas puede ser sintonizado variando la temperatura, mostrándose así la posibilidad de usar dichos fenómenos en la construcción de dispositivos en optoelectrónica como por ejemplo filtros ópticos.

## Conclusiones y perspectivas

Se ha caracterizado el comportamiento del coeficiente de transmisión de una película superconductora inmersa en un medio dieléctrico infinito y el comportamiento del coeficiente de transmisión y los diagramas de bandas tanto para un cristal fotónico periódico como para los cuasi cristales en arreglo tipo Fibonacci  $S_3$  y  $S_4$ . Se ha analizado el comportamiento de este al variar la temperatura de la capa superconductora. Dicho análisis ha permitido establecer que la variación de la temperatura permite modificar las frecuencias en las que ocurren la máxima transmisión de energía de la onda incidente, así como las posiciones y los anchos de los intervalos de transmisión de energía, además de la fuerte dispersión en la primera banda de transmisión debido al aumento de la temperatura en el sistema, lo cual abre posibilidades al uso de estos dispositivos como filtros o reflectores que se podrían adaptar a sistemas que utilicen la luz y fibras ópticas que sean más eficientes que las actuales.

Los resultados reportados se pueden ampliar explorando el comportamiento de más secuencias tipo Fibonacci y de otro tipo de secuencias (Thue-Morse, Ruedin-Shapiro, etc) además de incluir otros materiales con distintas características de respuesta electromagnética.

Se puede extender este estudio a sistemas en el cual el dieléctrico sea reemplazado por un metal, por un semiconductor o por un metamaterial, entre otros. Así mismo, se puede extender el estudio a arreglos semiinfinitos simétricos en el cual dos cristales fotónicos Fibonacci semiinfinitos con materiales superconductores están separados por un material dieléctrico convencional u otro tipo de material. También se puede extender el formalismo de matriz de transferencia para arreglos cuasiperiódicos dieléctrico-superconductor tipo Fibonacci en geometrías cilíndricas tipo fibra óptica. En efecto, Zhong (2014) ha extendido el estudio de sistemas multicapas periódicos dieléctrico-superconductor a sistemas cilíndricos los cuales simulan el comportamiento de fibras ópticas; en dichos estudios se ha mostrado el aumento en la eficiencia de dichas fibras en comparación con las fibras ópticas tradicionales, buscando de esta forma la reducción en el área efectiva del láser y la disminución de los efectos no lineales tales como dispersión de Raman y dispersión de Brillouin, ya que una disminución del área efectiva llevaría a la reducción de pérdidas, pero al aumento de los efectos no lineales. En nuestro caso existe la posibilidad de extender dicho trabajo para fibras ópticas cuasiperiódicas dieléctrico-superconductor en arreglos tipo Fibonacci usando el formalismo del método de matriz de transferencia pero ya para el caso de la geometría cilíndrica.

En el espíritu de los trabajos de Chung-An Hu ( 2013) y Hui-Chang Hung ( 2011), se pueden considerar sistemas multicapas binarios cuasiperiódicos tipo Fibonacci como el de nuestro tema de estudio y examinar el efecto de introducir capas defectuosas defecto en dichos sistemas con diferentes características ópticas (semiconductor, dieléctrico o metamaterial, entre otros). Se puede, así mismo, estudiar el comportamiento fractal o de autosimilaridad en diversos arreglos cuasiperiódicos con capas superconductoras, tal como se ha reportado en el trabajo preliminar de Mauriz P.W (2009) para arreglos Fibonacci con las secuencias  $S_{16}$  y  $S_{22}$ .

.

## Apéndice 1

El sistema de ecuaciones:

$$E_1^+ + E_1^- = \frac{1}{f_2} E_2^+ + f_2 E_2^-, \quad -\frac{k_{1z}}{\mu_1} E_1^+ + \frac{k_{1z}}{\mu_1} E_1^- = -\frac{k_{2z}}{\mu_2} \frac{1}{f_2} E_2^+ + \frac{k_{2z}}{\mu_2} f_2 E_2^-$$

se reescribe matricialmente de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{k_{1z}}{\mu_1} & \frac{k_{1z}}{\mu_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{f_2} & f_2 \\ -\frac{k_{2z}}{\mu_2} & \frac{k_{2z} f_2}{\mu_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2^+ \\ E_2^- \end{pmatrix}.$$

De aquí se obtiene:

$$\begin{pmatrix} E_2^+ \\ E_2^- \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{f_2} & f_2 \\ -\frac{k_{2z}}{\mu_2} & \frac{k_{2z} f_2}{\mu_2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{k_{1z}}{\mu_1} & \frac{k_{1z}}{\mu_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{pmatrix},$$

dando como resultado:

$$\begin{pmatrix} E_2^+ \\ E_2^- \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{f_2}{2} + \frac{\mu_2 k_{1z} f_2}{2\mu_1 k_{2z}} & \frac{f_2}{2} - \frac{\mu_2 k_{1z} f_2}{2\mu_1 k_{2z}} \\ \frac{f_2}{2} - \frac{\mu_2 k_{1z} f_2}{2\mu_1 k_{2z}} & \frac{f_2}{2} + \frac{\mu_2 k_{1z} f_2}{2\mu_1 k_{2z}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{pmatrix}$$

Es decir,

$$\begin{pmatrix} E_2^+ \\ E_2^- \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} f_2 & 0 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} & 1 - \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} \\ 1 - \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} & 1 + \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{pmatrix}$$

En forma similar se obtienen las amplitudes de los campos eléctricos en el medio 3 en términos de las amplitudes de los campos en el medio 2.



## Apéndice 2

Se trata de calcular los elementos matriciales de  $\begin{pmatrix} M_{11}^s & M_{12}^s \\ M_{21}^s & M_{22}^s \end{pmatrix}$ .

$$\begin{pmatrix} M_{11}^s & M_{12}^s \\ M_{21}^s & M_{22}^s \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\mu_3 k_{2z}}{\mu_2 k_{3z}} & 1 - \frac{\mu_3 k_{2z}}{\mu_2 k_{3z}} \\ \frac{\mu_3 k_{2z}}{\mu_2 k_{3z}} & \frac{\mu_3 k_{2z}}{\mu_2 k_{3z}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{f_2^2} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} & 1 - \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} \\ 1 - \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} & 1 + \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} M_{11}^s & M_{12}^s \\ M_{21}^s & M_{22}^s \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\mu_3 k_{2z}}{\mu_2 k_{3z}} & 1 - \frac{\mu_3 k_{2z}}{\mu_2 k_{3z}} \\ \frac{\mu_3 k_{2z}}{\mu_2 k_{3z}} & \frac{\mu_3 k_{2z}}{\mu_2 k_{3z}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2^2 \left( 1 + \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} \right) & f_2^2 \left( 1 - \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} \right) \\ \frac{1}{f_2^2} \left( 1 - \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} \right) & \frac{1}{f_2^2} \left( 1 + \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} \right) \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{aligned} M_{11}^s &= \frac{1}{4} \left[ \left( 1 + \frac{\mu_3 k_{2z}}{\mu_2 k_{3z}} \right) f_2^2 \left( 1 + \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} \right) + \left( 1 + \frac{\mu_3 k_{2z}}{\mu_2 k_{3z}} \right) \frac{1}{f_2^2} \left( 1 - \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} \right) \right] \\ M_{12}^s &= \frac{1}{4} \left[ \left( 1 + \frac{\mu_3 k_{2z}}{\mu_2 k_{3z}} \right) f_2^2 \left( 1 - \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} \right) + \left( 1 - \frac{\mu_3 k_{2z}}{\mu_2 k_{3z}} \right) \frac{1}{f_2^2} \left( 1 + \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} \right) \right] \\ M_{21}^s &= \frac{1}{4} \left[ \left( 1 - \frac{\mu_3 k_{2z}}{\mu_2 k_{3z}} \right) f_2^2 \left( 1 + \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} \right) + \left( 1 + \frac{\mu_3 k_{2z}}{\mu_2 k_{3z}} \right) \frac{1}{f_2^2} \left( 1 - \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} \right) \right] \\ M_{22}^s &= \frac{1}{4} \left[ \left( 1 - \frac{\mu_3 k_{2z}}{\mu_2 k_{3z}} \right) f_2^2 \left( 1 - \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} \right) + \left( 1 - \frac{\mu_3 k_{2z}}{\mu_2 k_{3z}} \right) \frac{1}{f_2^2} \left( 1 + \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} \right) \right] \rightarrow \end{aligned}$$

Nótese que

$M_{12}^s$  se obtiene de  $M_{11}^s$  haciendo  $k_{1z} \rightarrow -k_{1z}$ .

