

MODELO ESPACIAL CON ACERCAMIENTO BAYESIANO PARA EL ESTUDIO DE VÍCTIMAS EN COLOMBIA 2015

Pineda Ríos, Wilmer D.* García Reina, Diana P.**

* *Docente tiempo completo, Universidad Santo Tomás, Facultad de Estadística,*
e-mail: wilmerpineda@usantotomas.edu.co

***Universidad Santo Tomás, Facultad de Estadística*
e-mail: dianagarciar@usantotomas.edu.co

Resumen: Colombia se encuentra en una coyuntura vital para las nuevas generaciones, que consiste en una paz sostenible y duradera, dada la firma del acuerdo de paz con las FARC. En efecto, la importancia de dicha coyuntura recae en las víctimas y en identificar factores influyentes en la cantidad de éstas en los municipios de Colombia. En este artículo se propone modelar el comportamiento de la cantidad de víctimas para el año 2015 a través de un modelo CAR con respuesta Poisson y la estimación se hizo de forma bayesiana. Con la aplicación del modelo en mención, se identificaron factores que influyen el aumento de la cantidad de víctimas, lo que permitiría la implementación de políticas públicas que minimicen el riesgo de victimización. Estos resultados abren la posibilidad que en futuras investigaciones se identifiquen factores de incidencia adicionales, con el fin de contribuir a la reparación de las víctimas en el proceso de posconflicto.

Keywords: víctimas, variables correlacionadas, modelo CAR-Poisson, muestreador de Gibbs

Abstract: Colombia is at a vital juncture for the new generations, which is a sustainable and lasting peace, given the signing of the peace agreement with the FARC. In fact, the importance of the situation rests with the victims and in identifying the factors influencing the number of them in the municipalities of Colombia. This article proposes the behavior of the number of victims for the year 2015 through a CAR model with Poisson response and the estimation was done in Bayesian form. With the use of the model in the mention, the factors that influenced the increase of the number of victims were identified, allowing the implementation of public policies that minimize the risk of victimization. These results open the possibility that in future investigations the additional factors of incidence will be identified, in order to contribute to the reparation of the victims in the process of postconflict.

Palabras claves: victims, correlated variables, CAR-Poisson model, Gibbs sampling

1. INTRODUCCIÓN

Colombia durante buena parte de su historia ha estado sumergido en el conflicto armado, como lo expresa el [CNMH \(2014\)](#) con la creación de las guerrillas, que se han transformando producto de la herencia de las luchas agrarias hacia los años treinta del siglo XX, así como la violencia de los años cincuenta. Como consecuencia de esto, se hace notoria la existencia de la figura de víctima entendiéndola como *“aquellas personas que individual o colectivamente hayan sufrido un daño como consecuencia de infracciones al Derecho Internacional Humanitario o de violaciones graves y manifiestas a las Normas Internacionales de Derechos Humanos, ocurridos con ocasión del conflicto armado interno”* ([UAIRV \(2014\)](#), p24). Dado lo anterior, el estudio de la cantidad de víctimas producto de dicho conflicto armado toma fuerza, con el fin de establecer patrones de comportamiento en las diferentes partes del país. Para tal fin, proponer un modelo estadístico propio al comportamiento de datos de conteo teniendo en cuenta la particularidad de cada uno de los municipios del territorio colombiano es una alternativa y el objetivo de la presente investigación.

Dentro del contexto de la modelación de datos se encuentra los modelos lineales generalizados (MLG), cuyo enfoque se basa, según [McCullagh and Nelder \(1983\)](#) en lograr expresar en términos un modelo lineal clásico más modelos que se utilizan usualmente en el análisis estadístico, incluyendo modelos log-lineales para datos de conteos, modelos logit y probit para datos binarios, y modelos de datos continuos con un error estándar constante proporcional. Dado lo anterior, se decide trabajar la variable de interés que es cantidad de víctimas por municipio bajo una distribución Poisson acorde para datos de conteo, y que se encuentra inmersa dentro de esta temática. Si bien este tipo de modelo con distribución Poisson se utiliza regularmente para variables respuesta independientes, usamos algunas modificaciones que permiten trabajar con variables respuesta correlacionadas.

Es así como, se hace la construcción del MLG Poisson con $g(mk) = \log(mk)$ y se sigue la propuesta planteada por [Liang and Zeger \(1986\)](#), para incorporar la estructura de correlación en el modelo, donde en este caso puntual se enlazan con los supuestos que caracterizan un modelo espacial Autorregresivo Condicional (CAR). El modelo se plantea definiendo la matriz de correlación espacial, cuya estructura pertenece a la varianza del modelo espacial en mención. La estimación clásica estaría determinada por la solución de las ecuaciones a través de

Artículo recibido el 13 de Julio de 2017; revisado XX. (Escriba la fecha en que presentó su documento para su revisión).

Esta sección puede ser utilizada para colocar información adicional de los autores. Evite escribir fórmulas largas con subíndices en el título; fórmulas cortas que identifican los elementos están bien (por ejemplo, “Nd-Fe-B”). No escriba “(invitado)” en el título. se prefieren en el campo de autor Los nombres completos de los autores.

Autor para correspondencia: Dirección de Autor FA correos electrónicos, teléfono y dirección institucional.

por ejemplo el algoritmo Fisher Scoring. Sin embargo, para nuestro caso, se plantean Ecuaciones de Estimación Generalizadas (EEG), donde a través de una modificación a dicho algoritmo se obtiene la estimación requerida.

Aunque existen diversos métodos de estimación de los parámetros de un modelo, para nuestra investigación se tomó como elección la estimación bayesiana basada en la utilización de métodos iterativos MCMC. De allí, nace la necesidad del software estadístico R ([R Core Team \(2013\)](#)) y principalmente de la librería CARBayes creada por [Lee \(2016\)](#), que se especializa en la modelación jerárquica bayesiana que es implementada por ejemplo en el análisis del precio de la vivienda y la cartografía de una enfermedad, y en nuestro caso en el modelamiento de número de víctimas del conflicto armado en los municipios de Colombia.

Centrando la mirada en la aplicación del modelo propuesto, es fundamental mencionar que los datos de la cantidad de víctimas del conflicto armado fueron obtenidos de la Unidad de Atención Integral y Reparación a las Víctimas (UARIV), buscando no sólo impactar en la temática de trabajo por la coyuntura política que atraviesa el país con respecto al proceso de paz, sino por la necesidad de identificar características comunes entre los municipios del territorio colombiano, siendo el primer campanazo para la implementación de políticas públicas, es decir, la creación de estrategias de intervención social para disminuir o, en su defecto, acabar con los aspectos generadores de violencia que aumenta el riesgo de victimización de una persona.

La organización del artículo es la siguiente. En la sección 2 se introduce en el contexto social de la investigación que gira entorno a la victimización. En la sección 3 se encuentran los planteamientos teóricos utilizados para la construcción del modelo Poisson-CAR Bayesiano. En la sección 4 se encuentran los resultados de la aplicación del modelo propuesto. En la sección 5 se presentan las conclusiones y finalmente en el apéndice se encuentra el código computacional utilizado en la investigación.

