

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

ДИСКРЕТНАЯ ТЕОРИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В СИСТЕМЕ «ОКЕАН-АТМОСФЕРА»

А.Ю. Басов¹, В.П. Будак¹, Д.С. Ефременко², А.А. Кохановский³

¹Национальный исследовательский университет «МЭИ»

²Немецкий аэрокосмический центр, Оберпфaffenхофен, Германия

³Vitrociset Belgium SPRL, Дармштадт, Германия

DISCRETE THEORY OF RADIATION TRANSFER IN THE “OCEAN-ATMOSPHERE” SYSTEM

A.Yu. Basov¹, V.P. Budak¹, D.S. Efremenko², A.A. Kokhanovsky³

¹National research university “MPEI”, Moscow, Russia

²German Aerospace Center, Oberpfaffenhofen, Germany

³Vitrociset Belgium SPRL, Darmstadt, Germany

После дискретизации интеграла рассеяния для плоской среды уравнение переноса излучения приобретает вид матричного обыкновенного дифференциального уравнения, имеющего аналитическое решение. Это решение имеет вид рассеивателей – матрицы коэффициентов яркости слоя, связывающей угловые распределение яркости падающего и выходящего из слоя излучений. Решения краевой задачи дополняют граничные условия для слоя до полных на каждой границе, что позволяет для определения поля внутри слоя воспользоваться пропагатором матричного уравнения. Решение обладает свойством инвариантности, позволяющим заменить два соседних слоя одним, что определяет матрично-операторный метод, который позволяет учесть вертикальную неоднородность слоя. Этот подход дает возможность представить френелевское и диффузное отражение на границе слоя также в виде матриц. Соответственно все выражения для светового поля плоского слоя приобретают замкнутую матричную форму, что дает возможность аналитически оценить точность и границы применимости известных инженерных приближений.

After discretization of the scattering integral for a medium slab, the radiation transfer equation takes the form of a matrix ordinary differential equation that has an analytical solution. This solution has the form of scatterers - a matrix of the layer radiance factor, connecting the angular radiance distribution of the incident and outgoing radiations. The solutions of the boundary-value problem complement the boundary conditions for the layer to complete at each boundary, which makes it possible to use the propagator of the matrix equation to determine the field inside the slab. The solution has the property of invariance, which allows replacing two adjacent layers with one, which determines the matrix-operator method, that allows considering the vertical heterogeneity of the slab. This approach makes it possible to represent the Fresnel and diffuse reflection on the layer boundary also in the matrix form. Accordingly, all the expressions for the light field of a slab acquire a closed matrix form, which makes it possible to analytically estimate the accuracy and applicability domain of known engineering approximations.

Дискретное УПИ

Проанализируем алгоритм численного решения краевой задачи УПИ для случая освещения слоя мутной среды плоским мононаправленным (ПМ) источником в направлении

$$\hat{\mathbf{I}}_0 = \left\{ \sqrt{1 - \mu_0^2}, 0, \mu_0 \right\}, \quad \mu_0 = (\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{I}}_0) = \cos \vartheta_0 :$$

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial L(\tau, \hat{\mathbf{I}})}{\partial \tau} = -L(\tau, \hat{\mathbf{I}}) + \frac{\Lambda}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}') L(\tau, \hat{\mathbf{I}}') d\hat{\mathbf{I}}', \\ L(\tau, \hat{\mathbf{I}}) \Big|_{\tau=0, \mu \geq 0} = \delta(\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{I}}_0), \quad L(\tau, \hat{\mathbf{I}}) \Big|_{\tau=\tau_0, \mu \leq 0} = 0; \end{cases} \quad (1)$$

где $L(\tau, \mu, \varphi)$ – яркость светового поля на оптической глубине $\tau = \int_0^z \varepsilon(\zeta) d\zeta$ в направлении

визирования $\hat{\mathbf{I}} = \left\{ \sqrt{1-\mu^2} \cos \varphi, \sqrt{1-\mu^2} \sin \varphi, \mu \right\}$, $\mu = (\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{I}}) \equiv \cos \vartheta$; $x(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}')$ – индикатриса рассеяния;

Λ – альбеда однократного рассеяния. Краевая задач (1) определена в декартовой системе координат $OXYZ$, в которой ось OZ направлена вниз перпендикулярно границе слоя, $\hat{\mathbf{z}}$ – единичный вектор вдоль OZ . Верхняя граница слоя $z = 0$. Единичные вектора будем отмечать знаком “^”, вектор-столбцы правой стрелкой, вектор-строки левой стрелкой, а матрицы двойной стрелкой над соответствующими символами.

