

UNA APROXIMACIÓN AL CONCEPTO DE HOMOTECIA A PARTIR DE LA
NOCIÓN DE PROPORCIONALIDAD GEOMÉTRICA EN SÉPTIMO GRADO

ANYILY MERCEDES CASTRO CORTES – 201452968

JUAN CARLOS JARAMILLO RIASCOS - 201452781

IVÁN ALEXIS OBREGÓN VALENCIA - 201453005

UNIVERSIDAD DEL VALLE - SEDE PACÍFICO

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

BUENAVENTURA

2019

UNA APROXIMACIÓN AL CONCEPTO DE HOMOTECIA A PARTIR DE LA
NOCIÓN DE PROPORCIONALIDAD GEOMÉTRICA EN SÉPTIMO GRADO

ANYILY MERCEDES CASTRO CORTES – 201452968

JUAN CARLOS JARAMILLO RIASCOS - 201452781

IVÁN ALEXIS OBREGÓN VALENCIA - 201453005

ASESOR DE TRABAJO

MGR. JHON JAIR ANGULO VALENCIA

UNIVERSIDAD DEL VALLE - SEDE PACÍFICO

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

BUENAVENTURA

2019



Programa Académico Licenciatura en Educación Matemática Fecha

Código del programa: 3469

Resolución del programa: _____

Día	Mes	Año
21	5	2019

Título del Trabajo o Proyecto de Grado

Una aproximación al concepto de homotecia a partir de la noción de ...

Se trata de:

Proyecto

Informe Final

Director

Jhon Jair Angulo Valencia

Nombre del Primer Evaluador

Ligia Amparo Torres Rengifo

Nombre del Segundo Evaluador

Francisco Vallejilla

Estudiantes

Nombres y Apellidos	Código	Plan	E-mail	Teléfonos de contacto
<u>Anjaly M. Castro</u>	<u>1452968</u>	<u>3469</u>	<u>anjaly.castro@correounivalle.edu.co</u>	
<u>Juan C. Jaramillo</u>	<u>1452781</u>	<u>3469</u>	<u>juan.jaramillo.rivas@correounivalle.edu.co</u>	
<u>Ivan A. Obregon</u>	<u>1453005</u>	<u>3469</u>	<u>ivan.obregon@correounivalle.edu.co</u>	

Evaluación

Aprobado

Meritorio

Laureado

Aprobado con recomendaciones

No Aprobado

Incompleto

En el caso de ser **Aprobado con recomendaciones** (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo máximo de _____ (máximo un mes) ante:

Director del Trabajo o Proyecto de Grado

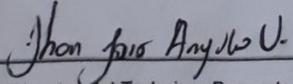
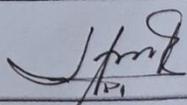
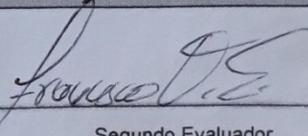
Primer Evaluador

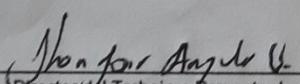
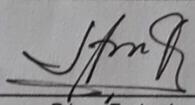
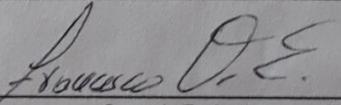
Segundo Evaluador

En el caso de que el Informe Final se considere **Incompleto** (diligenciar la página siguiente), se da un plazo máximo de _____ semestre (s) para realizar una nueva reunión de Evaluación el: _____ dd _____ mm _____ aa

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la **razón del desacuerdo** y las **alternativas** de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).

Firmas

		
Director del Trabajo o Proyecto de Grado	Primer Evaluador	Segundo Evaluador

Recomendaciones <input type="checkbox"/>	Observaciones <input checked="" type="checkbox"/>	Razón de desacuerdo - Alternativas <input type="checkbox"/>
Si se considera necesario, usar hojas adicionales.		
<p>El trabajo guarda buena coherencia entre los planteamientos que se enuncian. Tiene una buena formulación de problema y propuesta de intervención. Sin embargo, se deben aprovechar más los antecedentes, cerrando con un párrafo que muestre como aportan esos planteamientos a la indagación en curso. Así como también ajustar las conclusiones en relación con los objetivos.</p>		
Firmas		
 Director del Trabajo o Proyecto de Grado	 Primer Evaluador	 Segundo Evaluador

AGRADECIMIENTOS

El desarrollo de esta indagación no habría sido posible, antes que nada, sin el poder de Dios que nos otorgó la fuerza y sabiduría para entregarnos de principio a fin a la ardua tarea de escribir cada una de las palabras que componen este trabajo. En segunda instancia, es preciso agradecer a nuestros familiares que estuvieron brindando su apoyo incondicional y constante el cual significó un pilar importante para alcanzar el objetivo trazado.

De otro lado, es importante mencionar que escatiman las palabras para expresar el inmenso sentimiento de gratitud hacia nuestro tutor John Jair Angulo Valencia. Pues, gracias a su dedicación, paciencia, orientación y su intachable ética para trabajar siempre de la mejor manera posible, nos permitió, más allá de construir un trabajo como requisito para optar por un título, dar nuestros primeros pasos en el campo académico formal de la investigación en cual son necesarios valores como la disciplina para combatir la entropía.

Por otra parte, agradecemos a cada uno de los profesores que intervinieron en nuestro proceso de formación; puesto que, cada uno jugó un papel esencial para llegar a este punto final que marca un nuevo comienzo. Finalmente, damos las gracias a nuestros compañeros por habernos dado la oportunidad de conocerlos y compartir con ellos todo este tiempo.

RESUMEN

La presente propuesta de indagación pedagógica, describe de manera general la forma cómo se aproximó a un grupo de estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Liceo del Pacífico ubicada en el municipio de Buenaventura, al concepto de homotecia de segmentos y polígonos a partir de la proporcionalidad geométrica. Para ello, se usó como recurso pedagógico una secuencia didáctica estructurada en situaciones, tareas y actividades, en la que se articularon una serie de conceptos propios de la noción de proporcionalidad desde lo numérico hasta lo geométrico para llegar al concepto de homotecia. Del diseño de la secuencia, se destaca que el desarrollo de esta se hizo tomando en consideración la teoría de las situaciones didácticas, y de ello se obtuvo como resultado que los estudiantes manifestaban constantemente sus respuestas a partir del uso de expresiones cotidianas; dejando entrever por un lado, algunas fortalezas asociadas al trabajo con las expresiones numéricas en relación con las operaciones y procesos solicitados, y por otro algunas dificultades en la transición de lo numérico a lo geométrico. Sin embargo, se pudo avanzar desde los aspectos geométricos hasta el concepto de homotecia.

Palabras clave: homotecia, proporcionalidad geométrica, secuencia didáctica, pensamiento geométrico.

ABSTRACT

The present proposal of pedagogical inquiry, describes in a general way how a group of seventh grade students of the Educational Institution Liceo del Pacífico located in the municipality of Buenaventura, were approached to the concept of homothety of segments and polygons from the geometric proportionality. To do this, a didactic sequence structured in

situations, tasks and activities was used as a pedagogical resource, in which a series of concepts were articulated taking elements of the notion of proportionality from numerical perspective to the geometric to arrive at the concept of homothety. Of the design of the sequence, it is emphasized that the development of it was done taking into account the theory of didactic situations, and from this was obtained as a result that the students constantly expressed their responses from the use of everyday expressions; letting glimpse on the one hand, some strengths associated with working with numerical expressions in relation to the operations and processes requested, and on the other hand some difficulties in the transition from the numerical to the geometric. However, it was possible to advance from the geometric aspects to the concept of homothety.

Keywords: homothety, geometric proportionality, didactic sequence, geometric thinking.

TABLA DE CONTENIDO

agradecimientos.....	V
Resumen.....	VI
Introducción	17
Capítulo 1: presentación de la propuesta de indagación.....	20
1.1. Planteamiento del problema	20
1.2. Objetivos.....	27
1.2.1. General.....	27
1.2.2. Específicos	27
1.3. Justificación	28
1.4. Marco contextual	33
1.5. Antecedentes.....	35
Capítulo 2: marco teórico.....	43
2.1. Perspectiva Matemática.....	43
2.2. Perspectiva didáctica	57
2.3. Perspectiva curricular.....	68
Capítulo 3: de la proporcionalidad a la homotecia en el aula	74
3.1. Rejilla de análisis	79
3.2. Análisis a priori de la Secuencia Didáctica.....	82

3.2.1. Situación 1 (S1): Términos relacionados con la homotecia y la proporcionalidad.....	82
3.2.2. Situación 2 (S2): relaciones y procesos en la homotecia y la proporcionalidad.	85
3.2.3. Situación 3 (S3): homotecia de Segmentos y Polígonos en el plano.	87
3.3. Resultados y análisis de resultados de la Secuencia Didáctica.....	90
3.3.1. Situación 1: términos relacionados con la homotecia y la Proporcionalidad ..	91
3.3.2. Situación 2: Relaciones y Procesos en la homotecia y la Proporcionalidad..	112
3.3.3. Situación 3: homotecia de Segmentos y Polígonos en el plano.....	132
3.3.4. Análisis general de las situaciones	156
Capítulo 4: conclusiones	159
4.1. Recomendaciones.....	162
4.2. Referencias bibliográficas	163
4.3. Anexos.....	165

CONTENIDO DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1: homotecia del triángulo J con centro O, fuera del origen.....	31
Ilustración 2: <i>Institución Educativa Liceo del Pacifico</i>	33
Ilustración 3: cálculo de la altura de la pirámide de Keops. Construcción propia	45
Ilustración 4: <i>Medición-Pitagórica. Construcción propia</i>	46
Ilustración 5: representación de una homotecia. Construcción propia.	51
<i>Ilustración 6: Homotecia del punto A con centro en O</i>	52
Ilustración 7: representación gráfica de la homotecia	54
Ilustración 8: representación gráfica de la homotecia.	56
Ilustración 9: elementos tomados del MEN (1998).....	71
Ilustración 11: Medidas reales y en el plano de la sección de piscina.	169

CONTENIDO DE TABLAS

Tabla 1: aprendizajes por mejorar de la Institución Educativa Liceo del Pacífico.....	24
Tabla 2: elementos tomados de la matriz de referencia de grado noveno.....	29
Tabla 3: elementos tomados de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas grado sexto-séptimo	73
Tabla 4: rejilla de análisis.....	81
Tabla 5: rejilla de análisis.....	Error! Bookmark not defined.
Tabla 6.....	Error! Bookmark not defined.
Tabla 7: modelo de tabla utilizado para la tipificación de respuestas.....	90
Tabla 8: tipificación de respuestas Situación 1- Tarea 1- Actividad del inciso a.....	91
Tabla 9: tipificación de respuestas Situación 1- Tarea 1- Actividad del inciso b.....	93
Tabla 10: tipificación de respuestas Situación 1- Tarea 1- Actividad del inciso c.....	96
Tabla 11: tipificación de respuestas Situación 1- Tarea 1-Actividad del inciso d.....	98
Tabla 12: tipificación de respuestas Situación 1- Tarea 1- Actividad del inciso e.....	100
Tabla 13: tipificación de respuestas Situación 1- Tarea 2- Actividad del inciso a.....	101
Tabla 14: tipificación de respuestas Situación 1- Tarea 2- Actividad del inciso b.....	103
Tabla 15: tipificación de respuestas Situación 1- Tarea 3- Actividad del inciso a.....	104
Tabla 16: tipificación de respuestas Situación 1- Tarea 1- Actividad del inciso b.....	105
Tabla 17: tipificación de respuestas Situación 1- Tarea 3- Actividad del inciso c.....	108

Tabla 18: tipificación de respuestas Situación 1- Tarea 3- Actividad del inciso d.....	110
Tabla 19: tipificación de respuestas Situación 2- Tarea 1-1- Actividad del inciso a.....	113
Tabla 20: tipificación de respuestas Situación 2- Tarea 1-1- Actividad del inciso b.....	115
Tabla 21: tipificación de respuestas Situación 2- Tarea 1-2- Actividad del inciso a.....	116
Tabla 22: tipificación de respuestas Situación 2- Tarea 1-2- Actividad del inciso b.....	118
Tabla 23: tipificación de respuestas Situación 2- Tarea 1-2- Actividad del inciso c.....	119
Tabla 24: tipificación de respuestas Situación 2- Tarea 1-2- Actividad del inciso d.....	121
Tabla 25: tipificación de respuestas Situación 2- Tarea 2-1- Actividad del inciso a.....	123
Tabla 26: tipificación de respuestas Situación 2- Tarea 2-1- Actividad del inciso b.....	125
Tabla 27: tipificación de respuestas Situación 2- Tarea 2-2- Actividad del inciso a.....	127
Tabla 28: tipificación de respuestas Situación 2- Tarea 2-2- Actividad del inciso b.....	128
Tabla 29: tipificación de respuestas Situación 2- Tarea 2-2- Actividad del inciso c.....	130
Tabla 30: tipificación de respuestas Situación 2- Tarea 2-2- Actividad del inciso d.....	131
Tabla 31: tipificación de respuestas Situación 3- Tarea 1- Actividad del inciso a.....	133
Tabla 32: tipificación de respuestas Situación 3- Tarea 1- Actividad del inciso b.	136
Tabla 33: tipificación de respuestas Situación 3- Tarea 1- Actividad del inciso c.....	139
Tabla 34: tipificación de respuestas Situación 3- Tarea 1- Actividad del inciso d.	143
Tabla 35: tipificación de respuestas Situación 3- Tarea 2- Actividad del inciso a.....	146
Tabla 36: tipificación de respuestas Situación 3- Tarea 2- Actividad del inciso b.	150



Tabla 37: tipificación de respuestas Situación 3- Tarea 2- Actividad del inciso c..... 153

CONTENIDO DE IMÁGENES

Imagen 1: respuesta de un estudiante respecto a S1- T1- <i>Aa</i>	92
Imagen 2: respuesta de un estudiante respecto a S1- T1- <i>Ab</i>	94
Imagen 3: respuesta de un estudiante respecto a S1- T1- <i>Ab</i>	95
Imagen 4: respuesta de un estudiante respecto a S1- T1- <i>Ab</i>	96
Imagen 5: respuesta de un estudiante respecto a S1- T1- <i>Ac</i>	97
Imagen 6: respuesta de un estudiante respecto a S1- T1- <i>Ad</i>	99
Imagen 7: respuesta de un estudiante respecto a S1- T2- <i>Aa</i>	102
Imagen 8: respuesta de un estudiante respecto a S1- T3- <i>Aa</i>	104
Imagen 9: respuesta de un estudiante respecto a S1- T3- <i>Ab</i>	106
Imagen 10: respuesta de un estudiante respecto a S1- T3- <i>Ab</i>	106
Imagen 11: respuesta de un estudiante respecto a S1- T3- <i>Ab</i>	107
Imagen 12: respuesta de un estudiante respecto a S1- T3- <i>Ac</i>	109
Imagen 13: respuesta de un estudiante respecto a S1- T3- <i>Ad</i>	110
Imagen 14: respuesta de un estudiante respecto a S1- T3- <i>Ad</i>	111
Imagen 15: respuesta de un estudiante respecto a S2- T1-1- <i>Aa</i>	113
Imagen 16: respuesta de un estudiante respecto a S2- T1-1- <i>Aa</i>	114
Imagen 17 : respuesta de un estudiante respecto a S2- T1-1- <i>Ab</i>	115
Imagen 18: respuesta de un estudiante respecto a S2- T1-2- <i>Aa</i>	117

Imagen 19: respuesta de un estudiante respecto a S2- T1-2- <i>Aa</i>	117
Imagen 20: respuesta de un estudiante respecto a S2- T1-2- <i>Ab</i>	118
Imagen 21: respuesta de un estudiante respecto a S2- T1-2- <i>Ac</i>	120
Imagen 22: respuesta de un estudiante respecto a S2- T1-2- <i>Ad</i>	121
Imagen 23: respuesta de un estudiante respecto a S2- T1-2- <i>Ad</i>	122
Imagen 24: respuesta de un estudiante respecto a S2- T1-2- <i>Ad</i>	122
Imagen 25: respuesta de un estudiante respecto a S2- T2-1- <i>Aa</i>	123
Imagen 26: respuesta de un estudiante respecto a S2- T2-1- <i>Aa</i>	124
Imagen 27: respuesta de un estudiante respecto a S2- T2-1- <i>Ab</i>	125
Imagen 28: respuesta de un estudiante respecto a S2- T2-1- <i>Ab</i>	126
Imagen 29: respuesta de un estudiante respecto a S2- T2-1- <i>Ab</i>	126
Imagen 30: respuesta de un estudiante respecto a S2- T2-2- <i>Aa</i>	127
Imagen 31: respuesta de un estudiante respecto a S2- T2-2- <i>Ab</i>	129
Imagen 32: respuesta de un estudiante respecto a S2- T2-2- <i>Ac</i>	130
Imagen 33: respuesta de un estudiante respecto a S2- T2-2- <i>Ac</i>	131
Imagen 34: respuesta de un estudiante respecto a S2- T2-2- <i>Ad</i>	132
Imagen 35: respuesta de un estudiante respecto a S3- T1- <i>Aa</i>	133
Imagen 36: respuesta de un estudiante respecto a S3- T1- <i>Aa</i>	134
Imagen 37: respuesta de un estudiante respecto a S3- T1- <i>Ab</i>	136

Imagen 38: respuesta de un estudiante respecto a S3- T1- <i>Ab</i>	137
Imagen 39: respuesta de un estudiante respecto a S3- T1- <i>Ab</i>	138
Imagen 40: respuesta de un estudiante respecto a S3- T1- <i>Ac</i>	140
Imagen 41: respuesta de un estudiante respecto a S3- T1- <i>Ac</i>	140
Imagen 42: respuesta de un estudiante respecto a S3- T1- <i>Ac</i>	141
Imagen 43: respuesta de un estudiante respecto a S3- T1- <i>Ac</i>	141
Imagen 44: respuesta de un estudiante respecto a S3- T1- <i>Ad</i>	143
Imagen 45: respuesta de un estudiante respecto a S3- T1- <i>Ad</i>	144
Imagen 46: resultado de un estudiante respecto a S3- T1- <i>Ad</i>	145
Imagen 47: respuesta de un estudiante respecto a S3- T1- <i>Ad</i>	146
Imagen 48 : respuesta de un estudiante respecto a S3- T1- <i>Aa</i> coordenadas en el plano cartesiano y comunicación en expresiones cotidianas.	148
Imagen 49: respuesta de estudiante respecto a S3- T1- <i>Aa</i> coordenadas en el plano cartesiano.....	149
Imagen 50: respuesta estudiante respecto a S3- T2- <i>Ab</i> . Empleo de las expresiones generales dadas.	150
Imagen 51: respuesta estudiante a S3- T2- <i>Ab</i> . Gráfica de segmento homotético.....	152
Imagen 52: respuesta de un estudiante a S3- T2- <i>Ac</i>	154
Imagen 53: respuesta de un estudiante a S3- T2- <i>Ac</i>	155

INTRODUCCIÓN

El siguiente trabajo de indagación pedagógica, requisito para optar por el título de Licenciados en Educación Básica con Énfasis en Matemática, describe una propuesta relacionada con la forma cómo los estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Liceo del Pacífico del municipio de Buenaventura, se aproximan al concepto de homotecia de segmentos y polígonos a partir de la proporcionalidad geométrica. Esto, se desarrolló en cuatro capítulos.

En el primer capítulo, se abordan aspectos relacionados con el planteamiento del problema, en el se reconoce que al estudiar la homotecia se encuentra de forma implícita la noción de proporcionalidad. Por tanto, en esta parte del capítulo se muestran un conjunto de dificultades asociadas a la enseñanza-aprendizaje de la proporcionalidad, las cuales inciden en el buen desarrollo de didáctico de la homotecia. Además, se presentan los objetivos trazados en la indagación. Seguido de ello, se presenta la justificación, en la que se hace referencia a la homotecia como un concepto de la educación matemática en el que se movilizan elementos de los pensamientos métricos, numérico, variacional y espacial. De ello, se destaca la noción de proporcionalidad como elemento preponderante para el desarrollo de la homotecia. Luego se presenta el marco contextual, en el cual se describe el plantel educativo y la población con la que se llevó a cabo la propuesta de indagación. Y finalmente, se encuentran los antecedentes en los cuales se reportan una serie de investigaciones asociadas a la enseñanza y aprendizaje de la homotecia y otros de la proporcionalidad, en las que se identifican elementos conceptuales y procedimentales que median en el paso de esta última al concepto de homotecia de segmentos y polígonos.

El segundo capítulo corresponde al marco teórico el cual se desarrolla a partir de tres perspectivas: matemática, didáctica y curricular. En la primera, se muestra un desarrollo disciplinar sobre la homotecia y algunos aspectos históricos sobre la proporcionalidad que se vinculan con esta. En la segunda, se describen algunas dificultades asociadas al tratamiento didáctico que ha recibido la proporcionalidad. Además, se toma en cuenta la teoría de las situaciones didácticas como una forma para llevar a cabo la implementación de la secuencia didáctica diseñada, y por último, se expone como es entendida la secuencia didáctica y los elementos que la estructuran (situación, tarea y actividad). En la tercera, se abordan algunos aspectos curriculares de los Lineamientos, los Estándares Básicos de Competencias, los Derechos Básicos de Aprendizaje y la Matriz de Referencia.

En el capítulo tres, se abordan los aspectos metodológicos que rigen la estructura del trabajo en general que contempla 10 fases, describiendo en cada una de ellas la forma como se desarrolló la investigación. Por otra parte, se describe el tipo de investigación realizada y la muestra seleccionada para la puesta en marcha de la secuencia didáctica, y a partir de los resultados obtenidos de la implementación, se hizo una caracterización de las producciones de los estudiantes, contrastando dichos resultados con el análisis a priori y considerando el conjunto de variables objeto de análisis condesados en la rejilla previamente diseñada.

En el cuarto capítulo se presenta; por un lado, las conclusiones en las que se muestran algunas concepciones relacionadas con la noción de proporcionalidad y algunos conceptos asociados a esta que median en el aprendizaje de la homotecia, y por otro, se exponen algunas recomendaciones para futuros trabajos de indagación.

Finalmente, se presentan las referencias bibliográficas y los anexos que incluyen la secuencia didáctica diseñada y algunas fotografías relacionadas con la implementación de la secuencia.

CAPÍTULO 1: PRESENTACIÓN DE LA PROPUESTA DE INDAGACIÓN

En este capítulo, se presenta; el planteamiento del problema, los objetivos, la justificación y algunos antecedentes relacionados con el tratamiento didáctico de la homotecia y la proporcionalidad. Para el desarrollo de estos apartados, se abordan investigaciones en las que se identifican algunas dificultades relacionadas con el concepto de homotecia y la noción de proporcionalidad. Del mismo modo, se reconoce que en el estudio de la homotecia se trabajan de manera implícita algunos conceptos propios de la proporcionalidad. Por tanto, si se presentan dificultades en esta última, no se podría generar un buen desarrollo de la homotecia. De acuerdo con esto, en este capítulo se explicita el nexo entre la proporcionalidad y la homotecia.

1.1. Planteamiento del problema

La enseñanza de los pensamientos espacial y variacional están mediadas por distintos factores que inciden en los procesos de aprendizaje de la matemática por parte de los estudiantes. Esto tiene que ver con el reconocimiento y aprehensión de conceptos tales como fracciones, razón, función, teorema de tales, semejanza, homotecia, teorema de Pitágoras, entre otros que son un baluarte fundamental en el desarrollo de estos pensamientos. Por tanto, se hace necesario movilizar situaciones que promuevan el desarrollo de habilidades matemáticas para de esta forma propiciar un acercamiento significativo y funcional de los estudiantes hacia los conceptos antes mencionados. Al respecto, Guacaneme (2001) plantea que:

[...] Las situaciones matemáticas situadas desde el concepto de proporción y más exactamente la proporcionalidad se puede

considerar como el “núcleo a partir del cual se unifican las líneas básicas de algunas nociones” (Fiol y Fortuni, 1990 p. 118), conceptos y temas matemáticos (v.g., razón, fracción, número racional, número decimal, medida, porcentajes, probabilidad, funciones lineales, teorema de tales, semejanzas, homotecias, escalas, relaciones trigonométricas). (pp. 37-38)

Además, en relación con Guacaneme (2001), se hace importante anotar que, la noción de proporcionalidad cumple tres funciones: como objeto, porque hace referencia al concepto matemático como tal. Como útil, puesto que la noción de proporcionalidad es un elemento que se relaciona con otros conceptos, y como prerrequisito debido a que es una noción generalizante para el desarrollo de otros conceptos como el de homotecia de segmentos y polígonos. En este orden de ideas, se reconoce que al hablar de la homotecia se hace mención a la proporcionalidad. Sin embargo, en este trabajo se harán explícitas las dificultades reportadas de la proporcionalidad, dado que se considera que estas dificultades, no permiten que se pueda avanzar al aprendizaje de la homotecia.

Ahora bien, en relación con lo planteado por el MEN (1998), se tiene que, la geometría en la escuela se ha reducido a figuras estáticas que son limitantes en cuanto a su carácter dinámico. En esta geometría muerta, las figuras pierden su esencia de movilidad (lo que hace referencia a cambio de tamaño, posición o forma). Por esta razón, el MEN propone devolver la dinámica propia de los sistemas geométricos (pasar de lo estático a lo dinámico). Atendiendo a esto, en este trabajo se considera hacer un acercamiento a la homotecia de segmentos y polígonos como una transformación en el plano cartesiano, tomando como punto de partida la noción de proporcionalidad la cual implica el análisis de procesos de variación.

De otro lado, en la revisión de los aprendizajes por mejorar, a nivel nacional se encuentra que hay una gran dificultad en la comprensión de los componentes numérico, variacional y geométrico-métrico. Ante esto, Holguín (2012) menciona que los resultados de las pruebas SABER e ICFES de los años 2010 y 2011 revelan una debilidad en estos componentes, relacionados con:

- Extraer e interpretar la información relevante de los problemas para su posterior solución; esta debilidad se asocia a una dificultad presente en los estudiantes en torno a la competencia de resolución de problemas, específicamente, aquellos problemas que involucran la covariación e invarianza en situaciones en las que intervienen la comparación entre magnitudes homogéneas y heterogéneas.
- Analizar y explicar relaciones de dependencia aditiva o multiplicativa entre magnitudes y medidas, en particular, las relaciones de dependencia multiplicativa se pueden asociar con el concepto de razón que es fundamental para el desarrollo de la proporción. Ahora bien, existen varios factores que inciden para que los estudiantes no analicen ni puedan explicar tal relación de dependencia (razón). Algunos de estos factores apuntan al hecho de que se suele privilegiar el pensamiento numérico, que es el registro de representación más usual para trabajar dicho concepto. No obstante, autores como Duval (2004) sostienen que privilegiar un solo registro de representación puede ser un factor influyente para que se presenten dificultades en la comprensión de un objeto matemático. Dado que, esto produce en el individuo un encapsulamiento (monoregistro) que impide efectuar transformaciones como la conversión, para poder desarrollar tratamientos según la complejidad de cada registro de representación.

De acuerdo con lo anterior, y tomando como referencia a Guacaneme (2001, 2002, 2012 y 2016), Jiménez, Quevedo & Yáñez (2014), y el MEN (1998) se listan algunas dificultades asociadas a la enseñanza de la homotecia de segmentos y polígonos, tomando como punto de partida la noción de proporcionalidad como elemento necesario para el desarrollo del pensamiento espacial.

- Se confunde el significado de proporción y proporcionalidad: existe una ambigüedad lingüística relativa a estos conceptos. Por ejemplo; casa y hogar, en el que la palabra casa se refiere a una estructura física que puede llegar a ser habitada y la palabra hogar se refiere a un grupo de individuos (familia) que habitan un lugar determinado creando en ellos sensaciones de seguridad y calma. Sin embargo, las palabras casa y hogar son usadas indiscriminadamente en los procesos de comunicación. Del mismo modo, proporción y proporcionalidad son usados indistintamente en los procesos de enseñanza-aprendizaje.
- Se trabaja la proporcionalidad haciendo énfasis en la perspectiva numérica: en el abordaje de la proporcionalidad en los procesos de enseñanza-aprendizaje, se suele privilegiar aspectos estrictamente numéricos que se reducen a una simple técnica de cálculo (como por ejemplo la regla de tres), dejando de lado otros enfoques como el geométrico que pueden llegar a potencializar otros pensamientos como el espacial, específicamente, en lo que refiere a la enseñanza del concepto de homotecia de segmentos y polígonos.
- Se han dejado de lado las transformaciones geométricas: estas han sido un tema poco explorado en la escuela. En los procesos de enseñanza-aprendizaje que lo abordan, se ha identificado un carácter estático enfocado en puntos, líneas

(perpendiculares y paralelas), figuras planas etc., sin tener en cuenta la movilidad que se les puede aplicar a estas, generando transformaciones que van desde cambiar de tamaño, posición o forma. Dando como resultado la primacía de una geometría estática sobre una que en esencia se postula como dinámica.

Todas estas dificultades no son ajenas a la realidad que se vive en la enseñanza de las matemáticas en Buenaventura, específicamente en la Institución Educativa Liceo del Pacífico, debido a que los resultados mostrados por el ICFES (2015, 2016 y 2017) relacionados con el concepto homotecia y la noción de proporcionalidad para el grado noveno revelan lo siguiente (ver tabla 1):

Años			Aprendizajes por mejorar (relacionados con la homotecia y la proporcionalidad)
2015	2016	2017	
77%	73%	51%	De los estudiantes no usan ni relacionan diferentes expresiones asociadas para modelar situaciones de variación.
62%	74%	85%	De los estudiantes no usan sistemas de referencia para localizar o describir posición de objetos y figuras.
58%	73%	67%	De los estudiantes no identifican características de graficas cartesianas en relación con la situación que representan.
	71%	75%	De los estudiantes no identifican ni describe efectos de transformaciones aplicadas a figuras planas.
57%	66%	59%	De los estudiantes no reconocen relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
76%	60%	76%	De los estudiantes no interpretan tendencias que se presentan en una situación de variación.
	86%		De los estudiantes no usan expresiones asociadas ni procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa
	75%	67%	De los estudiantes no predicen ni explican los efectos de aplicar transformaciones rígidas sobre figuras bidimensionales.
64%	58%		De los estudiantes no hacen conjeturas ni verifican propiedades de congruencia y semejanza entre figuras bidimensionales.
52%	65%	59%	De los estudiantes no argumentan de forma formal e informalmente sobre propiedades y relaciones de figuras planas y sólidos.
75%	65%	53%	No resuelven problemas en situaciones aditivas y multiplicativas en el conjunto de los números reales.
	73%	57%	De los estudiantes no resuelven ni formulan problemas usando modelos geométricos.

Tabla 1: aprendizajes por mejorar de la Institución Educativa Liceo del Pacífico

De acuerdo con los anteriores resultados, se puede apreciar que la homotecia de segmentos y polígonos, y la noción de proporcionalidad hacen parte de los aprendizajes anteriormente descritos, y, además, no se evalúa desde un solo pensamiento sino entre pensamientos, puesto que se involucran los siguientes conceptos; fracción, razón, número racional, número decimal, medida, porcentajes, probabilidad, funciones lineales, teorema de Tales, semejanzas, escalas, relaciones trigonométricas, homotecias, entre otros.

De otro lado, tomando como referencia el pensamiento espacial y como caso particular la enseñanza de la homotecia, se identifican las siguientes dificultades:

- No se encuentra un número significativo de trabajos de grado, maestría y doctorado en el campo de la didáctica referente al concepto de homotecia: en la búsqueda realizada, se encontró en mayor medida artículos reportados en revistas tanto nacionales como internacionales y un trabajo de grado de Costa Rica que vinculan el concepto de homotecia en los procesos de enseñanza-aprendizaje.
- Se ha identificado que en Buenaventura el concepto de homotecia es poco enseñado; como lo señala Ortiz & Angulo (2010), quienes encontraron que los estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Liceo del Pacífico de este municipio, no tenían sospecha alguna del concepto de homotecia. De acuerdo con estos autores, este hecho puede ser consecuencia de la forma como se enseña la geometría transformacional que se reduce al manejo de regla y compas; y en el caso específico de la homotecia, debido a la manera como se plantea en algunos textos escolares.
- Se identifican pocos documentos que muestren una relación explícita entre la homotecia y la noción de proporcionalidad: a través de los diferentes documentos

indagados, no se encontraron trabajos a nivel nacional que establezcan dicha relación. No obstante, a nivel internacional se pudo encontrar algunos documentos que brindaran un acercamiento a la homotecia a partir de la proporcionalidad.

De acuerdo con lo anteriormente expuesto, el presente trabajo de indagación intenta dar respuesta a la siguiente pregunta:

¿Cómo a través de una Secuencia Didáctica se aproxima a los estudiantes del grado séptimo de la Institución Educativa Liceo del Pacífico al aprendizaje del concepto de homotecia de segmentos y polígonos, a partir de la noción de proporcionalidad geométrica?

1.2. Objetivos

1.2.1. General

Aproximar a los estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Liceo del Pacífico, al aprendizaje del concepto de homotecia de segmentos y polígonos, a partir de la proporcionalidad geométrica mediante la implementación de una Secuencia Didáctica.

1.2.2. Específicos

- Identificar elementos conceptuales y procedimentales enmarcados en la Didáctica de las Matemáticas, que permiten vincular el concepto de homotecia de segmentos y polígonos, con la noción de proporcionalidad geométrica.
- Articular en una Secuencia Didáctica elementos conceptuales que median el aprendizaje del concepto de homotecia, a partir de algunos referentes teóricos, relacionados con la noción de proporcionalidad geométrica.
- Caracterizar los aprendizajes de los estudiantes relacionados con el concepto de homotecia de segmentos y polígonos a través de sus producciones escritas.

1.3. Justificación

En la enseñanza de la Educación Matemática, se abordan asignaturas como geometría, estadística, aritmética, álgebra, análisis, cálculo, entre otras; en las cuales, se encuentra que, en la mayoría de los casos abordan temáticas de forma muy vertical, pero no relacionan los ejes de conocimiento entre asignaturas. Ante esto, considerando la enseñanza del pensamiento variacional, el MEN (1998) plantea que:

Proponer el inicio y desarrollo del pensamiento variacional como uno de los logros para alcanzar en la educación básica, presupone superar la enseñanza de contenidos matemáticos fragmentados y compartimentalizados, para ubicarse en el dominio de un campo conceptual, que involucra conceptos y procedimientos interestructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentra como sustrato de ellas. (p. 49).

Lo antes mencionado, resalta la importancia que tiene el pensamiento variacional para atender a estas formas de abordar los contenidos curriculares. Particularmente, entre los diferentes conceptos que se trabajan en este pensamiento, la proporcionalidad recibe especial atención, porque es considerada como base fundamental para el desarrollo de otros conceptos (como razón, función, teorema de Tales, semejanza, homotecia, teorema de Pitágoras, entre otros) inmersos en los diferentes pensamientos. Lo hasta aquí mencionado,

se relaciona con los aprendizajes por competencias evaluadas en las pruebas de estado a partir de diferentes componentes¹.

A continuación, en la tabla 2 se muestran algunos aprendizajes tomados de la matriz de referencia ² de grado noveno (9°).

		COMPETENCIAS		
		Comunicación (Aprendizajes)	Razonamiento (Aprendizajes)	Resolución (Aprendizajes)
COMPONENTES	N Numérico Variacional	Establecer relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.	Usar expresiones asociadas y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa.	Resolver problemas en situaciones de variación con funciones polinómicas y exponenciales en contextos aritméticos y geométricos.
	E Espacial M Métrico	Diferenciar magnitudes de un objeto y relacionar las dimensiones de este con la determinación de las magnitudes.	Hacer conjeturas y verificar propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales. Predecir y explicar los efectos de aplicar transformaciones rígidas sobre figuras bidimensionales.	Resolver y formular problemas usando modelos geométricos.

Tabla 2: elementos tomados de la matriz de referencia de grado noveno

¹ Entiéndase por componentes, lo que en los Lineamientos Curriculares y Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas se denomina conocimientos básicos.

² La Matriz de Referencia es un instrumento de consulta basado en los Estándares Básicos de Competencias (EBC), útil para que la comunidad educativa identifique con precisión los resultados de aprendizaje esperados para los estudiantes. (MEN, 2016)

De acuerdo con los referentes de evaluación presentados en la tabla 2, se puede apreciar que estos, involucran conceptos que se pueden trabajar desde la proporcionalidad. De todos ellos, el presente trabajo de indagación se centrará en el de homotecia, que ha sido abordado en el ámbito de la matemática formal y aplicada, pero en menor medida en el campo de la didáctica. Ahora bien, se considera que es importante trabajar la homotecia en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la Educación Matemática porque permite la comprensión de algunas propiedades de las figuras, conceptos como paralelismo, perpendicularidad, invarianza, perímetro, área, colinealidad, semejanza, razones, escalas, números enteros y racionales, función lineal, transformaciones en el plano, entre otros. Además, en la cotidianidad existen variados fenómenos que se pueden modelar e idealizar bajo el concepto de homotecia, tal como lo ejemplifica Ibarra (2007),

En nuestra vida diaria nos enfrentamos muchas veces a la reducción o ampliación de figuras. Por ejemplo: al proyectar una diapositiva, al observar a través de una lupa, cuando queremos ampliar una fotografía, una insignia e inclusive nuestro ojo humano a través de la retina crea una imagen invertida y proporcional a la real, es más si alguna vez han ido al cine se habrán fijado que la pantalla es solo un telón blanco, que no funciona como un televisor, sino que es una imagen proyectada en el telón. (p. 3)

Así pues, se puede apreciar que la homotecia, además de modelar e idealizar problemas que se presentan en la cotidianidad y en ámbitos como la matemática aplicadas, es un campo en el cual se integran conceptos relacionados con aspectos métricos y geométricos, espaciales, numéricos e incluso algebraicos, que pueden ser de gran utilidad para contribuir al desarrollo íntegro del pensamiento matemático en los estudiantes. A modo de ejemplo, si se tiene un triángulo **J**, cuyas coordenadas son A (2,2), B (4,2) y C

(3,4); al aplicar una homotecia con coeficiente de similitud $K= 2$ y centro de similitud $O= (1,1)$. Se obtiene la figura homotética J' , como se muestra en la ilustración 1:

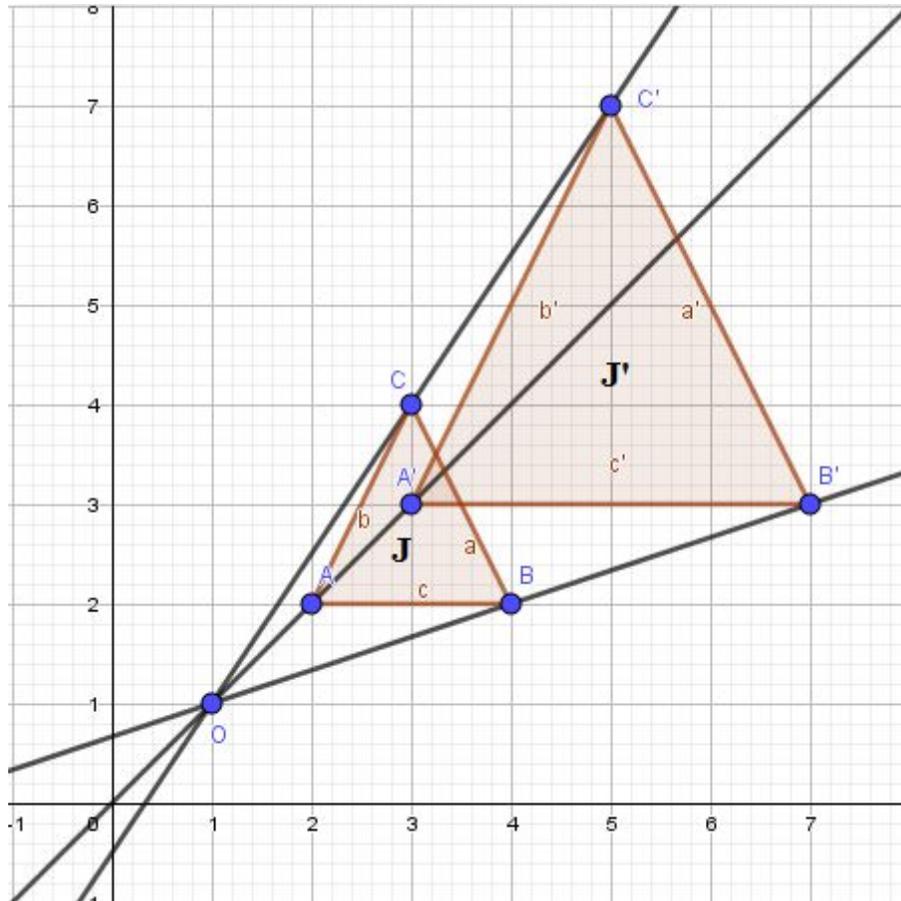


Ilustración 1: homotecia del triángulo J con centro O, fuera del origen

Como se puede ver en la ilustración 1, la homotecia aplicada al triángulo **J** forma la figura homotética **J'**. Para llegar a este resultado se pueden utilizar las expresiones algebraicas, $X' = KX - KX_r + X_r$ y $Y' = KY - KY_r + Y_r$, en las que: X' y Y' representan las coordenadas de los puntos A' , B' y C' , X y Y corresponden a las coordenadas de los puntos A , B y C , X_r y Y_r son las coordenadas del centro de similitud O , y K es el coeficiente de similitud. Para probar lo anterior, se toman cada uno de los datos iniciales y se resuelven los algoritmos indicados.