2. VICTIMIZACIÓN

Al hablar de contexto social que encierra esta investigación, es importante mencionar lo expuesto por la Unidad de Atención y Reparación Integral de Víctimas en el cuadernillo del Índice de Riesgo de Victimización [UARIV \(2014\)](#), donde se realiza un constructo alrededor de la definición de víctima iniciando con el riesgo de serlo, donde Giddens citado en [UARIV \(2014\)](#) expresa que el riesgo se debe entender como la posibilidad de ocurrencia de una determinada situación fortuita que trae consecuencias negativas, es decir, el riesgo es visto como la “amenaza en un lugar y tiempo determinado que se convierte en una violación efectiva a un derecho fundamental”. ([UARIV \(2014\)](#), p15.) Bajo la anterior definición, es fundamental mencionar que el riesgo está dado por dos dimensiones según la [UARIV \(2014\)](#) que son por la amenaza y la vulnerabilidad. La primera hace alusión al evento causal, mientras que la segunda

dimensión hace referencia específicamente al objeto de estudio o al elemento expuesto. Por tal razón, el riesgo puede ser medido según lo mencionado por UAIRV (2014) realizando la valoración de como los factores implícitos del sujeto, grupo o comunidad (vulnerabilidad), ocasionan más susceptibilidad de sufrir daño a partir de un fenómeno potencialmente desestabilizador (amenaza).

Del mismo modo, se destaca que este riesgo, según la Red de Estudios Sociales sobre desastres en América Latina (RES-DAL) citado en UAIRV (2014), se produce por la coyuntura en una misma comunidad de dos elementos que son la amenaza y las condiciones de vulnerabilidad, ya que la unión de estos son como una bomba y una mecha, tal como lo confirma Wilches-Chaux citado en UAIRV (2014) que al juntarse la posibilidad se materializa la presencia de un desastre. Es así como, en términos pragmáticos, según Busso citado en UAIRV (2014), la vulnerabilidad se debe dimensionar de manera estructural y coyuntural, donde la primera toma como eje la vulnerabilidad del contexto.

Teniendo en cuenta lo anterior, en el planteamiento del índice de Riesgo de Victimización para los años 2010-2014, los elementos contextuales a considerar son los siguientes:

- El contexto geográfico que determina las condiciones estratégicas o limitantes para la ubicación y presencia de grupos armados, cultivos ilícitos, economías ilegales, entre otros; que influyen en la generación de eventos de conflictos y en la afectación en los derechos de las personas.
- La caracterización demográfica que permite la identificación de la población (género, pertenencia étnica, condiciones de discapacidad), siendo un punto de partida para que un grupo puede ser victimizado por su condición particular (González citado en UAIRV (2014)).

Adicional a lo anterior, un papel fundamental cobran las características del municipio tanto los aspectos geográficos y los dados por la división político-administrativa como los aspectos relevantes de sus habitantes lo que determina que tan propenso es de ser catalogado como víctima o no un habitante, determinado por las violaciones del derecho internacional humanitario o de cualquier acto violento enmarcado en el conflicto armado interno. Teniendo en cuenta lo anterior, se observa la importancia expresada por la UAIRV (2014) de detallar las condiciones demográficas, socioeconómicas, institucionales, comunitarias y geográficas del municipio y de su población.

En este sentido, según Hoyos et. al. citado en UAIRV (2014) plantea una clasificación sobre los procesos de victimización:

Victimización primaria: se contempla a la víctima como tal dado que sobre ella recae cualquier consecuencia de una conducta ilegal.

Victimización secundaria: se deriva de las consecuencias psicológicas, sociales, jurídicas y económicas negativas de-

jadas por las relaciones de la víctima con el sistema jurídico penal en procesos de justicia y reparación.

Victimización terciaria: producida por un estigma social causado por la denuncia misma o casos inconclusos que no lograron condenas frente a la conducta criminal.

Al hablar de victimización se debe hablar directamente de protección de los derechos de la víctima donde se destaca la normatividad que gira entorno de éstos, se listan algunas de las importantes disposiciones en este contexto:

Derecho Internacional Humanitario (DIH) : conjunto de normas internacionales que tiene como fin garantizar los derechos de las personas en situaciones de conflicto armado para proteger a la población civil y evitar actos altamente crueles dentro de las acciones bélicas.

Dentro del DIH en el esfuerzo de humanizar la guerra se plantean cuatro principios que dan responsabilidad a los combatientes según lo planteado por la UAIRV (2014), que se listan a continuación:

- Principio de distinción: plantea la responsabilidad de diferenciar entre los combatientes y los no combatientes dentro del desarrollo del conflicto armado.
- Principio de limitación: expresa que en el desarrollo del conflicto armado no está permitido realizar operaciones sin objetivo alguno o desproporcionadas.
- Principio de proporcionalidad: restringe todo ataque que no sea proporcional al objetivo a atacar.
- Inmunidad de la población civil: declara que los civiles que no participen activamente en el conflicto armado no puede ser objeto de ataques de guerra tal como lo plantea Villa citado en UAIRV (2014)).

Sistema Internacional de Derechos Humanos (DDHH): se encuentra conformado por un conjunto normativo tales como: la Declaración Universal de los Derechos Humanos (1948), el Pacto Internacional de Derechos Sociales, Económicos y Culturales (1966), el Pacto Internacional de los Derechos Civiles y Políticos (1966), entre otros.

Artículo 3 de la Ley 1448 de 2011: retoma la definición de víctima integrando las infracciones al DIH y violaciones a los derechos humanos, por medio de tipologías de los hechos victimizantes que permiten determinar el hecho que una persona o comunidad se convierta en víctima.

Constitución Política de Colombia 1991: se disponen todos los derechos y deberes que un habitante en Colombia debe acatar dando prioridad al bienestar del pueblo colombiano,

así como conservar el orden, la justicia y la libertad.

Dado lo anterior, se tiene que con el fin de identificar los hechos victimizantes más destacados y tenidos en cuenta en la construcción del índice de Riego de Victimización, la **UARIV(2014)** plantea cuatro ejes temáticos, a saber:

Eje temático vida

- Homicidio en persona protegida: El Artículo 135 del Código Penal Colombiano (citado en **UARIV (2014)**) señala que es homicidio en persona protegida “*El que, con ocasión y en desarrollo de conflicto armado, ocasiona la muerte de persona protegida conforme a los Convenios Internacionales sobre Derecho Humanitario ratificados por Colombia*”.
- Homicidio Colectivo: es la acción mediante la cual resultan muertos bajo las mismas condiciones de modo, tiempo y lugar, un grupo de personas a manos del mismo perpetrador.
- Ejecución extrajudicial: hace referencia a los homicidios efectuados por servidores públicos por imprudencia, legítima defensa, combate dentro de un conflicto armado, entre otros.
- Desaparición forzosa: según la Convención Interamericana sobre Desaparición Forzada de Personas (1996, citada en **UARIV (2014)**) define en su Artículo 2 como la privación de la libertad a una o más personas, cualquiera que fuere su forma, cometida por agentes del Estado o por personas o grupos de personas que actúen con la autorización.

