

Auslegung von Reibelementen zur Schwingungsdämpfung von Turbinenschaufeln

Von der Fakultät für Maschinenbau
der Universität Hannover
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor-Ingenieur
genehmigte

Dissertation

von
Dipl.-Ing. Lars Panning
geb. am 24. Dezember 1970 in Hannover

2005

1. Referent: Prof. Dr.-Ing. B. Heimann

2. Referent: Prof. Dr.-Ing. J. Seume

Tag der Promotion: 21. Juli 2005

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am heutigen Institut für Dynamik und Schwingungen, ehemals Institut für Mechanik, der Universität Hannover.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. Karl Popp, der meine Forschungstätigkeit über viele Jahre stets sehr interessiert begleitet und in jeder Hinsicht gefördert hat. Er verstarb nach schwerer Krankheit kurz vor der Fertigstellung dieser Arbeit. Seine herausragende fachliche Kompetenz und überaus menschliche Art, seine Energie und sein Engagement verdienen den höchsten Respekt und werden mir stets Vorbild sein.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Bodo Heimann danke ich für die freundliche Übernahme des ersten und Herrn Prof. Dr.-Ing. Jörg Seume für die Anfertigung des zweiten Referates. Herrn Prof. Dr.-Ing. Friedrich-Wilhelm Bach möchte ich für den Vorsitz der Prüfungskommission danken.

An dieser Stelle sei allen wissenschaftlichen und nicht-wissenschaftlichen Mitarbeitern des Instituts gedankt, die gemeinsam ein wohl einzigartiges Arbeitsklima geschaffen haben. Herrn Prof. Dr.-Ing. Walter Sextro gilt mein besonderer Dank für die über viele Jahre geführten ausgiebigen fachlichen Diskussionen. Ein großer Dank gebührt Herrn Dipl.-Ing. Christian Siewert für die stetige Diskussionsbereitschaft und die wertvollen Anregungen während des Korrekturlesens dieser Arbeit und darüber hinaus. Herrn Wolfgang Baldermann sei für die engagierte Durchführung der Messungen gedankt. Frau Angelika Crohn möchte ich für ihr stets offenes Ohr und ihre unermüdlichen Anstrengungen danken, mir die korrekte Erstellung einer Reisekostenabrechnung nahezubringen.

Praxisnahe Forschung erfordert in hohem Maße eine vertrauensvolle Zusammenarbeit mit engagierten Industriepartnern, die die Umsetzung der entwickelten Verfahren in die praktische Anwendung fördern und kritisch begleiten. Die aus vielen Diskussionen hervorgegangenen Ideen und Anregungen sind von unschätzbarem Wert auch für diese Arbeit. Hierfür und letztlich auch für die Möglichkeit der Veröffentlichung einiger in den verschiedenen Projekten gewonnenen Erkenntnisse möchte ich mich insbesondere bei den Herren Dr.-Ing. Roland Parchem und Peter Davison (Rolls-Royce Deutschland Ltd & Co KG, Blankenfelde-Mahlow) und den Herren Dr.-Ing. Andreas Kayser und Dr.-Ing. Ivo Wolter (Siemens AG Power Generation, Mülheim an der Ruhr) bedanken. Den beteiligten Unternehmen sowie dem ehemaligem Bundesministerium für Wirtschaft (BMWi) sei für die finanzielle Förderung gedankt.

Meinen Eltern Klaus und Heidemarie gilt mein besonderer Dank für ihr Vertrauen und ihre Geduld. Mein abschließender Dank gilt meiner Freundin Kristina für ihr Verständnis, ihre Aufmunterung und dafür, dass sie sich wacker durch diese Arbeit gekämpft hat. Danke für alles!

Schreiben ist hart. Man kommt nur schwer dahinter, wann man aufhören muss.

SIR PETER USTINOV (*1921, †2004)

Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Prof. E.h. Karl Popp (*1942, †2005) gewidmet.

Inhalt

Formelzeichen	VIII
Kurzfassung	XII
Abstract	XIII
1 Einleitung	1
1.1 Problemstellung	1
1.2 Stand des Wissens	3
1.2.1 Schaufel-Scheibe-Dynamik	3
1.2.1.1 Mistuning	4
1.2.1.2 Kondensation und Substrukturtechnik	5
1.2.2 Koppelemente	9
1.2.2.1 Allgemeine Untersuchungen zu Reibelementen	9
1.2.2.2 Zylinderförmige Reibelemente	11
1.2.2.3 Keilförmige Reibelemente	12
1.2.2.4 Asymmetrische Reibelemente	14
1.2.2.5 Geteiltes Deckband	14
1.2.2.6 Weitere Koppelemente	16
1.2.2.7 Verstimmte Beschaukelungen mit Koppelementen	16
1.2.3 Kontaktformulierung	18
1.3 Inhalt und Ziel dieser Arbeit	24
2 Modellbildung	27
2.1 Dynamische Beschreibung der Teilstrukturen	27
2.1.1 Koordinatensysteme	27
2.1.2 Eingespannte Schaufel	32
2.1.3 Zyklisches Schaufel-Scheibe-Segment	35
2.1.4 Verstimmte beschaukelte Scheibe	39
2.1.5 Reibelement	49
2.2 Modellierung der Erregung	51
2.2.1 Erregungsmechanismen	51
2.2.2 Mathematische Beschreibung der Erregerkräfte	53
2.3 Kontaktmodell	58

2.3.1	Diskretisierung	59
2.3.2	Punktkontaktmodell	61
2.3.2.1	Normalkontakt	61
2.3.2.2	Tangentialkontakt	72
2.3.3	Generalisierte Kontaktkräfte	82
2.4	Entwicklung und Lösung der Systemgleichung	83
2.4.1	Allgemeiner Fall	84
2.4.2	Sonderfälle	87
2.4.2.1	Entkoppelte Schaufeln	87
2.4.2.2	Unverstimmtes zyklisches System	88
2.4.2.3	Verstimmte beschaufelte Scheibe	91
2.4.2.4	Deckbandkopplung	92
2.4.2.5	Kettenstruktur	93
2.4.3	Lösung der Systemgleichung	93
2.5	Programmtechnische Umsetzung	98
2.6	Ermittlung der Modellparameter	100
2.6.1	Modale Parameter	100
2.6.2	Kontaktparameter	102
2.6.2.1	Nominelle Kontaktfläche	102
2.6.2.2	Reibkoeffizient	103
2.6.2.3	Rauheit	104
2.6.2.4	Kontaktsteifigkeiten	105
2.7	Abschließende Anmerkungen zur Modellbildung	109
3	Auslegung und Optimierung von Reibelementen	112
3.1	Definition des Referenzsystems	112
3.2	Parameterstudien	114
3.2.1	Einfluss der Reibelementeigenschaften	115
3.2.1.1	Optimierung der Reibelementmasse	115
3.2.1.2	Kontaktflächengeometrie	120
3.2.1.3	Reibelementelastizität	121
3.2.1.4	Reibelementträgheit	123
3.2.2	Variation der Kontakteigenschaften	124
3.2.2.1	Reibkoeffizient	124
3.2.2.2	Kontaktsteifigkeiten	125
3.2.2.3	Normalkraftverteilung	127
3.2.2.4	Rauheit	128
3.2.3	Einfluss der Schaufelgeometrie	129
3.2.3.1	Kopplungsort	129
3.2.3.2	Kontaktwinkel	134
3.2.4	Veränderte Betriebsbedingungen: Der Einfluss der Erregung	136
3.2.4.1	Erregerordnung	137
3.2.4.2	Erregerkraftamplitude (Stimulus)	141

3.3	Einfluss auf höhere Schwingungsformen	143
3.4	Resultate für den verstimmten Schaufelkranz	145
3.4.1	Frequenzverstimmung	146
3.4.2	Verstimmung der Kontakt- und Dämpferparameter	147
3.4.3	Bewusste Verstimmung	148
3.5	Deckbandkopplung	150
3.6	Konzept zur praktischen Auslegung	151
3.6.1	Schwingungsverhalten des linearen Systems	151
3.6.2	Optimierung und Analyse des Reibelements	156
3.6.2.1	Analyse der Gleichgewichtslage des Reibelements	156
3.6.2.2	Energiedissipation	159
3.6.3	Lineare Spannungsanalyse	161
3.7	Vergleichende Bewertung verschiedener Koppellemente	163
4	Anwendungsbeispiele	165
4.1	Modellschaufelpaar	165
4.2	Hochdruck-Laufschaufel eines Flugtriebwerkes	169
4.3	Laufschauflern stationärer Gasturbinen	171
4.3.1	Beispiel I: Laufschaufel V84.2-T1a2	172
4.3.2	Beispiel II: Laufschaufel V94.3A(2)-T1a4	173
4.3.3	Beispiel III: Laufschaufel V64.3A-T1a3	175
5	Zusammenfassung	177
A	Mathematische Grundlagen	181
A.1	Tilde-Operator	181
A.2	FOURIER-Reihenentwicklung	181
A.3	Harmonische Balance	182
B	Eigenwertanalyse zyklischer Systeme	183
B.1	Das KRONECKER-Produkt	183
B.2	Komplexe FOURIER-Matrix	183
B.3	Zyklische Matrizen	185
B.4	Block-zyklische Matrizen	186
B.5	Lösung des Eigenwertproblems für zyklische mechanische Systeme	189
B.6	Effiziente Eigenwertberechnung	192
C	Besetzung der modalen Systemkontaktsteifigkeitsmatrix	195
D	Modale Parameter des Referenzmodells	196
	Literatur	198

Formelzeichen

Selten benutzte Formelzeichen und Begriffe sowie abweichende Bedeutungen werden ausschließlich im Text erläutert. Vektorielle Größen werden im Allgemeinen durch fette Kleinbuchstaben, matrizielle Größen durch fette Großbuchstaben gekennzeichnet. Die Elemente einer als Vektor oder Matrix im Fettdruck definierten Größe treten im Text auch als skalare Größen auf und werden im Formelverzeichnis nicht redundant aufgeführt.

Lateinische Notation

A	Fläche
D	Dämpfungsgrad
e	EULER'sche Zahl
E	Elastizitätsmodul
EO	Erregerordnung
f	Frequenz
F	Kraft
h	Höhe
i	imaginäre Einheit
i, j, k, m, n	Zähler
J	Massenträgheitsmoment
k, \tilde{k}	Steifigkeit, spezifische Steifigkeit
ℓ	Länge
m	Masse
M	Moment
M_r	Materialanteil
n	Anzahl
ND	Knotendurchmesser
OL, OR	Kontaktreferenzpunkte Fußplatte links und rechts
OL', OR'	Kontaktreferenzpunkte Reibelement links und rechts
p	Flächenpressung
P	diskreter Kontaktpunkt
r	Abstand
R	Radius
R_0	Rauheitsparameter

R_a	arithmetischer Mittenrauwert
s	Stimulus
t	Zeit
T	Periodendauer
W	Energie
x, y, z	kartesische Koordinaten

Griechische Notation

α	Dämpferwinkel
β	Anstellwinkel
γ	Kontaktwinkel
δ	Teilungswinkel
$\Delta\varphi$	Phasenwinkel Erregung
$\widetilde{\Delta\varphi}$	Phasenwinkel Schwingungsform
ε	Fehler
ϑ	halber Öffnungswinkel Reibkegel
κ	Verstimmungsfaktor; Verhältnis
λ, Λ	Eigenwert
μ	Reibkoeffizient
ξ, η, ζ	Kontaktkoordinaten
$\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\zeta}$	Kontaktkoordinaten im Ellipsensystem
σ	Standardabweichung
τ	dimensionslose Zeit
φ	Winkelposition auf der Scheibe; Verdrehung
ψ	Phasenwinkel
ω	Eigenkreisfrequenz
Ω	Kreisfrequenz

Vektoren und Matrizen

${}^{12}A$	Transformationsmatrix zwischen den Koordinatensystemen 1 und 2
A	Systemmatrix
D	viskose Dämpfungsmatrix
E	Einheitsmatrix
f	Kraftvektor
G	Geometrie-/Transformationsmatrix
K	Steifigkeitsmatrix
L	untere Dreiecksmatrix
M	Massenmatrix
q	Vektor der modalen Amplituden
S	dynamische Steifigkeitsmatrix

T	Transformationsmatrix
u	Verschiebungsvektor
w	Vektor der Relativverschiebungen
Λ	Spektralmatrix
φ, ψ	Eigenform/-vektor
Φ, Ψ	Modalmatrix
\mathcal{D}	modale viskose Dämpfungsmatrix
\mathcal{F}	modaler Kraftvektor
\mathcal{K}	modale Steifigkeitsmatrix
\mathcal{M}	modale Massenmatrix
\mathcal{S}	modale dynamische Steifigkeitsmatrix

Indices und weitere Formelzeichen

$\hat{(\)}$	komplexe Größe
$(\)^*$	normierte, dimensionslose Größe; konjugiert komplexe Größe
$(\)^*$	reelle Form komplexer Größen
$(\dot{\ }), (\ddot{\ })$	erste und zweite Ableitung nach der Zeit
$(\bar{\ })$	Mittelwert; statischer Wert
${}_D(\)$	Dämpferkoordinatensystem
${}_{KL}(\)$	Kontaktkoordinatensystem links
${}_{KR}(\)$	Kontaktkoordinatensystem rechts
${}_R(\)$	scheibenfestes Zwischensystem
${}_{SL}(\)$	Schaufelkoordinatensystem links
${}_{SR}(\)$	Schaufelkoordinatensystem rechts
$^{(0)}(\)$	Bezugsschaufel; unverstimmt
$^{(k)}(\)$	Schaufel (k) , Reibelement (k) , Kontakt (k)
$(\)^T$	transponierte Matrix
$(\)^H$	konjugiert komplex (hermitesch) transponierte Matrix
$(\)^{-1}$	inverse Matrix
$(\)_0$	Nominalwert
$(\)_C$	Schwerpunkt
$(\)_D$	Dämpfer
$(\)_{Dis}$	Diskretisierung
$(\)_E$	Erregung
$(\)_{FEM}$	Finite-Element-Methode
$(\)_{FHG}$	Freiheitsgrade
$(\)_G$	Gesamtsystem
$(\)_{gen}$	generalisiert

$()_K$	Kontakt
$()_L$	links
$()_{\max}$	Maximalwert
$()_M$	Schwingungsmode; Mittelpunkt
$()_N$	Normalenrichtung; Knoten
$()_{OL,OR}$	linker/rechter Kontaktpunkt Fußplatte
$()_{OL',OR'}$	linker/rechter Kontaktpunkt Reibelement
$()_P$	Punktkontakt; Oberflächenprofil
$()_R$	rechts; Rotation; Reibelement
$()_{\text{red}}$	reduziert
$()_{\text{Res}}$	Residuum; Resonanz
$()_S$	Schaufel
$()_{\text{Seg}}$	Segment
$()_T$	Tangentialrichtung
$()_{\text{ue}}$	übrig
$()_w$	wesentlich
$\text{Re}\{ \}$	Realteil
$\text{Im}\{ \}$	Imaginärteil

Kurzfassung

Die Laufschaufeln von Turbomaschinen sind im Betrieb hohen thermischen und mechanischen Belastungen ausgesetzt. Neben quasistatischen Fliehkräften wirken auf die Schaufeln aufgrund inhomogener Strömungsverhältnisse zusätzliche dynamische Kräfte. Der Amplitudenreduktion der so angeregten Schaufelschwingungen kommt in der Praxis große Bedeutung zu, sodass konstruktive Maßnahmen ergriffen werden, um die Dämpfung zu erhöhen und somit die Schwingungsamplituden zu reduzieren. Zu diesem Zweck kommen häufig so genannte Reibelemente zum Einsatz, die zusätzliche Reibkontakte schaffen, in denen kinetische Energie in Wärmeenergie gewandelt wird.

In dieser Arbeit wird ein Modell entwickelt, das es erlaubt, das Schwingungsverhalten verstimmter und unverstimmter beschauelter Scheiben unter Verwendung nahezu beliebiger in der Praxis eingesetzter Reibelementbauformen zu untersuchen. Zu diesem Zweck wird die Dynamik der beteiligten Strukturen wie der beschauelten Scheibe und der Reibelemente in modalen Koordinaten beschrieben. Im Fall des unverstimmten Systems werden zur Reduktion der Anzahl Freiheitsgrade zyklische Randbedingungen genutzt. Die verstimmte Beschauelung wird mit Hilfe der Ansatzfunktionen des unverstimmten Systems modal beschrieben. Zur Berechnung der Kontaktkräfte zwischen Reibelement und Schaufel kommt ein dreidimensionales Kontaktmodell zum Einsatz. Dieses ermöglicht aufgrund einer Diskretisierung der Kontaktzone die Berechnung von verteilten Kräften in normaler wie in beiden tangentialen Richtungen. Um eine zeitintensive Berechnung im Zeitbereich zu umgehen, wird mit Hilfe der Harmonischen Balance nur die Grundharmonische der nichtlinearen Kontaktkräfte betrachtet. Somit lässt sich die Gesamtgleichung mit Hilfe amplitudenabhängiger Kontaktsteifigkeiten sehr effizient im Frequenzbereich lösen, um detaillierte Parameterstudien zur Schaufelauslegung zu ermöglichen.

Die systematische Untersuchung verschiedener Einflussparameter zeigt den großen Einfluss der geometrischen Gestaltung der Kontaktflächen auf die zu erwartende Dämpfungswirkung und die Verschiebung der Resonanzfrequenz. Hierbei wird im Hinblick auf eine möglichst resonanzfreie Schaufelauslegung deutlich, dass asymmetrische und keilförmige Reibelemente mit flächigen Kontakten aufgrund der eingebrachten Drehsteifigkeit im Vergleich zu zylinderförmigen Reibelementen zu größeren Resonanzfrequenzen führen. Gleichzeitig kann es bei flächigen Kontakten aufgrund von Relativverdrehungen zu einem zeitweiligen Kontaktverlust kommen, der sich nachteilig auf das Schwingungsverhalten auswirkt. Diese Simulationsergebnisse werden sowohl qualitativ als auch quantitativ durch Messungen an real ausgeführten Gasturbinenbeschauelungen bestätigt.

Schlagwörter: Turbinenschaufel, Schaufelschwingung, Reibelement

Abstract

The rotating blades of turbomachinery applications such as turbines and compressors are subjected to high thermal and mechanical loads. Beside the centrifugal forces, additional dynamic forces are acting on the blades due to a non-homogeneous pressure field of the fluid. The reduction of the resulting blade vibrations is one of the main tasks during the structural blade design process. To decrease vibration amplitudes, additional damping is introduced by frictional contacts between the blade platforms and so-called underplatform dampers.

Within this work, a model is developed to calculate the forced response of both tuned and mistuned bladed disks under consideration of almost arbitrary underplatform damper geometries that are applied to turbomachinery bladings in practice. Therefore, the bladed disk as well as the underplatform damper dynamics is described in the modal domain. In the case of the tuned system, cyclic boundary conditions are applied. The mistuned disk is also transformed into the modal domain by the mode shapes of the tuned system. To calculate the contact forces acting between the blades and the dampers, a three-dimensional contact model is applied that is based on a discretization of the contact area into several point contacts to consider distributed contact forces. Each point contact comprises the calculation of normal as well as two tangential contact forces. To avoid a time-consuming calculation of the nonlinear contact forces, the Harmonic Balance Method is applied, limited to the consideration of the fundamental harmonic. This allows a very efficient calculation of the system dynamics in the frequency domain by using amplitude dependent complex contact stiffnesses. As a consequence, detailed parameter variations can be carried out.

The systematic study of parameter variations shows a significant influence of the damper geometry on the overall vibrational behaviour with respect to the achievable amplitude reduction and the shift of the resonance frequency. With regard to the avoidance of resonances with multiples of the rotational speed, it becomes evident that asymmetrical and wedge shaped underplatform dampers with plane contacts cause a bigger frequency shift if compared with cylindrical dampers with line contacts. Furthermore, a partial separation of the contact areas can occur due to a rotation of the contact areas with respect to the blade platforms, resulting in a decreasing damping effect. These simulation results have been confirmed qualitatively and quantitatively by experimental tests at simple non-rotating model blades as well as real gas turbine bladings.

Keywords: Turbine blade, blade vibration, friction damper

1 Einleitung

1.1 Problemstellung

Die Laufschaufeln von Turbomaschinen wie Verdichtern und Turbinen stellen thermomechanisch hochbelastete Strukturen dar. Im Zuge der Forderung nach einer stetigen Erhöhung des aerodynamischen Wirkungsgrades wird eine Beschau felung häufig in Grenzbe reichen ihrer mechanischen Belastbarkeit betrieben.

Neben den insbesondere in den ersten Laufschaufelreihen einer Gasturbine auftretenden thermischen Belastungen treten sowohl in einer Gas- als auch in einer Dampfturbine mechanische Beanspruchungen auf. Diese setzen sich aus den zum Teil enormen Fliehkräf ten und aus fluktuierenden, auf die Beschau felung wirkenden Fluidkräften zusammen, die z. B. von einem inhomogenen Strömungsfeld nach der vorgeschalteten Leitbeschau fe lung verursacht werden, siehe **Bild 1.1**.

Die aus dieser Anregung resultierenden Schwingungsamplituden ziehen Wechselspan nungen im Schaufelmaterial nach sich, die in Verbindung mit statischen und thermischen Spannungen aufgrund ungleichmäßiger Temperaturverteilung ein Belastungskollektiv bilden, das die Dauerwechselfestigkeit und letztlich die Lebensdauer bestimmt. Insbeson dere im Resonanzfall, wenn eine Erregerfrequenz einer Eigenfrequenz der Beschau felung entspricht, können die auftretenden Spannungen zulässige Materialwerte entweder kurzfristig oder dauerhaft überschreiten, sodass es zur schwingungsinduzierten Rissbildung und im Extremfall zum Schaufelbruch kommen kann, siehe **Bild 1.2**.

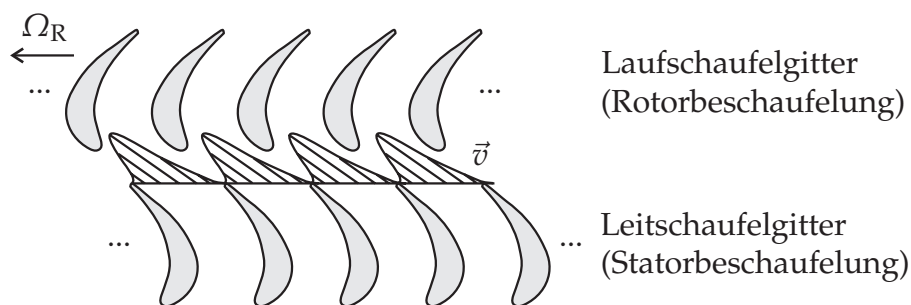


Bild 1.1: Schwingungsanregung von Laufschaufeln durch inhomogenes Strömungsfeld nach einem Leitschaufelgitter

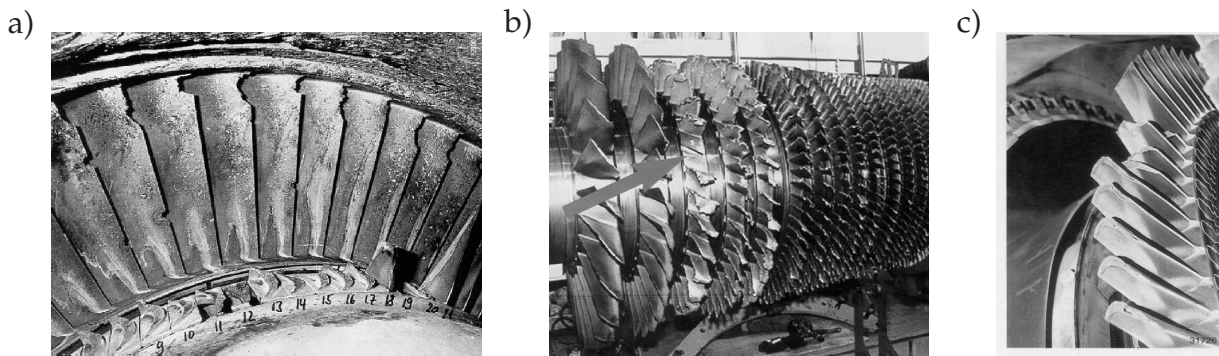


Bild 1.2: Schaufelschäden durch Schwingungsbrüche: a) Schaufelbruch infolge Schwingungsanriss nach dem Versagen von Reibelementen, aus [46]; b) beschädigte Verdichterbeschaukelung nach Schwingungsanregung, aus [177]; c) Folgeschaden in der ersten Laufschaufelreihe nach einem Schwingungsbruch, aus [176]

Einer von MÜLLER UND VALK [112] vorgenommenen Analyse von Gasturbinenschäden der 90er Jahre zufolge entfallen je nach Leistungsklasse zwischen 63 und 85% der Schadenbehebungskosten auf die Komponenten Verdichter und Turbine. Eine ähnliche Untersuchung der Schadensfälle an Gasturbinen von 1992-1997 führt nach STOIBER UND ELSNER [162] auf einen Anteil von 39% an den gesamten Schadenbehebungskosten, der auf die Beschaukelung von Turbine und Verdichter zurückzuführen ist. Hinsichtlich der Schadensursache stellen auf Schwingungen und Laufunruhe zurückzuführende Schadensfälle einen wesentlichen Anteil dar. Für den gleichen Zeitraum analysieren VALK UND WEISSER [170] u. a. Schadensfälle an Dampfturbinen und stellen fest, dass ein Anteil von 60% aller Schadenskosten auf den Rotor und hiervon wiederum mit 54% der überwiegende Anteil auf die Komponente der Laufschaufel entfallen.

Jede Maßnahme zur Reduzierung der Schaufelschwingungsamplituden - insbesondere im Resonanzfall - führt somit zu einer Minderung der Wartungs- und Reparaturkosten sowie der Ausfall- und Stillstandzeiten, die etwa im Fall eines zur Abdeckung der Grundlast im Energieerzeugungssektor eingesetzten Turbosatzes erhebliche Kosten nach sich ziehen können. Zum anderen wird dem Konstrukteur ein größerer Spielraum für Maßnahmen zur Steigerung des Wirkungsgrades und der insbesondere im Fluggasturbinenbau bedeutsamen Gewichtseinsparung eingeräumt.

Wird eine Beschaukelung zeitweilig oder dauerhaft nahe einer ihrer Resonanzfrequenzen betrieben, kommt der vorhandenen Dämpfung eine entscheidende Bedeutung zu. Neben der Materialdämpfung, der aerodynamischen Dämpfung und der Einspanndämpfung werden zur Erhöhung der Dämpfung und somit zur Minderung der Schwingungsamplituden häufig zusätzliche konstruktive Maßnahmen ergriffen. So werden mit Hilfe der in **Bild 1.3** dargestellten Koppellelemente Reibkontakte zwischen den beteiligten Strukturen geschaffen, in denen bei eintretender Relativbewegung kinetische Energie in Wärmeenergie gewandelt und somit die Systemdämpfung erhöht wird. Zu den häufig in der Praxis realisierten Kopplungsmöglichkeiten gehören geteilte Deckbänder, Reibelemente sowie Dämpferdrähte. Dabei wird neben der Erhöhung der Dämpfung auch eine Zunahme der

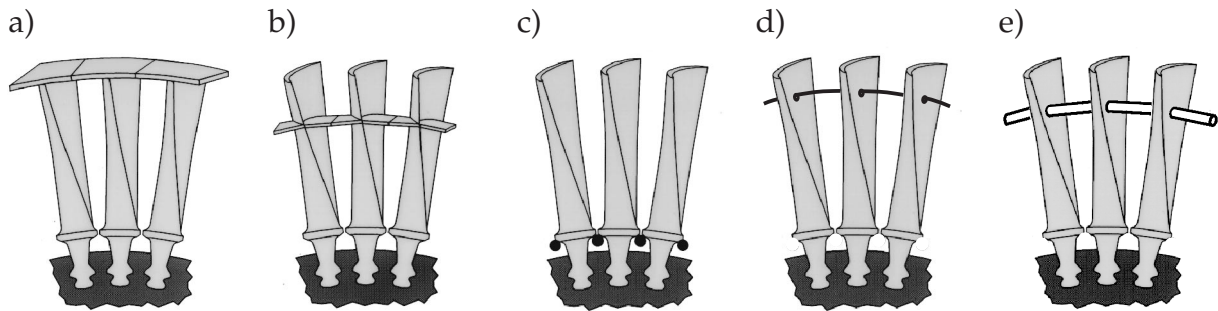


Bild 1.3: Konstruktive Elemente zur Schaufelkopplung: a) geteiltes Deckband; b) Stützflügel; c) Reibelemente; d) eingelegerter Dämpferdraht; e) Bindestifte

Steifigkeit genutzt, um eine gezielte Abstimmung der Schaufeleigenfrequenzen im Hinblick auf einen möglichst resonanzfreien Betrieb vornehmen zu können.

Ziel der schwingungstechnischen Schaufelauslegung muss es sein, eine in Abhängigkeit gegebener Randbedingungen optimale Ausführung der Koppellemente zu bestimmen, um der Forderung nach möglichst geringen Schwingungsamplituden Rechnung zu tragen. Zu diesem Zweck sind entsprechende mechanische Modelle und Berechnungsverfahren erforderlich, die den Konstrukteur in die Lage versetzen, schon im Designprozess verlässliche Aussagen über die zu erwartenden Resonanzfrequenzen und Schwingungsamplituden treffen und die Wirksamkeit konstruktiver Änderungsmaßnahmen abschätzen zu können.

1.2 Stand des Wissens

Die Optimierung des Schwingungsverhaltens beschauelter Scheiben mit Koppellementen erfordert neben der Beschreibung der Dynamik des Schaufel-Scheibe-Systems auch die Untersuchung verschiedener konstruktiver Möglichkeiten der Schaufelkopplung. In diesem Zusammenhang kommt der Modellierung des Kontaktes besondere Bedeutung zu. Aus diesem Grund soll einführend zu diesen drei Themengebieten eine Übersicht des aktuellen Wissensstandes gegeben werden.

1.2.1 Schaufel-Scheibe-Dynamik

Die Berechnung des dynamischen Verhaltens moderner Beschauelungen erfordert aufgrund der komplexen Schaufelgeometrie nahezu ausnahmslos die Anwendung von Diskretisierungsverfahren wie der Methode der Finiten Elemente. Einer analytischen Behandlung sind diese aerodynamisch optimierten Schaufelprofile nur noch in Ausnahmefällen zugänglich. Nachteilig wirkt sich aber zumeist die enorme Anzahl Freiheitsgrade des Finite-Element-Netzes aus, die z. T. sehr große Rechenzeiten erforderlich macht. Erhebliche Vereinfachungen lassen sich für die unverstimmte gekoppelte Struktur aus Scheibe und Schaufeln nutzen, indem zyklische Symmetrie vorausgesetzt wird, sodass

sich die Anzahl der zu berücksichtigenden Freiheitsgrade erheblich reduzieren lässt, siehe hierzu u. a. SZWEDOWICZ [163], PETROV [123] sowie die Ausführungen in Abschnitt 2.1.3. Im Fall des verstimmten Systems sind die notwendigen Voraussetzungen der zyklischen Symmetrie nicht erfüllt. Eine Modellierung des verstimmten Gesamtsystems ist zumeist nur auf der Basis vereinfachter Feder-Masse-Modelle mit einer geringen Anzahl Freiheitsgrade pro Segment möglich. Die Betrachtung eines kompletten realen, verstimmten Schaufelkranzes ist jedoch kaum sinnvoll. Aus diesem Grund sind verschiedene Verfahren entwickelt worden, die es erlauben, die Dynamik verstimmter Beschaukelungen unter vereinfachenden Annahmen mit vertretbarem numerischen Aufwand zu untersuchen. Diese werden im Anschluss an eine kurze Übersicht über die in der Literatur vorhandenen Untersuchungen zum so genannten *Mistuning* vorgestellt.

1.2.1.1 Mistuning

Die im englischen Sprachraum als *Mistuning* bezeichnete Verstimmung eines zyklischen Systems beschreibt den Effekt von Parameterstörungen, die die zyklische Periodizität einer beschaukelten Scheibe stören, sodass einzelne Segmente nicht mehr als identisch betrachtet werden können. Als Gründe hierfür können unvermeidliche Fertigungstoleranzen, Materialfehler und Parameterunsicherheiten genannt werden, die zu Geometrieabweichungen, schwankenden Massen- und Steifigkeitsverteilungen und somit z. B. zu unterschiedlichen Schaufeleigenfrequenzen führen können. Darüber hinaus kann in einem Schaufelkranz mit Koppellelementen eine Verstimmung der Kontaktparameter wie Reibkoeffizient, Kontaktgeometrie oder Oberflächenbeschaffenheit der Kontaktflächen auftreten, die eine zusätzliche Quelle für *Mistuning* darstellen. Zu den Folgen einer Verstimmung des Systems gehört u. a. der Effekt der Lokalisierung, der die Konzentration der Schwingungsenergie in einigen wenigen Schaufeln beschreibt. Diese können außergewöhnlich hohe Schwingungsamplituden aufweisen, die deutlich über denen der unverstimmten Beschaukelung liegen und somit eine potenzielle Gefahrenquelle für fortschreitende Rissbildung und Schwingungsbrüche darstellen. KRUSE UND PIERRE [92] etwa berichten eine Amplitudenüberhöhung um den Faktor drei gegenüber dem unverstimmten System. Neben der Streuung der Schwingungsamplituden führt eine Frequenzverstimmung der Schaufeln aber auch zu einem Streuband möglicher Resonanzfrequenzen, das eine resonanzfreie Auslegung der Beschaukelung deutlich erschwert.

Aufgrund der Fülle von Veröffentlichungen sei an dieser Stelle nur eine kleine Auswahl genannt, eine ausführlichere Darstellung kann u. a. GÖTTING [63] entnommen werden. Die Vorhersage der maximal auftretenden Schwingungsamplituden sowie die Untersuchung des Lokalisierungseffektes ist u. a. Gegenstand der Arbeiten von WHITEHEAD [178], EWINS [48, 50], AFOLABI [2], MIGNOLET UND RIVAS-GUERRA [107], MIGNOLET ET AL. [106], KUANG UND HUANG [94] und RIVAS-GUERRA UND MIGNOLET [136, 137]. WEI UND PIERRE [174, 175] stellen in diesem Zusammenhang fest, dass schwach gekoppelte Systeme sehr sensitiv bezüglich *Mistuning* und Lokalisierungseffekte sind, während eine starke Kopplung zu einem dem unverstimmten System ähnlichen Schwingungsverhalten führt. JUDGE UND PIERRE [85] un-

tersuchen die Aufspaltung der im unverstimmten System vorhandenen orthogonalen Doppelmoden experimentell und stellen ebenfalls Lokalisierung bei schwacher Kopplung fest. LIN UND MIGNOLET [97] diskutieren u. a. die Bedeutung einer Verstimmung der viskosen Dämpfung im Vergleich zu einem Steifigkeitsmistuning.

Die aus der Verstimmung resultierenden verschieden großen Schwingungsamplituden einzelner Schaufeln werfen die Frage nach einer systematischen Anordnung der Schaufeln über dem Scheibenumfang auf. Neben dem stets zu berücksichtigenden Aspekt der Minimierung der Rotorunwucht und der daraus resultierenden Anordnung der Schaufeln hinsichtlich ihrer Masse muss es das Ziel sein, die maximal auftretende Schwingungsamplitude in einer verstimmten Beschaufelung zu minimieren. EWINS [48] schlägt zu diesem Zweck eine Anordnung der Schaufeln hinsichtlich ihrer Eigenfrequenzen vor, die einer harmonischen Funktion mit der Periodenlänge von $1/3$ des Scheibenumfangs folgen. Auch PETROV UND IGLIN [129] und PETROV UND EWINS [124] stellen auf Sensitivitätsanalysen basierende Untersuchungen hinsichtlich der Anordnung verstimmter Schaufeln im Schaufelkranz an. Zusätzlich zur systematischen Schaufelanordnung wenden CHOI ET AL. [32] das so genannte *intentional mistuning*, eine bewusste nominelle Verstimmung, als Maßnahme zur Verminderung der Sensitivität einer Beschaufelung bezüglich stochastischer Parameterschwankungen an. Diese Vorgehensweise wird auch von BREWER ET AL. [19] zur Reduktion der Schwingungsamplituden bei gleichzeitig vorliegender stochastischer Verstimmung vorgeschlagen. In diesem Zusammenhang geben LIM ET AL. [96] auf der Basis von Monte-Carlo-Simulationen Richtlinien an, nach denen ein gezieltes Mistuning erfolgen sollte, um die Vielzahl verschiedener Anordnungsmöglichkeiten verstimmter Schaufeln zu reduzieren. Ein gezieltes Mistuning wird auch von SHAPIRO [156] im Zusammenhang mit der Stabilisierung von Flatterschwingungen untersucht. Der Frage nach der sinnvollsten Schaufelanordnung sowie des Nutzens eines *intentional mistunings* wird auch bei Beschaufelungen mit Reibelementen nachgegangen, siehe Abschnitt 1.2.2.7. In dem genannten Abschnitt werden weiterhin einige Arbeiten aufgeführt, die eine Verstimmung des Systems in Verbindung mit der Verwendung von Koppelementen behandeln.

1.2.1.2 Kondensation und Substrukturtechnik

Die Problematik der großen Anzahl Freiheitsgrade verstimmter Systeme führt unmittelbar auf die Notwendigkeit der Entwicklung geeigneter Reduktionsmethoden, die eine deutliche Reduzierung der Anzahl Freiheitsgrade bei ausreichend genauer Abbildung der Dynamik des Ausgangssystems zum Ziel hat. Allen Reduktions- bzw. Kondensationsverfahren gemein ist eine Koordinatentransformation des in dem Differenzialgleichungssystem

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{D} \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (1.1)$$

enthaltenen $[1 \times n_{\text{FHG}}]$ -Verschiebungsvektors $\mathbf{u}(t)$ in der Form

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{T} \mathbf{u}_{\text{red}}(t), \quad (1.2)$$

sodass sich das reduzierte Gleichungssystem mit gleicher Gestalt und den reduzierten Strukturmatrizen und Vektoren

$$\mathbf{M}_{\text{red}} = \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T}, \quad \mathbf{D}_{\text{red}} = \mathbf{T}^T \mathbf{D} \mathbf{T}, \quad \mathbf{K}_{\text{red}} = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T}, \quad \mathbf{f}_{\text{red}}(t) = \mathbf{T}^T \mathbf{f}(t) \quad (1.3)$$

ergibt. Die $[n_{\text{FHG}} \times n_{\text{red}}]$ -Transformationsmatrix \mathbf{T} reduziert das quadratische Ausgangssystem der Dimension n_{FHG} auf das reduzierte System der Dimension n_{red} . Ihre Besetzung ist abhängig von der spezifischen Kondensationsvorschrift des gewählten Verfahrens. Besonders weit verbreitet ist u. a. das Verfahren nach GUYAN [71], das auf einer statischen Kondensation so genannter *slave*-Freiheitsgrade basiert, sowie die modale Kondensation, bei der die Eigenschwingungsformen $\boldsymbol{\varphi}$ des Ausgangssystems zur Transformation herangezogen werden, siehe u. a. GASCH UND KNOTHE [60]. Letzteres Verfahren eignet sich insbesondere zur Beschreibung dynamischer Vorgänge. Die modal transformierten Strukturmatrizen weisen darüber hinaus unter bestimmten Voraussetzungen die vorteilhafte Eigenschaft einer Diagonalstruktur auf, siehe [60] und auch Abschnitt 2.1.2. Beide Verfahren, GUYAN-Reduktion und modale Transformation, werden in kommerziellen Finite-Element-Programmen wie z. B. ANSYS [6] zur effizienten Eigenwertberechnung mitunter auch nacheinander angewandt. Einen Überblick über verschiedene Kondensationsverfahren sowie Anwendungsbeispiele geben u. a. GASCH UND KNOTHE [60], FINDEISEN [57], DIETZ UND KNOTHE [41], PETERSMANN [122] und SCHABER [142].

Besondere Bedeutung kommt der Beschreibung komplexer Strukturen auf der Basis so genannter Substrukturen zu. Die Grundidee dieser auch als *Component Mode Synthesis* (CMS) bezeichneten Methode besteht in der Unterteilung der Gesamtstruktur in einfach zu beschreibende Teilstrukturen. Diese werden mit Hilfe von Kondensationsvorschriften auf Teilsysteme kleinerer Dimension zurückgeführt und anschließend unter Berücksichtigung entsprechender Koppelbedingungen, die die Verträglichkeit der Verschiebungen und Kräfte an den Koppelstellen gewährleisten, wieder zu einem Gesamtsystem zusammengeführt. Diese Vorgehensweise wurde zunächst von HURTY [76] und CRAIG UND BAMPTON [34] vorgeschlagen, die nach der Auftrennung des Gesamtsystems die Teilsysteme an den Koppelstellen fesseln (so genannte *fixed interfaces*) und einer bestimmten Kondensationsvorschrift unterziehen. Die Transformationsmatrix \mathbf{T} enthält dabei neben den Schwingungsformen dieser gefesselten Teilstrukturen (*normal modes*) zusätzlich so genannte *constrained modes*, die sich aus einer sukzessive auf einzelne Koppelfreiheitsgrade aufgeprägten Einheitsverschiebung ergeben, sowie in [76] auch die Starrkörperverschiebungen der ungefesselten Teilstruktur. Nach GASCH UND KNOTHE [60] ist diese Vorgehensweise aber z. B. bei rotationssymmetrischen Körpern ungünstig, da die Rotationssymmetrie durch die Fesselung der entsprechenden Koppelfreiheitsgrade verloren gehen kann. Ein alternatives Vorgehen entwickelten HOU [74] und GOLDMAN [62], die nach der Zerlegung in Substrukturen die Koppelfreiheitsgrade nicht sperren (so genannte *free interfaces*). Beide Verfahren sind in der Vergangenheit stetig weiterentwickelt worden, siehe u. a. MACNEAL [98], CRAIG UND CHANG [35] sowie SCHMIDT [143], die u. a. die Verwendung so genannter restlicher Nachgiebigkeitsmatrizen bei freien Koppelstellen vorschlagen. Eine zusammenfassende Darstellung geben u. a. SCHMIDT [143], GASCH UND KNOTHE [60] sowie FINDEISEN [57].