Для численного решения УПИ его необходимо дискретизировать, для чего необходимо заменить интеграл рассеяния конечной суммой [1]. Это невозможно при наличии угловых особенностей в угловом распределении яркости, поскольку особенность нельзя представить конечным рядом ни в одном базисе. При наличии сильной анизотропии в угловом распределении яркости замена интеграла конечной суммой может привести к значительной погрешности [2].

Поэтому для аккуратной дискретизации необходимо выделить из решения пусть приближенно, но обязательно аналитически все особенности и сильно анизотропную часть – анизотропная часть решения $L_a(\tau, \hat{\mathbf{I}})$, т.е. представить решение виде [1]:

$$L(\tau, \hat{\mathbf{I}}) = L_a(\tau, \hat{\mathbf{I}}) + L_r(\tau, \hat{\mathbf{I}}), \quad (2)$$

$L_r(\tau, \hat{\mathbf{I}})$ – регулярная часть решения (РЧР), являющаяся гладкой функцией, представление которой возможно по конечному базису элементов.

Для $L_r(\tau, \hat{\mathbf{I}})$ с учетом (2) краевая задача (1) преобразуется в выражение [1]:

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial L_r(\tau, \hat{\mathbf{I}})}{\partial \tau} + L_r(\tau, \hat{\mathbf{I}}) = \frac{\Lambda}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}') L_r(\tau, \hat{\mathbf{I}}') d\hat{\mathbf{I}}' + \Delta(\tau, \hat{\mathbf{I}}); \\ L_r(\tau, \hat{\mathbf{I}}) \Big|_{\tau=0, \mu>0} = 0; \quad L_r(\tau, \hat{\mathbf{I}}) \Big|_{\tau=\tau_0, \mu<0} = -L_a(\tau, \hat{\mathbf{I}}), \end{cases} \quad (3)$$

где функция источников определяется анизотропной частью решения

$$\Delta(\tau, \hat{\mathbf{I}}) = -\mu \frac{dL_a(\tau, \hat{\mathbf{I}})}{d\tau} - L_a(\tau, \hat{\mathbf{I}}) + \frac{\Lambda}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}') L_a(\tau, \hat{\mathbf{I}}') d\hat{\mathbf{I}}'. \quad (4)$$

Изменение второго граничного условия связано с тем, что неочевидно, что приближенное решение $L_a(\tau, \hat{\mathbf{I}})$ будет удовлетворять точным граничным условиям.

Поскольку $L_r(\tau, \hat{\mathbf{I}})$ гладкая функция, то ее представление возможно по конечному базису. Например, если для дискретизации УПИ используется метод дискретных ординат (МДО) то такое представление будет иметь вид:

$$\vec{L}_r(\tau, \mu_i^\pm, \varphi) = \sum_{m=0}^M (2 - \delta_{0,m}) \cos(m\varphi) \vec{C}^m(\tau, \mu_i^\pm), \quad \vec{C}_\pm(\tau) \equiv \vec{C}^m(\tau, \mu_i^\pm), \quad (5)$$

где $\vec{C}(\tau) \equiv [\vec{C}_-(\tau), \vec{C}_+(\tau)]^T$ – вектор-столбец дискретных значений по азимуту коэффициентов разложение яркости в ряд Фурье по азимуту, $\mu_j^\pm = 0.5(\zeta_j \pm 1)$, ζ_j – нули гауссовой квадратуры порядка $N/2$ для дискретизации интеграла рассеяния по зенитному углу. Из-за очевидности верхний индекс m далее везде опускаем.