Eje temático integridad personal

- Tortura: se contempla que el Artículo 137 del Código Penal Colombiano (citado en **UARIV (2014)**) dispone que la tortura es el acto de ocasionar dolores o sufrimientos graves, físicos o síquicos, con el objetivo de obtener información o una confesión.
- Lesiones de persona protegida: hace referencia que entorno al conflicto armado, se le cause daño a la integridad física o a la salud de una persona protegida conforme al DIH.
- Violencia sexual: se define a todo hecho relacionado con actos de violación, esclavitud sexual, prostitución forzada y embarazo forzado.
- Tratos inhumanos y degradantes en persona protegida: bajo estos hechos, se asume la falta de respeto para la persona, los derechos de la familia, así mismo como las convicciones y prácticas religiosas.
- Castigos colectivos y las represalias: contempla aquellas conductas comunes que se adoptan durante el conflicto

armado con el fin de tomar acciones directas contra las personas ajenas a dicho conflicto o a las personas que han dejado de intervenir en el mismo.

Eje temático seguridad

- Víctimas de actos de terrorismo: entendido como las personas que lastimadas producto de un evento de zozobra o terror hacia la población o a un sector de ella, mediante acciones que pongan en peligro la vida, la integridad física o la libertad de dichas personas.
- Utilización, producción, almacenamiento y transporte de minas antipersonal: teniendo en cuenta lo planteado por la ley 759 de 200 (citado en **UARIV (2014)**) se plantean normas sobre la prohibición del empleo, almacenamiento y transferencia de minas antipersona.
- Atacar bienes culturales y lugares de culto.

Eje temático libertad de Movimiento

- Secuestro: entendiéndolo según el Código Penal Colombiano en el Artículo 169 (citado en **UARIV (2014)**) “*el que arrebate, sustraiga, retenga u oculte a una persona con el propósito de exigir por su libertad un provecho o cualquier utilidad, o para que se haga u omita algo, o con fines publicitarios o de carácter político*”.(p.50.)
- Constreñimiento al apoyo bélico: referido a obligar a una persona protegida a servir de cualquier forma en el desarrollo del conflicto armado.
- Reclutamiento ilícito: dado lo plasmado por el Artículo 162 del Código Penal Colombiano (citado en **UARIV, 2014**) hace alusión a quién reclute a menores de edad o los obligue a participar directa o indirectamente en el desarrollo del conflicto armado es decir, en acciones armadas.
- Toma de rehenes: lo expresado en el Artículo 138 del Código Penal Colombiano (citado en **UARIV (2014)**) que durante el desarrollo del conflicto armado se “*prive a una persona de su libertad condicionando ésta o su seguridad a la satisfacción de exigencias formuladas a la otra parte, o la utilice como defensa*”(p.51)

Eje temático libertad

- Desplazamiento forzado: dado la Ley 1448 de 2011, en su Artículo 60, Parágrafo 2(citado en **UARIV (2014)**), “*es víctima del desplazamiento forzado toda persona que se ha visto forzada a migrar dentro del territorio nacional, abandonando su localidad de residencia o actividades económicas habituales, porque su vida, su integridad física, su seguridad o libertad personales han sido vulneradas o se encuentran directamente amenazadas*”.(p.52)
- Confinamiento: hace referencia a la conducta dirigida

contra la población civil donde se restringe el desplazamiento de la persona o grupo de personas por una zona geográfica específica ocasionado por amenazas de grupos ilegales o la violencia, lo cual trae como consecuencia el no acceso a elementos fundamentales para la supervivencia de los sujetos.

3. MODELO DE REGRESIÓN POISSON PARA RESPUESTAS CORRELACIONADAS.

Dentro del contexto de los modelos lineales generalizados (MLG) regularmente se realiza una propuesta de trabajo con variables respuesta independientes, pero dentro de la teoría que posee dicha temática llama la atención el trabajo con variables correlacionadas, y aún más, cuya correlación está dada espacialmente. De allí que en las secciones siguientes se presenta una propuesta de modelo para el tratamiento de las particularidades de estos datos.

3.1 Modelo espacial Autorregresivo Condicional (CAR) en MLG.

Supóngase que se tienen Y_1, Y_2, \dots, Y_k son variables aleatorias que posee distribución Poisson, es decir que se ajustan de la siguiente manera:

$$Y_k | \mu_k \sim \text{Poisson}(\mu_k), \quad (1)$$

cuya función de densidad se define como:

$$f(Y_k | \mu_k) = \frac{\mu_k^{Y_k} e^{-\mu_k}}{Y_k!}, \quad k = 0, \dots, \infty. \quad (2)$$

Al expresar dicha función de distribución en términos de la familia exponencial, se obtiene como resultado:

$$f(Y_k | \mu_k) = \exp(Y_k \ln(\mu_k) - \mu_k - \ln(Y_k!)) \quad (3)$$

a partir de la ecuación (3) se logra identificar los parámetros de dispersión y natural propios de la familia exponencial, definidos como 1 y $\ln(\mu_k)$ respectivamente para esta distribución particular. Bajo lo anterior, se tiene que la esperanza y la varianza de Y_k se expresa en términos del parámetro natural de dicha distribución:

$$E(Y_k | \mu_k) = b'(\theta_k) = e^{\theta_k} = \mu_k \quad (4)$$

$$\text{Var}(Y_k) = \mu_k = V_k = e^{\theta_k} \quad (5)$$

El plantamiento de un MLG requiere tres componentes principales tal como lo expresa [Agresti \(2015\)](#): el componente sis-

temático, el componente aleatorio y la función de enlace $g(\cdot)$, ésta última definida a continuación:

$$g(\mu_k) = \log(\mu_k) = \eta_k, \quad (6)$$

donde $\eta_k = X_k^T \beta$ es la componente sistemática o predictor lineal, y $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)^T$ es el vector de parámetros desconocidos que serán estimados y $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)^T$ representan los valores de las variables explicativas observadas para las Y_k variables aleatorias.

Hay que recordar que, a través de la función de score y de su linealización, se involucra o se ignora la estructura de correlación de la variable respuesta. Para este caso particular, al tomarse en cuenta dicha estructura se genera un nuevo sistema de ecuaciones para la estimación de β 's.

Dicha correlación entre las variables respuestas Y_k posee una estructura particular, que está dada por características propias de un modelo autorregresivo condicional (CAR), como es de notar se consideran variables con correlación espacial. Es importante mencionar que lo esencial de este último modelo en mención, se fundamenta de que la probabilidad de los valores estimados en cualquier lugar dado están condicionados con respecto a los valores de sus vecinos, de allí que a manera de información la esperanza para dicho modelo se exprese de la siguiente forma:

$$E[Y_k | Y_j, j \neq k] = \mu_k + \rho \sum_{j \neq k} w_{jk} (Y_j - \mu_j), \quad (7)$$

donde m_j es el valor esperado, ρ es el parámetro de correlación espacial que determina el efecto de la vecindad espacial y w_{jk} es tan sólo una ponderación dada. Partiendo de lo anterior, la matriz de covarianza para el modelo CAR está dada por:

$$\text{Var}(Y) = (I - \rho W)^{-1} V, \quad (8)$$

donde V es la matriz diagonal de varianzas y W la matriz de ponderaciones.