$M_{21}^s$  se obtiene de  $M_{11}^s$  haciendo  $k_{3z} \rightarrow -k_{3z}$ .

$M_{22}^s$  se obtiene de  $M_{21}^s$  haciendo  $k_{1z} \rightarrow -k_{1z}$ .

Por lo tanto, es suficiente calcular  $M_{11}^s$ .

Considérese el elemento  $M_{11}^s = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + \frac{\mu_3 k_{1z}}{\mu_1 k_{3z}} \right) \frac{1}{2} \left( f_2^2 + \frac{1}{f_2^2} \right) + \left( \frac{\mu_3 k_{2z}}{\mu_2 k_{3z}} + \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} \right) \frac{1}{2} \left( f_2^2 - \frac{1}{f_2^2} \right) \right]$ .

Teniendo en cuenta que  $\frac{1}{2} \left( f_2^2 + \frac{1}{f_2^2} \right) = \cos k_{2z} l$ ,  $\frac{1}{2} \left( f_2^2 - \frac{1}{f_2^2} \right) = i \sin k_{2z} l$ , se tiene

$$M_{11}^s = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + \frac{\mu_3 k_{1z}}{\mu_1 k_{3z}} \right) \cos k_{2z} l + i \left( \frac{\mu_3 k_{2z}}{\mu_2 k_{3z}} + \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} \right) \sin k_{2z} l \right].$$

$M_{12}^s$  se obtiene de  $M_{11}^s$  haciendo  $k_{1z} \rightarrow -k_{1z}$ . Así,

$$M_{12}^s = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 - \frac{\mu_3 k_{1z}}{\mu_1 k_{3z}} \right) \cos k_{2z} l + i \left( \frac{\mu_3 k_{2z}}{\mu_2 k_{3z}} - \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} \right) \sin k_{2z} l \right].$$

$M_{21}^s$  se obtiene de  $M_{11}^s$  haciendo  $k_{3z} \rightarrow -k_{3z}$ . Así,

$$M_{21}^s = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 - \frac{\mu_3 k_{1z}}{\mu_1 k_{3z}} \right) \cos k_{2z} l - i \left( \frac{\mu_3 k_{2z}}{\mu_2 k_{3z}} - \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} \right) \sin k_{2z} l \right].$$

$M_{22}^s$  se obtiene de  $M_{21}^s$  haciendo  $k_{1z} \rightarrow -k_{1z}$ . Así,

$$M_{22}^s = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + \frac{\mu_3 k_{1z}}{\mu_1 k_{3z}} \right) \cos k_{2z} l - i \left( \frac{\mu_3 k_{2z}}{\mu_2 k_{3z}} + \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} \right) \sin k_{2z} l \right].$$

Introduciendo  $z_{31}^s = \frac{\mu_3 k_{1z}}{\mu_1 k_{3z}}$ ,  $z_{21}^s = \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}}$  se obtiene:

$$M_{11}^s = \frac{1}{2} [1 + z_{31}^s] \cos k_{2z} l + \frac{i}{2} [z_{32}^s + z_{21}^s] \sin k_{2z} l, \quad M_{21}^s = \frac{1}{2} [1 - z_{31}^s] \cos k_{2z} l + \frac{i}{2} [z_{32}^s - z_{21}^s] \sin k_{2z} l,$$

$$M_{21}^s = \frac{1}{2} [1 - z_{31}^s] \cos k_{2z} l - \frac{i}{2} [z_{32}^s - z_{21}^s] \sin k_{2z} l, \quad M_{22}^s = \frac{1}{2} [1 + z_{31}^s] \cos k_{2z} l - \frac{i}{2} [z_{32}^s + z_{21}^s] \sin k_{2z} l.$$

### Apéndice 3

$$\text{En } \begin{pmatrix} E_3^+ \\ E_3^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11}^s & M_{12}^s \\ M_{21}^s & M_{22}^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{pmatrix} \text{ se hace } E_3^- = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} E_3^+ \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11}^s & M_{12}^s \\ M_{21}^s & M_{22}^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow E_3^+ = M_{11}^s E_1^+ + M_{12}^s E_1^- \quad 0 = M_{21}^s E_1^+ + M_{22}^s E_1^-$$

$$\text{De } 0 = M_{21}^s E_1^+ + M_{22}^s E_1^- \text{ se obtiene } E_1^- = -\frac{M_{21}^s}{M_{22}^s} E_1^+.$$

$$\text{Reemplazando } E_1^- = -\frac{M_{21}^s}{M_{22}^s} E_1^+ \text{ en } E_3^+ = M_{11}^s E_1^+ + M_{12}^s E_1^- \text{ se tiene}$$

$$E_3^+ = M_{11}^s E_1^+ - \frac{M_{12}^s M_{21}^s}{M_{22}^s} E_1^+ \rightarrow E_3^+ = \left( M_{11}^s - \frac{M_{12}^s M_{21}^s}{M_{22}^s} \right) E_1^+ \rightarrow E_3^+ = \left( \frac{M_{11}^s M_{22}^s - M_{12}^s M_{21}^s}{M_{22}^s} \right) E_1^+ \rightarrow$$

$$E_3^+ = \frac{\det M^{s,p}}{M_{22}^{s,p}} E_1^+.$$

Definiendo las amplitudes de reflexión y transmisión de las ondas  $TM$ ,  $r_s = -\frac{M_{21}^s}{M_{22}^s}$ ,

$$t_s = \frac{\det M^s}{M_{22}^s}, \text{ se tiene}$$

$$E_1^- = r_s E_1^+, \quad E_3^+ = t_s E_1^+.$$

#### Apéndice 4.

Interesa la componente  $z$  del vector de Poynting

$$\langle S \rangle = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & E_y & 0 \\ H_x^* & 0 & H_z^* \end{vmatrix} \rightarrow \langle S_z \rangle = -\frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}(E_y H_x^*).$$

Para ondas TE, el campo eléctrico está polarizado en la dirección  $y$ .

*Onda incidente.* Los campos tienen la forma

$$\mathbf{E}_{inc} = E_1^+ \exp \left[ i \left( kx + k_{1z} \left( z + \frac{l}{2} \right) \right) \right] \mathbf{e}_y, \quad H_{incx}^* = -\frac{k_{1z}^*}{\mu_1 \omega} E_1^{+*} \exp \left[ -i \left( kx + k_{1z} \left( z + \frac{l}{2} \right) \right) \right].$$

En la superficie  $z = -\frac{l}{2}$  se tiene

$$\mathbf{E}_{inc} = E_1^+ \exp(ikx) \mathbf{e}_y, \quad H_{1x}^* = -c \frac{k_{1z}^*}{\mu_1 \omega} E_1^{+*} \exp(-ikx).$$

Para la componente  $z$  el vector de Poynting de la onda incidente se tiene entonces

$$\langle S_{zinc} \rangle = -\frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}(E_{yinc} H_{incx}^*) = -\frac{c^2}{8\pi} \operatorname{Re} \frac{k_{1z}^*}{\mu_1 \omega} |E_1^+|^2.$$

De manera análoga, para la componente  $z$  el vector de Poynting de la onda transmitida se tiene

$$\langle S_{ztrans} \rangle = -\frac{c^2}{8\pi} \operatorname{Re} \frac{k_{3z}^*}{\mu_3 \omega} |E_3^+|^2.$$