Это позволяет заменить интеграл рассеяния конечной суммой, а краевая задача (3) преобразуется в краевую задачу для матричного неоднородного линейного дифференциального уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами [1]:

$$\frac{d\vec{C}(\tau)}{d\tau} = -\vec{B}\vec{C}(\tau) + \vec{M}^{-1}\vec{\Delta}(\tau), \quad \vec{B} \equiv \vec{M}^{-1}(\vec{I} - \vec{A}\vec{W}), \quad (6)$$

где $\vec{W} \equiv \frac{\Lambda}{4} \begin{bmatrix} w_i & 0 \\ 0 & w_i \end{bmatrix}$, $\vec{M} \equiv \begin{bmatrix} \mu_i^- & 0 \\ 0 & \mu_i^+ \end{bmatrix}$, $\vec{A} \equiv \sum_{k=0}^K (2k+1) P_k^m(\mu_i^\pm) x_k P_k^m(\mu_j^\pm)$, $x(\gamma) = \sum_{k=0}^K (2k+1) x_k P_k(\cos \gamma)$,

w_j – веса гауссовой квадратуры порядка $N/2$ по зенитному углу, $P_l^m(\mu)$ – присоединенные полиномы Лежандра, причем $P_l^0(\mu) \equiv P_l(\mu)$ – полиномы Лежандра.

Решение в форме рассеивателей

Решение матричного уравнения (6) представимо в виде [1] суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного:

$$-\vec{C}(0) + \vec{P}(0, \tau_0) \vec{C}(\tau_0) = \int_0^{\tau_0} \vec{P}(0, \tau) \vec{M}^{-1} \vec{\Delta}(\tau, \mu_0) d\tau, \quad (7)$$

где функция

$$\vec{P}(t, \tau) \equiv e^{\vec{B}(\tau-t)} \quad (8)$$

есть решение однородного уравнения, описывающее связь распределений яркости в двух точках t и τ среды без внутренних источников – пропагатор.

Проблемы расчетов по полученному решению (7) связаны с наличием в пропагаторе (8) как отрицательных, так и положительных экспонент, что физически соответствует потокам, распространяющимся сверху-вниз и снизу-вверх, и приводит к быстрому ухудшению обусловленности матрицы и делает невозможным расчеты для световых полей для оптических толщ $\tau > 1$. Для устранения этого эффекта используется масштабное преобразование [1]:

$$-\vec{S} \vec{U}^{-1} \vec{C}(0) + \vec{H} \vec{U}^{-1} \vec{C}(\tau_0) = \vec{J}, \quad \vec{J} \equiv \vec{S} \int_0^{\tau_0} e^{\vec{F}t} \vec{U}^{-1} \vec{M}^{-1} \vec{\Delta}(t) dt, \quad (9)$$

где матричная экспонента представляется в виде [1]

$$e^{\vec{B}\tau_0} = \vec{U} e^{\vec{F}\tau_0} \vec{U}^{-1}, \quad (10)$$

\vec{U} – матрица собственных векторов матрицы \vec{B} ; $\vec{F} = \text{diag}(\vec{F}_-, \vec{F}_+)$ – диагональная матрица собственных значений, причем $\vec{F}_- = -\vec{F}_+$; $\vec{U}^{-1} \equiv \begin{bmatrix} \vec{u}_{11} & \vec{u}_{12} \\ \vec{u}_{21} & \vec{u}_{22} \end{bmatrix}$, $\vec{S} = \begin{bmatrix} \vec{1} & 0 \\ 0 & e^{-\vec{F}_+\tau_0} \end{bmatrix}$, $\vec{H} = \begin{bmatrix} e^{\vec{F}_-\tau_0} & 0 \\ 0 & \vec{1} \end{bmatrix}$.