Die beschriebenen Kondensationsverfahren auf Substrukturebene finden insbesondere bei der Untersuchung verstimmter beschauelter Scheiben Anwendung, indem die Scheibe und die einzelnen verstimmten Schaufeln als Substrukturen aufgefasst werden, siehe u. a. IRRETIER [77]. Die Substrukturformulierung auf der Basis des Verfahrens nach CRAIG und BAMPTON schlagen u. a. BLADH ET AL. [15, 16] vor. Die Verstimmung einzelner Schaufeln wird dabei auf eine Variation des Elastizitätsmoduls zurückgeführt, während die Scheibe weiterhin als unverstimmt angenommen wird. KRUSE UND PIERRE [91] sowie CASTANIER ET AL. [23] schlagen ein Verfahren vor, das auf den Substrukturmoden ohne die Notwendigkeit der Berücksichtigung der von CRAIG und BAMPTON vorgeschlagenen *constrained modes* basiert, deren Bestimmung insbesondere bei vielen Koppelfreiheitsgraden aufwändig ist. Die Autoren verwenden die Eigenformen der zyklischen, unverstimmten und mit masselosen Schaufeln besetzten Scheibe sowie der fest eingespannten Schaufeln, die individuell verstimmt werden können. Das Verfahren baut auf der so genannten *loaded interface* Methode auf, bei der im Gegensatz zu der Methode der freien Koppelstellen der Einfluss der Schaufelsteifigkeit auf die Schwingungsformen der Scheibe berücksichtigt wird.

Ein zur Substrukturformulierung alternatives und ebenfalls sehr verbreitetes Vorgehen zur Reduktion der Anzahl der Freiheitsgrade in verstimmten Schaufelkränzen erfolgt über eine Modaltransformation auf der Basis der Eigenvektoren des ursprünglich unverstimmten Systems. Diese lassen sich unter Ausnutzung der zyklischen Symmetrie mit vertretbarem numerischen Aufwand bestimmen, siehe auch Abschnitt 2.1.3 und Anhang B.6. Wird anstelle von Gl. (1.1) ein verstimmtes System zu Grunde gelegt, indem z. B. Störungen der Massen- und Steifigkeitsmatrix zugelassen werden, ergibt sich analog zu Gl. (1.3)

$$\mathbf{M}_{\text{red}} = \mathbf{T}^T \left({}^{(0)}\mathbf{M} + \Delta\mathbf{M} \right) \mathbf{T}, \quad \mathbf{K}_{\text{red}} = \mathbf{T}^T \left({}^{(0)}\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K} \right) \mathbf{T} \quad (1.4)$$

mit den Strukturmatrizen ${}^{(0)}\mathbf{M}$ bzw. ${}^{(0)}\mathbf{K}$ des zugehörigen unverstimmten Systems sowie den durch eine Verstimmung hervorgerufenen Störungen $\Delta\mathbf{M}$ bzw. $\Delta\mathbf{K}$, vgl. u. a. CASTANIER ET AL. [23] und KENYON ET AL. [86]. Dieser Vorgehensweise liegt die Annahme zu Grunde, dass sich die Schwingungsformen des verstimmten Systems als Linearkombination der Moden des unverstimmten Systems darstellen lassen. Auch BLADH ET AL. [14, 15, 16] wenden diese, aufgrund der Projektion auf die modalen Koordinaten des unverstimmten Systems auch *Mistuning Projection Method* genannte Methode zur Berechnung verstimmter Schaufelkränze an. YANG UND GRIFFIN [197] verwenden ebenfalls die Schwingungsformen des unverstimmten Systems als Ansatzfunktionen. Die Anwendung dieser Modelle erfordert aber, wie auch die Verfahren nach CRAIG und BAMPTON bzw. verwandter Substrukturformulierungen, stets die Kenntnis der Massen- und/oder Steifigkeitsmatrix bzw. der Störungen. Eine deutliche Vereinfachung des Verfahrens besteht in der Annahme, dass die elastische Verformung überwiegend in den Schaufeln und nicht in der Scheibe auftritt. Wird weiterhin nur eine isolierte Schwingungsfamilie betrachtet, geben FEINER UND GRIFFIN [53] ein vereinfachtes Verfahren an, das die Kenntnis der exakten Strukturmatrizen nicht voraussetzt. Eine Verallgemeinerung des Verfahrens wird von den Autoren in [54, 55] vorgeschlagen.

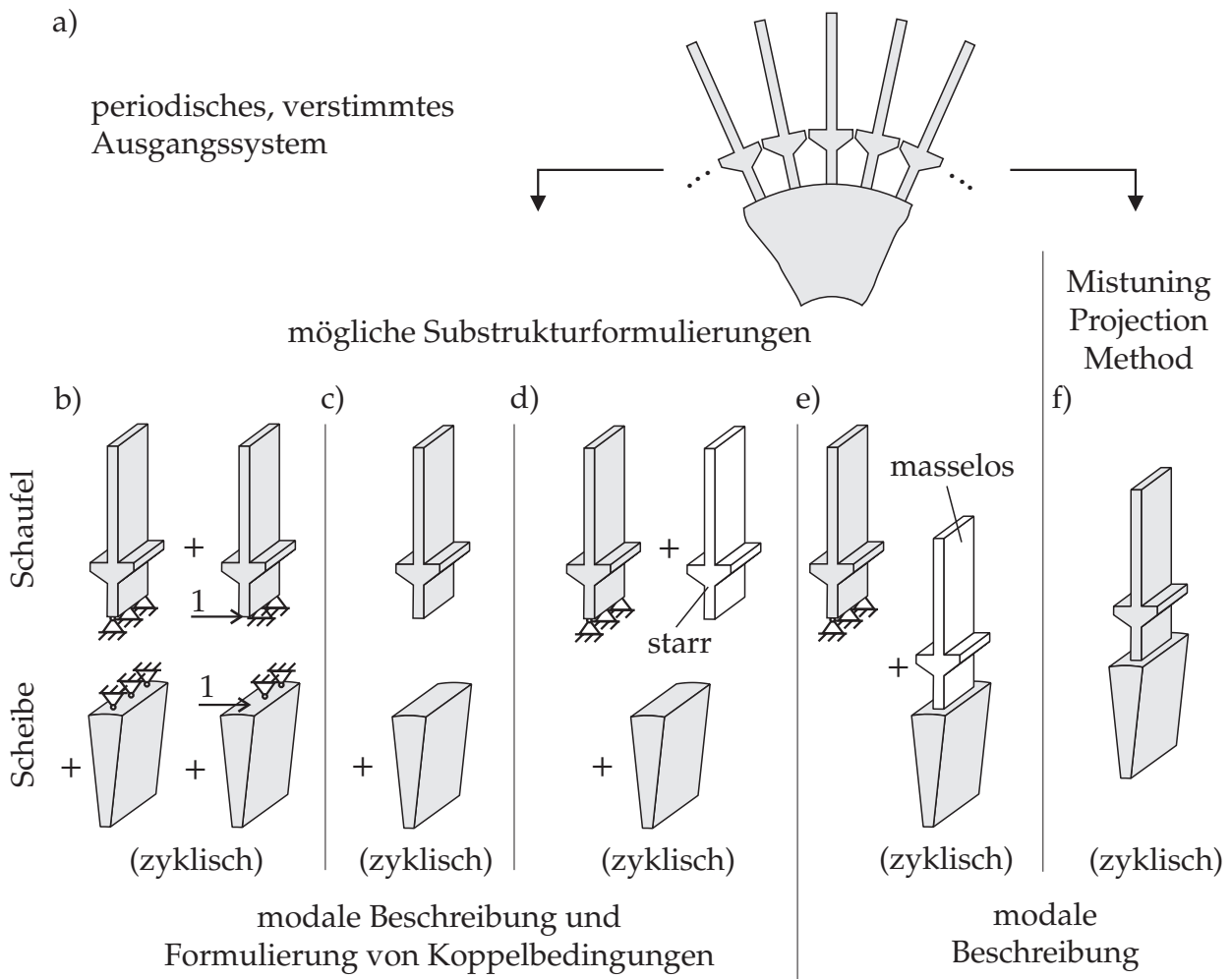


Bild 1.4: Mögliche modale Beschreibung der verstimmten beschaukelten Scheibe: a) Ausgangssystem; b) klassisches Verfahren der modalen Synthese nach CRAIG und BAMPTON mit gefesselten Koppelstellen; c) Vorgehen nach HOU und GOLDMAN mit freien Koppelstellen; d) modale Beschreibung der Substrukturen nach SEXTRO [147]; e) modale Beschreibung nach KRUSE UND PIERRE [91] und CASTANIER ET AL. [23]; f) Mistuning Projection Method nach YANG UND GRIFFIN [197]

Einen Vergleich verschiedener Reduktionsmethoden hinsichtlich der Genauigkeit sowie des Reduktionsgrades und dem damit verbundenen numerischen Aufwand geben u. a. MOYROUD ET AL. [110], die die einzelnen Schaufel-Scheibe-Segmente als Substrukturen nach der CRAIG-BAMPTON-Methode behandeln sowie eine modale Transformation mit den Eigenformen des unverstimmten Systems vornehmen. Die Verstimmung der Schaufeleigenfrequenzen erfolgt über eine Variation des Elastizitätsmoduls. Auch BLADH ET AL. [15, 16] wenden sowohl die Substrukturformulierung nach CRAIG und BAMPTON als auch eine Modaltransformation auf Basis der Eigenvektoren des unverstimmten Systems an. Darüber hinaus schlagen die Autoren eine an die Kopplung der Substrukturen nach CRAIG und BAMPTON sich anschließende weitere Reduktion vor, die auf einer zweiten Modalanalyse des Systems der gekoppelten Substrukturen

basiert. Ferner wird in [15] vergleichend auch die von KRUSE UND PIERRE [91] und CASTANIER ET AL. [23] vorgeschlagene *loaded interface* Methode diskutiert. Eine schematische Übersicht über die modale Beschreibung gekoppelter Schaufel-Scheibe-Strukturen gibt **Bild 1.4**.

1.2.2 Koppellelemente

Wie in **Bild 1.3** gezeigt, gibt es verschiedene konstruktive Möglichkeiten der Schaufelkopplung mit dem Ziel der Versteifung des Schaufelkranzes und/oder der Erhöhung der Dämpfung. In der Literatur finden sich sowohl theoretische als auch experimentelle Untersuchungen zu verschiedenen Koppellelementen, die zumeist ein unverstimmtes System voraussetzen. Insbesondere befasst sich eine Anzahl von Publikationen mit der Auslegung von Reibelementen und geteilten Deckbändern. Aus diesem Grund soll an dieser Stelle zunächst eine Übersicht über die in der Literatur angegebenen allgemeinen und auf spezielle Reibelementgeometrien bezogenen Untersuchungen sowie über die Behandlung des Deckbandkontaktes gegeben werden. Abschließend werden kurz einige Arbeiten zu weiteren Koppellelementen wie Dämpferdrähten sowie zu Untersuchungen von verstimmten Beschaukelungen mit Koppellelementen angegeben. Einen ausführlichen Überblick über verschiedenste Koppelmöglichkeiten gibt u. a. HÖXTERMANN [75], der neben Deckband- und Arkadenbindungen auch Dämpfer- und Bindedrähte sowie Bindestifte behandelt.

1.2.2.1 Allgemeine Untersuchungen zu Reibelementen

Erste grundlegende Untersuchungen zu Reibelementen stellt GRIFFIN [65, 66] mit einem Vergleich so genannter *blade-to-ground* und *blade-to-blade* Dämpfer an, die sich durch eine direkte Kopplung der Schaufel mit der Scheibe bzw. eine Kopplung zweier benachbarter Schaufeln, jeweils über das Reibelement, unterscheiden. Auf der Basis eines eindimensionalen modalen Schaufelmodells und des so genannten Elasto-Gleit-Modells, das den Reibstrang als Reihenschaltung einer Elastizität mit einem COULOMB'schen Reibkontakt beschreibt, siehe Abschnitt 1.2.3, werden Simulationen mit experimentellen Ergebnissen hinsichtlich der Schwingungsamplitude und Resonanzfrequenzen verglichen. Der Autor stellt u. a. einen verbesserten Dämpfungseffekt mit zunehmender Steifigkeit im Reibstrang fest. Basierend auf dem in [65, 66] vorgeschlagenen Modell führen CAMERON ET AL. [22] die so genannte Dämpfer *performance curve* ein, der die Schwingungsamplitude über einer Variation der Erregerkraft zu entnehmen ist. Sie gibt Aufschluss über die Wirksamkeit des Dämpfers bei variierenden Erregerkräften.

Einen Vergleich von Resultaten einer Zeitschrittintegration des nichtlinearen Systems mit Ergebnissen der Harmonischen Balance (HBM) führt CSABA [36] durch. Die Bestimmung der optimalen Dämpfermasse zeigt, dass bei Verwendung der HBM etwas kleinere Werte ermittelt werden. Da eine zu klein gewählte Dämpfermasse jedoch einen starken Anstieg der Schwingungsamplitude zur Folge hat, sollte die Masse ohnehin etwas größer als die theoretisch bestimmte optimale Masse gewählt werden.

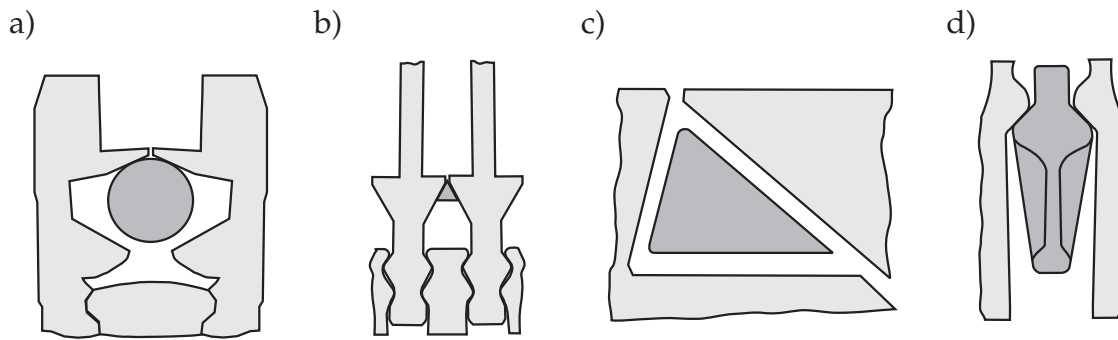


Bild 1.5: Reibelementgeometrien verschiedener Patentschriften: a) zylindrischer Dämpfer, nach DODD ET AL. [42]; b) keilförmiger Dämpfer, nach BOBO [17]; c) asymmetrischer Dämpfer, nach MUELLER ET AL. [111]; d) komplexe Dämpfergeometrie, nach NELSON [114]

Den großen Einfluss des Reibkoeffizienten auf die Schaufelschwingungen stellen u. a. WANG UND SHIEH [173] heraus. Die Autoren nutzen ebenfalls ein eindimensionales Elasto-Gleit-Modell, verwenden aber zusätzlich einen von der Gleitgeschwindigkeit abhängigen Reibkoeffizienten. Nach WANG UND CHEN [172] zeigt ein Vergleich zwischen den Ergebnissen einer Zeitschrittintegration und der HBM mit variierender Anzahl berücksichtigter Harmonischer¹, dass die HBM eine ausreichend gute Näherung darstellt, wenn alle Frequenzanteile einschließlich der dritten Harmonischen berücksichtigt werden. BERTHILLIER ET AL. [13] untersuchen einen fest eingespannten Balken mit Reibkontakt. Aufgrund eines Vergleiches von Simulationen und Messwerten empfehlen die Autoren die Berücksichtigung von mindestens sieben Harmonischen, insbesondere im Bereich der optimalen Normalkraft des Reibkontaktes.

Ein eindimensionales Elasto-Gleit-Modell ist ebenfalls Basis des von MENQ ET AL. [103] vorgeschlagenen Modells, das im Gegensatz zu den oben genannten Ansätzen zusätzlich eine von der tangentialen Relativverschiebung abhängige Normalkraft im Reibkontakt zulässt. Diese bewirkt eine unsymmetrische Reibkraftcharakteristik und einen von null verschiedenen Gleichanteil. Eine ebenfalls von den Relativverschiebungen abhängige Normalkraft wird von WHITEMAN UND FERRI [179] in Form einer Rampenfunktion realisiert. Nahe der Resonanz wird ein Absinken der Schwingungsamplitude mit steigendem Rampenwinkel, d. h. größerer Normalkraftvariation bei gleicher Tangentialverschiebung, beobachtet. Die Autoren wenden ebenfalls die HBM an, weisen aber darauf hin, dass als Folge zusätzliche Resonanzfrequenzen aufgrund des nichtlinearen Charakters der Reibkraft nicht abgebildet werden können.

SANLITURK UND EWINS [138] nehmen eine elliptische Relativverschiebung in der tangentialen Kontaktebene an. Mikroschlupf wird durch die Berücksichtigung einer Anzahl von Makroschlupfelementen abgebildet. Nach Anwendung der HBM stellen die Autoren eine gute Übereinstimmung der Resultate mit Zeitschrittintegrationen fest. Die Empfeh-

¹Die Harmonische Balance (*Harmonic Balance Method*, HBM) berücksichtigt zunächst nur die Grundharmonische, siehe auch Anhang A.3. Werden höher harmonische Anteile in der Schwingungsantwort berücksichtigt, wird auch häufig der Begriff *Higher Order Harmonic Balance Method* (HHBM) verwendet.

lung, die HBM zur Berechnung des Schwingungsverhaltens reibungsgedämpfter Turbinenschaufeln anzuwenden, sprechen SANLITURK ET AL. auch in [141] aus. Später ermitteln SANLITURK UND EWINS [139] in Simulationen so genannter *rainbow tests* die optimale Reibelementmasse, indem ein System aus zwölf Schaufeln in vier Segmente unterteilt wird, deren Reibelemente identische Massen aufweisen. Die Simulationsergebnisse zeigen, dass diese Art der Reibelementoptimierung jedoch nur für schwach gekoppelte Schaufeln sinnvoll ist.

Alle oben genannten Arbeiten lassen die Reibelementgeometrie unberücksichtigt. Im Gegensatz dazu gibt es eine Reihe von Patentschriften, die sehr detailliert spezifische geometrische und konstruktive Eigenschaften von Reibelementen beschreiben und die z. T. schon zu Beginn des 20. Jhs. angefertigt wurden. Bis heute gibt es eine Fülle verschiedener patentierter konstruktiver Vorschläge zur Gestaltung von Reibelementen, siehe u. a. ALLEN [4], FLANDERS [58], NELSON [114], ARRAO UND NOURSE [7], BOBO [17] uvm., vgl. **Bild 1.5**. Eine theoretische Behandlung der verschiedenen Reibelemente ist jedoch naturgegebenmaßen zumeist nicht enthalten. Im Folgenden soll daher ein kurzer Überblick über die wissenschaftlichen Publikationen gegeben werden, denen eine bestimmte Reibelementgeometrie zu Grunde liegt.

1.2.2.2 Zylinderförmige Reibelemente

Zylinderförmige Reibelemente, zu denen hier allgemein diejenigen Geometrien gezählt werden sollen, die sich durch symmetrische Querschnitte und gekrümmte Kontaktflächen auszeichnen und HERTZ'sche Kontaktbedingungen mit linienförmigem Kontakt aufweisen, zählen zu den häufig realisierten Reibelementbauformen, vgl. auch **Bild 1.5a**.

Ein solcher Reibelementtyp wird von PFEIFFER UND HAJEK [130] und HAJEK [72] auf der Basis eines ebenen Schaufelmodells untersucht. Je nach Haft- oder Gleitzustand erfolgt eine Anpassung der Anzahl der Freiheitsgrade des strukturvarianten Systems. Elastizitäten im Kontakt werden nicht berücksichtigt. Der Querschnitt des Reiblements wird als parabelförmig angenommen, siehe **Bild 1.6a**.

CSABA UND ANDERSSON [38] führen theoretische und experimentelle Untersuchungen an einem Reibelement mit zwei gekrümmten Kontaktflächen durch. Sie verwenden ein so genanntes *bar model* zur Abbildung von Mikroschlupfeffekten, siehe auch Abschnitt 1.2.3.

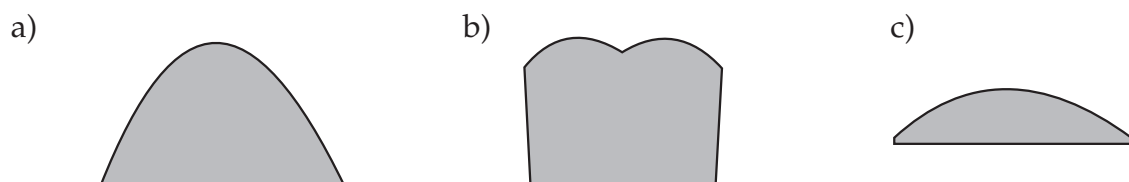


Bild 1.6: 'Zylinderförmige' Reibelemente: a) parabolischer Querschnitt, nach PFEIFFER UND HAJEK [130]; b) *Curved wedge damper* mit zwei gekrümmten Kontaktzonen, nach CSABA [37]; c) zylinderförmiges Reibelement, nach BALMER [8] und SEXTRO [147]

Aufgrund der großen Streuung der Messwerte empfehlen die Autoren die Berücksichtigung von Mistuningeffekten. Die Kontaktbedingungen in den Kontaktzonen eines sehr ähnlichen Dämpfertyps, des so genannten *curved wedge damper*, siehe **Bild 1.6b**, mit sechs Freiheitsgraden werden von CSABA [37] mit Hilfe einer elastischen WINKLER-Bettung abgebildet, siehe auch Abschnitt 1.2.3 und Abschnitt 2.3.2.1. Eine gewisse Diskrepanz zwischen den Messergebnissen und den Simulationen wird mit dem im Experiment nicht über die gesamte Kontaktlänge vorhandenen Kontakt begründet. Interessant ist in diesem Zusammenhang das von dem Autor erwähnte Positionierungsproblem bzw. die instabile Lage des Dämpfers zwischen den Schaufelfußplatten bei größeren Krümmungsradien, d. h. ausgedehnteren Kontaktflächen. Dies wird insbesondere bei gleichphasiger Bewegung benachbarter Schaufeln beobachtet. JARELAND [80] verwendet ebenfalls das von CSABA [37] vorgeschlagene Kontaktmodell zur Untersuchung des gleichen Dämpfertyps hinsichtlich des Einflusses verschiedener Normalkräfte und des Verschleißes. Die experimentellen Studien zeigen, dass die gleichphasige Schaufelschwingung kaum von einer Normalkraftvariation beeinflusst wird und dass die experimentellen Ergebnisse bei kleinen Normalkräften nicht immer zuverlässig zu reproduzieren sind.

BALMER [8] untersucht die Wirkungsweise von symmetrischen Reibelementen mit kreisabschnittförmiger Querschnittsfläche bei unverstimmten und verstimmten Beschauelungen auf der Basis eines modalen Schaufelmodells, das ebene Schaufelschwingungen zulässt. Nach einem Vergleich verschiedener Kontaktmodelle wie dem einfachen COULOMB'schen Reibgesetz, dem Elasto-Gleit-Modell, siehe auch Abschnitt 1.2.3, sowie dem analytischen Ansatz von CATTANEO [24] und MINDLIN [108] wird eine Näherung des letzteren verwendet, um mit Hilfe der HBM komplexe Ersatzsteifigkeiten für den Reibkontakt zu formulieren. Die Umsetzung der theoretischen Modelle in das Programmsystem DATUR erlaubt z. B. Parameterstudien hinsichtlich der günstigsten Anordnung der Schaufeln in einem verstimmten Schaufelkranz. Aufbauend auf diesem Modell erweitern SEXTRO [147], SEXTRO ET AL. [154, 155] und SEXTRO UND POPP [153] das Berechnungsverfahren für zylinderförmige Reibelemente, siehe **Bild 1.6c**, auf dreidimensionale Schaufelschwingungen und eine zweidimensionale Relativverschiebung in der Kontaktebene zwischen Reibelement und Schaufelfußplatte. Das auf diese Weise weiterentwickelte Verfahren wird von SZWEDOWICZ ET AL. [164] erfolgreich auf reale Schaufelkranze angewandt.

1.2.2.3 Keilförmige Reibelemente

Neben zylinderförmigen werden in der Praxis häufig keilförmige, so genannte *wedge* oder *Cottage Roof Damper*, eingesetzt, die sich im Gegensatz zu zylinderförmigen Reibelementen durch flächige Kontaktzonen auszeichnen. Dennoch gibt es nur einige wenige Arbeiten, die diese spezielle Geometrie und die daraus resultierende Kinematik explizit berücksichtigen.

Den Untersuchungen von YANG UND MENQ [194, 195] liegt ein keilförmiger Dämpfer zu Grunde, der neben flächigen Kontaktzonen auch unterschiedliche Kontaktwinkel aufweisen kann, siehe **Bild 1.7a**. Die Autoren unterscheiden dabei zwischen einer Kinematik, die

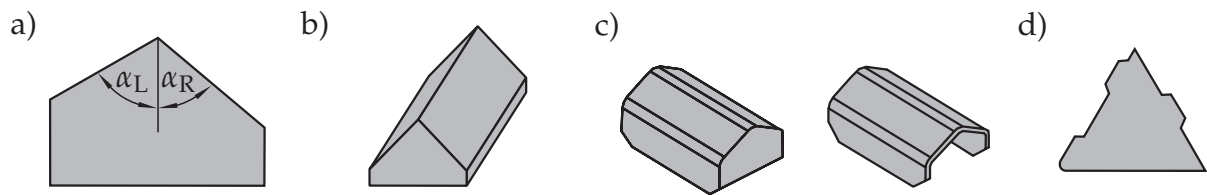


Bild 1.7: Keilförmige Reibelemente: a) Reibelement mit unterschiedlichen Kontakt- bzw. Dämpferwinkeln, nach YANG UND MENQ [194]; b) symmetrisches keilförmiges Reibelement, nach SANLITURK ET AL. [140]; c) verschiedene Dämpfertypen mit flächigen Kontakten, nach JARELAND [79]; d) modifiziertes keilförmiges Reibelement, nach BOBO [17]

eine Rotation des Dämpfers zulässt und einer Kinematik, die eine rein translatorische Bewegung voraussetzt. Letztere stellt sich nach Angaben der Autoren bei ausreichend kleinen Dämpferwinkeln α_L und α_R ein. Aus diesem Grund wird eine Rotation nicht weiter berücksichtigt. Das auf einen Kontaktpunkt reduzierte Kontaktgeschehen wird mit Hilfe eines eindimensionalen Elasto-Gleit-Modells mit konstantem Reibkoeffizienten abgebildet, siehe auch Abschnitt 1.2.3. Die im Zeitbereich ermittelten nichtlinearen Kontaktkräfte werden mit Hilfe der HBM linearisiert.

Einen ähnlichen Ansatz verfolgen SANLITURK ET AL. [140]. Sie schlagen ein ebenfalls auf einen Kontaktpunkt reduziertes zweidimensionales Kontaktmodell zur Berechnung der Reibkräfte zwischen Schaufelfußplatte und einem symmetrischen keilförmigen Reibelement vor. Ein Abrollen des Dämpfers, das vornehmlich bei Schwingungsformen mit kleinen Knotendurchmesserzahlen und damit geringen Phasenverschiebungen zwischen den Schwingungen benachbarter Schaufeln auftritt, wird mit Hilfe eines empirischen Korrekturfaktors berücksichtigt, da das vorgeschlagene Kontaktmodell keine Relativverdrehungen, sondern ausschließlich translatorische Relativverschiebungen im Kontakt beinhaltet. Die Autoren vergleichen experimentelle mit simulierten Ergebnissen und kommen zu dem Schluss, dass das Abrollen des Dämpfers zukünftig weitere Untersuchungen erfordert. Basierend auf dem behandelten Reibelementtyp, siehe **Bild 1.7b**, untersuchen BRÉAR ET AL. [18] die Fluid-Struktur-Wechselwirkung einer beschauften Scheibe mit Reibelementen.

In PANNING ET AL. [118] findet sich ein Vergleich der Wirkungsweise eines *Cottage Roof Dampers* mit einem zylinderförmigen Reibelement. Es wird ein auf SEXTRO [148] zurückgehendes, zunächst für den Deckbandkontakt entwickeltes, dreidimensionales Kontaktmodell zur Beschreibung von Kräften und Momenten am Reibelement eingesetzt, das eine sehr allgemeine Formulierung der Kontaktbedingungen enthält. Eine Diskretisierung der Kontaktfläche ermöglicht es, Relativverdrehungen des Reiblements gegenüber der Schaufelfußplatte zu berücksichtigen, sodass der von SANLITURK ET AL. [140] eingeführte rein empirische Korrekturfaktor nicht erforderlich ist. Der Vergleich der verschiedenen Reibelementtypen zeigt zum einen die Tendenz des *Cottage Roof Dampers* zum Abheben, d. h. zum partiellen Kontaktverlust an den Reibelementkanten; zum anderen offenbart dieser Dämpfertyp eine bessere Dämpfungswirkung bei kleinen Erregerordnungen, bei denen zylinderförmige Reibelemente zum Abrollen neigen.

Die Tatsache, dass ein keilförmiger Dämpfer auch bei gleichphasiger Schwingung benachbarter Schaufeln eine Dämpfungswirkung erwarten lässt, wird auch in JARELAND [79] erwähnt. Der Autor nutzt für seine Untersuchungen von keilförmigen Reibelementen nach **Bild 1.7c** sowohl das von CSABA [36] vorgeschlagene *bar model* als auch eine Parallelschaltung von Elasto-Gleit-Modellen, siehe Abschnitt 1.2.3, zur Bestimmung der tangentialen Kontaktkräfte. Der Kontakt wird in Normalenrichtung als starr angenommen. Der Autor zeigt auf der Basis von Frequenzgängen und einem Vergleich zwischen Ergebnissen einer Zeitschrittintegration, der HBM und der HHBM (*Higher Order Harmonic Balance Method*), dass die Berücksichtigung höher Harmonischer nur zu vernachlässigbaren Änderungen der Ergebnisse führt. Auf der Basis verschiedener Parameterstudien stellt der Autor eine verbesserte Dämpfungswirkung bei größeren Kontaktwinkeln fest und begründet dies mit den größeren Relativbewegungen in den Kontaktzonen. Diese Eigenschaft wird an späterer Stelle dieser Arbeit nochmals detaillierter aufgegriffen, siehe Abschnitt 3.2.3.2. Eine Variation der Dämpfersteifigkeit bestätigt die schon von GRIFFIN [65] festgestellte Tendenz der geringeren Dämpfungswirkung elastischer Dämpfer. Hinsichtlich der schon genannten Problematik des Kontaktverlustes eines Reiblements mit flächigen Kontakten sei u. a. auf die Patentschrift von BOBO [17] verwiesen, der ein Abrollen als Ursache für ein *dampner rocking* sieht und die in **Bild 1.7d** angegebene modifizierte Dämpfergeometrie vorschlägt.

1.2.2.4 Asymmetrische Reibelemente

Die Behandlung von Reibelementen mit nicht-symmetrischer Querschnittsfläche und den daraus resultierenden unterschiedlichen Kontaktbedingungen im linken und rechten Kontakt des Dämpfers ist in der Literatur bislang nahezu vollständig vernachlässigt worden. Von YANG UND MENQ [194] werden an dem bereits in **Bild 1.7a** dargestellten keilförmigen Reibelement mit beidseitig flächigem Kontakt unterschiedliche Kontaktwinkel im linken und rechten Kontakt grundsätzlich zugelassen. Auf die Besonderheiten einer asymmetrischen Konfiguration wird aber nicht eingegangen. Untersuchungen hinsichtlich einer asymmetrischen Gestaltung der Kontaktwinkel für ansonsten symmetrische zylinderförmige Reibelemente werden von PANNING ET AL. [119] durchgeführt. Ein Vergleich zwischen der Wirkungsweise vollständig asymmetrischer Reibelemente, die sich durch eine ebene und eine gekrümmte Kontaktfläche auszeichnen, und zylinderförmiger Reibelemente wird erstmals von PANNING ET AL. [117] angegeben. Voraussetzung zur Berücksichtigung asymmetrischer Kontaktbedingungen ist eine möglichst allgemeine Formulierung des Kontaktmodells, sodass die häufig genutzte Annahme identischer Kontaktbedingungen im linken und rechten Kontakt nicht notwendigerweise erfüllt sein muss.

1.2.2.5 Geteiltes Deckband

Neben der Kopplung benachbarter Schaufeln über ein Reibelement stellt die unmittelbare Kopplung über ein geteiltes Deckband, so genannter *shrouds*, eine vielfach in der Praxis realisierte Möglichkeit der Schaufelkopplung dar, vgl. **Bild 1.3a**. Neben der versteifenden

Wirkung kommt es auch hier in den Kontaktzonen zu Relativbewegungen und entsprechenden Reibkräften, die zur Erhöhung der Dämpfung beitragen. ZMITROWICZ [198, 199] untersucht freie Schaufelschwingungen mit geteiltem Deckband. Der Autor erwähnt u. a. die aus der möglichen Relativbewegung resultierende geringere Steifigkeit gegenüber einem durchgängigen Deckband, dessen Koppelsteifigkeit formal gegen unendlich geht.

Das später in **Bild 1.9d** auf Seite 21 dargestellte so genannte *series-parallel-series*-Modell wird von MENQ ET AL. [102, 104] als Basis für ein Mikroschlupfmodell zur Bestimmung der Kontaktkräfte u. a. in geteilten Deckbändern und der Bestimmung einer optimal einzustellenden Normalkraft zwischen den Deckbändern genutzt. Auf der Grundlage des von YANG UND MENQ [193] und YANG [190] weiterentwickelten, dreidimensionalen Kontaktmodells untersuchen CHEN UND MENQ [28, 29] wiederum die wichtige Frage der optimalen Normalkraft zwischen den Deckbändern. Hierzu wird eine modale Beschreibung der Schaufeln genutzt und eine multiharmonische Balance zur Linearisierung der nichtlinearen Kontaktkräfte angewandt.

TREYDE [168] untersucht den Deckbandkontakt unter Berücksichtigung von Relativverschiebungen sowie -verdrehungen im Kontakt. Zur Bestimmung der Tangentialkräfte kommt die von BALMER [8] angegebene Approximation des Modells nach CATTANEO und MINDLIN zum Einsatz. Die Schaufeln werden mit Hilfe von analytischen Ausdrücken für die Eigenformen von Balkenstrukturen beschrieben. Experimentelle Untersuchungen zur Identifikation der für das Rechenmodell notwendigen Kontaktsteifigkeiten zeigen deren Abhängigkeit von der Kontaktnormalkraft, die mit der steigenden Anzahl in Kontakt tretender Rauheitsspitzen begründet wird. Dieses Modell wird von SEXTRO [148, 149] auf dreidimensionale Schwingungen von Turbinenschaufeln mit Deckband erweitert. Anders als von TREYDE [168] wird hier eine Diskretisierung der Kontaktfläche in einzelne Punktkontakte vorgeschlagen, die es ermöglicht, neben Kontaktkräften auch -momente abzubilden, siehe auch **Bild 1.8a**. Zur Berücksichtigung der in [168] beobachteten nichtlinearen Kraft-Verschiebungskennlinie in Normalenrichtung werden nichtlineare Kontaktsteifigkeiten eingeführt, die den versteifenden Effekt mit zunehmender Normalkraft durch eine Approximation des von ABBOTT UND FIRESTONE [1] angegebenen Materialanteils rauer Oberflächen wiedergeben. Einen Vergleich von Simulationen auf der Basis des entwickelten Kontaktmodells mit experimentellen Ergebnissen einer rotierenden realen Beschaufelung geben SZWEDOWICZ ET AL. [165] an. SZWEDOWICZ ET AL. [163] lässt sich die Aussage entnehmen, dass die mit Hilfe einer Finite-Element-Berechnung ermittelten Resonanzfrequenzen einer Beschaufelung mit geteiltem Deckband deutlich von der Abschätzung der realen Kontaktfläche, die sich an den Deckbändern einstellt, abhängt.

Weitere Untersuchungen zu Deckbandkopplungen finden sich u. a. in GRIFFIN UND LABELLE [67], die ein von YANG UND MENQ [193] vorgeschlagenes Kontaktmodell verwenden, das neben einem tangentialen einen weiteren Freiheitsgrad in Normalenrichtung besitzt, sodass auch der Fall der Separation berücksichtigt werden kann. In diesem Zusammenhang erwähnt WANG [171], dass die Berücksichtigung einer variablen Normalkraft

im Deckband zu gleichen Ergebnissen wie eine konstante Normalkraft führt, so lange keine Separation auftritt. Der Autor führt weiter eine Variation des Deckbandwinkels durch und stellt zusammenfassend fest, dass die Flächennormale der Kontaktfläche möglichst senkrecht auf der Richtung der Relativbewegung zwischen zwei benachbarten Schaufeln stehen sollte, um den besten Dämpfungseffekt zu erzielen. PETROV UND EWINS [125, 126] wenden ebenfalls ein Kontaktmodell an, das eine Öffnung des Kontaktes berücksichtigt. Eine dem Deckband vergleichbare Kopplung untersuchen WILLIAMS UND EARLES [183], die die optimale Position eines so genannten *clapper rings* zu etwa $2/3$ der Schaufellänge bestimmen. D'AMBROSIO ET AL. [39] untersuchen die Abhängigkeit der Resonanzfrequenzen verschiedener Biegeschwingungen von Modellschaufeln mit geteiltem Deckband in Abhängigkeit der im Kontakt herrschenden Normalkräfte.

1.2.2.6 Weitere Koppellelemente

Neben der weit verbreiteten indirekten Kopplung benachbarter Schaufeln über Reibelemente und der direkten Kopplung über ein geteiltes Deckband finden sich in der Literatur Arbeiten, die sich mit der Untersuchung weiterer konstruktiver Lösungen der Kopplung von Turbinenschaufeln und insbesondere der Nutzung von Reibungseffekten befassen. Einige Beispiele derartiger Koppellelemente, siehe auch **Bild 1.3**, seien an dieser Stelle stellvertretend aus Gründen der Vollständigkeit genannt, wenngleich sie in dem in dieser Arbeit entwickelten theoretischen Modell keine Berücksichtigung finden. Die Möglichkeit der Schwingungsdämpfung von *Leitschaufeln* auf der Basis von Energiedissipation durch Reibung wird z. B. von BERRUTI ET AL. [9, 10, 11, 12] sowohl experimentell als auch theoretisch ausführlich untersucht. Auch hier findet die HBM zur Linearisierung der Kontaktkräfte erfolgreich Anwendung. JI ET AL. [83] schlagen ein einfaches Modell für den Vergleich zwischen Messung und Rechnung von Schwingungen von Turbinenschaufeln vor, die über einen *Dämpferdraht* gekoppelt sind. Wie auch im Fall von Reibelementen lässt sich der große Einfluss der Normalkraft auf die Amplitudenreduktion sowie der Anstieg der Resonanzfrequenz erkennen. Auch hier erfolgt die Linearisierung der Reibkräfte mit Hilfe der HBM. WOLTER [188] führt ausführliche experimentelle Studien an den Laufschaufeln einer Kondensationsdampfturbine hinsichtlich der Wirkungsweise eines eingelegten Dämpferdrahtes durch. Er stellt neben einer Amplitudenreduktion im Vergleich zu freistehenden Schaufeln auch den Einfluss der Dämpferdrahtmasse unter Verwendung von Titan- bzw. Stahldrähten fest, der sich in einem Anstieg der Resonanzfrequenz bei größerer Dämpferdrahtmasse zeigt. Den Effekt ansteigender Resonanzfrequenz bei gleichzeitiger Amplitudenreduktion im Vergleich zur freistehenden Schaufel stellen auch URLICHS ET AL. [169] an einer Dampfturbinenschaufel mit Dämpferdraht fest. Ein Vergleich der Wirkungsweise verschiedener Koppellelemente wie den schon genannten Reibelementen, Deckbändern und Dämpferdrähten sowie *Bindestiften* und *Mehrfachkopplungen* findet sich in SEXTRO [151].

1.2.2.7 Verstimmtte Beschau felungen mit Koppellelementen

In Verbindung mit der Untersuchung von Koppellelementen lassen sich einige wenige Publikationen finden, die eine Verstimmung des Systems etwa hinsichtlich der Schaufel-

eigenfrequenzen oder der Kontaktparameter zulassen und die Auswirkungen einer systematischen Schaufelanordnung analysieren.