Al retomar la incorporación de la estructura de correlación en la función de score para la estimación de los β 's para un MLG, se adhiere la propuesta realizada por [Liang and Zeger \(1986\)](#), que plantea lo siguiente:

$$\text{Var}(Y) = \phi V^{1/2} R V^{1/2} \quad (9)$$

y para caso particular de la distribución Poisson

$$\Omega = 1V^{1/2}RV^{1/2} \quad (10)$$

Despejando de la ecuación (8) y (10) se obtiene que R es igual a :

$$R = V^{-1/2}(I - \rho W)^{-1}V^{1/2} \quad (11)$$

siendo que dentro de la propuesta R debe estar en función de un parámetro de perturbación ρ que no depende de los β 's y se considera fijo, que es equivalente al parámetro de correlación espacial planteado en el modelo CAR.

De esta forma, al realizar el enlace entre la propuesta en mención y la estructura de correlación dada por un modelo espacial CAR, se mantiene la estructura propuesta por [Liang and Zeger \(1986\)](#) para el trabajo de respuestas correlacionadas.

3.2 Estimación clásica de los parámetros del modelo

Para estimar los parámetros del modelo, se debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$S(\hat{\beta}) = 0, \quad (12)$$

cuyas ecuaciones son denominadas para este contexto *Ecuaciones de Estimación Generalizadas (EEG)*, donde:

$$S(\hat{\beta}) = D^T \Omega^{-1}(Y - \mu) = 0 \quad (13)$$

6

$$S_k(\hat{\beta}) = D_k^T \Omega_k^{-1}(Y_k - \mu_k) = 0, \quad (14)$$

donde la matriz D es igual a:

$$D = \begin{pmatrix} \frac{d\mu_1}{d\beta_1} & \cdots & \frac{d\mu_1}{d\beta_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d\mu_k}{d\beta_1} & \cdots & \frac{d\mu_k}{d\beta_p} \end{pmatrix} \quad (15)$$

Por la regla de la cadena, D_p tiene la siguiente expresión:

$$D_k = \frac{d\mu_k}{d\beta} = \frac{d\mu_k}{d\eta_k} \frac{d\eta_k}{d\beta} = \frac{d\mu_k}{d\eta_k} X_k \quad (16)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} S(\hat{\beta}) &= X^T \frac{d\mu}{d\eta} \Omega^{-1} (Y - \mu) \\ &= X^T \frac{d\mu}{d\eta} \Omega^{-1} \frac{d\mu}{d\eta} \frac{d\eta}{d\mu} (Y - \mu), \end{aligned} \quad (17)$$

denotemos Σ como:

$$\Sigma = \frac{d\eta}{d\mu} V^{1/2} R V^{1/2} \left(\frac{d\eta}{d\mu} \right)^T, \quad (18)$$

Luego, la ecuación (13) se puede reescribir de la siguiente manera

$$S(\hat{\beta}) = X^T \Sigma^{-1} \frac{d\eta}{d\mu} (Y - \mu) = 0 \quad (19)$$

Para la solución del sistema de ecuaciones (19), se pueden utilizar métodos iterativos como el Newton Raphson, Fisher Scoring, entre otros. Siguiendo las ideas de [Liang and Zeger \(1986\)](#), usamos una modificación de método de Fisher Scoring que consiste en los siguiente:

1. Como $\mu = \mu(\beta)$ y que se considera un vector de $\beta^{(0)}$ de inicio, luego $\mu^{(0)} = \mu(\beta^{(0)})$. Al plantear una aproximación lineal se tiene:

$$\mu = \mu^{(0)} + D(\beta - \beta^{(0)}) \quad (20)$$

$$= \mu^{(0)} + \frac{d\mu}{d\eta} X(\beta - \beta^{(0)}) \quad (21)$$

2. Se plantean *EEG* a través de una aproximación lineal que se definen como:

$$X^T \Sigma^{-1} \frac{d\eta}{d\mu} (Y - \mu) \approx X^T \Sigma^{-1} \frac{d\eta}{d\mu} (Y - \mu^{(i)}) - \frac{d\mu}{d\eta} X(\beta - \beta^{(i)}) \quad (22)$$

$$= X^T \Sigma^{-1} \frac{d\eta}{d\mu} (Y - \mu^{(i)}) - |X^T \Sigma^{-1} X(\beta - \beta^{(i)})|, \quad (23)$$

3. La estimación de los β 's se expresan como:

$$\beta^{(i+1)} = \beta^{(i)} + (X^T \Sigma^{-1} X)^{-1} X^T \Sigma^{-1} \frac{d\eta}{d\mu} (Y - \mu) \quad (24)$$

$$\beta^{(i+1)} = (X_k^T \Sigma_k^{-1} X_k)^{-1} X_k^T \Sigma^{-1} + \frac{d\eta}{d\mu} (Y - \mu^{(i)}) \quad (25)$$

Aquí, la variable de trabajo Z esta definida por

$$Z^{(i)} = X^T \Sigma^{-1} + \frac{d\eta}{d\mu} (Y - \mu^{(i)}) \quad (26)$$

3.3 Estimación bayesiana de los parámetros del modelo

En estudios estadísticos, se puede tener información previa sobre los parámetros de interés. Esta información puede ser considerada formal para el análisis, resumiéndose en una función de densidad de dichos parámetros. Esta función de densidad, que es denotada como $P(\beta)$ y denominada función de densidad prior, depende de un conjunto conocido de parámetros β llamados como hiperparámetros.

Después de los valores de las variables de interés Y son observados, hay dos fuentes de información para los parámetros, una está dada por la función de densidad prior $P(\beta)$ y la otra fuente está dada por la función de verosimilitud $L(\beta|Y)$. Así, en el análisis bayesiano, la inferencia está basado en la función de densidad posterior de los parámetros, denotada por $\pi(\beta)$, la cual es obtenida a través de la aplicación del Teorema de Bayes, expresado como Hoff (2009):

$$\pi(\beta) \propto L(\beta)P(\beta) \quad (27)$$

Basados en la ecuación (27) las funciones de densidad prior $P(\beta)$ son componente esencial para la obtención de la distribución posterior, de allí que dado su naturaleza son independientes y pueden o no aportar información al modelo, por tanto según Hoff (2009) son denominadas: informativas y no informativas. Para el caso particular del plantamiento de la estimación de los parámetros del modelo se han uso de funciones prior no informativas que de manera general se denotan como:

$$\beta \sim N(0, \sigma^2) \quad (28)$$

donde el hiper parámetro $\sigma^2 > 0$.

Por otro lado, dado que el manejo variables independientes permite el cálculo de la función de verosimilitud a través de una productoria, nuestra propuesta de modelo pone de manifiesto la complejidad que se genera en la obtención de dicha función, ya que se obtienen funciones conjuntas de probabilidad, debido la característica de correlación ya mencionada

anteriormente.