Вектор-столбцы $\vec{C}_+(0)$, $\vec{C}_-(\tau_0)$ в выражении (9) описывают потоки излучения, падающего на слой и определяются граничными условиями. Векторы $\vec{C}_-(0)$, $\vec{C}_+(\tau_0)$ соответствуют потокам отраженного и прошедшего слой излучения. Разрешим уравнение (9) относительно потоков, выходящих из слоя, и получим решение в форме рассеивателей:

$$\begin{bmatrix} \vec{C}_-(0) \\ \vec{C}_+(\tau_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{F}_- \\ \vec{F}_+ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{R} & \vec{T} \\ \vec{T} & \vec{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{C}_+(0) \\ \vec{C}_-(\tau_0) \end{bmatrix}, \quad (11)$$

где $\begin{bmatrix} \vec{F}_- \\ \vec{F}_+ \end{bmatrix} = \vec{h} \vec{J}$, $\begin{bmatrix} \vec{R} & \vec{T} \\ \vec{T} & \vec{R} \end{bmatrix} = \vec{h} \begin{bmatrix} \vec{u}_{12} & -e^{\vec{F}_-\tau_0} \vec{u}_{11} \\ e^{-\vec{F}_+\tau_0} \vec{u}_{22} & -\vec{u}_{21} \end{bmatrix}$, $\vec{h} \equiv \begin{bmatrix} -\vec{u}_{11} & e^{\vec{F}_-\tau_0} \vec{u}_{12} \\ -e^{-\vec{F}_+\tau_0} \vec{u}_{21} & \vec{u}_{22} \end{bmatrix}^{-1}$.

Выражение в форме рассеивателей (11) дает связь выходящих из слоя потоков с падающими и представляет собой обобщение коэффициента яркости. При этом столбец \vec{F} описывает собственное излучение слоя, а матрицы \vec{R} и \vec{T} представляют дискретные значения коэффициентов яркости по отражению и пропусканию.

Из проведенного анализа видно, что дискретизация УПИ любым другим методом обязательно приводит к одному и тому же дискретному УПИ для слоя (6). Это уравнение имеет одно единственное решение либо через пропагатор (9), либо в эквивалентной форме рассеивателей (11). Это наглядно показало численное сравнение различных алгоритмов [3]: все решения совпали с машинной точностью, что говорит о том, что речь шла о сравнении одного и того же решения, но различными алгоритмами. Отличия составлял только метод выделения анизотропного решения.

Регулярная часть решения

Сложность расчетов по полученному матричному уравнению (11) определяется размерами входящих в нее матриц, которые зависят от трех целых констант – N , M , K : N – количества дискретных ординат, M – количества азимутальных гармоник, K – количество членов разложения индикатрисы по полиномам Лежандра.

В общем случае произвольного угла падения все эти три величины приблизительно равны: $M \approx N \approx K$. Однако при удачном выборе анизотропной части можно добиться, что угловая зависимость РЧР будет близка изотропной. В этом случае

$$K \gg N \gg M,$$

что существенно ускоряет решение.

Сравнение показало [3], что выделение особенностей на основе МСГ наилучшим образом описывает анизотропную часть решения и ускоряет алгоритм вычисления более, чем на два порядка. На рис. 1 показано сравнение расчетов углового распределения яркости излучения, отраженного слоем для различных наборов параметров N и M . На всех рисунках угол визирования отсчитывается от оси OZ . Нетрудно видеть, что расчет практически полного распределения по углу существенно быстрее, чем расчет отдельных мелких острых пиков. Разница во времени расчета Δt более чем в 150 раз. Почему так?

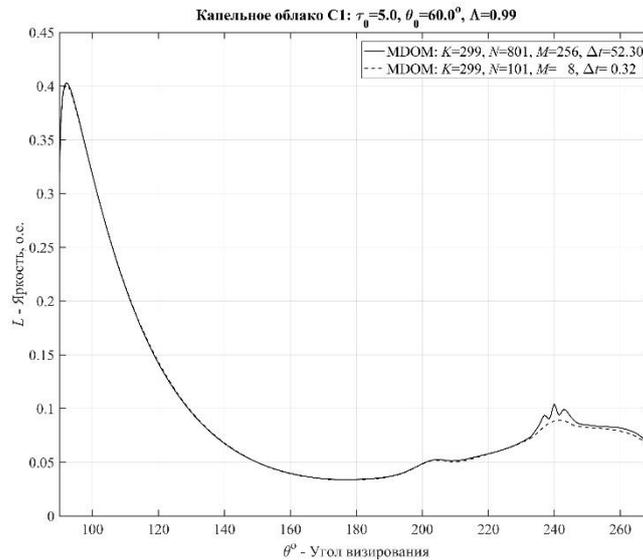


Рис.1. Сравнение угловых распределений яркости отраженного излучения. Направление в надир = 180°: сплошная кривая: $N=801$, $K=299$, $M=256$, $\Delta t=52.3$ с; пунктирная кривая: $N=101$, $K=299$, $M=8$, $\Delta t=0.32$ с