MUSZYNSKA UND JONES [113] haben schon früh Untersuchungen hinsichtlich der Folgen einer Variation der Reib- und Erregerkräfte im Hinblick auf die Schwingungsamplituden durchgeführt und festgestellt, dass eine Variation etwa des Reibkoeffizienten einen deutlichen Anstieg der Schwingungsamplitude zur Folge haben kann. GRIFFIN UND SINHA [68] berichten auf der Basis von einfachen mechanischen Modellen unverstimmter und verstimmter Beschaukelungen, dass sich die der Reibelementmasse proportionale optimale so genannte *slip load* im Fall frequenzverstimmter Schaufeln nicht signifikant von der des unverstimmten Systems unterscheidet. Zu ähnlichen Ergebnissen kommen JARELAND UND CSABA [81], die ebenfalls ermitteln, dass die optimale Reibelementmasse für das verstimmte System der unverstimmten Beschaukelung entspricht. Weiterhin stellen die Autoren fest, dass eine Verstimmung der Schaufeleigenfrequenzen einen deutlich größeren Einfluss als eine Verstimmung der Kontaktparameter wie z. B. der Kontaktlänge aufweist.

BLADH ET AL. [14] nutzen das von den Autoren in [15, 16] entwickelte reduzierte Modell, siehe Abschnitt 1.2.1.2, zur Analyse verstimmter Deckbandschaukeln. CHA UND SINHA [25, 26, 27] untersuchen den Einfluss stochastisch gestörter Erregerkräfte auf das Schwingungsverhalten von Schaufelkränzen mit Reibelementen. CHEN UND SINHA [30] analysieren ebenfalls die Verteilung der Schwingungsamplituden einer verstimmten Beschaukelung mit Reibungsdämpfern. KUANG UND HUANG [94] bestätigen die oben genannte Tendenz zur Lokalisierung bei schwacher Kopplung durch die Variation der ein Deckband repräsentierenden Koppelsteifigkeit. Mit Hilfe eines kombinierten Zeit-/Frequenzbereich-Verfahrens analysieren GUILLEN UND PIERRE [69] frequenzverstimmte Systeme mit Reibungsdämpfern.

BALMER [8] vergleicht die Simulationsergebnisse unverstimmter und verstimmter Beschaukelungen hinsichtlich einer Frequenz- und Kontaktparameterverstimmung, indem er den Einfluss einer Variation des Reibkoeffizienten und der Kontaktsteifigkeit untersucht. Eine Kopplung der frequenzverstimmten Schaufeln erfolgt ausschließlich über die Reibelemente, die Radscheibe wird nicht berücksichtigt. Der Autor stellt fest, dass sich eine Verstimmung des Reibkoeffizienten im Wesentlichen auf die Amplitude in der Hauptresonanz und eine Verstimmung der Kontaktsteifigkeit auf den Verlauf des Frequenzganges im Bereich der Nebenresonanzen auswirkt. Hinsichtlich einer systematischen Verteilung der Schaufeln bezüglich ihrer Eigenfrequenzen lässt sich kein Vorteil gegenüber einer stochastischen Anordnung feststellen. In SEXTRO [147] wird die Kopplung verstimmter Schaufeln über eine elastische Radscheibe durch die Anwendung der Substrukturtechnik berücksichtigt. Als Ansatzfunktionen für die Verformung der Schaufel dienen die Starrkörpermoden der freien Schaufel sowie die Schwingungsformen der fest eingespannten Schaufel und der Radscheibe, vgl. **Bild 1.4d**. Über die Formulierung von Koppelbedingungen werden die Bewegungsgleichungen des Gesamtsystems formuliert. Der Autor stellt eine deutliche Abhängigkeit des Schwingungsverhaltens von einem Frequenzmistuning fest, das u. a. zu Lokalisierungseffekten führt, während der Einfluss

einer Kontaktparameterverstimmung von eher untergeordneter Bedeutung ist. Frequenz- und Kontaktverstimmung sind auch Gegenstand der Arbeit von KRZYŻYŃSKI ET AL. [93] sowie PETROV UND EWINS [128], die u. a. eine Verstimmung des Abstandes zwischen den Deckplatten benachbarter Schaufeln sowie unterschiedlicher Normalkräfte und Tangentialsteifigkeiten an Reibelementen analysieren. Der Frage nach der optimalen Anordnung verstimmter Schaufeln auf dem Scheibenumfang unter Berücksichtigung von Reibelementen sowie der möglichen Nutzung einer systematischen Verstimmung der zunächst unverstimmten Schaufeln gehen u. a. BALMER [8], PANNING ET AL. [120] und GÖTTING [63] nach. In [63] finden sich darüber hinaus ausführliche experimentelle Untersuchungen zu der Wirkungsweise verschiedener Dämpfertypen in einer rotierenden beschauften Scheibe.

1.2.3 Kontaktformulierung

Die allgemeine Untersuchung des Kontaktes zwischen zwei Körpern und das damit verbundene Phänomen der Reibung ist schon sehr lange Gegenstand wissenschaftlicher Forschung. Schon die Beobachtungen von DA VINCI im 15. Jh. und AMONTONS [5] im 17. Jh. sowie später COULOMB [33] im 18. Jh. führten zu Aussagen, die auch heute noch - wenn auch teilweise eingeschränkt - die Grundlage der Kontaktberechnung in vielen technischen Anwendungen bilden: Die Reibkraft zwischen zwei Körpern ist der zwischen ihnen wirkenden Normalkraft proportional, sie ist unabhängig von der Kontaktfläche und der Proportionalitätsfaktor ist von der Gleitgeschwindigkeit unabhängig und in der Gleitphase kleiner als während des Haftens. Einen ausführlichen Überblick über die historische Entwicklung der Untersuchungen auf dem Gebiet der Reibung gibt u. a. DOWSON [43]. Hinsichtlich des Normalkontaktes findet auch heute noch vielfach die von WINKLER [185] vorgeschlagene elastische Bettung Anwendung, die auf der Annahme unabhängig voneinander agierender Normal- und Tangentialsteifigkeiten beruht und mitunter auch als Bürstenmodell, *elastic foundation* oder *elastic layer* bezeichnet wird, siehe SEXTRO [150]. Zur Berechnung der Pressungsverteilung in der Kontaktzone zwischen zwei elastischen Körpern findet auch in aktuellen Problemstellungen häufig die HERTZ'sche Theorie [73] Anwendung. Wichtige Erkenntnisse zu Vorgängen in der Tangentialrichtung eines HERTZ'schen Kontaktes gehen auf CATTANEO [24] und MINDLIN [108] zurück. In der Zwischenzeit gibt es bezüglich der Kontaktmodellierung eine Fülle von Publikationen, die sich mit verschiedenen Aspekten von Kontaktvorgängen wie etwa der Temperaturverteilung, Verschleiß oder der detaillierten Berücksichtigung von Rauheitseinflüssen, siehe u. a. GREENWOOD UND WILLIAMSON [64] sowie WILLNER [184], befassen. Mittlerweile hat sich die Kontaktformulierung, zumeist basierend auf so genannten *Penalty*-Verfahren, der LAGRANGE'schen Multiplikatorstechnik oder Mischformen, auch in kommerziellen Finite-Element-Programmen etabliert. Mit der numerischen Umsetzung von Kontaktproblemen befassen sich u. a. WRIGGERS [189] und EBERHARD [44]. Einen umfassenden Überblick über verschiedene Aspekte der Kontaktformulierung gibt u. a. JOHNSON [84].

Aufgrund der großen Anzahl Publikationen aus dem Bereich der Kontaktmodellierung soll in der folgenden Übersicht ausschließlich auf diejenigen aus der Literatur bekannten Ansätze näher eingegangen werden, die unmittelbar auf die Formulierung des Kontaktes zwischen Turbinenschaufeln und den verwendeten Koppellementen angewandt werden. Sie lassen sich im Wesentlichen auf der Basis folgender Kriterien klassifizieren:

- Ausdehnung des Kontaktes: Reduktion des Kontaktgeschehens auf einen Punktkontakt oder Behandlung des flächigen Kontaktes,
- Anzahl Freiheitsgrade: ein-, zwei- oder dreidimensionales Kontaktmodell,
- Reibcharakteristik: Kraft-Verschiebungs-Zusammenhang und Reibhysterese (Mikroschlupfmodell oder Berücksichtigung von Mikroschlupfeffekten), Berücksichtigung der Gleitgeschwindigkeit usw.,
- Normalkontakt: konstante oder zeitvariante Normalkraft.

Ausdehnung des Kontaktes Der nichtlineare Reibkontakt zwischen Turbinenschaufel und Koppellement wird zumeist lokal im Vergleich zur linear angenommenen globalen Gesamtstruktur betrachtet. Dennoch gibt es verschiedene Ansätze, die in dem Kontakt auftretenden Kräfte und Momente detaillierter aufzulösen. Die überwiegende Anzahl der verwendeten Kontaktmodelle geht von einem Punktkontakt aus. Die Relativbewegung zwischen den Kontaktpartnern wird durch die Relativverschiebung w_T eines einzigen Punktes P' bezüglich der Lage eines koinzidierenden Punktes P angegeben. Eine exaktere Abbildung der Kontaktvorgänge, wie etwa die Bestimmung verteilter Kräfte und die daraus resultierenden Momente in einem flächigen Kontakt, gelingt aber erst durch die Berücksichtigung mehrerer Kontaktpunkte, die sich z. B. durch abweichende Relativverschiebungen $w_{T,i}$ oder Normalkräfte $F_{N,i}$ voneinander unterscheiden können. Eine Modellierung dieser Art schlagen SEXTRO ET AL. [154] zur Beschreibung eines Linienkontaktes vor, der in einzelne Punktkontakte diskretisiert wird. Die Relativverschiebung eines beliebigen Kontaktpunktes lässt sich aus der Verschiebung und Verdrehung eines Kontaktpunktes und deren Abstand zueinander ermitteln. Eine Erweiterung auf den flächigen Kontakt zwischen Deckbandschaufeln wird von SEXTRO [148] angegeben: Die Kontaktzone wird in eine endliche Anzahl diskreter Punktkontakte unterteilt, deren individuelle Relativverschiebungen sich wieder aus den verallgemeinerten Verschiebungen eines Referenzpunktes ergeben, siehe **Bild 1.8a**. Der Vorteil dieser Vorgehensweise liegt in der Möglichkeit, im Kontakt auftretende Verschiebungen *und* Momente in allen Koordinatenrichtungen zu berechnen. Mikroschlupfeffekte aufgrund unterschiedlicher Relativverschiebungen einzelner Kontaktpunkte lassen sich ebenfalls berücksichtigen. So beginnen beispielsweise die am Rande einer Kontaktzone befindlichen Kontaktpunkte im Fall einer Verdrehung um die Kontaktnormale eher zu gleiten als nahe an der Drehachse liegende Punkte. Nahezu zeitgleich schlägt CSABA [37] ein sehr ähnliches Vorgehen für die Untersuchung eines *curved wedge dampers* auf der Basis eines Bürstenmodells vor, siehe **Bild 1.8b**. Anhand von Reibhysteresen und den in verschiedenen Zuständen ermittelten tangentialen Bürstenkräften lässt sich in [37] sehr anschaulich die Verteilung der Kontaktkräfte in der Kontaktzone erkennen.

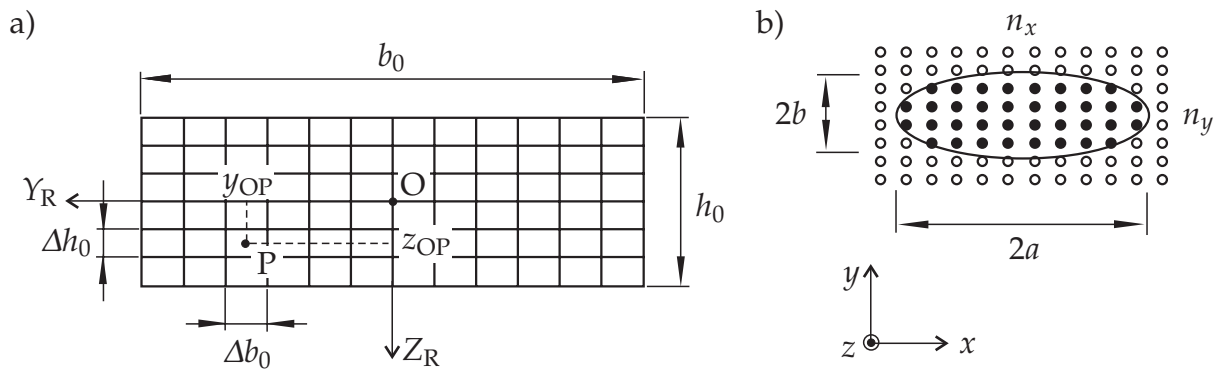


Bild 1.8: Diskretisierte Kontaktflächen: a) zur Untersuchung des Deckbandkontaktes, nach SEXTRO [148]; b) Anwendung auf das Bürstenmodell eines *curved wedge dampers* mit allgemeiner, elliptischer Kontaktfläche, nach CSABA [37]

Anzahl Freiheitsgrade im Kontakt Erste Überlegungen zur Modellierung des Reibkontaktes zwischen Turbinenschaufel und Koppелеlement führten auf eindimensionale Modelle, die eine Relativverschiebung im Kontakt in nur einer Richtung zulassen, siehe u. a. GRIFFIN [65, 66], MENQ ET AL. [104], PFEIFFER UND HAJEK [130], BALMER [8], YANG UND MENQ [194] sowie CSABA [36]. Messungen der Relativverschiebungen z. B. in real ausgeführten Deckbandkontakten zeigen allerdings u. a. aufgrund der Kopplung von Biege- und Torsionsschwingungen gekoppelte, zweidimensionale Relativbewegungen, siehe SRINIVASAN UND CUTTS [159]. Die Beschreibung dieser Vorgänge ermöglichte später die Hinzunahme eines weiteren Freiheitsgrades in der Kontaktebene, siehe u. a. SEXTRO UND POPP [152], SANLITURK UND EWINS [138] sowie MENQ UND YANG [105]. Die in jüngster Zeit vorgeschlagenen Modelle berücksichtigen darüber hinaus einen weiteren Freiheitsgrad in Normalenrichtung, sodass z. B. auch der Zustand der Separation, d. h. des Kontaktverlustes abgebildet wird. Dies kann unter Berücksichtigung nur eines tangentialen Freiheitsgrades, siehe YANG ET AL. [192], zweier voneinander entkoppelter tangentialer Freiheitsgrade, siehe YANG ET AL. [191], oder unter Berücksichtigung zweier gekoppelter tangentialer Freiheitsgrade erfolgen, siehe u. a. YANG UND MENQ [196]. Dabei kann gezeigt werden, dass die HBM auch im Fall der Separation recht genaue Approximationen der mit Hilfe von Zeitschrittintegrationen ermittelten Frequenzgänge liefert. Neben drei translatorischen Relativbewegungen sind auch die oben genannten, auf einer Diskretisierung der Kontaktfläche basierenden Kontaktmodelle entwickelt worden, die Relativverdrehungen der Kontaktflächen gegeneinander zulassen, sodass sechs Freiheitsgrade berücksichtigt werden können, siehe SEXTRO [148] sowie CSABA [37].

Reibcharakteristik In nahezu allen bekannten Publikationen zur Modellierung des Reibkontaktes zwischen Turbinenschaufeln basiert die Berechnung der Kontaktkräfte auf einer Form des so genannten Elasto-Gleit-Modells², das aus einer Reihenschaltung eines

²Für die Reihenschaltung eines COULOMB'schen Reibkontaktes mit einer Elastizität existieren in der Literatur diverse Bezeichnungen, u. a. MASING-, JENKINS- oder PRANDTL-Element, Elastic COULOMB Friction Model, Macroslip Model, Elasto Slip Model usw. Hier soll einheitlich der u. a. auch von KLAMT [88] und WIBBROCK [186] genutzte Begriff *Elasto-Gleit-Modell* verwendet werden.

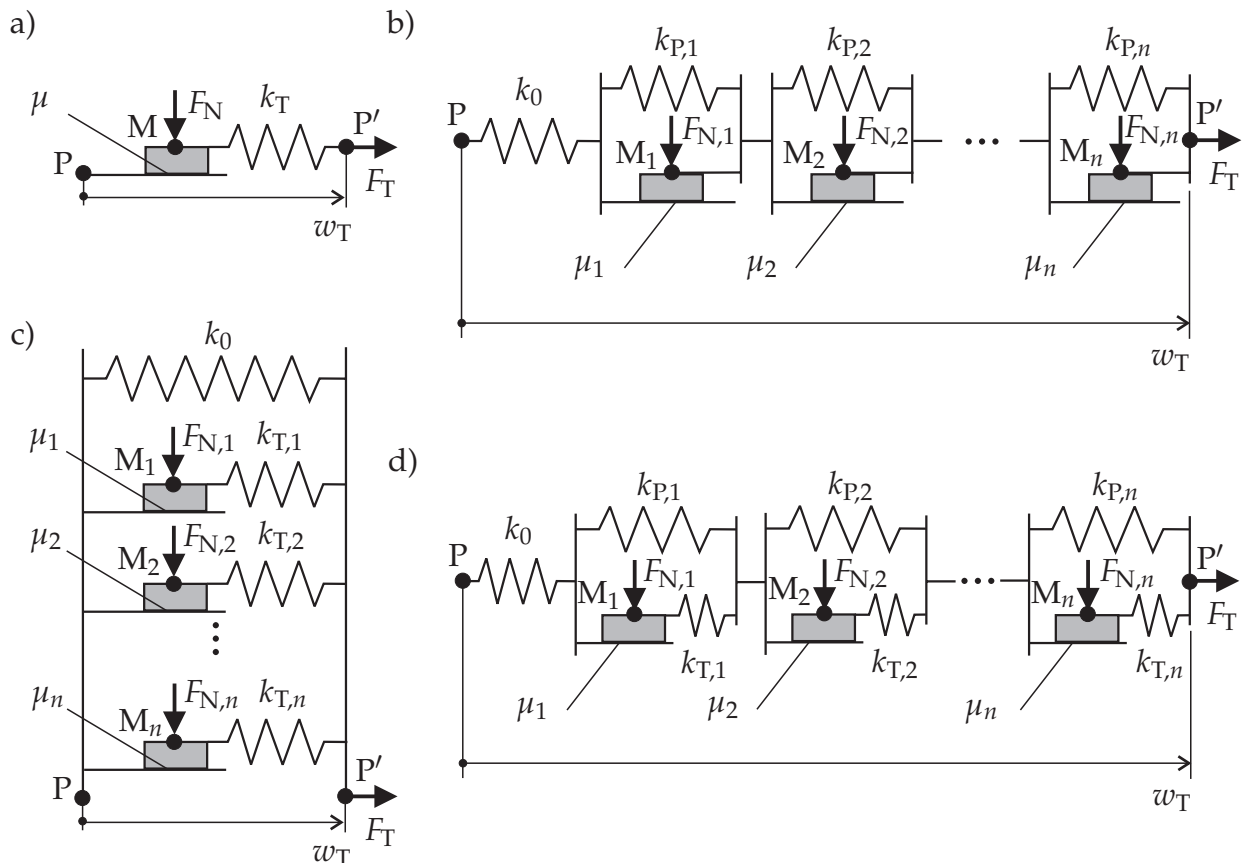


Bild 1.9: Diskrete Reibmodelle: a) Elasto-Gleit-Modell; b) IWAN-Modell; c) MASING-Modell; d) so genanntes *series-parallel-series*-Modell

COULOMB'schen Reibelement mit dem Reibkoeffizienten μ und der Normalkraft F_N sowie einer tangentialen Steifigkeit k_T besteht, siehe **Bild 1.9a**. Wird eine Anzahl n dieser Elemente in einer Parallelschaltung zusammengefasst, wird nach OTTL [115] von einem so genannten MASING-Modell, siehe [101], gesprochen, vgl. **Bild 1.9c**. Die alternative Reihenschaltung von parallel angeordneten Reibkontakten und Steifigkeiten, vgl. **Bild 1.9b**, wird als IWAN-Modell bezeichnet, siehe [78]. In SANLITURK UND EWINS [138] sowie MENQ ET AL. [102] werden diese als *parallel-series* bzw. *series-parallel model* bezeichnet und beide IWAN zugeschrieben. Mit dem so genannten *series-parallel-series*-Modell nach **Bild 1.9d**, das von MENQ ET AL. [102] als Grundlage für eine schubelastische Bettung verwendet wird, lässt sich das IWAN-Modell als Grenzfall mit $k_{T,i} \rightarrow \infty$ abbilden. Eingangsgröße zur Berechnung des Zusammenhangs zwischen Tangentialkraft F_T und tangentialer Relativverschiebung w_T ist entweder die Relativbewegung zwischen den hier mit P' und P bezeichneten Punkten (nach OTTL [115] vorzugsweise bei MASING-Modellen) bzw. die Tangentialkraft (vorzugsweise bei IWAN-Modellen).

Entscheidend für eine ausreichend genaue Abschätzung der in den Reibkontakten dissipierten Energie ist eine sinnvolle Approximation von real auftretenden Reibhysteresen, deren Flächeninhalt der im Reibkontakt dissipierten Energie entspricht. Die experimentelle Ermittlung von Reibhysteresen im Zusammenhang mit Reibungsdämpfung an Turbinenbeschaufelungen, wie sie u. a. von

BALMER [8], CSABA [37], SANLITURK ET AL. [140], SZWEDOWICZ ET AL. [164], BERRUTI ET AL. [9], STANBRIDGE ET AL. [160], KOH ET AL. [90], FILIPPI ET AL. [56] und D'AMBROSIO ET AL. [39] angegeben werden, zeigt zumeist mehr oder weniger deutlich ausgeprägte Mikroschlupfbereiche. Diese sind dadurch gekennzeichnet, dass mit zunehmender tangentialer Relativverschiebung w_T größere Bereiche der Kontaktfläche in den Zustand des Gleitens versetzt werden, während kleinere Bereiche noch im Haftzustand verbleiben, bevor Makrogleiten eintritt. Diese Mikroschlupfvorgänge spiegeln sich in den Reibhysteresen in einem kontinuierlichen, durch eine Reduktion der tangentialen Steifigkeit gekennzeichneten Übergangsbereich vom Haftzustand in den Zustand des Makrogleitens wider. Die sich aus dem einfachen Elasto-Gleit-Modell ergebende Reibhysterese ist nicht in der Lage, diese Mikroschlupfbereiche abzubilden, siehe **Bild 1.10a**, sodass sich verschiedene Ansätze zur genaueren Approximation der Kraft-Verschiebung-Kennlinien etabliert haben. So schlagen etwa SANLITURK ET AL. [141] für die beiden Äste der Hysterese einen Exponentialansatz in der Form

$$F_T(w_T) = \pm F_{T,\max}(1 - e^{-\gamma w_{T,\max}}) \mp 2F_{T,\max}(1 - e^{-\gamma \frac{w_{T,\max} \mp w_T}{2}}) \quad (1.5)$$

mit den Parametern $F_{T,\max}$ und γ vor, siehe **Bild 1.10b**. Eine auf dem MASING-Modell basierende Beschreibung der Reibhysteresen kann u. a. durch die Anpassung der individuellen Parameter einzelner Elasto-Gleit-Modelle erfolgen, siehe etwa SANLITURK UND EWINS [138] und auch GAUL UND NITSCHKE [61]. Die Tangentialkraft ergibt sich dann allgemein aus der Summation

$$F_T(w_T) = \sum_{i=1}^{n_{\text{Gleit}}} \mu_i F_{N,i} + \sum_{i=n_{\text{Gleit}}+1}^n k_{T,i} (w_T - w_{T,H_i}) \quad (1.6)$$

mit der Anzahl n_{Gleit} der im Gleitzustand befindlichen Elasto-Gleit-Modelle und den Verschiebungen w_{T,H_i} zu Beginn der letzten Haftphase einzelner Elasto-Gleit-Modelle i . Auf

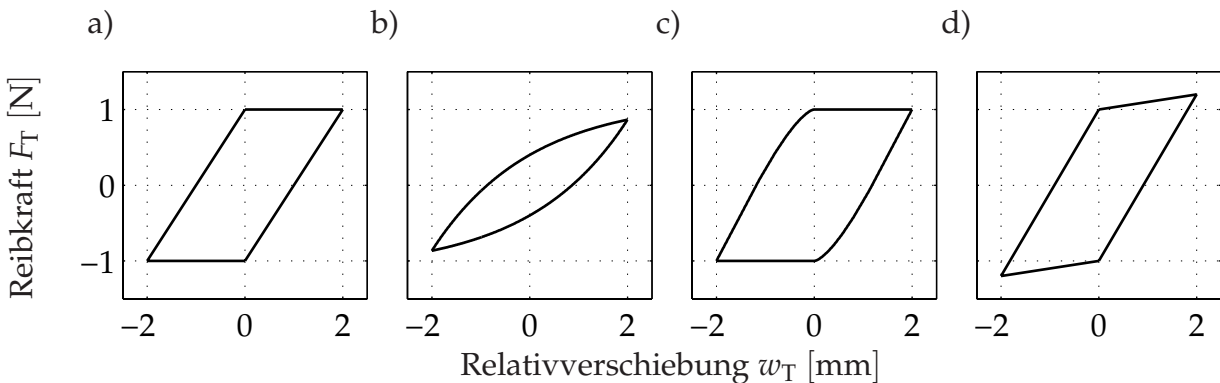


Bild 1.10: Qualitative Darstellung von Reibhysteresen: a) auf der Basis eines Makroschlupfmodells nach **Bild 1.9a**; b) durch Approximation des Reibkraftverlaufs mit Exponentialfunktionen nach SANLITURK ET AL. [141]; c) durch Variation der Parameter der einzelnen Reibstränge des MASING-Modells nach **Bild 1.9c**, etwa zur Abbildung der HERTZ'schen Flächenpressung, vgl. SEXTRO [147]; d) unter Berücksichtigung eines variablen Reibwertes nach BERRUTI ET AL. [9]

diese Weise lässt sich beispielsweise mit einer entsprechenden Verteilung der Normalkräfte $F_{N,i}$ die HERTZ'sche Flächenpressung abbilden, vgl. SEXTRO [147] und **Bild 1.10c**.

Hinsichtlich des Reibkoeffizienten μ ist festzustellen, dass nahezu alle auf Schaufelschwingungen angewandten Kontaktmodelle von einem konstanten Reibkoeffizienten ausgehen und die Relativgeschwindigkeit somit keine Berücksichtigung findet. BERRUTI ET AL. [9] versuchen, gemessene Reibhysteresen durch eine lineare Abhängigkeit $\mu = \mu(w_T)$ des Reibkoeffizienten von der Relativbewegung in den Bereichen geringer Steigung der Hysterese zu approximieren, siehe **Bild 1.10d**. WANG UND SHIEH [173] präsentieren Ergebnisse für einen Einmassenschwinger mit einem einfachen Elasto-Gleit-Modell und geschwindigkeitsabhängigem Reibkoeffizienten und stellen fest, dass sich im Gegensatz zu Modellen mit konstantem Reibkoeffizienten größere Schwingungsamplituden und kleinere Resonanzfrequenzen ergeben. Die Autoren weisen aber auch auf die Schwierigkeiten bei der experimentellen Ermittlung der Reibcharakteristik hin und nutzen einen Exponentialansatz zur Ermittlung des funktionalen Zusammenhangs zwischen Relativgeschwindigkeit \dot{w}_T und Reibkoeffizient $\mu = \mu(\dot{w}_T)$.

Ein auf dem kontinuierlichen Grenzfall des diskreten *series-parallel-series*-Modells nach **Bild 1.9d** basierendes Vorgehen schlagen MENQ ET AL. [102] mit dem so genannten *bar model* vor, das aus einem über eine schubelastische Bettung mit der Umgebung gekoppelten elastischen Balken der Dehnsteifigkeit EA besteht, siehe **Bild 1.11**. Die am Balkenende angreifende Kraft F_T führt in der elastischen Schicht zu Haft- und Gleitbereichen, sodass Mikroschlupfeffekte abbildbar sind. Die Autoren zeigen, dass diese mit steigendem Verhältnis der Steifigkeiten der elastischen Schicht zur Balkensteifigkeit deutlicher auftreten. In MENQ ET AL. [104] wird dieses Modell u. a. auf Reibelemente und den Deckbandkontakt angewandt. Eine modifizierte Version dieses Modells unter Vernachlässigung der elastischen Schicht und unter der Annahme einer quadratischen Funktion für die Flächenpressung p wird von CSABA UND ANDERSSON [38] und CSABA [36] zur Modellierung des Kontaktes zwischen Reibelement und Schaufelfußplatte genutzt. Später weist CSABA [37] aber auf entscheidende Schwächen des Modells hin, die er in der unbekanntem anzusetzenden Querschnittsfläche A des Balkens zur Modellierung von realen Reibelementen sowie in der Beschränkung auf eindimensionale Relativbewegungen sieht. Aus diesem Grund wird in [37] anstelle des *bar models* das in **Bild 1.8b** dargestellte zweidimensionale

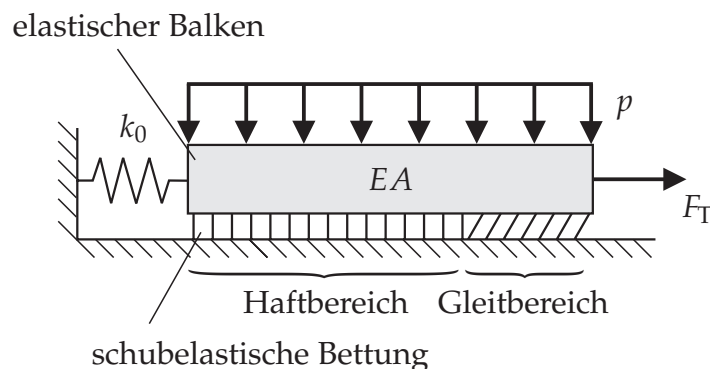


Bild 1.11: So genanntes *bar model*, nach MENQ ET AL. [102]

Bürstenmodell genutzt. Auch von JARELAND wird dieser Weg beschrrieben: Nachdem zunächst in JARELAND UND CSABA [81] das *bar model* zum Einsatz kommt, wird der Reibkontakt später mit Hilfe eines MASING-Modells (JARELAND [79]) und des von CSABA [37] entwickelten Bürstenmodells (JARELAND [80]) beschrieben.

Normalkontakt Die oben beschriebene Tendenz zu einer exakteren Kontaktmodellierung lässt sich insbesondere am Beispiel des Normalkontaktes erkennen. Während die im Kontakt herrschende Normalkraft in den ursprünglichen Kontaktmodellen zumeist als konstant angesehen wird und ein entsprechender Freiheitsgrad unberücksichtigt bleibt, lassen z. B. YANG UND MENQ [196] harmonische Fluktuationen der Normalkraft zu. PETROV UND EWINS [125] bestimmen die im Kontakt wirkende Normalkraft aus einem so genannten *gap element* mit einer linearen Feder und möglicher Separation. Abhängig von der anfänglichen Distanz der Kontaktpartner und der Schwingungsamplitude in Normalenrichtung kann den Frequenzgängen eine degressive oder progressive Steifigkeit des Kontaktes entnommen werden. Den Einfluss der Normalkraftvariation auf die Reibhysteresen zeigen u. a. YANG ET AL. [192], CSABA [37], SEXTRO [150] sowie PETROV UND EWINS [127]. In diesem Zusammenhang weisen SANLITURK ET AL. [140] darauf hin, dass die während einer Schwingungsperiode auftretende Normalkraft in einem Reibkontakt deutlich von der statischen Normalkraft abweichen kann. Im Gegensatz dazu nimmt CSABA [37] an, dass der dynamische Anteil der Normalkraft im Vergleich zu den aufgrund der Rotation auf den Dämpfer wirkenden großen statischen Normalkräfte in der realen Anwendung vernachlässigbar ist. Der zusätzliche Einfluss der bei realen Kontakten stets vorhandenen Oberflächenrauheit wird von SEXTRO [148] durch nichtlineare Steifigkeiten in Normalenrichtung berücksichtigt.

1.3 Inhalt und Ziel dieser Arbeit

Das Ziel dieser Arbeit ist es, ein experimentell abgesichertes Modell einer durch Reibelemente gekoppelten Beschaufelung zu entwickeln, welches die Optimierung beliebiger, in der Praxis eingesetzter Reibelemente erlaubt. Damit soll eine Lücke im heutigen Wissensstand geschlossen werden, die sich aus der fehlenden Kenntnis über den Einfluss verschiedener konstruktiver Parameter des Koppellements auf das Schwingungsverhalten des Gesamtsystems ergibt. Während in aktuellen Publikationen nur selten auf die individuelle Geometrie ausgeführter Koppellemente eingegangen wird und insbesondere ein detaillierter Vergleich verschiedener konstruktiver Lösungen nahezu gänzlich fehlt, soll das in dieser Arbeit entwickelte Berechnungsverfahren in der Lage sein, Aufschlüsse hinsichtlich des Optimierungspotenzials einzelner Parameter für möglichst allgemeine Koppellemente zu geben. Im Mittelpunkt steht dabei die theoretische und experimentelle Untersuchung verschiedener Reibelemente, die sich hinsichtlich ihrer Geometrie in die in **Bild 1.12** dargestellten drei Grundtypen unterteilen lassen: zylinderförmige, asymmetrische und keilförmige Reibelemente. Auf diese Reibelementtypen lassen sich nahezu beliebige Reibelementgeometrien, wie sie etwa in **Bild 1.5** dargestellt sind, zurückführen.

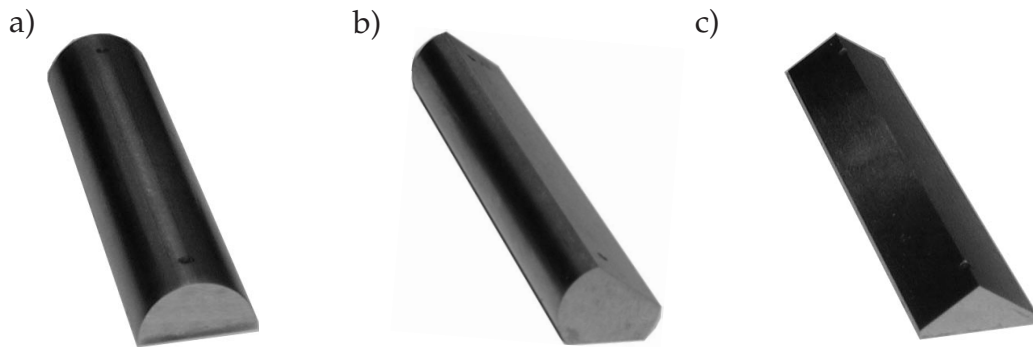


Bild 1.12: Untersuchte Reibelementgeometrien: a) zylinderförmiges Reibelement; b) asymmetrisches Reibelement; c) keilförmiges Reibelement

Das zur Untersuchung dieser verschiedenen Geometrien entwickelte Kontaktmodell muss daher möglichst allgemein formuliert sein, sodass darüber hinaus auch eine vergleichende Analyse von Deckbandkontakten möglich ist. Im Gegensatz zu den vielfach in der Literatur vorgeschlagenen vereinfachten mechanischen Ersatzmodellen zur Untersuchung grundsätzlicher Phänomene soll das in dieser Arbeit entwickelte Verfahren unmittelbar auf den Ergebnissen einer dreidimensionalen Finite-Element-Berechnung einer realen Beschau felung aufbauen, siehe auch **Bild 1.13**. In Verbindung mit der erstmals durchgeführten detaillierten Unterscheidung verschiedener Reibelementgeometrien wird die Basis für eine systematische Untersuchung verschiedener Parameter zum tieferen Verständnis des Einflusses der Kopp elemente auf das dynamische Verhalten der Beschau felung geschaffen.

Eine weitere Forderung an das zu entwickelnde Berechnungsverfahren ist die Umsetzung in ein Programmsystem, das sich unmittelbar in der praktischen Schaufelauslegung anwenden lässt, sodass eine Auslegung und Optimierung verschiedener Kopp elemente ohne weitere Vereinfachungen für reale Beschau felungen ermöglicht wird. Hierzu sollen alle relevanten Effekte und Einflussgrößen berücksichtigt werden, um so ein praxistaugliches Gesamtkonzept zur Auslegung von Kopp elementen für Turbinenbeschau felungen zur Verfügung zu stellen.

Aufbauend auf den Arbeiten von BALMER [8] und SEXTRO [147, 148] soll das zu entwickelnde Berechnungsverfahren u. a. folgende Aspekte umfassen:

- Berechnung dreidimensionaler Schaufelschwingungen mit Reibelementen und Deckbändern in unverstimmten und verstimmten Beschau felungen,
- Berücksichtigung verschiedener Kopp elemente, insbesondere beliebiger Reibelementgeometrien und geteilter Deckbänder,
- Entwicklung von Schnittstellen und Anbindung zu vorhandenen Finite-Element-Modellen,
- automatisierte Parametervariationen zur Optimierung konstruktiver Parameter.

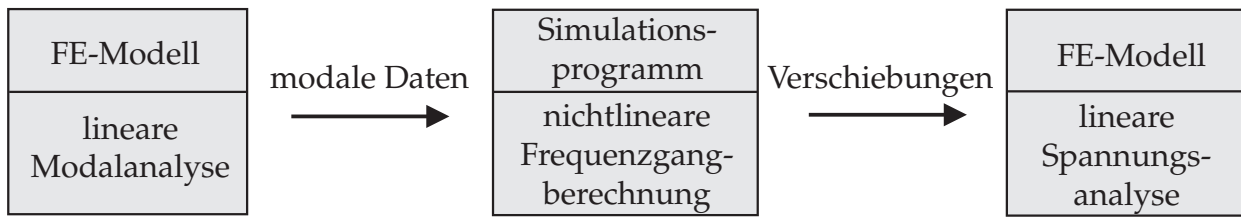


Bild 1.13: Konzept zur Berechnung des nichtlinearen Gesamtsystems

Im Folgenden soll zunächst ein theoretisches Modell zur Berechnung beschauelter Scheiben mit Koppелеlementen auf der Basis der oben genannten Forderungen entwickelt werden. Dies umfasst die Beschreibung der Dynamik des Schaufelkranzes im unverstimmten und verstimmtten Fall sowie die Modellierung der auf die Schaufelblätter wirkenden dynamischen Erregerkräfte. Eine zentrale Bedeutung kommt der Modellierung des Reibkontaktes zwischen Schaufel und Koppелеlement zu, die ausführlich dargestellt wird. Abschließend werden die Bewegungsgleichungen des gekoppelten Gesamtsystems für verschiedene Systemtypen wie der unverstimmten und der verstimmtten beschauelten Scheibe sowie von Kettenstrukturen hergeleitet. Weiterhin wird kurz die Umsetzung der entwickelten Verfahren in verschiedene Simulationsprogramme zur praktischen Schaufelenauslegung dargestellt.

Im Anschluss sollen detaillierte Parameterstudien hinsichtlich aller relevanter Parameter Einblicke in die Wirkungsweise verschiedener Dämpfungstypen im zunächst unverstimmten Schaufelkranz geben. Zu diesem Zweck werden am Beispiel eines Referenzsystems verschiedene Variationen u. a. hinsichtlich der Kontaktparameter, der Erregerkräfte und insbesondere der Reibelementgeometrie durchgeführt, um zum einen die Sensitivität bezüglich Parameterschwankungen und zum anderen die im Hinblick auf eine möglichst gute Dämpfungswirkung optimalen Parameter zu ermitteln. Insbesondere sollen Vor- und Nachteile der verschiedenen Reibelementgeometrien herausgestellt werden. Neben dem Einfluss der Koppелеlemente auf die Schwingungsamplitude soll auch der Einfluss auf die Resonanzfrequenzen verschiedener Schwingungsfamilien untersucht und ein Gesamtkonzept zur sinnvollen Auslegung von Koppелеlementen vorgeschlagen werden. Darüber hinaus sollen exemplarische Studien bezüglich einer Frequenz- sowie einer Kontaktverstimmung grundlegende Effekte bei verstimmtten Beschauelungen aufzeigen. In diesem Zusammenhang soll auch auf die Frage einer vorteilhaften systematischen Anordnung der Schaufeln auf dem Scheibenumfang eingegangen werden.

Abschließend soll anhand von Anwendungsbeispielen die Wirkungsweise von Reibelementen unterschiedlicher Geometrie aufgezeigt werden. Hierzu dient zum einen ein vereinfachtes, aus zwei über ein Reibelement gekoppelten Modellschaufeln bestehendes Versuchsmodell. Zum anderen soll anhand von Beispielen aus dem Fluggasturbinenbau und dem Bereich stationärer Gasturbinen die Anwendung des entwickelten Berechnungsverfahrens auf reale Schaufelkränze und die Vorgehensweise bei der praktischen Auslegung von Reibelementen demonstriert werden.