Bajo la anterior premisa y haciendo uso de la ecuación (28), la distribución de probabilidad posterior se expresa como:

$$P(\beta|Y_1, \dots, Y_k) \propto P(Y_1, \dots, Y_k|\beta)P(\beta) \quad (29)$$

donde $P(b)$ representa la distribución prior.

La estimación de dichos parámetros requiere métodos iterativos enmarcados en MCMC tal como lo plantea Gamerman and Lopes (2006), para lo que hace uso de algoritmos como el Metropolis Hasting y el muestrador de Gibbs, con el único fin de extraer muestras de distribuciones posterior, y observar la convergencia de las cadenas y así la estimación de los parámetros del modelo.

Antes de mostrar el comportamiento del dichos algoritmos, es necesario recordar que MCMC es una técnica que simula una cadena de Markov cuyos estados siguen una función de probabilidad dado un estado de grandes dimensiones tal como lo señala Hoff (2009). De igual forma, una cadena de Markov es un modelo matemático ligado a sistemas estocásticos, donde los estados dependen de las probabilidad de transición, es decir que el estado actual solo depende de su estado anterior.

Según lo expresado por Koop and Tobias (2007) el método de Monte Carlo está categorizado como un método no determinístico utilizado para aproximar expresiones matemáticas complejas de evaluar con exactitud. Donde este método posee un error absoluto de la estimación, el cual decrece como $\frac{1}{\sqrt{x}}$ de acuerdo con el teorema de límite central, de allí que a partir de varias repeticiones busca reconocer el comportamiento del sistema, destacando que la base de estas simulaciones es ser generadas a apartir de números aleatorios.

Para la presente investigación se hace uso del muestrador de Gibbs, siguiendo la propuesta de Besag and Mollie. (1991) bajo el argumento que es un caso particular del Metropolis, que permite aprovechar una de las ventajas del enfoque bayesiano, ya que no sólo se refiere a estimaciones puntuales, sino al hecho que dicho algoritmo es utilizado para modelos Poisson espaciales que se enmarcan en los modelos CAR y los cuales fueron propuestos Besag, York y Mollié (BYM). Sin embargo, es de aclarar que los modelos propuestos por BYM presentan modificaciones dadas por Leroux and Breslow (1999) donde plantean un modelo lineal generalizado espacial a datos de área, cuyo predictor son modelados por covariables conocidas y un vector de efectos aleatorios, estos último utilizando un modelo autorregresivo condicional. Es así como se describen a continuación dicho algoritmo utilizado para la estimación de parámetros de estos modelos.

3.3.1 Muestrador de Gibbs

El muestrador de Gibbs es un caso particular del algoritmo de

Metropolis Hasting, que consiste en tener bloques las distribuciones propuestas que coincidan con la distribuciones posterior condicionadas, de modo que la probabilidad de aceptación es 1. Los pasos que realiza este algoritmo se enumeran a continuación:

1. Se fija un valor inicial $\beta_1^{(0)}, \dots, \beta_k^{(0)}$
2. Se simula $\beta_1^{(t+1)} \sim \pi(\beta_1 | \beta_2^{(t)}, \dots, \beta_k^{(t)})$.
3. Se simula $\beta_2^{(t+1)} \sim \pi(\beta_2 | \beta_1^{(t+1)}, \beta_3^{(t)}, \dots, \beta_k^{(t)})$.
4. Se simula $\beta_3^{(t+1)} \sim \pi(\beta_3 | \beta_1^{(t+1)}, \beta_2^{(t+1)}, \beta_4^{(t)}, \dots, \beta_k^{(t)})$.
5. Así sucesivamente,
6. Se simula $\beta_k^{(t+1)} \sim \pi(\beta_k | \beta_1^{(t+1)}, \dots, \beta_{(k-1)}^{(t+1)})$.

Es de aclarar que los modelos mencionados, a pesar que posee un fundamento teórico en común difieren en el hecho que el modelo propuesto por Leroux and Breslow (1999) plantea un modelo donde hay un parámetro para la sobredispersión y otro para la dependencia espacial, basando la estimación clásica de los parámetros en el método de la cuasi-verosimilitud penalizada, recordado que ésta permite mayor variabilidad en los datos que un modelo estadístico clásico. A su vez es de resaltar que en cuento a la estimación bayesiana posee la misma ya mencionada y variante se observa es la cantidad de parámetros a estimar.

3.4 Diagnósticos de convergencia

Posterior a la estimación bayesiana de los parámetros del modelo, se busca validar las estimaciones realizadas bajo la convergencia de las cadenas, siendo los diagnósticos de convergencia la herramienta que cumple con este objetivo. Por tanto, a continuación se presentan tres de los criterios más destacados dentro de la literatura :

- **Heidelberger and Welch:** es un diagnóstico de control de longitud de ejecución basado en un criterio de precisión relativa para la estimación de la media. El ajuste predeterminado corresponde a una precisión relativa de dos dígitos significativos. También elimina hasta la mitad de la cadena para asegurar que los medios se estimen a partir de una cadena que ha convergido. P and PD (1981)
- **Raftery and Lewis:** es un diagnóstico de control de longitud de ejecución basado en un criterio de exactitud de estimación del cuantil q. Está pensado para su uso en una prueba piloto corta de una cadena de Markov. También calcula el número de iteraciones de "quemado" que se descartarán al principio de la cadena. Raftery and Lewis (1995)
- **Geweke:** Diagnóstico de convergencia para cadenas de Markov basado en una prueba de igualdad de los medias de la primera y última parte de una cadena de Markov (por defecto el primer 10% y el último 50 %). Si las muestras

se extraen de la distribución estacionaria de la cadena, los dos medios son iguales y la estadística de Geweke tiene una distribución normal asintóticamente estándar. Geweke (1992)

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En las secciones anteriores se fundamentó teóricamente las premisas que los soportan el modelo Poisson-CAR-Bayesiano, por tanto en la presente sección se expondrán los resultados de la aplicación del modelo iniciando con la contextualización de la información utilizada, hasta los resultados de la estimación bayesiana de los parámetros del modelo.

4.1 Análisis Descriptivo

Los datos utilizados para la aplicación de esta investigación tienen como fuente la UARIV, aclarando que éstos son públicos y de libre acceso. Para la aplicación de nuestro modelo se tomó la base de datos discriminada por municipios y hecho victimizantes del número de víctimas declaradas en esta entidad para el año 2015.

Partiendo de lo anterior, se cuenta con la siguiente información inicialmente:

- Variable Respuesta: cantidad de víctimas reportadas en la UARIV a nivel municipal del territorio colombiano para el año 2015
- Se cuenta con información del 96%(1.016) de los municipios, con lo cual se tiene el 4% de información faltante.
- A partir de la información dada por la fuente en mención, se extrajo la covariable denominada *Proporción por Eje Libertad de Movimiento*, cuyo eje fue predominante en los datos.