Así mismo, para la onda reflejada se tiene

$$\langle S_{zrefl} \rangle = +\frac{c^2}{8\pi} \operatorname{Re} \frac{k_{1z}^*}{\mu_1 \omega} |E_1^-|^2.$$

Los coeficientes de reflexión y transmisión (que indican el porcentaje de energía reflejada y transmitida) de las ondas TE-polarizadas se definen como

$$R_s = \frac{-\langle S_{z refl} \rangle}{\langle S_{z inc} \rangle}, T_s = \frac{\langle S_{z trans} \rangle}{\langle S_{z inc} \rangle}.$$

Los coeficientes de reflexión y transmisión (que indican el porcentaje de energía reflejada y transmitida) de las ondas TE-polarizadas son

$$R_s = |r_s|^2, T_s = \frac{\text{Re} k_{3z} \mu_1}{\text{Re} k_{1z} \mu_3} |t_s|^2.$$

## Apéndice 5

Se parte de

$$M_{22}^s = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + \frac{\mu_3 k_{1z}}{\mu_1 k_{3z}} \right) \cos k_{2z} l - i \left( \frac{\mu_3 k_{2z}}{\mu_2 k_{3z}} + \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} \right) \sin k_{2z} l \right].$$

Se reemplaza  $k_{(1,3)z} = i\kappa_{(1,3)z}$  en la anterior expresión

$$M_{22}^s = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + \frac{\mu_3 i\kappa_{1z}}{\mu_1 i\kappa_{3z}} \right) \cos k_{2z} l - i \left( \frac{\mu_3 k_{2z}}{\mu_2 i\kappa_{3z}} + \frac{\mu_2 i\kappa_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} \right) \sin k_{2z} l \right].$$

## Apéndice 6

Se parte de

$$M_{11}^s = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + \frac{\mu_3 k_{1z}}{\mu_1 k_{3z}} \right) \cos k_{2z} l + i \left( \frac{\mu_3 k_{2z}}{\mu_2 k_{3z}} + \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} \right) \sin k_{2z} l \right].$$

Se tiene en cuenta que  $M_{22}^s = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + \frac{\mu_3 k_{1z}}{\mu_1 k_{3z}} \right) \cos k_{2z} l - i \left( \frac{\mu_3 k_{2z}}{\mu_2 k_{3z}} + \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} \right) \sin k_{2z} l \right] = 0$

Por lo tanto

$$M_{11}^s = \left( 1 + \frac{\mu_3 k_{1z}}{\mu_1 k_{3z}} \right) \cos k_{2z} l.$$

Se reemplaza  $\kappa_{(1,3)z} = -ik_{(1,3)z}$  en la anterior expresión

$$M_{11}^s = \left( 1 + \frac{\mu_3 \kappa_{1z}}{\mu_1 \kappa_{3z}} \right) \cos k_{2z} l.$$

## Apéndice 7

El caso particular  $\varepsilon_1 = \varepsilon_3$ ,  $\mu_1 = \mu_3$  la relación

$$\left(1 + \frac{\mu_3 \mathcal{K}_{1z}}{\mu_1 \mathcal{K}_{3z}}\right) \cos k_{2z} l - \left(\frac{\mu_3 k_{2z}}{\mu_2 \mathcal{K}_{3z}} - \frac{\mu_2 \mathcal{K}_{1z}}{\mu_1 k_{2z}}\right) \sin k_{2z} l = 0$$

se transforma en

$$\cos k_{2z} l - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_1 k_{2z}}{\mu_2 \mathcal{K}_{1z}} - \frac{\mu_2 \mathcal{K}_{1z}}{\mu_1 k_{2z}}\right) \sin k_{2z} l = 0.$$

O bien

$$\cot k_{2z} l = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_1 k_{2z}}{\mu_2 \mathcal{K}_{1z}} - \frac{\mu_2 \mathcal{K}_{1z}}{\mu_1 k_{2z}}\right).$$

O bien, introduciendo  $\tilde{z}_{12}^s = \frac{\mu_1 k_{2z}}{\mu_2 \mathcal{K}_{1z}}$  se tiene

$$\cot k_{2z} l = \frac{1}{2} \left(\tilde{z}_{12}^{(s,p)} - \frac{1}{\tilde{z}_{12}^{(s,p)}}\right).$$



## Apéndice 8

Utilizando la identidad  $\cot k_{2z}l = \frac{1}{2} \left[ \cot \frac{k_{2z}l}{2} - \tan \frac{k_{2z}l}{2} \right]$ , para la ecuación

$$\cot k_{2z}l = \frac{1}{2} \left( \tilde{z}_{12}^{(s,p)} - \frac{1}{\tilde{z}_{12}^{(s,p)}} \right)$$

se tiene

$$\frac{1}{2} \left[ \cot \frac{k_{2z}l}{2} - \tan \frac{k_{2z}l}{2} \right] = \frac{1}{2} \left( \tilde{z}_{12}^{(s,p)} - \frac{1}{\tilde{z}_{12}^{(s,p)}} \right).$$

Es decir,

$$\cot^2 \frac{k_{2z}l}{2} - 1 = \left( \tilde{z}_{12}^{(s,p)} - \frac{1}{\tilde{z}_{12}^{(s,p)}} \right) \cot \frac{k_{2z}l}{2}.$$

O bien

$$\cot^2 \frac{k_{2z}l}{2} - \left( \tilde{z}_{12}^{(s,p)} - \frac{1}{\tilde{z}_{12}^{(s,p)}} \right) \cot \frac{k_{2z}l}{2} - 1 = 0.$$

## Apéndice 9

Se trata de resolver la ecuación  $\cot^2 \frac{k_{2z}l}{2} - \left( \tilde{z}_{12}^{(s,p)} - \frac{1}{\tilde{z}_{12}^{(s,p)}} \right) \cot \frac{k_{2z}l}{2} - 1 = 0$ .

Sean  $x = \cot \frac{k_{2z}l}{2}$ ,  $z = \tilde{z}_{12}^{(s,p)}$ :

$$x^2 - \left( z - \frac{1}{z} \right) x - 1 = 0 \rightarrow x_{\pm} = \frac{1}{2} \left[ \left( z - \frac{1}{z} \right) \pm \sqrt{\left( z - \frac{1}{z} \right)^2 + 4} \right] \rightarrow x_{\pm} = \frac{1}{2} \left[ \left( z - \frac{1}{z} \right) \pm \sqrt{\left( z + \frac{1}{z} \right)^2} \right]$$

$$x_{\pm} = \frac{1}{2} \left[ \left( z - \frac{1}{z} \right) \pm \left( z + \frac{1}{z} \right) \right] \rightarrow x_{+} = z, \quad x_{-} = -\frac{1}{z} \rightarrow \cot \frac{k_{2z}l}{2} = \tilde{z}_{12}^{(s,p)}, \quad \cot \frac{k_{2z}l}{2} = -\frac{1}{\tilde{z}_{12}^{(s,p)}} \rightarrow$$

$$\cot \frac{k_{2z}l}{2} = \tilde{z}_{12}^{(s,p)}, \quad \tan \frac{k_{2z}l}{2} = -\tilde{z}_{12}^{(s,p)}.$$

## Apéndice 10

Se parte de la expresión 
$$\begin{pmatrix} E_2^+ \\ E_2^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{f_2} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} & 1 - \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} \\ 1 - \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} & 1 + \frac{\mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{pmatrix}$$

Se escribe como

$$\begin{pmatrix} E_2^+ \\ E_2^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{f_2} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + i \frac{\mu_2 \kappa_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} & 1 - i \frac{\mu_2 \kappa_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} \\ 1 - i \frac{\mu_2 \kappa_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} & 1 + i \frac{\mu_2 \kappa_{1z}}{\mu_1 k_{2z}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{pmatrix}.$$