2 Modellbildung

Im vorliegenden Kapitel der Modellbildung wird zunächst auf die Dynamik der beteiligten Strukturen wie der beschaukelten Scheibe und der Reibungsdämpfer eingegangen. Im Anschluss an die Beschreibung der äußeren Erregerkräfte wird ein Kontaktmodell vorgestellt, mit dessen Hilfe die zwischen Schaufel und Koppелеlement auftretenden Kontaktkräfte bestimmt werden. Im Anschluss werden die gefundenen Beziehungen zu einem Gesamtmodell zusammengefasst und kurz dessen programmtechnische Umsetzung zur Lösung der Gesamtgleichung vorgestellt. Darüber hinaus werden Hinweise zur Ermittlung notwendiger Modellparameter gegeben. Zusammenfassend soll die Praxistauglichkeit des entwickelten Verfahrens diskutiert und auf Grenzen der Anwendbarkeit eingegangen werden.

2.1 Dynamische Beschreibung der Teilstrukturen

Im Folgenden soll die Herleitung der Bewegungsgleichungen der zunächst ungekoppelten Teilstrukturen der beschaukelten Scheibe und der Reibelemente erfolgen. Zu diesem Zweck werden zunächst geeignete Koordinatensysteme eingeführt. Basierend auf der Beschreibung der eingespannten Schaufel und des unverstimmten zyklischen Schaufel-Scheibe-Segments werden die modal transformierten Bewegungsgleichungen der verstimmt beschaukelten Scheibe sowie des Reibelements hergeleitet.

2.1.1 Koordinatensysteme

Die Beschreibung der Teilstrukturen Schaufel, Scheibe und Dämpferelement sowie die Berechnung der Kontaktkräfte erfordert zunächst die Definition geeigneter Koordinatensysteme und die Bestimmung entsprechender Transformationsmatrizen zur Kopplung der Teilsysteme. Das Referenzsystem einer individuellen Schaufel (Index S) ist gemäß **Bild 2.1a** definiert, wobei die ςx -Achse in Hauptströmungsrichtung parallel zur Drehachse des Rotors orientiert ist. Die ςy -Achse entspricht der Umfangsrichtung, die ςz -Achse der radialen Richtung. Aufgrund der zyklischen Symmetrie des Schaufelkranzes wird jede Schaufel in einem individuellen Koordinatensystem beschrieben, dessen Orientierung sich aus einer Drehung um die Rotorachse mit dem Teilungswinkel

$$\delta = \frac{2\pi}{n_S} \quad (2.1)$$

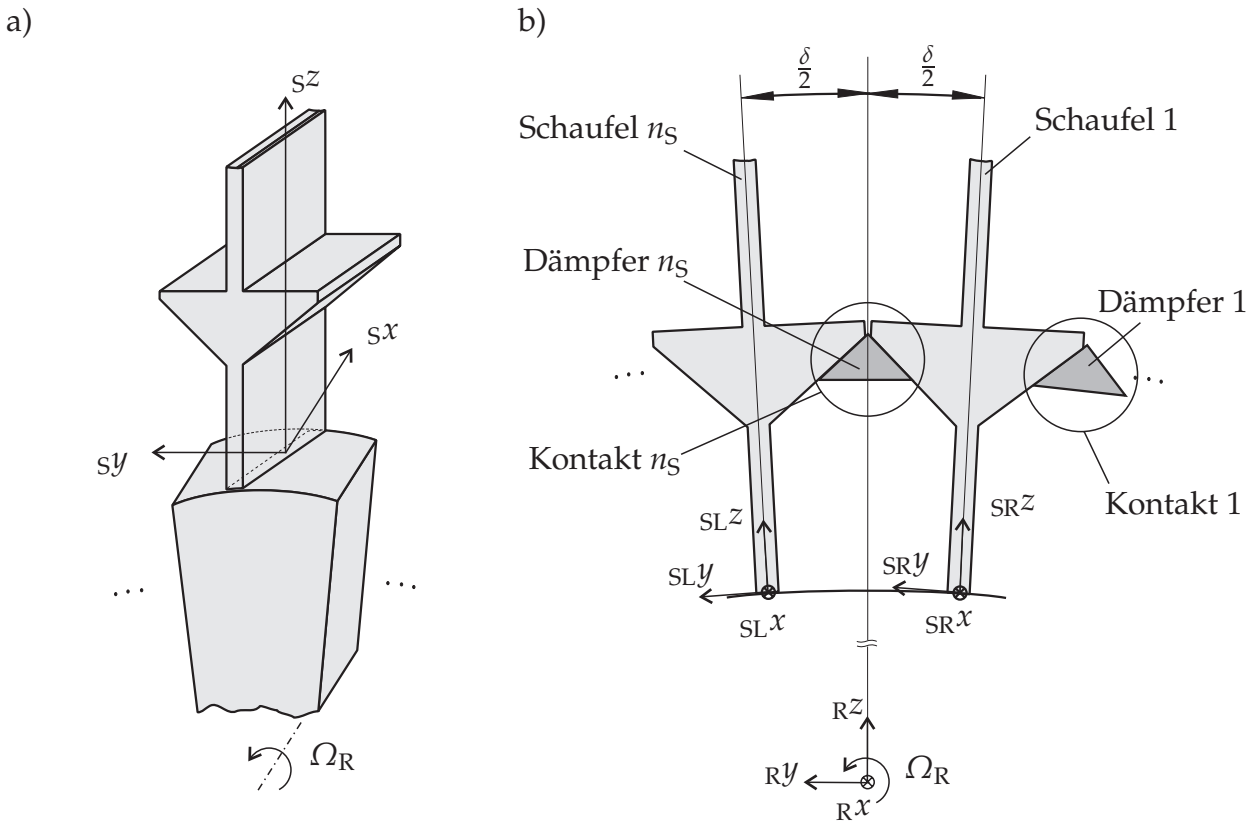


Bild 2.1: Definition der schaufelfesten Koordinatensysteme: a) Segment einer beschaufelten Scheibe; b) Berücksichtigung des Teilungswinkels

mit der Schaufelanzahl n_S ergibt. Die folgenden Beziehungen zwischen den verschiedenen Koordinatensystemen werden beispielhaft für den in **Bild 2.1b** dargestellten Dämpfer n_S mit den benachbarten Schaufeln 1 und n_S hergeleitet. Die Koordinatensysteme benachbarter Schaufeln werden durch die Koordinatentransformation

$${}^{SL} {}^{SR} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta & -\sin \delta \\ 0 & \sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

ineinander überführt. Weiterhin wird ein scheibefestes Zwischensystem (Index R) eingeführt, welches sich durch Drehung des Schaufelkoordinatensystems S um die Rotorachse mit dem halbem Teilungswinkel $\frac{\delta}{2}$ ergibt.

Die Beschreibung der Dämpfergeometrie erfolgt zweckmäßigerweise in einem dämpferfesten Koordinatensystem (Index D). Die Orientierung der ${}_D z$ -Achse entspricht der ${}_R z$ -Achse des scheibefesten Zwischensystems. Aufgrund der Schaufelanstellung entspricht die Längsachse des Dämpfers im Allgemeinen nicht der Rotorachse. Das in **Bild 2.2a** dargestellte Dämpferkoordinatensystem ist daher gegenüber dem Zwischensystem um den Anstellwinkel β bezüglich der ${}_R z$ -Achse verdreht. Der Ursprung des Dämpferkoordinatensystems entspricht dem Dämpferschwerpunkt C.

Die Koordinatensysteme des linken und rechten Kontaktes zwischen Dämpfer und Schaufelfußplatte dienen der Beschreibung der Relativverschiebungen und der darauf

bzw.

$${}^D \text{SR} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \cos \frac{\delta}{2} & \sin \beta \sin \frac{\delta}{2} \\ \sin \beta & \cos \beta \cos \frac{\delta}{2} & -\cos \beta \sin \frac{\delta}{2} \\ 0 & \sin \frac{\delta}{2} & \cos \frac{\delta}{2} \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Unter der Voraussetzung, dass keine Winkeldifferenzen auftreten und der flächige Kontakt des Dämpfers exakt an der Fußplatte der Schaufeln anliegt, ergeben sich aus der Forderung der Kompatibilität die Transformationsmatrizen zwischen den Schaufel- und den Kontaktkoordinatensystemen aus

$${}^{\text{KL}} \text{SL} \mathbf{A} = {}^{\text{KL}} \text{D} \mathbf{A} {}^{\text{D}} \text{SL} \mathbf{A}, \quad {}^{\text{KR}} \text{SR} \mathbf{A} = {}^{\text{KR}} \text{D} \mathbf{A} {}^{\text{D}} \text{SR} \mathbf{A}. \quad (2.6)$$

Im weiteren Verlauf werden neben den Translations- auch Rotationsfreiheitsgrade berücksichtigt, sodass die Transformationsmatrizen auf $[6 \times 6]$ -Matrizen der Form

$$\mathbf{G}_{\text{DL}} = \begin{bmatrix} {}^{\text{KL}} \text{D} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^{\text{KL}} \text{D} \mathbf{A} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_{\text{DR}} = \begin{bmatrix} {}^{\text{KR}} \text{D} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^{\text{KR}} \text{D} \mathbf{A} \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{G}_{\text{SL}} = \begin{bmatrix} {}^{\text{KL}} \text{SL} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^{\text{KL}} \text{SL} \mathbf{A} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_{\text{SR}} = \begin{bmatrix} {}^{\text{KR}} \text{SR} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^{\text{KR}} \text{SR} \mathbf{A} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

erweitert werden. Diese werden an späterer Stelle zur Ermittlung der Systemgleichung wieder aufgegriffen, siehe Abschnitt 2.4. Die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Koordinatensystemen sind zusammenfassend in **Bild 2.3** am Beispiel des Dämpfers n_S dargestellt. Sie sind auf alle weiteren Segmente des Schaufelkranzes übertragbar und für ein verstimmtes System auch individuell für einzelne Kontakte zu formulieren.

Die genannten Referenzsysteme der Schaufeln und der Dämpfer sind zweckmäßig gewählt, da in diesen Systemen die Definition der Geometrie und der dynamischen Eigenschaften der Teilstrukturen besonders günstig erscheint. Grundsätzlich lassen sich beliebi-

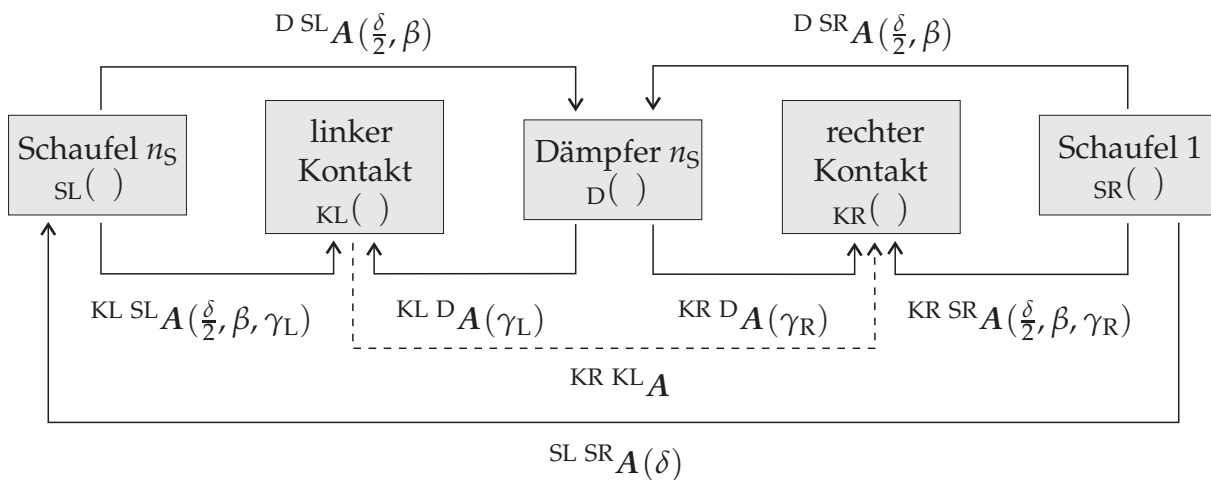


Bild 2.3: Transformationen zwischen den Koordinatensystemen des Dämpfers, der benachbarten Schaufeln und der Kontaktflächen

ge Koordinatensysteme definieren, etwa für den Fall, dass die modalen Daten eines Finite-Element-Modells in einem abweichenden Koordinatensystem verfügbar sind. In diesem Fall ist eine entsprechende Koordinatentransformation in die oben beschriebenen Referenzsysteme mit Hilfe einer geeigneten Schnittstelle erforderlich, siehe auch **Bild 2.29** in Abschnitt 2.5. Auf die gleiche Weise lässt sich der Fall berücksichtigen, dass die ${}_D z$ -Achse des Dämpfers nicht mit der ${}_R z$ -Achse des gewählten scheibenfesten Zwischensystems koinzidiert.

Mit Hilfe der dargestellten allgemeinen Formulierung der Nominallage des Dämpfers und der Kontaktflächen in Bezug auf die schaufelfesten Koordinatensysteme können nahezu beliebige in der Praxis eingesetzte Schaufel-Dämpfer-Konfigurationen abgebildet werden. Voraussetzungen sind lediglich,

- dass der Dämpfer in seiner Nominallage auf der gesamten Kontaktfläche anliegt und Fertigungstoleranzen hinsichtlich der Winkelabweichungen an Dämpfer und Fußplatten zu vernachlässigen sind, sodass Gl. (2.6) gilt und
- dass die η -Achsen der Kontaktkoordinatensysteme sowie die ${}_D x$ -Achse des Dämpferkoordinatensystems parallel zueinander sind, sodass die Beziehungen aus Gl. (2.3) anwendbar sind.

Für den Fall einer Kopplung benachbarter Schaufeln über ein geteiltes Deckband ergibt sich nur *eine* Kontaktfläche, sodass die Lage der Koordinatensysteme KL und KR nicht mehr unabhängig voneinander ist. Wird die Kontaktzone wiederum als rechteckförmig angenommen, so fällt der Ursprung des rechten und des linken Kontaktkoordinatensystems zusammen und es gilt formal ${}_R \eta = {}_L \eta$ sowie ${}_R \xi = -{}_L \xi$ und ${}_R \zeta = -{}_L \zeta$. Somit müssen die Kontaktwinkel der Bedingung

$$\gamma_R = 180^\circ - \gamma_L \quad (2.9)$$

genügen, vgl. **Bild 2.2c**. Die Transformation zwischen den Kontaktkoordinatensystemen ergibt sich dann aus der einfachen Beziehung

$${}_{KR} {}_{KL} \mathbf{A} = {}_{KL} {}_{KR} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

die in **Bild 2.3** gestrichelt dargestellt ist. Die Matrizen

$$\mathbf{N}_K = \begin{bmatrix} {}_{KR} {}_{KL} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}_{KR} {}_{KL} \mathbf{A} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_S = \begin{bmatrix} {}_{SL} {}_{SR} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}_{SL} {}_{SR} \mathbf{A} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

werden in Abschnitt 2.4.2.4 erneut aufgegriffen. Für die Deckbandkopplung gilt

$$\mathbf{N}_K \mathbf{G}_{SR} = \mathbf{G}_{SL} \mathbf{N}_S, \quad (2.12)$$

vgl. **Bild 2.3**.

2.1.2 Eingespannte Schaufel

Aufgrund der Komplexität moderner Schaufelgeometrien lassen sich diese mit analytischen Ansätzen zumeist nicht mehr ausreichend genau beschreiben, weshalb im Allgemeinen auf Diskretisierungsverfahren wie die Methode der Finiten Elemente zurückgegriffen wird. Die Bewegungsgleichungen einer individuellen, auf der Scheibe zunächst als fest eingespannt angenommenen, fremderregten Schaufel (k) ergeben sich dann aus dem bekannten Differenzialgleichungssystem eines linearen, zeitinvarianten Systems in diskretisierter Form, siehe u. a. MAGNUS UND POPP [99], zu

$${}^{(k)}M_S {}^{(k)}\ddot{\mathbf{u}}_S(t) + {}^{(k)}D_S {}^{(k)}\dot{\mathbf{u}}_S(t) + {}^{(k)}K_S {}^{(k)}\mathbf{u}_S(t) = {}^{(k)}\mathbf{f}_S(t) \quad (2.13)$$

mit der Massenmatrix ${}^{(k)}M_S$, der viskosen Dämpfungsmatrix ${}^{(k)}D_S$ und der Steifigkeitsmatrix ${}^{(k)}K_S$ der Schaufel. Der Vektor ${}^{(k)}\mathbf{u}_S(t)$ enthält die zeitabhängigen physikalischen Verschiebungen bzw. Verdrehungen an diskreten Punkten der Schaufel. Der Vektor der äußeren Kräfte wird mit

$${}^{(k)}\mathbf{f}_S(t) = {}^{(k)}\mathbf{f}_{S,E}(t) + {}^{(k)}\mathbf{f}_{S,K}(t) \quad (2.14)$$

bezeichnet und enthält sowohl die auf das Schaufelblatt wirkenden Erregerkräfte ${}^{(k)}\mathbf{f}_{S,E}(t)$ als auch die zwischen Schaufel und Kopppelement auftretenden Kontaktkräfte ${}^{(k)}\mathbf{f}_{S,K}(t)$. Alle Größen werden in dem mit der Winkelgeschwindigkeit Ω_R um die negative Rotorachse ${}_R x$ rotierenden, schaufelfesten Koordinatensystem (Index S) angegeben, siehe **Bild 2.1a**. Die Strukturmatrizen werden als symmetrisch, die Massenmatrix als positiv definit angenommen. Für eine fest eingespannte Schaufel, deren Starrkörperbewegungen verhindert sind, ergibt sich darüber hinaus eine ebenfalls positiv definite Steifigkeitsmatrix. Gyroskopische Effekte und nichtkonservative Lagekräfte werden nicht berücksichtigt. Auf den eine individuelle Schaufel kennzeichnenden hochgestellten Index ${}^{(k)}$ wird im Folgenden zunächst verzichtet.

Das Finite-Element-Modell einer Turbinenschaufel weist nicht selten eine sehr große Anzahl Freiheitsgrade ($n_{\text{FEM}} > 100000$) auf, sodass die direkte Lösung der Bewegungsgleichungen (2.13) aufgrund der großen $[n_{\text{FEM}} \times n_{\text{FEM}}]$ -Matrizen unmöglich erscheint. Aus diesem Grund werden die einleitend in Abschnitt 1.2.1.2 erwähnten Verfahren zur Reduktion der Anzahl der Freiheitsgrade angewandt. Die modale Kondensation überführt die physikalischen Koordinaten $\mathbf{u}_S(t)$ in modale Koordinaten $\mathbf{q}_S(t)$ mit Hilfe der Modaltransformation

$$\mathbf{u}_S(t) = \Phi_S \mathbf{q}_S(t) . \quad (2.15)$$

Die als Modalmatrix bezeichnete Transformationsmatrix

$$\Phi_S = \begin{bmatrix} \varphi_{1,S} & \varphi_{2,S} & \cdots & \varphi_{n_{\text{FEM}},S} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

enthält bis zu n_{FEM} reelle Eigenvektoren φ_S des zu dem ungedämpften Fall von Gl. (2.13) gehörigen Eigenwertproblems, das aus dem Exponentialansatz $\mathbf{u}_S(t) = \varphi_S e^{\lambda t}$ für freie

Schwingungen hervorgeht,

$$\left(\lambda^2 \mathbf{M}_S + \mathbf{K}_S\right) \boldsymbol{\varphi}_S = \mathbf{0}. \quad (2.17)$$

Dieses allgemeine, quadratische Eigenwertproblem lässt sich mit $\Lambda = -\lambda^2$ bei positiv definiten Massenmatrix ($\mathbf{M}_S > \mathbf{0}$) unter Zuhilfenahme ihrer CHOLESKY-Zerlegung $\mathbf{M}_S = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$ stets auf ein spezielles Eigenwertproblem

$$(\mathbf{A}_S^\diamond - \Lambda \mathbf{E}) \boldsymbol{\varphi}_S^\diamond = \mathbf{0} \quad (2.18)$$

mit der symmetrischen Systemmatrix $\mathbf{A}_S^\diamond = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{K}_S \mathbf{L}^{-T}$, der Einheitsmatrix \mathbf{E} und dem Eigenvektor $\boldsymbol{\varphi}_S^\diamond = \mathbf{L}^T \boldsymbol{\varphi}_S$ zurückführen, siehe auch Gl. (B.72) in Anhang B.6. Ist die Steifigkeitsmatrix wie oben angenommen positiv definit ($\mathbf{K}_S > \mathbf{0}$), so ergibt sich eine ebenfalls positiv definite Systemmatrix. Die Eigenwerte Λ_j sind daher stets reell und darüber hinaus sämtlich positiv, sodass sich für das Ausgangssystem in Gl. (2.17) paarweise konjugiert komplexe, rein imaginäre Eigenwerte $\lambda_{j,1,2} = \pm i \sqrt{\Lambda_j}$ ergeben. Zu den n_{FEM} Eigenwerten Λ_j existieren n_{FEM} linear unabhängige Eigenvektoren $\boldsymbol{\varphi}_{j,S}^\diamond$, siehe u. a. ZURMÜHL UND FALK [200]. Diese sind zu verschiedenen Eigenwerten stets orthogonal bzw. lassen sich unter Zuhilfenahme verschiedener Verfahren, siehe z. B. das in [200] beschriebene Verfahren nach UNGER oder das u. a. von WITTENBURG [187] vorgestellte Verfahren nach GRAM-SCHMIDT, orthogonalisieren, sodass die Modalmatrix $\boldsymbol{\Phi}_S^\diamond$ eine Orthogonalmatrix darstellt. Die reguläre und ebenfalls orthogonalisierbare Modalmatrix des Ausgangssystems ergibt sich dann aus $\boldsymbol{\Phi}_S = \mathbf{L}^{-T} \boldsymbol{\Phi}_S^\diamond$. Bei entsprechender Normierung der Eigenvektoren $\boldsymbol{\varphi}_S$ auf die Massenmatrix \mathbf{M}_S werden die Massen- und Steifigkeitsmatrix der Bewegungsgleichung (2.13) simultan mit Hilfe der Kongruenztransformationen

$$\mathcal{M}_S = \boldsymbol{\Phi}_S^T \mathbf{M}_S \boldsymbol{\Phi}_S = \mathbf{E}, \quad \mathcal{K}_S = \boldsymbol{\Phi}_S^T \mathbf{K}_S \boldsymbol{\Phi}_S = \boldsymbol{\Lambda}_S \quad (2.19)$$

auf die Einheitsmatrix \mathbf{E} bzw. auf die Spektralmatrix

$$\boldsymbol{\Lambda}_S = \mathbf{diag}(\Lambda_j) = \mathbf{diag}(\omega_{S,j}^2), \quad j = 1(1)n_{\text{FEM}}, \quad (2.20)$$

der negativen Quadrate der Eigenwerte λ_j bzw. der Quadrate der Schaufeleigenkreisfrequenzen $\omega_{S,j}$ des in Gl. (2.17) gegebenen Eigenwertproblems diagonalisiert. Nach Anwendung der Bequemlichkeitshypothese, d. h. unter Annahme proportionaler, so genannter RAYLEIGH-Dämpfung in der Form

$$\mathbf{D}_S = \alpha \mathbf{K}_S + \beta \mathbf{M}_S, \quad (2.21)$$

lässt sich die für eine modale Dämpfung erforderliche Identität

$$\mathbf{K}_S \mathbf{M}_S^{-1} \mathbf{D}_S = \mathbf{D}_S \mathbf{M}_S^{-1} \mathbf{K}_S \quad (2.22)$$

erreichen, für die die Eigenvektoren des gedämpften Systems aus Gl. (2.13) denen des ungedämpften Systems aus Gl. (2.17) entsprechen. In diesem Fall gelingt eine Diagonalisierung der Dämpfungsmatrix ebenfalls mit der Modalmatrix $\boldsymbol{\Phi}_S$ durch

$$\mathcal{D}_S = \boldsymbol{\Phi}_S^T \mathbf{D}_S \boldsymbol{\Phi}_S = \mathbf{diag}(2D_{S,j} \omega_{S,j}), \quad j = 1(1)n_{\text{FEM}}, \quad (2.23)$$

mit den modalen Dämpfungsgraden $D_{S,j}$. Mit der ebenfalls modal transformierten rechten Seite von Gl. (2.13),

$$\mathcal{F}_S(t) = \Phi_S^T f_S(t) = \Phi_S^T \left(f_{S,E}(t) + f_{S,K}(t) \right), \quad (2.24)$$

ergibt sich der Übergang auf modale Koordinaten mit

$$\mathcal{M}_S \ddot{q}_S(t) + \mathcal{D}_S \dot{q}_S(t) + \mathcal{K}_S q_S(t) = \mathcal{F}_S(t). \quad (2.25)$$

Die Modaltransformation der Erreger- bzw. Kontaktkräfte wird in Abschnitt 2.4 detaillierter beschrieben. Werden die auf die Schaufel wirkenden modalen Kräfte $\mathcal{F}_S(t)$ und die daraus resultierenden modalen Koordinaten $q_S(t)$ als harmonisch mit der Erregerkreisfrequenz Ω_E zeitveränderliche Größen angenommen, siehe Erläuterungen zur Modellierung der Erregung in Abschnitt 2.2 sowie zum Kontaktmodell in Abschnitt 2.3, kann unter Verwendung der komplexen Schreibweise¹

$$\mathcal{F}_S(t) = \hat{\mathcal{F}}_S e^{i \Omega_E t}, \quad q_S(t) = \hat{q}_S e^{i \Omega_E t} \quad (2.26)$$

Gl. (2.13) in

$$\hat{\mathcal{S}}_S \hat{q}_S = \hat{\mathcal{F}}_S \quad (2.27)$$

mit der dynamischen Steifigkeitsmatrix

$$\hat{\mathcal{S}}_S = \mathbf{diag}(\omega_{S,j}^2 - \Omega_E^2 + i 2D_{S,j} \omega_{S,j} \Omega_E) \quad (2.28)$$

überführt werden. Aufgrund der Diagonalisierung der Strukturmatrizen nach Gln. (2.19) und (2.23) werden die Bewegungsgleichungen (2.25) für den Fall fehlender Koppellelemente mit $\hat{f}_{S,K} = \mathbf{0}$ zunächst vollständig entkoppelt, sodass sich deren Lösung \hat{q}_S direkt angeben lässt.

Das angenommene Modell viskoser (geschwindigkeitsproportionaler) Dämpfung kann problemlos durch Strukturdämpfung (verschiebungsproportional) ersetzt werden, indem formal die Elemente d_{ij} der viskosen Dämpfungsmatrix ${}^{(k)}D_S$ durch frequenzabhängige Elemente $\frac{h_{ij}}{\Omega_E}$ der Strukturdämpfungsmatrix ${}^{(k)}H_S$ ersetzt werden. Analog zum modalen Dämpfungsgrad $D_{S,j}$ lässt sich in diesem Fall der so genannte Verlustfaktor $\eta_{S,j}$ definieren, der mit $\eta_{S,j} = 2D_{S,j}$ für beide Dämpfungsmodelle in Resonanz identische Amplituden liefert, siehe u. a. EWINS [52].

Werden in der Modalmatrix Φ_S sämtliche n_{FEM} Eigenvektoren berücksichtigt, d. h. wird ein vollständiger modaler Ansatz verwendet, werden die Bewegungsgleichungen entkoppelt, die Dimension der modal transformierten Strukturmatrizen bleibt jedoch mit $[n_{FEM} \times n_{FEM}]$ zunächst erhalten. Eine Reduktion gelingt erst, wenn statt n_{FEM} nur $n_{M,S}$ Ansatzvektoren verwendet werden, die den unteren Schwingungsformen der eingespannten Schaufel entsprechen. Aus der Differenz der Quadrate der Erreger- und der

¹ Mathematisch korrekt wird eine reelle, harmonisch zeitveränderliche Größe $u(t)$ durch die Überlagerung zweier konjugiert komplexer Zeiger \hat{u} und \hat{u}^* dargestellt, die gegensinnig mit der Kreisfrequenz Ω rotieren, $u(t) = \frac{1}{2}(\hat{u}e^{i \Omega t} + \hat{u}^*e^{-i \Omega t})$. Allgemein hat sich aber die übersichtlichere Darstellung $u(t) = \hat{u}e^{i \Omega t}$ etabliert, wobei korrekterweise $u(t) = \text{Re}\{\hat{u}e^{i \Omega t}\}$ gilt, vgl. u. a. GASCH UND KNOTHE [59].

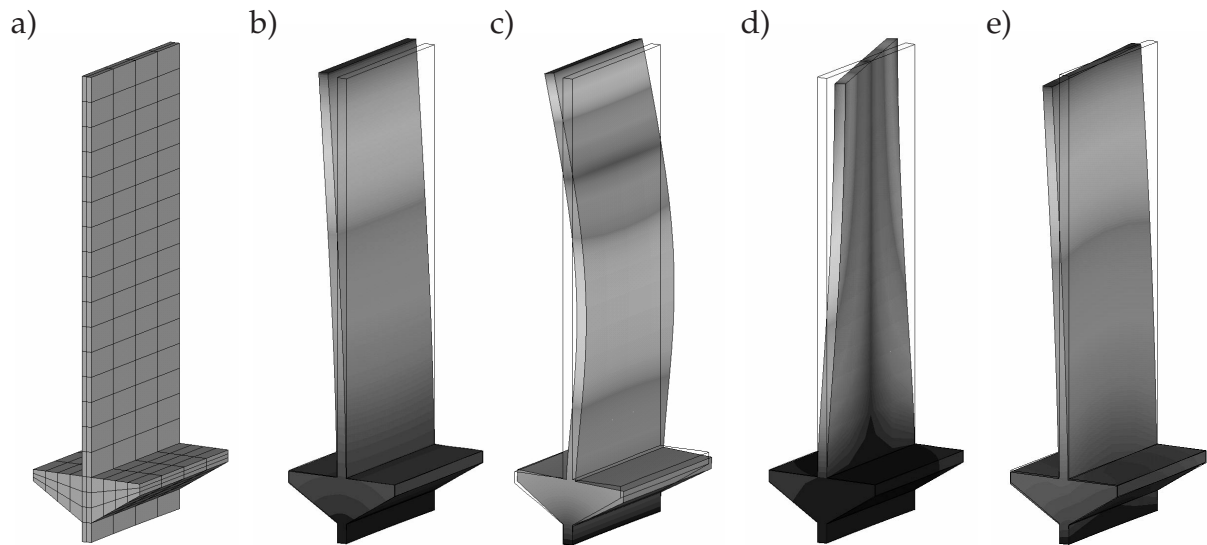


Bild 2.4: Charakteristische Schwingungsformen der fest eingespannten Schaufel: a) Finite-Element-Modell; b) 1F-Biegemode; c) 2F-Biegemode; d) 1T-Torsionsmode; e) 1E-Biegemode

Eigenkreisfrequenzen in Gl. (2.28) wird unmittelbar deutlich, dass der Einfluss hochfrequenter Schwingungsformen mit $\omega_{S,j} \gg \Omega_E$ bei der Auflösung von Gl. (2.27) nach den modalen Amplituden \hat{q}_S im Allgemeinen zu vernachlässigen ist. Lineares Systemverhalten der Schaufel vorausgesetzt, lassen sich letztlich die komplexen physikalischen Verschiebungen \hat{u}_S analog Gl. (2.15) durch Superposition der einzelnen in der Modalmatrix berücksichtigten Schwingungsformen aus

$$\hat{u}_S = \Phi_S \hat{q}_S \quad (2.29)$$

bestimmen. Die Ermittlung der modalen Größen sollte dabei unter Berücksichtigung aller relevanter Einflussgrößen wie der Temperatur im Arbeitspunkt sowie möglicher Vorlasten (*prestressing*) und Fliehkrafteffekte (*centrifugal stiffening* und *spin softening*) erfolgen, siehe auch Abschnitt 2.6.1. Dies ist im Allgemeinen in kommerziellen Finite-Element-Programmen wie z. B. ANSYS ohne größeren Aufwand möglich. Typische Schwingungsformen einer fest eingespannten, vereinfachten Modellschaukel sind in **Bild 2.4** dargestellt: Neben Biegemoden, die je nach Hauptschwingungsrichtung als F- oder E-Moden (*flatwise* und *edgewise bending*) bezeichnet werden, treten auch Torsionsschwingungen (T-Moden) auf. Die Schwingungsformen realer, u. U. stark verwundener Schaufeln ohne ausgeprägte Symmetrieeigenschaften weisen dagegen komplexe, gekoppelte Schwingungsformen auf, die sich zumeist nur in Ausnahmefällen eindeutig einer der genannten Schwingungsfamilien zuordnen lassen.

2.1.3 Zyklisches Schaufel-Scheibe-Segment

Für den Fall, dass die Elastizität der Radscheibe nicht vernachlässigt und die Schaufeln somit nicht mehr als fest eingespannt angenommen werden können, muss der Kopp-

lung zwischen Schaufel und Radscheibe Rechnung getragen werden. Dies ist u. a. bei Fluggasturbinen der Fall, wo sehr dünne und damit elastische Radscheiben auftreten. Inwieweit diese Elastizität im Hinblick auf die Schaufelschwingungen berücksichtigt werden muss, hängt letztlich von der Verteilung der Steifigkeiten in dem gekoppelten System Radscheibe-Schaukel ab: Die Koppelschwingungen kurzer, relativ steifer Schaufeln auf dünnen und damit nachgiebigen Radscheiben weisen stark ausgeprägte Scheibenschwingungsformen auf, während lange, elastische Schaufeln auf relativ starren Scheiben bzw. als Trommelläufer ausgeführte Konstruktionen zu Schwingungsformen neigen, die nahezu denen der fest eingespannten Schaufel entsprechen.

Wird zunächst das unverstimmte System betrachtet, ergibt sich eine zyklische Struktur, die sich aus n_S sich wiederholenden, miteinander gekoppelten Segmenten mit identischen mechanischen Eigenschaften zusammensetzt. Die Strukturmatrizen ergeben sich dann allgemein in der Form

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{1,1} & \mathbf{K}_{1,2} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{1,n_S} \\ \mathbf{K}_{2,1} & \mathbf{K}_{2,2} & \mathbf{K}_{2,3} & & & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \mathbf{0} & & \mathbf{K}_{n_S-1,n_S-2} & & \mathbf{K}_{n_S-1,n_S-1} & \mathbf{K}_{n_S-1,n_S} \\ \mathbf{K}_{n_S,1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{n_S,n_S-1} & \mathbf{K}_{n_S,n_S} \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass Einspanneffekte wie Relativbewegungen in den Kontaktflächen zwischen Schaufelfuß und Scheibe zu vernachlässigen sind, d. h. dass sich die beschauelte Scheibe wie eine so genannte *blisk* (*bladed disk*) verhält. Durch die Verwendung der in **Bild 2.1b** gegebenen zyklischen Koordinaten der schaufelfesten S-Koordinatensysteme ergeben sich mit $\mathbf{K}_{i,j} = \mathbf{K}_{j,i}^T$, $i, j = 1(1)n_S$, und $\mathbf{K}_{i,i} = \mathbf{K}_{1,1}$, $\mathbf{K}_{i,i+1} = \mathbf{K}_{1,2}$, $i = 1(1)n_S$, die symmetrisch angenommenen Strukturmatrizen des Gesamtsystems als block-zyklische Matrizen, deren Hyperzeilen sich durch zyklisches Vertauschen der Submatrizen der ersten Hyperzeile ergeben. Analog zu Gl. (2.27) und Gl. (2.28) für eine fest eingespannte Schaufel können die modal transformierten Bewegungsgleichungen der zyklischen Gesamtstruktur in der Form

$$\hat{\mathbf{S}}_G \hat{\mathbf{q}}_G = \hat{\mathcal{F}}_G \quad (2.31)$$

mit der dynamischen Steifigkeitsmatrix

$$\hat{\mathbf{S}}_G = \mathbf{diag}(\omega_{G,j}^2 - \Omega_E^2 + i 2D_{G,j}\omega_{G,j} \Omega_E) \quad (2.32)$$

hergeleitet werden. Die für die Modaltransformation notwendige Eigenwertanalyse lässt sich für zyklische Systeme unter Verwendung besonderer Verfahren besonders einfach auf der Basis eines einzelnen Segments und anschließender Expansion der Eigenvektoren auf das Gesamtmodell durchführen. Dieses Vorgehen wird in Anhang B detailliert beschrieben, da die Eigenvektoren des Gesamtsystems hinsichtlich ihrer Struktur und Normierung einige Besonderheiten aufweisen. Dort wird gezeigt, dass die Eigenwertanalyse

eines zyklischen Systems auf komplexe Eigenvektoren führt, die in der Modalmatrix

$$\hat{\Psi}_G = \begin{bmatrix} (1)\hat{\phi}_1 & (1)\hat{\phi}_2 & \dots & (1)\hat{\phi}_{n_S} \\ (2)\hat{\phi}_1 & (2)\hat{\phi}_2 & \dots & (2)\hat{\phi}_{n_S} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (n_S)\hat{\phi}_1 & (n_S)\hat{\phi}_2 & \dots & (n_S)\hat{\phi}_{n_S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)\hat{\phi}_G \\ (2)\hat{\phi}_G \\ \vdots \\ (n_S)\hat{\phi}_G \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

zusammengefasst werden, vgl. Gl. (B.54) in Anhang B.5. Die Matrizen ${}^{(k)}\hat{\phi}_G$ bezeichnen darin Submatrizen der Modalmatrix $\hat{\Psi}_G$ des Gesamtsystems, welche nur die Freiheitsgrade des Segments (k) beinhalten. In Anlehnung an THOMAS [166] lassen sich die Eigenvektoren in drei Klassen unterteilen:

- Alle Segmente weisen identische Eigenvektoren und keine Phasenverschiebung auf, ${}^{(k)}\hat{\phi}_1 = (1)\hat{\phi}_1, \quad k = 1(1)n_S.$ (2.34)

- Alle Segmente besitzen betragsmäßig gleiche Eigenvektoren, aber benachbarte Segmente schwingen gegenphasig,

$${}^{(k)}\hat{\phi}_{\frac{n_S}{2}+1} = (-1)^{(k-1)} (1)\hat{\phi}_{\frac{n_S}{2}+1}, \quad k = 1(1)n_S. \quad (2.35)$$

Diese Eigenvektoren treten nur für den Fall einer geraden Anzahl Segmente n_S auf.

- Alle Segmente besitzen Eigenvektoren, die sich aus einer Drehung des Eigenvektors des ersten Segments um einen bestimmten Phasenwinkel in der komplexen Ebene ergeben. Mit dem Segment- bzw. Teilungswinkel δ aus Gl. (2.1) ergeben sich die komplexen, bezüglich der Drehrichtung Ω_R vorwärts rotierenden Eigenvektoren

$${}^{(k)}\hat{\phi}_j = e^{i(k-1)(j-1)\delta} (1)\hat{\phi}_j, \quad k = 1(1)n_S, \quad \begin{cases} j = 2(1)\left(\frac{n_S}{2}\right), & n_S \text{ gerade,} \\ j = 2(1)\left(\frac{1}{2}(n_S + 1)\right), & n_S \text{ ungerade.} \end{cases} \quad (2.36)$$

Die den doppelt auftretenden Eigenwerten zugehörigen, konjugiert komplexen Eigenvektoren

$$\begin{aligned} {}^{(k)}\hat{\phi}_j^* &= {}^{(k)}\hat{\phi}_{n_S+2-j} \\ &= e^{-i(k-1)(j-1)\delta} (1)\hat{\phi}_j^*, \quad k = 1(1)n_S, \quad \begin{cases} j = 2(1)\left(\frac{n_S}{2}\right), & n_S \text{ gerade,} \\ j = 2(1)\left(\frac{1}{2}(n_S + 1)\right), & n_S \text{ ungerade,} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.37)$$

beschreiben grundsätzlich die gleichen Schwingungsformen, werden aber aufgrund der Phasenlage der Eigenvektoren zweier benachbarter Segmente als *rückwärts rotierende Eigenvektoren* bezeichnet.

Grundsätzlich lassen sich auch die erstgenannten Eigenvektoren als Sonderfälle der komplexen Eigenvektoren darstellen. Mit der Definition der Anzahl so genannter Knotendurchmesser (*nodal diameter*)

$$ND = j - 1 \quad (2.38)$$

und dem Phasenwinkel

$$\widetilde{\Delta\varphi} = ND \delta = \frac{2\pi ND}{n_S} \quad (2.39)$$

lassen sich alle auftretenden Eigenschwingungsformen mit Hilfe von

$${}^{(k)}\hat{\boldsymbol{\phi}}_{ND+1}^{+/-} = \begin{cases} e^{i(k-1)\widetilde{\Delta\varphi}} {}^{(1)}\hat{\boldsymbol{\phi}}_{ND+1} & , \quad k = 1(1)n_S, \quad ND = 0(1)\frac{n_S}{2}, \\ e^{-i(k-1)\widetilde{\Delta\varphi}} {}^{(1)}\hat{\boldsymbol{\phi}}_{ND+1}^* & \end{cases} \quad (2.40)$$

zusammenfassen, wobei das negative Vorzeichen im Exponenten von Gl. (2.40) nur für die von null bzw. $\frac{n_S}{2}$ verschiedenen Knotendurchmesser sinnvoll ist, vgl. Gl. (B.54). Durch Linearkombinationen komplexer Eigenvektoren lassen sich diese stets auch als rein reelle Schwingungsformen darstellen, siehe Anhang B.5. Im Allgemeinen kann zusätzlich zu der Anzahl der Knotendurchmesser die Anzahl konzentrischer, so genannter Knotenkreise zur Klassifizierung der Schwingungsformen des gekoppelten Schaufel-Scheibe-Systems hinzugezogen werden, wie dies zur Charakterisierung von reinen Scheibenschwingungen der Fall ist, vgl. auch die frühen Untersuchungen von CHLADNY [31]. Knotendurchmesser wie auch Knotenkreise beschreiben dabei die Verbindungslinien der Orte der Struktur, die keine Verschiebung erfahren.