El desarrollo de ejemplos como el anterior, posibilita la integración del pensamiento numérico porque los valores que pueden tomar las variables de la expresión algebraica movilizan el uso de las cantidades y la aplicación de las operaciones en el conjunto numérico de los reales; del pensamiento variacional porque se presenta una relación de dependencia multiplicativa entre la figura inicial y su homotecia según el aumento o disminución del coeficiente de similaridad (constante de proporcionalidad), causando la ampliación o reducción de la figura homotética y, en algunos casos, una inversión de la misma; del pensamiento métrico porque promueve la acción de medir mediante un conjunto de procesos (regla y compas, utilización de software de geometría dinámica, entre otros); y, del pensamiento espacial porque suscita el reconocimiento de las formas; sus propiedades, ubicación, orientación y distribución en el espacio. De esta manera, se puede apreciar cómo el concepto de homotecia involucra aspectos de otros pensamientos permitiendo así la cohesión entre los mismos.

1.4. Marco contextual

Este trabajo de indagación se desarrolló en la Institución Educativa Liceo del Pacífico del distrito de Buenaventura que está ubicada en la Calle 6 N° 54-25 comuna 8 frente al Barrio Transformación parte alta avenida Simón Bolívar, la cual es de carácter oficial, aprobada por la resolución No. 1819 del 4 de septiembre de 2002, que ofrece los niveles de educación desde grado cero, hasta la media técnica y, educación para jóvenes y adultos jornada nocturna.



Ilustración 2: Institución Educativa Liceo del Pacífico

La Institución Educativa Liceo del Pacífico, otorga el título de “Bachiller Técnico Comercial con Énfasis en Comercio Exterior y Gestión Portuaria” a quienes culminen de manera satisfactoria el curso de educación media diurna y, el título de “Bachiller Académico con Énfasis en Informática” a quienes culminen de manera satisfactoria el curso de educación media nocturna.

Esta I. E. tiene como visión ser la institución líder del litoral pacífico en la formación de bachilleres con excelentes habilidades comunicativas, que se desempeñaran

en el mercado laboral de tipo secretarial, financiero, aduanero, portuario y en informática; capaces de construir su proyecto de vida con base en el ejercicio de valores que le permitan aportar a la creación de una nueva sociedad más justa, equitativa y pacífica. Y su misión, es brindar a los educandos una formación integral, que contribuya al desarrollo de las competencias comunicativas que les permitan expresarse con autonomía, comunicarse efectivamente, saber relacionarse con los demás y desarrollar el pensamiento. Además, formar estudiantes en el área comercial e informática, que conlleve a un desarrollo con visión microempresarial que responda a las necesidades laborales de la región.

En relación con lo anterior, a partir del presente trabajo se puede contribuir al pensamiento (analítico) que se propone desarrollar la I.E Liceo del Pacífico en sus estudiantes; ya que, es posible promover este tipo de pensamiento desde el área de matemáticas en el abordaje de conceptos como la proporcionalidad y la homotecia (presentes en los pensamientos variacional y sistemas algebraicos y analíticos y, espacial y sistemas geométricos), porque permiten articular objetos matemáticos que se sitúan en los otros pensamientos, y ya puestos estos en correlación, apuntan a que se pueda lograr algunas de las pretensiones de la institución. Además, esta indagación favorece el enfoque constructivista puesto que la Secuencia Didáctica implementada se diseñó a la luz de la teoría de las situaciones didácticas de Guy Brousseau.

1.5. Antecedentes

En la revisión de algunos trabajos de investigación relacionados con la enseñanza-aprendizaje de la homotecia, se reconoce que abordar el concepto en cuestión, implica el uso de elementos que median en la proporcionalidad. Sin embargo, se identifican pocos trabajos que vinculen explícitamente la homotecia y la noción de proporcionalidad. Por esta razón, para efectos de esta indagación, se han revisado algunos trabajos asociados a la enseñanza-aprendizaje de la homotecia y otros de la proporcionalidad, para identificar elementos conceptuales y procedimentales que median en el paso de esta al concepto de homotecia de segmentos y polígonos. Entre los trabajos abordados se encontró lo siguiente.

González & Arias (2017) desarrollan un análisis didáctico del concepto de homotecia para la construcción de una unidad didáctica, que tiene como finalidad servir de guía para los docentes, para orientar los procesos de enseñanza-aprendizaje de este concepto en octavo grado de educación básica. El análisis didáctico que estos autores desarrollan está constituido por cinco componentes; el análisis conceptual, el análisis de contenido, el análisis cognitivo, el análisis de instrucción, y el análisis de evaluación.

- En el análisis conceptual, hacen una revisión en variadas fuentes de información sobre el término o concepto de homotecia para profundizar y trabajar con los diferentes y múltiples significados, logrando así precisión y dominio en el uso de este concepto.
- En el análisis de contenido, realizan una delimitación curricular del concepto de homotecia para determinar los conocimientos previos de los estudiantes en octavo

año. Una vez hecho esto, hacen una revisión en las variadas fuentes consultadas, caracterizando los procedimientos y expresiones asociadas a este concepto.

- En el análisis cognitivo, hacen una revisión de las expectativas de aprendizaje de acuerdo con los objetivos que se plantean en el currículo nacional. Determinan unas limitaciones de aprendizaje, enlistando posibles errores que pueden cometer los estudiantes en el desarrollo de ciertas tareas. Y, por último, seleccionan o diseñan una tarea para cada uno de los objetivos, estableciendo el o los posibles caminos de aprendizaje, capacidades y los errores que se pueden cometer al realizar las tareas.
- En el análisis de instrucción, identifican, describen y organizan tareas matemáticas para diseñar y ejecutar actividades de enseñanza y aprendizaje que constituyan la unidad didáctica, para lograr los propósitos u objetivos de aprendizaje en torno al concepto de homotecia.
- En el análisis de evaluación, enfatizan en la evaluación formativa con, el fin de promover la comprensión del tema en los estudiantes, permitiendo oportunidades para mejorar. Para esto, diseñan diferentes instrumentos como; prueba diagnóstica, diarios del profesor y del estudiante, tarea especial, prueba escrita y cuestionario final.

Por otra parte, Galleguillos & Candia (2011), en un artículo de la revista CIAEM (Comité Interamericano de Educación Matemática) titulado *Uso de herramientas interactivas en el aprendizaje de homotecias*, reportan que en una investigación que realizaron, al aplicar una Secuencia Didáctica sobre el concepto de homotecia bajo la modalidad de trabajo del Aprendizaje Colaborativo, pudieron observar que el uso integrado de herramientas tecnológicas como el software GeoGebra, la Pizarra Digital Interactiva, netbooks y la plataforma Moodle, en un grupo experimental de estudiantes, arrojó

resultados más significativos asociados al aprendizaje del concepto en cuestión, en comparación con un grupo de control; en el cual, no se implementaron dichas tecnologías. Esto, a razón de que el uso de las herramientas mencionadas; primero, facilitan procesos como la visualización para validar propiedades de la homotecia como lo son; la linealidad que se presenta entre el centro y los vértices de las figuras homotéticas, el comportamiento de las figuras cuando la razón k es negativa o positiva, entre otras. Y segundo, las tecnologías actuaron como mediadores para hacer más efectiva la interacción entre los estudiantes para la construcción del conocimiento entorno al concepto de homotecia.

Por su parte, Battaglino & Figueroa (2013), en un artículo publicado por la revista CIBEM (Congreso Iberoamericano de Educación Matemática) con el título *homotecia. Contextualización para un aprendizaje significativo*, proponen un plan de clase para hacer una introducción al concepto de homotecia. Para ello, las autoras sugieren cinco actividades: en la actividad 1 se trabaja la observación de algunas imágenes y logos en los cuales se puedan identificar formas geométricas, en la 2 se abordan algunas formas geométricas para recordar criterios de semejanza, en la 3 se proponen situaciones con las indicaciones pertinentes para encontrar el centro y la razón de la homotecia, la 4 se orienta a constatar algunas propiedades de la transformación geométrica en cuestión, y la quinta y última, es una actividad con carácter propositivo; en la cual, a los estudiantes se les pide diseñar un logo. Es importante mencionar que, las autoras anotan que en la propuesta que hacen se deben desarrollar las actividades con el software GeoGebra como herramienta mediadora para facilitar el aprendizaje de los estudiantes.

En relación con lo anterior, Ibarra (2007) también propone un plan de clases con el cual, se busca que los estudiantes a partir de distintas transformaciones en el plano

(diseñadas previamente en cartulina) puedan establecer cuál (es) corresponde (n) a una homotecia, y que estos, sean capaces de realizar dicha transformación (homotecia) con diferentes figuras. En la puesta en marcha de este plan de clases, el docente debe retomar con los estudiantes los conceptos de transformaciones isométricas, razón, proporción, trazos proporcionales y semejanza de figuras planas, que se consideran como prerrequisito para el estudio de la homotecia.

De otro lado, Pérez (2013), reporta en un artículo (de Memorias del 21° Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones) titulado Situaciones A-didácticas para la enseñanza de la homotecia utilizando CabriLM como medio, una propuesta taller para trabajar cuatro situaciones a-didácticas mediadas por el uso del software CabriLM; puesto que, se considera que en la interacción con este software de geometría dinámica, los estudiantes pueden visibilizar propiedades de los objetos geométricos al cambiar de posición y tamaño, que ayudan en la construcción del conocimiento de conceptos como la homotecia. Este autor, propone que se desarrollen las situaciones a-didácticas en una sala de computadoras y que con la TSD (Teoría de las Situaciones Didácticas), se realice el análisis de estas.

En otro orden de ideas, Barreto (2010), incorpora una extensión de la demostración del Teorema de Pitágoras, a partir de las áreas de diferentes formas geométricas que se relacionan con figuras homotéticas. En este sentido, propone un ejercicio con el cual se pretende que los estudiantes calculen áreas de figuras homotéticas de acuerdo con las pautas que se señalan. Cabe destacar que, de este documento se toman algunos elementos conceptuales asociados al concepto de homotecia. Puesto que, el desarrollo teórico que hace Barreto sobre este concepto se relaciona con el abordaje que se le da a la homotecia en el presente trabajo de indagación.

Ortiz & Angulo (2010), realizan un trabajo didáctico del concepto de homotecia en el plano, haciendo uso de dos expresiones algebraicas ($x' = kx - kx_r + x_r \wedge y' = ky - ky_r + y_r$) para encontrar las coordenadas de figuras homotéticas (x', y'). Para ello, toman como referencia las coordenadas (x, y) de una figura inicial, un punto focal llamado centro de similitud (O) y el coeficiente de similitud (k). Las expresiones algebraicas sugeridas por Ortiz & Angulo, se consideran como elemento significativo para la aproximación al concepto de homotecia de segmentos y polígonos en el plano que se hace en esta indagación.

Por otro lado, reconociendo la importancia de la noción de proporcionalidad para el aprendizaje de la homotecia, se reconoce el aporte de Guacaneme (2012), el cual en su trabajo *diferencia entre semejanza y proporcionalidad geométrica desde una perspectiva histórica* plantea que estamos poco familiarizados con la forma de pensamiento geométrico, y por ello, se tiende a solucionar situaciones que involucran la proporcionalidad desde un tratamiento meramente aritmético.

De acuerdo con lo anterior, algunos autores como; Oller (2012), Sallán & Vizcarra (2009), Jaramillo (2012), Holguín (2012) y Obando (2015), dirigieron algunas investigaciones en torno a la enseñanza-aprendizaje de la proporcionalidad haciendo un marcado énfasis en el pensamiento numérico. De los anteriores autores, se revisaron como caso particular los trabajos de maestría de Holguín, Jaramillo y Obando por estar situados en este contexto nacional.

Por un lado, Holguín en su tesis de maestría titulada *Razonamiento Proporcional*, propone la implementación de una unidad autodidáctica para el grado séptimo, con la cual,

se busca que los estudiantes puedan vislumbrar algunas propiedades de las razones y proporciones, desarrollando actividades que implican el reconocimiento de comparaciones como la covariación entre magnitudes y comparaciones múltiples de cantidades numéricas. Por su parte, Jaramillo en su trabajo; *la proporcionalidad y el desarrollo del pensamiento matemático (una experiencia de aula)*, aborda el concepto de proporcionalidad desde una perspectiva numérica y geométrica. Pero, en el diseño de las actividades privilegia el enfoque numérico. Ahora bien, a pesar del tratamiento que esta autora le da a la proporcionalidad, reconoce que ambientes como la geometría dinámica y la implementación de material concreto podrían potencializar el desarrollo de esta.

De igual forma, Obando (2015) realiza una caracterización de los sistemas de prácticas matemáticas institucionalizadas, de los estudiantes de tercero y cuarto grado de escolaridad con respecto a los objetos de conocimiento matemático; razón, proporción y proporcionalidad. Para ello, hace una revisión de las nociones de dichos objetos matemáticos, desde las practicas matemáticas de culturas tales como la babilónica, china, egipcia, hindú, griega, entre otras, con el fin de “identificar los tipos de problemas que se resolvían, los instrumentos y las técnicas para resolver tales problemas, y los objetos y conceptos constituidos en tales sistemas de prácticas” (Obando, 2015 p. 82).

En los trabajos antes señalados, se encuentra que el objetivo central fue contribuir al aprendizaje de la noción de proporcionalidad desde un enfoque cuantitativo, dejando camino por explorar respecto a los otros tipos de pensamientos (como el espacial). De esta revisión se podría reportar como lo señala Rodríguez (2015) que; “los problemas en la enseñanza de la proporcionalidad se deben al marcado énfasis aritmético que se le da, faltando la presentación de situaciones problemas en diferentes contextos, como pueden ser

los geométricos”. Por consiguiente, esta autora presenta una propuesta en la cual relaciona la proporcionalidad con conceptos geométricos y a partir de dicha relación potenciar conceptos de otras áreas del conocimiento como la refracción de la luz y la óptica geométrica vistos en física.

Así como Rodríguez; Jiménez, Yáñez & Quevedo (2014) realizaron una investigación en torno al concepto en cuestión desde el plano geométrico, presentando una forma distinta para la enseñanza de la proporcionalidad que consiste en la adaptación de un diseño didáctico, en el cual se considera que, para la construcción del conocimiento en torno a este objeto, el material concreto permite validar visualmente algunas propiedades de este. Esta propuesta, se fundamenta en la Teoría de las situaciones didácticas de G. Brousseau, y dependiendo del concepto matemático que se desee trabajar se ve la necesidad de situar la proporcionalidad desde diferentes contextos: numérico, geométrico y algebraico. En este sentido, es importante mencionar que en este trabajo se intenta relacionar conceptos como; el coeficiente de proporcionalidad, pendiente de la recta, teorema de Tales, homotecia y función lineal; que están inmersos en los contextos antes mencionados. Dentro de las situaciones didácticas propuestas, se encuentra la del estudio de un apilado regular que en su trasfondo brinda un acercamiento al concepto de homotecia a partir de la noción de proporcionalidad geométrica.

De los anteriores trabajos, se pudieron identificar para el desarrollo de la presente indagación algunos aspectos conceptuales y procedimentales tales como: iniciar la secuencia didáctica desde aspectos numéricos; puesto que, los estudiantes están mayormente familiarizados con estos, y es a partir de dichos aspectos que se vislumbran algunas propiedades de la razón y la proporción que también son tenidas en cuenta en el

enfoque geométrico de la proporcionalidad. De esta manera, se propone en la secuencia didáctica trabajar, en segunda instancia, con algunas ilustraciones que tuvieran forma geométrica, las cuales permitieron retroalimentar algunos criterios de semejanza considerados como conocimientos previos en el desarrollo didáctico de la homotecia, ya que las figuras semejantes son consideradas a la vez homotéticas.

Finalmente, a partir de dichos trabajos se pudo identificar que la noción de proporcionalidad en el proceso de enseñanza-aprendizaje ha sido tratada en menor medida desde una perspectiva geométrica, desde la cual, se pueden potenciar aspectos o conceptos de la geometría transformacional. Por tanto, en esta propuesta de indagación se buscaba aproximar a los estudiantes de grado séptimo al concepto de homotecia de segmentos y polígonos, a partir de la proporcionalidad geométrica.

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO

En el siguiente apartado se presentarán algunos elementos que fundamentan el desarrollo de esta propuesta. Esto se hará considerando tres perspectivas a saber; perspectiva matemática, perspectiva didáctica y perspectiva curricular. En la perspectiva matemática se presentan algunos aspectos de la historia de la proporcionalidad que han influenciado en la aprehensión de la homotecia y los conceptos asociados, además, se hace un desarrollo disciplinar del concepto de homotecia y sus propiedades. En la perspectiva didáctica, se incluyen algunos aspectos de la teoría de la proporcionalidad vista desde Guacaneme, y se presenta un modelo para el abordaje de la Secuencia Didáctica diseñada, tomando como referencia la teoría de situaciones didácticas propuestas por G. Brousseau, así como también, se explicitan los términos Situación, Tarea y Actividad que estructuran la Secuencia Didáctica, esto retomando algunos aportes de Obando. Y, en la perspectiva curricular se abordan algunos elementos curriculares de los Lineamientos Curriculares, los Estándares Básicos de Competencias, Los Derechos Básicos de Aprendizaje y la Matriz de Referencia, centrando la atención en los pensamientos; variacional y espacial.

2.1. Perspectiva Matemática

En esta parte se presentan algunos elementos históricos relacionados con la proporcionalidad, retomando para ello tres grandes referentes; Tales de Mileto, Pitágoras de Samos y Euclides. Posteriormente, se presenta un mapa conceptual que vincula algunos conceptos de la proporcionalidad que intervienen en la aprehensión del concepto de homotecia. Y, finalmente, se hace un desarrollo del concepto de homotecia de segmentos y

polígonos, y sus propiedades. Para esto, se tendrán en cuenta autores como; Guacaneme (2012), Holguín (2012), Jaramillo (2012), Rodríguez (2015), Obando (2015) entre otros.

2.1.1. Algunos aspectos históricos de la proporcionalidad: Tales de Mileto, Pitágoras de Samos y Euclides

En el proceso de construcción y consolidación de las matemáticas han intervenido civilizaciones (por mencionar algunas; inca, maya, romana, egipcia, babilónica) que empleaban distintas estrategias empíricas que les permitían desempeñarse en actividades relacionadas con el comercio, la producción agrícola, la delimitación de tierras, entre otras, a las cuales se enfrentaban día a día. En este proceso, los griegos en sus viajes a civilizaciones como la egipcia y la babilónica observaron tales estrategias y establecieron parámetros generales, abstrayéndolas de su forma empírica, siendo Tales de Mileto el primer griego en realizar dicho proceso, es decir, logro realizar la conceptualización de un hecho natural a un objeto matemático de conocimiento (teorema de tales).

I. Tales de Mileto (640-560 a.C.)

Fue un filósofo presocrático considerado como uno de los siete sabios de la antigua Grecia y padre de las ciencias (matemáticas, filosofía y astronomía). Entre sus principales aportes a las matemáticas destaca el principio de semejanza, el cual utilizó para resolver problemas como; el cálculo de la altura de la pirámide de Keops (Egipto) y la distancia de una nave en altamar a la costa. En el primero de estos problemas, se cuenta que Tales logró establecer dicha altura al efectuar comparaciones de magnitudes, las cuales por el principio de semejanza son proporcionales.

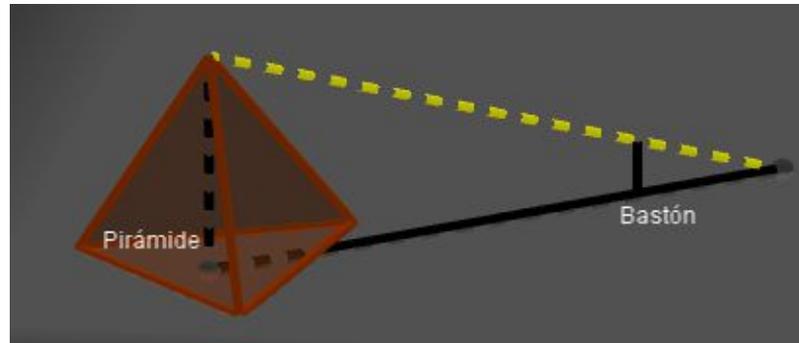


Ilustración 3: cálculo de la altura de la pirámide de Keops. Construcción propia

Como se puede apreciar en la ilustración (3), la línea negra horizontal representa las sombras (de la pirámide y el bastón) proyectadas en el piso, las cuales concurren en un mismo punto con los rayos del sol (línea punteada de color amarillo), también se observa al interior de la pirámide su altura (línea vertical punteada de color negro) paralela al bastón clavado en la superficie. Se considera que Tales conocía las longitudes; del bastón, la sombra del mismo y la sombra producida por la pirámide. Entonces, se compararon; la longitud de la sombra mayor (la producida por la pirámide) con la de la sombra menor (la producida por el bastón), y la altura de la pirámide (longitud desconocida incógnita) con la del bastón. Esta forma de comparar magnitudes se podría pensar que fue fundamental para el pensamiento pitagórico.

II. Pitágoras de Samos (582-497 a.C.)

Para Pitágoras y su escuela los números eran la esencia del universo; los pitagóricos sostenían que mediante los números podían explicarlo todo, porque las cosas eran números y los números eran cosas. El cero no existía y el uno era el generador de todos los números, sin pertenecer a ellos y además era indivisible. Bajo este supuesto, las magnitudes eran infinitamente divisibles las cuales servían para medir y eran representadas con segmentos.

Pitágoras afirmaba que las magnitudes eran conmensurables, es decir, que al medirlas (compararlas), siempre se obtendría otra que las midiera una cantidad entera de veces, así:

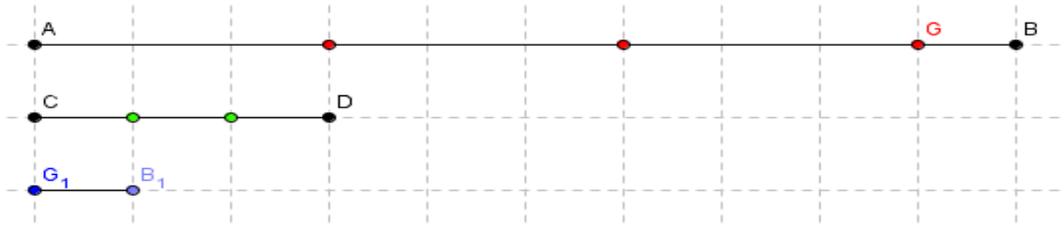


Ilustración 4: Medición-Pitagórica. Construcción propia

$AB = 3CD + GB$, $CD = 3GB$, Entonces $AB = 10GB$, de esta se concluía que

$$\frac{AB}{CD} = \frac{10GB}{3GB}, \text{ lo cual se lee como: } \mathbf{AB} \text{ es a } \mathbf{CD} \text{ como } \mathbf{10GB} \text{ es a } \mathbf{3GB}$$

Con el ejemplo anterior, se puede observar que el sistema de medición (comparación entre magnitudes) empleado por los pitagóricos está ligado a la teoría de la proporción. Pero, a pesar de que su afirmación acerca de las magnitudes conmensurables parecía ser acertada, ocurrió algo que marcó aquella época y que le dio un giro rotundo al conocimiento matemático establecido hasta aquel entonces, este suceso muchos lo denominaron como la primera crisis matemática conocida como la inconmensurabilidad; la cual contradecía la afirmación pitagórica de la conmensurabilidad. En otras palabras

Esto conminó a los matemáticos griegos a, entre otras tácticas, replantear la teoría de la proporción de tal suerte que se pudiera hablar de razones y proporciones, sin necesidad de especificar si las magnitudes consideradas eran o no conmensurables; en últimas, a excluir la noción de medidas numéricas de la geometría. (Guacaneme, 2012, p. 7)

Retomando, la teoría de los pitagóricos estaba marcada por la noción de números y esto encaminó a que la medición (comparación) de magnitudes se expresará en razón, de cuantas veces una estaba contenida en otra. Sin embargo, ante la crisis pitagórica, Euclides logra desarrollar una teoría más amplia de las razones y proporciones.

III. Euclides (430-360 a.C.)

Las aportaciones de Euclides han de ser consideradas como un punto de referencia en la historia, porque retoma y sistematiza (en su obra Los Elementos) todo el conocimiento matemático (geometría y aritmética elemental) hasta su época. Su obra “Los Elementos” está compuesta de trece libros, de los cuales de acuerdo con Guacaneme (2012):

Los libros V, VI, VII y X, de esta obra contienen información relativa a las proporciones, desde nuestra perspectiva ha merecido especial atención el Libro V, puesto que: (i) en este Euclides hace un tratamiento de la teoría de la proporción para las magnitudes geométricas; (ii) esta teoría contiene la definición de proporción (p.2)

Ante esto, es de resaltar que, el Libro V de Los Elementos se considera como la fuente principal referente a las proporciones. Y, pese a que, el trabajo de medición desarrollado por los pitagóricos constituye parte de lo que hoy en día se conoce como proporción, el mérito del trabajo de Euclides en el Libro V radica en que este “constituye una aproximación matemática formal que preserva la naturaleza de estos conceptos y no la contamina con la idea de número ni de medida” (Guacaneme, 2001, p. 242). Finalmente, en

lo relatado hasta aquí, se puede apreciar que la noción de proporcionalidad ha estado presente en la vida del ser humano desde tiempos muy remotos.

2.1.2. La homotecia y sus conceptos asociados

A continuación, se presenta el siguiente mapa conceptual (diagrama 1) en el que se muestra, que el abordaje del concepto de Homotecia implica el uso de algunos elementos conceptuales de la proporcionalidad y otros relacionados con esta.

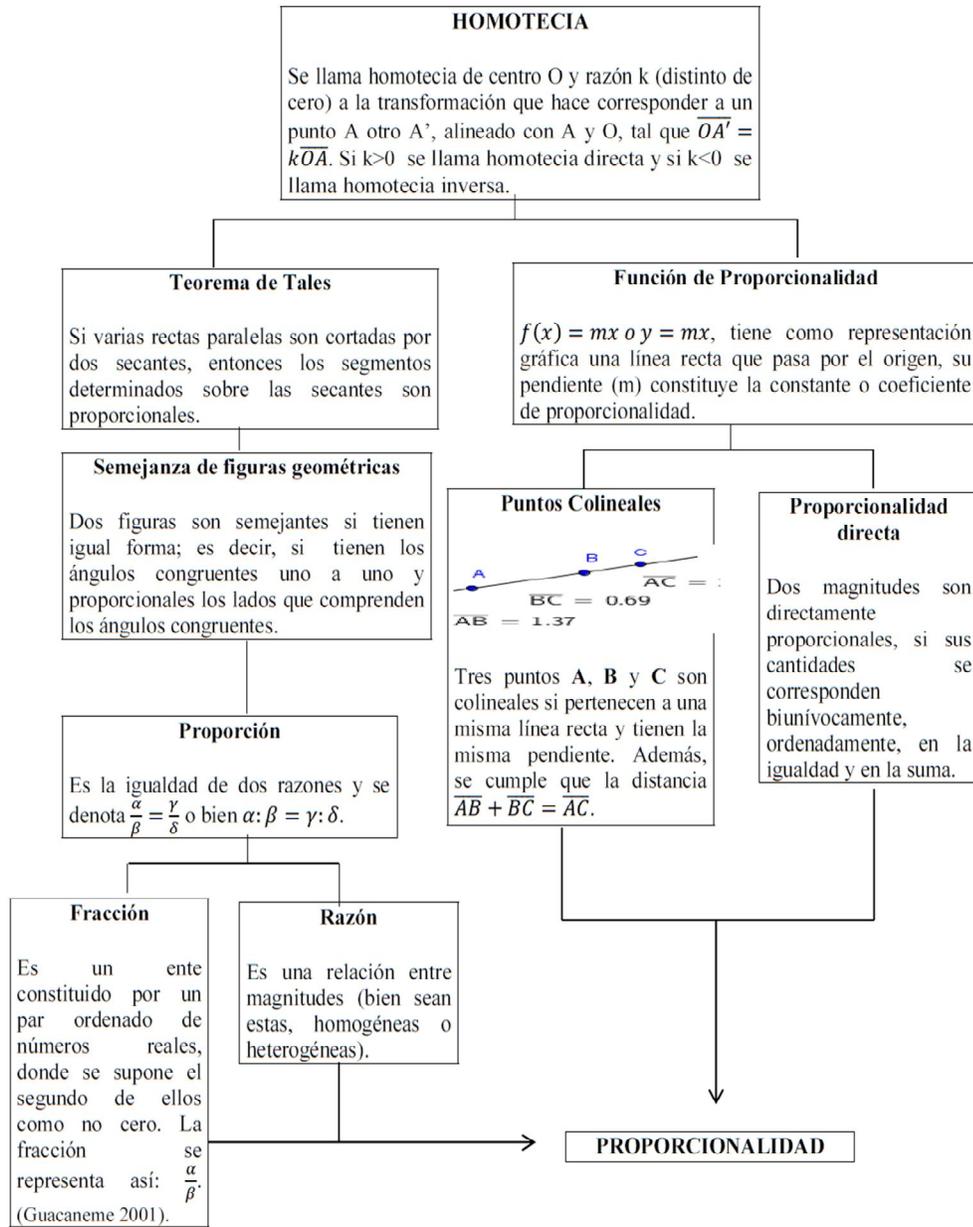


Diagrama 1: la homotecia y sus conceptos asociados. Construcción propia

De acuerdo con el mapa conceptual anterior, se hace importante anotar que en el desarrollo de situaciones relacionadas con la homotecia no solo se potencia el pensamiento espacial, sino también, el pensamiento métrico, variacional y numérico, dado que se incluye el concepto de medida, formas geométricas, patrones, escalas, razones y proporciones, entre otros, lo cual, contribuye al enriquecimiento del pensamiento matemático.

2.1.3. Homotecia de segmentos y polígonos

En lo siguiente, se desarrollan todos los elementos a considerar del concepto de Homotecia para efectos de este trabajo. Pero Antes, es preciso definir qué son las transformaciones geométricas y, entre estas, las isomórficas, atendiendo al hecho de que la Homotecia pertenece a ese grupo de transformaciones.

De acuerdo con Barreto (2010), “**transformación geométrica** es la operación que permite deducir una nueva figura de otra dada. Por tanto, existirán elementos origen y elementos transformados”. Y, en cuanto a las **transformaciones isomórficas**, “son aquellas que sólo conservan la forma; es decir, en ellas los ángulos de la figura original y de la transformada son congruentes y las longitudes proporcionales”.

La **homotecia** es una transformación isomórfica, en la cual se conserva la forma más no siempre el tamaño de la figura. En esta intervienen 4 elementos:

- **Centro de similaridad:** Es la distancia de cada punto al que se le va a aplicar la homotecia y se representa (x_r, y_r)
- **Coefficiente de similaridad:** Es la relación que se presenta entre las distancias que hay desde el centro de similaridad hasta un punto de la figura inicial, y la distancia del centro de similaridad hasta el punto homotético correspondiente. Así, $\overline{OA'} = k\overline{OA}$
- **Figura inicial:** Es la figura dada a la que se le realizará la homotecia y, cuyos puntos se representan (x, y) .

- **Figura homotética:** Es la figura que resulta (figura homotética) después de realizarle la homotecia a la figura inicial y, sus puntos se representan (x', y') .

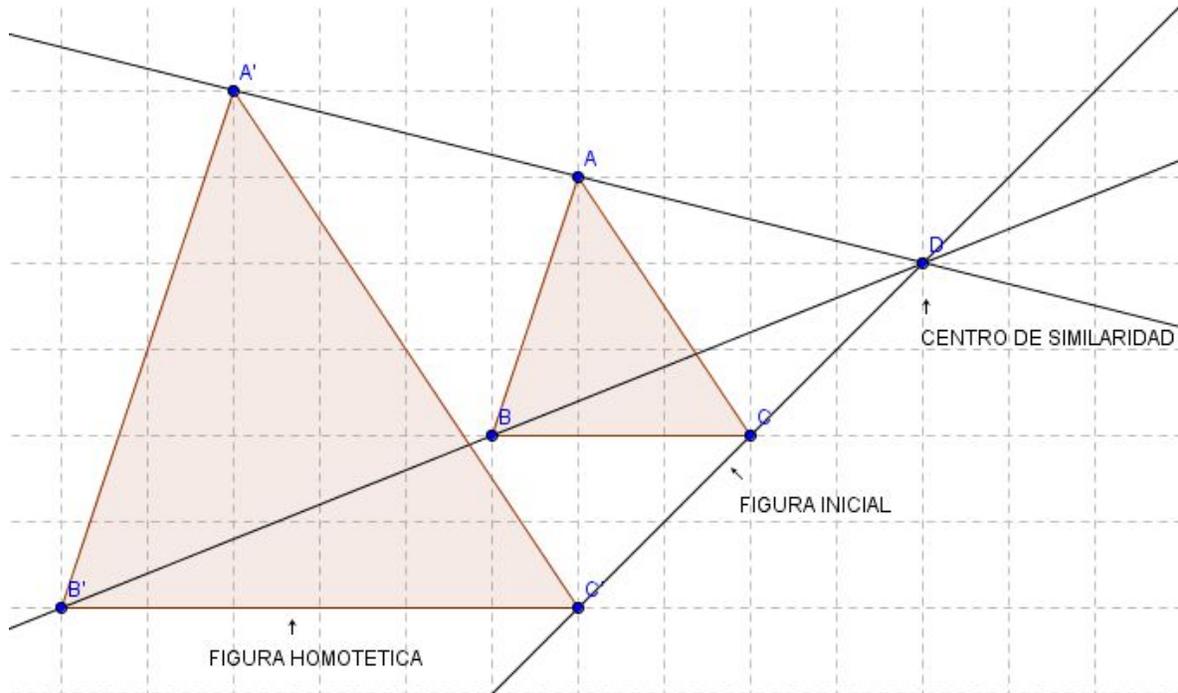


Ilustración 5: representación de una homotecia. Construcción propia.

Propiedades:

- Linealidad: el centro, un punto A y su homotecia describen una misma línea recta y cumplen la propiedad de ser colineales³.
- El cociente de longitudes es proporcional $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$.
- $k = -1$ corresponde a la simetría de centro O, o una rotación alrededor de O con un ángulo de π radianes (180°).
- $|k| > 1$ implica una ampliación de la figura.

³ Definido en el diagrama de Conceptos asociados a la proporcionalidad (p.25)

- $k < 0$ se puede interpretar como la composición de una simetría de centro O con una homotecia sin inversión.
- Si $0 < k < 1$, la figura homotética disminuye su tamaño.

Expresión algebraica para hallar la homotecia:

$$x' = kx - kx_r + x_r$$

$$y' = ky - ky_r + y_r$$

Demostración de la expresión algebraica:

En este apartado se deducirán las ecuaciones para hallar una homotecia, para ello, se tendrán en cuenta; el centro de similaridad $O = (x_r, y_r)$, un punto $A = (x, y)$ y su homotecia $A' = (x', y')$, tal y como se muestra en la ilustración 6

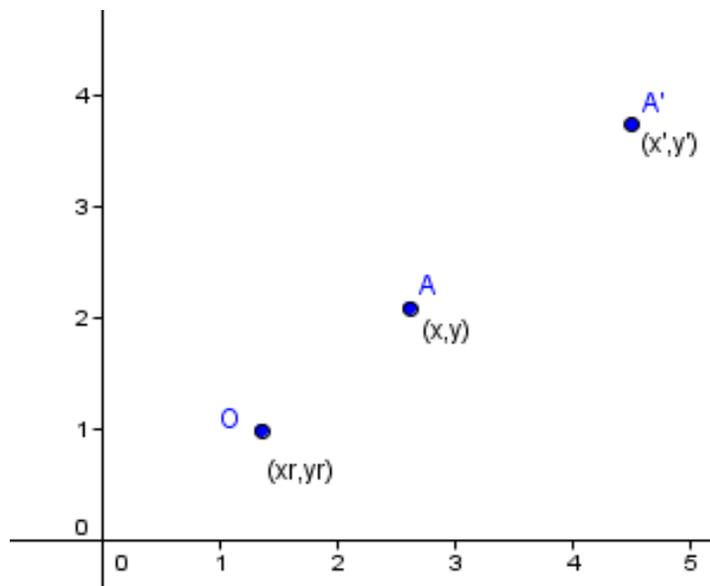


Ilustración 6: Homotecia del punto A con centro en O

- Hipótesis inicial, $\overline{OA'} = k\overline{OA}$

$$\sqrt{(y' - y_r)^2 + (x' - x_r)^2} = k\sqrt{(y - y_r)^2 + (x - x_r)^2}$$

$$\left(\sqrt{(y' - y_r)^2 + (x' - x_r)^2}\right)^2 = \left(k\sqrt{(y - y_r)^2 + (x - x_r)^2}\right)^2$$

$$\left(\sqrt{(y' - y_r)^2 + (x' - x_r)^2}\right)^2 = \left(k\sqrt{(y - y_r)^2 + (x - x_r)^2}\right)^2$$

$$(y' - y_r)^2 + (x' - x_r)^2 = k^2[(y - y_r)^2 + (x - x_r)^2]$$

$$(y' - y_r)^2 = k^2[(y - y_r)^2 + (x - x_r)^2] - (x' - x_r)^2$$

- Ecuación de la recta

$$m = \frac{y - y_r}{x - x_r} \quad y' - y_r = m(x' - x_r)$$

$$(y' - y_r)^2 = \left[\left(\frac{y - y_r}{x - x_r}\right)(x' - x_r)\right]^2$$

$$(y' - y_r)^2 = \frac{(y - y_r)^2(x' - x_r)^2}{(x - x_r)^2} \quad (y' - y_r)^2 = (y' - y_r)^2$$

$$\frac{(y - y_r)^2(x' - x_r)^2}{(x - x_r)^2} = k^2[(y - y_r)^2 + (x - x_r)^2] - (x' - x_r)^2$$

$$\frac{(y - y_r)^2(x' - x_r)^2}{(x - x_r)^2} + (x' - x_r)^2 = k^2[(y - y_r)^2 + (x - x_r)^2]$$

$$\frac{(y - y_r)^2(x' - x_r)^2 + (x - x_r)^2(x' - x_r)^2}{(x - x_r)^2} = k^2[(y - y_r)^2 + (x - x_r)^2]$$

$$(y - y_r)^2(x' - x_r)^2 + (x - x_r)^2(x' - x_r)^2 = k^2[(y - y_r)^2 + (x - x_r)^2](x - x_r)^2$$

$$(x' - x_r)^2[(y - y_r)^2 + (x - x_r)^2] = k^2[(y - y_r)^2 + (x - x_r)^2](x - x_r)^2$$

$$(x' - x_r)^2[(y - y_r)^2 + (x - x_r)^2] = k^2[(y - y_r)^2 + (x - x_r)^2](x - x_r)^2$$

$$(x' - x_r)^2 = k^2(x - x_r)^2$$

$$\sqrt{(x' - x_r)^2} = \sqrt{k^2(x - x_r)^2}$$

$$x' - x_r = k(x - x_r)$$

$$x' - x_r = kx - kx_r$$

$$\blacksquare \quad x' = kx - kx_r + x_r$$

De manera análoga se deduce $y' = ky - ky_r + y_r$

Ejemplos

A continuación, se muestran dos ejemplos en los cuales es posible apreciar las propiedades de la Homotecia y los conceptos que esta moviliza. Además, para el desarrollo de los ejemplos se hace uso de las expresiones algebraicas previamente demostradas.