Угловое распределение РЧР действительно близко к изотропному, но с некоторой мелкой рябью. Резонный вопрос: сколько дискретных ординат N необходимо для представления этой мелкой ряби? Поскольку РЧР является гладкой функцией, то ее разложение в ряд по полиномам Лежандра имеет конечное число членов N :

$$L_m(\tau, \mu) = \sum_{k=1}^N \frac{2k+1}{2} L_k^m P_k(\mu). \quad (12)$$

Все полиномы Лежандра порядка менее N точно выражаются через полином $N+1$ порядка:

$$P_k(\mu) = \sum_{i=1}^{N+1} P_k(\mu_i) \frac{P_{N+1}(\mu)}{(\mu - \mu_i) P'_{N+1}(\mu_i)}, \quad (13)$$

где μ_i корни полинома $P_{N+1}(\mu)$.

Соответственно, это приводит к выражению

$$L_m(\tau, \mu) = \sum_{i=1}^{N+1} \frac{P_{N+1}(\mu)}{(\mu - \mu_i) P'_{N+1}(\mu_i)} \sum_{k=0}^N \frac{2k+1}{2} L_k^m P_k(\mu_i) = \sum_{i=1}^{N+1} L_m(\tau, \mu_i) \frac{P_{N+1}(\mu)}{(\mu - \mu_i) P'_{N+1}(\mu_i)}, \quad (14)$$

что соответствует интерполяционной формуле Лагранжа для функции $L(\tau, \mu)$.

Эти соотношения являются аналогом теоремы Котельникова о выборках для углового спектра углового распределения по полиномам Лежандра. Следовательно,

1. MDOM обеспечивает сходимость в среднем.
2. Все методы выделения анизотропной части эквивалентны друг другу в равномерной метрике.
3. Для достижения хорошей сходимости в равномерной метрике интервал дискретизации должен соответствовать угловому размеру самой мелкой детали, которая должна быть воспроизведена на распределении яркости.

Инвариантность решения

Достоинством (11) является возможность перехода к неоднородному по высоте, стратифицированному слою, разбивая его на произвольное количество однородных слоев. При этом два смежных слоя можно заменить одним слоем, описываемым выражением эквивалентным по форме (11), но с эффективными параметрами, выражающимися через параметры слоев. Тем самым перенос излучения через слой обладает свойством инвариантности [4], а элементы матрицы объединенного слоя определяются при помощи матрично-операторного метода [5] (MOM).

Рассмотрим случай двухслойной среды из двух смежных слоев

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_-^1 \\ \bar{C}_+^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_-^1 \\ \bar{F}_+^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{R}_{1-} & \bar{T}_{1-} \\ \bar{T}_{1+} & \bar{R}_{1+} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{C}_\downarrow^1 \\ \bar{C}_\uparrow^1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \bar{C}_-^2 \\ \bar{C}_+^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_-^2 \\ \bar{F}_+^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{R}_{2-} & \bar{T}_{2-} \\ \bar{T}_{2+} & \bar{R}_{2+} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{C}_\downarrow^2 \\ \bar{C}_\uparrow^2 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

где нижний индекс определяет принадлежность верхнему l или нижнему слою 2 . Вертикальными стрелками обозначено падающее сверху или снизу на слой излучение.