Se reemplaza  $k_{(1,3)z} = i\kappa_{(1,3)z}$ :

$$\begin{pmatrix} E_2^+ \\ E_2^- \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} f_2 \left( 1 + \frac{\mu_2 i \kappa_{1z}}{k_{2z} \mu_1} \right) & f_2 \left( 1 - \frac{\mu_2 i \kappa_{1z}}{k_{2z} \mu_1} \right) \\ \frac{1}{f_2} \left( 1 - \frac{\mu_2 i \kappa_{1z}}{k_{2z} \mu_1} \right) & \frac{1}{f_2} \left( 1 + \frac{\mu_2 i \kappa_{1z}}{k_{2z} \mu_1} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} E_2^+ \\ E_2^- \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} f_2 \left( 1 + \frac{\mu_2 i \kappa_{1z}}{k_{2z} \mu_1} \right) & f_2 \left( 1 - \frac{\mu_2 i \kappa_{1z}}{k_{2z} \mu_1} \right) \\ \frac{1}{f_2} \left( 1 - \frac{\mu_2 i \kappa_{1z}}{k_{2z} \mu_1} \right) & \frac{1}{f_2} \left( 1 + \frac{\mu_2 i \kappa_{1z}}{k_{2z} \mu_1} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ E_1^- \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$E_2^+ = \frac{1}{2} f_2 \left( 1 - \frac{\mu_2 i \kappa_{1z}}{k_{2z} \mu_1} \right) E_1^-, \quad E_2^- = \frac{1}{2} \frac{1}{f_2} \left( 1 + \frac{\mu_2 i \kappa_{1z}}{k_{2z} \mu_1} \right)$$

$$\frac{E_2^+}{E_2^-} = f_2^2 \frac{\left( 1 - i \frac{\mu_2 \kappa_{1z}}{k_{2z} \mu_1} \right)}{\left( 1 + i \frac{\mu_2 \kappa_{1z}}{k_{2z} \mu_1} \right)} = f_2^2 \frac{\left( \frac{\mu_1 k_{2z} - i}{\mu_2 \kappa_{1z}} \right)}{\left( \frac{\mu_1 k_{2z} + i}{\mu_2 \kappa_{1z}} \right)}$$

Introduciendo  $\tilde{z}_{12}^s = \frac{\mu_1 k_{2z}}{\mu_2 \kappa_{1z}}$  se tiene

$$\frac{E_2^+}{E_2^-} = f_2^2 \frac{(\tilde{z}_{12}^s - i)}{(\tilde{z}_{12}^s + i)}.$$

## Apéndice 11

Modo  $\cot \frac{k_{2z}l}{2} = \tilde{z}_{12}^{(s,p)}$ . Se reemplaza  $\tilde{z}_{12}^{(s,p)} = \cot \frac{k_{2z}l}{2}$  en  $\frac{E_2^+}{E_2^-} = f_2^2 \frac{(\tilde{z}_{12}^s - i)}{(\tilde{z}_{12}^s + i)}$ .

$$\text{Se tiene } \frac{E_2^+}{E_2^-} = f_2^2 \frac{(\tilde{z}_{12}^s - i)}{(\tilde{z}_{12}^s + i)} \rightarrow \frac{E_2^+}{E_2^-} = f_2^2 \frac{\left( \cos \frac{k_{2z}l}{2} - i \sin \frac{k_{2z}l}{2} \right)}{\left( \cos \frac{k_{2z}l}{2} + i \sin \frac{k_{2z}l}{2} \right)}$$

$$\rightarrow \frac{E_2^+}{E_2^-} = f_2^2 \frac{\exp\left(-i \frac{k_{2z}l}{2}\right)}{\exp\left(i \frac{k_{2z}l}{2}\right)} \rightarrow \text{recordando que } f_2 = \exp\left(i \frac{k_{2z}l}{2}\right)$$

$$\frac{E_2^+}{E_2^-} = 1 \rightarrow$$

En este caso el campo  $E_2 = E_2^+ \exp[i(kx + k_{2z}z)] + E_2^- \exp[i(kx - k_{2z}z)]$  se convierte en

$$E_2 = E_2^+ \exp(ikx) [\exp(ik_{2z}z) + \exp(-ik_{2z}z)] = 2E_2^+ \exp(ikx) \cos(ik_{2z}z) \rightarrow$$

Modo  $\tan \frac{k_{2z}l}{2} = -\tilde{z}_{12}^{(s,p)}$ .

Se tiene  $\frac{E_2^+}{E_2^-} = f_2^2 \frac{(\tilde{z}_{12}^s - i)}{(\tilde{z}_{12}^s + i)} \rightarrow \frac{E_2^+}{E_2^-} = f_2^2 \frac{\left(-\tan \frac{k_{2z}l}{2} - i\right)}{\left(-\tan \frac{k_{2z}l}{2} + i\right)} \rightarrow \frac{E_2^+}{E_2^-} = f_2^2 \frac{\left(-\sin \frac{k_{2z}l}{2} - i \cos \frac{k_{2z}l}{2}\right)}{\left(-\sin \frac{k_{2z}l}{2} + i \cos \frac{k_{2z}l}{2}\right)}$

$\rightarrow \frac{E_2^+}{E_2^-} = f_2^2 \frac{\left(-i \sin \frac{k_{2z}l}{2} + \cos \frac{k_{2z}l}{2}\right)}{\left(-i \sin \frac{k_{2z}l}{2} - \cos \frac{k_{2z}l}{2}\right)} \rightarrow \frac{E_2^+}{E_2^-} = -f_2^2 \frac{\left(\cos \frac{k_{2z}l}{2} - i \sin \frac{k_{2z}l}{2}\right)}{\left(\cos \frac{k_{2z}l}{2} + i \sin \frac{k_{2z}l}{2}\right)}$

$\frac{E_2^+}{E_2^-} = -f_2^2 \frac{\exp\left(-i \frac{k_{2z}l}{2}\right)}{\exp\left(i \frac{k_{2z}l}{2}\right)}$

$\rightarrow \rightarrow$  recordando que  $f_2 = \exp\left(i \frac{k_{2z}l}{2}\right)$

$\frac{E_2^+}{E_2^-} = -1 \rightarrow$

En este caso el campo  $E_2 = E_2^+ \exp[i(kx + k_{2z}z)] + E_2^- \exp[i(kx - k_{2z}z)]$  se convierte en

$E_2 = E_2^+ \exp(ikx) [\exp(ik_{2z}z) - \exp(-ik_{2z}z)] = 2iE_2^+ \exp(ikx) \sin(ik_{2z}z) \rightarrow$

## Apéndice 12

Puntos de arranque modos guiados . Se evalúan las leyes de dispersión para  $\kappa_{1z} = 0$  .

Modo simétrico (en fase)	Modo antisimétrico (en oposición de fase)
$\cot \frac{k_{2z}l}{2} = \frac{\mu_1 k_{2z}}{\mu_2 \kappa_{1z}} \rightarrow \tan \frac{k_{2z}l}{2} = \frac{\mu_2 \kappa_{1z}}{\mu_1 k_{2z}}$ <p>Si se tiene <math>\tan \frac{k_{2z}l}{2} \Big _{\kappa_{1z}=0} = 0 \rightarrow</math></p> $\tan \frac{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} [\varepsilon_2(\omega)\mu_2 - \varepsilon_1\mu_1]} l}{2} = 0 \rightarrow$ $\frac{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} [\varepsilon_2(\omega)\mu_2 - \varepsilon_1\mu_1]} l}{2} = n\pi \rightarrow$ $\frac{\omega^2}{c^2} [\varepsilon_2(\omega)\mu_2 - \varepsilon_1\mu_1] = \left( \frac{2n\pi}{l} \right)^2$ $\omega = \frac{c}{l} \sqrt{\frac{\alpha + (2n\pi)^2}{\varepsilon_{2\infty} - \varepsilon_1}}$	$\tan \frac{k_{2z}l}{2} = -\frac{\mu_1 k_{2z}}{\mu_2 \kappa_{1z}} \rightarrow \cot \frac{k_{2z}l}{2} = \frac{\mu_2 \kappa_{1z}}{\mu_1 k_{2z}}$ $\frac{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} [\varepsilon_2(\omega)\mu_2 - \varepsilon_1\mu_1]} l}{2} = \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi \rightarrow$ $\frac{\omega^2}{c^2} [\varepsilon_2(\omega)\mu_2 - \varepsilon_1\mu_1] = \left( \frac{(2n+1)\pi}{l} \right)^2$ $\omega = \frac{c}{l} \sqrt{\frac{\alpha + [(2n+1)\pi]^2}{\varepsilon_{2\infty} - \varepsilon_1}}$