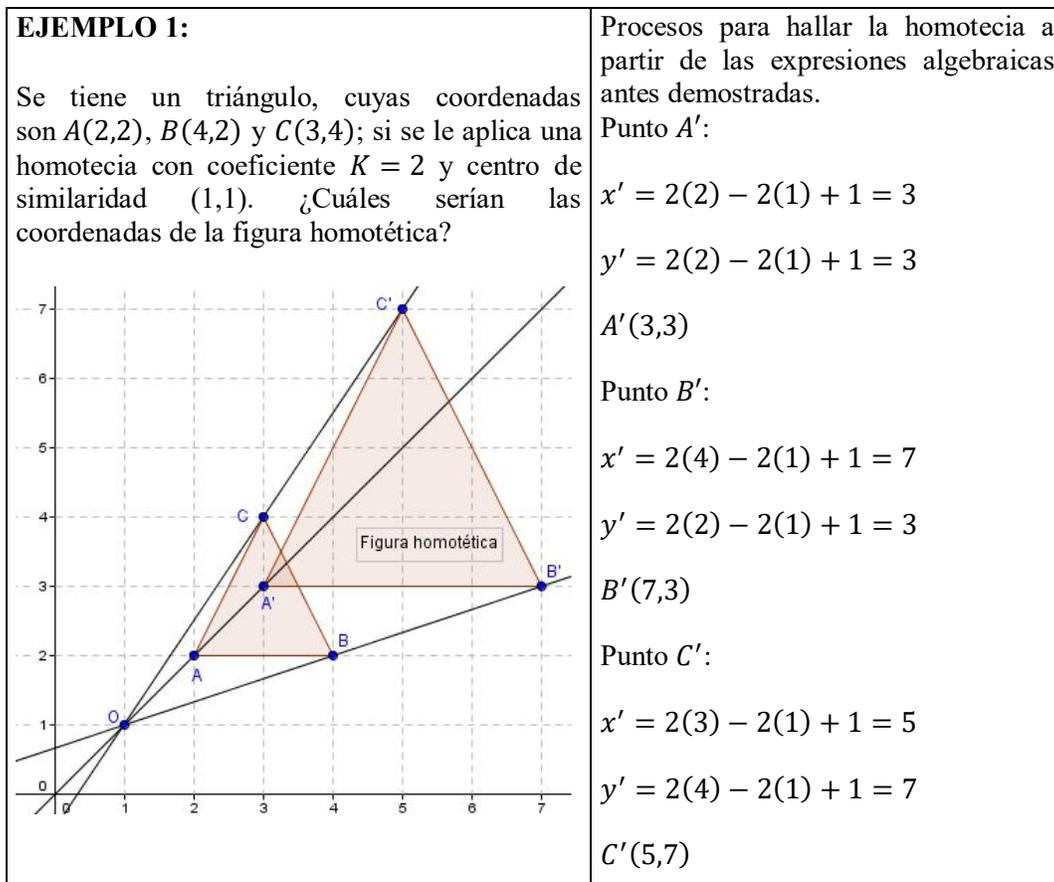


Ilustración 7: representación gráfica de la homotecia

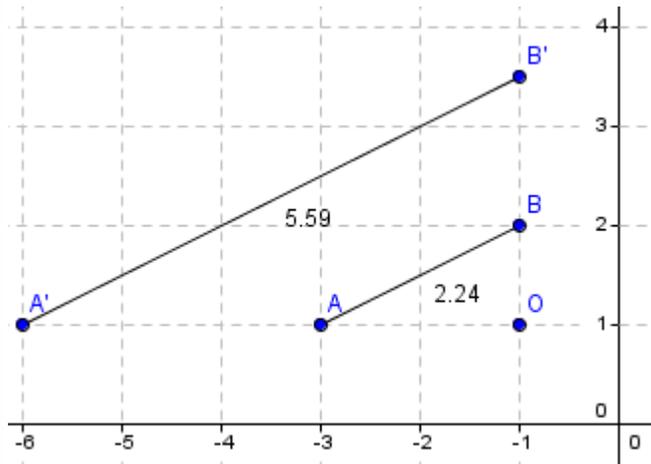
En el ejemplo 1 se muestra como a partir de las expresiones algebraicas previamente demostradas, se halla una figura homotética, teniendo en cuenta la figura inicial, el centro, y el coeficiente o razón k . Además, en la representación gráfica es posible apreciar la propiedad de linealidad que se presenta entre el centro, un punto y su respectivo punto homotético, también se movilizan algunos conceptos como:

- Semejanza de triángulo: dado que los ángulos correspondientes a la figura inicial y la homotética son congruentes y sus lados proporcionales, conservándose la forma de las figuras (inicial y homotética).
- Proporcionalidad geométrica: teniendo en cuenta que la figura inicial y la homotética son semejantes, se hace posible establecer comparaciones “entre al menos tres cantidades de magnitudes homogéneas” Guacaneme (2012, p.80). A manera de ejemplo, $\frac{\overline{AB}}{A'B'} = \frac{\overline{BC}}{B'C'}$.
- Función lineal: a partir del centro y un punto de la figura inicial se pueden encontrar una relación de dependencia lineal (función lineal). Para ello, se halla la pendiente ($m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$) teniendo en cuenta las coordenadas del centro y el punto tomado⁴. Luego, haciendo uso del modelo punto pendiente $y - y_1 = m(x - x_1)$ se obtiene la expresión algebraica que da cuenta de la línea recta que pasa por el centro y, el punto tomado y su homotecia.

⁴Para describir el proceso que permite hallar la expresión que muestra la línea recta se tomaron el centro y un punto de la figura inicial. Pero, es posible tomar otro par de puntos; por ejemplo, el centro con el punto homotético y el punto inicial con el homotético.

EJEMPLO 2:

Hallar el coeficiente de similaridad (o razón k) de una homotecia, si la figura inicial es un segmento de coordenadas $A(-3,1)$ y $B(-1,2)$, su figura homotética $A'(-6,1)$ y $B'(-1,3.5)$ y, el centro $O(-1,1)$.



De las expresiones algebraicas demostradas, se deducen las siguientes para hallar el coeficiente de similaridad o razón k .

1. $k = \frac{x' - x_r}{x - x_r}$
2. $k = \frac{y' - y_r}{y - y_r}$

Procesos para hallar el coeficiente de similaridad:

Se toma uno de los puntos de la figura inicial y su homotecia, luego se reemplazan los respectivos datos en una de las expresiones.

Antes de reemplazar, hay que tener presente que, si un punto y su homotecia forman una línea horizontal, entonces para hallar la razón k se debe usar la expresión 1, si es una línea vertical, entonces se debe usar la expresión 2. Pero, si la línea es oblicua, se hace uso de cualquiera de las dos expresiones.

Puntos A y A' :

$$k = \frac{-6 - (-1)}{-3 - (-1)} = \frac{-5}{-2} = 2.5$$

$$k = 2.5$$

Ilustración 8: representación gráfica de la homotecia.

El ejemplo 2 muestra como hallar el coeficiente de similaridad (k) a partir de las expresiones deducidas (1 y 2), en las cuales se puede apreciar la relación presente entre las expresiones deducidas (1 y 2), en las cuales se puede apreciar la relación presente entre las distancias $\overline{OA'}$ y \overline{OA} con el coeficiente k ($\overline{OA'} = k\overline{OA}$). De la anterior relación, despejando se obtiene $k = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$ donde k es una razón entre dos magnitudes ($\overline{OA'}$ y \overline{OA}). De la misma manera, se puede establecer la comparación entre las magnitudes $\overline{A'B'}$ y \overline{AB} para hallar el

coeficiente de similaridad k . Ahora bien, sabiendo que $\overline{A'B'} = 5.59$ y $\overline{AB} = 2.24$, entonces,

$$k = \frac{5.59}{2.24} = 2.5$$

En los ejemplos anteriores de homotecia, se identificaron algunos elementos y conceptos asociados a la noción de proporcionalidad geométrica, tales como; razón, proporción, linealidad, semejanza, entre otros, que están presentes en las formas geométricas. Además, se sabe que la homotecia es un concepto propio del pensamiento espacial, sin embargo, al trabajarse desde un enfoque analítico posibilita establecer un nexo directo con conceptos del pensamiento variacional (variación, invarianza, relación de dependencia, correlación entre variables, entre otros).

2.2. Perspectiva didáctica

En esta perspectiva, se describen algunas dificultades asociadas al tratamiento didáctico que ha recibido la proporcionalidad y a partir de ello se muestra una propuesta para el abordaje de esta. De igual forma, se propone la Teoría de las situaciones didácticas de Guy Brousseau (2007), como una forma para llevar a cabo la implementación de la Secuencia Didáctica diseñada. Y finalmente, se expone cómo es entendida la Secuencia Didáctica y los elementos que la componen (Situación, Tarea y Actividad).

2.2.1. Una aproximación al concepto de proporcionalidad

De acuerdo con Guacaneme (2001, 2002) el estudio de la proporcionalidad es importante para el desarrollo del pensamiento matemático, y por ello, está presente en muchos libros de texto. Además, ha sido abordada por distintos investigadores en el área de la didáctica. Pero, a pesar de este hecho, no es posible apreciar una definición precisa en

cuanto a este objeto, puesto que, tanto en las diversas investigaciones desarrolladas, como en los diferentes libros de textos revisados por este autor, no ha sido posible identificar una definición común⁵.

De igual forma, en investigaciones realizadas por Guacaneme (2001, 2002, 2016) y Obando (2015), se pudo identificar que hablar de proporcionalidad implica el estudio del concepto de proporción, y para abordar la proporción se requiere del desarrollo del concepto de razón. Sin embargo, este último concepto (razón) presenta dificultades para su definición debido a las interpretaciones que le dan algunos autores, tal como se mostrara a continuación.

El concepto de razón y sus distintos abordajes

De acuerdo con algunos libros de texto y propuestas curriculares revisadas por Guacaneme (2001, 2002), la enseñanza del concepto de razón, por lo general está precedida del estudio de los números racionales y las fracciones. Siendo las fracciones el punto de partida para introducir el concepto de razón, el cual es definido por algunos libros de texto de la siguiente manera; “una **razón** entre dos números racionales a y b , $b \neq 0$, es el cociente indicado entre a y b ”. Esta definición no permite identificar una distinción clara entre fracción y razón, puesto que, la fracción también suele ser definida como el cociente indicado de números enteros ($\frac{a}{b}$ con $b \neq 0$).

⁵ En los documentos analizados por Guacaneme (2002) no se ha identificado una definición común que unifique el concepto de proporcionalidad.

Ante esto, Guacaneme (2001) sugiere “pensar en las fracciones y las razones como objetos matemáticos equivalentes entre si y asociados a la división a través de la función f (función cociente)”. En concordancia con esto, Obando (2015), señala que las fracciones y las razones no aluden directamente al mismo objeto matemático, más bien las fracciones son una forma de cuantificar las razones, siendo las primeras una expresión simbólica (representación) que median la cuantificación de dicha relación.

De otro lado, la razón además de ser interpretada como un cociente indicado entre a y b , también ha sido definida como el resultado de una división de dos números reales, como se muestra en uno de los libros de textos revisados por Guacaneme (2001), “se llama razón entre dos números a y b con $b \neq 0$ al cociente de la división de a por b ”. Pero, al proporcionar una definición como esta (razón como el cociente resultante de la división) no habría una “distinción clara” entre un número real y una razón, simplemente se estaría introduciendo un nombre nuevo (razón) para algo ya conocido (número real) (Guacaneme 2001).

En relación con lo anterior, siguiendo a Obando (2015) y Guacaneme (2012, 2016), se piensa que la confusión entre la razón y el número real tiene su génesis en la transfiguración que ha sufrido históricamente la razón, logrando identificar desde la perspectiva de ambos autores, momentos importantes de la historia que dan cuenta de la dificultad que subyace en el concepto moderno de razón. En este sentido Guacaneme (2016), reseña alrededor de cien documentos sobre teorías de la proporción (el estudio de la proporción incluye el concepto de razón) identificando seis momentos claves de la historia: teorías pre-euclidianas, teoría euclidiana, la época helenística, influencia de los árabes y latinos, la Baja Edad Media y el Renacimiento, y la época de emergencia de la teoría de los

números reales. Se podría pensar, que estos periodos de la historia se relacionan en cierta medida con la revisión de algunos aspectos de la historia que hace Obando (2015), sobre las razones, proporciones y proporcionalidad a partir de las practicas matemáticas de culturas antiguas hasta épocas cercanas a la modernidad (babilónica, egipcia, china, hindú, griega, árabes, latina, entre otras), distinguiendo algunos tratamientos que se le han dado a los objetos matemáticos antedichos, y ciertas dificultades asociadas a estos.

En concordancia con lo anterior, desde la perspectiva de Obando (2015), se ha podido identificar que la idea de razón ha estado presente de cierta forma en las prácticas matemáticas de culturas antiguas, quizás sin una etiqueta nominal o con nombres diferentes. De dichas prácticas se postula la fracción como una forma de representar la razón, concibiendo que para el estudio de las primeras se requiere de los procesos de medición sustentados en la relación de dos magnitudes (razón), es decir, que al medir (comparar) dos magnitudes se está estableciendo una relación entre estas (razón), la cual se puede cuantificar por medio de una fracción o no, esto dicho, porque el tipo de representación que se utilice depende de la unidad de medida que se tome como referencia. Así, por ejemplo; si se tiene un segmento de 12 cm y otro de 3 cm, y se quiere saber cuántas veces cabe el grande en el pequeño, dicha relación quedaría expresada en fracción ($1/4$). Esto, se puede entender como una relación entre magnitudes inconmensurables. Sin embargo, si fuese el caso inverso (cuántas veces la pequeña cabe en la grande), esta relación se podría expresar en un numero entero (4), lo cual se obedece a una relación entre magnitudes conmensurables. En este sentido, se puede notar que este tipo de relaciones entre magnitudes conmensurables e inconmensurables, se acerca al concepto de real que se tiene en la actualidad.

De otro lado, desde la perspectiva de Guacaneme (2016), se reseña, por una parte, que algunos historiadores se han ocupado del estudio de la proporción presente en la definición V. 5. Y la definición V. 3. Que reseña la razón como, una relación entre dos magnitudes con respecto al tamaño de estas, la cual se ha señalado como vaga o poco precisa; y por otra parte, se muestra que otros historiadores han comentado sobre posibles correspondencias que se podrían hacer entre la teoría euclidiana de la proporción y los desarrollos de la teoría de las cortaduras de R. Dedekind; o esta última en relación con los planteamientos teóricos sobre las proporciones de Eudoxio. Ante esto, cabe resaltar que posiblemente dicha correspondencia se establece, debido a que en los Elementos se retoman y reformulan las aportaciones de Eudoxio (y otras teorías pre euclidianas), y se presenta una teoría de las proporciones para magnitudes conmensurables e inconmensurables; y desde la teoría de Dedekind también se retoman elementos de Eudoxio.

Concepto de magnitud, cantidad de magnitud y medida

Considerando la razón como una comparación entre magnitudes, se hace necesario precisar para efectos de este trabajo qué se entiende por magnitud, cantidad de magnitud y medida. En este orden de ideas, Guacaneme (2001) muestra que la magnitud es definida por algunos libros de matemática formal como sigue; “si en un conjunto homogéneo m se ha definido la operación suma, los elementos de m definen una magnitud, entendiendo por tal la cualidad común que hace que los elementos de m sean igualables y sumables”. Esta definición de acuerdo con Guacaneme (2001) y Obando (2015), presenta dificultad debido al carácter restrictivo (operación suma definida al interior de la magnitud), lo cual no da lugar a las magnitudes físicas, geométricas y sociales comúnmente usadas.

Ante esa dificultad, Obando (2015), plantea una distinción entre Magnitud, cantidad de magnitud y medida. En primer lugar, el autor define las magnitudes en términos de sistemas de cantidades, entendiendo este último “en su forma más general posible, al conjunto de *cantidades*⁶ con la estructura mínima posible: una estructura relacional de orden [...] así por ejemplo, *Longitud, Peso, Densidad* se refieren a formas de atribución sobre un evento o fenómeno, que en cada caso es una *Magnitud*”. En segundo lugar, entiende como cantidad de magnitud “una instanciación particular de una *Magnitud* [...] que sirve como unidad de medida”. Y en tercer lugar, plantea que la medida “es un proceso posterior que busca especificar numéricamente una determinada cantidad de magnitud”. En este sentido, para efectos de esta indagación se consideran el concepto de magnitud, cantidad de magnitud y medida en el sentido de Obando, ya que, de acuerdo a este autor son útiles porque

Permiten tratar de forma genérica con eventos o fenómenos sin tener que hacer las distinciones entre magnitudes físicas, matemáticas o sociales. Además, facilita hablar de razones sin tener que entrar a distinguir si la razón se define entre números, Magnitudes (intensivas o extensivas, escalares o vectoriales, matemáticas o sociales) o incluso, sin la necesidad del recurso al número.

Así por ejemplo⁷, 7 cm y 1.5 (km) denotan longitud (magnitud longitud). Las abreviaciones **cm** y **km** refieren a la cantidad de magnitud (tomadas como unidad de medida), donde km es una cantidad de magnitud para expresar longitudes grandes y cm una

⁶ una *cantidad* homogeniza bajo una misma clase un conjunto de eventos o fenómenos que son equivalentes desde el punto de vista del agente que hace la atribución. (Obando, 2015 p. 152)

⁷ El ejemplo muestra la forma en la que se interpretan los conceptos de magnitud, cantidad de magnitud y medida de cantidad de magnitud.

cantidad de magnitud para longitudes pequeñas, y, 7 y 1.5 corresponden a la medida de la cantidad de magnitud.

La proporción a partir del concepto de razón

Considerando el concepto de razón como necesario para el desarrollo del concepto de proporción, y atendiendo a las sugerencias de Guacaneme (2001), si el primero es concebido como el cociente entre dos números (reales), y el segundo, como la igualdad entre razones; entonces, el concepto de proporción se reduciría a la igualdad entre números reales. De este modo, la proporción no sería más que la asignación de otro nombre para la relación de igualdad entre números reales, ya establecida en las matemáticas. Ante esto, se considera la proporción como la igualdad entre razones, entendiendo el concepto de razón como una relación entre magnitudes, donde el cociente derivado de dicha relación (razón), recibe el nombre de constante de proporcionalidad. En este sentido, es importante anotar que para establecer la proporción, las razones igualadas deben tener la misma constante de proporcionalidad.

De acuerdo con lo anterior, se puede decir que es difícil precisar una definición para la proporcionalidad, dado a las distintas interpretaciones en el ámbito de la aritmética que se hacen en cuanto al concepto de razón (como cociente indicado $\frac{a}{b}$ y como cociente de la división *a por b*), puesto que, estas no dejan ver la importancia que tiene el concepto de magnitud para el desarrollo del concepto de razón. Esto se dice, porque a partir de tales interpretaciones se privilegia la parte numérica (medida). Ante esto, Guacaneme (2001) señala que es posible “ubicar la teoría de las magnitudes como el contexto donde surgen los

conceptos de razón, proporción y proporcionalidad desde un ámbito no exclusivamente aritmético”.

Por otra parte, cabe resaltar que las magnitudes pueden ser homogéneas o heterogéneas, siendo estas últimas, otra de las causas que no permiten que se brinde una definición precisa para la proporcionalidad. Más bien, se pueden proporcionar aproximaciones a este objeto de estudio, por esta razón, se habla de noción de proporcionalidad. Por lo anterior, y reconociendo las dificultades asociadas al desarrollo de la proporcionalidad en los procesos de enseñanza-aprendizaje, es importante anotar que, en este trabajo de indagación se retoman elementos de este objeto matemático (proporcionalidad), específicamente de la proporcionalidad geométrica. Por ello, se hace necesario adoptar una “definición” sobre la proporcionalidad geométrica. Esta se da entre al menos tres objetos geométricos (ángulos, segmentos, superficie) o más precisamente, entre al menos tres cantidades de magnitudes homogéneas. (Guacaneme, 212 pag).

Por otra parte, considerando que el concepto de razón es necesario para el desarrollo de la proporción, esta última se encuentra en la homotecia en la relación de semejanza que se da entre objetos homotéticos.

2.2.2 Teoría de las situaciones didácticas

La puesta en marcha de la secuencia didáctica de este trabajo de indagación se hizo conforme a lo planteado en la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau (2007), cuyo enfoque plantea la interrelación (situación didáctica) entre el profesor, estudiante y el medio didáctico (secuencia didáctica), siendo el profesor quien proporciona al estudiante el medio didáctico en el cual este se aproxima a la conceptualización de los objetos. En lo que

respecta a las situaciones didácticas, hay cinco situaciones que son: ***la situación de acción, formulación, validación, devolución del problema e Institucionalización.***

Situación de acción: los estudiantes seleccionados, se enfrentaron de forma individual a tres situaciones estructuradas en tareas que comprendían un conjunto de actividades. Las situaciones involucraron los elementos conceptuales y procedimentales que se consideraron necesarios para aproximar a los estudiantes al aprendizaje del concepto de homotecia a partir de la noción de proporcionalidad geométrica (razón, proporción, semejanza, congruencia, linealidad, covariación, entre otros). No está de más mencionar que, las situaciones propuestas fueron previamente diseñadas bajo la consideración de que las tareas contenidas movilizaran una gama de heurísticas para dar solución a lo planteado.

Situación de formulación: posterior a la situación acción, se presentó la situación de formulación en la que se esperaba que los estudiantes asumieran una postura reflexiva para hacer conjeturas, establecer hipótesis y comunicar un mensaje relacionado con las actividades propuestas en la Secuencia Didáctica.

Situación de validación: una vez llevada a cabo la situación de formulación, se pusieron en interacción grupos de estudiantes con el medio didáctico (secuencia didáctica), con el fin de promover un proceso de socialización en el cual cada estudiante se viera en la necesidad de comunicar o compartir sus ideas y experiencias para enriquecer el proceso de construcción del saber en cuestión (aproximación al aprendizaje del concepto de homotecia de segmentos y polígonos a partir de la noción de proporcionalidad geométrica). En este proceso, algunos estudiantes asumían el rol de ponentes y otros de oponentes cuando la estrategia empleada por cada uno difería, o cuando llegaban a respuestas distintas,

justificando la pertinencia de estas. Así, los estudiantes justificaban sus respuestas a partir de criterios matemáticos establecidos.

Devolución del problema: en esta etapa se hicieron algunas intervenciones, verificando el grado de pertinencia de los argumentos usados por los estudiantes frente a las situaciones planteadas; entonces, se intervino (orientador del proceso) para problematizar las situaciones propuestas a los estudiantes, mediante preguntas que permitían concebir un camino desde la particularidad de ciertos casos hasta la generalidad de estos, para generar en ellos un estado de seguridad frente a lo realizado.

Situación de institucionalización: en esta etapa se intervino haciendo una recapitulación de las situaciones didácticas anteriores (acción, formulación, validación y devolución del problema), en la que los estudiantes interactuaron individualmente con el medio didáctico, comunicaron, compartieron sus ideas y experiencias entre sí, para corroborar la pertinencia y validez de sus producciones. Además, se enfrentaron algunas veces a una nueva situación que se les proponía a partir de las antes resueltas, aclarando dudas y haciendo las observaciones pertinentes, para posteriormente, organizar y formalizar el saber en construcción (Institucionalización del saber).

2.2.3 Secuencia Didáctica

Para fines de este trabajo de indagación, se consideró el diseño e implementación de una secuencia didáctica estructurada en Situaciones, Tareas y Actividades. Esta estructura permitió la articulación de algunos elementos conceptuales y procedimentales de la proporcionalidad y otros asociados a esta, para aproximar a los estudiantes de séptimo grado de la Institución Educativa Liceo del Pacifico al concepto de Homotecia de

Segmentos y Polígonos. De esta manera, la Secuencia Didáctica que se implementó como estrategia para alcanzar el objetivo de aprendizaje de esta indagación, es entendida como.

Una ruta de acciones diseñada para alcanzar los propósitos de enseñanza, una opción para la organización y sistematicidad de la intervención del docente en el aula, en tanto que permite la revisión y reflexión del quehacer didáctico del maestro buscando plantear criterios que le permitan tomar decisiones en la reconstrucción y diseño de situaciones de enseñanza. (Buitrago, Torres & Hernández, 2009 p. 15).

Dicho de otra manera, una Secuencia Didáctica en este trabajo es entendida como una forma de abordar y organizar los conocimientos objeto de enseñanza, de tal manera que estos se relacionen entre sí, con el fin de desarrollar aprendizajes en los estudiantes.

2.2.4 Situación, Tarea y Actividad

Considerando que la secuencia didáctica se estructuró en situaciones que se encuentran subdivididas en tareas y cada tarea en actividades, es importante definir cómo se entienden, para efectos de este trabajo, los términos Situación, Tarea y Actividad. Para ello, se retoman algunos aportes de Obando (2015) en relación con dichos términos, como se muestra a continuación.

La *situación* es la manera como un estudiante o grupo de estudiantes actualiza en un aquí y en un ahora (momento histórico específico) su actividad matemática en el marco de las condiciones institucionales (medios culturales a su disposición) para su acción y en relación con los problemas que debe resolver al enfrentar la tarea propuesta por el maestro. (Obando, 2015 p. 162)

En este orden de ideas, la Situación se entiende como un marco general contextualizado que engloba un conjunto de problemas (a los cuales se denominan Tareas). Lo cual guarda relación con lo que el autor llama *tipos de tareas*, esto visto como “un conjunto de problemas agrupados en función de unas características lo suficientemente cercanas para que la actividad de los sujetos se desarrolle con cierto nivel de estabilidad” (2015, p. 57). Atendiendo a esta idea, en la secuencia didáctica diseñada, se intentó estructurar las Situaciones de tal modo que las Tareas estuvieran interrelacionadas.

Ahora bien, “las tareas se deben definir en términos de las acciones que realizan los individuos, tomando en consideración los tipos de cálculo” (Obando, 2015 p. 21). Así, en este trabajo de indagación se le denomina Tarea a un problema enmarcado en un contexto que para solución requiere de ciertas estrategias (heurísticas). Las Tareas comprenden una serie de actividades a realizar que posibilitan el desarrollo oportuno de estas. De esta manera, “la actividad se define en relación *al conjunto de acciones socialmente dirigidas (orientadas) con el objetivo de alcanzar un fin*”. (Obando, 2015 p. 45), en este sentido, las preguntas o acciones son entendidas como Actividades propuestas con la intencionalidad de corresponder a un objetivo específico (Tarea) que a su vez permite dar cuenta de un objetivo general (Situación).

2.3. Perspectiva curricular

El estado colombiano a partir de la emergencia de la renovación curricular ha venido desarrollando diversas estrategias para la promoción y orientación de los procesos formativos de las instituciones en aras de mejorar la calidad educativa. De dicha emergencia, se generó la propuesta de los Lineamientos Curriculares de la cual se resalta que “no debe asumirse como un texto acabado que agota todos los posibles referentes para

elaborar o desarrollar un currículo, sino más bien como una propuesta en permanente proceso de revisión y cualificación” MEN (1998, P. 4).

Ocho años después, como consecuencia de dicho proceso de revisión y cualificación, surgieron los Estándares Básicos de Competencias en Educación Matemática como una propuesta, que establece los niveles básicos que se sugieren que deben alcanzar los estudiantes de todas las regiones del país y, cómo estos median el desarrollo de habilidades y destrezas en los estudiantes para resolver situaciones en distintos contextos. Para ello, se dividen los estándares en cinco pensamientos (variacional, numérico, aleatorio, métrico y espacial).

Pasados 9 años, como corolario de los estándares, se proponen los DBA (Derechos Básicos de Aprendizaje) en el 2015 como una herramienta que le permitiría a la familia, colegios y educadores conocer qué es lo elemental que un estudiante debe saber en matemática en cada uno de los distintos grados de escolaridad. En estos, se presentan los aprendizajes de forma secuencial, buscando así la apropiación por parte de los estudiantes de los elementos esenciales de cada nivel escolar. Dos años en antesala a la actualidad, se publicó por parte del Icfes la Matriz de Referencia donde se articularon los diferentes pensamientos en componentes curriculares, y que explicita, además, los elementos evaluados en las pruebas de estado (saber 3°, 5°, 7°, 9° e icfes 11°) de acuerdo con las competencias que deben lograr los estudiantes.

Los documentos antes mencionados, tienen la función de ofrecer una mirada de propuesta curricular sobre los procesos de enseñanza-aprendizaje en las diferentes Instituciones Educativas de Colombia, buscando con ello, fortalecer los procesos

educativos y dejando claro que en matemáticas se debe generar una articulación entre competencias y aprendizajes, para así movilizar el desarrollo del pensamiento matemático.

Por lo anterior, se considera que un diseño curricular debe estar mediado por tres elementos indisolubles: Procesos Generales, Conocimientos Básicos y el Contexto, los cuales favorecen el desarrollo de competencias matemáticas y la promoción de aprendizajes significativos en los estudiantes. Dentro de este marco, de acuerdo con el

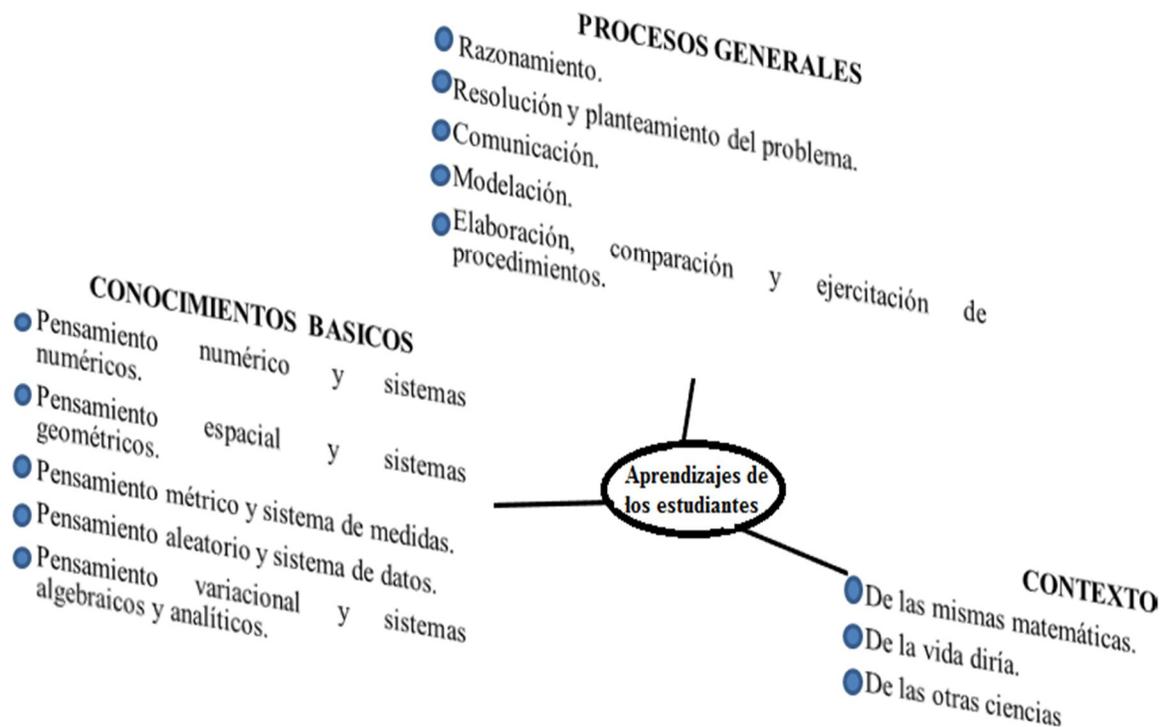


Ilustración 9: elementos tomados del MEN (1998)

MEN (1998), esta triada tiene funciones diferentes; los Procesos Generales se enfocan en el aprendizaje, los Conocimientos Básicos se relacionan con procesos específicos que incorporan los distintos pensamientos (Variacional, Numérico, Espacial, Métrico y Aleatorio) y los sistemas propios de cada uno (numérico, medida, geométrico, de datos, algebraico y analíticos), y el Contexto, centra su atención en el entorno de los estudiante y en cómo dotar de sentido las matemáticas de los mismos. En la siguiente ilustración se muestra los elementos que constituyen un currículo.

Con respecto a lo mostrado en la tabla 3 cabe resaltar que, cada uno de los elementos considerados para estructurar un currículo, deben estar presentes en el acto educativo, Sin embargo, los Conocimientos Básicos que incluyen los distintos pensamientos y sistemas matemáticos, no se considera que sean abordados de forma meramente vertical, sino también de forma horizontal, aclarando que abordar uno de los pensamientos desde el mismo sistema que requiere para su desarrollo se considera como verticalidad, y que el abordaje de uno de los pensamientos en relación con otros pensamientos se considera horizontalidad. En este sentido, en la presente indagación se consideran algunos Estándares Básicos de Competencias del grado séptimo como se muestra en la tabla 4 a continuación.

Pensamiento	Estándar
Espacial y sistemas Geométricos	Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte.
	Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando expresiones asociadas visuales.
	Resuelvo y formulo problemas usando modelos geométricos.
Variacional y Sistemas algebraicos	Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos.
Métrico y sistemas de medidas	Resuelvo y formulo problemas en contextos de medidas relativas y de variaciones en las medidas.
	Resuelvo y formulo problemas que involucren factores escalares (diseño de maquetas y mapas)

Numérico y sistemas numéricos	Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (Fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida
-------------------------------	--

Tabla 3: elementos tomados de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas grado sexto-séptimo

Como se puede apreciar en la tabla 4, los estándares mostrados se distribuyen en los pensamientos; variacional, numérico, espacial y métrico. Con ello, se puede observar que los conceptos (como razón, función, teorema de Tales, semejanza, homotecia, teorema de Pitágoras) derivados de dichos estándares viabilizan el abordaje de la enseñanza en Educación Matemática de forma horizontal y vertical, posibilitando un trabajo integral entre pensamientos.

En otro orden de ideas, se resalta que los componentes curriculares son un tema asociado a la Matriz de Referencia en la que se establece una agrupación de pensamientos de la siguiente forma; el componente numérico variacional agrupa el pensamiento numérico y el variacional, el componente aleatorio da cuenta de sí mismo, y el componente métrico espacial integra el pensamiento espacial y el métrico. En este sentido, en cuanto a la articulación de pensamientos, la noción de proporcionalidad recibe un lugar preponderante puesto que se considera como base fundamental para el desarrollo de otros conceptos (como razón, función, teorema de Tales, semejanza, homotecia, teorema de Pitágoras) que están inmersos en los diferentes pensamientos.

CAPÍTULO 3: DE LA PROPORCIONALIDAD A LA HOMOTECIA EN EL AULA

El presente trabajo de indagación es de tipo cualitativo, basado en el modelo de investigación de estudio de casos, fundamentado en los autores Álvarez C. & San Fabián J. (2012), los cuales señalan que este método de investigación educativo se ocupa del estudio particular y la complejidad de uno o varios casos para la comprensión de su actividad en contextos específicos, tratando de conocer el comportamiento detallado de las partes que componen el grupo seleccionado.

Teniendo en cuenta lo anterior, para fines de este trabajo se tomó al azar un grupo de 12 estudiantes de grado 7 de la I. E. Liceo del Pacifico, a los cuales se les hizo entrega de una Secuencia Didáctica que consta de tres Situaciones estructuradas en Tareas y Actividades, y a partir de las producciones de los estudiantes, se caracterizaron los resultados y se analizaron los mismos a la luz de los referentes teóricos en esta indagación.

En este orden de ideas, para esta indagación se buscaba hacer una aproximación al aprendizaje del concepto de homotecia de segmentos y polígonos, a partir de la noción de proporcionalidad geométrica. Para corresponder a esto, se desarrolló lo siguiente.

Revisar algunos trabajos y artículos de investigación, para identificar elementos conceptuales y procedimentales en el campo de la didáctica, que permitan visibilizar las propiedades de objetos matemáticos tales como; razón, proporción, linealidad, semejanza, entre otros, que se movilizan en el abordaje del concepto de homotecia de segmentos y polígonos que, a su vez, se vinculan con la noción de proporcionalidad geométrica.

Por lo anterior, fue oportuno, articular los elementos conceptuales y procedimentales identificados, en una Secuencia Didáctica en la que se pudieran integrar componentes curriculares y estrategias metodológicas en relación con los aprendizajes que se pretenden alcanzar. Para esto, se tomaron en consideración la Matriz de Referencia y los DBA los cuales hacen explícitos los aprendizajes que en un grado específico se pretende que los estudiantes logren. De esta manera, las Situaciones propuestas en la Secuencia Didáctica involucran el uso de conceptos, procesos, relaciones y algunas expresiones asociadas que, al ser puestas en acción, posibilitan en los estudiantes el paso de la noción de proporcionalidad geométrica al concepto de homotecia.

Una vez implementada la Secuencia Didáctica, y obtenidos los resultados derivados de las Situaciones propuestas para desarrollar, se caracterizaron los aprendizajes de los estudiantes en relación con el concepto de homotecia de segmentos y polígonos a través de sus producciones, a partir de una rejilla previamente diseñada, la cual contiene el conjunto de variables que fueron objeto de descripción de los resultados obtenidos.

De otro lado, se hace importante manifestar que el desarrollo de este trabajo se hizo teniendo en cuenta las siguientes fases:

Fase 1: **elaboración del planteamiento del problema y antecedentes:** para esto, se hizo la revisión de un conjunto de artículos y trabajos de investigación presentes en bibliotecas y bases de datos de universidades, revistas nacionales e internacionales, con el objetivo de identificar las principales dificultades reportadas y trabajos ya elaborados que dieran cuenta del objeto de estudio en cuestión. De ellos, se seleccionaron algunos trabajos nacionales como los de Guacaneme (2001, 2002, 2012 y 2016), Obando (2015), Rodríguez

(2015), Holguín (2012), Jaramillo (2012), Ortiz & Angulo (2010), Pérez, Fiallo y Acosta (2015), Pérez (2013); otros internacionales como el de Rodríguez; Jiménez, Yáñez y Quevedo (2014), Ibarra (2007), Barretos (2010), Galleguillos y Candia (2011), Battaglini y Figueroa (2013), Gonzales y Arias (2017), Oller (2012), Sallán y Vizcarra (2009).

Fase 2: **objetivos y justificación:** De acuerdo con el objeto de estudio en cuestión, se elaboraron los objetivos de tal manera que tuvieran coherencia con la problemática general que se quería abordar (formulación del problema). A partir de ello, se hizo una revisión sobre lo que plantea el MEN en los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos para justificar el porqué es importante hacer este trabajo de indagación en el marco de la educación matemática.

Fase 3: **marco contextual:** para efectos de esta indagación, se hizo un estudio que posibilitara identificar qué instituciones públicas de Buenaventura presentaban dificultades asociadas al aprendizaje del concepto de homotecia de segmentos y polígonos. Entre estas, se encontró que los aprendizajes por mejorar reportados para la Institución educativa Liceo del Pacifico en los años 2015, 2016 y 2017 se relacionan con el objeto de estudio en cuestión.

Fase 4: **marco teórico y metodología:** la elaboración del marco teórico se estructuró en tres perspectivas; la primera da cuenta de los elementos conceptuales necesarios para el desarrollo de esta indagación (perspectiva matemática), la segunda engloba los aspectos que se deben tener en cuenta en algunas orientaciones sobre el cómo abordar los elementos conceptuales en los procesos de enseñanza-aprendizaje (perspectiva didáctica), y la tercera muestra la propuesta curricular que hace el MEN para orientar los

procesos educativos en matemáticas, en la cual se exponen las competencias y aprendizajes que se pretende que los estudiantes alcancen al terminar los distintos niveles educativos en Colombia (perspectiva curricular). Cabe resaltar que, en esta última perspectiva se presentan los elementos curriculares que se relacionan con el objeto de estudio de esta indagación.

La metodología, por su parte, se elaboró teniendo en cuenta los objetivos de investigación; dado que, se reconoce que debe haber una coherencia entre lo que se pretende alcanzar y el cómo se debe elaborar, dejando ver también la forma como se diseña este trabajo estructurado en un conjunto de fases.

Fase 5: **Diseño de rejilla de análisis y Secuencia Didáctica:** a partir de los elementos presentes en el marco teórico, se elaboró una rejilla que serviría de insumo para el diseño y análisis de la Secuencia Didáctica, en la cual, se articulan los elementos conceptuales y procedimentales que vinculan el concepto de homotecia de segmentos y polígonos con la noción de proporcionalidad geométrica.