Einige charakteristische Schwingungsformen sind in **Bild 2.5** am Beispiel einer idealen, rotationssymmetrischen Kreisscheibe skizziert. Schwingungsformen ohne Knotendurchmesser werden dabei im Allgemeinen als *Schirmschwingungen*, solche mit Knotendurchmessern als *Fächerschwingungen* bezeichnet. An dieser Stelle sei bemerkt, dass die doppelten Eigenwerte der oben erläuterten vorwärts und rückwärts rotierenden Eigenvektoren im Allgemeinen aufgrund kleiner Störungen der Rotationssymmetrie in zwei unterschiedliche Eigenwerte aufgetrennt werden. Dieser Fall einer verstimmten Scheibe soll im Folgenden aber nicht weiter berücksichtigt werden. Neben den wichtigen Biege- bzw. Plattenschwingungen (so genannte *out-of-plane*-Schwingungen) mit ausgeprägter axialer Schwingungskomponente in Rx -Richtung können auch Schwingungen in der Scheibenebene (so genannte *in-plane*-Schwingungen) wie etwa Radial- oder Torsionschwingungen auftreten, die aber zum einen aufgrund ihrer hohen Eigenfrequenzen und zum anderen als Folge der Hauptströmungsrichtung des Fluids in axialer Richtung zu meist von geringerem Interesse sind.

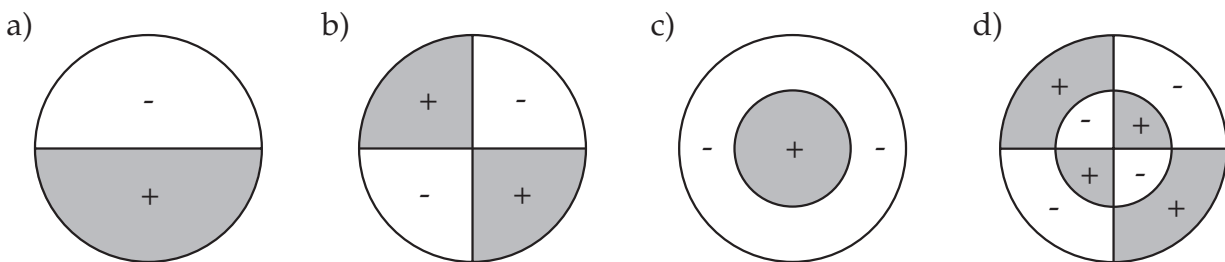


Bild 2.5: Charakteristische Biegeschwingungen einer Kreisscheibe: a) $ND1$ -Mode; b) $ND2$ -Mode; c) $ND0$ -Mode mit einem Knotenkreis; d) $ND2$ -Mode mit einem Knotenkreis, vgl. JAROSCH [82]

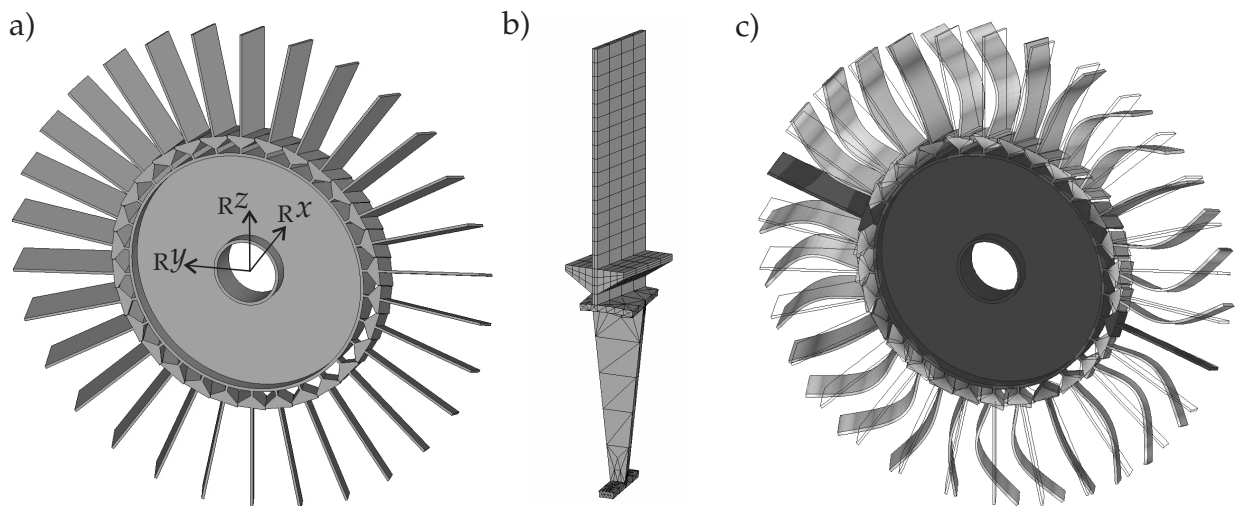


Bild 2.6: Beschaufelte Scheibe: a) Gesamtmodell; b) FE-Netz des Scheibe-Schaufel-Segments; c) Darstellung des $ND4-2F$ -Modes nach zyklischer Modalanalyse und Expansion des Sektormodells

In **Bild 2.6** ist beispielhaft die $ND4-2F$ -Schwingungsform für das in Abschnitt 3.1 näher beschriebene Referenzsystem dargestellt. Auf die Frage, welche Schwingungsform von einer vorhandenen äußeren Erregung anregbar ist, wird an späterer Stelle eingegangen, siehe Abschnitt 2.4.2.2 für die Formulierung der Systemgleichung für das zyklisch symmetrische System und Abschnitt 3.6.1 für die als Referenz dienende unverstimmte Beispielkonfiguration. Dort wird auch gezeigt, dass der Verlauf der Eigenfrequenzen je nach Schwingungsform und Verteilung der Steifigkeiten mehr oder weniger stark von der Anzahl der Knotendurchmesser abhängt. Ein Segment einer dünnen, elastischen Radscheibe mit einer kurzen, steifen Schaufel weist ein eher scheibenähnliches Verhalten und damit eine starke Abhängigkeit der Eigenfrequenzen von der Anzahl der Knotendurchmesser auf. Lange, elastische Schaufeln auf relativ steifen Scheiben, wie sie etwa im Dampfturbinenbereich üblich sind, weisen ein eher schaufelähnliches Verhalten auf, bei dem die zusätzliche Elastizität der Radscheibe u. U. vollständig vernachlässigt werden kann. Die Eigenfrequenzen des gekoppelten Scheibe-Schaufel-Segments sind dann nahezu konstant für alle Knotendurchmesser. Einen sehr guten Überblick über die Eigenfrequenzen und Schwingungsformen gekoppelter Schaufel-Scheibe-Systeme gibt u. a. JAROSCH [82].

2.1.4 Verstimmte beschaufelte Scheibe

Im Fall verstimmter Beschaufelungen entfällt die Anwendung zyklischer Randbedingungen, da die Strukturmatrizen nicht mehr in der in Gl. (2.30) angegebenen Form blockzyklisch sind. Aus diesem Grund ist eine Berechnung der modalen Größen wie Eigenfrequenzen und Eigenvektoren auf der Basis des verstimmten Gesamtsystems erforderlich. Dieses Vorgehen ist aber zum einen aufgrund der Fülle verschiedener Parameterkombinationen und zum anderen aufgrund der großen Anzahl Freiheitsgrade wenig praktikabel. Eine Verstimmung kann aber, wie einleitend dargestellt, einen signifikanten Einfluss

auf das Schwingungsverhalten aufweisen, der auch vor dem Hintergrund der vorliegenden Fragestellung der Optimierung von Koppellementen näherungsweise berücksichtigt werden soll. Die Mehrzahl der einleitend in Abschnitt 1.2.1.2 vorgestellten Reduktionsverfahren basiert entweder auf einer modalen Beschreibung der Substrukturen mit festen oder freien Koppelstellen und einer anschließenden Synthese durch die Formulierung von Koppelbedingungen oder auf der Projektion der Verschiebungsvektoren auf die modale Basis des unverstimmten Systems.

Der Nachteil vieler Verfahren und dabei insbesondere der Substrukturformulierung mit eingespannten Koppelstellen ist zum einen in der u. U. großen Anzahl zu berücksichtigender Schwingungsformen zu sehen. So führt etwa die Kopplung zwischen Scheibe und Schaufel innerhalb eines Finite-Element-Modells nach der Methode von CRAIG und BAMPTON auf eine große Anzahl zu berücksichtigender statischer Verschiebungszustände, siehe auch CASTANIER ET AL. [23]. Zum anderen ist ein Nachteil in der Notwendigkeit der Information über die Besetzung der Strukturmatrizen zu sehen, da z. B. aufgrund der gemischten modalen und statischen Ansatzfunktionen des Verfahrens nach CRAIG und BAMPTON eine Diagonalisierung der Massen- bzw. Steifigkeitsmatrix auf die Einheits- bzw. Spektralmatrix nicht gelingt. Der Export dieser u. U. sehr viele Freiheitsgrade umfassenden Strukturmatrizen aus einem Finite-Element-Programm erscheint im Sinne des in **Bild 1.13** und Abschnitt 1.3 dargestellten Gesamtkonzeptes einer externen Berechnung der nichtlinearen Schwingungsantwort aufgrund der enormen Datenmenge wenig praktikabel².

Eine Ausnahme bilden in diesem Zusammenhang die ursprünglich von HOU [74] und GOLDMAN [62] vorgeschlagenen Verfahren der Substrukturformulierung mit freien Koppelstellen, siehe Abschnitt 1.2.1.2. Hier tritt aber die Schwierigkeit auf, die Schwingungsformen der Schaufel auf der Basis der Eigenschwingungen der frei-frei gelagerten Schaufel ausreichend genau zu beschreiben. Wird die derart gelagert Schaufel modal durch ihre Eigenvektoren beschrieben, ergibt sich mit der Partitionierung in wesentliche und übrige Schwingungsformen die Modaltransformation von physikalischen Koordinaten \hat{u} auf modale Koordinaten \hat{q} mit

$$\hat{u} = \begin{bmatrix} \Phi_w & \Phi_{ue} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{q}_w \\ \hat{q}_{ue} \end{bmatrix} = \Phi_w \hat{q}_w + \hat{u}_{Res}. \quad (2.41)$$

Sie setzt sich aus den dynamischen Anteilen der wesentlichen Moden und einer residuellen Verschiebung \hat{u}_{Res} zusammen, sodass die statische Verschiebung richtig wiedergegeben wird, siehe u. a. MACNEAL [98] und SCHMIDT [143]. Die wesentlichen Schwingungsformen Φ_w dienen der Beschreibung der Dynamik und beinhalten im Allgemeinen zunächst die Schwingungsformen im unteren Frequenzbereich. Die zusätzlichen übrigen Schwingungsformen Φ_{ue} werden statisch berücksichtigt und zur Formulierung der an den Koppelfreiheitsgraden \hat{u}_R auftretenden Koppel- bzw. Zwangsbedingungen, die sich

²Die Option des Exports der aufgestellten Strukturmatrizen für Anwendungen außerhalb der Finite-Element-Anwendung ist zudem nicht in allen Finite-Element-Programmsystemen implementiert.

für den Grenzfall einer starren Scheibe aus

$$\mathbf{u}_R = \Phi_{R,w} \hat{\mathbf{q}}_w + \Phi_{R,ue} \hat{\mathbf{q}}_{ue} = \mathbf{0} \quad (2.42)$$

ergeben, herangezogen. Allgemein enthalten die modal transformierten Bewegungsgleichungen der ungedämpften, harmonisch fremderregten Substruktur

$$\left\{ \begin{bmatrix} \Lambda_w & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_{ue} \end{bmatrix} - \Omega_E^2 \begin{bmatrix} E_w & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E_{ue} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}}_w \\ \hat{\mathbf{q}}_{ue} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{E,w}^T \\ \Phi_{E,ue}^T \end{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_E + \begin{bmatrix} \Phi_{R,w}^T \\ \Phi_{R,ue}^T \end{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_R \quad (2.43)$$

neben den äußeren Erregerkräften $\hat{\mathbf{f}}_E$ auch Zwangskräfte $\hat{\mathbf{f}}_R$ an den Koppelfreiheitsgraden. Mit der Annahme, dass die Erregerkreisfrequenz sehr viel kleiner ist als die Eigenwerte der übrigen Schwingungsformen,

$$\Omega_E \ll \Lambda_{ue,j}, \quad j = 1(1)n_{ue}, \quad (2.44)$$

ergibt sich für die übrigen modalen Amplituden $\hat{\mathbf{q}}_{ue}$ der statische Zusammenhang

$$\Lambda_{ue} \hat{\mathbf{q}}_{ue} \approx \Phi_{E,ue}^T \hat{\mathbf{f}}_E + \Phi_{R,ue}^T \hat{\mathbf{f}}_R. \quad (2.45)$$

Aus Gl. (2.42) und Gl. (2.45) lassen sich die Koppelkräfte $\hat{\mathbf{f}}_R$ ermitteln und in Gl. (2.43) einsetzen, sodass sich die approximierten modalen Bewegungsgleichungen

$$S_w \hat{\mathbf{q}}_w \approx \hat{\mathcal{F}}_E \quad (2.46)$$

mit

$$S_w \approx \underbrace{\Lambda_w + \Phi_{R,w}^T (\Phi_{R,ue} \Lambda_{ue}^{-1} \Phi_{R,ue}^T)^{-1} \Phi_{R,w}}_{\tilde{S}_w} - \Omega_E^2 E_w \quad (2.47)$$

und

$$\hat{\mathcal{F}}_E \approx \left(\Phi_{E,w}^T - \Phi_{R,w}^T (\Phi_{R,ue} \Lambda_{ue}^{-1} \Phi_{R,ue}^T)^{-1} \Phi_{R,ue} \Lambda_{ue}^{-1} \Phi_{E,ue}^T \right) \hat{\mathbf{f}}_E \quad (2.48)$$

ergeben. Es stellt sich nunmehr die Frage, wie viele wesentliche und übrige Schwingungsformen der frei-frei gelagerten Schaufel zu berücksichtigen sind, um z. B. die im Grenzfall einer starren Scheibe fest eingespannte Schaufel abzubilden. Zu diesem Zweck wird eine Analyse der Eigenwerte λ_j^{appr} der in Gl. (2.47) angegebenen Matrix \tilde{S}_w in Abhängigkeit der Anzahl wesentlicher und übriger Schwingungsformen für eine als einfachen Kragbalken modellierte Schaufel durchgeführt und die Ergebnisse mit den Eigenwerten der fest eingespannten Schaufel verglichen. Hierzu ist in **Bild 2.7a** der relative Fehler

$$\varepsilon_{\lambda_j} = \frac{\lambda_j^{\text{appr}} - \lambda_j^{\text{fest}}}{\lambda_j^{\text{fest}}} \quad (2.49)$$

der ersten vier Eigenwerte $\lambda_j^{\text{fest}}, j = 1(1)4$, des fest eingespannten Balkens für $n_w = 26$ wesentliche Ansatzfunktionen, die neben sechs Starrkörpermoden 20 elastische Moden des frei-frei gelagerten Balkens enthalten, und eine variable Anzahl n_{ue} übriger Ansatzfunktionen dargestellt. Eine Erhöhung der Anzahl wesentlicher Ansatzfunktionen wirkt sich nicht auf die Güte der Approximation aus, da für $\lambda_j^{\text{fest}} \ll \Lambda_w$ weitere wesentliche

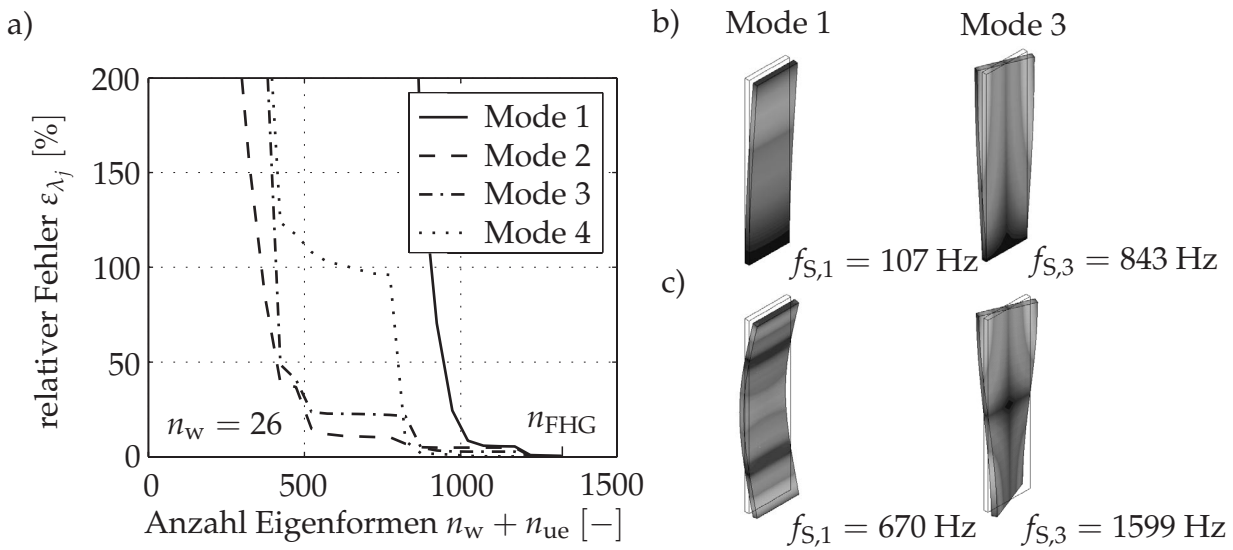


Bild 2.7: Approximation fest-freier Schwingungsformen durch Eigenvektoren der frei-frei gelagerten Struktur: a) Einfluss der Anzahl berücksichtigter Eigenformen $n_w + n_{ue}$; b) fest-freie Eigenformen; c) elastische frei-freie Eigenformen

Ansatzfunktionen nahezu ausschließlich statischen Charakter aufweisen, sodass letztlich die Gesamtzahl $n_w + n_{ue}$ entscheidend ist. Diese muss aber nach **Bild 2.7a** sehr große Werte nahe der Anzahl der Freiheitsgrade $n_{FHG} = 1323$ des Balkens annehmen, um den im Grenzfall fest eingespannten Balken mit ausreichender Genauigkeit abbilden zu können. Die Approximation durch eine geringe Anzahl Ansatzfunktionen führt mitunter zu großen Fehlern in der Eigenwertberechnung. Somit ist zum einen die Berechnung sehr vieler Moden und zum anderen der Transfer einer überaus großen Datenmenge notwendig. Nach SCHMIDT [143] können jedoch die übrigen Schwingungsformen auch mit Hilfe der als restliche Nachgiebigkeitsmatrix

$$\mathbf{G}_{ue} = \mathbf{K}^{-1} - \boldsymbol{\Phi}_w \boldsymbol{\Lambda}_w^{-1} \boldsymbol{\Phi}_w^T = \boldsymbol{\Phi}_{ue} \boldsymbol{\Lambda}_{ue}^{-1} \boldsymbol{\Phi}_{ue}^T \quad (2.50)$$

bezeichneten Beziehung und anschließender Extraktion der Koppelfreiheitsgrade ersetzt werden. SCHMIDT [143] gibt darüber hinaus eine Vorgehensweise für statisch unbestimmt gelagerte Substrukturen an, bei denen die Steifigkeitsmatrix wie in dem betrachteten Fall singular wird. Diese Vorgehensweise umgeht die Berechnung der übrigen Schwingungsformen, erfordert aber wiederum die Kenntnis der vollständigen Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} der Substruktur. Darüber hinaus ist zu erwarten, dass die Anzahl der wesentlichen, d. h. dynamisch berücksichtigten Eigenformen relativ groß gewählt werden muss, da die realen Schwingungsformen der auf der Scheibe eingespannten Schaufel der einer frei-frei gelagerten Schaufel deutlich ähnlicher sind als der einer frei-frei gelagerten Schaufel.

Im Sinne eines praktikablen Datentransfers vom Finite-Element-Modell zu einem externen Programmsystem und der Forderung nach einer möglichst geringen Anzahl Ansatzfunktionen zur Lösung der Bewegungsgleichungen des nichtlinear gekoppelten Gesamtsystems soll hier als Alternative die eingangs in Abschnitt 1.2.1.2 beschriebene so genannte *Mistuning Projection Method* angewandt werden, die die Eigenvektoren des

unverstimmten Systems als Ansatzfunktionen verwendet. Somit lassen sich die in Abschnitt 2.1.3 erläuterten Vorteile der effizienten Bestimmung der modalen Parameter ausnutzen. Das Vorgehen setzt unmittelbar auf der von FEINER UND GRIFFIN [53] vorgeschlagenen Vorgehensweise für eine isolierte Schwingungsfamilie auf.

Analog zu Gl. (1.4) ergibt sich mit der Modalmatrix $\hat{\Psi}_G$ des unverstimmten Systems aus Gl. (2.33) die Modaltransformation für das gedämpfte verstimmte System allgemein aus

$$\mathcal{M}_G = \hat{\Psi}_G^H \left({}^{(0)}M_G + \Delta M_G \right) \hat{\Psi}_G, \quad (2.51)$$

$$\mathcal{D}_G = \hat{\Psi}_G^H \left({}^{(0)}D_G + \Delta D_G \right) \hat{\Psi}_G, \quad (2.52)$$

$$\mathcal{K}_G = \hat{\Psi}_G^H \left({}^{(0)}K_G + \Delta K_G \right) \hat{\Psi}_G \quad (2.53)$$

mit den Strukturmatrizen ${}^{(0)}M_G$, ${}^{(0)}D_G$ und ${}^{(0)}K_G$ des unverstimmten zyklischen Gesamtsystems und den entsprechenden Störungsmatrizen ΔM_G , ΔD_G und ΔK_G für das verstimmte System. Der hochgestellte Index $(\)^H$ bezeichnet darin hermitesch (konjugiert komplex) transponierte Matrizen. Im Folgenden wird, wie auch in zahlreichen Publikationen, eine Verstimmung der Massen- und Dämpfungsmatrix vernachlässigt, sodass eine reine Verstimmung der Steifigkeiten mit $\Delta M_G = \mathbf{0}$, $\Delta D_G = \mathbf{0}$ vorliegt. Die Diagonalisierung der modalen Massenmatrix \mathcal{M}_G auf die Einheitsmatrix, der Dämpfungsmatrix \mathcal{D}_G nach der Bequemlichkeitshypothese sowie des unverstimmten Anteils ${}^{(0)}K_G$ der modalen Steifigkeitsmatrix auf die Spektralmatrix Λ_G bleibt erhalten, sodass an die Stelle der Systemmatrix des Gesamtsystems aus Gl. (2.31) die Matrix

$$\hat{\mathcal{S}}_G^{\text{verst}} = \hat{\mathcal{S}}_G + \Delta \hat{\mathcal{S}}_G \quad (2.54)$$

tritt mit der Diagonalmatrix $\hat{\mathcal{S}}_G$ aus Gl. (2.32) und der modal transformierten Störung der Steifigkeitsmatrix

$$\Delta \hat{\mathcal{S}}_G = \hat{\Psi}_G^H \Delta K_G \hat{\Psi}_G. \quad (2.55)$$

Ist die Matrix ΔK_G bekannt, so lässt sich mit einem vollständigen modalen Ansatz das verstimmte System ohne Genauigkeitseinbußen exakt mit den Ansatzfunktionen des unverstimmten Systems abbilden. Die exakte Besetzung der Matrix ΔK_G ist in Systemen mit einer großen Anzahl Freiheitsgrade aber im Allgemeinen weder theoretisch noch auf der Basis einer experimentellen Identifikation möglich. Aus diesem Grund wird im Folgenden eine Verstimmung der Steifigkeiten, wie sie z. B. durch eine Variation des Elastizitätsmoduls auftritt, unter Ausnutzung einiger einschränkender Annahmen auf eine Verstimmung der Eigenfrequenzen zurückgeführt. Der ursächliche Grund für eine Verstimmung, wie etwa Fertigungsungenauigkeiten oder Materialfehler, bleibt somit unberücksichtigt.

Wird eine Verstimmung der Gesamtstruktur in Form der Matrix ΔK_G ausschließlich in den Freiheitsgraden der Schaufeln zugelassen, so kann vereinfacht

$$\Delta \hat{\mathcal{S}}_G = \begin{bmatrix} \Delta \hat{\mathcal{S}}_{G,1,1} & \cdots & \Delta \hat{\mathcal{S}}_{G,1,n_S} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta \hat{\mathcal{S}}_{G,n_S,1} & \cdots & \Delta \hat{\mathcal{S}}_{G,n_S,n_S} \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

geschrieben werden. Mit den in Gl. (2.33) und Gl. (2.40) beschriebenen Modalmatrizen ${}^{(k)}\hat{\Phi}_G$ des unverstimmten Gesamtsystems ergeben sich die Submatrizen

$$\Delta\hat{\mathcal{S}}_{G\ m,n} = \sum_{k=1}^{n_S} e^{i(n-m)(k-1)\delta} {}^{(1)}\hat{\Phi}_{GS\ m}^H {}^{(k)}\Delta K_S {}^{(1)}\hat{\Phi}_{GS\ n}, \quad m, n = 1(1)n_S, \quad (2.57)$$

wobei ${}^{(k)}\Delta K_S$ die Verstimmung der Steifigkeitsmatrix in den Freiheitsgraden der Schaufel (k) und ${}^{(1)}\hat{\Phi}_{GS\ j}$, $j = 1(1)n_S$, die mit den Schaufelfreiheitsgraden besetzten Modalmatrizen des Referenzsegments (1) nach Gl. (2.33) bezeichnen.

Wird nun zusätzlich eine unverstimmte und eine individuell verstimmte, fest eingespannte Schaufel (k) ohne Scheibeneinfluss betrachtet, siehe Abschnitt 2.1.2, so ergibt sich mit den auf die Massenmatrix ${}^{(0)}M_S$ normierten Eigenvektoren die Spektralmatrix der unverstimmten Schaufel aus

$${}^{(0)}\Lambda_S = {}^{(0)}\Phi_S^T {}^{(0)}K_S {}^{(0)}\Phi_S \quad (2.58)$$

sowie die der verstimmten Schaufel aus

$${}^{(k)}\Lambda_S = {}^{(k)}\Phi_S^T \left({}^{(0)}K_S + {}^{(k)}\Delta K_S \right) {}^{(k)}\Phi_S, \quad (2.59)$$

vgl. Gl. (2.19) bzw. Gl. (2.20). Wird nun die Annahme getroffen, dass sich die Schwingungsformen der verstimmten Schaufel durch die der unverstimmten Schaufel annähern lassen, d. h.

$${}^{(k)}\Phi_S \approx {}^{(0)}\Phi_S, \quad k = 1(1)n_S, \quad (2.60)$$

so ergibt sich

$${}^{(k)}\Delta\Lambda_S = {}^{(k)}\Lambda_S - {}^{(0)}\Lambda_S \approx {}^{(0)}\Phi_S^T {}^{(k)}\Delta K_S {}^{(0)}\Phi_S. \quad (2.61)$$

Wird die Annahme dahingehend erweitert, dass die Schwingungsformen der verstimmten, fest eingespannten Schaufel näherungsweise denen der auf einer elastischen Scheibe gelagerten Schaufel entsprechen, gilt unter Berücksichtigung der entsprechenden Normierungen auf die Massenmatrix des Gesamtsystems bzw. der einzelnen Schaufel, siehe auch Anhang B.6,

$${}^{(k)}\Phi_S \approx \sqrt{n_S} {}^{(k)}\Phi_{GS}, \quad k = 1(1)n_S. \quad (2.62)$$

Diese Annahme ist dann gerechtfertigt, wenn die elastische Verformung eines Schaufel-Scheibe-Segments an den Freiheitsgraden der Schaufel dominiert, d. h. wenn es sich um schaufelinduzierte Schwingungsformen handelt, vgl. Abschnitt 2.1.3. Treten große Verformungen im Bereich der Scheibe auf, so lässt sich Gl. (2.62) aufgrund des signifikanten Anteils der Scheibefreiheitsgrade bei der Normierung auf die Massenmatrix nicht mehr anwenden. Weiterhin führen sehr weiche Scheiben zu Schwingungsformen, die sich zum einen deutlich von denen einer fest eingespannten Schaufel unterscheiden und zum anderen stark von der Anzahl der Knotendurchmesser abhängen. Dies führt nicht selten zu dem Effekt des so genannten *frequency veerings*, bei dem sich die Eigenfrequenzen verschiedener Moden annähern und sich die Schwingungsformen bei kleinen Parametervariationen stark ändern, siehe u. a. AFOLABI UND ALABI [3] und Abschnitt 3.6.1.

Aus Gl. (2.57) ergibt sich unter Berücksichtigung der Gln. (2.60) bis (2.62)

$$\Delta \hat{\mathbf{S}}_{G,m,n} \approx \frac{1}{n_S} \sum_{k=1}^{n_S} e^{i(n-m)(k-1)\delta^{(k)}} \Delta \mathbf{\Lambda}_S, \quad m, n = 1(1)n_S. \quad (2.63)$$

Bei der Matrix $\Delta \hat{\mathbf{S}}_G$ handelt es sich somit um eine block-zyklische Matrix, die nach Anhang B.4 und entsprechender Anordnung der Blockmatrizen und unter Berücksichtigung der Beziehungen aus Gl. (B.10) und Gl. (B.45) durch

$$\Delta \hat{\mathbf{S}}_G \approx \Delta \hat{\mathbf{S}}_G^{\text{verst}} - \Delta \hat{\mathbf{S}}_G^{\text{unverst}} \quad (2.64)$$

mit

$$\Delta \hat{\mathbf{S}}_G^{\text{verst}} = (\mathbf{F} \otimes \mathbf{E}) \mathbf{diag} \left({}^{(1)}\mathbf{\Lambda}_S, {}^{(2)}\mathbf{\Lambda}_S, \dots, {}^{(n_S)}\mathbf{\Lambda}_S \right) (\mathbf{F} \otimes \mathbf{E})^H \quad (2.65)$$

und

$$\Delta \hat{\mathbf{S}}_G^{\text{unverst}} = \underbrace{\mathbf{diag} \left({}^{(0)}\mathbf{\Lambda}_S, {}^{(0)}\mathbf{\Lambda}_S, \dots, {}^{(0)}\mathbf{\Lambda}_S \right)}_{n_S \text{ Diagonalmatrizen}} \quad (2.66)$$

dargestellt werden kann. Die Matrix \mathbf{F} kennzeichnet die in Anhang B.2 angegebene $[n_S \times n_S]$ -FOURIER-Matrix, mit der das KRONECKER-Produkt mit der $[n_{M,S} \times n_{M,S}]$ -Einheitsmatrix \mathbf{E} gebildet wird. Auf die Berechnung der Spektralmatrizen ${}^{(k)}\mathbf{\Lambda}_S$ auf der Basis einer Modalanalyse kann verzichtet werden, wenn die Eigenwerte ${}^{(k)}\omega_{S,j}$ der verstimmtten Schaufeln durch eine Multiplikation der Eigenwerte ${}^{(0)}\omega_{S,j}$ der unverstimmtten Schaufel mit einem Verstimmungsfaktor ${}^{(k)}\kappa_{S,j}$ ausgedrückt werden,

$${}^{(k)}\omega_{S,j} = {}^{(k)}\kappa_{S,j} {}^{(0)}\omega_{S,j}, \quad j = 1(1)n_{M,S}. \quad (2.67)$$

Werden die Verstimmungsfaktoren aller n_S Schaufeln für alle betrachteten $n_{M,S}$ Moden in der Diagonalmatrix

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{diag} \left({}^{(1)}\kappa_{S,1}, \dots, {}^{(1)}\kappa_{S,n_{M,S}}, \dots, {}^{(n_S)}\kappa_{S,1}, \dots, {}^{(n_S)}\kappa_{S,n_{M,S}} \right) \quad (2.68)$$

zusammengefasst, ergibt sich mit

$$\boldsymbol{\kappa}_F = (\mathbf{F} \otimes \mathbf{E}) \boldsymbol{\kappa} \quad (2.69)$$

für die Matrix $\Delta \hat{\mathbf{S}}_G$ letztlich

$$\Delta \hat{\mathbf{S}}_G \approx \boldsymbol{\kappa}_F \Delta \hat{\mathbf{S}}_G^{\text{unverst}} \boldsymbol{\kappa}_F^H - \Delta \hat{\mathbf{S}}_G^{\text{unverst}}. \quad (2.70)$$

Das in **Bild 2.8** dargestellte einfache zyklische System mit den in **Tabelle 2.1** zusammengefassten Parametern soll die Anwendbarkeit des entwickelten Vorgehens demonstrieren. Hierin repräsentieren die Massen m_1 und m_2 die Scheiben- und die Massen m_3 und m_4 die Schaufelfreiheitsgrade. Die Dämpfungsmatrix wird gemäß Gl. (2.21) mit $\alpha = 10^{-5}$, $\beta = 0$ proportional zur Steifigkeitsmatrix angenommen, sodass sich für das unverstimmtte zyklische System realistische modale Dämpfungsgrade von $D_j = 0.0028 \dots 0.025$ ergeben. Die Erregung wird als harmonisch mit der Erregerordnung $EO = 1$ und dem Erregerkraftvektor eines Segments $\hat{\mathbf{f}}_E^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 10 \text{ N} \end{bmatrix}$ angenommen.

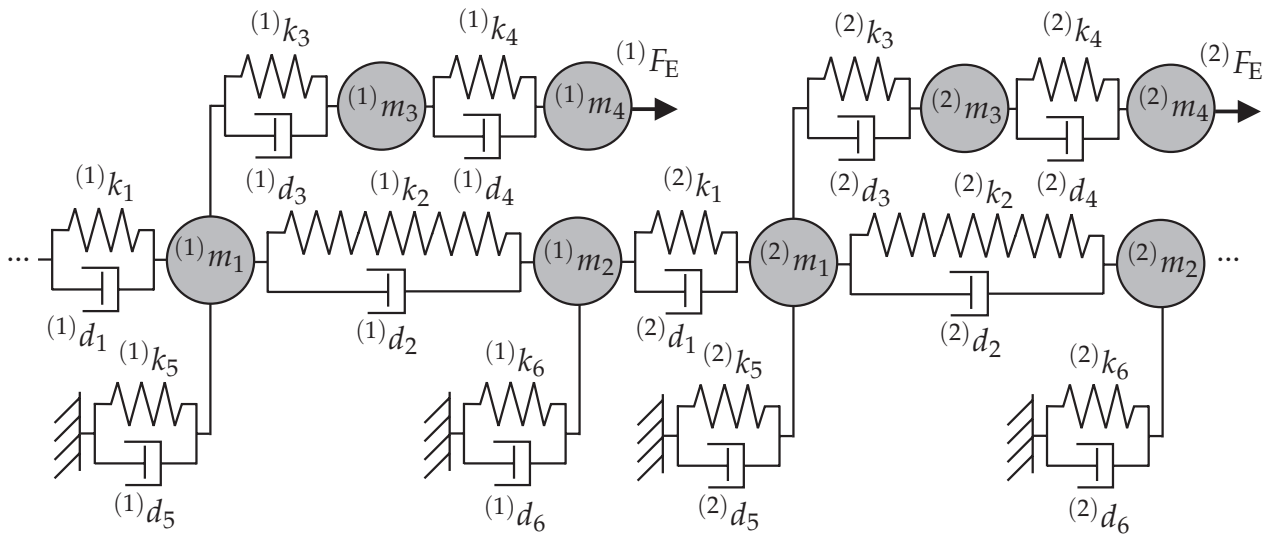


Bild 2.8: Verstimmtes zyklisches mechanisches Ersatzmodell

Wird zunächst das unverstimmte zyklische System betrachtet, ergeben sich die Eigenfrequenzen der ersten beiden Schwingungsfamilien für den entsprechend angeregten Knotendurchmesser $ND = 1$ bei ${}^{(0)}f_{G,1} = 89.3$ Hz und ${}^{(0)}f_{G,2} = 291.8$ Hz, vgl. **Bild 2.9a**. Wird die fest eingespannte Schaufel, bestehend aus den Massen m_3 und m_4 , analysiert, ergeben sich für diese Schwingungsformen mit ${}^{(0)}f_{S,1} = 91.3$ Hz und ${}^{(0)}f_{S,2} = 294.4$ Hz entsprechend höhere Eigenfrequenzen. Diese ergeben sich auch für die im verstimmten Fall b) in **Bild 2.9b** dargestellte Schaufel 3 unter Berücksichtigung sehr großer Scheibensteifigkeiten, siehe **Tabelle 2.1**. Die Steifigkeiten ${}^{(k)}k_3$ und ${}^{(k)}k_4$ der weiteren Schaufeln werden derart verstimmt, dass sich die Eigenfrequenzen ${}^{(k)}f_{S,1,2} = {}^{(k)}\kappa_{S,1,2} {}^{(0)}f_{S,1,2}$ ergeben. In **Bild 2.9** sind die Frequenzgänge der Masse 4 der Schaufeln 1, 2 und 3, die nach **Tabelle 2.1** die unverstimmte Schaufel sowie diejenigen mit den größten Abweichungen der

Tabelle 2.1: Parameter des in **Bild 2.8** dargestellten Ersatzmodells mit unverstimmten Nominalwerten und Verstimmungsfaktoren ${}^{(k)}\kappa_{S,1,2}$ für zwei Schaufelmoden

Parameter	unverstimmte Fall a)	verstimmte		
		Fall b)	Fall c)	Fall d)
${}^{(k)}m_1, {}^{(k)}m_2$	2 kg	2 kg		
${}^{(k)}m_3, {}^{(k)}m_4$	1 kg	1 kg		
${}^{(k)}k_3$	$0.75 \cdot 10^6$ N/m	${}^{(k)}\kappa_{S,1,2}^2 \cdot 0.75 \cdot 10^6$ N/m		
${}^{(k)}k_4$	$1.5 \cdot 10^6$ N/m	${}^{(k)}\kappa_{S,1,2}^2 \cdot 1.5 \cdot 10^6$ N/m		
${}^{(k)}k_1, {}^{(k)}k_2, {}^{(k)}k_5, {}^{(k)}k_6$	$7.5 \cdot 10^6$ N/m	$1.0 \cdot 10^{10}$ N/m	$7.5 \cdot 10^6$ N/m	$5.0 \cdot 10^6$ N/m
${}^{(1)}\kappa_{S,1,2}$	1.0	1.05		
${}^{(2)}\kappa_{S,1,2}$	1.0	0.96		
${}^{(3)}\kappa_{S,1,2}$	1.0	1.0		
${}^{(4)}\kappa_{S,1,2}$	1.0	1.03		
${}^{(5)}\kappa_{S,1,2}$	1.0	0.98		
${}^{(6)}\kappa_{S,1,2}$	1.0	1.02		

Eigenfrequenzen repräsentieren, dargestellt. Aus **Bild 2.9** wird deutlich, dass die mit den Eigenvektoren des verstimmt Systems berechneten Frequenzgänge exakt den mit Hilfe der oben dargestellten Approximation berechneten entsprechen. Die Grenzfälle des unverstimmt Schaufelkranzes einschließlich Scheibenelastizität sowie der Verstimmung einzelner fest eingespannter Schaufeln ohne Scheibenelastizität werden somit exakt abgebildet: Für den unverstimmt Fall ergibt sich mit ${}^{(k)}\Lambda_S = {}^{(0)}\Lambda_S$, $k = 1(1)n_S$, die Identität $\Delta\hat{\mathcal{S}}_G^{\text{verst}} = \Delta\hat{\mathcal{S}}_G^{\text{unverst}}$ und somit $\Delta\hat{\mathcal{S}}_G = \mathbf{0}$ bzw. die in Gl. (2.32) angegebene dynamische

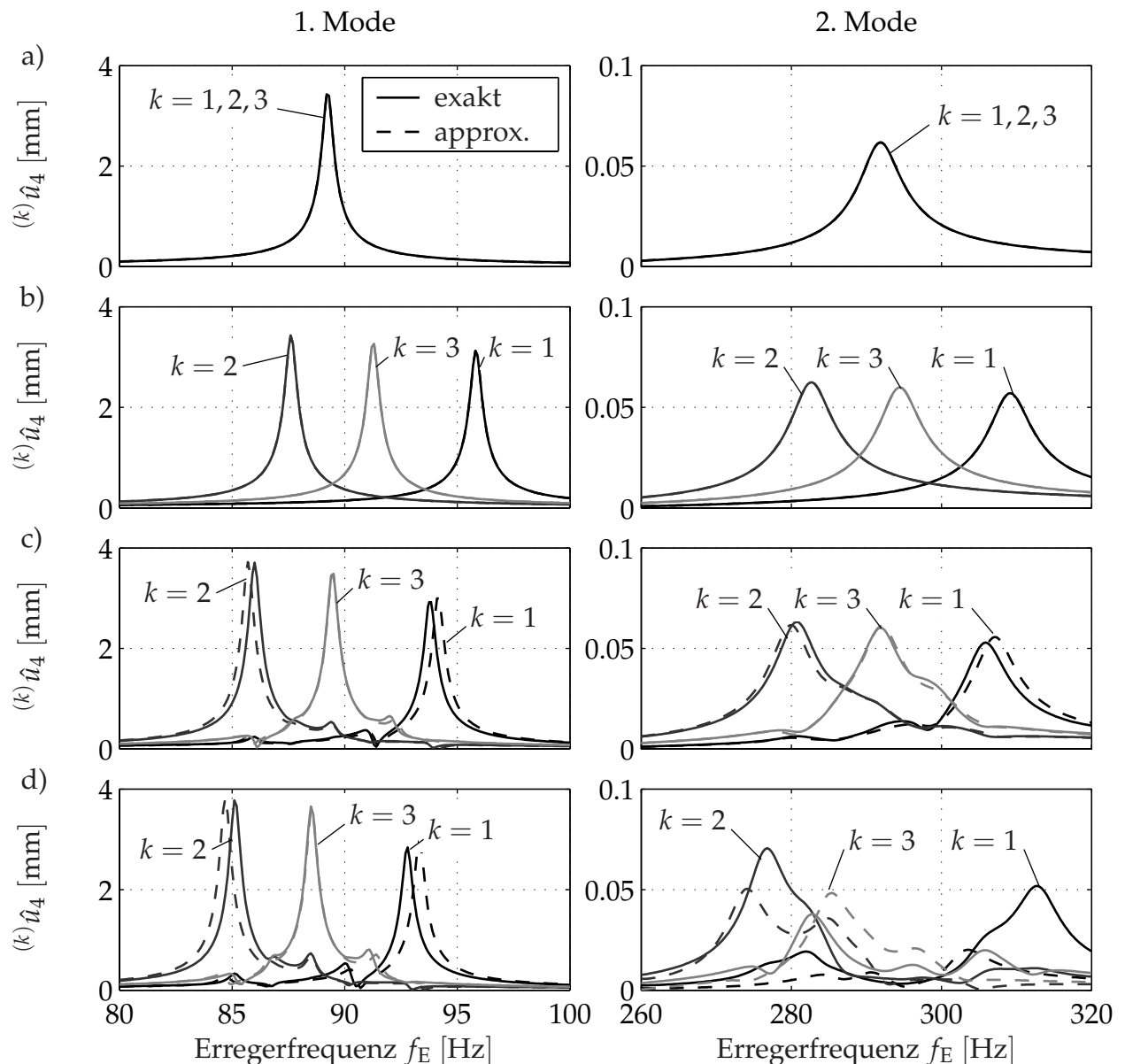


Bild 2.9: Berechnete Frequenzgänge auf der Basis exakter verstimmt Moden (durchgezogene Linien) sowie unter Verwendung der Approximation aus Gl. (2.70) (gestrichelte Linien). Links: 1. Mode; rechts: 2. Mode. Jeweils: a) unverstimmt System; b) verstimmt, entkoppelte Schaufeln; c) verstimmt Schaufeln mit $k_1 = k_2 = k_5 = k_6 = 7.5 \cdot 10^6$ N/m; d) verstimmt Schaufeln mit $k_1 = k_2 = k_5 = k_6 = 5.0 \cdot 10^6$ N/m

Steifigkeitsmatrix $\hat{\mathcal{S}}_G$ der unverstimmten beschauelten Scheibe. Für den Fall fest eingespannter verstimmter Schaufeln entsprechen die Quadrate der in Gl. (2.32) enthaltenen Eigenkreisfrequenzen $\omega_{G,j}$ den in ${}^{(0)}\Lambda_S$ enthaltenen, sodass die Eigenwerte der Systemmatrix unmittelbar denen der einzelnen verstimmten Schaufeln entsprechen.