Para evaluación numérica

$$W^2 [\varepsilon_2(W)\mu_2 - \varepsilon_1\mu_1] = (2n)^2 \left( \frac{\pi}{\frac{\omega_{pl}}{c} l} \right)^2 \rightarrow W^2 [\varepsilon_2(W)\mu_2 - \varepsilon_1\mu_1] = (2n)^2 \left( \frac{\pi}{W_{pl}} \right)^2$$

$$\text{con } \varepsilon(\omega) = \varepsilon_\infty - \frac{1}{W^2} \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^4 \right] - \frac{1}{W^2 + \gamma_1^2} \left( \frac{T}{T_c} \right)^4$$

### Apéndice 13

Se parte de  $\cot \frac{k_{2z}l}{2} = \frac{\mu_1 k_{2z}}{\mu_2 \kappa_{1z}} \rightarrow k_{2z} \tan \frac{k_{2z}l}{2} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \kappa_{1z}$  y se deriva con respecto a  $k_x$ :

$$\frac{\partial}{\partial k_x} \left[ k_{2z} \tan \frac{k_{2z}l}{2} \right] = \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\partial}{\partial k_x} [\kappa_{1z}] \rightarrow \frac{\partial k_{2z}}{\partial k_x} \tan \frac{k_{2z}l}{2} + k_{2z} \frac{\partial}{\partial k_x} \tan \frac{k_{2z}l}{2} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\partial \kappa_{1z}}{\partial k_x} \rightarrow$$

$$\frac{\partial k_{2z}}{\partial k_x} \tan \frac{k_{2z}l}{2} + \frac{k_{2z}l}{2} \sec^2 \frac{k_{2z}l}{2} \frac{\partial k_{2z}}{\partial k_x} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\partial \kappa_{1z}}{\partial k_x} \rightarrow \frac{\partial k_{2z}}{\partial k_x} \left( \tan \frac{k_{2z}l}{2} + k_{2z} \frac{l}{2} \sec^2 \frac{k_{2z}l}{2} \right) = \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\partial \kappa_{1z}}{\partial k_x}$$

$$\text{Pero } \frac{\partial k_{2z}}{\partial k_x} = \frac{\frac{\omega}{c^2} \varepsilon_2 \mu_2 \frac{\partial \omega}{\partial k_x} - k_x}{k_{2z}}, \quad \frac{\partial \kappa_{1z}}{\partial k_x} = \frac{k_x - \frac{\omega}{c^2} \varepsilon_1 \mu_1 \frac{\partial \omega}{\partial k_x}}{\kappa_{1z}},$$

$$\text{Adicionalmente } \tan \frac{k_{2z}l}{2} + k_{2z} \frac{l}{2} \sec^2 \frac{k_{2z}l}{2} = \frac{\sin \frac{k_{2z}l}{2} \cos \frac{k_{2z}l}{2} + k_{2z} \frac{l}{2}}{\cos^2 \frac{k_{2z}l}{2}} = \frac{1}{2} \frac{\sin k_{2z}l + k_{2z}l}{\cos^2 \frac{k_{2z}l}{2}}$$

Así,

$$\frac{\frac{\omega}{c^2} \varepsilon_2 \mu_2 \frac{\partial \omega}{\partial k_x} - k_x}{k_{2z}} \left( \frac{1}{2} \frac{\sin k_{2z}l + k_{2z}l}{\cos^2 \frac{k_{2z}l}{2}} \right) = \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{k_x - \frac{\omega}{c^2} \varepsilon_1 \mu_1 \frac{\partial \omega}{\partial k_x}}{\kappa_{1z}} \rightarrow$$

$$\left( \frac{\omega}{c^2} \varepsilon_2 \mu_2 \frac{\partial \omega}{\partial k_x} - k_x \right) = \left( k_x - \frac{\omega}{c^2} \varepsilon_1 \mu_1 \frac{\partial \omega}{\partial k_x} \right) \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{k_{2z}}{\kappa_{1z}} \frac{2 \cos^2 \frac{k_{2z}l}{2}}{\sin k_{2z}l + k_{2z}l} \rightarrow$$

$$\text{Introduciendo } f(k_x, \omega) = \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{k_{2z}}{\kappa_{1z}} \frac{2 \cos^2 \frac{k_{2z}l}{2}}{\sin k_{2z}l + k_{2z}l} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{1}{\kappa_{1z}l} \left[ \frac{2 \cos^2 \frac{k_{2z}l}{2}}{1 + \frac{\sin k_{2z}l}{k_{2z}l}} \right], \text{ se tiene}$$

$$\left( \frac{\omega}{c^2} \varepsilon_2 \mu_2 \frac{\partial \omega}{\partial k_x} - k_x \right) = \left( k_x - \frac{\omega}{c^2} \varepsilon_1 \mu_1 \frac{\partial \omega}{\partial k_x} \right) f(k_x, \omega) \rightarrow \frac{\omega}{c^2} (\varepsilon_2 \mu_2 + f \varepsilon_1 \mu_1) \frac{\partial \omega}{\partial k_x} = (1 + f) k_x \rightarrow$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \omega}{\partial k_x} = \left( \frac{1 + f}{\varepsilon_2 \mu_2 + f \varepsilon_1 \mu_1} \right) \frac{c k_x}{\omega} \rightarrow$$

### Apéndice 14

Para un superconductor semi-infinito que limita con el vacío y en ausencia de efectos de retardo, la ley de dispersión  $\varepsilon_2 + \varepsilon_1 = 0$  toma la forma

Modo simétrico (en fase)	Modo antisimétrico (en oposición de fase)
$\coth \frac{\kappa_{2z} l}{2} = -\frac{\varepsilon_1 \kappa_{2z}}{\varepsilon_2 \kappa_{1z}}$	$\tan \frac{\kappa_{2z} l}{2} = -\frac{\varepsilon_1 \kappa_{2z}}{\varepsilon_2 \kappa_{1z}}$

Se desprecian efectos de retardo:  $k_x \gg \frac{\omega^2}{c^2} \text{Max}[\varepsilon_{(1,2)} \mu_{(1,2)}]$   $\kappa_{(1,2)z} = \sqrt{k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{(1,2)} \mu_{(1,2)}} \approx k_x$

Modo simétrico (en fase)	Modo antisimétrico (en oposición de fase)
$\coth \frac{k_x l}{2} = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$	$\tanh \frac{k_x l}{2} = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$
$\varepsilon_2 = -\varepsilon_1 \tanh \frac{k_x l}{2}$	$\varepsilon_2 = -\varepsilon_1 \coth \frac{k_x l}{2}$
Se introduce el factor de estructura $S_s(k_x) = \tanh \frac{k_x l}{2}$ para Modo simétrico (en fase) y $S_a(k_x) = \coth \frac{k_x l}{2}$ para Modo antisimétrico (en oposición de fase). Las leyes de dispersión toman la forma $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1 S_{(s,a)}(k_x)$ .	