De esta manera, a continuación se presenta visualmente el comportamiento dada la descripción anterior:

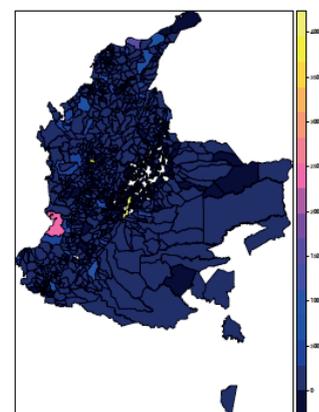


Figura 1. Mapa de Intensidad de Víctimas año 2015 con datos faltantes.

A través de la Figura 1, se logra vislumbrar un comportamiento destacado en cuatro municipios de Colombia con lo que respecta a cantidad de víctimas del conflicto armado, ya que es la escala de colorimetría posee colores más claros lo que indica que hay mayor cantidad en dichos municipios, los cuales son: Buenaventura, Medellín, Bogotá y Santa Marta. Adicional a esto, se observa que regiones del país como la región de los Llanos Orientales y la región de los Santanderes posee una baja densidad de víctimas, yendo en contravía con la premisa de ubicación guerrillera en estas zonas. Por otro lado, se evidencia en el mapa espacios en blanco que corresponde al 4% de la información faltante mencionada inicialmente, concentrándose en la región boyacense y la región Amazonia, esta última tiene coherencia debido a las condiciones geográficas que caracterizan dicho sector.

Baker.J and Mengersen.K (2014) plantea la importancia de la imputación en datos espaciales, ya que pueden presentarse ya sea información faltante para pocas variables como para muchas variables, donde se pone de manifiesto el método de imputación a utilizar. En nuestro caso, se procede a realizar la imputación de datos a través de componentes propios de la Estadística Espacial para datos de áreas, haciendo salvedad que no se toma en cuenta los municipios referentes al archipiélago de San Andrés y Providencia, debido a que para la imputación basada en el cálculo de vecinos más cercanos y dado su ubicación geográfica generan dificultades para dicho proceso. Producto de este procesamiento de información obtenemos en la Figura 2 los siguientes resultados:

El proceso de imputación se tomaron como covariables la proporción del eje temático de libertad de movimiento, el cual corresponde a todo lo relacionado con desplazamiento forzado; así como el área oficial de cada municipio cuyo origen está dado por el Sistema de Información Geográfica para la Planeación y Ordenamiento Territorial (SIGOT) junto con la información geográfica (ubicación) por municipio.

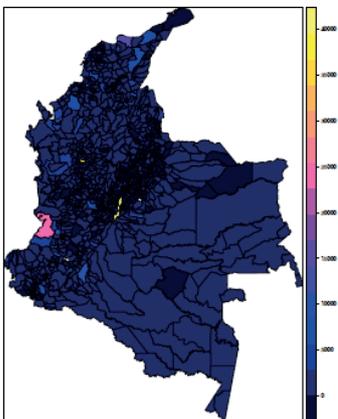


Figura 2. Mapa de Intensidad de Víctimas año 2015.

Según el modelo teórico planteado, debe existir una correlación entre las variables respuesta a nivel espacial, donde dicha condición se valida a través del Test de Moran. Este test se basa en la noción de autocorrelación espacial entre las variables respuestas, ya que se asocia a la idea de que los valores observados en áreas geográficas adyacentes serán más similares que los esperados bajo el supuesto de independencia espacial **Cressie (1993)**.

Aplicando el test de Moran, se observa que existe suficiente evidencia estadísticamente significativa para afirmar que la variable de interés: total de Víctimas, posee correlación espacial a un nivel de significancia del 5 %. Adicionalmente, es importante mencionar que valores positivos del estadístico de Moran indica autotrelación directa, es decir similitud entre los valores cercanos. Con el fin de confirmar la existencia de correlación espacial se aplica el Test de Geary que tiene el mismo propósito que el Test de Moran. De manera similar, se afirma que existe suficiente evidencia estadística para concluir que nuestra variable de interés posee correlación espacial. Al ser el estadístico de C-Geary mayor que uno se dice que el total de víctimas posee un correlación negativa, que indica que, en un municipio determinando con un número dado de víctimas, se espera que sus vecinos posean un número menor de éstas.

No hay que olvidar que estos dos test están relacionados de manera inversa, debido a que el primero referencia una correlación espacial global y el segundo es más sensible a una correlación espacial local **Gelfand. A (2010)**

Se garantizan de esta forma que se tienen las condiciones de trabajo para la aplicación del modelo, es decir, se posee datos de conteo en la variable de interés y existe correlación espacial entre dicha variable a nivel municipal, se procede a la aplicación y estimación de los parámetros del modelo.

Para la aplicación del modelo Poisson-CAR Bayesiano es necesario un software estadístico, este caso particular se utiliza R y principalmente la librería CARBayes, que permite realizar la estimación bayesiana de los parámetros de un modelo Poisson con correlación espacial.

Utilizando la función `S.CARleroux()` se procede a realizar lo indicado en el planteamiento teórico del modelo propuesto, donde se considera en el modelo una lista binaria de pesos espaciales, la familia a la cual pertenece la distribución de la variable de interés (Poisson), las covariables que se involucra en la estimación y las distribuciones prior donde por defecto se utilizan funciones no informativas.

Las covariables que se consideraron en la estructura del modelo son las siguientes:

- **Proporción del Eje Temático Libertal de Movimiento:** corresponde a la proporción de víctimas por municipio que han sido víctimas de secuestro, constreñimiento, reclutamiento ilícito y toma de rehenes.

- **Calidad de vivienda:** Factor de ponderación de las categorías: material predominante de los pisos de la vivienda y material predominante de las paredes de la vivienda para el año 2005, cuya fuente de información es el DANE.

Es denotar que debido a la particularidad que se busca en la aplicación con información municipal no se logró extraer la totalidad de las covariables a la fecha del 2015, sin embargo se contemplaron variables explicativas del último censo, es decir del año 2005. Aclarando que se deja abierta la posibilidad de adicionar más covariables al modelo propuesto.

4.2 Resultados de la estimación

Utilizando la función S.CARleroux() se procede a generar las estimaciones bayesianas del modelo, recordando que las funciones de distribución prior contempladas para el modelo fueron no informativas.

En el modelo escogido se tomaron en cuenta variables como la *cobertura escolar para el año 2015, tasa de analfabetismo para el 2005, población femenina para 2005, deserción escolar para el 2005*, donde el principal inconveniente se presentó en la estimación, debido a la no convergencia de las cadenas de estas covariables; por tanto no se consideraron en el ajuste del modelo final dado que la estimación no era óptima. Para la estimación de los parámetros del modelo, se usaron 800.000 muestras y se descartaron 400.000 de calentamiento y se adelgazó la cadena tomando de 10 en 10, obteniendo una muestra efectiva de 40.000 para la estimación de los parámetros. Los resultados se muestran en las figura 3 y 4.