Отметим, что поскольку слои соприкасаются друг с другом, то

$$\bar{C}_+^1 = \bar{C}_\downarrow^2 \equiv \bar{C}_\downarrow, \quad \bar{C}_-^2 = \bar{C}_\uparrow^1 \equiv \bar{C}_\uparrow. \quad (16)$$

Разрешая полученную систему относительно отраженного \bar{C}_-^1 и прошедшего \bar{C}_+^2 излучений относительно падающего на систему излучения \bar{C}_\downarrow^1 и \bar{C}_\uparrow^2 , получим:

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_-^1 \\ \bar{C}_+^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_-^1 + \bar{T}_{1-} \bar{\alpha} (\bar{R}_{2-} \bar{F}_+^1 + \bar{F}_-^2) \\ \bar{T}_{2+} \bar{\alpha} (\bar{F}_+^1 + \bar{R}_{1+} \bar{F}_-^2) + \bar{F}_+^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{R}_{1-} + \bar{T}_{1-} \bar{\alpha} \bar{R}_{2-} \bar{T}_{1+} & \bar{T}_{1-} \bar{\alpha} \bar{T}_{2-} \\ \bar{T}_{2+} \bar{\alpha} \bar{T}_{1+} & \bar{R}_{2+} + \bar{T}_{2+} \bar{\alpha} \bar{R}_{1+} \bar{T}_{2-} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{C}_\downarrow^1 \\ \bar{C}_\uparrow^2 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

где $\bar{\alpha} = (\bar{I} - \bar{R}_{2-} \bar{R}_{1+})^{-1}$.

Учет отражения и преломления на границе двух сред

Рассмотрим предварительно важный частный случай слоя, облучаемого плоским мононаправленным источником, с диффузно отражающей подложкой с коэффициентом отражения ρ . В этом случае нижнее граничное условие в (1) имеет вид:

$$L(\tau_0, \hat{\mathbf{l}}) \Big|_{\mu < 0} = \frac{\rho}{\pi} \int_{(\mu > 0)} L(\tau_0, \hat{\mathbf{l}}') \mu d\hat{\mathbf{l}}'. \quad (18)$$

Если подставить представление яркости через азимутальный ряд (5), а интеграл (18) выразить через гауссовы квадратуры, то получим в матричной форме

$$m = 0: \bar{C}_-(\tau_0) = 2\rho \bar{R}_L \bar{C}_+(\tau_0); \quad \forall m > 0: \bar{C}_-(\tau_0) = \bar{0}, \quad (19)$$

где матрица ламбертовского отражения \bar{R}_L состоит из $N/2$ одинаковых строк $\{\mu_j^+ w_j\}$.

В соответствии с MOM (17) получим для нулевой гармоники отраженной компоненты

$$\bar{C}_-(0) = \bar{F}_- + 2\rho \bar{T}_- (\bar{I} - 2\rho \bar{R}_L \bar{R})^{-1} \bar{R}_L \bar{F}_+, \quad (20)$$

где везде опущен очевидный индекс 1, относящийся к слою. Все остальные азимутальные гармоники $m > 0$ определяются выражением для однослойной среды (7).

Однако данный подход непосредственно не может быть применен на границе с преломлением, поскольку направления ординат («лучей») меняется на границе по закону Снеллиуса

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2, \quad (21)$$

где n_1, n_2 – показатели преломления среды, и нарушается соответствие направлений ординат. Решение данной проблемы было предложено в [6].

Рассмотрим подробнее преломление на практически важном случае, когда $n_1 < n_2$. Будем первую среду называть для определенности атмосфера (все, что относится к ней будем снабжать индексом a) и положим ее $n_a = 1$, а вторую – океан (индекс o) с $n_o > 1$. Косинусы лучей с осью OZ в обоих средах в соответствии с (21) будут связаны между собой

$$\mu_a = \sqrt{1 - n_o^2 (1 - \mu_o^2)}. \quad (22)$$

Из (22) видно, что для $\mu_o < \mu_t \equiv \sqrt{1 - 1/n_o^2}$ в океане возникает область полного внутреннего отражения (ПВО), когда лучи не выходят из океана, а идеально отражаются опять в океан. Для области total reflection формулировка граничных условий не представляет проблем. Рассмотрим в этих условиях интеграл рассеяния по зонам

$$\int_{-1}^1 Q_k^m(\mu') C^m(\tau, \mu') d\mu' = \int_{-1}^{-\mu_t} Q_k^m(\mu') C^m(\tau, \mu') d\mu' + \int_{-\mu_t}^{\mu_t} Q_k^m(\mu') C^m(\tau, \mu') d\mu' + \int_{\mu_t}^1 Q_k^m(\mu') C^m(\tau, \mu') d\mu'. \quad (23)$$