Werden die Schaufeln gemäß **Tabelle 2.1** verstimmt und mit den für den Fall c) gewählten Scheibensteifigkeiten eine signifikante Scheibenelastizität eingeführt, ergeben sich die in **Bild 2.9c** gegebenen Frequenzgänge. Sie zeigen zunächst eine entsprechende Kopplung der Schaufeln und weiterhin sowohl qualitativ als auch quantitativ eine sehr gute Übereinstimmung der Approximation mit den exakten Frequenzgängen. Die Abweichung der Resonanzfrequenzen von der exakten Lösung ist mit dem Einfluss der Scheibenelastizität zu begründen: Sind die Eigenvektoren des verstimmten Gesamtsystems in den Scheibefreiheitsgraden nicht mehr zu vernachlässigen, ergeben sich auch bei qualitativ gleichen Eigenvektoren in den Schaufelfreiheitsgraden aufgrund der Massennormierung für diese Freiheitsgrade betragsmäßig kleinere normierte Eigenvektoren. Die Approximation durch die in Gl. (2.63) gegebene Matrix ${}^{(k)}\Delta\Lambda_S$ überschätzt folglich den Einfluss der Verstimmung, sodass sich die jeweils kleineren bzw. größeren Resonanzfrequenzen ergeben.

Wird die Scheibensteifigkeit weiter auf den für den Fall d) in **Tabelle 2.1** angegebenen Wert verringert, ergeben sich die in **Bild 2.9d** dargestellten deutlicheren Abweichungen, da aufgrund der größeren Verformungen in der Scheibe die für die Anwendung der Approximation notwendigen Voraussetzungen nicht mehr gegeben sind. Dies gilt insbesondere für die stark verstimmten Schaufeln. Dies wird besonders im Fall der höheren Frequenzen des zweiten Schwingungsmodes deutlich, da die Scheibe hier aufgrund ihrer geringen Eigenfrequenz deutliche Verformungen erfährt. Ohne Berücksichtigung der Massen m_3 und m_4 ergibt sich in diesem Fall die erste Eigenfrequenz der Scheibe mit $ND = 1$ zu $f_{R,1} = 283.4$ Hz, die im Bereich der Eigenfrequenzen der zweiten Schwingungsform der Schaufeln liegt. In diesem Fall ist das Verfahren offensichtlich nicht mehr anwendbar, im Fall einer relativ steifen Scheibe sind aber ausreichend genaue Ergebnisse zu erwarten.

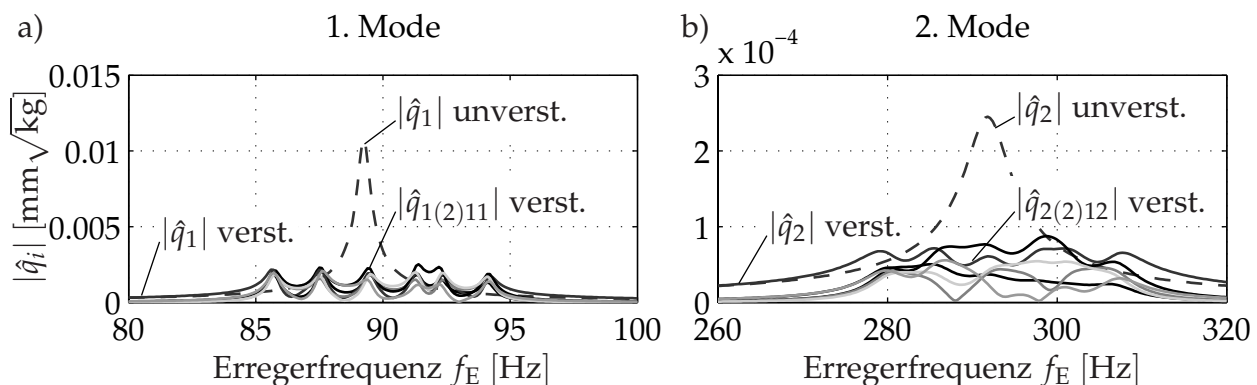


Bild 2.10: Anregung von Schwingungsmoden verschiedener Knotendurchmesser für Fall c) aus **Bild 2.9c**: a) 1. Mode; b) 2. Mode. Jeweils Beträge $|\hat{q}_i|$ der modalen Amplituden der beteiligten Schwingungsfamilie für alle Knotendurchmesser (vorwärts und rückwärts rotierende Eigenformen)

Die für verstimnte Systeme typische Anregung von Schwingungsformen verschiedener Knotendurchmesser wird aus **Bild 2.10** deutlich, wobei die modalen Amplituden des verstimnten Systems (durchgezogene Linien) außerhalb der Resonanz nahezu denen des unverstimnten Systems (gestrichelte Linien) entsprechen und nur der Knotendurchmesser $ND = 1$ entsprechend der gewählten Erregerordnung $EO = 1$ angeregt wird.

Im Gegensatz zu den oben genannten Verfahren der Substrukturtechnik, die zumeist auf der Kenntnis der Massen- bzw. Steifigkeitsmatrix aufbauen bzw. Approximationen dieser Matrizen verwenden, sind für die Anwendung des entwickelten Vorgehens ausschließlich die relativ leicht zu ermittelnden modalen Parameter des unverstimnten zyklischen Systems und der fest eingespannten unverstimnten Schaufel sowie die Verstimmungsfaktoren zu ermitteln. Darüber hinaus werden insbesondere die Grenzfälle des unverstimnten Systems und fest eingespannter, verstimnter Schaufeln exakt abgebildet. Ferner entfällt die aufwändige Formulierung der u. U. zahlreichen Koppelbedingungen zwischen Schaufel und Scheibe.

2.1.5 Reibelement

Analog zu Gl. (2.27) lassen sich die modal transformierten Bewegungsgleichungen

$$\mathcal{S}_D \hat{q}_D = \hat{\mathcal{F}}_D \quad (2.71)$$

eines beliebigen Reiblements mit der dynamischen Steifigkeitsmatrix

$$\hat{\mathcal{S}}_D = \mathbf{diag}(\omega_{D,j}^2 - \Omega_E^2 + i 2D_{D,j}\omega_{D,j} \Omega_E) \quad (2.72)$$

angeben. Diese enthält die Eigenkreisfrequenzen $\omega_{D,j}$ und modalen Dämpfungen $D_{D,j}$ des Reiblements. Die in der Modalmatrix $\hat{\Phi}_D$ des Dämpfers³ berücksichtigten Schwingungsformen beinhalten zunächst sechs Starrkörpermoden mit $\omega_{D,j} = 0, j = 1(1)6$, entsprechend der sechs Freiheitsgrade des Reiblements im Raum. Aufgrund der vorausgesetzten Massennormierung der Eigenvektoren enthalten diese implizit die Trägheitseigenschaften des Reiblements. Unter der Annahme eines starren Reiblements kann eine modale Beschreibung somit entfallen bzw. zur Ermittlung der Starrkörpermoden an den Kontaktpunkten OL' und OR' die Geometrie sowie die Trägheitseigenschaften des Reiblements herangezogen werden. Die Punkte OL' und OR' stellen dabei die zu den Referenzpunkten OL und OR der benachbarten Fußplatten koinzidierenden Referenzpunkte des Dämpfers dar, vgl. **Bild 2.2b**. Wird als Dämpferkoordinatensystem ein Hauptachsensystem⁴ des Reiblements gewählt, ist die $[6 \times 6]$ -Modalmatrix der massennormierten Starrkörpermoden bezüglich des Schwerpunktes C diagonal mit den Träg-

³Die Modalmatrix $\hat{\Phi}_D$ des Dämpfers wird hier konsistent ebenfalls als komplexe Größe angenommen. Werden nur Starrkörpermoden bzw. elastische Moden des Dämpfers basierend auf dem ungedämpften Fall der Bewegungsgleichungen berücksichtigt, ergeben sich rein reelle Eigenvektoren.

⁴Stellt das Dämpferkoordinatensystem D kein Hauptachsensystem dar, vgl. **Bild 2.2b**, ist eine entsprechende Koordinatentransformation erforderlich.

heitseigenschaften des Reibelements besetzt,

$$\hat{\Phi}_{C,D}^{-1} = \mathbf{diag} \left(\sqrt{m}, \sqrt{m}, \sqrt{m}, \sqrt{J_{xx}}, \sqrt{J_{yy}}, \sqrt{J_{zz}} \right). \quad (2.73)$$

Die Modalmatrix des Referenzpunktes OL' lässt sich dann aus der einfachen Beziehung

$$\hat{\Phi}_{OL',D} = R_L \hat{\Phi}_{C,D} \quad (2.74)$$

mit der Geometriematrix

$$R_L = \begin{bmatrix} E & -\tilde{r}_{OL'} \\ \mathbf{0} & E \end{bmatrix}, \quad (2.75)$$

die den Ortsvektor $\tilde{r}_{OL'}$ vom Schwerpunkt C zum Referenzpunkt OL' bzw. den entsprechenden Tilde-Operator nach Gl. (A.3) enthält, ermitteln. Analog wird für den rechten Referenzpunkt OR' vorgegangen. Die dynamische Steifigkeitsmatrix $\hat{\mathbf{S}}_D$ reduziert sich in diesem Fall auf die Diagonalmatrix der negativen Quadrate der Erregerkreisfrequenz Ω_E . Darüber hinaus können bei Bedarf auch elastische Moden des Reibelements berücksichtigt werden. Praktisch ausgeführte Reibelemente sind jedoch im Allgemeinen sehr steif und damit in guter Näherung als starrer Körper zu modellieren. Dies zeigen auch die sehr großen Eigenfrequenzen der in **Bild 2.11** dargestellten charakteristischen Schwingungsformen verschiedener frei-frei gelagerter Dämpfertypen, die auf der Basis von Reibelementen mit einer Länge von $\ell_D = 60$ mm, einem Elastizitätsmodul von $E = 210000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ und einer Dichte von $\rho = 7700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ mit Hilfe des Finite-Element-Programmsystems ANSYS ermittelt wurden. Die Berücksichtigung dynamischer Nachgiebigkeiten des Reiblements erscheint daher nur bei sehr großen Erregerfrequenzen bzw. sehr weich ausgeführten Dämpfern sinnvoll. Eine statische Nachgiebigkeit, etwa im Fall des in **Bild 2.11e** dargestellten Reiblements, ist u. U. aber nicht zu vernachlässigen, siehe auch Abschnitt 2.3. Hierzu wird die Elastizität des Dämpfers häufig der Nachgiebigkeit des Kontaktes zugeschlagen, siehe u. a. CSABA [36]. GUILLEN UND PIERRE [70] schlagen ein Dämpfermodell vor, das die Dämpfermasse vernachlässigt, seine Elastizität aber mit Hilfe einer $[4 \times 4]$ -Steifigkeitsmatrix berücksichtigt. Der Einfluss der dynamischen Eigenschaften des Dämpfers auf die Dynamik des Gesamtsystems wird in Abschnitt 3.2.1 untersucht.

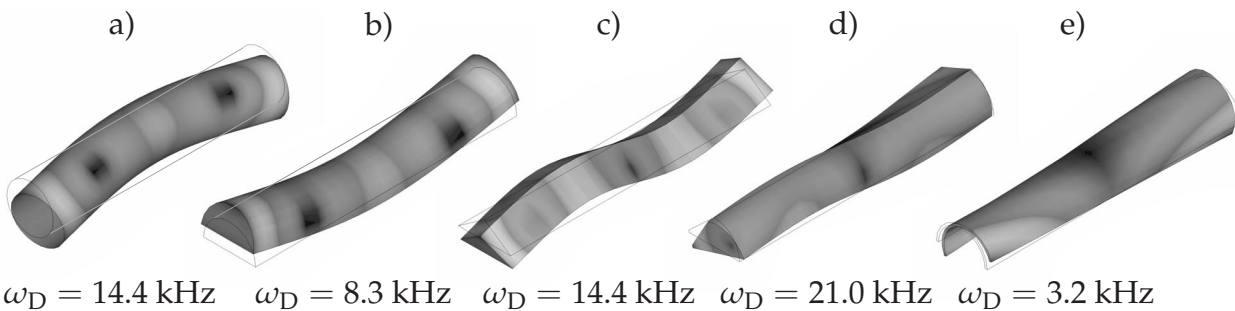


Bild 2.11: Charakteristische elastische Moden verschiedener Reibelementtypen: a) zylinderförmiges Reibelement; b) halbzylinderförmiges Reibelement; c) keilförmiges Reibelement; d) asymmetrisches Reibelement; e) schalenförmiges Reibelement

2.2 Modellierung der Erregung

Die auf eine Laufschaufel wirkenden Erregerkräfte können sehr unterschiedliche Ursachen haben. Die hieraus resultierenden Schwingungsphänomene sind auch für die Auslegung von Koppелеlementen und die Anwendbarkeit des entwickelten Berechnungsverfahrens von Bedeutung. Daher sollen im Folgenden zunächst einige typische Erregermechanismen vorgestellt und anschließend die Beschreibung einer drehzahlharmonischen Fremderregung angegeben werden.

2.2.1 Erregungsmechanismen

Die Auslegung von Koppелеlementen für Laufschaufeln von Turbomaschinen erfordert insbesondere unter Berücksichtigung von Nichtlinearitäten aufgrund trockener Reibung eine möglichst genaue Kenntnis der Erregerkräfte. Daher soll an dieser Stelle ein kurzer Überblick über mögliche Erregungsmechanismen von Laufschaufelschwingungen und ihre Bedeutung im Hinblick auf eine Auslegung von Koppелеlementen gegeben werden.

Mechanische Schwingungen lassen sich allgemein hinsichtlich ihrer Entstehungsmechanismen charakterisieren und in

- fremderregte Schwingungen,
- selbsterregte Schwingungen,
- parametererregte Schwingungen und
- Eigenschwingungen

unterteilen. Aufgrund verschiedenster Quellen für Erregerkräfte, die im Folgenden kurz erläutert werden, werden diese auch an Laufschaufeln von Turbomaschinen beobachtet.

Fremderregte Schwingungen von Laufschaufeln treten in sehr vielfältiger Weise auf und stellen oftmals den Hauptanregungsmechanismus einer Laufbeschaukelung dar. Die Ursachen hierfür sind periodische oder nichtperiodische Fluktuationen der auf die Schaufel wirkenden Gas- bzw. Dampfkräfte. Sie lassen sich hinsichtlich ihrer Erregerfrequenzen unterteilen in drehzahlharmonische bzw. nicht-drehzahlharmonische Erregerkräfte. Zu letzteren zählen u. a. eine periodisch pulsierende Anströmung und eine nichtperiodische, stochastische Anregung, etwa aufgrund von Flammenschwingungen in der Brennkammer einer Gasturbine.

Die Ursache drehzahlharmonischer Fluktuationen ist eine gehäusefeste, d. h. im Inertialsystem stationäre, aber über dem Umfang einer Laufbeschaukelung nicht konstante Verteilung der Strömungsgeschwindigkeit bzw. Druckverteilung im Fluid. Relativ zum rotierenden System stellt sich somit eine zeitlich veränderliche Druckverteilung ein, die zu einer Schwingungsanregung der Schaufeln führt. Zu den Anregungsmechanismen mit drehzahlproportionaler Erregerfrequenz zählt unter anderem die Anregung aufgrund

von so genannten Nachlaufdellen, die auch als Düsenerregung bezeichnet wird, vgl. **Bild 1.1**. Die in der Grenzschicht auftretenden Reibungseffekte bewirken eine verminderte Strömungsgeschwindigkeit des Fluids, sodass die Laufschaufeln beim Vorbeistreichen an der als raumfest angenommenen Strömung eine periodische Anregung mit dem n_L -Vielfachen der Drehfrequenz des Rotors erfahren, wobei n_L die Anzahl der Schaufeln im vorausgehenden Leitschaufelgitter bezeichnet.

Einen ähnlichen Einfluss hat die Anzahl der Leitschaufeln des nachfolgenden Gitters, da sich hier ein entsprechender Staudruck aufbaut, der auf die Laufschaufelreihe als zusätzlicher Anregungsmechanismus wirkt, siehe u. a. LECHNER UND SEUME [95]. Weiterhin ist bekannt, dass sich eine inhomogene Strömung unter Umständen auch nach dem Passieren mehrerer Stufen noch identifizieren lässt, sodass über die unmittelbar vorausgehende oder nachfolgende Leitbeschaufelung hinaus die Schaufelzahl weiterer Stufen eine signifikante Anregungsquelle darstellen kann.

Einen vergleichbaren Effekt haben im Gehäuse eingebrachte Rippen, die ebenfalls - entsprechend ihrer Anzahl bzw. deren Vielfache - zu einer drehzahlharmonischen Anregung führen. Ebenso können Fertigungsungenauigkeiten, Teilfugen, Gehäuseunrundheiten usw. zu periodischen Störungen der Strömung und damit zu entsprechenden Anregungen der Laufschaufeln führen. Anström- und Anzapfleitungen können ebenfalls eine Quelle für eine Schwingungsanregung sein. In Gasturbinen wird häufig eine Anregung mit einer Harmonischen entsprechend der Anzahl der Brenner in einer Ringbrennkammer beobachtet. Werden Dampfturbinen bei Teillast betrieben, indem durch Öffnen und Schließen einzelner Zuströmsegmente der Massendurchsatz auf wenige Leitschaufeln begrenzt wird, so wirkt diese Teilbeaufschlagung ebenfalls als Anregungsmechanismus von Laufschaufelschwingungen.

Selbsterregte Schwingungen umfassen strömungsinduzierte Schwingungsphänomene, die sich durch eine Wechselwirkung zwischen der schwingenden Struktur und des sie umgebenden strömenden Fluids auszeichnen. Hierzu zählen nach RIEHM [134] verschiedene Arten des *Flatterns*, das u. a. durch eine Veränderung der Auftriebsbeiwerte und der damit verbundenen Energiezufuhr über einer Schwingungsperiode oder durch ein periodisches Abreißen der Strömung (*Buffeting*, *Galloping*) hervorgerufen wird.

Zu den *parametererregten Schwingungen* lassen sich u. a. die durch eine Rotorschwingung hervorgerufene Fußpunkterregung der Schaufeln und der Einfluss der in mitrotierenden Koordinaten periodisch veränderlichen Richtung des Gravitationsfeldes zählen.

Eigenschwingungen von rotierenden Schaufeln können durch einmalige Stöße, hervorgerufen beispielsweise durch eine schlagartig sich ändernde Anströmung, Wasserschlag, Anstreifvorgänge oder Fremdkörper, angeregt werden. Die Laufschaufeln schwingen dann in einer oder mehrerer ihrer Eigenfrequenzen. Aufgrund der in dem System vorhandenen Dämpfung klingen diese aber im Allgemeinen schnell wieder ab, sodass sie im Sinne einer Optimierung des Schwingungsverhaltens hinsichtlich Dauerwechselfestigkeit nur von untergeordneter Bedeutung sind. Dennoch können diese kurzzeitigen Anregungen zu sehr hohen Werkstoffbeanspruchungen führen, sodass diese einmaligen Ereignisse un-

ter allen Umständen zu vermeiden sind. Eine sinnvolle Auslegung von Koppелеlementen auf die so angeregten Eigenschwingungen ist im Allgemeinen nicht durchführbar.

Im Folgenden sollen ausschließlich fremderregte Schwingungen mit zunächst drehzahlharmonischen Anregungsfrequenzen betrachtet werden, da sie in vielen Fällen die Hauptanregungsquelle für Laufschaufelschwingungen darstellen. Als Sonderfall wird an späterer Stelle nochmals das Pulsieren der Strömung als Anregungsmechanismus aufgegriffen. Andere Anregungsmechanismen, insbesondere die zur Selbsterregung führende Struktur-Fluid-Wechselwirkung, werden nicht weiter berücksichtigt.

2.2.2 Mathematische Beschreibung der Erregerkräfte

Zur Beschreibung der Erregerkräfte dienen die in **Bild 2.12a** dargestellten Winkel ϑ zur Angabe der Winkelposition in gehäusefesten Koordinaten, φ_0 zur Beschreibung der Lage der mit der Drehkreisfrequenz Ω_R rotierenden Scheibe sowie φ zur Angabe der Winkelposition auf der Scheibe in scheibenfesten, mitrotierenden Koordinaten. Die absolute Winkelposition ϑ lässt sich durch

$$\vartheta = \varphi_0 + \varphi \quad (2.76)$$

mit dem Bezugswinkel

$$\varphi_0 = \Omega_R t \quad (2.77)$$

ausdrücken.

In jedem Punkt des gesamten Strömungskanals wirken aufgrund inhomogener Druck- und Strömungsverhältnisse Kräfte auf die Laufbeschaufelung in axialer, tangentialer und u. U. auch radialer Richtung. Für einen beliebigen diskreten Freiheitsgrad k an einer bestimmten radialen und axialen Position kann die Erregerkraft $f_{E,k}$ in gehäusefesten Koordinaten im Allgemeinen sowohl orts- als auch zeitabhängig sein. Es wird angenommen,

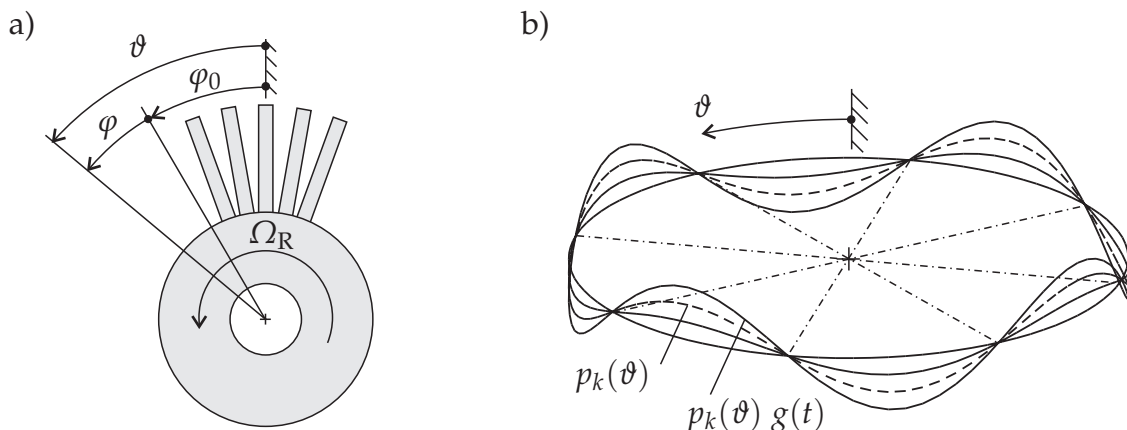


Bild 2.12: Raumfeste Erregung: a) Definition absoluter und relativer Winkel am rotierenden Schaufelkranz; b) Darstellung der EO4-Erregung

dass sie sich in Abhängigkeit der absoluten Winkelposition ϑ und der Zeit t durch

$$f_{E,k}(\vartheta, t) = p_k(\vartheta) g(t) \quad (2.78)$$

beschreiben lässt. Die Funktion $p_k(\vartheta)$ beschreibt die Gestalt der Erregung in gehäusefesten Koordinaten für den jeweiligen Freiheitsgrad k in Abhängigkeit der Umfangsposition ϑ . Die Funktion $g(t)$ gibt die zeitliche Änderung der Erregerkräfte wieder, die u. a. durch ein Pulsieren des gesamten Strömungsfeldes hervorgerufen werden kann. Die Funktion $p_k(\vartheta)$ ist periodisch auf 2π , da $p_k(\vartheta + 2\pi) = p_k(\vartheta)$ gilt. Die Funktion $g(t)$ soll hier ebenfalls als periodisch mit der Grundkreisfrequenz Ω_P angenommen werden, zum Beispiel um ein periodisches Pulsieren der Strömung abzubilden. Stochastische Schwankungen der Erregerkräfte werden im Folgenden nicht weiter untersucht. Werden beide Funktionen in eine FOURIER-Reihe entwickelt, ergibt sich

$$f_{E,k}(\vartheta, t) = \underbrace{\left(\sum_{EO=0}^{\infty} p_{EO} \cos(EO \vartheta + \psi_{EO}) \right)}_{p_k(\vartheta)} \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{\infty} g_j \cos(j \Omega_P t + \psi_j) \right)}_{g(t)}. \quad (2.79)$$

Eine beliebige Gestalt der Erregung $p_k(\vartheta)$ setzt sich somit aus der Summe von harmonischen Anteilen verschiedener so genannter Erregerordnungen EO zusammen, wie sie beispielhaft für die Erregerordnung $EO = 4$ in **Bild 2.12b** dargestellt ist⁵. Die Phasenwinkel ψ_{EO} bzw. ψ_j bezeichnen die Phasenlagen der einzelnen Harmonischen der entsprechenden FOURIER-Reihen und ergeben sich wie die Koeffizienten p_{EO} und g_j aus den bekannten, in Anhang A.2 angegebenen Beziehungen der FOURIER-Reihenentwicklung.

Wird der absolute Winkel ϑ durch die in Gl. (2.76) gegebene Beziehung ersetzt, so kann Gl. (2.79) unter Anwendung der Additionstheoreme in

$$f_{E,k}(\varphi, t) = \frac{1}{2} \sum_{EO=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_{EO} g_j \left(\cos(\Omega_{EEO,j} t + \psi_{EEO,j}) + \cos(\tilde{\Omega}_{EEO,j} t + \tilde{\psi}_{EEO,j}) \right) \quad (2.80)$$

überführt werden. Hierin bezeichnen

$$\Omega_{EEO,j} = EO \Omega_R + j \Omega_P, \quad \tilde{\Omega}_{EEO,j} = EO \Omega_R - j \Omega_P, \quad EO, j = 0(1)\infty, \quad (2.81)$$

die Erregerkreisfrequenzen und

$$\psi_{EEO,j} = EO \varphi + \psi_{EO} + \psi_j, \quad \tilde{\psi}_{EEO,j} = EO \varphi + \psi_{EO} - \psi_j, \quad EO, j = 0(1)\infty, \quad (2.82)$$

die Phasenwinkel, die sich aus der Phasenlage der Harmonischen j der FOURIER-Reihe für $g(t)$ sowie der Harmonischen EO der FOURIER-Reihe für $p_k(\vartheta)$ und der Phasenlage aufgrund der Position φ auf dem Umfang ergeben. Mit den auf den zeitlichen Mittelwert

$$\bar{f}_{E,k} = p_0 g_0 \quad (2.83)$$

⁵Aufgrund der noch zu zeigenden Bedeutung der Erregerordnung im Zusammenhang mit der Wirksamkeit der Reibungsdämpfer wird die prägnante, im englischen Sprachraum für *engine order* verbreitete Bezeichnung EO verwendet.

bezogenen Amplitudenfaktoren $s_{k,n}$ kann Gl. (2.80) vereinfacht durch

$$f_{E,k}(\varphi, t) = \bar{f}_{E,k} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} s_{k,n} \cos(\Omega_n t + \psi_{k,n}) \right) \quad (2.84)$$

ausgedrückt werden, wobei nur die aus Gl. (2.81) folgenden Frequenzen im Erregerspektrum enthalten sind. Diese ergeben sich als Kombinationskreisfrequenzen der Grundkreisfrequenzen Ω_R und Ω_P und den in den jeweiligen Spektren enthaltenen Harmonischen (Modulation) und müssen nicht zwangsläufig drehzahlharmonisch sein. Die Faktoren $s_{k,n}$ werden nach TRAUPEL [167] als Stimulus bezeichnet. Dieser Stimulus dient in der praktischen Schaufelauslegung zur Abschätzung der auf das Schaufelblatt wirkenden dynamischen Kräfte und basiert häufig auf Erfahrungswerten, da der exakte Verlauf der Erregerkräfte $p_k(\vartheta)$ zumeist nicht bekannt ist. Häufig wird der Stimulus s_n einer Erregerfrequenz für die Erregerkräfte an allen Freiheitsgraden k identisch gewählt. Für die unteren Drehzahlharmonischen bis zur sechsten Ordnung gibt TRAUPEL [167] Werte von $s_n = 0.05 \dots 0.1$ an.

In **Bild 2.13** sind exemplarisch drei vereinfachte, charakteristische Verläufe der Erregerkraft $f_{E,k}(\varphi, t)$ für eine bestimmte Winkelposition $\varphi = \varphi^*$ auf der Scheibe dargestellt. **Bild 2.13a** zeigt den Fall einer dem Gleichanteil überlagerten Schaufelanregung mit 10 Rechteckimpulsen, die z.B. die vereinfachte Modellierung einer Anregung durch ein vorangehendes Leitschaufelgitter mit einer Leitschaufelanzahl $n_L = 10$ wiedergibt (Düsenerrregung). Die Impulsbreite entspricht $\frac{1}{20}$ des vollständigen Scheibenumfangs. Ein Pulsieren der Strömung ist hier zunächst nicht berücksichtigt, sodass die Erregung eine gehäusefeste, stehende Welle darstellt. Die FOURIER-Reihenentwicklung zeigt, dass die 10., 30., 50. usw. Harmonische deutlich im Erregerspektrum hervortreten. Aus Gründen der Übersichtlichkeit ist der Gleichanteil im Spektrum nicht dargestellt. Neben Rechteckimpulsen lassen sich auch beliebige andere Verläufe wie etwa cos-Funktionen zur Abbildung der realen Druckverhältnisse im Nachlaufgebiet der Leitbeschaufelung verwenden, deren harmonische Analyse entsprechend weitere Anregungsfrequenzen liefert, siehe u. a. TRAUPEL [167] sowie SOLLMANN [158].

Tritt kein Pulsieren auf, d. h. gilt $\Omega_P = 0$, so fallen die Erregerkreisfrequenzen aus Gl. (2.81) und die Phasenwinkel aus Gl. (2.82) zusammen. Jeder durch seine radiale und axiale Position festgelegte Ort auf dem Umfang erfährt in diesem Fall die in **Bild 2.13a** gegebene, jedoch um den Phasenwinkel $EO\varphi$ aus Gl. (2.82) verschobene Anregung. Die Spektren sind daher für beliebige Winkel φ identisch, sodass alle Schaufeln phasenverschoben die gleiche Anregung erfahren.

In **Bild 2.13b** tritt zusätzlich zu der im obigen Beispiel genannten Rechteckimpulsanregung ein Pulsieren der Strömung auf, das sich der gehäusefesten Verteilung der Erregerkräfte überlagert. In dem gezeigten Beispiel wurde $g(t) = 1 + 0.3 \cos \Omega_P t$ mit $\Omega_P = 3\Omega_R$ gewählt. Es treten nun weitere Kreisfrequenzen im Erregerkraftspektrum auf, die sich entsprechend Gl. (2.81) zu $3\Omega_R, 7\Omega_R, 13\Omega_R$ usw. bestimmen lassen (so genannte Nebenfrequenzbänder bei Amplitudenmodulation). An dieser Stelle sei bemerkt, dass der zeitliche Verlauf und somit auch das Spektrum der Erregerkraft an verschiedenen Winkelpositio-

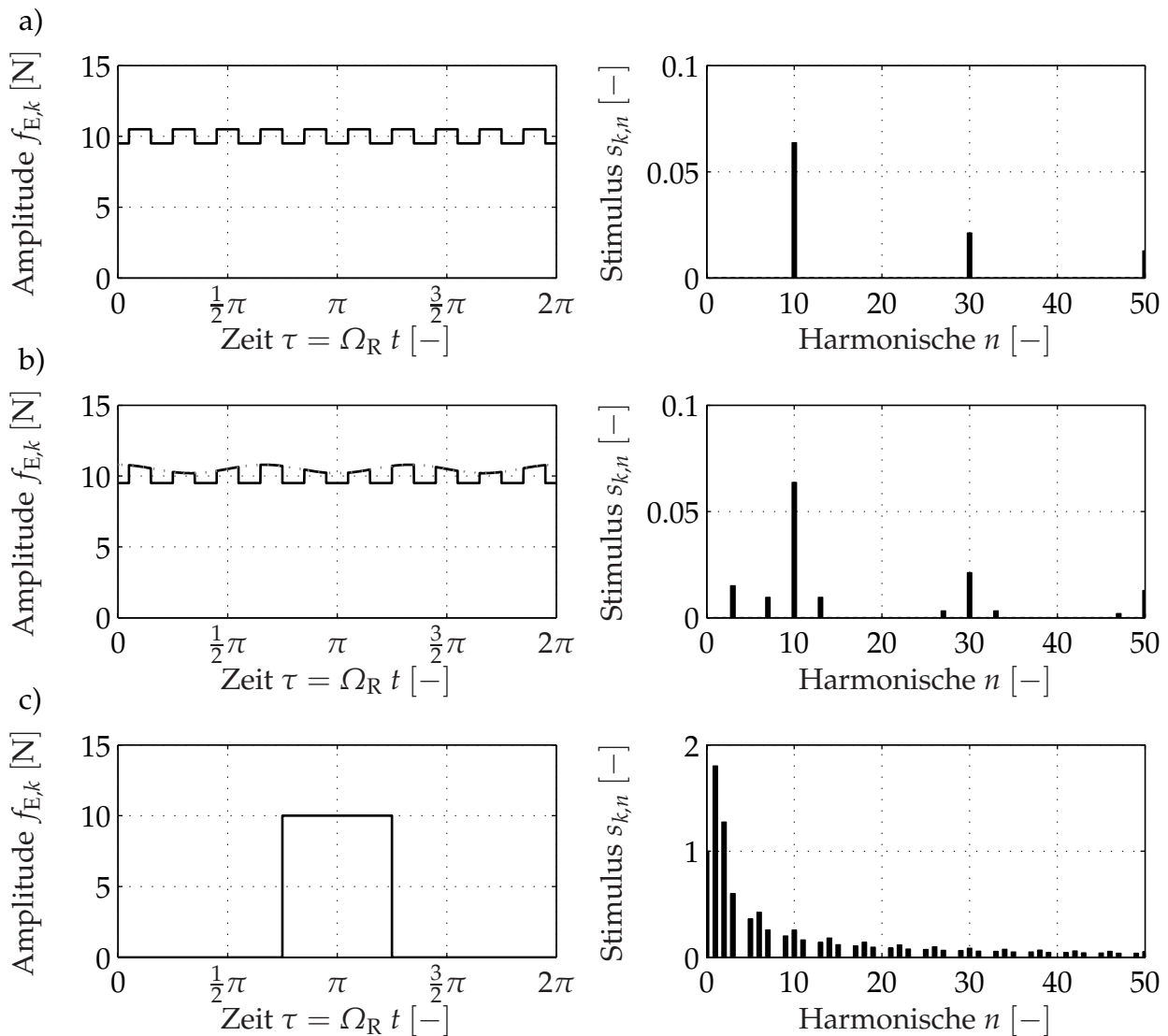


Bild 2.13: Vereinfachte charakteristische Zeitverläufe (links) und Spektren (rechts) der Erregerkraft an einem diskreten Freiheitsgrad über der Zeit im mitrotierenden System: a) impulsartige Anregung durch vorgeschaltetes Leitschaufelgitter mit $n_L = 10$; b) wie a) mit überlagertem Pulsieren der gesamten Anströmung; c) Teilbeaufschlagung mit einem Teilbeaufschlagungswinkel von $\frac{\pi}{2}$

nen φ in diesem allgemeinen Fall unterschiedlich sein kann. Es erfahren daher nicht alle Punkte auf dem Umfang die gleiche Anregung, sodass für die verschiedenen Schaufeln unterschiedliche Schwingungsantworten zu erwarten sind.

Bild 2.13c zeigt mit der Teilbeaufschlagung einen weiteren typischen Anregungsmechanismus für Laufschaufelschwingungen. Im einfachsten Fall kann eine Teilbeaufschlagung beispielsweise auf einem Viertel des gesamten Umfangs als Rechteckimpuls der Breite $\frac{\pi}{2}$ modelliert werden. Neben einem entsprechenden Gleichanteil enthält das Frequenzspektrum der Erregerkraft in erster Linie niederfrequente Anteile, die um so deutlicher hervortreten, je größer der Teilbeaufschlagungswinkel ist. Darüber hinaus treten aber auch nicht zu vernachlässigende höherfrequente Anteile auf. TRAUPEL [167] weist darauf hin,

dass insbesondere der Anteil der höheren Harmonischen im Erregerspektrum von der gewählten Approximation des realen Verlaufs der Erregerkräfte bei Teilbeaufschlagung abhängt. Im Vergleich zu einer Düsenerrregung lässt sich bei Teilbeaufschlagung u. U. keine eindeutig dominierende Erregerordnung feststellen.

In vielen praktischen Anwendungen kann jedoch davon ausgegangen werden, dass in dem relevanten Betriebsdrehzahlbereich einzelne Erregerfrequenzen eine dominierende Rolle spielen. Daher soll im Folgenden von *monofrequenten Erregerkräften* ausgegangen werden. Ein Pulsieren der Strömung wird zunächst vernachlässigt ($g(t) = 1$) und die Gestalt der Erregung über dem Umfang wird durch nur eine Harmonische angenähert. Der Spezialfall einer harmonisch mit der Zeit veränderlichen Anströmung ($g(t) = 1 + \kappa \cos \Omega_P t$) bei konstanter Verteilung der Erregerkräfte über dem Umfang ($p_k(\vartheta) = \text{const.}$) führt ebenfalls auf eine monofrequente Anregung, welche in Abschnitt 3.2.4.1 als Sonderfall behandelt wird. Grundsätzlich lässt sich die Schwingungsantwort des nichtlinearen Systems bei verschiedenen Erregerfrequenzen separat berechnen. Eine anschließende Superposition ist allerdings nur im Fall des linearen Systems ohne nichtlineare Reibungseffekte möglich.