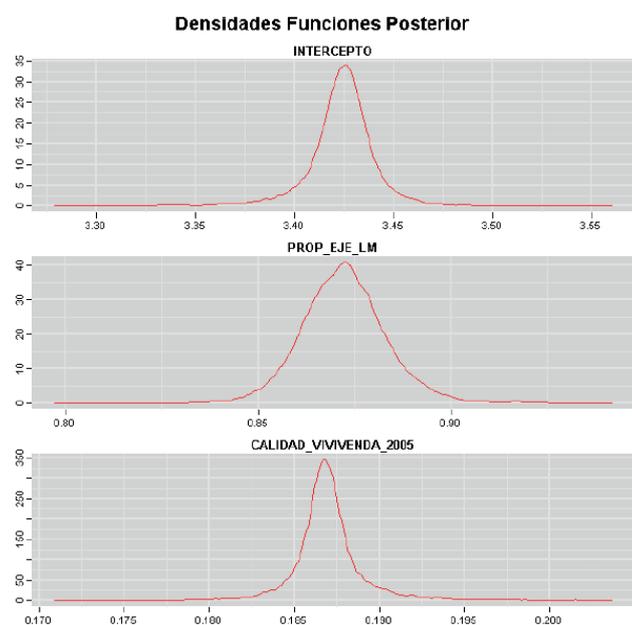


Figura 3. Densidades Posterior de los parámetros del modelo ajustado.

Como se observa en la figura 4, las trazas de las cadenas tienen un comportamiento estacionario, además el estadístico \hat{R}

están alrededor de 1, por lo que es una evidencia de la convergencia de las cadenas. A continuación se presentan las prueba de convergencia de Heidelberg-Welch, que permite validar si las estimaciones resultantes están dadas bajo cadenas que convergen. A continuación, se presentan los resultados sobre dichos diagnósticos de convergencia que validan la premisa anteriormente expuesta..

4.2.1 Diagnóstico de Heidelberg and Welch

Tal como se mencionó en la sección 2, existen diferentes pruebas para evaluar la convergencia de las cadenas, en este caso se tomó la prueba de Heidelberg and Welch, cuyo resultado permite identificar de manera directa si las cadenas poseen convergencia. Dichos resultados se encuentran en la Tabla 1:

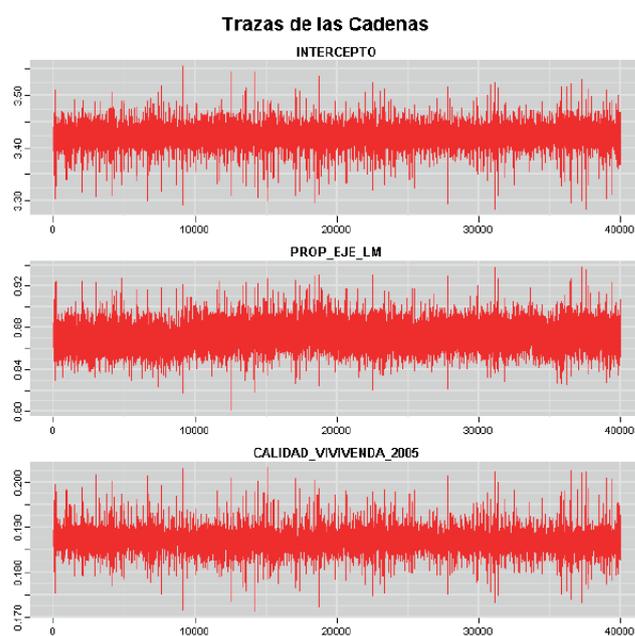


Figura 4. Traza de las cadenas de los parámetros del modelo ajustado.

Tabla 1. Resultados Prueba de Heidelberg and Welch

Estacionariedad	Inicio Iteración	p-valor
Intercepto	4001	0.0971
Prop Eje LM	1	0.7358
Calidad Vivienda	8001	0.1302
Halfwidth	Media	Halfwidth
Intercepto pasó	3.800	0.254
Prop Eje LM pasó	-1.226	0.108
Calidad Vivienda pasó	0.277	0.026

Al aplicar la función heidel.diag() se observa las cadenas de las respectivas covariables contempladas en el modelo pasan el supuesto de estacionariedad, así como la prueba de longitud de la muestra, donde se tiene que es suficientemente larga para estimar la media con buena precisión. Por tal razón, se concluye que las estimaciones de los parámetros del modelo están dadas bajo cadenas que convergen lo que da fiabilidad

a las mismas.

Por otro lado, uno de los parámetros que cobra importancia en la propuesta del modelo es el parámetro de correlación r , cuyo resultado de la estimación se muestra a continuación:

Dadas las Figuras 5 y 6, y al observar los resultados del intervalo de credibilidad al 95% que se muestra a continuación en los resultados del modelo, se observa que dentro del éste no se encuentra contenido el 0, con lo que se garantiza la existencia de correlación en la variable respuesta.

4.2.2 Resultados del modelo

Dado los resultados obtenidos en la anterior sección, a continuación se presentan las estimaciones bayesianas de los parámetros del modelo.

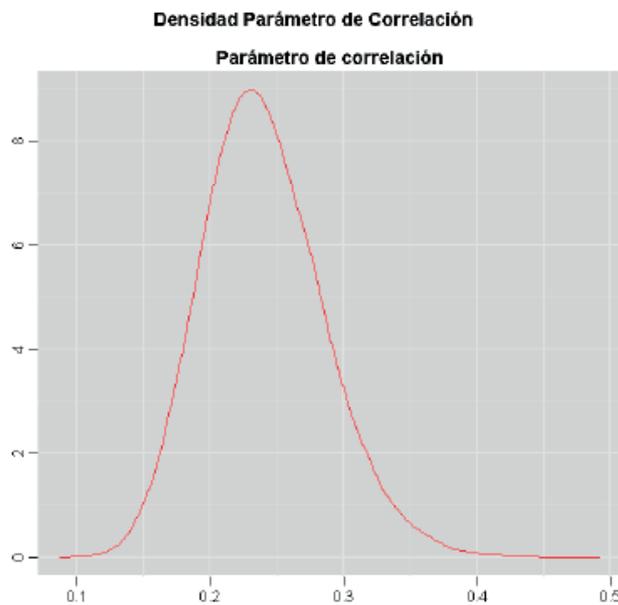


Figura 5. Densidad parámetro de correlación

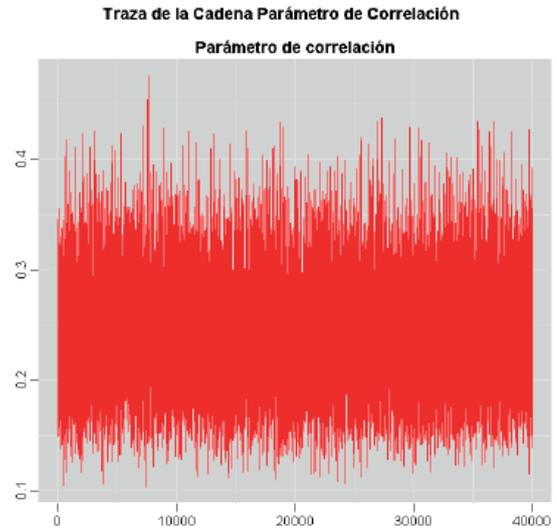


Figura 6. Traza de la cadena del parámetro de correlación.