Fase 6: **análisis a priori de la Secuencia Didáctica:** Teniendo en cuenta los elementos puestos en la rejilla, se realizó un análisis preliminar de las situaciones que componen la Secuencia Didáctica. Este análisis consistió en poner en relación cada uno de los objetivos de las Situaciones con lo que se esperaba que los estudiantes hicieran en el desarrollo de las mismas.

Fase 7: **aplicación de la Secuencia Didáctica:** La Secuencia Didáctica diseñada en este trabajo de indagación, fue desarrollada por 12 estudiantes de grado séptimo de la

Institución Educativa Liceo del Pacífico los días 1, 3 y 5 de octubre de 2018, empleando para ello un tiempo total de 10 horas y 30 minutos.

Fase 8: **análisis de resultados de la Secuencia Didáctica:** a partir de los resultados obtenidos de la aplicación de la Secuencia Didáctica, se hizo la caracterización de las producciones de los estudiantes con respecto a los aprendizajes logrados por estos entorno a la homotecia de segmentos y polígonos, mediado por la proporcionalidad y otros conceptos asociados. Esto se hizo, teniendo en cuenta los elementos puestos en la rejilla de análisis.

Fase 9: **conclusiones y recomendaciones:** las conclusiones fueron elaboradas desde los enfoques; Disciplinar, Didáctico y Teórico. Para ello, se tuvo en cuenta las pretensiones del trabajo de indagación (objetivo general y específicos) en contraste con los resultados y análisis de los mismos. Por otra parte, en las recomendaciones se sugieren algunas propuestas para futuros trabajos de indagación, derivadas de los análisis de las producciones de los estudiantes.

3.1. Rejilla de análisis

En este apartado, se presenta una rejilla que fue diseñada teniendo en cuenta los conceptos que, para efectos de este trabajo, se consideraron median en la aproximación del aprendizaje del concepto de homotecia a partir de la noción de proporcionalidad geométrica. Esta rejilla, sirvió de insumo para guiar el diseño de la Secuencia Didáctica, y posteriormente, en el análisis de las producciones de las estudiantes. La rejilla se ha subdividido en tres partes:

1. Conceptos asociados a la proporcionalidad. En estos se consideraron los de 1.1 razón, 1.2 proporción y 1.3 función de proporcionalidad; porque permiten un primer acercamiento al concepto de homotecia mediante la semejanza. Además, con ello se buscaba que los estudiantes identificaran cómo se relacionan estos conceptos propios de la proporcionalidad con el de homotecia, lo cual posibilita mayor comprensión en este último (homotecia). Por ejemplo, que ellos (estudiantes) puedan identificar que el valor asociado a las razones (**constante de proporcionalidad**) es visto como **coeficiente de similitud k** en la homotecia.
2. Procesos y relaciones en la proporcionalidad y homotecia. En estos se tuvieron en cuenta la 2.1 covariación, la 2.3 semejanza y la 2.4 congruencia. Con los cuales, se esperaba avanzar en el paso de la proporcionalidad a la homotecia. Por ejemplo, que los estudiantes reconocieran que en las figuras semejantes los ángulos correspondientes son congruentes y que, este tipo de figuras son homotéticas.

3. Expresiones asociadas. En estas se consideró; el 3.1 expresiones cotidianas, 3.2 gráfico, 3.3 tabular y 3.4 expresiones numéricas o algebraicas, porque se pensaron como las expresiones más comunes, para comunicar conocimiento en los procesos de enseñanza-aprendizaje en educación matemática.

Tomando en cuenta lo anterior, se consideró que, los elementos condensados en la rejilla permitirían; por un lado, analizar la configuración, manipulación y/o reformación que ejecutan los estudiantes para modelar la información de diferentes formas y dar solución a las situaciones propuestas, y por otro, analizar la articulación de los elementos que median en los conceptos asociados a la proporcionalidad y la homotecia. En otras palabras, esto último refiere al uso simultáneo que pueden hacer los estudiantes de los conceptos, procesos y relaciones, y las expresiones asociadas que aquí se consideran. A continuación, se muestra la rejilla (tabla 4).

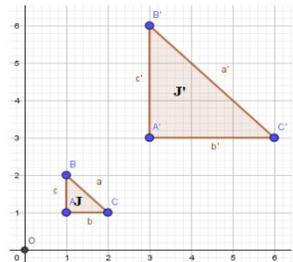
Elementos que median en el aprendizaje de la proporcionalidad para la aproximación al aprendizaje del concepto de Homotecia																
Configuración de las representaciones y términos asociados a la Proporcionalidad y Homotecia	1. Conceptos asociados a la proporcionalidad															
	1.1 Razón	1.2 Proporción	1.3 Función de proporcionalidad													
	Se le denomina razón al cociente entre $\frac{\alpha}{\beta}$ ó $\alpha:\beta$, de los números α y β , donde α (dividendo) es llamado antecedente y β (divisor) consecuente. (Guacaneme 2001, p. 57). Para una homotecia, es equivalente al coeficiente de similaridad (k), que determina la dilatación del objeto que se le aplica la transformación.	Es la igualdad de dos razones y se denota $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ o bien $\alpha:\beta = \gamma:\delta$. Donde los números α y δ se llaman extremos y los números β y γ medios ; el número δ se denomina también cuarta proporcional de los números α , β y γ . (Guacaneme 2001, p. 68)	<p><i>son expresiones de la forma $f(x) = mx$ o $y = mx$, tiene como representación gráfica una línea recta que pasa por el origen y su pendiente (m) constituye el coeficiente de proporcionalidad.</i> (Guacaneme 2001, p. 179)</p> <p>Colinealidad: Tres puntos A, B y C son colineales si pertenecen a una misma recta y tienen la misma pendiente. Además, se cumple que la distancia $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.</p>													
	2. Procesos y relaciones en la proporcionalidad y Homotecia															
	2.1 Covariación	2.2 Semejanza	2.3 Congruencia													
	Cambio simultaneo que sufren dos magnitudes entre las cuales existe una determinada relación (Holguín 2012, p. 11).	Dos figuras son semejantes si tienen igual forma; es decir, si tienen los ángulos congruentes uno a uno y proporcionales los lados que comprenden los ángulos congruentes.	Dos figuras son congruentes si tienen la misma cantidad de magnitud en sus lados y ángulos correspondientes; y, además, sus vértices coinciden.													
	3. Expresiones asociadas															
	3.1 Expresiones cotidianas	3.2 Gráficas	3.3 Tabulares	3.4 Expresiones numéricas o algebraicas												
	<p>Uso de expresiones cotidianas para comunicar respuestas o procesos de forma escrita o verbal.</p> <p>Ejemplo:</p> <p>La figura J es tres veces más grande que la figura J'.</p>	<p>Uso de gráficas para mostrar la covariación entre dos magnitudes a partir representaciones en el plano cartesiano para resolver situaciones.</p> <p>Ejemplo:</p> 	<p>Uso de tablas para registrar datos que permitan hacer comparaciones entre cantidades de magnitudes y determinar incrementos y decrementos de estas.</p> <p>Ejemplo:</p> <table border="1" data-bbox="844 1659 1015 1827"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>x'</th> <th>y</th> <th>y'</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>3</td> <td>1</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>6</td> <td>1</td> <td>3</td> </tr> </tbody> </table>	x	x'	y	y'	1	3	1	3	2	6	1	3	<p>Uso de ecuaciones, símbolos y expresiones propias de la matemática para la resolver situaciones.</p> <p>Ejemplo:</p> <p>Punto A' homotético del punto A:</p> $x' = 3(1) - 3(0) + 0 = 3$ $y' = 3(1) - 3(0) + 0 = 3$
	x	x'	y	y'												
1	3	1	3													
2	6	1	3													

Tabla 4: rejilla de análisis

3.2. Análisis a priori de la Secuencia Didáctica

En este apartado, se describen el conjunto de procesos y objetivos que se esperaba que los estudiantes de grado séptimo de la I.E. Liceo del Pacífico desarrollaran al enfrentarse a la Secuencia Didáctica diseñada en este trabajo de indagación, la cual articula elementos conceptuales y procedimentales relacionadas con la enseñanza-aprendizaje de la noción de proporcionalidad para aproximarse al concepto de homotecia de segmentos y polígonos.

3.2.1. Situación 1 (S1): Términos relacionados con la homotecia y la proporcionalidad.

Esta situación tuvo como objetivo central lograr que los estudiantes identificaran cuando dos figuras son semejantes, a partir de los conceptos de **razón** y **proporción**. De esto se esperaba, que los estudiantes reconocieran que si los valores **asociados a las razones** (constante de proporcionalidad) formadas entre los lados correspondientes de dos figuras eran iguales, entonces estas son semejantes. Es decir, si dos o más figuras son semejantes, sus lados homólogos son proporcionales. De este modo, para alcanzar dicho objetivo, la Situación 1 fue dividida en tres Tareas.

La primera Tarea fue subdividida en 5 Actividades, mediante las cuales se buscaba aproximar a los estudiantes desde un enfoque estrictamente numérico, a los conceptos de **razón** y su valor asociado (**constante de proporcionalidad**), a partir de las relaciones que se pueden establecer entre la cantidad de fruto de borjón y el precio a pagar por dicha

cantidad. Esta tarea se planteó desde este enfoque (numérico), porque de acuerdo con Guacaneme, “no estamos acostumbrados a pensar geoméricamente sino numéricamente” (2012, p. 84), por ello, se parte desde lo que se considera los estudiantes están más familiarizados (pensamiento numérico), para que posteriormente, puedan avanzar al concepto de razón y su valor asociado en aspectos geométricos. Cabe señalar, que por estar la presente Tarea (T1) enmarcada en el enfoque numérico, se espera que la mayoría de las respuestas que brinden los estudiantes estén mediadas por el expresiones numéricas, puesto que como ya se indicó inicialmente, los estudiantes están dados a pensar en mayor medida de esta forma (pensamiento numérico).

Por otro lado, se esperaba que en cuanto a las actividades propuestas en la primera Tarea (T1), los estudiantes recurrieran en primera instancia a completar la tabla que se les planteó en T1, donde se encontraban los precios y la cantidad de frutos de borjón respectiva. Esta representación tabular de los valores numéricos que correspondían a los precios y las cantidades de frutos, fue considerada porque se asumió que mediante la tabla, los estudiantes podrían identificar la variación entre los valores que tomaban las magnitudes (precio-cantidad de fruto). Además, si los estudiantes hacían lo antes mencionado, esto mediaría de cierto modo en las respuestas de las actividades de T1. De esta manera, se pensó que ellos (estudiantes) para completar la tabla, posiblemente, recurrirían a hacer uso de la división, lo que les permitiría hallar el valor de la unidad del fruto de borjón, dividiendo el precio a pagar por cierta cantidad del fruto entre la cantidad correspondiente a dicho precio. Una vez hecho esto, podrían tomar el cociente resultante de la división antes descrita para realizar multiplicaciones con las cantidades de frutos que se indicaron en la tabla.

En este orden de ideas, considerando que los estudiantes en la Tarea 1, pudieron reconocer las razones como una relación entre el precio a pagar por una cantidad determinada del fruto de borojó, donde si la una varia la otra lo hace en el mismo sentido, y que el valor asociado a estas relaciones (razones) debe ser el mismo, se presentó la Tarea 2 (T2), la cual fue subdividida en dos Actividades. De manera general, en T2 se mostraron las medidas de las dimensiones del largo y ancho de seis piscinas, de las cuales tres estaban representadas en un plano con medidas reducidas a escalas respecto a las medidas de las dimensiones de tres piscinas reales. Las dos Actividades de T2 son de tipo operatorio, con lo que se esperaba que los estudiantes lograran deducir que si las medidas estaban reducidas a escalas, era porque las medidas de las dimensiones de una piscina representada en el plano eran proporcionales a las de una de las piscinas reales.

Ante esto, en la primera Actividad de esta Tarea (T2) los estudiantes deberían hallar bien sea el valor asociado a las razones o una de las dimensiones faltantes (largo o ancho), y al encontrar todas las incógnitas (posiblemente mediante divisiones y multiplicaciones) se esperaba que estos (estudiantes) establezcan que las dos piscinas (real y en el plano) están en proporción, identificando que las razones formadas al comparar las medidas de las dimensiones correspondientes de una piscina real con su respectiva en el plano son equivalentes y los valores asociadas a estas iguales.

Por último, la Tarea 3 (T3), fue subdividida en cuatro Actividades con las que se buscaba que los estudiantes pusieran en relación lo aprendido en las anteriores Tareas (T1 y T2) en torno a los conceptos de proporción, razón y su valor asociado (constante de proporcionalidad), para a partir de estos identificar cuando dos o más figuras son semejantes. Considerando esto último, se hace necesario mencionar que a partir de esta

Tarea (T3) se pretendió acercar por primera vez a los estudiantes al concepto de semejanza de figuras planas mediante los conceptos de razón y proporción.

En este orden de ideas, en T3 se asumió que los estudiantes están un poco más familiarizados con los conceptos de proporción, razón y sus valores asociados. Así, en esta Tarea, se presentaron dos triángulos con las respectivas medidas de sus lados, y al igual que en T2 se esperaba que los estudiantes logaran establecer que las razones formadas al comparar los lados correspondientes de los dos triángulos son equivalentes y los valores asociadas a estas iguales, para que posteriormente argumentaran (haciendo uso de expresiones cotidianas) a partir de este hecho, que las dos figuras eran semejantes. Teniendo en cuenta lo antes dicho, se pensó que los estudiantes recurrirán a cambiar la representación fraccionaria de la razón por la de la división, para hallar el valor asociado a dichas razones (constante de proporcionalidad).

3.2.2. Situación 2 (S2): relaciones y procesos en la homotecia y la proporcionalidad.

En la Situación 2, se esperaba que los estudiantes en la Situación 1 hayan podido familiarizarse con los conceptos de razón y proporción a partir de expresiones numéricas, para tener un primer acercamiento a la relación de semejanza entre figuras planas, definida mediante dichos conceptos (razón y proporción). Así, la situación 2, tenía como objetivo principal, que los estudiantes pudieran profundizar en la relación antes mencionada (semejanza) desde un enfoque geométrico y, a partir de esta, introducirse al concepto de homotecia y sus 4 elementos principales (objeto inicial, objeto homotético, centro de similaridad y coeficiente de similaridad).

Por lo anterior, la Situación 2 fue dividida en dos Tareas; la primera, con el fin de avanzar en la conceptualización de la semejanza de figuras planas (iniciada en S1), y la segunda, con el fin de que los estudiantes tengan un primer acercamiento al concepto de homotecia. Por tanto, S2 toma especial importancia en el desarrollo de la Secuencia Didáctica, puesto que en esta Situación se articularon los elementos conceptuales y procedimentales que median el paso de la proporcionalidad a la homotecia. Por ello, las Actividades de las Tareas de S2 estaban dirigidas en su gran mayoría a que los estudiantes hicieran uso de expresiones cotidianas para comunicar sus respuestas, ya que, se considera que estos están más familiarizados con esta forma de expresión.

La primera Tarea fue subdividida en dos partes. La primera parte consta de dos Actividades, y la segunda de cuatro Actividades. Con este conjunto de Actividades, se buscaba que los estudiantes aparte de reconocer que en las figuras semejantes, los lados homólogos son proporcionales (S1); También pudieran reconocer que en este tipo de figuras, las medidas de los ángulos correspondientes son congruentes. Y finalmente, reconocieran del mismo modo que las figuras semejantes también son homotéticas.

La segunda Tarea introduce los 4 elementos principales de la homotecia de figuras planas, esta Tarea fue subdividida en dos partes. La primera parte consta de dos Actividades, las cuales apuntaban a que los estudiantes por un lado, identificaran que al formar segmentos con los puntos correspondientes de dos o más figuras homotéticas, estos al ser prolongados (de la figura de mayor tamaño a la de menor tamaño) convergen en un mismo punto, el cual posteriormente es denominado como **centro de similitud**. Y por otro lado, que identificaran la linealidad presente entre dos puntos homotéticos y el centro de similitud. La segunda parte de esta Tarea consta de cuatro Actividades, las cuales

permitirían que los estudiantes por primera vez pongan en acción los 4 elementos principales que intervienen en la homotecia, para identificar algunas de las relaciones presentes entre la **figura inicial** y la **homotética** con respecto al **coeficiente de similaridad k** (constante de proporcionalidad); por ejemplo, que la figura homotética es **k** veces la figura inicial.

3.2.3. Situación 3 (S3): homotecia de Segmentos y Polígonos en el plano.

En la Situación 3, se esperaba que los estudiantes pudieran relacionar los aprendizajes adquiridos en las anteriores Situaciones (S1 y S2) en torno a los elementos que intervienen en la homotecia (objeto inicial, objeto homotético, coeficiente de similaridad (**K**) y centro de similaridad (**O**)), a partir de elementos conceptuales y procedimentales como; razón, proporción, constante de proporcionalidad, semejanza, congruencia, linealidad, covariación, y el uso de algunas expresiones asociadas como la gráfica, tabular, algebraica y expresiones cotidianas; para acercarse al concepto de homotecia de Segmentos y Polígonos en el plano cartesiano (S3). Para lograr esto, la Situación 3 fue dividida en dos Tareas.

En este orden de ideas, la primera Tarea fue subdividida en cuatro Actividades, con las que se buscaba que los estudiantes mediante el análisis en el plano de tres polígonos homotéticos (J , J' y J'') con centro (**O**) en el origen, y coeficiente de similaridad (**K**) dado (representación gráfica), pudieran establecer relaciones entre la **constante de proporcionalidad** (valor asociado a la razón) y el **coeficiente de similaridad (K)**, reconociendo el primero como elemento mediador para el aprendizaje de la homotecia. En este sentido, se pretendió que los estudiantes logaran establecer dicha relación a partir de

la división de coordenadas (en X y en Y) de los puntos de las figuras homotéticas (J y J') (representación tabular), entendiéndolo como **razones equivalentes** que conservan una misma constante de proporcionalidad, que en la presente Tarea se llamó también coeficiente de similaridad (K).

Por otro lado, se procuró que los estudiantes produjeran respuestas de tipo algebraico como por ejemplo; $A' = KA$, $K(x, y) = (x', y')$, $Kx = x'y$ $Ky = y'$, en las que se pudieran apreciar que ellos hayan logrado identificar con anterioridad (S2) la relación multiplicativa (objeto homotético es k veces el objeto inicial) entre el coeficiente de similaridad (K) y los objetos inicial y homotéticos. Esto, se esperó que fuera posible al propiciar a los estudiantes información generalizada de las coordenadas de un punto (x, y) con su respectivo punto homotético (x', y') y el coeficiente K. Esto mismo se buscó que hicieran los estudiantes, pero dadas las coordenadas numéricas de un punto y el valor de K para encontrar el punto homotético correspondiente. Además, se encaminó a los estudiantes a identificar la relación de aumento proporcional existente entre las figuras homotéticas (J, J' y J'') establecida por el coeficiente de similaridad (K). Frente a esto y lo anterior, es importante resaltar que todo lo que abarcó esta Tarea (1) se pretendió alcanzar con el desarrollo de las cuatro Actividades que la componen.

La segunda Tarea fue subdividida en 3 Actividades, a través de las cuales se trabaja con segmentos en el plano cartesiano (centro fuera del origen), teniendo como objetivo que los estudiantes hicieran uso de dos expresiones algebraicas; $x' = kx - kxr + xr$ y $y' = ky - kyr + yr$, con las que se puede modelar la transformación isomórfica de la homotecia de Segmentos y Polígonos en el plano. Para lograr este objetivo, se buscó en primera

instancia que los estudiantes asignen coordenadas a los puntos extremos de un segmento inicial dado y el centro fuera del origen (O). Una vez hecho esto, se da a conocer a los estudiantes las expresiones antes mencionadas ($kx - kxr + xr$ y $y' = ky - kyr + yr$) con la intención de que hicieran uso de las mismas para encontrar las coordenadas del segmento homotético y graficarlo en el plano cartesiano, considerando los datos que se conocen (centro de similitud y segmento inicial). Por último, se esperaba que los estudiantes reprodujeran o comunicaran una forma de encontrar el segmento homotético sin hacer uso de las expresiones.

3.3. Resultados y análisis de resultados de la Secuencia Didáctica

La aplicación de la Secuencia Didáctica diseñada en este trabajo de indagación fue llevada a cabo en 3 sesiones. La primera fue implementada el día 1 de octubre de 2018 y tuvo una duración aproximada de 3 horas (inicio de la sesión 1:00 pm y cierre de la sesión 4:00 pm), la segunda se implementó el día 3 de octubre de 2018 y abarcó toda una jornada de clase, iniciando a partir de la 1 pm y finalizando a las 6 pm, en esta sesión los estudiantes tuvieron un descanso de 30 minutos (3:30 pm - 4:00 pm) y, la tercera sesión fue implementada el día 5 de octubre de 2018 desde la 1 pm hasta las 3:30 pm. Estos espacios con los que se contó para la aplicación, fueron concertados y organizados por la profesora que dirige el área de matemáticas en la Institución.

Por otro lado, para los resultados obtenidos de la aplicación de la Secuencia Didáctica, se diseñó una tabla (como se muestra en el modelo de tabla 5) la cual consta de los siguientes elementos; **Tipo de Respuesta**, en la que se hace una caracterización de las producciones de los estudiantes frente a las Actividades de cada Tarea propuesta en las Situaciones. Para identificar el tipo de Actividad a la que se hace referencia, se utilizó convenciones de este tipo **S1- T1-A_a**, donde **S1** refiere a la primera Situación, **T1-1** a la primera parte de la Tarea 1 de la **S1**, y **A_a** el subíndice **a** refiere a la primera Actividad perteneciente a **T1**. En la **Frecuencia** se muestra la cantidad de estudiantes que reportan respuestas con características comunes y en la parte inferior de la **Frecuencia** se presenta la cantidad total de estudiantes que se enfrentaron a las Actividades.

S1- T1- A_a	Tipo de Respuesta	Frecuencia
	Total	

Tabla 5: modelo de tabla utilizado para la tipificación de respuestas

3.3.1. Situación 1: términos relacionados con la homotecia y la Proporcionalidad

Número de estudiantes: 12

Descripción general de la aplicación de la Situación 1: Esta Situación fue aplicada en dos sesiones, la primera el día 1 de octubre del 2018 iniciando a la 1:00 pm hasta las 4:00 pm, por tanto se utilizó un tiempo de 3 horas, y la otra parte se aplicó el día 3 de octubre del 2018 dando inicio a la 1:00 pm y finalizando a las 2:00 pm, teniendo una duración de 1 hora, sumando un total de 4 horas que fueron empleadas para el desarrollo de las Actividades de la primera Situación.

Situación 1- Tarea 1- Actividad a (S1- T1- A_a)

Esta Actividad refería a lo siguiente: *a) Anyily requiere de tu ayuda para saber cuál sería el precio para 2 y 7 frutos de borjón, tú puedes ¡Ayúdala!* El tipo de respuesta que se obtuvo por parte de los estudiantes frente a esta Actividad se reporta en la tabla 6.

En esta Actividad la mayoría de los estudiantes (10 de 12) respondieron

	Tipo de Respuesta	Frecuencia
S1- T1- A_a	Estudiantes que responden correctamente haciendo uso de expresiones numéricas.	10
	Estudiantes que no reportan una respuesta.	2
	Total	12

Tabla 6: tipificación de respuestas Situación 1- Tarea 1- Actividad del inciso a.

correctamente mediante expresiones numéricas. Entre estos (10 de 12), 4 emplearon la multiplicación entre el precio de la unidad del fruto de borjón (constante) y la cantidad del

fruto, esto se dio, debido a que los estudiantes antes de iniciar la Actividad ya habían buscado diversas estrategias que les permitieran completar la tabla en la cual estaban presentadas las relaciones. Por otro lado, otros 4 estudiantes emplearon sumas reiterativas, en la cual asumían un valor para la unidad y repetían este la cantidad de veces que indicaba el fruto. Ante lo anterior, se destaca que estos hacían uso del precio de la unidad del fruto de borojó (**constante**) para desarrollar las operaciones antes mencionadas. Esto, se muestra en la imagen 1.

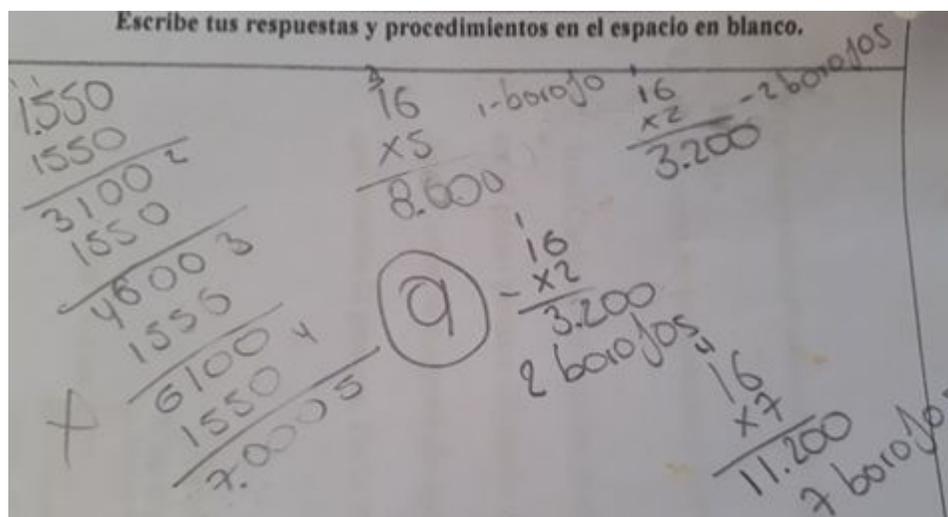


Imagen 1: respuesta de un estudiante respecto a S1- T1-A_a

Frente a esta respuesta (imagen 1), se puede observar como el estudiante toma un valor (\$ 1550) al azar (ensayo y error) para el precio de la unidad de un fruto de borojó, este valor lo suma repetidas veces hasta llegar a las cinco repeticiones, la cual se interpreta como cinco frutos de borojó y el valor de \$7000 viene siendo el precio a pagar por dicha cantidad de fruto, con esto el estudiante pretendía llegar a la relación que se establecía en la tabla, de que por 5 frutos de borojó se debía pagar \$8000. Sin embargo, los resultados obtenidos por él, no eran acordes con lo plasmado en esta (relación de la tabla). Por tal

motivo, el estudiante decide probar si con el valor de \$1600 se cumple dicha relación, y efectivamente es con \$1600 que logra llegar a la relación de la tabla, ya con este valor (\$1600) el estudiante realizó las multiplicaciones antes descritas.

Por otro lado, 2 de 12 estudiantes no mostraron los procesos que permitían justificar su respuesta. Ante lo anterior, es importante destacar que la Actividad buscaba que los estudiantes lograran identificar **la constante de proporcionalidad**, a partir del precio a pagar por una cantidad determinada de borojó.

Situación 1- Tarea 1- Actividad b (S1- T1-A_b)

Esta Actividad se preguntaba lo siguiente **b) ¿Cuántos frutos de borojó recibiría Anyily si paga \$24000?** El tipo de respuesta que se obtuvo por parte de los estudiantes frente a esta pregunta se reporta en la tabla 7.

	Tipo de Respuesta	Frecuencia
S1- T1- A _b	Estudiantes que responden correctamente haciendo uso de la estrategia de ensayo error tomando como punto de partida el precio de la unidad (expresiones numéricas).	6
	Estudiantes que responden correctamente tomando como referencia datos presentados en una tabla (expresiones numéricas).	2
	Estudiantes que responden correctamente haciendo uso de la división (expresiones numéricas).	1
	Estudiantes que responden correctamente pero no justifican lo que comunican.	3
	Total	12

Tabla 7: tipificación de respuestas Situación 1- Tarea 1- Actividad del inciso b.

por otra parte, 2 de 12 estudiantes realizaron operaciones como la suma y la resta con datos presentados en la tabla (ver en Secuencia Didáctica S1- T1), es decir, estos tomaban un valor de alguno de los precios a pagar por una cantidad determinada de borojó que se encontraba estipulada en la tabla, de tal modo que si el precio de la tabla era mayor que el de la Actividad (\$24000), recurrían a tomar otro precio de la tabla tal que al restarla con la primera diera exactamente el precio que se estipulaba en la Actividad, y realizaban una suma si se daba el caso contrario (tomar un precio menor al de la Actividad). Lo cual, deja entre ver la correlación entre las magnitudes involucradas, tal como se muestra en las siguientes imágenes (3 y 4).



Imagen 3: respuesta de un estudiante respecto a S1- T1-A_b

Ante esta respuesta (imagen 3), el valor de \$32000 es el precio a pagar por 20 frutos de borojó, y \$8000 el precio a pagar por 5 frutos del mismo. Al realizar la resta entre estos (32000-8000), se obtienen los \$24000 a los cuales se refiere la Actividad. Ante esto, se asume que el estudiante realizó una resta entre las cantidades del fruto de borojó correspondientes a dichos precios, es decir $20 - 5 = 15$ siendo este la cantidad del fruto a recibir por dicho precio (\$24000).

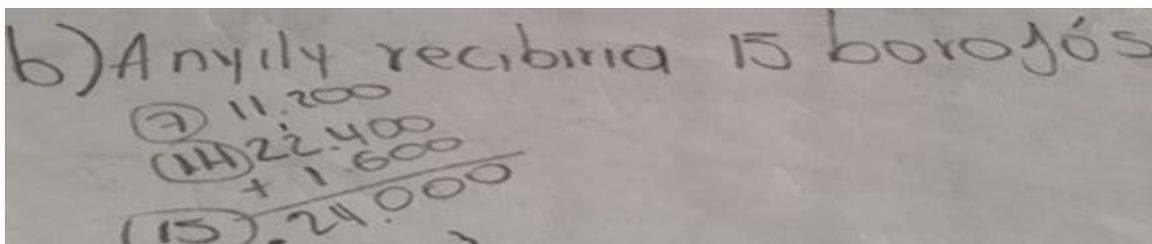


Imagen 4: respuesta de un estudiante respecto a S1- T1-A_b.

En cuanto a esta respuesta (imagen 4), el estudiante toma una de las razones de la tabla y asumiendo que **los valores asociados a todas las razones son iguales**, establece que el doble del dinero a pagar es igual al doble de la cantidad del fruto, sin embargo, al estudiante tomar el precio de \$11200 y duplicarlo, obtiene \$22400, haciendo falta dinero para completar los \$24000 establecidos en la Actividad, por lo que el estudiante, decide agregar a esta suma el precio de la unidad, siendo así el modo como llega a la solución.

Situación 1- Tarea 1- Actividad c (S1- T1- A_c)

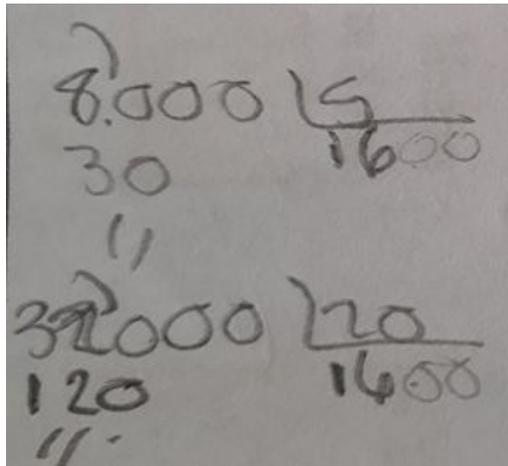
Esta Actividad se preguntaba lo siguiente *c) ¿Cuánto debe pagar Anyily si decide comprar un solo fruto de borojó?* El tipo de respuesta que se obtuvo por parte de los estudiantes frente a esta pregunta se reporta en la tabla 8.

S1- T1- A _c	Tipo de Respuesta	Frecuencia
	Estudiantes que responden correctamente haciendo uso de la división entre la cantidad del producto y el precio (expresiones numéricas).	7
	Estudiantes que responden correctamente tomando como referencia datos presentados en una tabla para realizar sumas reiterativas (expresiones numéricas).	3
	Estudiantes que responden incorrectamente (expresiones numéricas).	1
	Estudiantes que responden correctamente pero no justifican lo que comunican.	1
Total	12	

En esta

Tabla 8: tipificación de respuestas Situación 1- Tarea 1- Actividad del inciso c.

Actividad todos los estudiantes comunicaron su respuesta a partir de expresiones numéricas, de ellos, la mayoría (7 de 12) hizo uso de la división para dar solución a la Actividad. Los estudiantes referenciados, tomaban alguna de las relaciones de la tabla y la representaban mediante una división (precio dividido entre la cantidad del fruto) y, hallando el resultado de esta obtenían el precio de la unidad. Este procedimiento de cierto modo deja ver **la relación que se presenta entre la división y la razón**, ya que, los estudiantes asumen que una relación de magnitudes heterogéneas es igual a realizar una división, hecho que se muestra en la imagen 5, esto tal vez se deba a que los estudiantes consideran que la representación de las razones mediante fracciones son un equivalente a una división.



$$\begin{array}{r} 8000 \text{ } \overline{) 1600} \\ 30 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32000 \text{ } \overline{) 1600} \\ 120 \end{array}$$

Imagen 5: respuesta de un estudiante respecto a SI- TI-A_c

Por ultimo, 3 de 12 estudiantes emplearon sumas reiterativas, estas estaban encadenadas con la Actividad anterior (SI- TI-A_b) y a su vez esas sumas le llevaban a encontrar el precio de la unidad, dado que, de los múltiples valores que tomaban para denotar el precio, seleccionaron aquel que les diera exactamente alguna de las comparaciones o relaciones que se establecían en la tabla planteada en la Tarea 1, ante esto,

se hace importante denotar que en la Actividad anterior (**SI- T1-A_b**), 6 de 12 estudiantes recurrieron directamente a la estrategia de ensayo y error, y en esta Actividad solo 3 de 12 se apoyaron en los resultados de esta heurística, tal vez esto fue producto, de que los estudiantes empezaron a **ver las razones como reparticiones equitativas**, lo cual conllevó a los otros 3 estudiantes a hacer uso de la división para validar lo que habían hecho por ensayo y error.

Situación 1- Tarea 1- Actividad d (SI- T1- A_d)

Esta Actividad se preguntaba lo siguiente **d) ¿Qué ocurre si comparas el precio a pagar con la cantidad de unidades de borojó que compres; es decir, $\frac{8000}{5}$ y $\frac{32000}{20}$?** El tipo de respuesta que se obtuvo por parte de los estudiantes frente a esta pregunta se reporta en la tabla 9.

	Tipo de Respuesta	Frecuencia
SI- T1-A _d	Estudiantes que responden correctamente empleando las expresiones cotidianas.	8
	Estudiantes que responden correctamente tomando como referencia datos presentados en una tabla (expresiones numéricas).	1
	Estudiantes que responden correctamente empleando las expresiones cotidianas y expresiones numéricas.	2
	Estudiantes que no reportan respuesta.	1
	Total	12

Tabla 9: *tipificación de respuestas Situación 1- Tarea 1-Actividad del inciso d.*

En esta Actividad la mayoría de los estudiantes (8 de 12) reportaron su respuesta mediante el uso de expresiones cotidianas, y 2 de los 12 hicieron uso tanto de expresiones cotidianas como de expresiones numéricas. En este último caso, el expresiones numéricas

se empleó para plantear una división y hallar el resultado de esta, esto quizás se dio, porque las relaciones (razones) estaban cuantificadas mediante fracciones y los estudiantes realizaron el cambio de representación a divisiones, y al efectuar esta obtenían el resultado, lo cual fue interpretado por estos (2 de 12) como la **constante de proporcionalidad**, y en cuanto a las expresiones cotidianas, este fue usado para explicar las conjeturas que hicieron al **comparar dos razones**, llegando a estas (conjeturas) a partir de los procesos efectuados (divisiones).

Por otro lado, de esta Actividad se hace importante hacer mención, que los estudiantes asumen que al comparar dos cosas se deben buscar solo las diferencias, por tal motivo, se requirió de la intervención de quienes orientaban el proceso para aclarar que también se deben buscar cualidades o características en común, lo cual de cierto modo, medio el proceso (ver imagen 6).

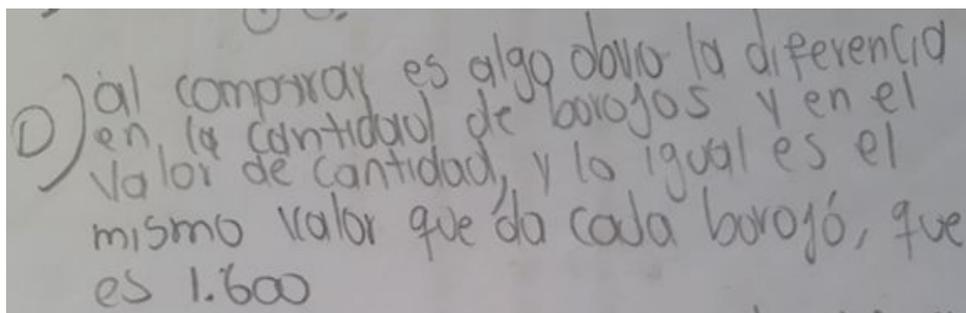


Imagen 6: respuesta de un estudiante respecto a S1- T1-A_d

En cuanto a los estudiantes que respondieron acertadamente, pudieron reconocer que **si aumenta la cantidad del fruto, el precio a pagar también tiende a hacerlo (covariación)**, en una menor medida argumentaron que **lo único que no cambia y es igual**

en las dos razones que se plantea en dicha Actividad es el precio de un fruto de borojó (constante de proporcionalidad) tal como se mostró en la imagen 6.

Situación 1- Tarea 1- Actividad e (S1- T1- A_e)

Esta Actividad se preguntaba lo siguiente e) *si se hace la comparación anterior con los precios a pagar con la respectiva cantidad de unidades de borojó de toda la tabla ¿Crees que habrá algo que no cambie o que no varíe? ¿Qué es?* El tipo de respuesta que se obtuvo por parte de los estudiantes frente a esta pregunta se reporta en la tabla 10.

S1- T1-A _e	Tipo de Respuesta	Frecuencia
	Estudiantes que responden correctamente empleando expresiones cotidianas.	6
	Estudiantes que no responden a lo que se plantea en la Actividad (empleo de expresiones cotidianas).	3
	Estudiantes que no reportan respuesta.	3
Total	12	

Tabla 10: tipificación de respuestas Situación 1- Tarea 1- Actividad del inciso e.

En esta Actividad, 9 de los 12 estudiantes emplearon expresiones cotidianas para comunicar su respuesta. Reconociendo, que los cambios son dependientes, es decir, que si cambia la cantidad de fruto de borojó también va a cambiar en el mismo sentido la cantidad de dinero a pagar, reconocen lo que varía (**covariación**), pero la Actividad apuntaba a lo que no varía (**invarianza**) en dichas razones, ante lo cual, solo 6 de los 12 estudiantes, pudieron argumentar que **lo único que no cambiaba es el precio de la unidad del fruto de borojó (constante de proporcionalidad)**. Esto quizás se deba, a que los estudiantes consideraban que cuando se comparan dos razones se debían buscar diferencias, lo cual no permitía apreciar lo que permanecía constante.

Situación 1- Tarea 2- Actividad a (S1- T2- A_a)

Esta Actividad se refería a lo siguiente **a)** *A partir de las razones que se presentan a continuación:* $\frac{3}{5} = x$ $\frac{1.89}{y} = 1.26$ $\frac{z}{4} = 3$ $\frac{u}{15} = 0.6$ $\frac{6.3}{5} = v$ $\frac{6}{2} = w$. *Ubica los valores de cada variable en el lugar correspondiente:* $x=$, $y=$, $z=$, $u=$, $v=$, $w=$. El tipo de respuesta que se obtuvo por parte de los estudiantes frente a esta Actividad se reporta en la tabla 11.

S1- T2-A _a	Tipo de Respuesta		Frecuencia
	Estudiantes que reportan más del 50% de las incógnitas de forma acertada, con dificultades en la operatividad (multiplicación y división) con números decimales (expresiones numéricas).		11
	Estudiantes que no reportan respuesta.		1
	Total		12

Tabla 11: tipificación de respuestas Situación 1- Tarea 2- Actividad del inciso a.

En esta Actividad casi todos (11 de 12) los estudiantes comunicaron su respuesta a partir de expresiones numéricas. Estos estudiantes hicieron uso de la división o la multiplicación, dependiendo de si la incógnita a hallar era una de las magnitudes involucradas en la razón, o si se trataba del valor asociado a dicha relación (**constante de proporcionalidad**). Cabe resaltar, que la mayoría de los estudiantes presentaron dificultades para operar con cantidades decimales.