Für den wichtigen Fall der gehäusefesten, monofrequenten Erregung ohne Pulsieren ergibt sich aus Gl. (2.80) die Erregerkraft für den Freiheitsgrad k und eine bestimmte Erregerordnung EO aus

$$f_{E,k}(\varphi, t) = s_{k,EO} \bar{f}_{E,k} \cos(\Omega_E t + \psi_{E,EO}) \quad (2.85)$$

mit

$$\Omega_E = EO \Omega_R, \quad \psi_{E,EO} = EO \varphi + \psi_{EO}. \quad (2.86)$$

Werden die Erregerkräfte an allen Freiheitsgraden in einem gemeinsamen Erregerkraftvektor f_E zusammengefasst, ergibt sich unter Verwendung der komplexen Schreibweise

$$f_E(\varphi, t) = \hat{f}_E e^{i EO \varphi} e^{i \Omega_E t} \quad (2.87)$$

mit den komplexen dynamischen Erregerkräften

$$\hat{f}_{E,k} = s_{k,EO} \bar{f}_{E,k} e^{i \psi_{EO}} \quad (2.88)$$

für den Freiheitsgrad k . Der Vektor \hat{f}_E enthält dabei die komplexen Amplituden der Erregerkräfte, die neben der Amplitudeninformation auch die durch den in Gl. (2.86) enthaltenen Winkel ψ_{EO} definierte Phasenverschiebung der Erregerkräfte an den einzelnen Freiheitsgraden zueinander enthalten. Die Erregerkräfte wirken im Allgemeinen nicht auf dem gesamten Umfang der beschauelten Scheibe, sondern nur diskret an den Laufschaufeln. Daher sind nur diskrete Winkel φ auf dem Umfang relevant. Wird die erste Schaufel eines Laufschaufelkranzes gemäß **Bild 2.1** mit dem hochgestellten Index ⁽¹⁾ bezeichnet und deren Position auf der Scheibe durch $\varphi = 0$ definiert, ergibt sich

$$^{(1)} f_E(t) = f_E(\varphi = 0, t) = \hat{f}_E e^{i \Omega_E t}. \quad (2.89)$$

Die Position einer beliebigen Schaufel (k) auf der Scheibe ergibt sich dann gemäß **Bild 2.1** durch Subtraktion des in Gl. (2.1) gegebenen Teilungswinkels δ aus

$${}^{(k)}\varphi = (1 - k) \delta, \quad k = 1(1)n_S, \quad (2.90)$$

sodass sich die komplexen Erregerkräfte

$$\mathbf{f}_{E,G}(t) = \begin{bmatrix} {}^{(1)}\mathbf{f}_E(t) \\ {}^{(2)}\mathbf{f}_E(t) \\ \vdots \\ {}^{(n_S)}\mathbf{f}_E(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ e^{-i\Delta\varphi} \mathbf{E} \\ \vdots \\ e^{-i(n_S-1)\Delta\varphi} \mathbf{E} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_E e^{i\Omega_E t} \quad (2.91)$$

des Gesamtsystems ergeben. Der Phasenwinkel

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi EO}{n_S} = \delta EO \quad (2.92)$$

bezeichnet die Phasendifferenz der Erregung an zwei benachbarten Schaufeln. Er hat, wie in Abschnitt 3.2.4.1 gezeigt wird, eine zentrale Bedeutung bei der Beurteilung der Effektivität verschiedener Reibungsdämpfer. Im englischen Sprachraum wird der Winkel $\Delta\varphi$ häufig treffend als *interblade phase angle* bezeichnet. Die Erregerordnung $EO = 0$ bzw. $EO = n_S$ führt zu einer simultanen, gleichphasigen Anregung aller Schaufeln, die Erregerordnung $EO = \frac{n_S}{2}$ zu einer gegenphasigen Anregung benachbarter Schaufeln. Im Fall $0 < EO < \frac{n_S}{2}$ stellt die Anregung eine in mitrotierenden, scheibenfesten Koordinaten *rückwärts* wandernde Welle dar. Aufgrund der Identität

$$e^{-i\delta EO} = e^{i\delta(n_S - EO)} \quad (2.93)$$

kann eine Anregung mit $\frac{n_S}{2} < EO < n_S$ als *vorwärts* wandernde Welle mit der Erregerordnung $n_S - EO$ interpretiert werden. Der Einfluss sowohl der über die Funktion $p_k(\vartheta)$ gegebenen Gestalt der Erregung als auch der über den Stimulus definierten Erregerkraftamplitude auf die Schwingungsantwort und die Konsequenzen für die Auslegung von Reibungsdämpfern wird in Abschnitt 3.2.4 detaillierter untersucht.

2.3 Kontaktmodell

Der Modellierung des Kontaktes zwischen den Koppелеlementen von Turbinenschaufeln kommt in zweifacher Hinsicht besondere Bedeutung zu: Zum einen bestimmt die Modellierungstiefe u. U. in ganz erheblichem Maße die Genauigkeit der Vorhersage der Kontaktkräfte und damit das dynamische Gesamtverhalten der Beschau felung. Zum anderen hat die mathematische Formulierung des Kontaktmodells entscheidenden Einfluss auf den zu treffenden mathematisch-numerischen Aufwand zur Lösung der Bewegungsgleichungen und den hieraus resultierenden benötigten Rechenzeitbedarf in der praktischen Anwendung zur Schaufelauslegung. An dieser Stelle der Modellierung trifft in besonderem Maße die von POPP [131] aufgestellte Regel zu:

Die Modelle müssen so einfach wie möglich, aber so genau wie nötig sein.

In den folgenden Abschnitten erfolgt daher schrittweise die Herleitung eines Kontaktmodells, das die Berechnung verallgemeinerter Kontaktkräfte in den Kontaktzonen nahezu beliebiger Koppellemente erlaubt, sodass die Grundlage eines Vergleichs etwa verschiedener Reibelementgeometrien geschaffen wird. Die Aufgabe des Kontaktmodells ist es, einen Zusammenhang zwischen den Relativverschiebungen \hat{w} im Kontakt und den daraus resultierenden Kontaktkräften über eine Kontaktsteifigkeitsmatrix in der Form $\hat{K}(\hat{w})$ bereitzustellen. Zu diesem Zweck wird die Kontaktzone zunächst gemäß dem von SEXTRO [148] vorgeschlagenen Modell zur Analyse von Deckbandkontakten in eine Anzahl Punktkontakte diskretisiert, anschließend ein Punktkontaktmodell, das den Normal- ebenso wie den Tangentialkontakt berücksichtigt, auf die einzelnen Kontaktpunkte angewandt und letztlich eine Summation der Punktkontaktkräfte vorgenommen. Eine schematische Übersicht soll abschließend die schrittweise Ermittlung der Kontaktsteifigkeitsmatrix zusammenfassen.

2.3.1 Diskretisierung

Als Grundvoraussetzung für die Berechnung der verallgemeinerten Kontaktkräfte⁶ in flächigen Kontakten, wie sie u. a. an keilförmigen Reibelementen auftreten, wird zunächst eine Diskretisierung der als rechteckförmig angenommenen Kontaktfläche $A_K = \ell_K h_K$ in einzelne Flächenelemente $\Delta A_K = \Delta \ell_K \Delta h_K$ vorgenommen, die jeweils durch einen Kontaktpunkt P repräsentiert werden, siehe **Bild 2.14**. Wird die Verformung der Kontaktfläche aufgrund der dynamischen Belastung der Schaufel als klein angenommen, kann der Nominalzustand als Referenz herangezogen und jeder Kontaktpunkt mit Hilfe der verallgemeinerten Verschiebungen eines Referenzpunktes OL sowie des Ortsvektors $\vec{r}_{OL P}$ angegeben werden. Unter der Annahme kleiner Schwingungen gilt dann für die in dem kontaktflächenfesten Koordinatensystem KL, vgl. **Bild 2.2**, angegebenen Verschiebungen

$${}_{KL} \mathbf{u}_P(t) = [u_{\xi}(t) \ u_{\eta}(t) \ u_{\zeta}(t)]_P^T = \mathbf{G}_P {}_{KL} \mathbf{u}_{OL}(t) \quad (2.94)$$

mit der Geometriematrix

$$\mathbf{G}_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_{\eta} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & r_{\xi} \\ 0 & 0 & 1 & r_{\eta} & -r_{\xi} & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.95)$$

die die Komponenten r_{ξ} und r_{η} des Ortsvektors $\vec{r}_{OL P}$ in kontaktflächenfesten Koordinaten KL enthält sowie den verallgemeinerten Verschiebungen

$${}_{KL} \mathbf{u}_{OL}(t) = [u_{\xi}(t) \ u_{\eta}(t) \ u_{\zeta}(t) \ \varphi_{\xi}(t) \ \varphi_{\eta}(t) \ \varphi_{\zeta}(t)]_{OL}^T \quad (2.96)$$

des Referenzpunktes OL, der im Folgenden mit dem Schwerpunkt der Kontaktfläche koinzidieren soll. Die für den linken Kontakt an einem Reibelement hergeleiteten Beziehungen mit dem Referenzpunkt OL lassen sich analog auf den rechten Kontakt mit dem

⁶Diese beinhalten sowohl Kontaktkräfte als auch -momente.

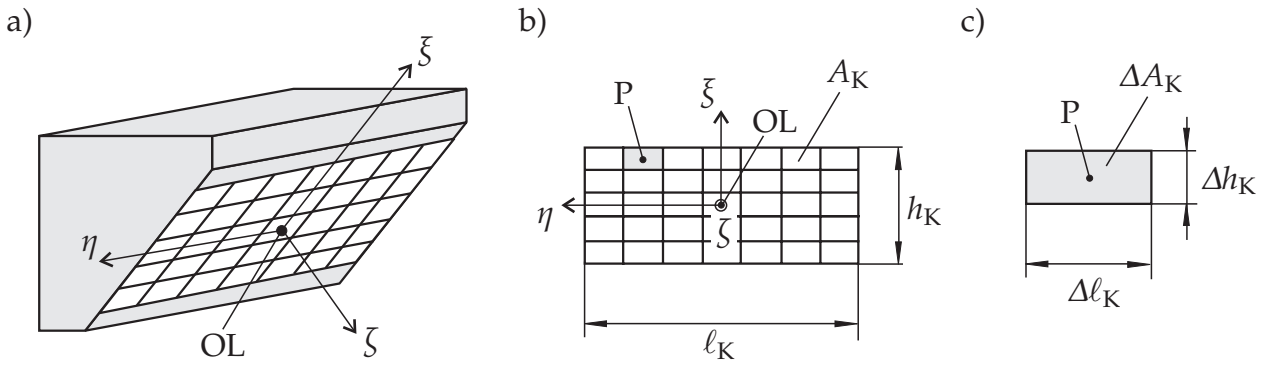


Bild 2.14: Diskretisierung einer rechteckförmigen Kontaktfläche: a) Gesamtfläche A_K an der Schaufelfußplatte; b) Diskretisierung; c) einzelnes Punktkontaktelement

Referenzpunkt OR und mit dem Koordinatensystem KR anstelle KL übertragen, vgl. auch **Bild 2.2**. Die absoluten Verschiebungen des koinzidierenden Kontaktpunktes P' auf dem Reibelement lassen sich unter der Voraussetzung kleiner Schwingungen analog unter Verwendung der Geometriematrix G_P aus Gl. (2.95) bestimmen, sodass sich die Relativverschiebungen eines Punktes P der Kontaktfläche aus

$${}_{KL}\mathbf{w}_P(t) = [w_{\xi}(t) \ w_{\eta}(t) \ w_{\zeta}(t)]_P^T = {}_{KL}\mathbf{u}_{P'}(t) - {}_{KL}\mathbf{u}_P(t) = \mathbf{G}_P {}_{KL}\mathbf{w}_{OL}(t) \quad (2.97)$$

mit den verallgemeinerten Relativverschiebungen des Referenzpunktes

$$\begin{aligned} {}_{KL}\mathbf{w}_{OL}(t) &= \left[w_{u_{\xi}}(t) \ w_{u_{\eta}}(t) \ w_{u_{\zeta}}(t) \ w_{\varphi_{\xi}}(t) \ w_{\varphi_{\eta}}(t) \ w_{\varphi_{\zeta}}(t) \right]_{OL}^T \\ &= {}_{KL}\mathbf{u}_{OL'}(t) - {}_{KL}\mathbf{u}_{OL}(t) \end{aligned} \quad (2.98)$$

ergeben. Die Annahme einer Starrkörperverschiebung der Kontaktfläche ist im Fall großer Verformungen im Bereich der Schaufelfußplatte oder für ausgedehnte Kontaktzonen auf ihre Gültigkeit zu überprüfen. Gl. (2.94) und Gl. (2.97) sind in diesen Fällen u. U. nicht mehr anwendbar und die individuellen Relativverschiebungen $\mathbf{w}_P(t)$ müssen aus den korrespondierenden Absolutverschiebungen direkt ermittelt werden, siehe auch Abschnitt 2.6.1.

Ein Beispiel harmonischer Relativverschiebungen aller Punktkontakte einer mit $n_{\xi} = 3$ und $n_{\eta} = 5$ Kontaktelementen diskretisierten Kontaktfläche mit $\ell_K = 10$ mm und $h_K = 2$ mm zeigt **Bild 2.15** für die Parameter $w_{u_{\xi}}(t) = 0.2 \text{ mm} \cos(\tau + 0.1)$, $w_{u_{\eta}}(t) = 0.1 \text{ mm} \cos(\tau + 0.4)$ und $w_{\varphi_{\xi}}(t) = 0$ bzw. $w_{\varphi_{\zeta}}(t) = 0.1 \text{ rad} \cos(\tau + 0.8)$. Während im Fall ohne Relativverdrehungen alle Kontaktpunkte identische Trajektorien beschreiben, vgl. **Bild 2.15a**, führt eine Relativverdrehung um die ζ -Achse des Kontaktes zum einen zu deutlich unterschiedlichen Trajektorien, zum anderen geht eine u. U. ursprünglich vorhandene Vorzugsrichtung der Relativbewegungen im Kontakt verloren, siehe **Bild 2.15b**. Dies macht anschaulich die Notwendigkeit der Diskretisierung der Kontaktfläche und der individuellen Betrachtung einzelner Punktkontakte deutlich, wenn bei der Überlagerung komplexer Schwingungsformen keine eindeutige Vorzugsrichtung der Relativbewegungen festzustellen ist.

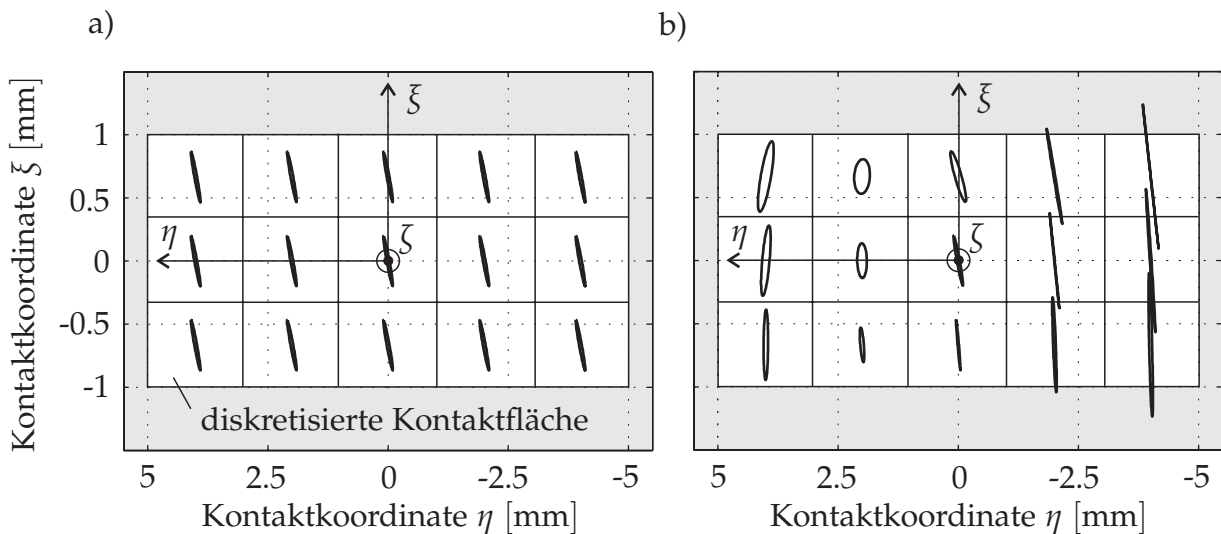


Bild 2.15: Relativverschiebungen aller diskreten Punktkontakte: a) ohne Relativverdrehungen und mit Vorzugsrichtung; b) wie a) mit zusätzlicher Verdrehung um die ζ -Achse des Kontaktes

2.3.2 Punktkontaktmodell

Das auf jeden Punktkontakt angewandte Kontaktmodell stellt einen funktionalen Zusammenhang zwischen der Eingangsgröße der Relativverschiebungen $w_P(t)$ und der Normal- sowie den beiden Tangentialkomponenten der Punktkontaktkraft $f_{K,P}(t)$ her. Der Berechnung dieses Zusammenhangs wird das in **Bild 2.16b** dargestellte Modell zu Grunde gelegt, das aus einem COULOMB'schen Reibkontakt mit konstantem Reibkoeffizienten μ im Punkt M und Elastizitäten in tangentialer und normaler Richtung, $k_{T,P}$ und $k_{N,P}$, besteht. Wird der Punkt P' eines Körpers relativ zu dem koinzidierenden Punkt P des Kontaktpartners verschoben, tritt, je nach tangentialer Verschiebungsamplitude und Normalkraft $F_{N,P}$, im Punkt M Haften oder Gleiten ein. Zunächst wird der Normalkontakt und in der Folge der Tangentialkontakt betrachtet, wobei eine unmittelbare Rückwirkung der tangentialen Punktkontaktkräfte $F_{T,P}$ auf den Normalkontakt zunächst ausgeschlossen wird. Das Punktkontaktmodell wurde ursprünglich von SEXTRO [148, 150] zur Berechnung der Kontaktkräfte in Deckbandkontakten entwickelt. Es soll hier als Basis für den Kontakt sowohl zwischen den Deckbändern benachbarter Schaufeln als auch zwischen Reibelement und Fußplatte dienen und daher in Teilen wiederholt und mit Ergänzungen versehen werden.

2.3.2.1 Normalkontakt

Die Behandlung des Normalkontaktes umfasst zunächst die Modellierung rauer Oberflächen, die zu einer nichtlinearen Kraft-Verschiebungskennlinie in Normalenrichtung führt, sowie die Verteilung der Normalkräfte in der Kontaktzone für flächige und gekrümmte Kontaktflächen. Anschließend erfolgt die Berechnung statischer Normalkräfte auf der Basis des statischen Kräftegleichgewichts am Reibelement sowie die Bestimmung des dynamischen Anteils der Normalkräfte.

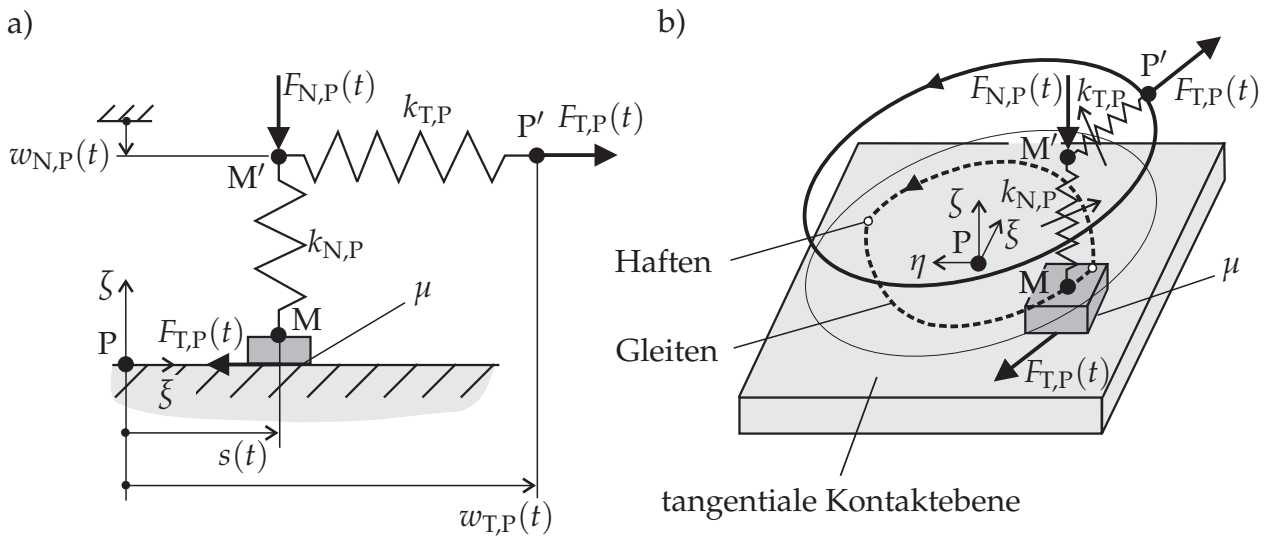


Bild 2.16: Elasto-Gleit-Modell für einen Punktkontakt mit variabler Normalkraft: a) vereinfachtes eindimensionales Modell; b) zweidimensionales Modell mit nichtlinearen Kontaktsteifigkeiten

Modellierung rauer Oberflächen Die für die Berechnung der Punktkontaktnormalkraft notwendige Relativverschiebung in Normalenrichtung

$$W_{\zeta,P}(t) = \bar{w}_{\zeta,P} + w_{\zeta,P}(t) \quad (2.99)$$

setzt sich aus einem statischen Anteil $\bar{w}_{\zeta,P}$, resultierend aus den auf das Reibelement wirkenden Fliehkräften bzw. den Vorspannkräften im Deckband, und dem in Gl. (2.97) enthaltenen dynamischen Anteil $w_{\zeta,P}(t)$ aufgrund der Schwingbewegung zusammen. Der statische Anteil muss hier berücksichtigt werden, da für die spätere Bestimmung der Tangentialkräfte die *gesamte* Normalkraft aus statischem und dynamischem Anteil maßgebend ist. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird zur Darstellung des Normalkontaktes die Annäherung $W_{N,P} = -W_{\zeta,P}$ eingeführt, die positiv in Richtung der negativen Flächennormalen ζ definiert ist, siehe auch **Bild 2.16** und **Bild 2.17d**. Es gilt dann entsprechend $F_{N,P} = -F_{\zeta,P}$. Untersuchungen von TREYDE [168] und SEXTRO [149] zeigen, dass die Kraft-Verschiebungskennlinie für den Normal- wie auch den Tangentialkontakt einen ausgeprägten nichtlinearen Charakter mit progressiv von der Normalkraft abhängiger Steifigkeit aufweist. Dieser Effekt ist auf den Einfluss des steigenden Materialanteils M_r durch die bei größerer Normalkraft in Kontakt befindlichen Rauheitsspitzen zurückzuführen. Wird das Profil einer rauen Oberfläche in kumulierter Form angegeben, ergibt sich die auf ABBOTT UND FIRESTONE [1] zurückgehende Materialanteilskurve⁷, die das Rauheitsprofil in kompakter Form wiedergibt, vgl. auch **Bild 2.33** in Abschnitt 2.6.2.3.

⁷In deutsch- und englischsprachigen Publikationen existieren verschiedene Bezeichnungen wie Tragan-teilskurve, ABBOTT-Kurve, ABBOTT-FIRESTONE curve, Material ratio curve, Bearing area curve usw.

Der Anteil der in Kontakt befindlichen Rauheitsspitzen, d. h. der Materialanteil⁸

$$M_r = \frac{A_{K,real}}{A_{K,nom}} = \frac{\Delta A_{K,real}}{\Delta A_{K,nom}}, \quad (2.100)$$

kann einem gedachten Profilschnitt durch die Materialanteilskurve als Verhältnis der realen zur nominellen Kontaktfläche entnommen werden. Bei ausreichend großen, einen diskreten Punktkontakt repräsentierenden Teilflächen ΔA_K lassen sich die Eigenschaften und statistischen Größen des Rauheitsprofils der Gesamtfläche A_K auf ein Flächenelement ΔA_K übertragen, sodass die folgenden Ausführungen für einen Punktkontakt der nominellen Fläche $\Delta A_{K,nom}$ gelten sollen.

Der technische Kontakt zweier rauer Oberflächen mit den Oberflächenprofilen $h_{P,1}(x)$ und $h_{P,2}(x)$ lässt sich durch den Kontakt einer äquivalenten rauen Oberfläche mit dem Profil $\tilde{h}_P(x) = h_{P,1}(x) + h_{P,2}(x)$ und einer ideal glatten, starren Wand ersetzen, sodass sich eine identische reale Kontaktfläche und 'Durchdringung' an einzelnen Rauheitsspitzen ergibt, siehe **Bild 2.17a** und **b**. Da sich die Varianz $\sigma_{\tilde{h}_P}^2$ einer Summe zweier unabhängiger Zufallsgrößen $h_{P,1}(x)$ und $h_{P,2}(x)$ aus der Summe der individuellen Varianzen $\sigma_{h_{P,1}}^2$ und $\sigma_{h_{P,2}}^2$ ergibt, siehe u. a. BRONSTEIN UND SEMENDJAJEW [20], kann für die Standardabweichung des Ersatzprofils $\tilde{h}_P(x)$

$$\sigma_{\tilde{h}_P} = \sqrt{\sigma_{h_{P,1}}^2 + \sigma_{h_{P,2}}^2} \quad (2.101)$$

gesetzt werden, vgl. auch JOHNSON [84]. **Bild 2.17c** und **d** zeigen die auf die Standardabweichung $\sigma_{\tilde{h}_P}$ mit $\tilde{h}_P^* = \frac{\tilde{h}_P}{\sigma_{\tilde{h}_P}}$ normierte und auf den Mittelwert $\tilde{h}_P = 0$ zentrierte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $\varphi(\tilde{h}_P^*)$ und die Verteilungsfunktion $\Phi(\tilde{h}_P^*)$ (kumulierte Wahrscheinlichkeitsdichte) der als normalverteilt angenommenen Rauheitsspitzen. Eine Approximation der Verteilungsfunktion der Normalverteilung gelingt nach SEXTRO [149] mit Hilfe eines Polynoms 3. Grades. Der Materialanteil lässt sich in Abhängigkeit der Normalverschiebung $W_{N,P}$ in der Form

$$M_r = \begin{cases} 0 & , \text{ für } W_{N,P}^* < 0 & \text{(Separation),} \\ 3W_{N,P}^{*2} - 2W_{N,P}^{*3} & , \text{ für } 0 \leq W_{N,P}^* < 1 & \text{(Teilkontakt),} \\ 1 & , \text{ für } W_{N,P}^* \geq 1 & \text{(Vollkontakt),} \end{cases} \quad (2.102)$$

angeben mit der auf die Bezugsgröße R_0 normierten Relativverschiebung

$$W_{N,P}^* = \frac{W_{N,P}}{R_0}. \quad (2.103)$$

Der Parameter R_0 kann durch eine Minimierung der Fehlerquadratsumme der Approximation der Normalverteilung in **Bild 2.17d** zu $R_0 = 4.165 \sigma_{\tilde{h}_P}$ ermittelt werden. Der Vorfaktor, der sich in **Bild 2.17d** in der Differenz $\tilde{h}_{P,max}^* - \tilde{h}_{P,min}^*$ wiederfindet, entspricht in etwa dem von SEXTRO [149] angegebenen Wert von $\sqrt{20}$, welcher auf identische Stan-

⁸Die in der Literatur verwendeten Bezeichnungen der Parameter zur Kennzeichnung rauer Oberflächen sind mitunter sehr uneinheitlich. Im Hinblick auf eine korrekte Ermittlung der im Folgenden angegebenen Modellparameter sei hier auf die entsprechenden Definitionen in den Normen DIN EN ISO 1302, DIN 4762 und DIN 4776 verwiesen.

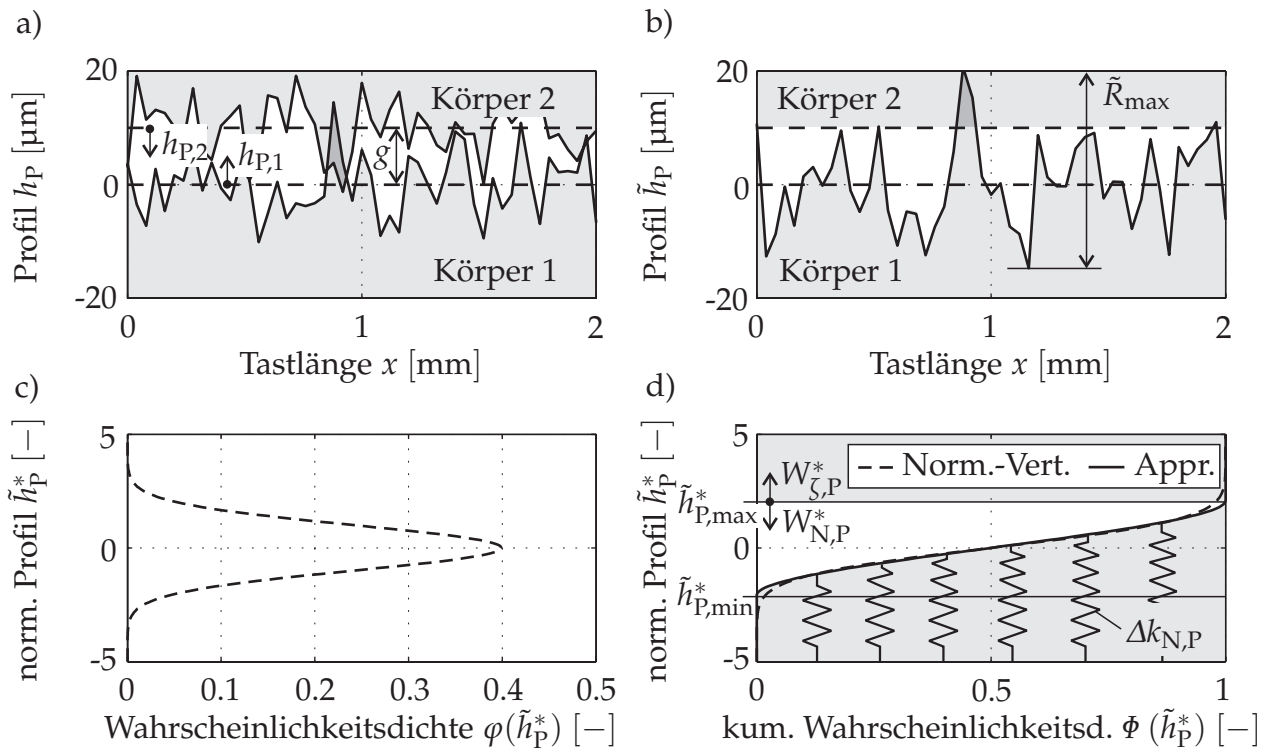


Bild 2.17: Beschreibung rauer technischer Oberflächen: a) Kontakt zweier rauer Oberflächen mit Oberflächenprofilen $h_{P,1}(x)$ und $h_{P,2}(x)$ und dem Abstand g der mittleren Profilhöhen; b) äquivalenter Kontakt eines Ersatzprofils $\tilde{h}_P(x)$ mit einer ideal glatten, starren Oberfläche; c) zentrierte und normierte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $\varphi(\tilde{h}_P^*)$ der Profilhöhe \tilde{h}_P^* ; d) Verteilungsfunktion $\Phi(\tilde{h}_P^*)$

dardabweichungen von Normalverteilung und Approximation nach Gl. (2.102) führt. Die Approximation verhindert auch den in [149] berichteten Effekt einer kleinen Anzahl unendlich hoher Rauheitsspitzen, die physikalisch nicht sinnvoll sind und zu einem theoretisch niemals eintretenden Kontaktverlust führen. Einen Zusammenhang zwischen der Standardabweichung $\sigma_{h_{P,1}}$ und dem häufig angegebenen arithmetischen Mittenrauwert eines Profils

$$R_{a,1} = \frac{1}{\ell_{P,1}} \int_0^{\ell_{P,1}} |h_{P,1}(x)| dx \quad (2.104)$$

gibt JOHNSON [84] für eine Normalverteilung der Rauheitsspitzen zu

$$\sigma_{h_{P,1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} R_{a,1} \quad (2.105)$$

an. Wird die globale Kontaktnormalsteifigkeit $k_{N,0}$ eines Kontaktes bei Vollkontakt ($M_r = 1$) auf alle n_{Dis} Punktkontakte einer diskretisierten Kontaktfläche verteilt und diese proportional zum Materialanteil nach Gl. (2.100) und Gl. (2.102) angenommen, ergibt sich unter der Annahme einer WINKLER-Bettung mit identischen, unabhängig voneinander agierenden Steifigkeiten $\Delta k_{N,P}$ nach **Bild 2.17d** der in **Bild 2.18a** dargestellte Verlauf

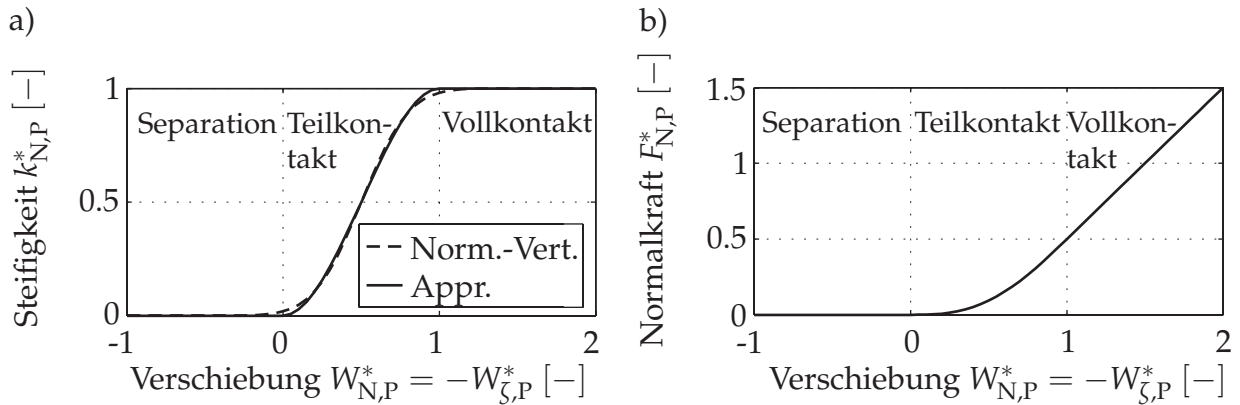


Bild 2.18: Nichtlinearer Normalkontakt: a) Normierte Kontaktnormalsteifigkeit bzw. Materialanteilskurve $M_r(W_{N,P}^*)$ für Normalverteilung und Approximation nach Gl. (2.102); b) Normalkraftverlauf $F_{N,P}^*(W_{N,P}^*)$

der normierten Punktkontaktnormalsteifigkeit

$$k_{N,P}^* = \frac{k_{N,P}}{k_{N,0}} = \frac{1}{n_{\text{Dis}}} M_r(W_{N,P}^*). \quad (2.106)$$

Nach Integration von Gl. (2.102) ergibt sich die in **Bild 2.18b** angegebene normierte Punktkontaktnormalkraft

$$F_{N,P}^* = \frac{F_{N,P}}{R_0 k_{N,0}} = \frac{1}{n_{\text{Dis}}} \begin{cases} 0 & , \text{für } W_{N,P}^* < 0 & \text{(Separation),} \\ W_{N,P}^{*3} - \frac{1}{2} W_{N,P}^{*4} & , \text{für } 0 \leq W_{N,P}^* < 1 & \text{(Teilkontakt),} \\ W_{N,P}^* - \frac{1}{2} & , \text{für } W_{N,P}^* \geq 1 & \text{(Vollkontakt),} \end{cases} \quad (2.107)$$

für die Bereiche mit Kontaktverlust, Teilkontakt und Vollkontakt. Eine mögliche plastische Verformung der Rauheitsspitzen soll nicht berücksichtigt werden. Ein ähnliches Vorgehen schlagen auch SELLGREN ET AL. [145] vor, die einen fünfparametrischen Ansatz für eine multilineare Approximation der ABBOTT-Kurve verwenden. Die Autoren nehmen ebenfalls an, dass sich die Normalsteifigkeit proportional zur realen Kontaktfläche verhält, die sich aus unabhängig voneinander agierenden Rauheitsspitzen zusammensetzt. Diese nichtlineare Normalsteifigkeit wird auf ein lineares Kernmaterial innerhalb eines Finite-Element-Modells aufgesetzt. Dabei ergeben sich je nach der gewählten Approximation der ABBOTT-Kurve quantitativ zu **Bild 2.18b** leicht abweichende Kraft-Verschiebungszusammenhänge.

Normalkraftverteilung in der Kontaktfläche Je nach Art des Kontaktes (gekrümmte oder flächige Kontaktzonen) stellen sich unterschiedliche Verteilungen der Punktkontaktnormalkräfte ein. JOHNSON [84] unterscheidet dabei zwischen HERTZ'schen und nicht-HERTZ'schen Kontakten, deren Pressungsverteilung in Abhängigkeit der auf die Kontakthöhe h_K normierten Koordinate $\xi^* = \frac{\xi}{h_K}$ durch

$$p(\xi^*) = p_0 (1 - 4\xi^{*k}), \quad -\frac{1}{2} \leq \xi^* \leq \frac{1}{2}, \quad (2.108)$$

dargestellt werden kann, mit dem Exponenten $k = 0$ für konstante Pressungsverteilung $p(\xi^*) = p_0$. Im Fall HERTZ'scher Flächenpressung kann die Kontakthöhe aus

$$h_K = 4 \sqrt{\frac{F_{N,0} R}{\pi \ell_K E^*}} \quad (2.109)$$

mit der gesamten Kontaktnormalkraft $F_{N,0}$, dem Krümmungsradius R und dem äquivalenten Elastizitätsmodul E^* nach der HERTZ'schen Theorie, siehe u. a. JOHNSON [84], ermittelt werden. Der elliptische Verlauf der HERTZ'schen Pressung wird durch den Exponenten $k = \frac{1}{2}$ beschrieben mit dem in der Kontaktmitte auftretenden Maximum

$$p_0 = \sqrt{\frac{F_{N,0} E^*}{\pi R \ell_K}}. \quad (2.110)$$

Der Exponent $k = -\frac{1}{2}$ kennzeichnet nach [84] den Kontakt eines Stempels mit einer Ebene (so genannter *technischer Kontakt*), bei dem die theoretisch unendlich großen Pressungsmaxima an den Kontaktträgern mit $\xi^* = -\frac{1}{2}$ und $\xi^* = \frac{1}{2}$ und das Minimum p_0 in der Kontaktmitte auftritt. In PANNING [116], PANNING ET AL. [118] und GÖTTING [63] wurde Gl. (2.108) derart umgesetzt, dass sich unter der Annahme einer rechteckförmigen, starren Kontaktfläche bei identischer Relativverschiebung $W_{N,P}^*$ aller Kontaktpunkte in Normalenrichtung die entsprechende Pressungsverteilung aus einer Verteilung der Punktkontaktsteifigkeiten aus Gl. (2.106) in der Form

$$k_{N,P}^* = \frac{k_{N,P}}{k_{N,0}} = \frac{1}{n_{\text{Dis}}} M_r(W_{N,P}^*) f(\xi^*) \quad (2.111)$$

ergibt, wobei die Funktion $f(\xi^*)$ der jeweiligen Pressungsverteilung angepasst wird.

Den Verteilungen nach Gl. (2.108) liegt die Annahme eines unendlich ausgedehnten, elastischen Halbraums zu Grunde. Weiterhin muss nach JOHNSON [84] als Voraussetzung für den technischen Kontakt gelten, dass keine Verdrehung der als starr angenommenen Kontaktfläche auftritt. Im Fall des Kontaktes zwischen Reibelement und Fußplatte lassen sich beide Annahmen jedoch nur eingeschränkt treffen. Insbesondere die Überhöhung der Pressungsverteilung an den Rändern eines technischen Kontaktes führt bei einer zusätzlichen Verdrehung der nominellen Kontaktfläche zu physikalisch wenig sinnvollen Ergebnissen, insbesondere in Bereichen nahe des Kontaktverlustes, vgl. auch **Bild 2.19b**. Aus diesen Gründen soll im Gegensatz zu der in der Vergangenheit genutzten Modellierung eine konsistente Verwendung der WINKLER-Bettung erfolgen, siehe **Bild 2.19**. Hierbei werden alle Punktkontaktnormalsteifigkeiten als voneinander unabhängig agierend und nach Gl. (2.106) nur von der Relativverschiebung in Normalenrichtung abhängig angenommen. Der Kontakt einer starren, gekrümmten Oberfläche mit dem Radius R und einer starren Ebene über eine WINKLER-Bettung führt im Gegensatz zur HERTZ'schen Theorie zu einer Kontakthöhe von

$$h_K = 2 \sqrt{2W_{N,OL} R - W_{N,OL}^2} \approx 2 \sqrt{2W_{N,OL} R} \quad (2.112)$$

mit $W_{N,OL}$ als maximaler Eindringung in die WINKLER-Bettung am Referenzpunkt OL, siehe **Bild 2.19a**. Für einen beliebigen Punkt P der Kontaktfläche ergibt sich aufgrund des

gibt die auf die Kontaktfläche bezogene gesamte Steifigkeit des Kontaktes an und ist als physikalische Eigenschaft der WINKLER-Bettung, analog zum äquivalenten Elastizitätsmodul E^* der HERTZ'schen Flächenpressung, zu interpretieren. Hieraus wird unmittelbar deutlich, dass die effektive Kontaktsteifigkeit proportional zur Kontaktfläche ansteigt. Zu ähnlichen Ergebnissen kommt SEXTRO [147], der einen nahezu konstanten Wert der spezifischen Steifigkeiten für einen HERTZ'schen Kontakt aus Messergebnissen identifiziert. Das weitere Vorgehen entspricht dem der Anwendung der HERTZ'schen Theorie, indem die Kontaktfläche als eben betrachtet und nach Gl. (2.111) entsprechende, die Pressungsverteilung nach Gl. (2.115) repräsentierende, Punktkontaktsteifigkeiten definiert werden. Der Einfluss verschiedener Pressungsverteilungen wird in Abschnitt 3.2.2.3 näher untersucht.