Se reemplaza  $\varepsilon_2 = \varepsilon_\infty - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^4 \right] - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma_1^2} \left( \frac{T}{T_c} \right)^4$ ,

$$\varepsilon_\infty - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^4 \right] - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma_1^2} \left( \frac{T}{T_c} \right)^4 + S_{(s,a)}(k_x) \varepsilon_1 = 0 \rightarrow$$



$$\varepsilon_\infty(\omega^2 + \gamma_1^2) - \omega_p^2 \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^4 \right] \frac{(\omega^2 + \gamma_1^2)}{\omega^2} - \omega_p^2 \left( \frac{T}{T_c} \right)^4 + S_{(s,a)}(k_x) \varepsilon_1 (\omega^2 + \gamma_1^2) = 0 \rightarrow$$

$$(\omega^2 + \gamma_1^2) \omega^2 - \frac{\omega_p^2}{\varepsilon_\infty} \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^4 \right] (\omega^2 + \gamma_1^2) - \frac{\omega_p^2}{\varepsilon_\infty} \left( \frac{T}{T_c} \right)^4 \omega^2 + S_{(s,a)}(k_x) \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_\infty} (\omega^2 + \gamma_1^2) \omega^2 = 0 \rightarrow$$

$$\left( \omega^4 + S_{(s,a)}(k_x) \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_\infty} \omega^4 \right)$$

$$+ \gamma_1^2 \omega^2 - \frac{\omega_p^2}{\varepsilon_\infty} \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^4 \right] \omega^2 - \frac{\omega_p^2}{\varepsilon_\infty} \left( \frac{T}{T_c} \right)^4 \omega^2 + S_{(s,a)}(k_x) \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_\infty} \gamma_1^2 \omega^2 \rightarrow$$

$$- \frac{\omega_p^2}{\varepsilon_\infty} \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^4 \right] \gamma_1^2 = 0$$

## Apéndice 15

Para un superconductor semi-infinito que limita con el vacío y en ausencia de efectos de retardo, la ley de dispersión  $\varepsilon_2 + \varepsilon_1 = 0$  toma la forma

$$\varepsilon_2(\omega) + \varepsilon_1 = 0 \rightarrow \varepsilon_\infty - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^4 \right] - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma_1^2} \left( \frac{T}{T_c} \right)^4 + \varepsilon_1 = 0 \rightarrow$$

$$(\varepsilon_\infty + \varepsilon_1)(\omega^2 + \gamma_1^2)\omega^2 - \omega_p^2 \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^4 \right] (\omega^2 + \gamma_1^2) - \omega_p^2 \left( \frac{T}{T_c} \right)^4 \omega^2 = 0 \rightarrow$$

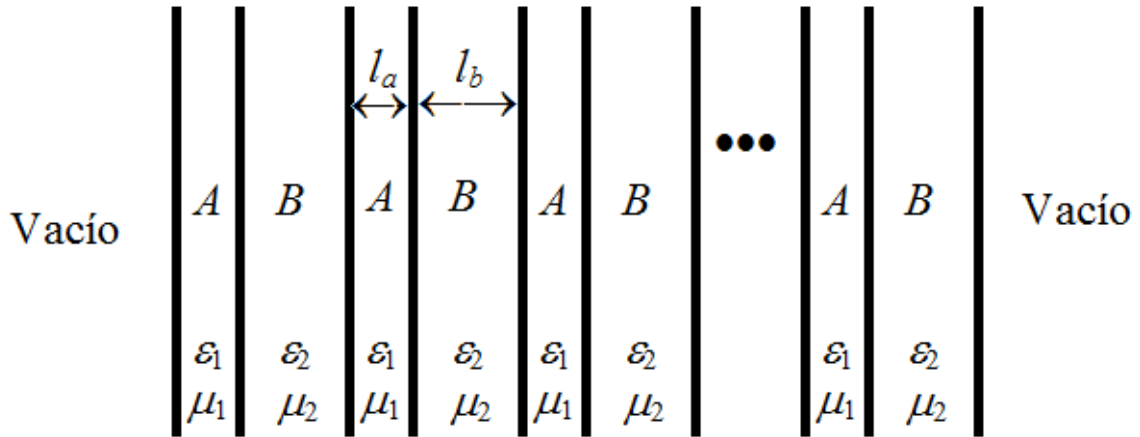
$$(\varepsilon_\infty + \varepsilon_1)\omega^4 + \gamma_1^2(\varepsilon_\infty + 1)\omega^2 - \omega_p^2 \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^4 \right] \omega^2 - \omega_p^2 \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^4 \right] \gamma_1^2 - \omega_p^2 \left( \frac{T}{T_c} \right)^4 \omega^2 = 0 \rightarrow$$

$$(\varepsilon_\infty + \varepsilon_1)\omega^4 - \left[ \omega_p^2 \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^4 \right] + \omega_p^2 \left( \frac{T}{T_c} \right)^4 - \gamma_1^2(\varepsilon_\infty + 1) \right] \omega^2 - \omega_p^2 \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^4 \right] \gamma_1^2 = 0 \rightarrow$$

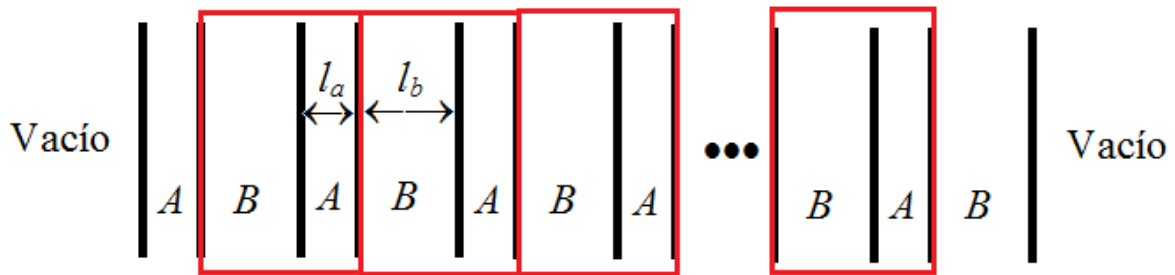
$$\omega^4 - \left[ \frac{\omega_p^2}{\varepsilon_\infty + \varepsilon_1} - (\gamma_1^2) \right] \omega^2 - \frac{\omega_p^2}{\varepsilon_\infty + \varepsilon_1} \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^4 \right] \gamma_1^2 = 0$$

## Apéndice 16

Para el sistema considerado



se hace la siguiente agrupación:



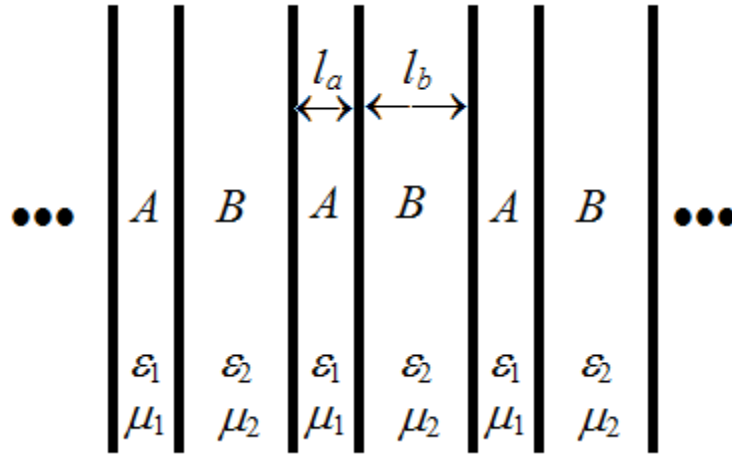
$$M^{crist-fof(s,p)} = M_{0A}^s M_A^{\text{hom}}(d_a) \left[ M_{AB}^s M_B^{\text{hom}}(d_b) M_{BA}^s M_A^{\text{hom}}(d_a) \right]^{N-1} M_{AB}^s M_B^{\text{hom}}(d_b) M_{B0}^s$$

Introduciendo  $M_{celda}^s = M_{AB}^s M_B^{\text{hom}}(d_b) M_{BA}^s M_A^{\text{hom}}(d_a)$  se tiene

$$M^{crist-fof(s,p)} = M_{0A}^{(s,p)} M_A^{\text{hom}}(d_a) \left[ M_{celda}^{(s,p)} \right]^{N-1} M_{AB}^{(s,p)} M_B^{\text{hom}}(d_b) M_{B0}^{(s,p)}$$

## Apéndice 17

Para un cristal fotónico infinito se puede considerar que la transmisión a través de la celda unitaria es un proceso que se repite periódicamente.