En concordancia con lo referido a la división y la multiplicación efectuada por los estudiantes, estos hacían uso de la primera si la incógnita a hallar era el valor asociado a la razón, lo cual indica que los estudiantes seguían viendo **la razón como una división y la constante de proporcionalidad como el resultado de la misma** (división), tal como se muestra en la imagen 7.

Escribe tus respuestas y procedimientos en el espacio en blanco.

$$\begin{array}{r} 189 \overline{) 126} \\ 630 \\ \hline 0 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 305 \overline{) 00,6} \\ 000 \\ \hline 00,6 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 189 \overline{) 15} \\ 39 \\ \hline 9 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 15 \\ \hline 45 \\ \hline 00 \\ \hline 0,90 \end{array}$$

Imagen 7: respuesta de un estudiante respecto a S1- T2-A_a

Por otro lado, en cuanto a la segunda operación (multiplicación, imagen 7), esta se efectuaba si el valor a hallar era una de las magnitudes que se estaban comparando. Sin embargo, estos procesos operatorios se vieron intervenidos por el conjunto numérico con el cual se trabajó, es decir, que la operabilidad con números decimales no era un tema del todo claro para ellos, tendían a cometer errores con estos números, pero en cuanto a la operabilidad con números naturales fue un éxito, lo cual, conlleva a deducir que los inconvenientes no están en las operaciones, sino más bien, se encuentran en el conjunto numérico.

Situación 1- Tarea 2- Actividad b (S1- T2- A_b)

Esta Actividad se preguntaba lo siguiente **b)** *si se desea relacionar las medidas reales con las correspondientes en el plano, de tal manera que estén en proporción ¿Qué consideras que se debe hacer?* El tipo de respuesta que se obtuvo por parte de los estudiantes frente a esta pregunta se reporta en la tabla 12.

	Tipo de Respuesta	Frecuencia
S1- T2- A _b	Estudiantes que responden correctamente haciendo uso de la división (expresiones numéricas).	7
	Estudiantes que responden correctamente sin justificar lo que comunican.	5
	Total	12

Tabla 12: tipificación de respuestas Situación 1- Tarea 2- Actividad del inciso b.

Considerando que esta Actividad pretendía que los estudiantes establecieran una **relación de equivalencia entre las razones expresadas**, 7 de los 12 estudiantes se vieron inclinados a hacer uso del expresiones numéricas para establecer dicha relación, pasando de la razón expresada mediante fracción a la representación de esta mediante la división que les fue útil para hallar el resultado, el cual fue entendido, a su vez, por los estudiantes como la **constante de proporcionalidad**. Una vez realizadas las divisiones, los estudiantes comparaban las razones y los valores asociados a estas y, **si dos de estos últimos eran iguales, entonces establecían que tales razones estaban en proporción**. Por otro lado, 5 de los 12 estudiantes formaron las relaciones sin emplear argumentos, quizás por la relación presente entre esta Actividad y los procesos desarrollados (multiplicación y división) en la Actividad anterior (S1- T2- A_a).

Situación 1- Tarea 3- Actividad a (S1- T3- A_a)

Esta Actividad se preguntaba lo siguiente **a) ¿Qué consideras que debería hacer Iván para verificar si los dos triángulos son semejantes?** El tipo de respuesta que se obtuvo por parte de los estudiantes frente a esta pregunta se reporta en la tabla 13.

	Tipo de Respuesta	Frecuencia
S1-T3-A _a	Estudiantes que determinan la semejanza entre figuras planas a partir de la razón (expresiones cotidianas).	7
	Estudiantes que responden incorrectamente mediante el uso de expresiones cotidianas.	4
	Estudiantes que no reportan respuesta.	1
	Total	12

Tabla 13: tipificación de respuestas Situación 1- Tarea 3- Actividad del inciso a.

En cuanto a esta Actividad, se encontró que la mayoría de los estudiantes (11 de 12) comunicaron su respuesta empleando expresiones cotidianas. Considerando, que para saber si dos triángulos son o no semejantes, se puede verificar estableciendo la razón entre la medida de los lados, para así establecer si están en proporción. Sin embargo, estos no consideraron la **congruencia** de la medida de los ángulos homólogos.

En cuanto a los estudiantes que respondieron incorrectamente (4 de 12), cabe señalar que 1 de los 4 consideró que si las medidas de los lados de los triángulos eran congruentes se podía determinar si tales figuras eran semejantes (ver imagen 8).

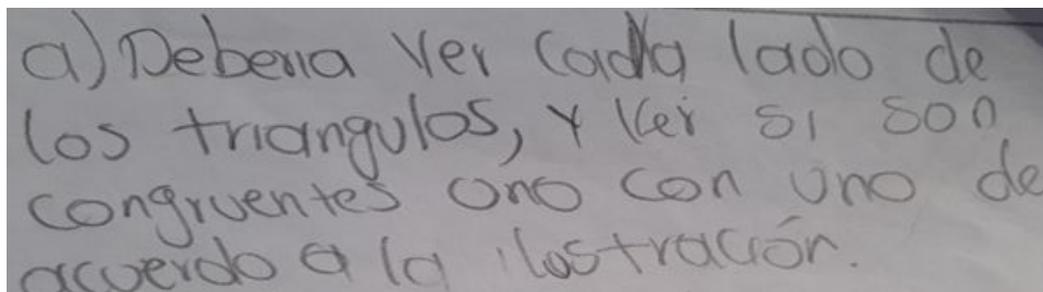


Imagen 8: respuesta de un estudiante respecto a S1- T3-A_a

Como se mostró en la imagen 8, se puede concluir que este estudiante asume semejanza y congruencia como lo mismo.

Situación 1- Tarea 3- Actividad b (S1- T3- A_b)

Esta Actividad hacía referencia a lo siguiente **b)** *si al relacionar las medidas homologas de los lados de los triángulos se obtiene que: $\frac{\overline{BC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{FE}}$. Hallar la medida del lado \overline{FE} a partir de los datos presentes en la ilustración* El tipo de respuesta que se obtuvo por parte de los estudiantes frente a esta pregunta se reporta en la tabla 14.

S1- T3- A _b	Tipo de Respuesta	Frecuencia
	Estudiantes que responden correctamente en expresiones cotidianas y expresiones numéricas, pero no justifican lo que comunican.	6
	Estudiantes que responden correctamente en expresiones cotidianas y expresiones numéricas.	3
	Estudiantes que responden incorrectamente en expresiones cotidianas y expresiones numéricas.	1
	Estudiantes que no reportan respuesta.	2
Total	12	

Tabla 14: tipificación de respuestas Situación 1- Tarea 1- Actividad del inciso b.

Esta Actividad tiene la particularidad de que la mayoría de las respuestas (9 de 12) combinaron expresiones numéricas y expresiones cotidianas. El empleo de expresiones numéricas se hizo para hallar la constante de proporcionalidad asociada a las razones, y expresiones cotidianas sirvió como herramienta para explicar los procesos efectuados y completar la respuesta a la Actividad.

Ahora bien, en cuanto a las expresiones numéricas, los estudiantes que respondieron correctamente (3 de 12) **cambiaron las razones cuantificadas mediante fracciones a divisiones, y fue mediante estas que hallaron la constante de proporcionalidad.** En cuanto a los argumentos, se destaca de estos estudiantes (3 de 12) que 1 de ellos estableció que como todas las divisiones realizadas daban como resultado dos, solo debía buscar un número tal que siguiera conservando ese resultado, en cuanto a los otros 2 estudiantes,

establecían en sus argumentos que el triángulo grande era el doble del pequeño, por tanto, la medida del lado que hacía falta era el doble del lado homólogo en el triángulo pequeño. En las imágenes (9 y 10) que se muestran a continuación se explicitan algunos de estos aspectos.

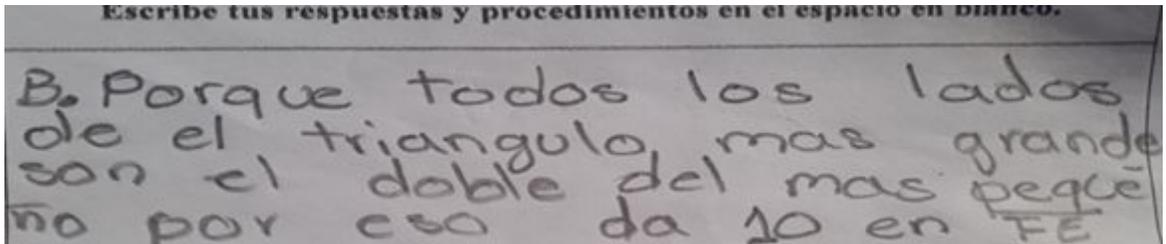


Imagen 9: respuesta de un estudiante respecto a S1- T3-A_b

En esta respuesta, la palabra **doble** indica que se está estableciendo una relación (razón) entre dos magnitudes homogéneas, para este caso sería entre las medidas de dos lados homólogos de los triángulos propuestos en dicha Tarea, además, esto indica que el estudiante decidió partir de cuantas veces cabía el pequeño en el grande, tal vez, porque tomado de este modo obtendría un número entero, y para él fue más viable dividir una cantidad mayor entre una cantidad menor, esto debido a que si se daba el caso contrario la razón quedaría cuantificada mediante una fracción o un número decimal. De este último, se destaca que ya se había hecho mención de que los estudiantes habían presentado dificultades al operar con estos, y este hecho hizo evadir esta posibilidad.

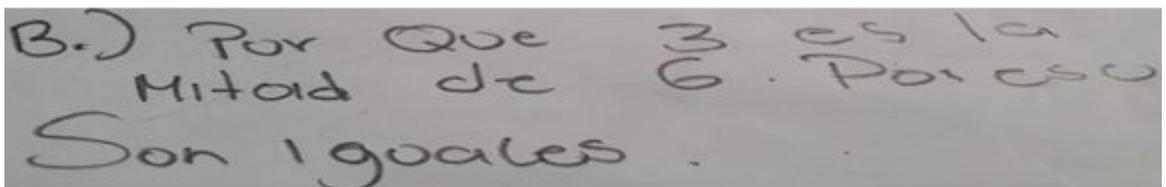
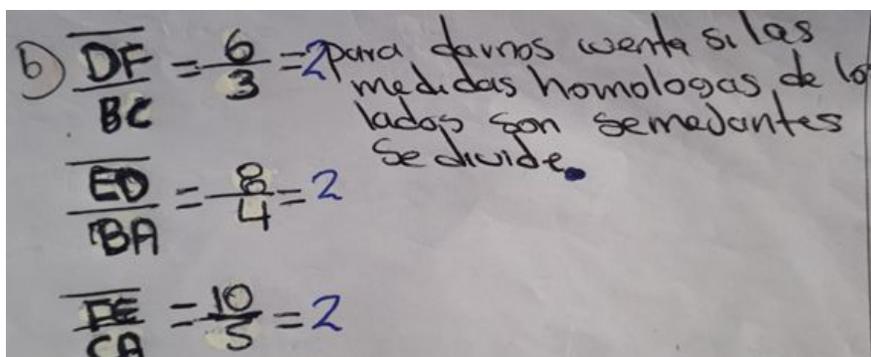


Imagen 10: respuesta de un estudiante respecto a S1- T3-A_b

En este caso, la palabra **mitad** indica que la relación establecida entre las medidas de los lados homólogos de los dos triángulos, toma como punto de partida el triángulo grande, es decir, que el estudiante de forma implícita (dado que no hay operación matemática solo análisis de los valores) estableció cuantas veces cabía el triángulo grande en el pequeño, pero, para esto él analiza de la medida de los lados homólogos lo siguiente; $BC=3$ y $DF=6$, $BA=4$ Y $ED=8$, Por tanto si $CA=5$ y este es la mitad de DF , esta última medida corresponde a 10. Ante esto cabe señalar, que el estudiante no cuantifica la respuesta mediante fracciones ni como decimales, solo lo expresa mediante la palabra **mitad** que es un equivalente a $\frac{1}{2}$ o 0.5 (fracciones o decimales).



Handwritten student work showing ratios of corresponding sides and a note about similarity:

$$\textcircled{b} \frac{DF}{BC} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\frac{ED}{BA} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\frac{FE}{CA} = \frac{10}{5} = 2$$

para darnos cuenta si las medidas homólogas de los lados son semejantes se divide.

Imagen 11: respuesta de un estudiante respecto a S1- T3-A_b

Esta respuesta, indica que el estudiante asume **las razones como divisiones** y si el **resultado de cada una de estas es el mismo, se puede establecer que están en proporción** y es a partir de allí que se puede determinar si los dos triángulos son semejantes o no, dejando de lado el criterio de congruencia de los ángulos, además, el estudiante decide tomar como dividendo la medida del lado de mayor longitud y como divisor la medida del lado de menor longitud, esto quizás, por no concebir que se puede

establecer la relación de cuantas veces el grande cabe en el pequeño, lo cual conlleva a cuantificar las razones mediante fracciones o decimales.

Situación 1- Tarea 3- Actividad c (S1- T3- A_c)

Esta Actividad se preguntaba lo siguiente **c)** *¿Consideras que los dos triángulos plasmados en el tablero por el profesor Jair son semejantes? ¿Por qué?* El tipo de respuesta que se obtuvo por parte de los estudiantes frente a esta pregunta se reporta en la tabla 15.

S1- T3- A _c	Tipo de Respuesta	Frecuencia
	Estudiantes que responden correctamente a partir de expresiones cotidianas empleando el criterio de congruencia.	1
	Estudiantes que responden incorrectamente.	6
	Estudiantes que no reportan respuesta.	5
	Total	12

Tabla 15: *tipificación de respuestas Situación 1- Tarea 3- Actividad del inciso c.*

En esta Actividad 2 de los 12 estudiantes intentan responder a la Actividad, y aunque reconocen que las medidas de los lados en conjunto con la **congruencia** de los ángulos está relacionada con la **semejanza**, los estudiantes no expresan claramente cuál es el rol de la medida de los lados y de los ángulos de los triángulos, lo cual conduce a la confusión entre lo que es semejanza y congruencia. De estos estudiantes (2 de 12), 1 argumentó que los ángulos eran congruentes y el otro, que los lados eran proporcionales, tal como se muestra a continuación.

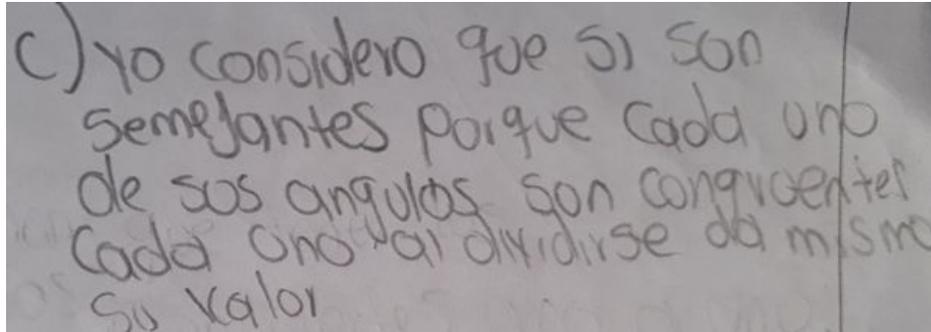


Imagen 12: respuesta de un estudiante respecto a S1- T3-A_c

En esta respuesta el estudiante trata de responder correctamente. Sin embargo, su respuesta no es del todo clara, de lo anterior, se reconoce que el estudiante alude a la congruencia de los ángulos homólogos como criterio para establecer la semejanza, y se interpreta que si al dividir las medidas de las longitudes de los lados homólogos de los dos triángulos, se obtiene como resultado el mismo valor, entonces se puede establecer que si están en proporción. Por tanto, el estudiante sigue considerando la representación fraccionaria de la razón como una división, y que el valor asociado a esta (**constante de proporcionalidad**) es el resultado de dicha operación matemática.

Situación 1- Tarea 3- Actividad d (S1- T3- A_d)

Esta Actividad se preguntaba lo siguiente *d) De acuerdo con lo realizado en esta Tarea (3), ¿Qué características deben tener dos o más figuras para poder decir que son semejantes?* El tipo de respuesta que se obtuvo por parte de los estudiantes frente a esta pregunta se reporta en la tabla 16.

S1	Tipo de Respuesta	Frecuencia
----	-------------------	------------

Estudiantes que responden correctamente a partir de la razón de los lados homólogos o de la congruencia de los ángulos (empleo de expresiones cotidianas).	2
Estudiantes que responden incorrectamente.	8
Estudiantes que no reportan respuesta.	2
Total	12

Tabla 16: tipificación de respuestas Situación 1- Tarea 3- Actividad del inciso d.

En esta Actividad solo 2 de los 12 estudiantes responden a lo planteado, apoyándose 1 de ellos (2 de 12) en el **criterio de congruencia de ángulos**, y el otro en que la medida de los lados de los dos triángulos debían estar en proporción, y que **mediante la razón pueden hallar la constante que es la que visibiliza esa relación proporcional**, como se muestra a continuación.

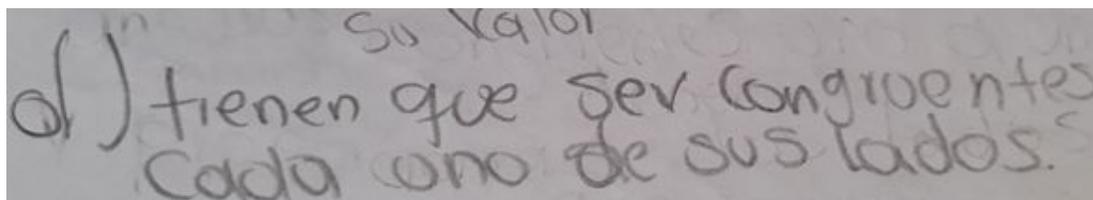


Imagen 13: respuesta de un estudiante respecto a S1- T3-Ad

Considerando la respuesta del estudiante (imagen 13), pareciera que este se refiere, a que las medidas de las longitudes de los lados correspondientes de las figuras deberían ser iguales, lo cual, alude a triángulos congruentes y esto, no posibilita la comprensión del concepto de semejanza en términos generales, puesto que las figuras congruentes (en estas la constante de proporcionalidad es igual a 1) son un caso particular de las figuras semejantes. Pero, se considera que el estudiante, no comunicó de forma clara su respuesta, dado que esta era la última Actividad de la Situación 1, y ante el afán de pasar a la Situación siguiente se obtiene la respuesta mostrada en la imagen 13. Esto se interpretó así,

debido a que el estudiante que comunicó esta respuesta es el mismo de la imagen 12, y haciendo un contraste entre las dos respuestas, se asume que el estudiante pretendió hacer referencia a los siguientes criterios; la congruencia entre las medidas de los ángulos correspondientes, y que las medidas de los lados correspondientes al ser divididas entre sí deben dar el mismo valor (**constante de proporcionalidad**), siendo estos dos criterios considerados como características para determinar la semejanza.

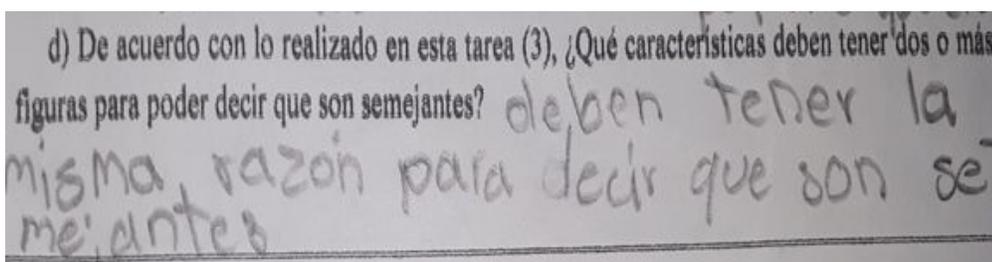


Imagen 14: respuesta de un estudiante respecto a S1- T3- A_d

Con respecto a esta respuesta (imagen 14), el estudiante consideró solo la característica de que los dos triángulos deben estar en proporción, obviando la congruencia de los ángulos correspondientes, esto se puede decir, dado que al estudiante redactar **la misma razón**, a lo que se está aludiendo, es a que cada uno de los lados al ser comparado con su correspondiente (razón) el valor asociado a la razón (constante de proporcionalidad) debe ser el mismo en cada una de las razones que se establezcan.

Finalmente, en la Tarea 3 de la Situación 1 se presentó la mayor cantidad de desaciertos, lo cual, se asume que es producto de incluir en dicha Tarea polígonos, y es a partir de ciertas magnitudes geométricas de estos que se pretendió trabajar la semejanza y la congruencia, teniendo en cuenta los conceptos de razón y proporción. Esto a su vez, se

relaciona quizás con lo planteado por Guacaneme, debido a que este autor sostiene que estamos acostumbrados a pensar numéricamente más no de forma geométrica.

3.3.2. Situación 2: Relaciones y Procesos en la homotecia y la Proporcionalidad

Número de estudiantes: al iniciar esta Situación, la cantidad inicial de estudiantes (12) se vio afectada debido a que en el patio central de la Institución se estaba llevando a cabo un acto cívico, y 4 de los 12 estudiantes que se encontraban desarrollando la Secuencia Didáctica debían estar presentes en dicho evento (acto cívico), puesto que iban a presentar un dramatizado. Por ello, se decidió continuar y terminar la aplicación de la Secuencia con los 8 estudiantes restantes. Por otra parte, 1 de los 4 estudiantes que partió hacia el acto cívico, había alcanzado a responder la Actividad **a)** y **b)** de la Tarea 1 de la Situación 2. Estas respuestas fueron tenidas en cuenta para los resultados y análisis de resultados.

Descripción general de la aplicación de la Situación 2: Esta Situación se desarrolló el día 3 de octubre de 2018, empleando un tiempo de aproximadamente 3 horas y 30 minutos. El desarrollo de esta Situación inició a partir de las 2 pm. A las 3:30 pm se hizo un descanso de 30 minutos y una vez finalizado este tiempo, se le dio continuidad al desarrollo de la misma (Situación 2), la cual finalizó a las 6 pm.

Situación 2- Tarea 1-1- Actividad a (S2- T1-1 A_a)

En esta Actividad se preguntaba lo siguiente: **a)** *Si los ángulos de los rombos que dibujaron Anyily y Juan Carlos son congruentes, ¿Cómo definirías en tus propias palabras el término “congruentes”?* El tipo de respuesta que se obtuvo por parte de los estudiantes frente a esta pregunta se reportan en la tabla 17:

S2-T1-1-A _a	Tipo de respuesta	Frecuencia
	Estudiantes que definen correctamente el criterio de congruencia a partir de expresiones cotidianas.	4
	Estudiantes que se aproximan al concepto de congruencia, pero al comunicar sus respuestas mediante expresiones cotidianas, no logran puntualizar una definición para este concepto.	5
	Total	9

Tabla 17: tipificación de respuestas Situación 2- Tarea 1-1- Actividad del inciso a.

En esta Actividad todos los estudiantes comunicaron su respuesta a partir de expresiones cotidianas. Entre estos, 4 de 9 se aproximaron correctamente al **concepto de congruencia**, estableciendo que las medidas de los ángulos correspondientes son iguales, como se muestra en la imagen 15. Esta forma de responder de los estudiantes (4 de 9), permite identificar que reconocen los valores asignados a cada ángulo como **la medida de la cantidad de magnitud, y no como la magnitud o cantidad de magnitud**, a pesar de que no conocían la teoría de las magnitudes aquí desarrollada⁸.

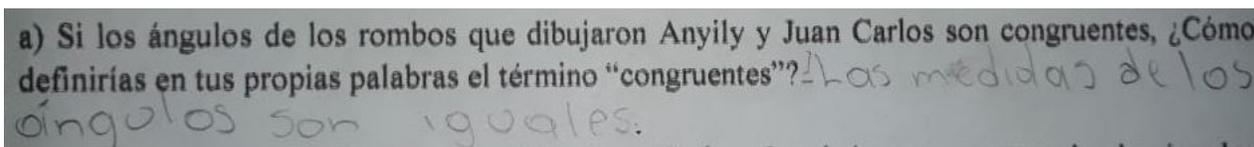


Imagen 15: respuesta de un estudiante respecto a S2- T1-1- A_a

Por otra parte, 5 de los 9 estudiantes, proporcionaron explicaciones que no atendían puntualmente al concepto en cuestión, puesto que confundían la semejanza con el criterio de congruencia, estableciendo que congruentes refiere a figuras semejantes, como se muestra en la imagen 16.

⁸ Ver diferencia entre magnitud, cantidad de magnitud y medida de cantidad de magnitud. (p. 60)

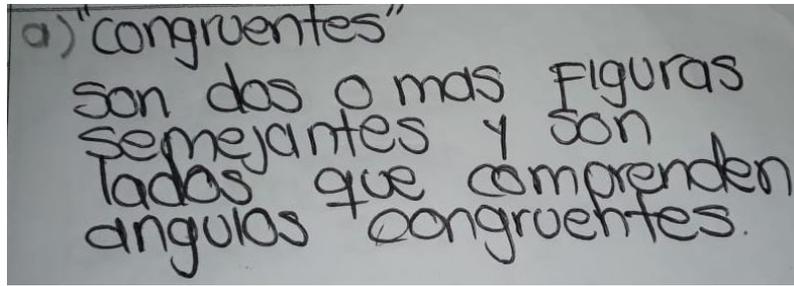


Imagen 16: respuesta de un estudiante respecto a S2- T1-1- A_a

Este hecho se puede asociar a que, estos estudiantes (5 de 9), al parecer no centraron su atención en los ángulos de los rombos sino en los rombos como tal. Además, utilizan el mismo término (congruentes) para su definición.

Situación 2- Tarea 1-1- Actividad b (S2- T1-1 A_b)

En esta Actividad se preguntaba lo siguiente: **b)** *De los rombos que dibujaron Anyily y Juan Carlos ¿Los lados que comprenden los ángulos congruentes son proporcionales? ¿Por qué?* El tipo de respuesta que se obtuvo por parte de los estudiantes frente a esta pregunta se reportan en la tabla 18:

S2- T1-1- A _b	Tipo de respuesta	Frecuencia
	Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del concepto de razón como condición para que se dé la proporción.	7
	Estudiantes que intentan desarrollar la Actividad, pero, no logran puntualizar su respuesta.	2

Total	9
-------	---

En esta Actividad todos los estudiantes comunicaron su respuesta a partir de expresiones cotidianas. La mayoría de ellos (8 de 9) respondieron correctamente, dejando ver **la razón como condición necesaria para que se dé la proporción** (ver imagen 17).

Tabla 18: tipificación de respuestas Situación 2- Tarea 1-1- Actividad del inciso b.

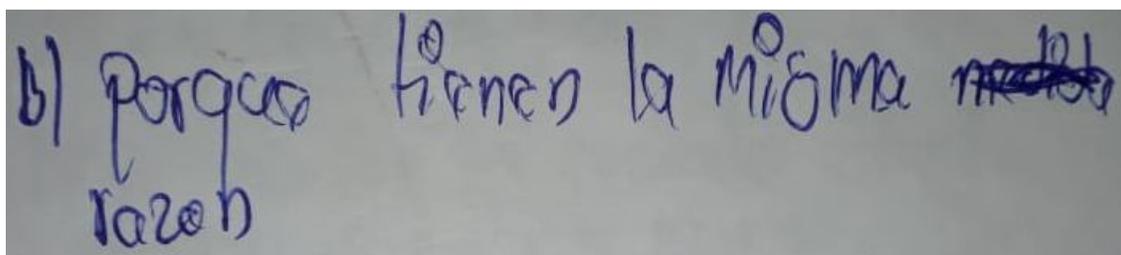


Imagen 17 : respuesta de un estudiante respecto a S2- T1-1- A_b

Sin embargo, ninguno de estos (8 de 9), hizo uso de alguna estrategia para mostrar o formar las razones que permitían establecer que los lados de las figuras presentadas estaban en proporción. Al parecer, el hecho de identificar (mediante la observación) que ambas figuras son semejantes, fue base suficiente para hacer tal afirmación. Por último, 1 de los 9 estudiantes no presentó una respuesta que atendiera claramente a la Actividad, ya que este argumentó que los lados son proporcionales “porque son del mismo número algunos” dejando inconcluso a que refiere puntualmente su respuesta.

Situación 2- Tarea 1-2- Actividad b (S2- T1-2 A_d)

En esta Actividad se preguntaba lo siguiente: **a) ¿Qué relación encuentras entre los ángulos OAB y OCD, ABO y CDO, y, BOA y DOC?** El tipo de respuesta que se obtuvo por parte de los estudiantes frente a esta pregunta se reportan en la tabla 19:

S2-T1-2- A _a	Tipo de respuesta	Frecuencia
	Estudiantes que responden correctamente a partir de expresiones cotidianas.	5
	Estudiantes que intentan desarrollar la Actividad, pero, su respuesta no es precisa.	2
	Estudiantes que responden incorrectamente.	1
Total	8	

Tabla 19: tipificación de respuestas Situación 2- Tarea 1-2- Actividad del inciso a.

En esta Actividad todos los estudiantes comunicaron su respuesta a partir de expresiones cotidianas. Entre estos, 5 de 8 respondieron de manera correcta identificando la igualdad entre la medida de los ángulos correspondientes de dos figuras homotéticas (ver imagen 18), 2 de 8 al comunicar su respuesta, no explicaron con claridad la relación entre los ángulos de las dos figuras homotéticas, haciendo afirmaciones como “los grados de los ángulos”, “números de los ángulos”, ante estas formas de responder de los estudiantes (2 de 8) surgen las siguientes preguntas, los grados de los ángulos ¿Son iguales? ¿Son diferentes? ¿Los ángulos de la figura más grande son mayores que los de la figura más pequeña, o viceversa? Por el hecho de que no hayan puntualizado en estos aspectos se considera poco clara las respuestas de estos estudiantes (2 de 8). Y, 1 de 8 reportó de manera incorrecta la respuesta a la Actividad estableciendo que la relación presente entre aquellos ángulos es la semejanza (ver imagen 19).

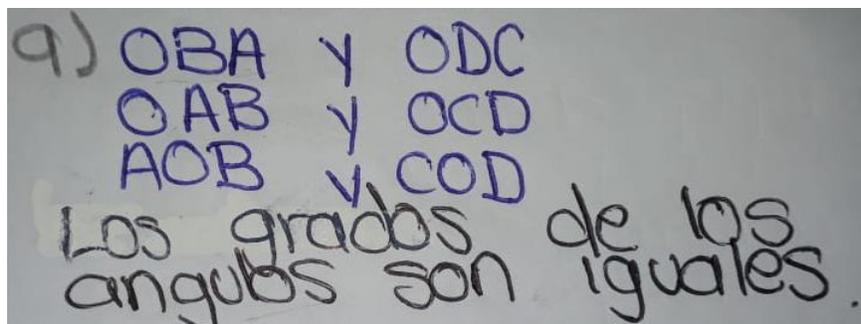


Imagen 18: respuesta de un estudiante respecto a S2- T1-2- A_a

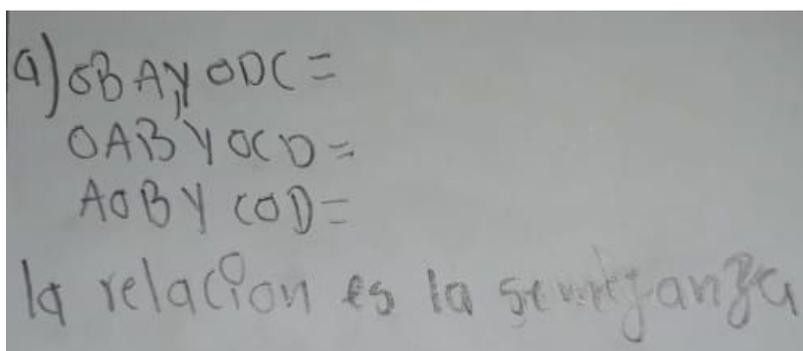


Imagen 19: respuesta de un estudiante respecto a S2- T1-2- A_a

Por otra parte, de esta Actividad se puede decir que; los estudiantes que logran comunicar de forma acertada su respuesta (5 de 8) y los que no logran explicar con claridad dicha relación (2 de 8) sabían interpretar la notación simbólica que se hizo para los ángulos (por ejemplo, OAB y OCD) y por consiguiente, lograron identificarlos en las figuras homotéticas, hecho que les permitió observar que la medida o grados de los ángulos correspondientes son iguales. De otro lado, se pudo identificar que el estudiante que no pudo responder correctamente a la Actividad, quizás fue porque interpretó la notación simbólica (OAB y OCD) que se hizo para los ángulos de las figuras homotéticas como la notación simbólica que se hace para nombrar un triángulo⁹. Visto desde esta óptica, la

⁹ Para evitar este tipo de ambigüedades en la simbología empleada para nombrar ángulos y triángulos, se sugiere denotar los ángulos haciendo uso de símbolo \sphericalangle , por ejemplo, $\sphericalangle ABC$.

respuesta generada por el estudiante se hace comprensible puesto que ambos triángulos (por definición) son semejantes.

Situación 2- Tarea 1-2- Actividad b (S2- T1-2 A_b)

En esta Actividad se le pidió a los estudiantes que hicieran lo siguiente: **b) Observa las cuadrículas y el resto de la información que se muestra en la ilustración (4), para hallar los valores asociados a las razones.** El tipo de respuesta que se obtuvo por parte de los estudiantes frente a esta pregunta se reportan en la tabla 20:

S2- T1-2- A _b	Tipo de respuesta	Frecuencia
	Estudiantes que responden correctamente haciendo uso de la división.	8
	Total	8

Tabla 20: tipificación de respuestas Situación 2- Tarea 1-2- Actividad del inciso b.

En esta Actividad, todos los estudiantes respondieron correctamente lo planteado, hallando el valor asociado a cada razón e **interpretando la representación fraccionaria de las razones $\left(\frac{p}{q}\right)$ como una división $(p \div q)$** (ver imagen 20).

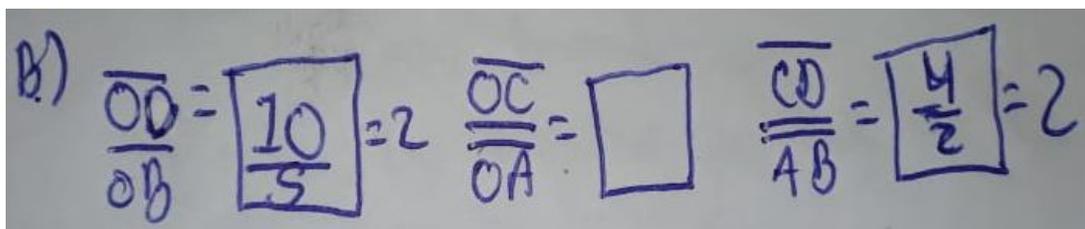


Imagen 20: respuesta de un estudiante respecto a S2- T1-2- A_b

Para el desarrollo de la Actividad, los estudiantes debían contar las cuadrículas para determinar las medidas de cada segmento (\overline{OD} , \overline{OB} , \overline{OC} , \overline{OA} , \overline{CD} y \overline{AB}). Sin embargo, no era tarea fácil establecer la medida de los segmentos \overline{OA} y \overline{OC} a partir del conteo de las cuadrículas, debido a su carácter oblicuo, hecho que hizo que ningún estudiante pudiera determinar tales medidas. Por tanto, es posible decir que los estudiantes al notar que los valores asociados a las otras dos razones ($\frac{\overline{OD}}{\overline{OB}}$ y $\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$) eran iguales, entonces, dedujeron que el valor asociado a la razón ($\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}}$) también era el mismo.

Situación 2- Tarea 1-2- Actividad b (S2- T1-2 A_c)

En esta Actividad se preguntaba lo siguiente: **c) ¿Qué diferencia hay entre los valores asociados a las razones encontradas?** El tipo de respuesta que se obtuvo por parte de los estudiantes frente a esta pregunta se reportan en la tabla 21:

S2- T1-2- A _c	Tipo de respuesta	Frecuencia
		Estudiantes que responden correctamente, haciendo uso del expresiones cotidianas.
	Estudiantes que responden incorrectamente.	3
	Estudiantes que no reportan una respuesta.	2
	Total	8

Tabla 21: tipificación de respuestas Situación 2- Tarea 1-2- Actividad del inciso c.

En esta Actividad, 3 de 8 estudiantes respondieron correctamente a partir de expresiones cotidianas, logrando identificar que **el valor asociado a cada una de las razones** (determinado en S2- T1-2- A_b) no variaba (ver imagen 21).

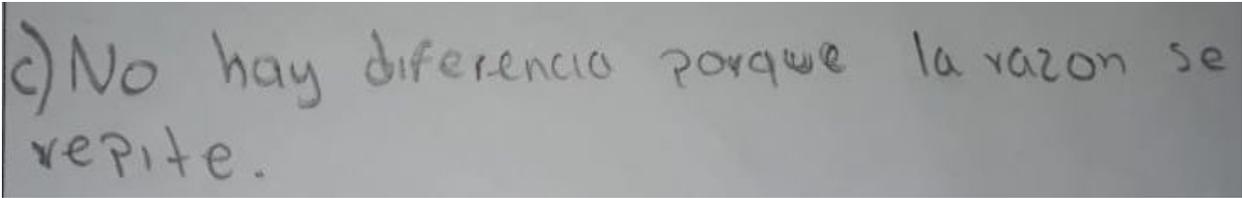


Imagen 21: respuesta de un estudiante respecto a S2- T1-2- A_c

Aunque estos estudiantes (3 de 8) mencionan directamente las razones como aquello que permanece invariante, realmente se están refiriendo a los valores asociados a las razones. Otros estudiantes (3 de 8) no **lograron identificar tal relación de invarianza** a pesar de que desarrollaron de forma correcta la Actividad anterior (S2- T1-2- A_b), al parecer no relacionaron lo hecho en tal Actividad con lo que demandaba la presente Actividad, y 2 de 8 no reportaron respuesta para esta Actividad.

Situación 2- Tarea 1-2- Actividad b (S2- T1-2 A_d)

En esta Actividad se preguntaba lo siguiente: **c) ¿se podría decir que los triángulos OAB y OCD presentes en la ilustración (4) son semejantes? ¿Por qué?** El tipo de respuesta que se obtuvo por parte de los estudiantes frente a esta pregunta se reportan en la tabla 22:

S2- T1-2- A _d	Tipo de respuesta		Frecuencia
	Estudiantes que determinan la semejanza entre figuras planas a partir del criterio de congruencia y el concepto de razón.		1
	Estudiantes cuya respuesta obedece a la observación de la forma de las figuras.		2

Estudiantes que reconocen la congruencia de ángulos como uno de los criterios para determinar la semejanza entre figuras planas, sin embargo su respuesta se limita a este criterio.	3
Estudiantes que no reporta una respuesta.	2
Total	8

En esta Actividad todos los estudiantes que reportaron respuestas, se aproximaron al concepto de semejanza. 1 de los 8, con su forma de responder, da lugar a pensar que interpretó que para que se dé la semejanza entre figuras, ellas deben tener la misma medida

Tabla 22: tipificación de respuestas Situación 2- Tarea 1-2- Actividad del inciso d.

de ángulos y conservar las mismas razones, aunque su respuesta no es del todo precisa, como se muestra en la imagen 22.

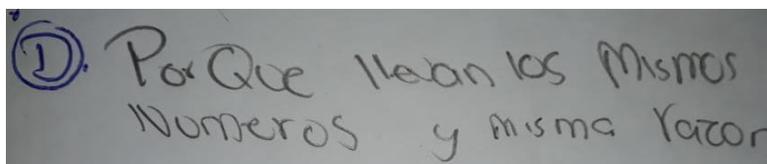


Imagen 22: respuesta de un estudiante respecto a S2- T1-2- A_d

De la respuesta de este estudiante, cuando dice “llevan los mismos números y mismas razones” se interpreta que está haciendo referencia a la igualdad presente entre la medida de los ángulos correspondientes y los valores asociados a las razones, relacionando así lo hecho en las Actividades anteriores de esta Tarea (S2- T1-2) con lo que se preguntaba en la presente Actividad (S2- T1-2- A_d). Por otro lado, 2 de 8 estudiantes no utilizaron criterios conceptuales que les permitieran establecer la semejanza entre las dos figuras, sino que dejaron ver a través de sus respuestas que determinaron tal semejanza por la forma similar que estas poseen (ver imagen 23).