Dados los resultados de la Tabla 2 se observan que las estimaciones se encuentran dentro de los intervalos de credibilidad al 95 %, por tanto se tiene que la cantidad de víctimas que se espera en un municipio bajo el hecho que no hay presencia de hechos victimizantes relacionados con el eje temático libertad de movimiento y cuya calidad de vivienda es mala, manteniendo las demás variables constantes, es de 49 víctimas. Sin embargo, el contexto de guerra que ha vivido Colombia deja ver de manera empírica que hay factores que pueden afectar el riesgo de victimización de sus habitantes, esto dado en algunas carencias o beneficios que existen para algunos habitantes en un país subdesarrollado.

Es así como por cada una unidad adicional en que la proporción del eje temático libertad de movimiento disminuya, la cantidad de víctimas se reduce en un 71 %, manteniendo las demás variables constantes. Lo anterior indica que a medida aumenta los hechos victimizantes como secuestro, constreñimiento, reclutamiento ilícito y/o toma de rehenes la probabilidad de aumentar la cantidad de víctimas es mayor, con lo que se logra concluir que la ocurrencia de estos hechos victimizantes es un factor que incide en la cantidad de víctimas por municipio en Colombia.

Tabla 2. Resultados del modelo

Parameters	Median	2.5 %	97.5 %	n.sample	n.effective
Intercept	3.8918	3.1145	4.5893	40000	15.0
comp@dataPROP.EJE.LM	-1.2350	-1.7686	-0.7616	40000	28.9
comp@dataCalidad.vivienda.2005	0.2579	0.1793	0.3391	40000	9.7
tau2	9.1155	8.0440	10.1964	40000	2446.8
rho	0.8633	0.7347	0.9580	40000	705

DIC = 9905.096

p.d = 1110.13

LMPL = -4081.13

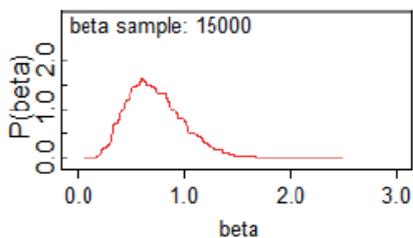


Figura 5. Función de densidad para β

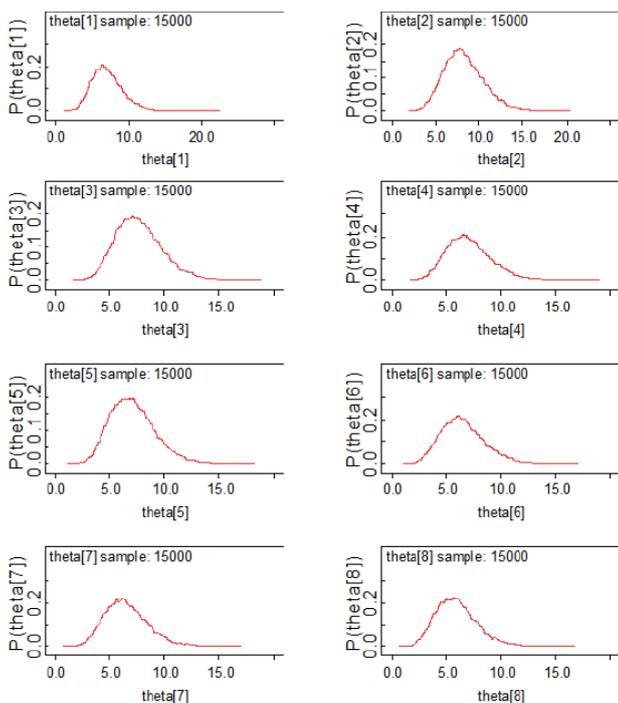


Figura 6. Primeras 8 funciones de densidad para θ_j

5. CONCLUSIONES

Los modelos jerárquicos ofrecen una herramienta flexible y útil para modelar una gran variedad de situaciones que ocurren frecuentemente en la práctica, incluyendo el análisis de datos longitudinales y de muestreos estratificados, así como problemas de meta-análisis.

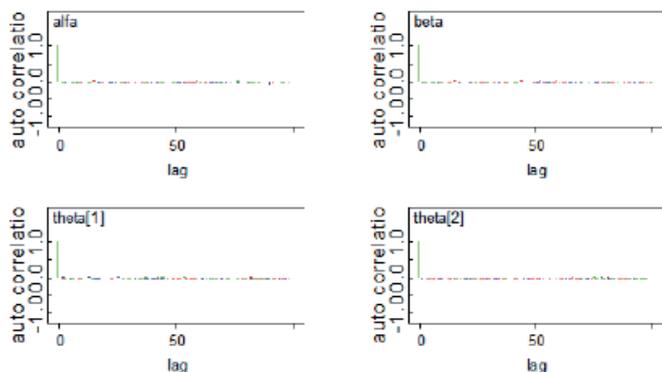


Figura 7. Funciones de autocorrelación para α , β , θ_1 y θ_2

Entre otros, está el modelo de regresión jerárquico en el que k-distintas regresiones se suponen independientes dado el hiperparámetro que caracteriza a la distribución poblacional co-

mún de los coeficientes de regresión o un modelo de efectos aleatorios donde la varianza de las observaciones se supone conocida. Cabe destacar que los modelos jerárquicos pueden tener suficientes parámetros para ajustar bien los datos, evitando el problema de sobreajuste, al modelar la estructura de dependencia entre los parámetros a través de una distribución poblacional (común). Al estar un modelo jerárquico caracterizado por los parámetros $\theta_1, \dots, \theta_j$ y el hiperparámetro θ , cabe la posibilidad también de obtener distribuciones predictivas, por ejemplo: (i) la distribución de una observación futura y_j correspondiente a uno de los parámetros θ_j existentes; y (ii) la distribución de una observación y_{**} correspondiente a una futura θ_* que proviene de la misma población que dio lugar a los parámetros θ_j .

Por último, se observó que mediante el conjunto de datos reales utilizado, se ilustró la metodología y los procedimientos necesarios para estimar un modelo jerárquico bayesiano Poisson-Gamma, bajo el método de aproximación numérica MCMC, el cual permitió simular y generar las muestras aleatorias de los parámetro de las distribuciones posteriores resultantes.

REFERENCIAS

Concepción., A. (2014). Presentation chapter 6. bayesian inference - regression and hierarchical models. Universidad Carlos III de Madrid Master in Business Administration and Quantitative Methods Master in Mathematical Engineering.

Gelman, A., Carlin, J. B., Stern, H. S., and Rubin, D. (2014). Bayesian data analysis. Boca Raton, FL, USA: Chapman and Hall/CRC.

Givens, G. H. and Hoeting, J. A. (2005). Computational Statistics. Wiley New Jersey.

Gutiérrez, E. (1998). Análisis bayesiano de modelos jerárquicos lineales. Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas. Universidad Nacional Autónoma de México.

Hastings, W. (1970). Monte carlo sampling methods using markov chains and their application. Biometrika, 57(1):97-109.

Marín, J. M. (2014). Tema 5. Comparación de modelos. Métodos computacionales. Notas de clase. Universidad Carlos III de Madrid, Departamento de Estadística.