De acuerdo con el formalismo de la matriz de transferencia, los campos en la superficie derecha de la  $N+1$  celda están relacionados con los campos en la superficie derecha de la  $N$  celda mediante las relaciones

$$\begin{pmatrix} E_{N+1}^+ \\ E_{N+1}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11}^{celda(s)} & M_{12}^{celda(s)} \\ M_{21}^{celda(s)} & M_{22}^{celda(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_N^+ \\ E_N^- \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} H_{N+1}^+ \\ H_{N+1}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11}^{celda(p)} & M_{12}^{celda(p)} \\ M_{21}^{celda(p)} & M_{22}^{celda(p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_N^+ \\ H_N^- \end{pmatrix}$$

Por otro lado, debido a la periodicidad del sistema los campos  $\begin{pmatrix} E_{N+1}^+ \\ E_{N+1}^- \end{pmatrix}$  están relacionados con los campos  $\begin{pmatrix} E_N^+ \\ E_N^- \end{pmatrix}$  mediante el Teorema de Bloch  $\begin{pmatrix} E_{N+1}^+ \\ E_{N+1}^- \end{pmatrix} = \exp(iql) \begin{pmatrix} E_N^+ \\ E_N^- \end{pmatrix}$ . Por lo tanto, se tiene

$$\lambda \begin{pmatrix} E_N^+ \\ E_N^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11}^{celda(s)} & M_{12}^{celda(s)} \\ M_{21}^{celda(s)} & M_{22}^{celda(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_N^+ \\ E_N^- \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = \exp(iql)$$

$$\begin{pmatrix} M_{11}^{celda(s)} - \lambda & M_{12}^{celda(s)} \\ M_{21}^{celda(s)} & M_{22}^{celda(s)} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_N^+ \\ E_N^- \end{pmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$(M_{11}^{celda(s)} - \lambda)(M_{22}^{celda(s)} - \lambda) - M_{12}^{celda(s)}M_{21}^{celda(s)} = 0$$

$$\lambda^2 - (M_{11}^{celda(s)} + M_{22}^{celda(s)})\lambda + (M_{11}^{celda(s)}M_{22}^{celda(s)} - M_{12}^{celda(s)}M_{21}^{celda(s)}) = 0$$

$$\lambda_1\lambda_2 = \det M^{celda(s)}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = M_{11}^{celda(s)} + M_{22}^{celda(s)} = \text{Tr}M^{celda(s)}$$

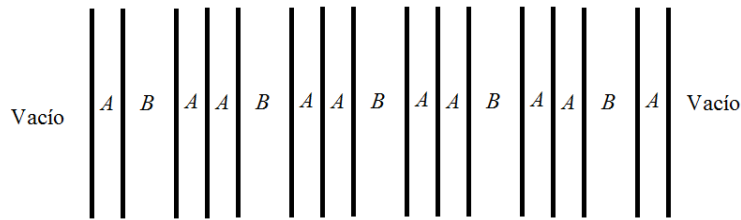
Se considera que  $\det M^{celda(s)} = 1$ . Por lo tanto  $\lambda_1 = \exp(iql)$ ,  $\lambda_2 = \exp(-iql)$ ,  $\lambda_1 + \lambda_2 = 2\cos(ql)$

y por lo tanto se obtiene  $\cos(ql) = \frac{1}{2}\text{Tr}M^{celda(s)}$ .

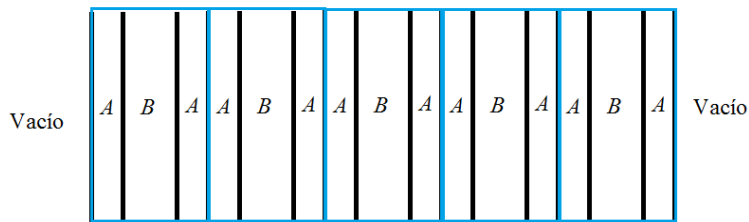
## Apéndice 18

Secuencia Fibonacci S3.

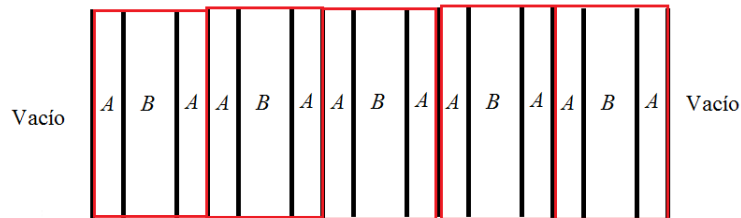
Para el sistema considerado con  $N=5$  celdas de Fibonacci en la secuencia S3.



se señalan las celdas con la secuencia ABA



se hace la siguiente agrupación:



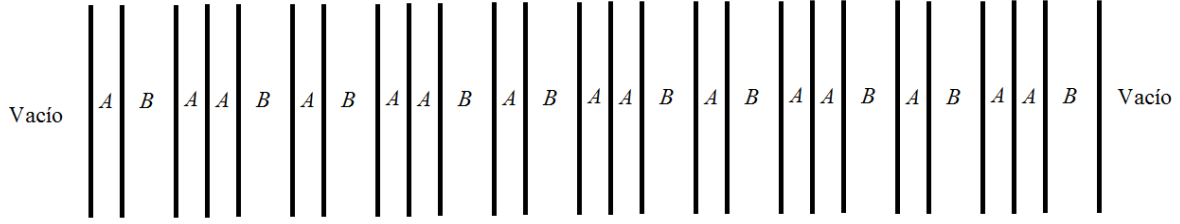
$$M^{S3(s,p)} = M_{0A}^s \left[ M_A^{\text{hom}}(d_a) M_{AB}^{(s,p)} M_B^{\text{hom}}(d_b) M_{BA}^{(s,p)} M_A^{\text{hom}}(d_a) \right]^N M_{A0}^{(s,p)}$$

Introduciendo  $M_{\text{celda}}^{S3(s,p)} = M_A^{\text{hom}}(d_a) M_{AB}^{(s,p)} M_B^{\text{hom}}(d_b) M_{BA}^{(s,p)} M_A^{\text{hom}}(d_a)$  se tiene

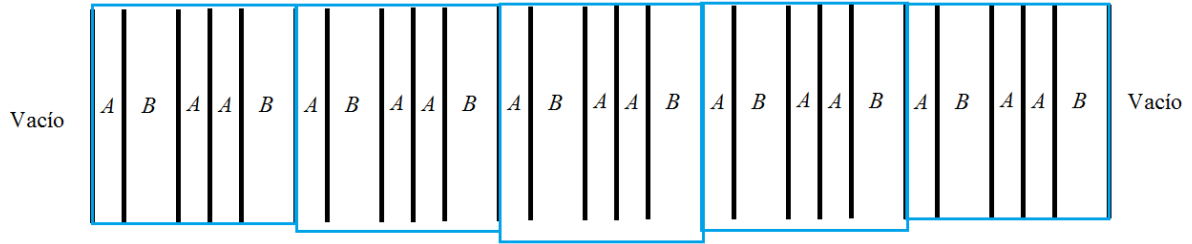
$$M^{S3(s,p)} = M_{0A}^s \left[ M_{\text{celda}}^{S3(s,p)} \right]^N M_{A0}^{(s,p)}$$