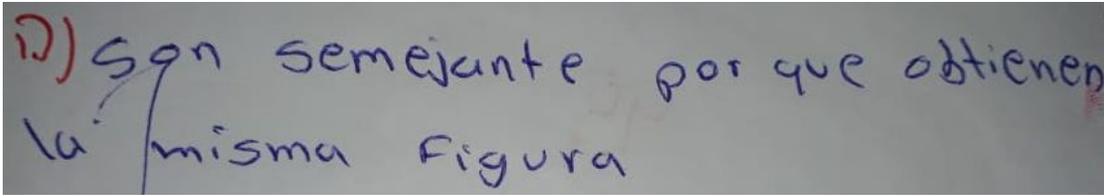


Imagen 23: respuesta de un estudiante respecto a S2- T1-2- A_d

En respuestas como la anterior (imagen 23), se puede apreciar que los estudiantes en ocasiones, cuando se enfrentan a una Actividad o Tarea, priorizan sus percepciones sobre los argumentos conceptuales pertenecientes a un área determinada (en este caso, el área de las matemáticas). Finalmente, respecto a la presente Actividad (S2- T1-2- A_d), 3 de 8 reconocen que si dos figuras son semejantes la medida de los ángulos son iguales (ver imagen 24)

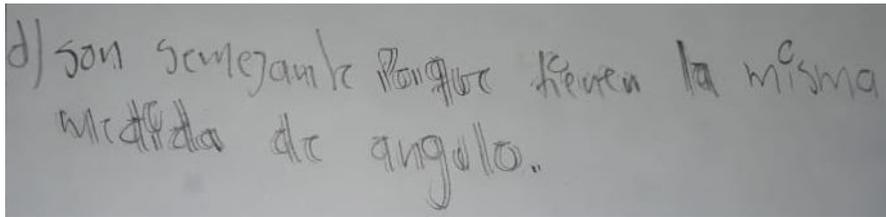


Imagen 24: respuesta de un estudiante respecto a S2- T1-2- A_d

Teniendo en cuenta esta respuesta, se podría pensar que para estos estudiantes (3 de 8), **si la medida de los ángulos de dos o más figuras son iguales, entonces estas serán semejantes**. Sin embargo, esta generalización no es totalmente válida, puesto que todas las figuras que cumplen este carácter no son estrictamente semejantes, para ello se debe aclarar que las figuras tengan la misma cantidad de ángulos y que la igualdad se presente en la medida de los ángulos correspondientes.

Situación 2- Tarea 2-1- Actividad b (S2- T2-1 A_d)

En esta Actividad se preguntaba lo siguiente: **a) ¿Qué sucede con los segmentos al prolongarlos hacia la izquierda, se unen o se interceptan? Si los tres segmentos se unen o se interceptan, indica dicho punto.** El tipo de respuesta que se obtuvo por parte de los estudiantes frente a esta pregunta se reportan en la tabla 23:

S2- T2-1- A _a	Tipo de respuesta		Frecuencia
	Estudiantes que responden correctamente, a partir de expresiones cotidianas.		6
	Estudiantes que no reportan una respuesta.		2
	Total		8

Tabla 23: tipificación de respuestas Situación 2- Tarea 2-1- Actividad del inciso a.

En esta Actividad, la mayoría de los estudiantes (6 de 8) lograron establecer que al prolongar hacia la izquierda los segmentos indicados en esta Actividad (S2- T2-1- A_a), estos se unen en un mismo punto (ver imagen 25 y 26).

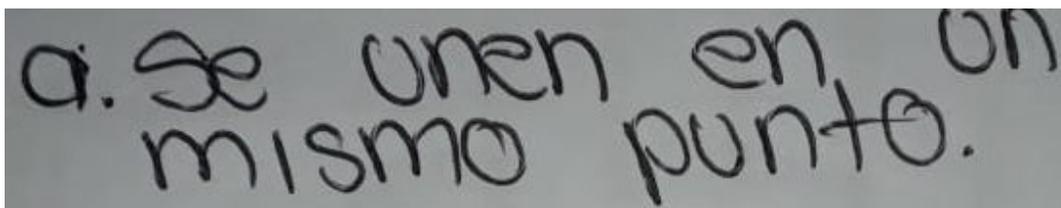


Imagen 25: respuesta de un estudiante respecto a S2- T2-1- A_a

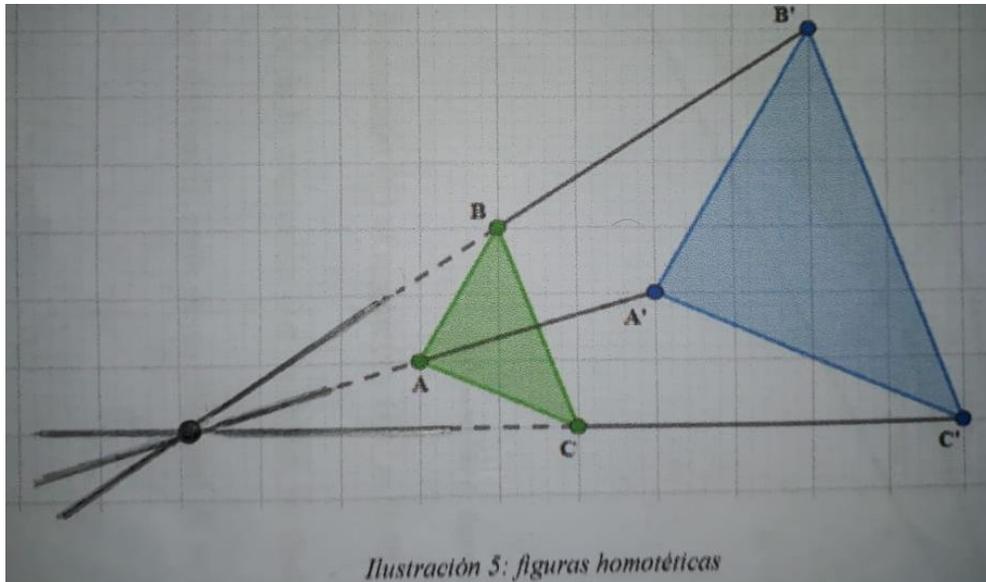


Imagen 26: respuesta de un estudiante respecto a S2- T2-1- A_a

Por otra parte, 2 de los 8 no reportaron respuesta, a pesar de que prolongaron correctamente los tres segmentos e indicaron el punto en el cual se interceptaban, como se mostró en la imagen 26. Este hecho, permite pensar que posiblemente los estudiantes (2 de 8) asumieron que la respuesta a esta Actividad (S2- T2-1- A_a) era evidente al mostrar tal punto de intersección.

Situación 2- Tarea 2-1- Actividad b (S2- T2-1 A_b)

En esta Actividad se preguntaba lo siguiente: **b) Qué se puede decir respecto a:**

- El punto indicado en relación con los puntos A y A'
- El punto indicado en relación con los puntos B y B'
- El punto indicado en relación con los puntos C y C'

El tipo de respuesta que se obtuvo por parte de los estudiantes frente a esta pregunta se reportan en la tabla 24:

S2- T2-1- A _b	Tipo de respuesta	Frecuencia
	Estudiantes que responden correctamente a partir de expresiones cotidianas.	2
	Estudiantes cuya respuesta no es precisa.	2
	Estudiantes que responden incorrectamente.	4
	Total	8

Tabla 24: tipificación de respuestas Situación 2- Tarea 2-1- Actividad del inciso b.

En esta Actividad todos los estudiantes comunicaron su respuesta a partir de expresiones cotidianas. Solo 2 de los 8 respondieron correctamente, **identificando la linealidad** que se presenta al unir los puntos indicados, y que a su vez, **las líneas formadas convergen en un punto focal** (ver imagen 27).

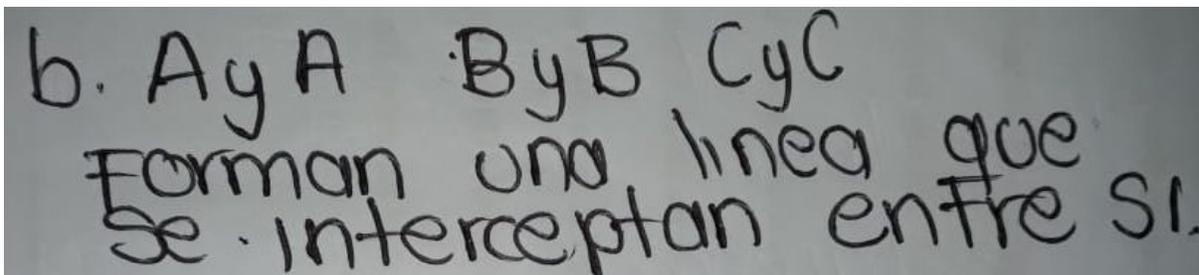


Imagen 27: respuesta de un estudiante respecto a S2- T2-1- A_b

Por otra parte, las respuestas de otros estudiantes (2 de los 8) se interpretan como poco clara, porque no toman en cuenta el punto indicado en la Actividad anterior (S2- T2-1- A_a). Por ejemplo 1 de ellos establece que A y A' los une un punto (ver imagen 28). Sin embargo, de acuerdo con la geometría euclidiana el punto no tiene dimensión, la unión de dos puntos se puede dar mediante un segmento.

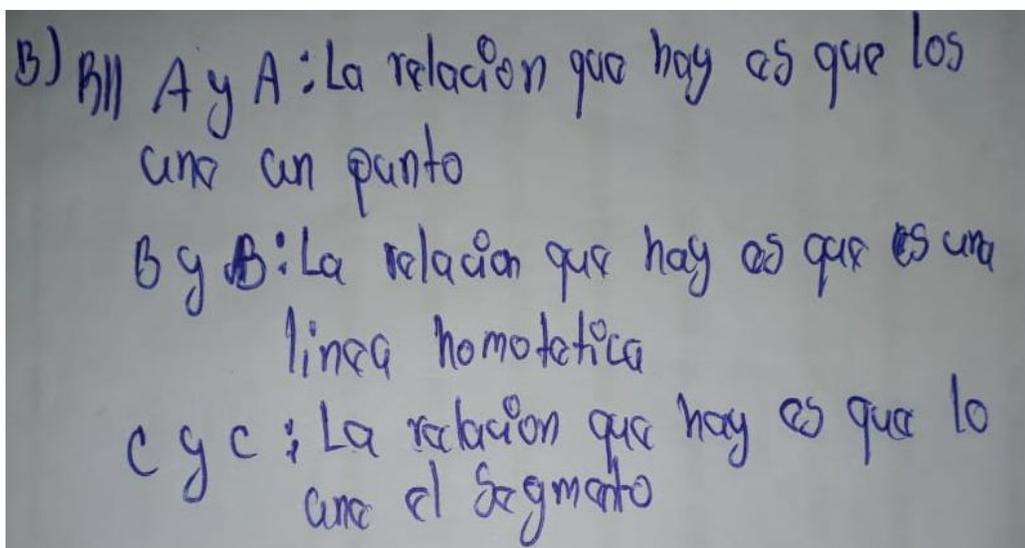


Imagen 28: respuesta de un estudiante respecto a S2- T2-1- A_b

En esta respuesta (imagen 28) es posible apreciar que el estudiante no pudo identificar una relación común entre los tres pares de puntos respecto al **punto focal**, por lo cual propició una respuesta diferente para cada pareja de puntos. Por último, 4 de los 8 estudiantes respondieron incorrectamente, dado a que sus respuestas no atendían directamente a lo planteado en la Actividad. Esto se dice, porque el tipo de respuesta de estos estudiantes (4 de 8) al parecer obedecía a la ubicación de las líneas, formadas a partir de las parejas de puntos A y A', B y B' y, C y C' (ver imagen 29).

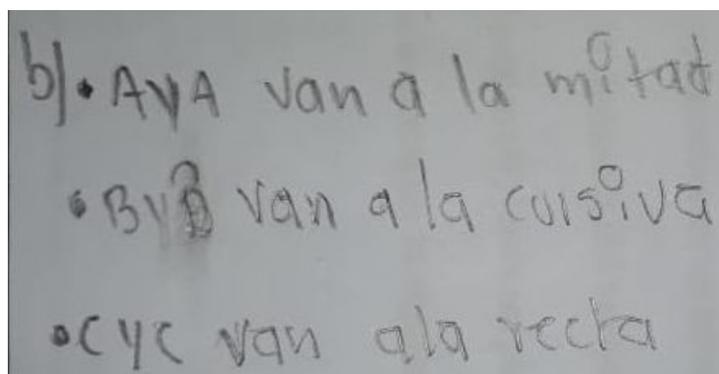


Imagen 29: respuesta de un estudiante respecto a S2- T2-1- A_b

Situación 2- Tarea 2-2- Actividad b (S2- T2-2 A_a)

En esta Actividad se le pidió a los estudiantes que hicieran lo siguiente: **a)** de acuerdo con los datos presentes en la ilustración (7) y haciendo uso de las cuadrículas, encontrar los valores asociados a las razones $\frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}$, $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$, y $\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}$. El tipo de respuesta que se obtuvo por parte de los estudiantes frente a esta pregunta se reportan en la tabla 25:

S2- T2-2- A _a	Tipo de respuesta	Frecuencia
		Estudiantes que responden correctamente haciendo uso de la división.
	Total	8

Tabla 25: tipificación de respuestas Situación 2- Tarea 2-2- Actividad del inciso a.

En esta Actividad, todos los estudiantes respondieron correctamente hallando el valor asociado a cada razón, interpretando **la representación fraccionaria de las razones** $\left(\frac{p}{q}\right)$ como una división ($p \div q$) (ver imagen 30).

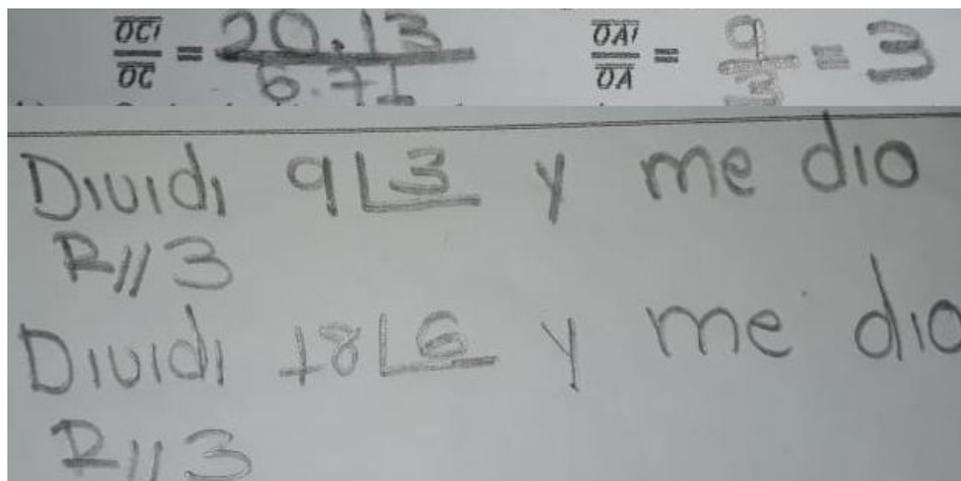


Imagen 30: respuesta de un estudiante respecto a S2- T2-2- A_a

En esta Actividad, se pudo observar que a los estudiantes se les hizo fácil determinar la medida de los segmentos $\overline{OA'}$, \overline{OA} , $\overline{OB'}$ y \overline{OB} a partir del conteo de las

cuadrículas y posteriormente, determinar los **valores asociados a las razones** formadas entre estos $(\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA'}}, y \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}})$, quizás, porque ya habían tenido la oportunidad de enfrentarse a una Actividad que demandara lo mismo (**S2- T1-2- A_b**). De otro lado, las medidas de los segmentos $\overline{OC'}$ y \overline{OC} fueron dadas a los estudiantes ya que mediante las cuadrículas no podían hallarlas. Pero, estas medidas eran valores decimales y ninguno de los estudiantes sabía cómo dividir con este tipo de número. Por ello, su respuesta asertiva se debe posiblemente a que al igual que en la Actividad **S2- T1-2- A_b**, notaron que los valores asociados a las otras dos razones $(\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA'}}, y \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}})$ eran iguales, entonces, dedujeron que el valor asociado a la razón $(\frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}})$ también era el mismo.

Situación 2- Tarea 2-2- Actividad b (S2- T2-2 A_b)

En esta Actividad se preguntaba lo siguiente: **b) ¿Qué relación tienen las anteriores razones entre sí y cómo se le suele llamar a los valores asociados a estas?** El tipo de respuesta que se obtuvo por parte de los estudiantes frente a esta pregunta se reportan en la tabla 26:

S2- T2-2- A _b	Tipo de respuesta		Frecuencia
	Estudiantes cuya respuesta no es precisa.		8
	Total		8

Tabla 26: tipificación de respuestas Situación 2- Tarea 2-2- Actividad del inciso b.

En esta Actividad, todos los estudiantes de acuerdo con la Actividad anterior (S2-T2-2- A_a), pudieron identificar que **el valor asociado a cada una de las anteriores razones permanecía invariante**, como se muestra en la imagen 31.

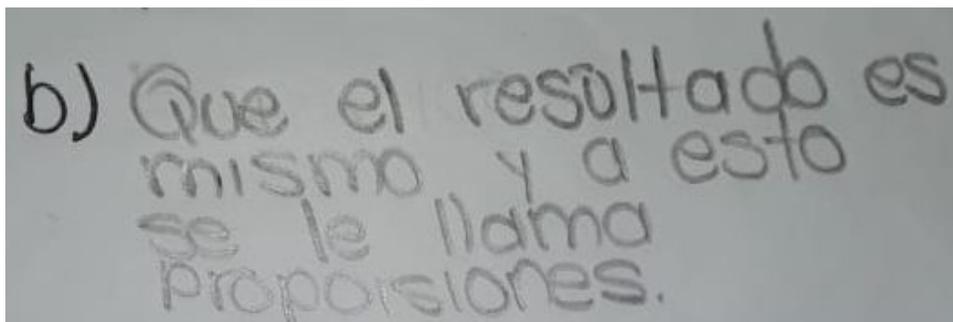


Imagen 31: respuesta de un estudiante respecto a S2- T2-2- A_b

Sin embargo, estos estudiantes a la hora de responder ¿cómo se le suele llamar a los valores asociados a cada una de las razones? Posiblemente no recordaron que este recibía el nombre de **constante de proporcionalidad**¹⁰, por lo cual generaron respuestas como; “constancia proporcional”, “proporción” entre otras.

Situación 2- Tarea 2-2- Actividad b (S2- T2-2 A_c)

En esta Actividad se preguntaba lo siguiente: **c) ¿Qué relación encuentra entre la figura inicial y la homotética teniendo en cuenta el coeficiente de similaridad (k)?** El tipo de respuesta que se obtuvo por parte de los estudiantes frente a esta pregunta se reportan en la tabla 27:

¹⁰ En la etapa de institucionalización del saber, llevada a cabo al finalizar la Situación 1, se le explicó a los estudiantes que los valores asociados a las razones, se les denomina constante de proporcionalidad cuando estos son iguales.

	Tipo de respuesta	Frecuencia
S2- T2-2- A _c	Estudiantes que responden correctamente, estableciendo que la figura homotética es k veces la figura inicial.	4
	Estudiantes que responden correctamente identificando que el coeficiente de similaridad, resulta de establecer las razones (por ejemplo $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$) entre la distancia del centro de similaridad a la figura homotética y del centro de similaridad a la figura inicial.	4
	Total	8

Tabla 27: tipificación de respuestas Situación 2- Tarea 2-2- Actividad del inciso c.

En esta Actividad, todos los estudiantes respondieron correctamente. Sin embargo, hubo una bipartición en las formas de responder esta Actividad. 4 de 8 estudiantes expresaron a través de expresiones cotidianas la relación que se presenta entre las figuras (**inicial y homotética**) a partir de la **constante de proporcionalidad (coeficiente de similaridad k)** como se muestra en la imagen 32.

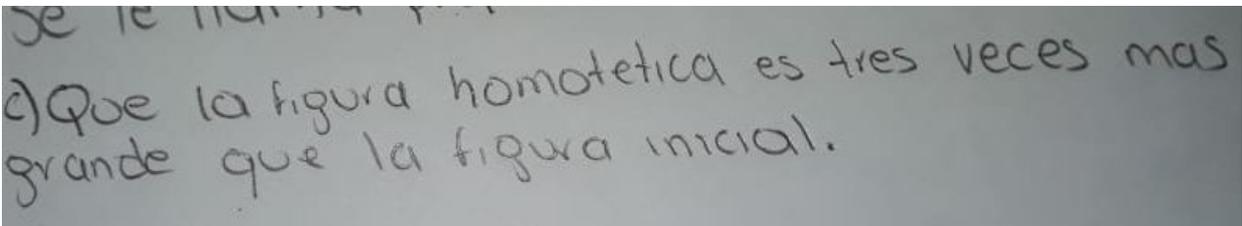


Imagen 32: respuesta de un estudiante respecto a S2- T2-2- A_c

Este tipo de respuesta permite identificar que para estos estudiantes, **la figura homotética es k veces la figura inicial** ($A' = kA$). Los otros 4 estudiantes, a través de sus respuestas permiten interpretar que al establecer las razones entre la distancia del **centro** (O) a un punto A de la figura inicial (\overline{OA}) y del **centro** a un punto A' de la figura homotética ($\overline{OA'}$), **el valor asociado a esta (razón), constituye el coeficiente de similaridad k** ($\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = k$) como se muestra en la imagen 33.

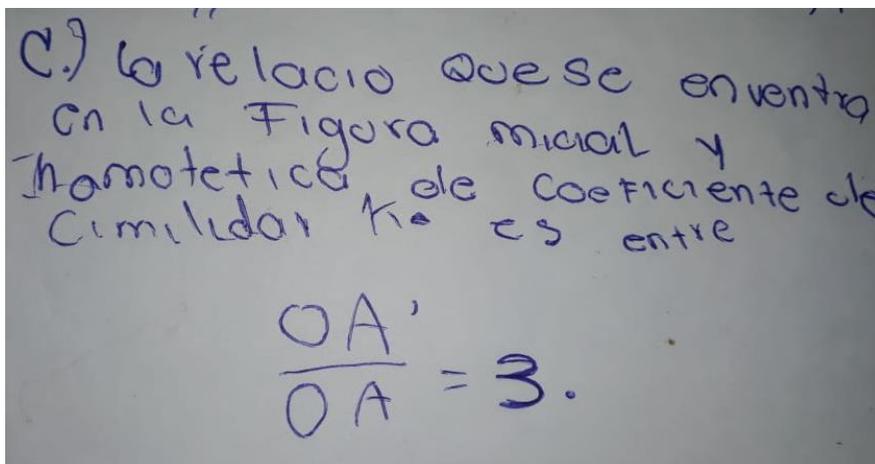


Imagen 33: respuesta de un estudiante respecto a S2- T2-2- A_c

Situación 2- Tarea 2-2- Actividad b (S2- T2-2 A_d)

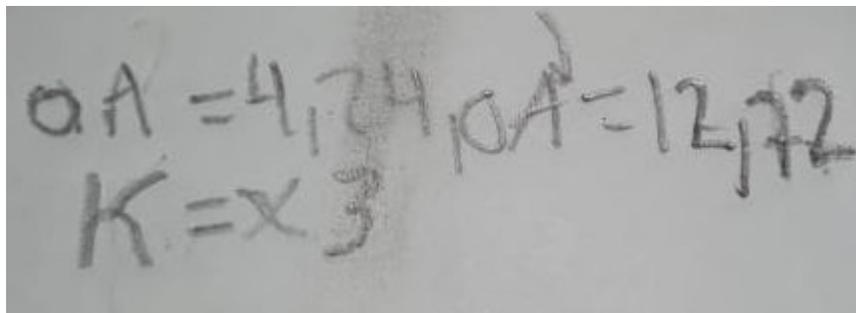
En esta Actividad se le pidió a los estudiantes que hicieran lo siguiente: **d)** *Hallar la medida del segmento $\overline{A'C'}$, teniendo en cuenta que su lado correspondiente es $\overline{AC} = 4.24$.*

El tipo de respuesta que se obtuvo por parte de los estudiantes frente a esta pregunta se reportan en la tabla 28:

	Tipo de respuesta	Frecuencia
S2- T2-2- A _d	Estudiantes que responden correctamente, reconociendo que el segmento homotético es k veces el segmento inicial ($\overline{A'C'} = k\overline{AC}$).	4
	Estudiantes que no reportan una respuesta.	4
	Total	8

Tabla 28: tipificación de respuestas Situación 2- Tarea 2-2- Actividad del inciso d.

En esta Actividad, 4 de los 8 estudiantes respondieron correctamente teniendo en cuenta la relación mostrada en S2- T2-2- A_c ($A' = kA$), multiplicando así, la medida del **segmento inicial** ($\overline{AC} = 4.24$) con el **coeficiente de similitud** ($k = 3$) para obtener la medida del **segmento homotético** ($\overline{A'C'} = 12.72$) como se muestra en la imagen 34.



Handwritten student work showing calculations: $OA = 4,24$, $OA' = 12,72$ and $K = x 3$.

Imagen 34: respuesta de un estudiante respecto a S2- T2-2- A_d

Al observar la forma en que estos estudiantes (4 de 8) respondieron (imagen 34), si se hace la relación de la presente Actividad con la anterior (S2- T2-2- A_c), se podría pensar que los 4 estudiantes que llevaron a cabo este proceso, fueron los 4 que en la Actividad S2- T2-2- A_c identificaron la relación $A' = kA$. Sin embargo, solo 1 de estos reportó respuesta a esta pregunta, de lo que se podría inferir que los otros (3 de 4) que respondieron esta Actividad, a pesar que en la anterior (S2- T2-2- A_c) mostraron que $\frac{OA'}{OA} = k$, también lograron identificar la relación $A' = kA$. Por tanto, 7 de los 8 estudiantes reconocen que **la figura homotética es k veces la figura inicial.**

3.3.3. Situación 3: homotecia de Segmentos y Polígonos en el plano.

Número de estudiantes: 8.

Descripción de la aplicación de la Situación 3: esta Situación se llevó a cabo el 5 de octubre de 2018. Para ello, se empleó una sesión de 2 horas y 30 minutos, iniciando desde la 1pm y terminando a las 3:30 pm. En este sentido, se debe resaltar que para el desarrollo de la Tarea 1 de esta Situación (3), se utilizó un tiempo de 1 hora y 30 minutos, es decir, se trabajó desde la 1 pm hasta las 2.30 pm. Y la Tarea 2 requirió de un tiempo de 1 hora para su desarrollo; en otras palabras, se trabajó de 2:30 a 3:30 pm.

Situación 3-Tarea 1-Actividad a (S3- T1- A_a):

Para la puesta en marcha de la primera Actividad, se propuso una tabla (hacer referencia) a partir de la cual se planteó la siguiente pregunta: **a)** *¿Qué se puede decir de la división de las coordenadas de las figuras J y J' en relación con el coeficiente de similitud?* En relación con esta pregunta, se obtuvieron los siguientes resultados de los estudiantes como se muestra en la tabla 29.

S3- T1- A _a	Tipo de respuesta	Frecuencia
	Estudiantes que responden correctamente relacionando el concepto de constante de proporcionalidad con el coeficiente de similitud.	2
	Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del criterio de igualdad entre la división de coordenadas y el coeficiente de similitud.	5
	Estudiantes que no reportan una respuesta.	1
	Total	8

Tabla 29: tipificación de respuestas Situación 3- Tarea 1- Actividad del inciso a.

En esta Actividad los estudiantes emplearon expresiones cotidianas para comunicar sus respuestas. Se pudo notar que la mayoría (5 de 8 estudiantes), usó el criterio de igualdad (equivalencia) para establecer la relación entre el **coeficiente de similitud y la división de coordenadas entre puntos homotéticos y sus correspondientes puntos origen**. Esto, se puede notar en la imagen 35 donde se muestra cómo responden 1 de estos estudiantes (5 de 8).

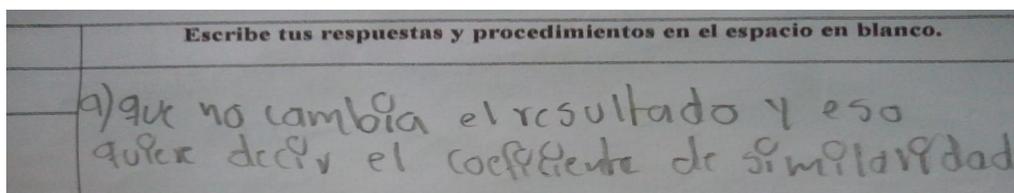


Imagen 35: respuesta de un estudiante respecto a S3- T1- A_a

De acuerdo a lo que se aprecia en la imagen 35, es posible decir que para los estudiantes (5 de 8), **el valor asociado a las razones** (división entre coordenadas en x y en y) que se presentan en una tabla, recibe el nombre de **coeficiente de similitud (K)**, además de ser entendido como **la constante de proporcionalidad**. En este sentido, es importante señalar que aunque estos estudiantes (5 de 8) no hacen mención explícita **al concepto de constante de proporcionalidad**, se cree que hacen uso implícito del mismo (el cual se trabajó con anterioridad en las Situaciones anteriores) para relacionarlo con el concepto de **coeficiente de similitud**.

Por otra parte, 2 de los 8 estudiantes hicieron uso explícito del **concepto de constante de proporcionalidad para relacionarlo con el coeficiente de similitud**.

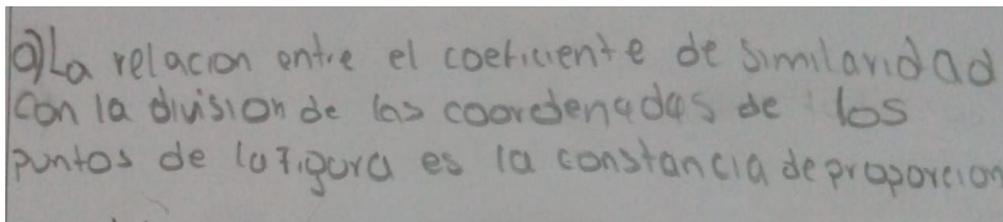


Imagen 36: respuesta de un estudiante respecto a S3- T1- A_a

Con respecto a lo que se reporta en la imagen 36, es importante notar que aunque los 2 de los 8 estudiantes que respondieron haciendo uso del **concepto de constante de proporcionalidad**, en su intento por hacer alusión a este, reprodujeron en nombre del concepto como **“constancia de proporción”**. Sin embargo, dicho intento se ha considerado como una respuesta correcta en vista de que resulta sencillo entender lo que los estudiantes intentaban decir.

Frente a todo lo anterior, se puede decir que, a partir de la respuesta de todos los estudiantes se logró el objetivo para el cual fue pensada la Actividad (S3- T1- A_a), puesto

que se reconoce el concepto de constante de proporcionalidad como un elemento mediador para la aprehensión de otros conceptos como lo es el del coeficiente de similaridad (**K**), el cual, es un elemento fundamental para el desarrollo del aprendizaje de la homotecia.

En suma, se tiene la fuerte sospecha de que el éxito que llevó a establecer relación (explícita o implícita) entre **constante de proporcionalidad y coeficiente de similaridad**, por parte de los estudiantes, se debe quizás a que en las Actividades precedentes propuestas en la Secuencia Didáctica (Situación 1 y 2), en las cuales se abordaron estos conceptos, los estudiantes pudieron aprehenderlos, distinguiendo, además, **la razón** (relación entre magnitudes expresada como un cociente indicado) del **valor que se le asocia: constante de proporcionalidad** (cociente resultante de la división). Asimismo, se puede ver desde la práctica, es decir, a partir de la Actividad propuesta (**S3- T1- A_a**), un vínculo existente entre **concepto de razón y la operación división**¹¹ como se menciona en la teoría.

Situación 3-Tarea 1-Actividad b (S3- T1- A_b):

En esta Actividad, se preguntaba lo siguiente: **b) si se tienen solo las coordenadas del punto A (x, y) de la figura J y el coeficiente de similaridad (K), ¿Cómo se pueden obtener las coordenadas del punto A' (x', y') de la figura J'?** El tipo de respuesta que se obtuvo por parte de los estudiantes frente a esta pregunta se reporta en la tabla 30.

S 3	Tipo de respuesta	Frecuencia
-----	-------------------	------------

¹¹ Ver en Marco de Referencia-Perspectiva Didáctica

Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del concepto de multiplicación como forma para dar cuenta de las coordenadas de un punto homotético A' de coordenadas (x', y') , a partir del coeficiente de similaridad K y un punto inicial A de coordenadas (x, y) (empleo del expresiones cotidianas y expresiones numéricas).	6
Estudiantes que responden proporcionando una aproximación a la Actividad pero que no explicitan detalles en lo que comunican (empleo de expresiones cotidianas y expresiones numéricas).	2
Total	8

En esta Actividad se privilegió el uso de expresiones cotidianas y de expresiones

Tabla 30: tipificación de respuestas Situación 3- Tarea 1- Actividad del inciso b.

numéricas. Esto contrasta con lo que se esperaba que comunicaran los estudiantes, puesto que, la Actividad fue pensada con el objetivo de que ellos produjeran respuestas que involucraran el lenguaje algebraico o simbólico. Así por ejemplo; $KA = A'$, $K(x, y) = (x', y')$, $Kx = x'y$ $Ky = y'$.

En relación con lo anterior, solo 6 de los 8 estudiantes respondieron con argumentos claros, reconociendo que al efectuar la multiplicación entre **el coeficiente de similaridad (K)** y las coordenadas del punto **A**, se pueden obtener las coordenadas homotéticas de este (**A'**). Esto, se puede apreciar en la respuesta de 1 de los 8 estudiantes como se muestra en la imagen 37.

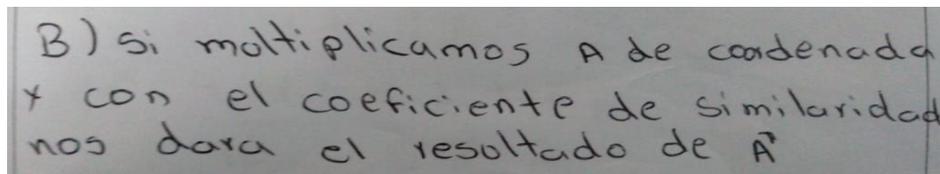


Imagen 37: respuesta de un estudiante respecto a S3- T1- A_b

En este orden de ideas, el hecho de que ninguno de los estudiantes expresara la respuesta a la Actividad en lenguaje algebraico o simbólico, hace pensar que quizás no

están familiarizados con este tipo de lenguaje y que por tanto, optan por las expresiones cotidianas y las expresiones numéricas los cuales son más recurrentes para ellos.

En este sentido, es importante mencionar que entre estos estudiantes (6 de 8), 1 de ellos hace uso notablemente del expresiones numéricas para dar solución a la Actividad, lo cual le fue posible al identificar, a partir de una ilustración presentada (Secuencia Didáctica S3-T1), las coordenadas numéricas del punto **A** y el coeficiente de similaridad dado **K=2** para poder operar, y obtener los valores de las coordenadas de **A'**. La respuesta de este estudiante se reporta en la imagen 38.

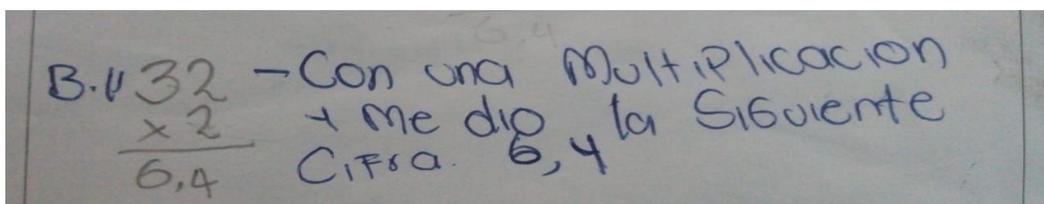


Imagen 38: respuesta de un estudiante respecto a S3- T1- A_b

Con respecto a esta respuesta (imagen 38), se puede ver que el punto tomado por el estudiante escrito como si fuera un “32” es **A (3, 2)** en la ilustración de S3-T1, el cual lo multiplica por 2 que es el coeficiente **K** dado, para obtener “la cifra” como la nombra el estudiante que corresponde al punto homotético **A' (6, 4)**. Es decir, que este estudiante observó en la gráfica (ilustración S3-T1) la información específica de **A**, **A'** y **K**, y la relacionó con la información generalizada de los puntos **A (x, y)**, **A' (x', y')** y el coeficiente **K** dados en la pregunta (S3-T1-Ab). Así, se puede entender que la multiplicación efectuada por el estudiante fue el proceso que empleó para dar solución a la Actividad, lo que aclara con su respuesta en expresiones cotidianas que explica o complementa la operación realizada. De esta manera, se nota que al parecer resulta más fácil tratar con casos

particulares o específicos en comparación con la generalidad que implica el lenguaje algebraico o simbólico.

Por otro lado, en el caso de la minoría (2 de 8), se sospecha que estos estudiantes reconocen que con una multiplicación entre el coeficiente de similaridad (**K**) y las coordenadas del punto **A** de la figura **J**, se pueden hallar las coordenadas del punto homotético **A'**. Sin embargo, la economía o globalidad de su respuesta no permite afirmar con contundencia lo antedicho. Una respuesta de este tipo se muestra en seguida en la imagen 39.

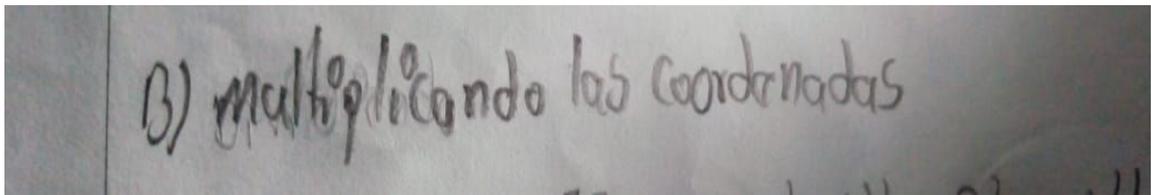


Imagen 39: respuesta de un estudiante respecto a S3- T1- A_b

Frente a la respuesta mostrada en la imagen 39, surgen interrogantes como ¿Multiplicando las coordenadas de quién? ¿De **A** con las de **A'**? Estos interrogantes surgen, puesto que, en la respuesta no se explicitan los factores que intervienen en la multiplicación a la que se hace alusión. Al menos bastaría con que se dijera “multiplicando las coordenadas de **A** con **K**” con esto se entendería de dónde surgiría el producto de dicha multiplicación (coordenadas de **A'**).

A modo de cierre, con respecto a los resultados obtenidos (para esta Actividad), se puede decir que los estudiantes pudieron reconocer la multiplicación como el medio para dar solución a la Actividad, debido a que con anterioridad (en otras Actividades propuestas en la Secuencia Didáctica) ellos ya habían tratado con relaciones como $K\overline{OA} = \overline{OA'}$ de

estructura multiplicativa, en la cual se involucran **elementos origen y homotéticos**, y el **coeficiente de similitud** propios de la homotecia.

Situación 3-Tarea 1-Actividad c (S3- T1- A_c):

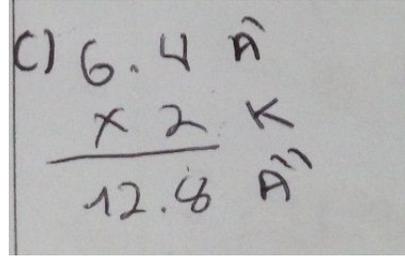
Esta Actividad, se relaciona con la anterior debido a que involucra el mismo proceso multiplicativo que se vio en S3- T1- A_b. La pregunta planteada fue: **b) ¿Cuáles son las coordenadas del punto A'' (x'', y''), sabiendo que el punto A' tiene coordenadas (6, 4) y el coeficiente de similitud es K=2?** Los resultados que se obtuvieron en relación con esta pregunta se reporta en la tabla 31.

	Tipo de respuesta	Frecuencia
S3- T1- A_c	Estudiantes que responden correctamente empleando la multiplicación de las coordenadas de un punto dado (A') y el coeficiente de similitud (empleo de expresiones numéricas y expresiones cotidianas).	3
	Estudiantes que responden correctamente deduciendo el coeficiente de similitud k que lleva de J a J'' (empleo del expresiones cotidianas y expresiones numéricas).	1
	Estudiantes que responden correctamente sin justificar el resultado encontrado (empleo de expresiones cotidianas y expresiones numéricas).	3
	Estudiantes que responden incorrectamente.	1
	Total	8

Tabla 31: tipificación de respuestas Situación 3- Tarea 1- Actividad del inciso c.