Первый и последний интегралы связаны с областью преломления, а второй относится к области ПВО. Для второго интеграла выполним преобразование

$$\int_{-\mu_t}^{\mu_t} Q_k^m(\mu') C^m(\tau, \mu') d\mu' = \int_{-1}^1 Q_k^m(\nu) C^m(\tau, \nu) d\nu, \quad \mu' = \mu_t \nu, \quad (24)$$

что позволяет применить двойную гауссову квадратуру с N_t узлами и впоследствии перейти в этой зоне к двум столбцам ординат: $\tilde{C}_+^t, \tilde{C}_-^t$, которые на границе связаны идеальным зеркальным отражением.

Для первого и последнего интегралов в (23) сделаем преобразование переменной интегрирования к μ_a по выражению (22)

$$\mu_o = \sqrt{1 - (1 - \mu_a^2)/n_o^2}, \quad d\mu_o = \mu_a d\mu_a / \sqrt{n_o^2 - (1 - \mu_a^2)}. \quad (25)$$

Нетрудно видеть, что при переходе к дискретным ординатам устанавливается полное соответствие между атмосферными ординатами $\tilde{C}_+^a, \tilde{C}_-^a$ и соответствующими океанскими $\tilde{C}_+^o, \tilde{C}_-^o$. Если ввести вектора $\tilde{C}_+^{ocn} = [\tilde{C}_+^t; \tilde{C}_+^o]$, $\tilde{C}_-^{ocn} = [\tilde{C}_-^t; \tilde{C}_-^o]$, где квадратные скобки обозначают объединение векторов в один суммарной размерности в соответствии с правилами системы Matlab, то для них будут справедливы все соотношения МОМ. Соответственно для введенных величин можно записать и условие на границе раздела атмосфера – океан:

$$\begin{bmatrix} \tilde{C}_-^a \\ \tilde{C}_+^{ocn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{R} & \tilde{T}_{ao} \\ \tilde{T}_{oa} & \tilde{R}_{oo} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{C}_+^a \\ \tilde{C}_-^{ocn} \end{bmatrix}, \quad \tilde{T}_{ao} \equiv [\tilde{T} \quad \tilde{0}], \quad \tilde{T}_{oa} \equiv \begin{bmatrix} \tilde{0} \\ \tilde{T} \end{bmatrix}, \quad \tilde{R}_{oo} \equiv \begin{bmatrix} \tilde{0} & \tilde{I} \\ \tilde{R} & \tilde{0} \end{bmatrix}, \quad (26)$$

где \tilde{R}, \tilde{T} – френелевские матрицы отражения.

Заключение

На основе построенной теории проведен анализ точности и границ применимости известных инженерных методов, основанных на двухпоточковом приближении и квазиоднократном.

Настоящая статья посвящается памяти нашего близкого друга и единомышленника Соколетского Л.Г.

Литература

1. Budak V.P., Klyuykov D.A., Korkin S.V. Convergence acceleration of radiative transfer equation solution at strongly anisotropic scattering // In Light Scattering Reviews 5. Single Light Scattering and Radiative Transfer / Ed. A.A. Kokhanovsky. Springer Praxis Books, 2010. P.147-204.
2. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. – М.: Наука, 1967.
3. Kokhanovsky A.A. et al. Benchmark results in vector atmospheric radiative transfer // JQSRT, 2010. V.111. P.1931-1946.
4. Stokes, G. G. On the intensity of the light reflected from or transmitted through a pile of plates // Proc. R. Soc. London, 1862. V.11. P.545-556.
5. Plass G.N., Kattawar G.W., Catchings F.E. Matrix operator theory of radiative transfer. 1: Rayleigh scattering // Appl. Opt. 1973. V.12. P.314-329.
6. Nakajima T., Tanaka M. Matrix formulations for the transfer of solar radiation in a plane-parallel scattering atmosphere // JQSRT, 1986. V.35, N.1. P.13-21