### Secuencia Fibonacci S4.

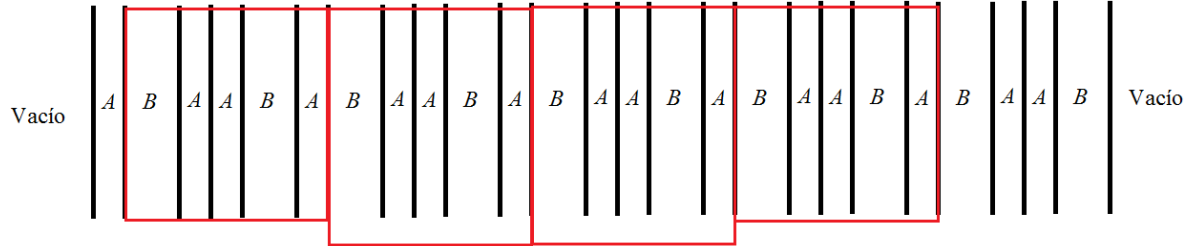
Para el sistema considerado con  $N=5$  celdas de Fibonacci en la secuencia S4 se tiene



se señalan las celdas con la secuencia ABAAB



se hace la siguiente agrupación:



$$M^{S4(s,p)} = M_{0A}^s M_A^{\text{hom}}(d_a)$$

$$\left[ M_{AB}^{(s,p)} M_B^{\text{hom}}(d_b) M_{BA}^{(s,p)} M_A^{\text{hom}}(2d_a) M_{AB}^{(s,p)} M_B^{\text{hom}}(d_b) M_{BA}^{(s,p)} M_A^{\text{hom}}(d_a) \right]^{N-1}$$

$$M_{AB}^{(s,p)} M_B^{\text{hom}}(d_b) M_{BA}^{(s,p)} M_A^{\text{hom}}(2d_a) M_{AB}^{(s,p)} M_B^{\text{hom}}(d_b) M_{B0}^{(s,p)}$$

La matriz

$$M_{\text{Slab}[B(2A)B]}^{(s,p)} = M_B^{\text{hom}}(d_b) M_{BA}^{(s,p)} M_A^{\text{hom}}(2d_a) M_{AB}^{(s,p)} M_B^{\text{hom}}(d_b)$$

corresponde a la matriz de transmisión de una película A de espesor  $2d_a$  embedida entre dos películas del medio B con espesor  $d_b$  cada una. Se tiene

$$M^{S4(s,p)} = M_{0A}^{(s,p)} M_A^{\text{hom}}(d_a) \left[ M_{AB}^{(s,p)} M_{\text{Slab}[B(2A)B]}^{(s,p)} M_{BA}^{(s,p)} M_A^{\text{hom}}(d_a) \right]^{N-1} M_{AB}^{(s,p)} M_{\text{Slab}[B(2A)B]}^{(s,p)} M_{B0}^{(s,p)}$$

## Bibliografia.

- Agudelo-Arango C., Mejía-Salazar J. R., Porrás-Montenegro N., Reyes-Gómez E., and Oliveira L. E. (2011), *J. Phys.* **23**, 215003.
- Albuquerque E.L. and Cottam, M. (2004), *Polaritons in periodic and quasiperiodic structures*, Elsevier B.V.
- Al-sequefi F.U.Y. and Belhadj W. (2015), *Superlattices and Microstructures* **88**, 127.
- Arafa H.A., Mohamed I., Ehab A.R. (2012), *Optics and Photonics Journal* **2**, 105.
- Chandrasekar B.S. (1969), in *Superconductivity: Part 1*, ed. by R. D. Parks, CRC Press, Technology & Engineering.
- Chen M-S., Wu C-J, Yang T-J and Ying-Guey A. (2013), *Solid State Communications* **168**, 42.
- Chibueze T. and Chaudhury R. (2013), arXiv:1308.2870 [cond-mat.supr-con].
- Chung-An Hu.,Jia-Wei Liu.,Chien-Jang Wu. (2013), *Solid State Communications* **157**, 54
- Coelho I.P., Vasconcelos M.S. and Bezerra C.G. (2010), *Solid State Communications* **150**, 1760.
- Costa C. H. O. and Vasconcelos M. S. (2013), *J. Phys.: Condens.Matter* **25**, 286002.
- Costa C.H.O., Barbosa P.H.R., Barbosa Filho F.F., Vasconcelos M.S. and Albuquerque E.L. (2010), *Solid State Communications* **150**, 2325.
- Cottam, M and Tilley D.R.(1989), *Introduction to surface and superlattice excitation*, Cambridge University Press.
- Garcia-Cervantes H., Madrigal-Melchor J., Martinez-Orozco J.C. and Rodriguez-Vargas Y. (2015), *Physica B* **478**, 99.
- Gómez-Urrea H.A., Duque C.A. and Mora-Ramos M.E. (2015), *Superlattices and Microstructures* **87**, 115.
- Granada J.C. and Rojas D.F (2014), *PhysicaB* **455**, 82.
- Gumbs G., Iurov A., Jhao-Ying Wu, Lin M. F. and Fekete P. (2016), *Scientific Reports* **6**, 21063.
- Hitoshi H. and Atsushi M. (2004), *Journal of Plasma and Fusion Research*, **80**, 89.
- Hsueh W.J., Chen C.H. and Qiu R.Z. (2013), *Physics Letters A* **377**, 1378.
- Hu Ch-A, Liu J-W and Wu C-J (2013), *Solid State Communications* **157**, 54.
- Huang K.C., P.Bienstman, Joannopoulos J.D., and Nelson K.A. (2003), *Phys. Rev. B* **68**, 075209.
- Hui-Chuan Hung., Chien-Jang Wu.,Shoou-Jinn Chang. (2011), *Solid State Communications* **151**,1677.
- Ji-jiang W. and Jin-xia G. (2012) *Optik* **123**, 986.
- Joannopoulos J.D., Johnson S.G., Winn J.N., and Meade R.D. (2008), *Photonic Crystals: Molding the Flow of Light*, Princeton University Press, Princeton.
- Liu D. and Zhang W. (2011), *Solid State Communications* **151**, 634.
- Markoš P. and Soukoulis C.M. (2008), *Wave Propagation: From Electrons to Photonic Crystals and Left-Handed Materials*, Princeton University Press, Princeton N.J.
- Mauriz P.W., Vasconsuelos M.S. and Albuquerque E.L. (2009), *Physics Letters A* **373**, 496.
- Molina A., Romero-Antequera D. L. and Sanchez-Mondragon J. J. (2014) *Optics Communications* **312**, 168.
- Moncada-Villa E., Mejía-Salazar J. R. and Granada J. C., (2015), *Optics Letters* **40**, 2345



Qiu R.E., Huang T. and Zhang Zh. (2014), Journal of Magnetism and Magnetic Materials **368**, 180.

Rahimi H. (2014), Physica B **433**, 1.

Rahimi H. (2015) Optik **126**, 4676.

Rahimi H. and Rezai M. (2013), Superlattices and Microstructures **60**, 398.

Reyes-Gómez E., Raigoza N., Cavalcanti S.B., de Carvalho C.A.A. and Oliveira L.E. (2010) J. of Phys. Condens. Matter. **22(38)**, 385901.

Reyes-Gómez E., Raigoza N., S.B.Cavalcanti, C.A.A. de Carvalho and L.E.Oliveira (2010), Physical Review B **81**, 153101.

Rychly J., Klos J.W., Mruczkiewicz M. and Krawczyk M. (2005), Physical Review B **92**, 054414.

Sakoda K. (2005), *Optical Properties of Photonic Crystals*, Springer, Berlin.

Sánchez-Soto L. L., Monzón J. J., Barriuso A.G. and Cariñena J.F. (2012), Physics Reports **513**, 191.

Shramkova O.V.and Olkhovskiy Y.A. (2011), Physica B **406**, 1415-1419.

Solymar L. and Shamonina E., (2009). “*Waves in metamaterials*”, Oxford University Press.

Tang Zh., Lei D., Huang J., Gui J. a, Feng Q. and Yan W. (2015), Optics Communications **356**, 21.

Wang L.-G., H. Chen, and S.-Y. Zhu (2004), Phys. Rev. B **70**, 245102.

Wan-guo Liu, Feng-ming Pan and Li-wei Cai (2014), Physica C **500**, 4.

Xu S., Zhu Y., Wang L., Yang P. and Chu P. K. (2014), Optics Communications **313**, 369.

Xu Y.L. , C.Q. Chenb and X.G. Tian (2013), Physics Letters A **377**, 895.

Zhi-Zhong Y. and Zeng Zhang C. (2012), Physica B **407**, 1014.

Zhaohong Wang, Cheng Guo, WeiJiang (2014) 125, 6789