En general todos los estudiantes hicieron uso de expresiones cotidianas y de expresiones numéricas para comunicar sus respuestas. En vista de que esta Actividad se relaciona en gran medida con la anterior, 4 de 8 estudiantes, utilizaron argumentos válidos para justificar lo que comunican. Esto se da quizás, porque los estudiantes interactúan con información presentada a través de varias expresiones asociadas como la gráfica, tabular y expresiones cotidianas, lo que les permite realizar la multiplicación entre las coordenadas

del punto dado A' y el coeficiente $k=2$ para obtener A'' . A continuación se presenta en las imágenes dos respuestas de este tipo.

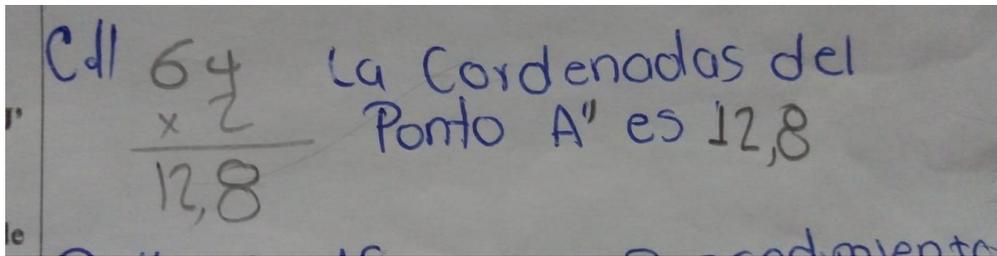


C) $6.4 \ A'$
 $\times 2 \ K$

 $12.8 \ A''$

Imagen 40: respuesta de un estudiante respecto a S3- T1- A_c

Con esta respuesta (imagen 40), se ve el no empleo de expresiones cotidianas, pero sí algunas etiquetas (A' , K y A'') que permiten identificar cada elemento que interviene en la multiplicación efectuada. En la imagen 41, se nota en contraste, que si se emplean las expresiones cotidianas.



Cd) 64 La Cordenadas del
 $\times 2$ Ponto A'' es $12,8$

 $12,8$

Imagen 41: respuesta de un estudiante respecto a S3- T1- A_c

En la imagen 41, se ve como el estudiante emplea las expresiones cotidianas solo para decir que las coordenadas de A'' son $(12, 8)$, con lo que se infiere que en la multiplicación realizada usó las coordenadas de A' $(6, 4)$ y el coeficiente dado (2) . Además, cabe resaltar que de los 4 de 8 estudiantes, 3 emplearon las expresiones cotidianas para explicar detalles de la multiplicación efectuada como se ve en la imagen 41, pero 1 de este grupo (4 de 8), solo deja ver las coordenadas resultantes del punto A'' con expresiones numéricas explicando que la razón de ser del resultado es la relación cuádruple de las

coordenadas de A'' con respecto al punto A . La respuesta de este estudiante se muestra en la imagen 42.

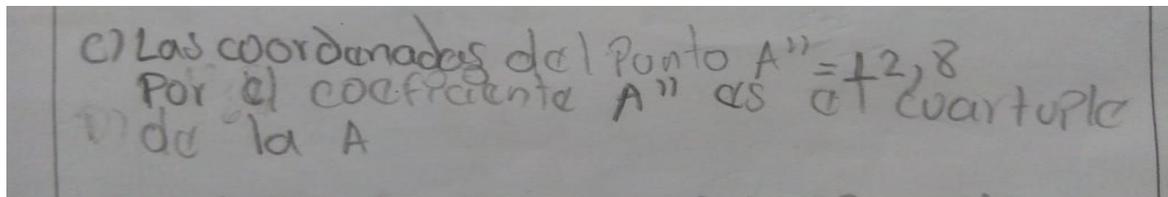


Imagen 42: respuesta de un estudiante respecto a S3- T1- A_c

La particularidad de esta última respuesta (imagen 42), hace sospechar con más fuerza que los estudiantes no solo se valen de la información que se da en la Actividad, sino que se interactúa con informaciones presentadas con varias expresiones asociadas (como ya se mencionó) y relacionando los aprendizajes de Actividades anteriores con las posteriores, lo que les permite hacer inferencias como la presente en la imagen 42, que prácticamente adelanta la respuesta de la Actividad siguiente (S3- T1- A_d).

Sin embargo, hay estudiantes (3 de 8) que propician respuestas correctas pero sin justificar; es decir, escriben las coordenadas resultantes del punto pero no muestran ningún tipo de proceso que soporte tal respuesta o argumentos en expresiones cotidianas que hagan esto mismo. Ejemplo de una respuesta de este tipo se reporta en la imagen 43.

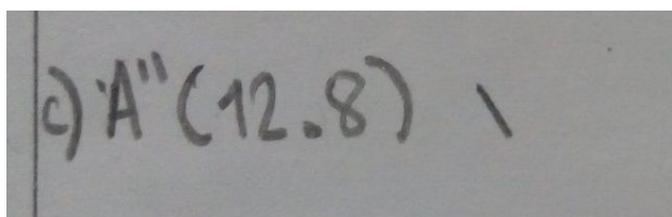


Imagen 43: respuesta de un estudiante respecto a S3- T1- A_c

Frente a la respuesta anterior (imagen 43), se puede suponer que el estudiante empleó una multiplicación para hallar las coordenadas de A'' también, o quizás hizo uso de

la observación de los polígonos en la ilustración de S3-T1, infiriendo a partir de toda la información suministrada las coordenadas requeridas. Finalmente, 1 de los 8, responde incorrectamente tomando al parecer referencias de información que se presenta en una tabla de la Tarea correspondiente a la Actividad.

En suma, los estudiantes reconocen la multiplicación como el proceso (operación) matemático para dar solución a la Actividad. Esto, se relaciona con el objetivo de la Actividad (S3- T1- A_c) debido a que esta es una extensión de la anterior. Es decir, se buscaba que los estudiantes pudieran reconocer que al multiplicar las coordenadas de los puntos de una figura origen (**J'**), con el coeficiente de similaridad (**K**), se obtienen las coordenadas de los puntos homotéticos correspondientes en la figura (**J''**).

Situación 3-Tarea 1-Actividad d (S3- T1- A_d):

Esta Actividad es una extensión de la anterior, y para el desarrollo de esta era fundamental el desarrollo de las Actividades anteriores. La pregunta que se planteó fue la siguiente: **d) ¿Qué coeficiente de similaridad lleva a la figura **J** hasta **J''**? Explica qué procedimiento te permitió encontrar el coeficiente de similaridad.** Frente a esta Actividad se obtuvieron los resultados que se muestran en la tabla 32.

	Tipo de respuesta	Frecuencia
S3- T1- A_d	Estudiantes que responden correctamente, deduciendo con que el coeficiente de similaridad que lleva de J a J'' es el doble del que lleva de J a J' (empleo del expresiones cotidianas y el expresiones numéricas).	2
	Estudiantes que responden correctamente, identificando el coeficiente de similaridad a partir de la relación cuádruple de J'' con respecto J (empleo del expresiones cotidianas y el expresiones numéricas).	4
	Estudiantes que responden correctamente pero con justificaciones incompletas o muy generales que no permiten validar la veracidad de sus respuestas (empleo de expresiones cotidianas y expresiones numéricas).	1

Estudiantes que responden incorrectamente.	1
Total	8

En esta Actividad los estudiantes hicieron uso de expresiones cotidianas y de expresiones numéricas para comunicar sus respuestas. Con el objetivo trazado para esta Actividad, **se esperaba que los estudiantes pudieran identificar el aumento proporcional que se presentaba en polígonos (mediante el coeficiente de similaridad)** en el plano cartesiano. Con respecto a esto, la mayoría de los estudiantes (6 de 8), pudo

Tabla 32: tipificación de respuestas Situación 3- Tarea 1- Actividad del inciso d.

identificar tal relación entre tres **figuras homotéticas (J, J' y J'')** la cual se establece mediante el **coeficiente de similaridad (K)**, con lo cual deducen que **J''** es el doble de **J'** y el cuádruple de **J**, y **J'** el doble de **J**. Siguiendo estas líneas, se muestran las imágenes en las que se reportan las respuestas de algunos estudiantes.

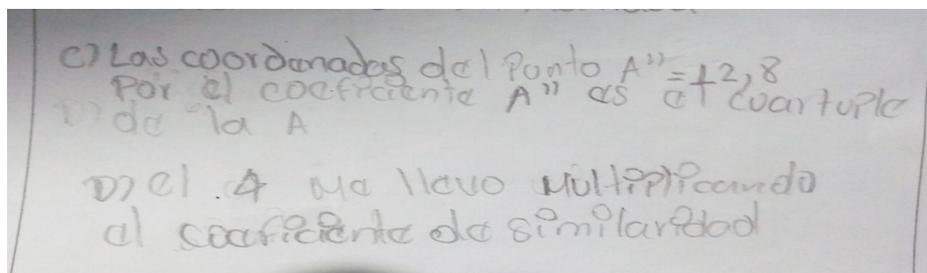


Imagen 44: respuesta de un estudiante respecto a S3- T1- A_d

Se puede decir que este estudiante (imagen 44), desde la Actividad anterior ya había identificado la relación dos a dos en el tamaño de los tres polígonos (**J, J' y J''**), deduciendo que la relación entre la **J** y **J''** es **J''** cuádruple de **J**, es decir que el coeficiente que lleva a **J** hasta **J''** es 4. No obstante, hay estudiantes que hacen la relación de tamaño dos a dos más explícita, como se muestra en la respuesta del estudiante en la imagen 45.

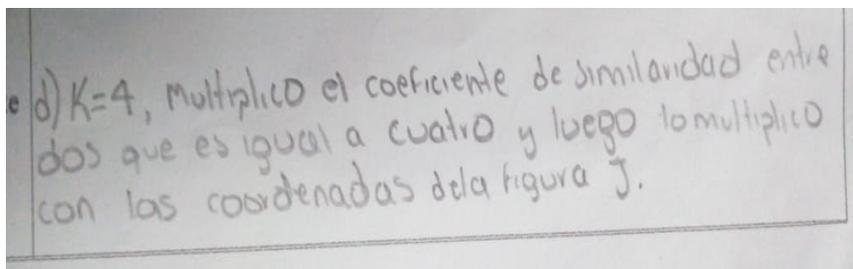


Imagen 45: respuesta de un estudiante respecto a S3- T1- A_d

El estudiante, como se ve en la imagen 45, menciona que multiplica el coeficiente por 2, esa multiplicación la hace quizás porque, primero, en la ilustración de S3-T1 se da el coeficiente $K=2$ que lleva a la figura **J** hasta **J'** y, segundo, en la Actividad anterior (S3-T1- A_c), se da en la pregunta¹² citada el coeficiente $K=2$ que lleva a **J'** hasta **J''**. Por tanto, se multiplican los dos coeficientes para así deducir que $K=4$ lleva de **J** hasta **J''**. Además, esto se cree fue posible, debido a que los estudiantes se apoyaron en la gráfica presentada (ilustración de S3-T1) que muestra las tres **figuras homotéticas (J, J' y J''** en el plano cartesiano con **centro en el origen**) de las que solo para **J** y **J'** son mostradas las coordenadas, entonces como en la Actividad anterior, ya habían encontrado las coordenadas de **A''**, solo relacionaron el aprendizaje anterior para el posterior.

Por otra parte, 1 de 8 estudiantes aproxima su respuesta (sin la justificación necesaria) a los requerimientos de la Actividad, pero no explicita cual es el **coeficiente de similitud** que lleva de **J** a **J'**. Esta respuesta se muestra a continuación (ver imagen 46).

¹² Ver la pregunta que se cita en S3- T1- A_c aquí en los resultados o, en su defecto, ver Secuencia Didáctica-Situación 3-Tarea 1.

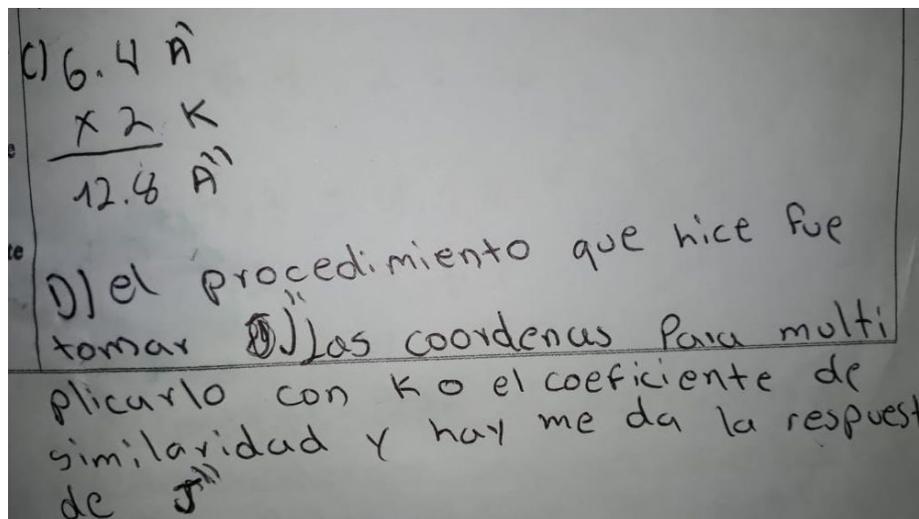


Imagen 46: resultado de un estudiante respecto a S3- T1- A_d

En el caso de este estudiante (imagen 46), se hace alusión a una multiplicación entre el **coeficiente de similitud** y la figura **J** para encontrar **J''** sin mencionar el valor que debería tomar dicho coeficiente. Pero, en la imagen 46 se puede notar que la primera **J** que el estudiante escribe, tiene comillas una o quizás dos, siendo dos no tendría sentido multiplicar **J''** por el coeficiente de similitud que resulta en la presente Actividad (S3- T1- A_d) para obtener **J''**, a no ser que se tratase de **K=1** pero no es el caso. Si se considera que la **J** solo tiene una comilla, es decir, **J'**, entonces la respuesta reportada para S3- T1- A_d, parecería una explicación en expresiones cotidianas de la Actividad anterior S3- T1- A_c. En suma, hacen falta elementos por precisar en la respuesta del estudiante en imagen 46, pues no se menciona el valor del **coeficiente de similitud K=4** que es lo que se requería.

Por último, 1 de 8 respondió incorrectamente puesto que muestra una multiplicación entre valores no pertinentes para dar solución a la Actividad. Esta respuesta se muestra en la imagen 47.

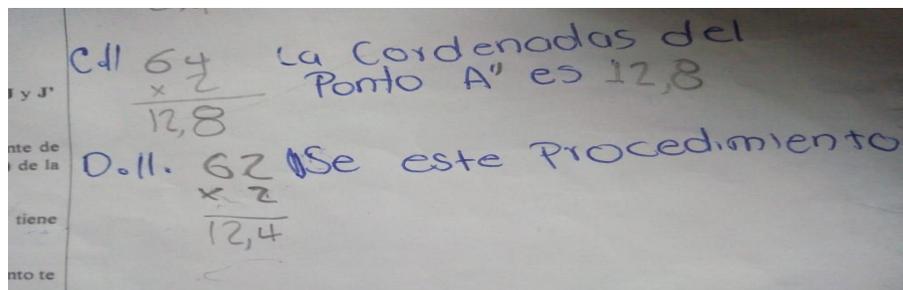


Imagen 47: respuesta de un estudiante respecto a S3- T1- A_d

Según lo que se muestra en la imagen 47, el estudiante quizás iba a reportar el mismo procedimiento que usó en la Actividad anterior (S3- T1- A_c), y aunque las coordenadas resultantes fueran sido obtenidas de manera correcta para S3- T1- A_d, se habría considerado incorrecta la respuesta porque en la multiplicación que emplea el estudiante se ve que usa un coeficiente $K=2$ y toma (6,2) cuando las coordenadas del punto A figura J son (3,2).

Situación 3-Tarea 2-Actividad a (S3- T2- A_a):

En esta Actividad se solicitaba a los estudiantes lo siguiente: **a) ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos A y B, y el centro de similaridad O? ¡Escribelas!** Ante esta pregunta se obtuvieron los resultados que se muestran en la tabla 33.

S3- T2- A _a	Tipo de respuesta	Frecuencia
	Estudiantes que responden correctamente, identificando y graficando las coordenadas (x, y) de puntos (puntos extremos de un segmento y centro de similaridad) en el plano cartesiano (empleo del expresiones numéricas y expresiones cotidianas).	7
	Estudiantes que invierten el orden de parejas ordenadas de la forma (x, y) a la forma (y, x) para graficar puntos en el plano cartesiano (empleo del expresiones numéricas y expresiones cotidianas).	1
Total	8	

Tabla 33: tipificación de respuestas Situación 3- Tarea 2- Actividad del inciso a.

En esta Actividad, se pretendía que los estudiantes pudieran asignar, mediante la observación de los ejes (abscisa (**X**) y ordenada (**Y**)) las coordenadas correspondientes a algunos puntos (**O**, **A** y **B**) en el plano cartesiano. De acuerdo con esto, los estudiantes en su mayoría (7 de 8) pudieron identificar en el plano cartesiano, observando los valores numéricos en los ejes (**X** y **Y**), las coordenadas numéricas del **centro de similitud** (**O**) y los puntos (**A** y **B**) extremos de un segmento dado respetando el orden de la pareja de puntos (x, y). Estos estudiantes (7 de 8), posiblemente respondieron correctamente puesto que tuvieron en cuenta la información que se presentaba al inicio de la Tarea 1 en la Situación 3.

En S3-T1, se muestra una ilustración (gráfica) en la que se expresa en expresiones cotidianas y etiquetas para identificar el eje de las abscisas (**X**) y el de las ordenas (**Y**). En esta Actividad, predominó el uso de expresiones numéricas, quizás porque esta demandaba más la cuantificación que la comunicación en expresiones cotidianas. Así, todos los estudiantes escribieron los valores numéricos de las coordenadas que se solicitaban sobre la gráfica. Además de esto, algunos usaron el espacio en blanco para las respuestas mezclando tanto expresiones numéricas como expresiones cotidianas. Esto se ve en las imágenes que se muestran a continuación.

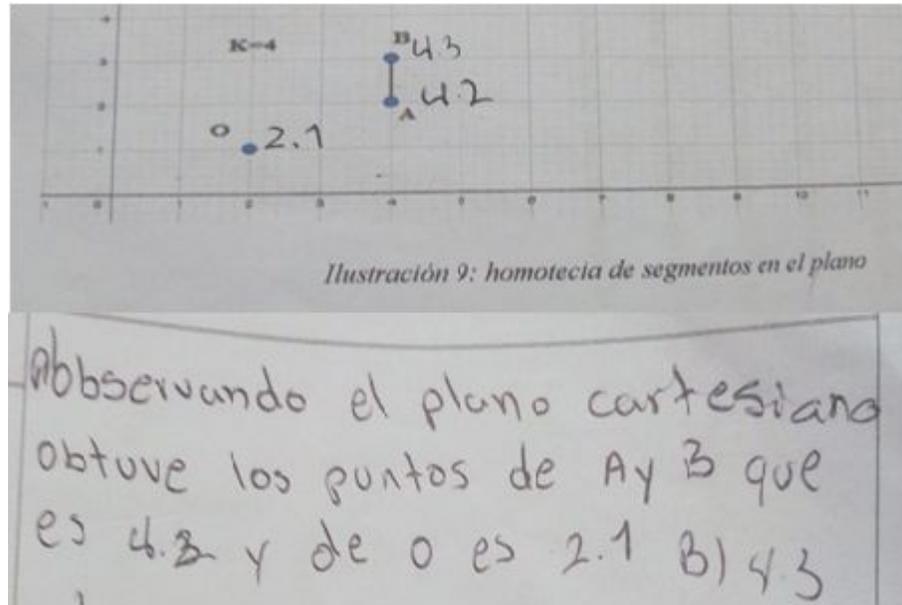


Imagen 48 : respuesta de un estudiante respecto a S3- T1- A_a coordenadas en el plano cartesiano y comunicación en expresiones cotidianas.

De acuerdo con la respuesta del estudiante (imagen 48), se ve claramente que el estudiante expresa que pudo asignar las coordenadas a los puntos solicitados (A, B y O) haciendo un proceso de observación (ejes) en plano cartesiano. Se nota además, la coherencia de su respuesta sobre la gráfica, así como lo que comunica en lenguaje en natural y expresiones numéricas (imagen 48).

En este orden de ideas, solo en el caso de un estudiante, se presentó dificultad para asociar las coordenadas numéricas de los puntos graficados (centro y extremos del segmento dado) en el plano cartesiano. Este estudiante, quizás pasó por alto la información en la presentación de la Tarea 1 de la Situación 3 sobre el orden del par ordenado o punto (x, y), y saltando el detalle de que en la ilustración de la Tarea 1 se mostraban etiquetas (en expresiones cotidianas) que permitían identificar los ejes. La respuesta de este estudiante se muestra en la imagen 49.

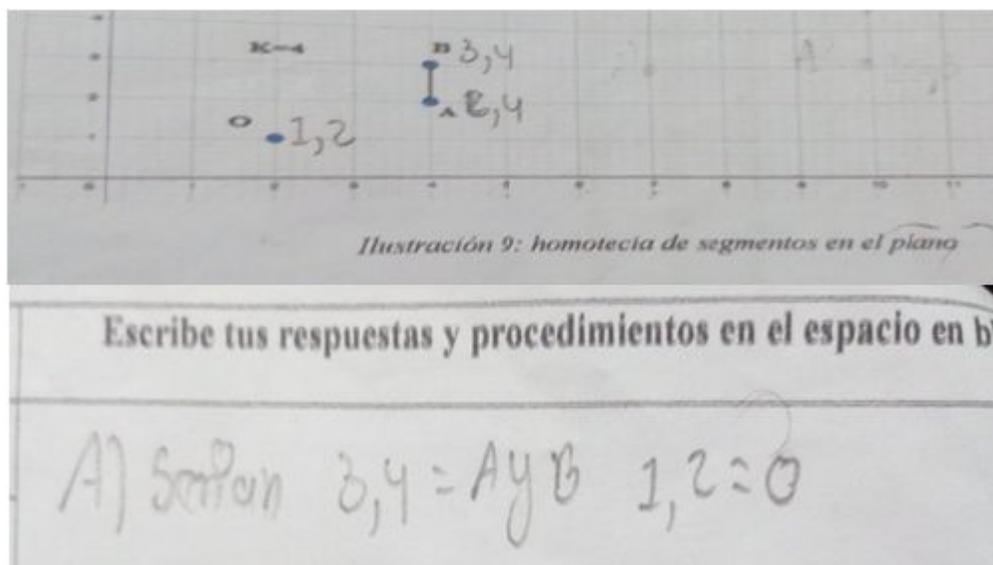


Imagen 49: respuesta de estudiante respecto a S3- T1- A_a coordenadas en el plano cartesiano.

En la imagen 49 que reporta las respuestas del estudiante ante a la Actividad, se nota como este, incurrió en el error de inversión de las coordenadas de los pares ordenados (A, B y O), además, se ve que en la imagen 49 solo se muestran las coordenadas del punto B y el centro O.

Situación 3-Tarea 2-Actividad b (S3- T2- A_b):

En esta Actividad se demandaba a los estudiantes hacer lo siguiente: **b)** haciendo uso de las expresiones generales $x' = kx - kxr + xr$ y $y' = ky - kyr + yr$, hallar las coordenadas de los puntos homotéticos A' y B'. ¡Escribelas y grafica el segmento homotético! Para esta Actividad se obtuvieron los resultados que se reportan en la tabla 34.

S3- T2- A _b	Tipo de respuesta	Frecuencia
	Estudiantes que responden correctamente haciendo uso de las expresiones generales dadas, y que grafican bien las coordenadas del segmento homotético encontrado.	6
	Estudiantes que responden haciendo uso de las expresiones generales dadas, encontrando las coordenadas correctas del segmento homotético, pero que no lo grafican bien en el plano cartesiano (puntos).	1
	Estudiantes que grafican bien el segmento homotético en el plano cartesiano, pero no reportan procedimientos que justifiquen su respuesta (proceso empleado con las expresiones generales dadas).	1
Total	8	

Tabla 34: tipificación de respuestas Situación 3- Tarea 2- Actividad del inciso b.

En esta Actividad, los estudiantes (7 de 8) emplearon las expresiones algebraicas dadas asociando a cada variable el valor numérico correspondiente, para llevar a cabo los procedimientos indicados y así obtener las coordenadas homotéticas del segmento dado y graficar el mismo en el plano cartesiano (ilustración Tarea 2). Se obtuvo que la mayoría de los estudiantes (6 de 8) desarrolló adecuadamente esto. Un ejemplo de este tipo de respuesta se muestra en las imágenes siguientes.

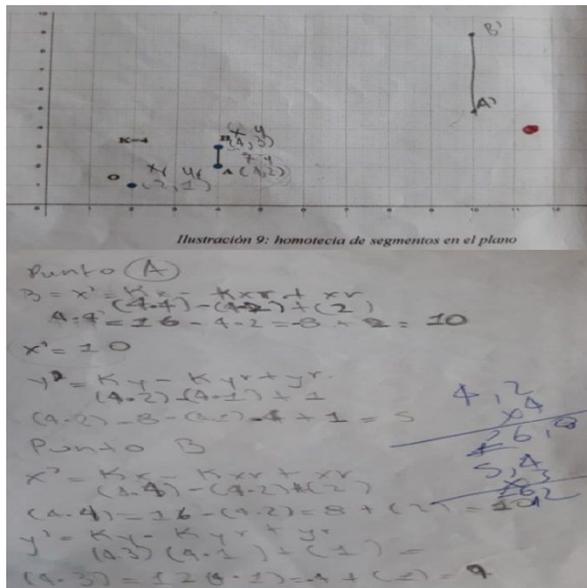


Imagen 50: respuesta estudiante respecto a S3- T2- A_b. Empleo de las expresiones generales dadas.

Frente a esta respuesta (imagen 50) y para todos los estudiantes que desarrollaron esta Actividad (8 de 8), es importante mencionar que, dichos estudiantes requirieron de indicaciones iniciales para poder relacionar de manera adecuada cada variable de las expresiones con su respectivo valor numérico. Esto fue necesario, puesto que se pudo notar que los estudiantes no estaban familiarizados con expresiones de este tipo como se sospechaba previamente, ya que el objetivo de esta Actividad (S3- T2- A_b) era que los estudiantes conocieran las expresiones más allá de que las emplearan correctamente (aunque esto último también fue un factor a tener en cuenta). Sin embargo, con indicaciones mínimas distinguiendo cada variable de las expresiones, los estudiantes hicieron el reemplazo por los valores numéricos y realizaron los procedimientos indicados.

El proceso para graficar el segmento homotético, parece que resultó ser más sencillo para los estudiantes, pues en la Actividad anterior ya habían realizado el proceso de asignación de coordenadas numéricas a puntos ubicados en el plano. Por tanto, en esta Actividad, pudieron (como se muestra en la imagen 50) no solo asignar las coordenadas a los puntos sino también ubicar estos (puntos **A'** y **B'** extremos del segmento homotético) en el plano cartesiano.

Por otra parte, 1 de los 8 estudiantes, tuvo dificultades para graficar las coordenadas obtenidas mediante el uso de las expresiones algebraicas, como se muestra en la imagen 51.

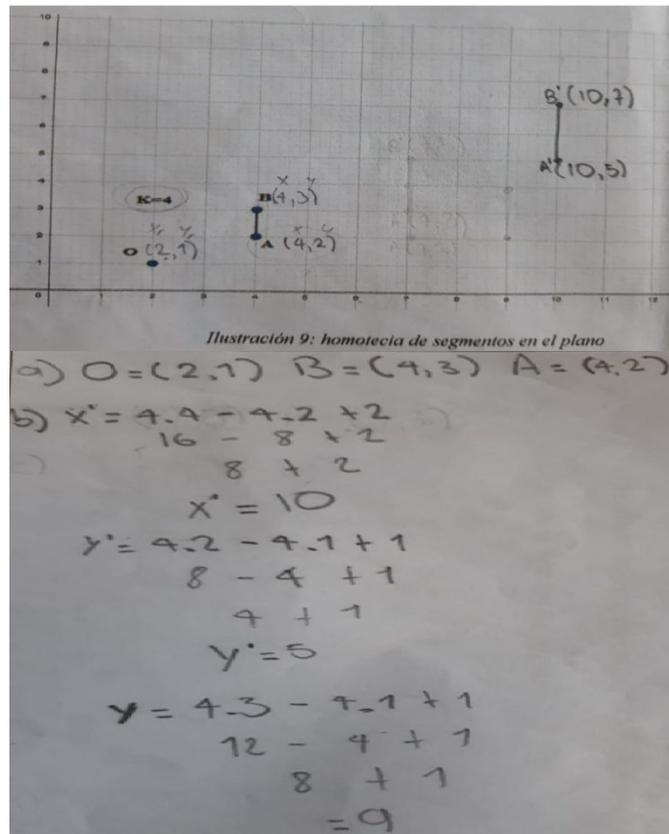


Imagen 51: respuesta estudiante a S3- T2- A_b. Gráfica de segmento homotético.

Nótese que este estudiante (imagen 51), grafica de forma errónea la coordenada de la ordenada en **B'** como 7. Pero en los procedimientos que reporta con las expresiones generales dadas, el valor 7 es un 9. El estudiante (imagen 51), encontró las coordenadas correctas, pero graficó un punto erróneamente. Así, se puede notar que en esta Actividad otro estudiante (imagen 51) concurrió en el error de graficar erróneamente el segmento, lo cual haría sospechar que tal error fue de parte del mismo estudiante que invirtió las coordenadas al graficar en la Actividad anterior. Sin embargo, se trata de dos estudiantes diferentes, y en este caso lo que se presentó al parecer fue una confusión entre los números 7 y 9 en el eje de las ordenadas. De este modo, se podría decir que al menos el proceso para graficar puntos en el plano cartesiano fue aprehendido por parte de los estudiantes.

De otro lado, 1 de los 8, pudo graficar las coordenadas pero no reportó el procedimiento (uso de las expresiones según las demandas de la Actividad) que empleó para conseguir las coordenadas deseadas. Con respecto a esto, este estudiante que no mostró el procedimiento empleado con las expresiones algebraicas dadas, pero que responde de manera correcta, hace suponer, que quizás si lo haya hecho pero no lo reportó en el espacio en blanco para las respuestas, o quizás empleó multiplicaciones con el coeficiente de similaridad dado y las coordenadas del segmento inicial, o no se sabe cómo dio con la respuesta.

Situación 3-Tarea 2-Actividad c (S3- T2- A_c):

Para esta Actividad se pedía a los estudiantes una forma alternativa de hallar los puntos **A'** y **B'** del segmento homotético, es decir, sin hacer uso de las expresiones generales dadas en la Actividad precedente. Para lo cual, se obtuvieron los resultados que se muestran en la tabla 35.

S3- T2- A _c	Tipo de respuesta	Frecuencia
	Estudiantes que responden correctamente, explicando que se podría conseguir las coordenadas del segmento homotético, multiplicando el coeficiente de similaridad por las coordenadas de los puntos (A y B) del segmento inicial dado.	3
	Estudiantes que reconocen la multiplicación como una alternativa de respuesta, pero no son claros al explicitar los elementos que intervienen en aquella multiplicación.	4
	Estudiantes que no reportan respuesta.	1
Total	8	

Tabla 35: tipificación de respuestas Situación 3- Tarea 2- Actividad del inciso c.

En esta Actividad, se esperaba que los estudiantes aplicaran conocimientos previos derivados de Actividades ya realizadas en el desarrollo de la Secuencia Didáctica. Frente a esto se encontró que, los estudiantes comunicaron sus respuestas a partir de expresiones cotidianas y de expresiones numéricas. 2 de 8, indicaron que al multiplicar las coordenadas de los puntos (extremos del segmento dado) **con el coeficiente de similitud, se obtienen las coordenadas homotéticas correspondientes a dichos puntos**. Esto se puede apreciar en la imagen 52.

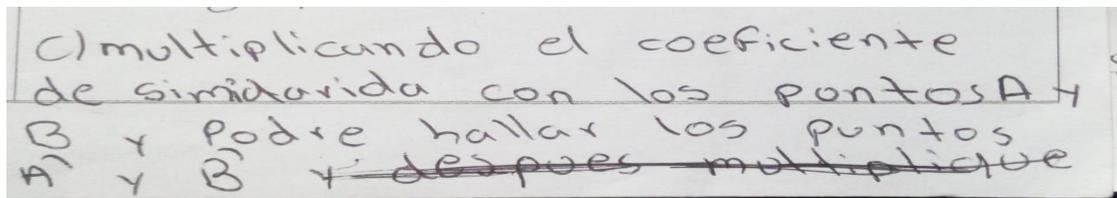


Imagen 52: respuesta de un estudiante a S3- T2- A_c

En la forma de responder de estos estudiantes (imagen 52), se muestran o se explicitan los elementos que intervienen en la multiplicación que se debía realizar. De esto, se puede decir que los estudiantes comunican este tipo de respuesta como un producto de aprehensión en Actividades previas antes de conocer las expresiones generales que permiten llevar a cabo este mismo proceso.

En otro orden de ideas, 4 de 8 reconocen la multiplicación que se debe efectuar, pero no mencionan el coeficiente de similitud como uno de los factores de dicha operación, y 1 de 8 no reporta respuesta. Véase a continuación la respuesta de 1 de estos estudiantes (imagen 53).

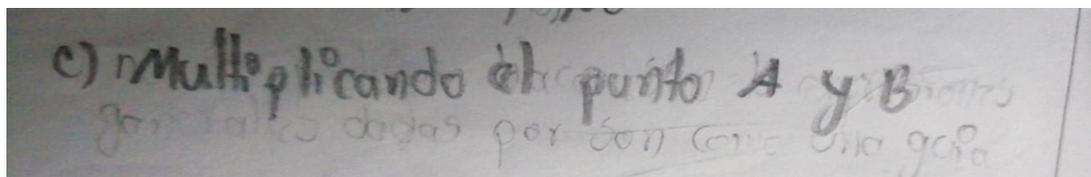


Imagen 53: respuesta de un estudiante a S3- T2- A_c

Se puede observar que el estudiante no alcanza a puntualizar que los puntos **A** y **B** (del segmento inicial); es decir, sus coordenadas, deben multiplicarse por el coeficiente de similitud $K= 4$ para obtener las coordenadas de los puntos **A'** y **B'** del segmento homotético. A pesar de esto, se puede decir que los estudiantes en general tienen presente algunos conocimientos previos sobre relaciones y conceptos abordados en Actividades anteriores para dar solución a otras nuevas que se plantean.

3.3.4. Análisis general de las situaciones

A continuación se presentan algunos comentarios generales respecto a los resultados y análisis de resultados citados anteriormente.

Una vez terminada la Situación 1, se realizaron ciertas intervenciones por parte de quienes dirigían el desarrollo de la Secuencia Didáctica y de los estudiantes, estas estaban encaminadas a tratar de comprender lo que los estudiantes estaban concibiendo como semejanza y congruencia relacionando estos conceptos con los de razón y proporción, dado que semejanza y congruencia estaban siendo usados indiscriminadamente y se requería de hacer esta claridad, puesto que estos conceptos son considerados como conocimientos previos al estudio de la homotecia. Ante esto, se pudo identificar que los estudiantes interpretaron las razones como fracciones o como divisiones indicadas y la constante de proporcionalidad como el resultado de una división, lo cual concuerda por un lado con lo planteado por Obando (2015) en cuanto a que las razones suelen ser interpretadas como una fracción indicada, siendo esta representación fraccionaria solo una cuantificación de las razones, por otro lado se evidencia lo planteado por Guacaneme (2001,2016) en cuanto a la relación entre las fracciones y las razones.

Frente a lo mencionado, se hizo la aclaración de que una razón establecía una relación entre dos magnitudes, las cuales podían ser de la misma naturaleza (homogénea) o diferente (heterogéneas), mientras que las fracciones trata magnitudes exclusivamente de la misma naturaleza y solo representa la medida de una magnitud respecto a otra. Y, al resultado que los estudiantes obtenían al realizar las divisiones, se reconocieron como

constante de proporcionalidad siempre y cuando este valor (resultado de la división) sea igual entre las razones.

Cabe señalar, que como los estudiantes estaban familiarizados en mayor medida con el concepto de la división y representación fraccionaria, que con los conceptos de razón y proporción, les pareció viable para tratar estos últimos como si fuesen los primeros. Por otro lado, en cuanto a los conceptos de semejanza y congruencia se pudo identificar que los estudiantes en su gran mayoría concebían estos como si fuesen lo mismo. Ante esto, se intervino para retomar en compañía de los estudiantes la lectura de la guía y algunos ejemplos que antecedían algunas Actividades, los cuales proporcionaban información necesaria para el desarrollo de las mismas. Esto se hizo con la intención de que los estudiantes logaran distinguir el concepto de congruencia del de semejanza.

De otro lado, se puede decir que en el desarrollo de la Situación 2 los estudiantes lograron avanzar y familiarizarse un poco más con conceptos como; semejanza, razón, congruencia, proporción entre otros. Además, en esta Situación tuvieron su primer acercamiento al concepto de homotecia, de lo cual lograron identificar algunas de las relaciones que se presentan entre la figura inicial y la homotética con respecto al coeficiente de similaridad (constante de proporcionalidad) y el punto focal (centro de similaridad). Este hecho permite decir que para la Situación 3 (homotecia de segmentos y polígonos en el plano) los estudiantes ya contaban con un acercamiento significativo en la comprensión de los 4 elementos principales de la homotecia de segmentos y polígonos.

En otro orden de ideas, en la Situación 3, los estudiantes ya se habían familiarizado con los elementos que intervienen en el concepto de homotecia (coeficiente de similaridad

(**K**), centro de similaridad (**O**) y, los objetos iniciales u origen y sus respectivos objetos homotéticos). Esto, a partir de conceptos como la razón, la proporción, la constante de proporcionalidad; y, relaciones y procesos como la semejanza, la congruencia, la linealidad y la covariación, en conjunto con el uso de varias expresiones asociadas (gráfica, tabular, entre otras), para luego, relacionar los aprendizajes previos (derivados de la Situación 1 y 2), al enfrentarse por primera vez (Situación 3) al concepto de homotecia de Segmentos y Polígonos en el plano cartesiano. Finalmente, se puede decir que en la Situación 3 los estudiantes además de tratar con la homotecia de Segmentos y Polígonos en el plano cartesiano, pudieron conocer y emplear expresiones algebraicas que permitían modelar la transformación de la homotecia.

A manera de cierre, es posible mencionar que en el desarrollo de las Actividades propuestas en la Secuencia Didáctica, los estudiantes, en general, fueron capaces de movilizar e interrelacionar diferentes conceptos y elementos procedimentales tales como; la razón, la proporción, la constante de proporcionalidad, entre otros. Así como el uso significativo de información presentada en enunciados, tablas y gráficos para hacer inferencias, relaciones o cruzar la información, realizar procesos de observación, multiplicativos, aditivos, ensayo y error, entre otros, para aproximarse al aprendizaje del concepto de homotecia de Segmentos y Polígonos.

CAPÍTULO 4: CONCLUSIONES

En este apartado, se presentan algunas concepciones relacionadas con la noción de proporcionalidad y elementos que median en el aprendizaje del concepto de homotecia de Segmentos y polígonas. Esto se hará tomando en consideración los objetivos propuestos.

1. Al considerar la identificación de elementos conceptuales y procedimentales enmarcados en la Didáctica de las Matemáticas, que permiten la vinculación del concepto de homotecia de segmentos y polígonos, con la noción de proporcionalidad geométrica, se logró dar un avance significativo a partir de la revisión de algunos trabajos de investigación, porque se pudieron identificar los elementos conceptuales y procedimentales que para el desarrollo de este trabajo se consideraron necesarios para realizar un acercamiento al concepto de homotecia de segmentos y polígonos en el plano. Los elementos considerados fueron los siguientes: conceptos asociados a la proporcionalidad; razón, proporción y constante de proporcionalidad. Procesos y relaciones en la proporcionalidad y la homotecia; covariación, semejanza y congruencia. Y, el uso de expresiones tales como; las expresiones cotidianas, el uso de gráficas, tablas y las expresiones algebraicas y numéricas. Todo ese conjunto de elemento, aportan a la diferenciación de cada uno de los términos y conceptos que median en la noción de proporcionalidad, y a su vez, permiten precisar como a partir de esos elementos los estudiantes se aproximan al concepto de homotecia.

Lo anterior se consideró, porque para el aprendizaje de la Homotecia de Segmentos y Polígonos en el plano, es fundamental partir del estudio de los conceptos de razón, proporción y coeficiente de proporcionalidad (propios de la proporcionalidad), debido a que estos conceptos se toman como necesarios para trabajar la relación de semejanza entre figuras, establecer la covariación, determinar la congruencia entre las formas y relacionar cada presentación con elementos que median desde lo numérico o lo geométrico. Esto se da puesto que por un lado, las figuras homotéticas suelen verse como semejantes, y por otro, los elementos que intervienen en la homotecia se relacionan con otros propios de la proporcionalidad, como por ejemplo, la constante de proporcionalidad y el coeficiente de similitud.

2. Al articular en una Secuencia Didáctica elementos conceptuales que median el aprendizaje del concepto de homotecia, a partir de algunos referentes teóricos, relacionados con la noción de proporcionalidad geométrica. Se encuentra en Guacaneme (2001; 2016) y Obando (2015), que es importante articular los objetos de conocimiento relacionados con la noción de proporcionalidad, puesto que no se pueden trabajar de manera aislada. Un ejemplo de esta situación se da en el abordaje de la homotecia, ya que agrupa conceptos tales como semejanza, razón, proporción entre otros, y cada uno de estos a su vez, sirven de fundamentos para que se desarrollen otros. Por tanto se considera que un elemento preponderante en este proceso, es el de la vinculación de la Secuencia Didáctica para el desarrollo de las actividades en matemáticas. Ya que esta, permite abordar y organizar los objetos de conocimientos mediante la

enseñanza, de tal manera que se relacionen entre sí, con el fin de desarrollar aprendizajes en los estudiantes.

3. En el proceso de caracterizar los aprendizajes de los estudiantes relacionados con el concepto de homotecia de segmentos y polígonos a través de sus producciones escritas, se reconoce que “los estudiantes no están acostumbrados a pensar geoméricamente sino más bien numéricamente; en otras palabras, se reconoce que habitualmente se incorpora un pensamiento cuantitativo numérico, incluso para el estudio de la geometría” (Guacaneme 2012, p.84). En este orden de ideas, iniciar la Secuencia Didáctica desde un enfoque numérico (S1) permite a los estudiantes avanzar en la comprensión de los distintos conceptos que median en el aprendizaje de la homotecia de segmentos y polígonos a partir de la proporcionalidad geométrica (S2). Esto se dice, puesto que a partir de la puesta en marcha de S2 el margen de error respecto a las actividades que combinan aspectos numéricos y geométricos tendió a disminuir. Además, de acuerdo con lo planteado por Obando (2015) y haciendo referencia a las fracciones como una forma de cuantificar las razones, se debe señalar que, esta forma de cuantificación conlleva a los estudiantes a pensar que las razones son un reparto equitativo, lo cual de cierto modo se relaciona con lo que sugiere Guacaneme (2001) al decir que la fracción y la razón pueden ser considerados como objetos matemáticos equivalentes que se asocian a la división.

Finalmente, para la aproximación a los estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Liceo del Pacífico, al aprendizaje del concepto de homotecia de segmentos y polígonos, a partir de la noción de proporcionalidad geométrica mediante la

implementación de una Secuencia Didáctica, es importante reconocer que este proceso se da mediante la articulación de los elementos conceptuales propuestos en la secuencia, la constante interacción con los estudiantes a partir de la escucha y retroalimentación de sus apreciaciones y junto con ello, mediante la constante institucionalización de los saberes que en el aula se recrean. Por tanto, se requiere de material que haga aflorar o movilizar los conocimientos de los estudiantes, considerando la secuencia didáctica un elemento importante en este proceso, pero también se requiere de estrategias metodológicas que hagan posible avanzar en la consolidación o aproximación del conocimiento nuevo, y para ello se reconoce la teoría de situaciones didácticas.

4.1. Recomendaciones

Considerando los resultados obtenidos, a partir de las producciones de los estudiantes en el desarrollo de la secuencia didáctica, se listan algunas recomendaciones que pueden ser objeto de estudio de futuros trabajos de indagación en el campo de la Educación en Matemática.

- Considerando, que los estudiantes asumen que la representación de las razones mediante fracciones son lo mismo que divisiones, ¿Cómo abordar la razón, la fracción y la división de forma simultánea para que los estudiantes puedan distinguir estos objetos en grados de básica primaria y secundaria?
- Teniendo en cuenta que en la aproximación al concepto de homotecia de segmentos y polígonos en el plano, se encontró que los estudiantes no estaban muy familiarizados con el lenguaje algebraico ¿Cómo potencializar el uso de

expresiones algebraicas a partir de transformaciones geométricas en estudiantes de noveno grado?

4.2. Referencias bibliográficas

- Barreto García, J. C. (2010). Homotecias y su aplicación en la extensión del Teorema de Pitágoras en Didáctica del Análisis Matemático. *UNIÓN: Revista IberoAmericana de Educación Matemática*, 23, 71-91.
- Battaglino, A., & Figueroa Elorga, M. (Septiembre de 2013). Homotecia. Contextualización para un aprendizaje significativo. *CIBEM*, 3634-3638.
- Galleguillos Bustamante, J. (Junio de 2011). Uso de herramienta interactivas en el aprendizaje de homotecias. *CIAEM*, XIII, 1-13.
- González Florez, Y., & Arias Gómez, I. (2017). *Análisis didáctico del concepto de homotecia para su enseñanza y aprendizaje en octavo año de la Educación General Básica en Costa Rica*. Campus Omar Dengo.
- Guacaneme, E. A. (2001). *Estudio Didáctico de la proporción y la proporcionalidad: Una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de matemáticas*. Doctoral dissertation, Universidad del Valle, Cali.
- Guacaneme, E. A. (2002). Una mirada al tratamiento de la proporcionalidad en textos escolares de matemáticas. *EMA*, 3-42.
- Guacaneme, E. A. (2012). *Significados de los conceptos de razón y proporción en el Libro V de los elementos*. Pensamiento, epistemología y lenguaje matemático.
- Guacaneme, E. A. (2017). *Potencial formativo de la historia de la teoría euclideana de la proporción en la constitución del conocimiento del profesor de matemáticas*. Doctoral dissertation.
- Holgín Ortega, C. E. (2012). *Razonamiento Proporcional*. Universidad Nacional.
- Ibarra Morris, C. (2007). *Plan de clases para estudiar el concepto de "Homotecia"*. Universidad Santiago de Chile.
- Jaramillo Vélez, L. M. (2012). *La proporcionalidad y el desarrollo del pensamiento matemático*. Doctoral dissertation, Universidad Nacional.
- Jimenez, E., Quevedo, S., & Yañez, L. (2014). *Una secuencia didáctica para la proporcionalidad*. Universidad del Bío Bío.

- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estandares Basicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá, Colombia: MEN. Recuperado el 9 de Febrero de 2018, de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf
- Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Derechos Basicos de Aprendizaje*. Bogotá, Colombia: MEN. Recuperado el 9 de Febrero de 2018, de https://www.colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/articles-349446_genera_dba.pdf
- Nacional, M. d. (1998). *Lineamientos Curriculares*. Bogotá, Colombia: Men. Recuperado el 13 de Febrero de 2018, de <https://www.mineducacion.gov.co/1759/w3-article-339975.html>
- Obando, G. (2015). *Sistema de prácticas matemáticas en relación con las razones, las proporciones y la proporcionalidad en los grados 3° y 4° de una institución educativa de la educación básica (Doctoral dissertation, Universidad del Valle)*. (s.f.).
- Ortiz A, J. A., & Angulo Valencia, J. (2010). La homotecia, un tema casi olvidado en la enseñanza de la educación matemática en Buenaventura: Una propuesta desde el punto de vista algebraico. *Asocolme*, 692-703.
- Pérez Fernández, L. A., Fiallo Leal, J., & Acosta Gempeler, M. E. (2015). Cabri Elem como medio a-didáctico para la enseñanza de la homotecia. *RECME*, 772-774.
- Perez, L. (2013). Situaciones a-didácticas para la enseñanza de la homotecia utilizando CabriLM como medio. *Funes*.
- Quintero , A. L., Molavoque , M. J., & Guacaneme, E. A. (2012). Diferencia entre semejanza y proporcionalidad geométrica desde una perspectiva historica. *Ciencia*, 16, 75-85.
- Rodríguez Gómez, L. C. (2015). *Propuesta didáctica para mediar la enseñanza-aprendizaje de la proporcionalidad geométrica y la formación de imágenes en el ojo humano*. Doctoral dissertation, Universidad Nacional.

4.3. Anexos

Secuencia Didáctica

La secuencia didáctica en este trabajo es entendida como una forma de abordar y organizar los conocimientos objeto de enseñanza, de tal manera que estos se relacionen entre sí, para desarrollar aprendizajes en los estudiantes. La Secuencia Didáctica está compuesta por tres situaciones que se encuentran subdivididas en tareas y cada tarea en actividades. La situación 1, aborda tres tareas y once actividades, en la dos se trabajan dos tareas y doce actividades, y la tres que contiene dos tareas y siete actividades, para un total de siete tareas y treinta actividades, con lo cual se desea aproximar a los estudiantes al concepto de homotecia de segmentos y polígonos, a partir de la proporcionalidad geométrica.

Situación 1 (S1): Términos relacionados con la homotecia y la proporcionalidad

En la proporcionalidad, intervienen un conjunto de términos que describen la relación entre; razones, correspondencia entre magnitudes y sobre todo la equivalencia entre ellas. Teniendo esto en cuenta, se presentan las siguientes tareas.

Tarea 1 (T1): el concepto de razón y la expresión tabular.

La razón, también llamada relación proporcional permite identificar el aumento o disminución de una magnitud en la medida en que otra lo haga. Esto, al verse reflejado en tablas o diagramas posibilita describir variaciones entre las partes implicadas.

Tarea 2 (T2): proporción, semejanza y expresiones asociadas: se dice que dos figuras geométricas son semejantes, si los valores asociados a las razones que se formen son iguales, es decir, están en proporción.

Tarea 3 (T3): proporción, semejanza y expresión gráfica: para establecer la proporción entre dos figuras, es necesario establecer la correspondencia entre sus lados homólogos (correspondientes).

Situación 2 (S2): relaciones y procesos en la homotecia y la proporcionalidad.

Una de las relaciones asociadas a la proporcionalidad geométrica es la semejanza. En la cual, se conserva la forma entre figuras, pero no siempre el tamaño. Además, se dice que si dos o más figuras son semejantes también son homotéticas. Teniendo esto en cuenta, se presentan las siguientes tareas.

Tarea 1 (T1): semejanza, congruencia y expresión gráfica: dos o más figuras son semejantes si tienen los ángulos congruentes uno a uno, y proporcionales los lados que comprenden los ángulos congruentes.

Tarea 2 (T2): la homotecia: el coeficiente de similaridad (k) y una aproximación a un punto focal (O).

Una homotecia está determinada por los elementos que la conforman, entre ellos sobresalen el coeficiente de similaridad (k), y el punto focal o centro de similaridad. Para establecer la razón, se deben poner en correspondencia los lados homólogos, mientras que una forma de encontrar el punto focal es mediante la prolongación de los segmentos que se obtienen de la unión de los vértices homotéticos con sus correspondientes.

Nota: si se trabaja con segmentos o polígonos, se debe conservar la dirección de mayor a menor tamaño del objeto, para que los segmento concurren en el punto focal.

Situación 3 (S3): homotecia de segmentos y polígonos en el plano.

En las situaciones y tareas anteriores, se han mencionados los elementos que constituyen una homotecia (centro de similaridad (O), coeficiente de similaridad (K), objeto inicial (segmento o polígono) y objeto homotético. Estos elementos vistos en el plano generan la necesidad de hacer otros procesos, por lo que respecta al trabajo con coordenadas (x, y). Por tanto, se requiere de la articulación de los procesos analizados con anterioridad para el desarrollo de las siguientes tareas.

Tarea 1 (T1): el coeficiente de similaridad (K) y la expresión algebraica.

Entre un objeto inicial (segmento o polígono) y su correspondiente objeto homotético se tiene que la longitud del homotético es k veces el inicial. Esto dicho en lenguaje retorico deja ver que se pueden usar expresiones algebraicas que modelen lo que se representa.

Tarea 2 (T2): la expresión algebraica de la homotecia y análisis en el plano.

Teniendo en cuenta la transformación geométrica de la homotecia, la cual se puede modelar mediante expresiones algebraicas que dan cuenta de la correspondencia entre los objetos homotéticos, se pueden considerar una expresión algebraica para calcular las coordenadas de los puntos correspondientes.

S1: términos relacionados con la homotecia y la proporcionalidad.						Escribe tus respuestas y procedimientos en el espacio en blanco.					
T1: el concepto de razón y la expresión tabular.											
<p>Lee la tarea que se presenta a continuación y resuelve las siguientes actividades</p> <p>Anyily va a la tienda y desea comprar cierta cantidad de frutos de borojó para agregar al surtido de su mercado. Para ello, le presentan la siguiente tabla que muestra el precio por cantidad de unidades de borojó que desee comprar.</p>											
precio		\$ 8000		\$ 24000		\$ 32000					
Unidades		2		5		7		20			
<p>a) Anyily requiere de tu ayuda para saber cuál sería el precio para 2 y 7 frutos de borojó, tú puedes ¡Ayúdala!</p>											
<p>b) ¿Cuántos frutos de borojó recibiría Anyily si paga \$24.000?</p>											
<p>c) ¿Cuánto debe pagar Anyily si decide comprar un solo fruto de borojó?</p>											
<p>d) ¿Qué ocurre si comparas el precio a pagar con la cantidad de unidades de borojó que compras; es decir, $\frac{8000}{5}$ y $\frac{32000}{20}$?</p>											
<p>e) Si se hace la comparación anterior con los precios a pagar con la respectiva cantidad de unidades de borojó de toda la tabla, ¿crees que habrá algo que no cambie o que no varíe? ¿Qué es?</p>											

S1: términos relacionados con la homotecia y la proporcionalidad. T2: el concepto de homotecia y la expresión tabular.

Juan Carlos es el arquitecto encargado del proyecto de construcción de una piscina. Él realizó un diseño en el plano de la piscina dibujada desde una vista superior. Para dibujar la forma de la piscina, el arquitecto Juan Carlos se aseguró de que las medidas del dibujo estuvieran en proporción con las medidas reales que tendría la piscina. En la **ilustración (1)** se pueden observar las dos vistas.

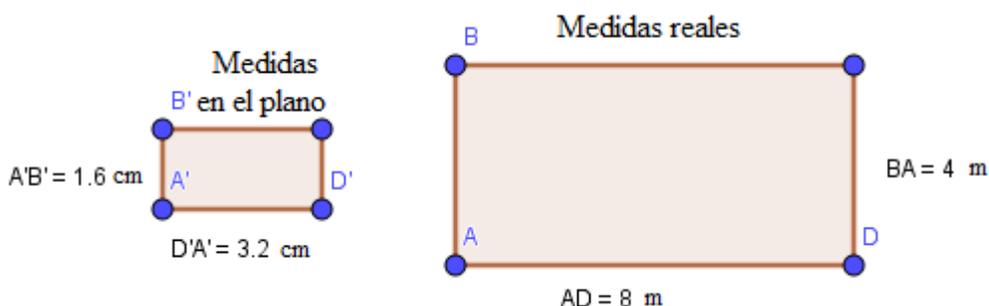


Ilustración 10: Medidas reales y en el plano de la sección de piscina.

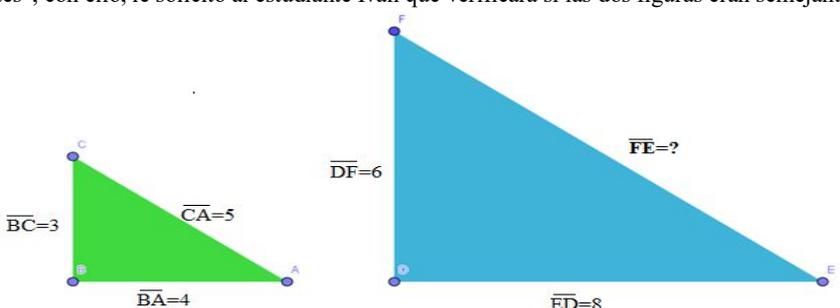
Juan Carlos desea establecer la razón correspondiente entre el largo y el ancho de la piscina, para verificar que las medidas estén en proporción. Para ello, él organizó los datos en una tabla y determinó las razones.

	Medidas en el plano	Medidas reales
Largo	3.2 cm	8 m
Ancho	1.6 cm	4 m

$$\frac{3.2}{1.6} = 2 \qquad \frac{8}{4} = 2$$

Al igualar dos razones se pasa a la proporción, por ejemplo; $\frac{3.2}{1.6} = \frac{8}{4}$ son proporcionales porque los valores asociados a las razones (2), es el mismo.

S1: términos relacionados con la homotecia y la proporcionalidad	Escribe tus respuestas y procedimientos en el espacio en blanco.																																
T2: proporción, semejanza y expresiones asociadas																																	
<p>Lee la tarea que se presenta a continuación y resuelve las siguientes actividades</p> <p>a) Considerando el diseño del arquitecto Juan Carlos para la construcción de la piscina en el caso anterior, a continuación, se presentan dos tablas con las dimensiones (largo y ancho) tanto en el plano como reales de tres piscinas.</p> <table border="1" style="margin-left: 40px; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th style="width: 25%;">Dimensiones</th> <th colspan="3">Medidas en el plano</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Largo</td> <td>1.89cm</td> <td>3cm</td> <td>z</td> </tr> <tr> <td>Ancho</td> <td>Y</td> <td>5</td> <td>4cm</td> </tr> </tbody> </table> <table border="1" style="margin-left: 40px; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th style="width: 25%;">Dimensiones</th> <th colspan="3">Medidas reales</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Largo</td> <td>6m</td> <td>6.3m</td> <td>u</td> </tr> <tr> <td>Ancho</td> <td>2m</td> <td>5m</td> <td>15m</td> </tr> </tbody> </table> <p>Nótese que tanto en la tabla de las medidas en el plano como en la de las medidas reales asociadas a las piscinas, hacen falta datos que están representados con variables: y, z y u. Teniendo en cuenta esto, halla el dato que indica cada variable, a partir de las razones que se presentan a continuación:</p> $\frac{3}{5} = x \quad \frac{1.89}{y} = 1.26 \quad \frac{z}{4} = 3 \quad \frac{u}{15} = 0.6 \quad \frac{6.3}{5} = v \quad \frac{6}{2} = w$ <p>• Ubica los valores de cada variable en el lugar correspondiente:</p> <p>x = <input style="width: 30px; height: 20px;" type="text"/> y = <input style="width: 30px; height: 20px;" type="text"/> z = <input style="width: 30px; height: 20px;" type="text"/> u = <input style="width: 30px; height: 20px;" type="text"/> v = <input style="width: 30px; height: 20px;" type="text"/> w = <input style="width: 30px; height: 20px;" type="text"/></p>	Dimensiones	Medidas en el plano			Largo	1.89cm	3cm	z	Ancho	Y	5	4cm	Dimensiones	Medidas reales			Largo	6m	6.3m	u	Ancho	2m	5m	15m	<p>b) Si se desea relacionar las medidas reales con las correspondientes en el plano, de tal manera que estén en proporción ¿Qué consideras que se debe hacer? ¡Relaciónalas!</p> <table style="margin-left: 40px; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th style="width: 40%;">Medidas Reales</th> <th style="width: 60%;">Medidas en el Plano</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$\frac{6}{2}$</td> <td>$\frac{3}{5}$</td> </tr> <tr> <td>$\frac{9}{15}$</td> <td>$\frac{1.89}{1.5}$</td> </tr> <tr> <td>$\frac{6.3}{5}$</td> <td>$\frac{12}{4}$</td> </tr> </tbody> </table>	Medidas Reales	Medidas en el Plano	$\frac{6}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{15}$	$\frac{1.89}{1.5}$	$\frac{6.3}{5}$	$\frac{12}{4}$
Dimensiones	Medidas en el plano																																
Largo	1.89cm	3cm	z																														
Ancho	Y	5	4cm																														
Dimensiones	Medidas reales																																
Largo	6m	6.3m	u																														
Ancho	2m	5m	15m																														
Medidas Reales	Medidas en el Plano																																
$\frac{6}{2}$	$\frac{3}{5}$																																
$\frac{9}{15}$	$\frac{1.89}{1.5}$																																
$\frac{6.3}{5}$	$\frac{12}{4}$																																

S1: términos relacionados con la homotecia y la proporcionalidad.	Escribe tus respuestas y procedimientos en el espacio en blanco.
<p>T3: proporción, semejanza y expresión gráfica.</p>	
<p>Lee la tarea que se presenta a continuación y resuelve las siguientes actividades El profesor Jair plasmó en uno de los tableros de la universidad del valle sede pacifico dos triángulos “semejantes”, con ello, le solicitó al estudiante Iván que verificara si las dos figuras eran semejantes.</p>  <p style="text-align: center;"><i>Ilustración 2: Triángulos semejantes</i></p> <p>a) ¿Qué consideras que debería hacer Iván para verificar si los dos triángulos son semejantes? ¡Ayúdale a Iván!</p> <p>b) Si al relacionar las medidas homólogas de los lados de los triángulos se obtiene que: $\frac{BC}{DF} = \frac{BA}{ED} = \frac{CA}{FE}$, Hallar la medida del lado \overline{FE} a partir de los datos presentes en la ilustración (2).</p> <p>c) ¿Consideras que los dos triángulos plasmados en el tablero por el profesor Jair son semejantes? ¿Por qué?</p> <p>d) De acuerdo con lo realizado en esta tarea (3), ¿Qué características deben tener dos o más figuras para poder decir que son semejantes?</p>	

S2: procesos y relaciones en la homotecia y la proporcionalidad.

Escribe tus respuestas y procedimientos en el espacio en blanco.

T1: semejanza, congruencia y expresión gráfica.

Lee la tarea que se presenta a continuación y resuelve las siguientes actividades

- El profesor Jair le pidió a la estudiante Anyily que dibujara en uno de los tableros de la universidad del valle sede pacífico, un rombo regular que midiera en sus lados 2 U (unidades). Luego, le solicitó al estudiante Juan Carlos que dibujara un rombo regular cuyos lados fueran el doble de la longitud del que dibujó Anyily, cerciorándose de que los ángulos de la figura que él hiciera fueran congruentes con los ángulos del rombo que ella hizo. A continuación, en la ilustración 3 se muestran los dibujos que hicieron Anyily y Juan Carlos.

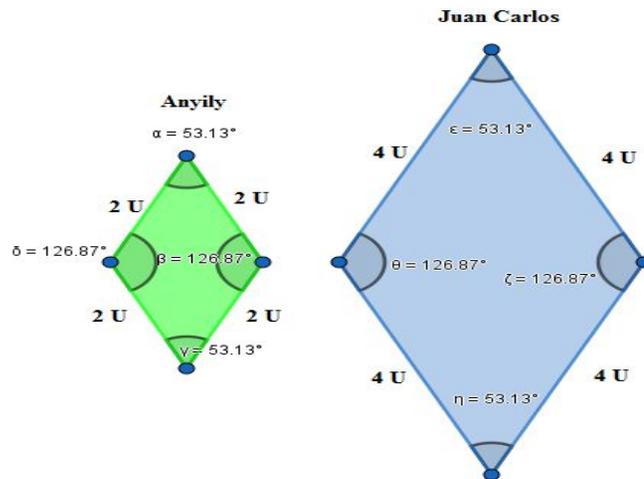


Ilustración 3: congruencia de ángulos en figuras semejantes.

- Si los ángulos de los rombos que dibujaron Anyily y Juan Carlos son congruentes, ¿Cómo definirías en tus propias palabras el término “congruentes”?
- De los rombos que dibujaron Anyily y Juan Carlos ¿Los lados que comprenden los ángulos congruentes son proporcionales? ¿Por qué?

S2. procesos y relaciones en la homotecia y la proporcionalidad.

Escribe tus respuestas y procedimientos en el espacio en blanco.

T1: semejanza, congruencia y expresión gráfica.

Lee la tarea que se presenta a continuación y resuelve las siguientes actividades

2. Una vez hecho lo anterior, el profesor Jair continuó diciendo lo siguiente: “cuando dos formas geométricas son homotéticas algunos de sus lados correspondientes son paralelos”. Para ilustrar esto, el profesor realizó el siguiente dibujo:

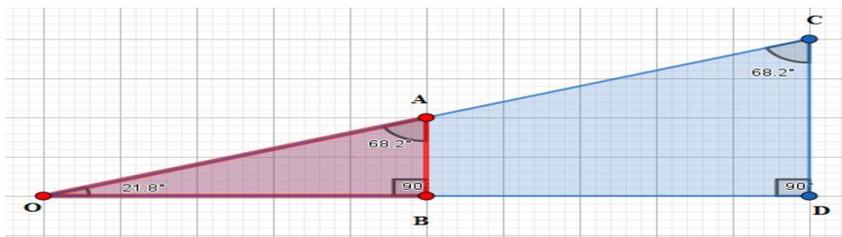


Ilustración 4: figuras homotéticas.

Luego de haber realizado el dibujo (ilustración 4), el profesor Jair señaló que el lado \overline{AB} es correspondiente al lado \overline{CD} y a su vez son paralelos ($\overline{AB} \parallel \overline{CD}$). Con forme a esto, planteó las siguientes actividades. ¡Responde las preguntas que hizo el profesor Jair!

- a) ¿Qué relación encuentras entre los ángulos OAB y OCD, ABO y CDO, y, BOA y DOC?
 b) Observa las cuadrículas y el resto de la información que se muestra en la ilustración (4), para hallar los valores asociados a las siguientes razones:

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{OB}} = \square \quad \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \square \quad \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \square$$

- c) ¿Qué diferencia hay entre los valores encontrados asociados razones?
 d) ¿Se podría decir que los triángulos OAB y OCD presentes en la ilustración (4) son semejantes? ¿Por qué?

S2: procesos y relaciones en la homotecia y la proporcionalidad.

Escribe tus respuestas y procedimientos en el espacio en blanco.

T2: homotecia de polígonos: una aproximación al centro de similitud (O)

Lee la tarea que se presenta a continuación y resuelve las siguientes actividades

Al estudiante Iván le pidieron para la clase de geometría llevar; lápiz, sacapuntas, borrador y regla. Al llegar a clase le entregaron unas hojas, en la página inicial se encontraban las siguientes figuras.

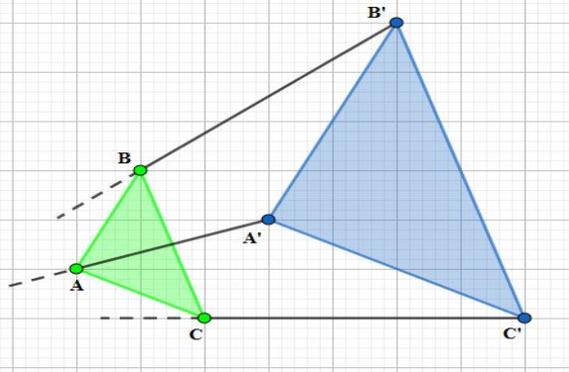


Ilustración 5: homotecia de polígonos: una aproximación al centro de similitud (O).

Luego se le pidió a Iván que prolongara hacia la izquierda los segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ haciendo uso de la regla y el lápiz. ¡Ayúdale!

- ¿Qué sucede con los segmentos al prolongarlos hacia la izquierda, se unen o se interceptan? Si los tres segmentos se unen o se interceptan, indica dicho punto.
- ¿Qué se puede decir respecto a:
 - El punto indicado en relación con los puntos A y A' ,
 - El punto indicado en relación con los puntos B y B' y,
 - El punto indicado en relación con los puntos C y C' ?

S2: procesos y relaciones en la homotecia y la proporcionalidad. T2: homotecia de polígonos:

coeficiente de similaridad (k): Una vez que el estudiante Iván realizó la actividad de la página inicial, prosiguió a resolver la segunda página en la que encontró lo siguiente.

Al formar líneas rectas con los puntos correspondientes de dos o más figuras homotéticas, estas líneas al ser prolongadas se encuentran en un mismo punto denominado **centro de similaridad (O)**. Además, se cumple que $\overline{OA'} = k\overline{OA}$; es decir, la distancia del centro (O) hasta un punto (A') perteneciente a la figura homotética, es igual a **K** veces la distancia del centro (O) hasta un punto (A) de la figura inicial, donde **k** se conoce como el **coeficiente de similaridad**. Esta relación se muestra en la siguiente ilustración (6):

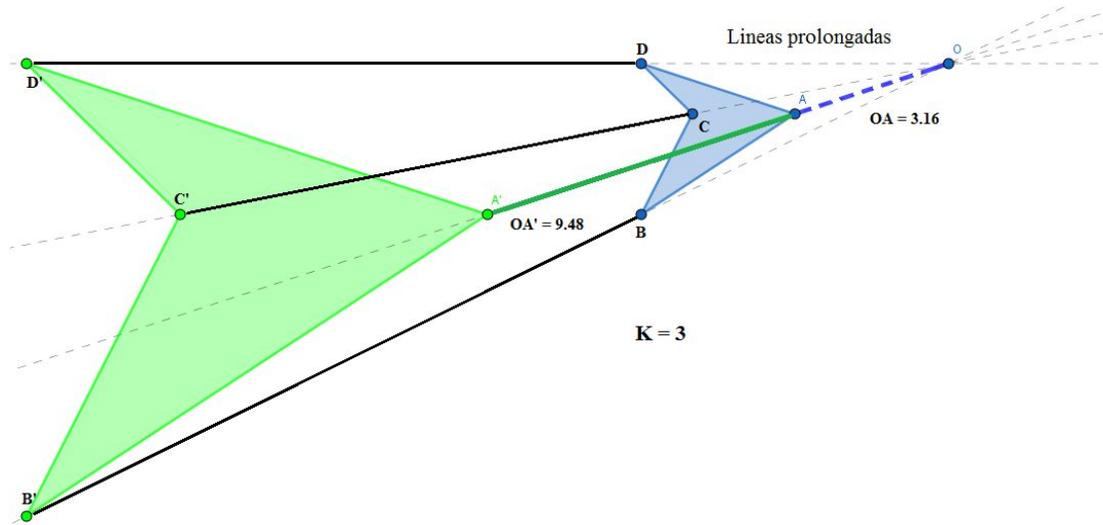


Ilustración 6: figuras homotéticas: coeficiente de similaridad (k) y centro de similaridad (O)

Nótese que en la ilustración (6) el segmento $\overline{OA'} = 9.48$, $\overline{OA} = 3.16$ y $K = 3$. Entonces, $9.48 = 3(3.16)$ por tanto, $9.48 = 9.48$. A partir de la expresión $\overline{OA'} = k\overline{OA}$, se deduce que el coeficiente de similaridad $K = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$ por consiguiente, $K = \frac{9.48}{3.16}$ de lo cual se obtiene el valor del coeficiente de similaridad $K =$

3

S2: procesos y relaciones en la homotecia y la proporcionalidad.

Escribe tus respuestas y procedimientos en el espacio en blanco.

T2: homotecia de polígonos: coeficiente de similaridad (k).

Lee la tarea que se presenta a continuación y resuelve las siguientes actividades.

Teniendo en cuenta lo anterior, observa la siguiente ilustración (7) y responde.

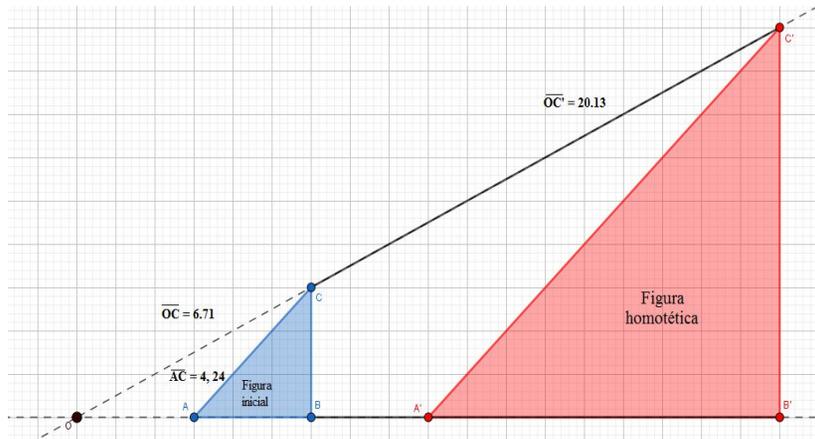


Ilustración 7: figuras homotéticas: coeficiente de similaridad (k).

- De acuerdo con los datos presentes en la ilustración (7) y haciendo uso de las cuadrículas, encontrar las siguientes razones:

$$\frac{OC'}{OC} = \quad \quad \quad \frac{OA'}{OA} = \quad \quad \quad \frac{OB'}{OB} =$$
- ¿Qué relación tienen las anteriores razones entre sí y cómo se le suele llamar a estas al valor asociado a estas razones?
- ¿Qué relación encuentras entre la figura inicial y la homotética teniendo en cuenta el coeficiente de similaridad (k)?

Hallar la medida del segmento $A'C'$, teniendo en cuenta que su lado correspondiente es $AC = 4.24$.

S3: homotecia de segmentos y polígonos en el plano. T1: expresión algebraica y la identificación del coeficiente de similaridad (k).

- El estudiante Iván preparó una exposición sobre la homotecia en el plano para la cual llevó una cartelera con la siguiente ilustración (8).

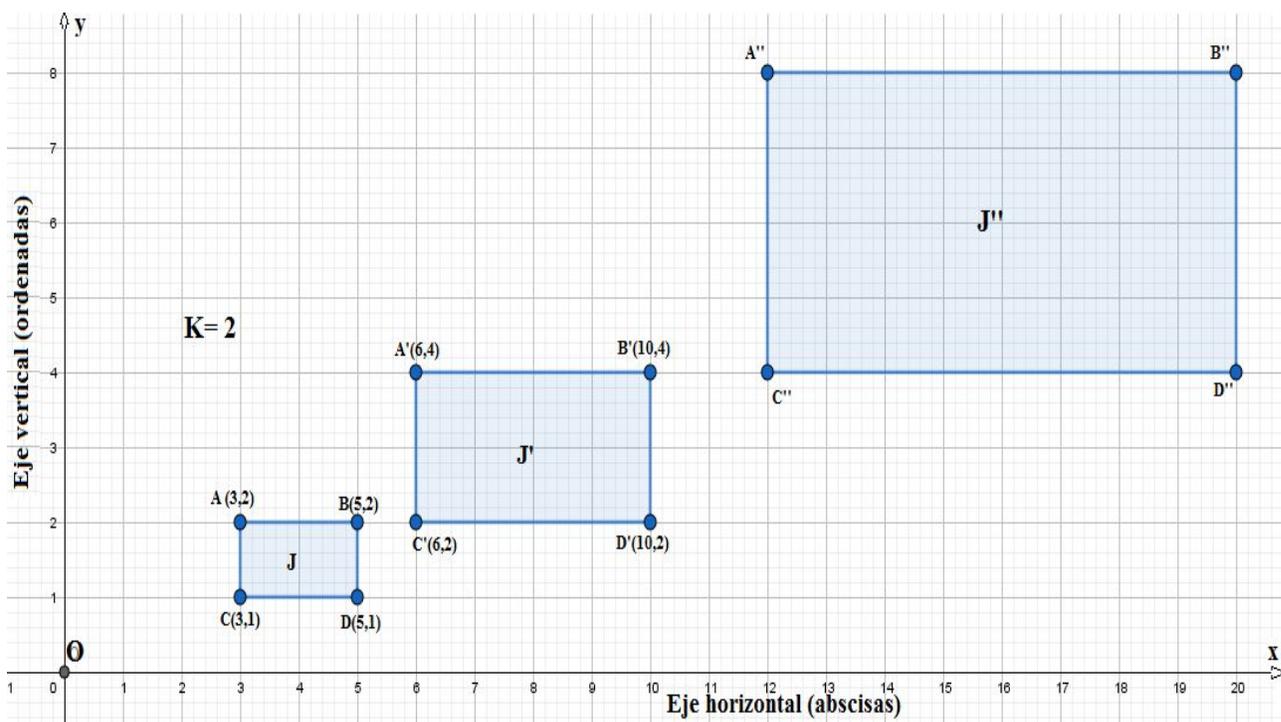


Ilustración 8: homotecia de polígonos en el plano

Al iniciar la exposición, Iván mencionó que: “un punto es un par ordenado de la forma (x,y) , donde x corresponde a la coordenada de las abscisas (eje horizontal) y, y , corresponde a las ordenadas (eje vertical).”

Teniendo en cuenta esto, Iván le pidió a sus compañeros que analizaran las coordenadas de los puntos de la figura **J** con los de la figura **J'** para formar la siguiente tabla.

S3: homotecia de segmentos y polígonos en el plano.**Escribe tus respuestas y procedimientos en el espacio en blanco.****T1: expresión algebraica y la identificación del coeficiente de similitud (k).**

Lee la tarea que se presenta a continuación y resuelve las siguientes actividades.

Puntos	Coordenadas en x	Coordenadas en y
A y A'	$\frac{6}{3} = 2$	$\frac{4}{2} = 2$
B y B'	$\frac{10}{5} = 2$	$\frac{4}{2} = 2$
C y C'	$\frac{6}{3} = 2$	$\frac{2}{1} = 2$
D y D'	$\frac{10}{5} = 2$	$\frac{2}{1} = 2$

Una vez formada la tabla, Iván hizo las siguientes preguntas a sus compañeros.

- ¿Qué se puede decir de la división de las coordenadas de los puntos de las figuras **J** y **J'** en relación con el coeficiente de similitud?
- Si se tienen solo las coordenadas del punto **A** (x, y) de la figura **J** y el coeficiente de similitud (**K**), ¿Cómo se podrían obtener las coordenadas del punto **A'** (x', y') de la figura **J'**?
- ¿Cuáles son las coordenadas del punto **A''** (x'', y''), sabiendo que el punto **A'** tiene coordenadas (**6, 4**) y el coeficiente de similitud es **K=2**?
- ¿Qué coeficiente de similitud lleva a la figura **J** hasta **J''**? explica qué procedimiento te permitió encontrar el coeficiente de similitud.

S3: homotecia de segmentos y polígonos en el plano.

Escribe tus respuestas y procedimientos en el espacio en blanco.

T2: la expresión algebraica de la homotecia y análisis en el plano.

Lee la tarea que se presenta a continuación y resuelve las actividades.

Al continuar la exposición, Iván dice que: “en términos generales, una homotecia tiene por función las expresiones $x' = kx - kxr + xr$ y $y' = ky - kyr + yr$. Donde; x' y y' corresponden a las coordenadas del punto homotético, k es el coeficiente de similaridad, y , xr y yr son las coordenadas del centro de similaridad.”

En relación con lo anterior, Iván le hizo entrega a sus compañeros de unas hojas con la siguiente ilustración (9).

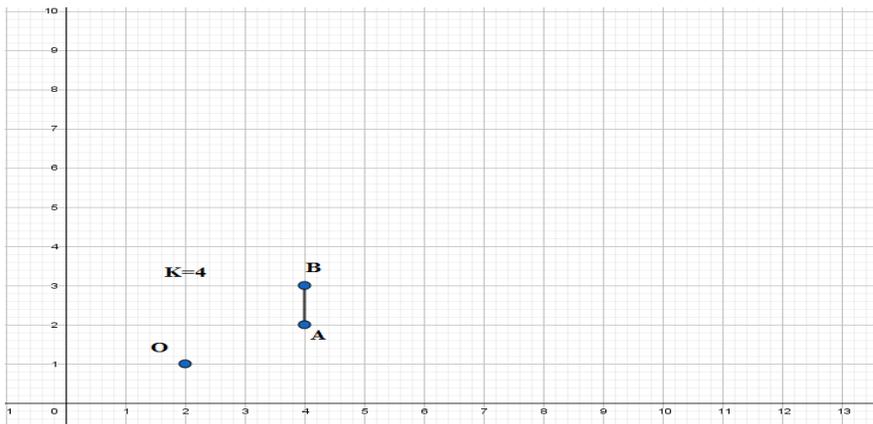


Ilustración 9: homotecia de segmentos en el plano

La hoja con la ilustración (9) contenía las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos **A** y **B**, y el centro de similaridad **O**? ¡Escríbelas y grafica el segmento homotético!
- Haciendo uso de las expresiones generales $x' = kx - kxr + xr$ y $y' = ky - kyr + yr$, hallar las coordenadas de los puntos homotéticos **A'** y **B'**. ¡Escríbelas!
- ¿Consideras que se podría conseguir las coordenadas de los puntos homotéticos **A'** y **B'** sin hacer uso de las expresiones generales dadas? ¡Explica cómo!