Die Kinematik einer als starre, ebene Rechteckfläche nach **Bild 2.14** modellierten Kontaktzone berücksichtigt nach Gl. (2.98) auch Relativverdrehungen w_{φ_η} um die η -Achse des Kontaktes. Diese würde bei entsprechender aus der HERTZ'schen Theorie oder unter der Annahme der WINKLER-Bettung bestimmter statischer Kontakthöhe h_K Kontaktmomente um die η -Achse hervorrufen, was der symmetrischen Pressungsverteilung in Normalenrichtung aus **Bild 2.19a** widerspräche. Im Gegensatz zu flächigen Kontakten aus **Bild 2.19b** ist die Übertragung von Momenten $M_\eta^{(OL)}$ für den in **Bild 2.19a** dargestellten Fall nicht möglich. Aus diesem Grund wird die Relativverdrehung w_{φ_η} für diesen Fall zu null gesetzt ohne jedoch die sonstigen kinematischen Beziehungen aus Abschnitt 2.3.1 einzuschränken⁹.

Statische Kontaktnormalkräfte Wie oben dargestellt, muss neben dem dynamischen Anteil $w_{\zeta,P}(t)$ auch der statische Anteil $\bar{w}_{\zeta,P}$ der Verschiebung in Normalenrichtung berücksichtigt werden. Aus diesem Grund erfolgt im Vorfeld einer dynamischen Berechnung zunächst eine Betrachtung der statischen Gleichgewichtslage des Reibelements bzw. des Kontaktes zwischen benachbarten Deckplatten. Hierbei treten je nach Kontakttyp verschiedene zu berücksichtigende verallgemeinerte Reaktionskräfte in den Kontakten auf, siehe **Bild 2.20**. Diese beinhalten für die statische Analyse zunächst nur die aus den Punktkontaktnormalkräften resultierenden Kräfte und Momente bezüglich des jeweiligen Referenzpunktes OL bzw. OR. Reibkräfte werden nicht berücksichtigt.

Die Berechnung der Gleichgewichtslage ist für jeden Simulationsschritt bzw. der damit verbundenen Drehzahlvariation erforderlich, da aufgrund des nichtlinearen Charakters des Normalkontaktes eine Skalierung nicht möglich ist. Im Fall des Reibelements ergeben sich die statischen Kontaktnormalkräfte im linken und rechten Kontakt unmittelbar aus der Kräftebilanz in Dy -Richtung, vgl. **Bild 2.2**, aus

$$\bar{F}_{S,OL'} = \frac{\sin \gamma_R}{\sin \gamma_L \cos \gamma_R + \sin \gamma_R \cos \gamma_L} F_C \quad (2.118)$$

⁹Würde ein in **Bild 2.19a** dargestelltes Reibelement mit einem Moment um die Reibelementachse belastet, ergäbe sich kein Reaktionsmoment um die η -Achse des Kontaktes, wie dies in **Bild 2.19b** möglich ist. Stattdessen käme es zu einem Abrollen, da sich die symmetrische Verteilung der Flächenpressung nicht ändert.

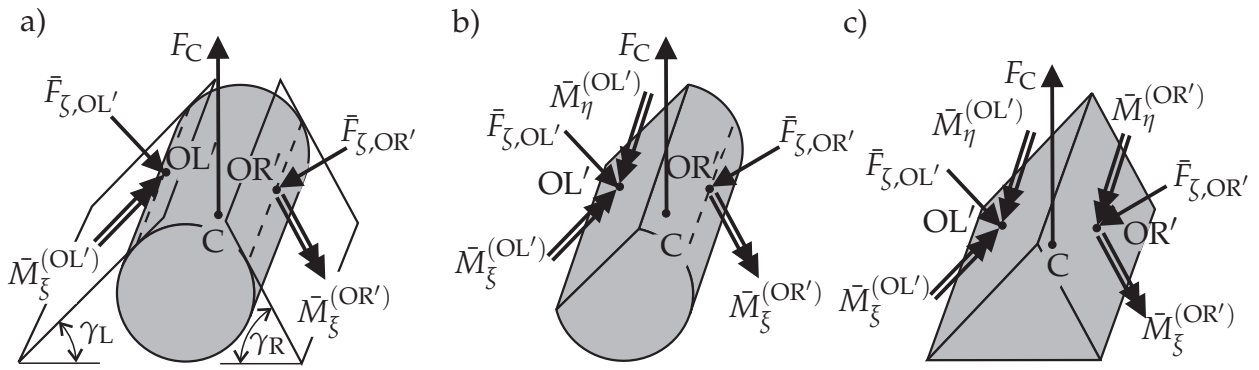


Bild 2.20: Gleichgewichtsreaktionen: a) am zylinderförmigen Reibelement; b) am asymmetrischen Reibelement; c) am keilförmigen Reibelement

und

$$\bar{F}_{\zeta,OR'} = \frac{\sin \gamma_L}{\sin \gamma_L \cos \gamma_R + \sin \gamma_R \cos \gamma_L} F_C \quad (2.119)$$

mit den Kontaktwinkeln γ_L und γ_R sowie der Fliehkraft

$$F_C = m r_D \Omega_R^2 \quad (2.120)$$

aus der Reibelementmasse m , dem radialen Abstand r_D zwischen Rotorachse und Reibelementschwerpunkt C und der Rotationskreisfrequenz Ω_R . Aus den Normalkräften können je nach Abstand $\vec{r}_{OL'}$ und $\vec{r}_{OR'}$ der Kontaktreferenzpunkte vom Reibelementschwerpunkt C auf das Reibelement wirkende Momente resultieren, die sich aus

$$\vec{M}^{(C)} = \vec{r}_{OL'} \times \vec{F}_{\zeta,OL'} + \vec{r}_{OR'} \times \vec{F}_{\zeta,OR'} \quad (2.121)$$

ergeben und in den Kontaktflächen aufgenommen werden müssen, vgl. **Bild 2.20**. Dabei können in Abhängigkeit der relativen Lage der Referenzpunkte zum Schwerpunkt neben Momenten um die η -Achsen der Kontakte auch Momente um die ξ -Achsen auftreten, etwa wenn der Schwerpunkt des Reiblements in Dx -Richtung gegenüber den Schwerpunkten der Kontaktflächen versetzt ist, vgl. **Bild 2.2**. Damit lassen sich auch derartige Konfigurationen abbilden, bei denen das Reibelement einen veränderlichen Querschnitt aufweist, etwa um Dichtungsfunktionen zu übernehmen. Die maximal übertragbaren Momente in den Kontaktflächen ergeben sich aus den Bedingungen

$$\bar{M}_{\xi}^{(OL')} \leq \frac{\ell_{K,L}}{2} \bar{F}_{\zeta,OL'}, \quad \bar{M}_{\eta}^{(OL')} \leq \frac{h_{K,L}}{2} \bar{F}_{\zeta,OL'} \quad (2.122)$$

und analogen Beziehungen für den rechten Kontakt, sodass die Lage der Referenzpunkte und damit die Reibelementgeometrie nicht beliebig gewählt werden kann, wenn eine stabile Gleichgewichtslage gewährleistet werden soll. Insbesondere müssen die geometrischen Größen für ein zylinderförmiges Reibelement derart gewählt werden, dass in Gl. (2.121) $\bar{M}_x^{(C)} = 0$ gilt, da in den Kontaktzonen keine Momente um die η -Achsen aufgenommen werden können. Auf weitere Konstruktionshinweise im Hinblick auf mögliche unerwünschte Gleichgewichtslagen im Fall des Verkippens eines Reiblements mit flächigen Kontakten wird in Abschnitt 3.6.2.1 eingegangen.

Nach **Bild 2.2** ist die Lage des Reibelements unter Vernachlässigung der Reibkräfte bezüglich der ${}_Dx$ -Achse indifferent, da in dieser Richtung keine aus den statischen Normalkräften resultierenden Anteile auftreten. Diese Koordinate wird daher in der Berechnung der Gleichgewichtslage vernachlässigt¹⁰. Die verbleibenden fünf Starrkörperfreiheitsgrade

$$\bar{\mathbf{u}}_C = \left[\bar{u}_y \quad \bar{u}_z \quad \bar{\varphi}_x \quad \bar{\varphi}_y \quad \bar{\varphi}_z \right]_C^T \quad (2.123)$$

des Reibelements lassen sich mit

$$\bar{\mathbf{F}}_C = \left[\bar{F}_y \quad \bar{F}_z \quad \bar{M}_x \quad \bar{M}_y \quad \bar{M}_z \right]^T = \left[0 \quad F_C \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]^T \quad (2.124)$$

aus der Summation aller Punktkontaktnormalkräfte der diskreten Kontaktpunkte P_i einer Kontaktfläche mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen

$$- \left(\sum_{i=1}^{n_{\text{Dis,L}}} \bar{\mathbf{G}}_{P_i,L}^T k_{N,P_i}(\bar{w}_{\zeta,P_i}) \bar{\mathbf{G}}_{P_i,L} + \sum_{i=1}^{n_{\text{Dis,R}}} \bar{\mathbf{G}}_{P_i,R}^T k_{N,P_i}(\bar{w}_{\zeta,P_i}) \bar{\mathbf{G}}_{P_i,R} \right) \bar{\mathbf{u}}_C + \bar{\mathbf{F}}_C = \mathbf{0} \quad (2.125)$$

bestimmen. Dabei enthalten die Matrizen

$$\bar{\mathbf{G}}_{P_i,L(R)}^T = \begin{bmatrix} \begin{matrix} (+) \sin \gamma_{L(R)} \\ - \cos \gamma_{L(R)} \end{matrix} \\ \begin{matrix} (-) r_{z,OL(R)'} \sin \gamma_{L(R)} - r_{y,OL(R)'} \cos \gamma_{L(R)} + r_{\xi,P_i} \\ (r_{x,OL(R)'} - r_{\eta,P_i}) \cos \gamma_{L(R)} \\ (+) (r_{x,OL(R)'} - r_{\eta,P_i}) \sin \gamma_{L(R)} \end{matrix} \end{bmatrix} \quad (2.126)$$

des linken und rechten Kontaktes die auf die notwendigen Freiheitsgrade kondensierten Größen aus den Matrizen \mathbf{G}_{DL} und \mathbf{G}_{DR} aus Gl. (2.7) sowie \mathbf{G}_{P_i} aus Gl. (2.95). Die zur Bestimmung der Normalsteifigkeiten $k_{N,P_i}(\bar{w}_{N,P_i}) = k_{N,P_i}(-\bar{w}_{\zeta,P_i})$ aus Gl. (2.111) benötigte Relativverschiebung in Normalenrichtung ergibt sich aus

$$\bar{w}_{\zeta,P_i} = \bar{\mathbf{G}}_{P_i,L(R)} \bar{\mathbf{u}}_C. \quad (2.127)$$

Aufgrund der nichtlinearen Steifigkeiten in Normalenrichtung wird Gl. (2.125) iterativ für die Schwerpunktlage $\bar{\mathbf{u}}_C$ gelöst. Es ergeben sich dann im Allgemeinen Punktkontaktnormalkräfte, die aufgrund des Rauheitseinflusses bei einer Verdrehung der Kontaktzone nichtlinear über der Kontaktfläche verteilt sind. Die Gleichgewichtsbedingungen lassen sich auch als Sonderfall der modal beschriebenen Bewegungsgleichungen des Reibelements nach Gl. (2.71) auffassen. Sind dabei anstelle der geometrischen Größen des Reibelements direkt die Eigenvektoren an den Kontaktreferenzpunkten OL' und OR' und dem Schwerpunkt C gegeben, lassen sich die Abstände unter Verwendung von Gl. (2.74) und Gl. (2.75) durch Invertierung der regulären Modalmatrix $\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{C,D}$ ermitteln. Ist die Schwerpunktlage $\bar{\mathbf{u}}_C$ bekannt, lassen sich die Gleichgewichtslagen der Referenzpunkte analog zu Gl. (2.127) aus

$$\bar{w}_{\zeta,OL(R)'} = \bar{\mathbf{G}}_{OL(R)'} \bar{\mathbf{u}}_C \quad (2.128)$$

¹⁰Konstruktiv müssen geeignete Maßnahmen wie die Verwendung von Sicherungsblechen o.ä. getroffen werden, die eine axiale Verschiebung des Reibelements verhindern.

mit den Geometriematrizen $\bar{\mathbf{G}}_{\text{OL}(\text{R})}$, die sich mit $r_{\xi} = r_{\eta} = 0$ aus Gl. (2.126) ergeben, bestimmen.

Im Fall einer Deckbandkopplung lässt sich ein funktionaler Zusammenhang zwischen der Drehzahl und den in den Kontaktzonen herrschenden statischen Kräften und Momenten zumeist nicht angeben, sodass eine statische Kontaktanalyse mit Hilfe der Finiten-Element-Methode erforderlich ist, siehe u. a. SZWEDOWICZ ET AL. [163]. Nach einer Bestimmung der nominellen Kontaktfläche können dann die auf den Referenzpunkt reduzierten Kräfte und Momente direkt genutzt werden, um analog zu Gl. (2.125) die Gleichgewichtslagen der Kontaktpunkte P_i bzw. der Referenzpunkte OL' und OR' zu ermitteln. Auf ähnliche Art muss verfahren werden, wenn das Reibelement nicht mehr als starrer Körper behandelt werden kann, da in diesem Fall die Lage der Kontaktreferenzpunkte aufgrund der signifikanten Verformung a priori nicht exakt ermittelbar ist.

Dynamische Kontaktnormalkräfte Wird der zunächst beliebig periodisch angenommene dynamische Anteil $w_{\zeta,P}(t)$ der Relativverschiebung sowie die Kontaktnormalkraft als *harmonisch* mit der Zeit veränderlich angenommen, kann der in Gl. (2.107) angegebene nichtlineare Zusammenhang mit Hilfe der Harmonischen Balance linearisiert werden, siehe Anhang A.3. Mit der Beziehung $W_{\text{N},P} = -W_{\zeta,P}$ und nach dem Übergang auf komplexe, nach Gl. (2.103) normierte Größen mit

$$w_{\zeta,P}^*(t) = \hat{w}_{\zeta,P}^* e^{i \Omega_E t} \quad (2.129)$$

ergibt sich letztlich in Normalenrichtung der linearisierte Zusammenhang

$$\hat{F}_{\zeta,P}^* \approx \bar{F}_{\zeta,P}^*(\bar{w}_{\zeta,P}^*, |\hat{w}_{\zeta,P}^*|) + \hat{k}_{\zeta,P}^*(\bar{w}_{\zeta,P}^*, |\hat{w}_{\zeta,P}^*|) \hat{w}_{\zeta,P}^*, \quad (2.130)$$

wobei die von der Gleichgewichtslage $\bar{w}_{\zeta,P}^*$ und der Amplitude $|\hat{w}_{\zeta,P}^*|$ des dynamischen Anteils der Relativverschiebung abhängige komplexe normierte Steifigkeit

$$\hat{k}_{\zeta,P}^* = \frac{\hat{k}_{\zeta,P}}{k_{\text{N},P}} \quad (2.131)$$

aufgrund fehlender Dämpfung in Normalenrichtung rein reelle Werte annimmt. Im Fall von Relativverdrehungen der Kontaktzone können dabei aufgrund der dynamischen Relativverschiebungen in Normalenrichtung Bereiche in Kontakt treten, die in der statischen Gleichgewichtslage zunächst nicht in Kontakt standen, vgl. **Bild 2.19b**. Die aus der statischen Analyse bestimmte Kontakthöhe h_K im Fall einer gekrümmten Kontaktfläche wird als näherungsweise konstant angenommen und auch für die dynamische Analyse verwendet. Harmonische Relativverschiebungen vorausgesetzt, lässt sich mit Hilfe der Gesamtverschiebung $W_{\zeta,P}^*$ auch der einsetzende zeitweilige Kontaktverlust, der durch $W_{\zeta,P}^* > 0$ gekennzeichnet ist, detektieren. Mit der Vorzeichenkonvention für $W_{\zeta,P}^*$ kann das Verhältnis

$$\kappa_{\zeta} = \frac{|\hat{w}_{\zeta,P}^*|}{|\bar{w}_{\zeta,P}^*|} = \begin{cases} > -\text{sgn}(\bar{w}_{\zeta,P}^*) & \rightarrow \text{Separation} \\ < -\text{sgn}(\bar{w}_{\zeta,P}^*) & \rightarrow \text{keine Separation} \end{cases} \quad (2.132)$$

aus Amplitude und Gleichgewichtslage der Relativverschiebung in Normalenrichtung herangezogen werden, um die Tendenz eines Reibelements zum unerwünschten Abheben von den Schaufelfußplatten untersuchen zu können, wie dies u. a. in Abschnitt 3.2.1.1 und PANNING ET AL. [118] dargestellt ist. Die für die Berechnung der komplexen Steifigkeit notwendigen Integrale zur Bestimmung der FOURIER-Koeffizienten nach Gl. (A.5) können unter Ausnutzung der in Gl. (2.107) angegebenen Grenzen für monofrequente Relativverschiebungen abschnittsweise direkt angegeben werden, sodass eine numerische Berechnung entfallen kann. Der in Gl. (2.130) enthaltene zeitliche Mittelwert $\bar{F}_{\zeta,P}^*(\bar{w}_{\zeta,P}^* | \hat{w}_{\zeta,P}^* |)$ kann von dem statischen Wert aufgrund der fehlenden Symmetrie der Funktion $F_{\zeta,P}^*(W_{\zeta,P}^*)$ abweichen.

2.3.2.2 Tangentialkontakt

Die oben betrachtete zeitvariante Normalkraft in einem Kontaktpunkt muss bei der Betrachtung des Tangentialkontaktes berücksichtigt werden. Aus diesem Grund wird zunächst das in verschiedenen Publikationen (u. a. SEXTRO UND POPP [146], SEXTRO [147], SANLITURK UND EWINS [138], MENQ UND YANG [105]) behandelte so genannte zweidimensionale Elasto-Gleit-Modell mit konstanter Normalkraft auf harmonisch zeitveränderliche Normalkräfte erweitert, siehe auch die Arbeiten von YANG UND MENQ [196], YANG ET AL. [192] und SEXTRO [150], auf deren Basis SIEWERT [157] ausführliche Untersuchungen anstellt. Weiterhin sollen im allgemeinen Fall zunächst beliebige periodische Relativverschiebungen und Normalkräfte zugelassen werden.

Neben der fluktuierenden Punktkontaktnormalkraft wird auch die tangentielle Punktkontaktsteifigkeit zunächst als zeitabhängig angenommen. Der Verlauf der auf die globale Kontakttangentialsteifigkeit $k_{T,0}$ normierten Tangentialsteifigkeit

$$k_{T,P}^* = \frac{k_{T,P}}{k_{T,0}} = \frac{1}{n_{\text{Dis}}} M_r(W_{N,P}^*) \quad (2.133)$$

wird analog der Normalsteifigkeit aus Gl. (2.106) ebenfalls proportional dem Materialanteil M_r angenommen. Dies entspricht der Modellvorstellung der ansteigenden effektiven Kontaktfläche durch die Zunahme der in Kontakt befindlichen Rauheitsspitzen, siehe auch die experimentellen Ergebnisse von TREYDE [168].

Mit den auf den Betrag $\bar{F}_{N,P} = -\bar{F}_{\zeta,P} > 0$ des Gleichanteils der Normalkraft aus Gl. (2.130) unter Verwendung von Gl. (2.107) normierten Größen¹¹

$$\tau = \Omega_{Et}, \quad F_{N,P}^{**}(\tau) = \frac{F_{N,P}(\tau)}{\bar{F}_{N,P}} = F_{N,P}^*(\tau) \frac{R_0 k_{N,0}}{\bar{F}_{N,P}}, \quad (2.134)$$

¹¹Hierbei ist die unterschiedliche Normierung der physikalischen Normalkräfte zu beachten: Die auf die Größe $R_0 k_{N,0}$ normierten Größen werden durch ()^{*} gekennzeichnet. Für die Berechnung des Tangentialkontaktes ist hingegen eine Normierung auf $|\bar{F}_{N,P}|$ sinnvoller, die durch ()^{**} gekennzeichnet werden soll.

$$\mathbf{w}_{T,P}^*(\tau) = \begin{bmatrix} w_{\xi}^*(\tau) \\ w_{\eta}^*(\tau) \end{bmatrix} = \frac{k_{T,P}(\tau)}{\mu \bar{F}_{N,P}} \begin{bmatrix} w_{\xi}(\tau) \\ w_{\eta}(\tau) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}^*(\tau) = \begin{bmatrix} s_{\xi}^*(\tau) \\ s_{\eta}^*(\tau) \end{bmatrix} = \frac{k_{T,P}(\tau)}{\mu \bar{F}_{N,P}} \begin{bmatrix} s_{\xi}(\tau) \\ s_{\eta}(\tau) \end{bmatrix} \quad (2.135)$$

sowie

$$\mathbf{F}_{T,P}^*(\tau) = \begin{bmatrix} F_{\xi}^*(\tau) \\ F_{\eta}^*(\tau) \end{bmatrix} = \frac{1}{\mu \bar{F}_{N,P}} \begin{bmatrix} F_{\xi}(\tau) \\ F_{\eta}(\tau) \end{bmatrix} \quad (2.136)$$

lassen sich die Ergebnisse für den Tangentialkontakt des in **Bild 2.16b** skizzierten Modells in kompakter Form darstellen. Die Relativverschiebungen $\mathbf{w}_{T,P}^*(\tau)$ in Tangential- sowie $W_{N,P}^*(\tau)$ in Normalenrichtung werden als bekannt vorausgesetzt, womit auch der Verlauf der Punktkontaktnormalkraft $F_{N,P}^*(\tau)$ bzw. $F_{N,P}^{**}(\tau)$ gegeben ist. Wird der Punkt M als masselos angesehen, ergibt sich für die Berechnung der Bewegung $\mathbf{s}^*(\tau)$ bei vorhandenem Kontakt ($F_{N,P}^*(\tau) > 0$) aus dem Kräftegleichgewicht in tangentialer ξ - und η -Richtung stets

$$\mathbf{F}_{T,P}^*(\tau) = \mathbf{w}_{T,P}^*(\tau) - \mathbf{s}^*(\tau) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{F}_{T,P}^{*'}(\tau) = \mathbf{w}_{T,P}^{*'}(\tau) - \mathbf{s}^{*'}(\tau). \quad (2.137)$$

Während der Gleitphase gilt zusätzlich, dass die Richtung des Tangentialkraftvektors $\vec{F}_{T,P}^*$ der Richtung des aktuellen Geschwindigkeitsvektors \vec{s} des Punktes M entsprechen muss, sodass

$$\mathbf{s}^{*'}(\tau) = c \mathbf{F}_{T,P}^{*'}(\tau) \quad (2.138)$$

gilt. Weiterhin entspricht der Betrag $|\mathbf{F}_{T,P}^*| = \sqrt{\mathbf{F}_{T,P}^{*T} \mathbf{F}_{T,P}^*}$ der Tangentialkraft in der Gleitphase gerade der dimensionslosen COULOMB'schen Reibkraft $F_{N,P}^{**}$. Wird diese Beziehung abgeleitet, ergibt sich

$$\mathbf{F}_{T,P}^{*T}(\tau) \mathbf{F}_{T,P}^{*'}(\tau) = F_{N,P}^{**}(\tau) F_{N,P}^{**'}(\tau). \quad (2.139)$$

Einsetzen von Gl. (2.138) und Gl. (2.139) in Gl. (2.137) führt auf die Beziehung

$$\mathbf{F}_{T,P}^{*'} \text{ Gleit}(\tau) = \mathbf{w}_{T,P}^{*'}(\tau) - \frac{\mathbf{F}_{T,P}^{*T}(\tau) \mathbf{w}_{T,P}^{*'}(\tau) - F_{N,P}^{**}(\tau) F_{N,P}^{**'}(\tau)}{\mathbf{F}_{T,P}^{*T}(\tau) \mathbf{F}_{T,P}^*(\tau)} \mathbf{F}_{T,P}^*(\tau). \quad (2.140)$$

Im Fall des Haftens gilt $\mathbf{s}^{*'}(\tau) = \mathbf{0}$ und somit ergibt sich aus Gl. (2.137) für die Haftphase

$$\mathbf{F}_{T,P}^{*'} \text{ Haft}(\tau) = \mathbf{w}_{T,P}^{*'}(\tau). \quad (2.141)$$

Tritt Separation auf, d. h. ist $F_{N,P}^{**} = 0$, dann gilt $\mathbf{F}_{T,P} = \mathbf{0}$ und somit

$$\mathbf{F}_{T,P}^{*'} \text{ Sep}(\tau) = \mathbf{0}. \quad (2.142)$$

Mit Hilfe der dimensionslosen so genannten Slipfunktion

$$S^*(\tau) = |\mathbf{F}_{T,P}^*(\tau)| - F_{N,P}^{**}(\tau) \quad (2.143)$$

lassen sich die Schaltzeitpunkte τ^* , an denen ein Umschalten zwischen den Zuständen Haften, Gleiten und Separation (Sep.) auftritt, den folgenden Beziehungen entnehmen:

$$\begin{aligned}
\text{Haften} \rightarrow \text{Gleiten} : & \quad S^*(\tau^*) = 0 \quad \wedge \quad S^{*'}(\tau^*) > 0, \\
\text{Haften} \rightarrow \text{Sep.} : & \quad F_{N,P}^{**}(\tau^*) = 0 \quad \wedge \quad F_{N,P}^{**'}(\tau^*) < 0, \\
\text{Gleiten} \rightarrow \text{Haften} : & \quad s^{*'}(\tau^*) = 0 \quad \wedge \quad s^{*''}(\tau^*) < 0, \\
\text{Gleiten} \rightarrow \text{Sep.} : & \quad F_{N,P}^{**}(\tau^*) = 0 \quad \wedge \quad F_{N,P}^{**'}(\tau^*) < 0, \\
\text{Sep.} \rightarrow \text{Haften} : & \quad F_{N,P}^{**}(\tau^*) = 0 \quad \wedge \quad F_{N,P}^{**'}(\tau^*) > 0 \quad \wedge \quad |\mathbf{w}_{T,P}^{*'}(\tau^*)| < F_{N,P}^{**/2}(\tau^*), \\
\text{Sep.} \rightarrow \text{Gleiten} : & \quad F_{N,P}^{**}(\tau^*) = 0 \quad \wedge \quad F_{N,P}^{**'}(\tau^*) > 0 \quad \wedge \quad |\mathbf{w}_{T,P}^{*'}(\tau^*)| \geq F_{N,P}^{**/2}(\tau^*).
\end{aligned} \tag{2.144}$$

Die für die Bestimmung der Schaltzeitpunkte notwendige Ableitung $s^{*'}(\tau)$ der Verschiebung des Punktes M lässt sich entweder aus der in Gl. (2.137) gegebenen Beziehung ermitteln oder aber es wird zur Ermittlung des Schaltpunktes vom Gleiten zum Haften die numerisch günstigere Bedingung

$$F_{T,P}^{*T}(\tau) \mathbf{w}_{T,P}^{*'}(\tau) - F_{N,P}^{**}(\tau) F_{N,P}^{**'}(\tau) = 0 \tag{2.145}$$

herangezogen, die sich aus Kombination der Gln. (2.137) bis (2.139) ergibt, vgl. auch YANG UND MENQ [196]. Die numerische Integration der Tangentialkräfte $F_{T,P}^{*T}(\tau)$ aus den von den Schaltpunkten τ^* abhängigen zeitlichen Ableitungen erfolgt für einen gegebenen Verlauf der Relativverschiebungen $\mathbf{w}_{T,P}^*(\tau)$ und $W_{N,P}^*(\tau)$ mit Hilfe der in MATLAB/SIMULINK implementierten numerischen Integrationsroutine ODE45 mit variabler Schrittweite. Dieses auf einem RUNGE-KUTTA-Algorithmus basierende Integrationsverfahren, siehe u. a. EICH-SOELLNER UND FÜHRER [45], lässt im Gegensatz zu Verfahren mit konstanter Schrittweite eine sehr genaue Ermittlung der Schaltpunkte und der damit verbundenen unstetigen Änderung einer Simulationsvariablen bei gleichzeitig geringer Simulationsdauer zu.

Werden die periodischen Eingangsgrößen des Modells, die normierten Relativverschiebungen in tangentialer und normaler Richtung, in FOURIER-Reihen entwickelt, ergibt sich

$$w_{j,P}^*(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{w}_{j,P,k}^*| \cos(k\tau + \psi_{w_{j,P,k}^*}) , \quad j = \xi, \eta, \tag{2.146}$$

und

$$W_{\xi,P}^*(\tau) = \bar{w}_{\xi,P,k}^* + \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{w}_{\xi,P,k}^*| \cos(k\tau + \psi_{w_{\xi,P,k}^*}) \tag{2.147}$$

mit den Beträgen $|\hat{w}_{j,P,k}^*|$ und Phasenwinkeln $\psi_{w_{j,P,k}^*}$ nach Gl. (A.6). Die Relativverschiebung $W_{\xi,P}^*(\tau)$ in Normalenrichtung kann entsprechend Gl. (2.107) durch eine analoge Formulierung der Kontaktnormalkräfte ersetzt werden. Für einfache Fälle wie konstanter Normalkraft $F_{N,P}^{**}(\tau) = 1$ mit $W_{\xi,P}^*(\tau) = -W_{N,P}^*(\tau) = \text{const.}$ und harmonischer Relativverschiebung $w_{\xi,P}^*(\tau) = |\hat{w}_{\xi,P,1}^*| \cos \tau$, $w_{\eta,P}^*(\tau) = |\hat{w}_{\eta,P,1}^*| \sin \tau$ und damit elliptischer Bewegung des Punktes P' in der Tangentialebene lassen sich die Schaltzeitpunkte τ^* und

damit die Integrationsgrenzen aus Gl. (2.144) noch recht einfach angeben, da sie nur von den Amplituden der normierten Relativverschiebungen $|\hat{w}_{\xi,P,1}^*|$ und $|\hat{w}_{\eta,P,1}^*|$ der Grundharmonischen abhängig sind, siehe u. a. SIEWERT [157]. Die Anzahl der Einflussgrößen auf die iterativ zu ermittelnden Schaltzeitpunkte τ^* nimmt im allgemeinen Fall bei Berücksichtigung von m Harmonischen auf $6m$ zu, da neben den Amplituden $|\hat{w}_{\xi,P,k}^*|$, $|\hat{w}_{\eta,P,k}^*|$ und $|\hat{w}_{\zeta,P,k}^*|$ der einzelnen Harmonischen der dynamischen Relativverschiebungen auch deren Phasenlagen $\psi_{w_{\xi,P,k}^*}$, $\psi_{w_{\eta,P,k}^*}$ und $\psi_{w_{\zeta,P,k}^*}$ sowie der Gleichanteil $\bar{w}_{\zeta,P}^*$ der Normalverschiebung zu der Bezugsgröße $w_{\xi,P,1}^*(\tau)$ mit $\psi_{w_{\xi,P,1}^*} = 0$ von Bedeutung sind. Im allgemeinen Fall beliebiger, periodisch schwankender Relativverschiebungen ist daher schon bei der Berücksichtigung weniger Harmonischer eine numerische Integration bei steti- ger Überprüfung der Schaltbedingungen im Zeitbereich nach Gl. (2.144) unumgänglich. In MATLAB/SIMULINK kommt zu diesem Zweck ein so genannter Block kombinatorischer Logik zum Einsatz, der die entsprechenden Schaltkriterien während der Simulation fortlaufend überprüft, siehe auch SIEWERT [157]. Im Gegensatz zu geglätteten Reibkennlinien, wie z. B. die von SEXTRO [150] und PETROV UND EWINS [127] verwendete arctan-Funktion zur Approximation der sgn-Funktion ist die Verwendung der - im Rahmen der Numerik - exakt formulierten Schaltbedingungen, insbesondere bei kleinen Relativverschiebungen vorzuziehen. Die ebenfalls in [150], u. a. aus numerischen Gründen eingeführte, sehr kleine Masse des Punktes M kann in der obigen Formulierung ebenfalls entfallen, sodass keine störenden, numerisch bedingten hochfrequenten Komponenten in den Reibkräften auftreten.

In **Bild 2.21** sind beispielhaft die Resultate einer Zeitschrittintegration zunächst für das in **Bild 2.16** gegebene eindimensionale Elasto-Gleit-Modell für die in **Tabelle 2.2** angegebenen Fälle dargestellt. Rauheitseinflüsse werden zunächst vernachlässigt, sodass die Normalkraft im Kontaktfall proportional zur Relativverschiebung in Normalenrichtung ist. Das eindimensionale Elasto-Gleit-Modell mit konstanter Normalkraft $F_{N,P}^{**}(\tau)$ und harmonischer Relativverschiebung $w_{T,P}^*(\tau)$ weist sowohl Gleit- als auch Haftphasen auf, die in der Reibhysterese durch die Steigung 0 bzw. 1 gekennzeichnet sind, siehe **Bild 2.21d** links. Wird zusätzlich ein harmonisch veränderlicher Anteil der Normalkraft berücksichtigt, kommt es bei ausreichend großer Fluktuation zum Öffnen des Kontaktes mit $F_{N,P}^{**}(\tau) = 0$. In diesem Fall ergibt sich eine Reibhysterese, die ihre ursprünglichen Symmetrieeigenschaften verliert und darüber hinaus mit $F_{T,P}^*(\tau) = 0$ Bereiche der Separation aufweist, siehe **Bild 2.21d** Mitte. Werden weiterhin die Annahmen monofrequenter Relativverschiebung und Normalkraft aufgegeben und höher harmonische Anteile berücksichtigt, ergeben sich sehr komplexe Reibhysteresen, die eine Vielzahl von Schaltpunkten zwischen den verschiedenen Zuständen des Haftens, des Gleitens und der Separation aufweisen, siehe **Bild 2.21d** rechts.

Tabelle 2.2: Parameter der in **Bild 2.21** dargestellten Resultate

	Bild 2.21 links	Bild 2.21 Mitte	Bild 2.21 rechts
$w_{T,P}^*(\tau)$	$3 \cos \tau$	$3 \cos \tau$	$3 \cos \tau - 5 \cos 3\tau$
$W_{N,P}^*(\tau) / \bar{w}_{N,P}^*$	1	$1 + 1.2 \cos \tau$	$1 + 1.2 \cos \tau - 0.5 \cos 3\tau$

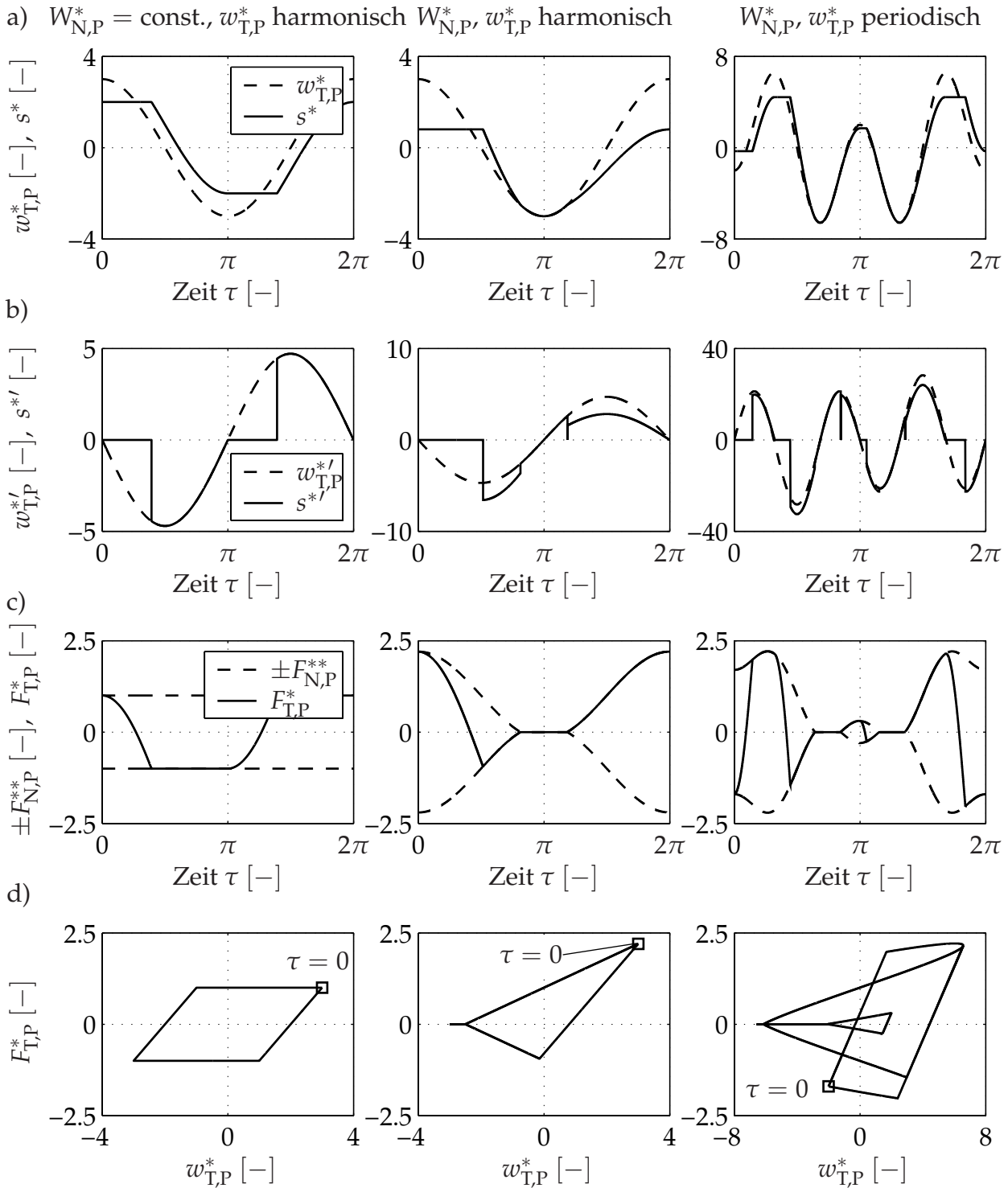


Bild 2.21: Eindimensionales Elasto-Gleit-Modell mit variabler Normalkraft. Links: konstante Normalkraft und harmonische Tangentialverschiebung; Mitte: harmonische Normal- und Tangentialverschiebung mit Abheben; rechts: zweiperiodische Normal- und Tangentialverschiebung mit Abheben. Jeweils: a) Relativverschiebungen $w_{T,P}^*$ und s^* ; b) Relativgeschwindigkeiten $w_{T,P}^{*'}$ und $s^{*'}$; c) Normal- und Tangentialkraftverlauf $\pm F_{N,P}^{**}$ und $F_{T,P}^*$; d) Reibhysterese $F_{T,P}^* = f(w_{T,P}^*)$

Hinsichtlich des Verlaufes der Geschwindigkeit $s^{*'}(\tau)$ des Punktes M ist anzumerken, dass aufgrund der Vernachlässigung der Masse Geschwindigkeitssprünge sowohl beim Übergang vom Haften zum Gleiten als auch beim Beginn der Separation und beim Übergang vom Zustand der Separation in den Zustand des kurzzeitigen Haftens unmittelbar nach erneutem Kontakt auftreten, siehe **Bild 2.21b** rechts.

Der Übergang vom Zeit- in den Frequenzbereich erfolgt durch die Bildung der in **Bild 2.22** dargestellten FFT des Zeitverlaufs der Tangentialkraft $F_{T,P}^*(\tau)$ aus **Bild 2.21**. Im Gegensatz zum einfachen Fall konstanter Normalkraft und harmonischer Relativbewegung, bei dem aufgrund der Symmetrie neben der dominierenden Grundharmonischen nur die 3., 5. usw. Harmonische im Spektrum enthalten sind, weist das Spektrum im Fall veränderlicher Normalkraft aufgrund der fehlenden Symmetrie des Tangentialkraftverlaufs Anteile aller Harmonischen einschließlich einer Nullpunktverschiebung in Form eines konstanten Anteils $\bar{F}_{T,P}^*$ auf. Dennoch kann die Grundharmonische trotz kurzzeitiger Separation als dominierend angesehen werden. Im Fall von Normalkraft- und Relativverschiebungsverläufen, die auch höher harmonische Anteile enthalten, kann für die gewählten Parameter keine eindeutig dominierende Harmonische identifiziert werden. Dieser Effekt tritt naturgemäß umso deutlicher hervor, je größer der Anteil der höher Harmonischen in den Eingangsgrößen $F_{N,P}^{**}(\tau)$ und $w_{T,P}^*(\tau)$ und je stärker die Nichtlinearität aufgrund der trockenen Reibung ist.

In **Bild 2.23** sind beispielhaft die Simulationsergebnisse für eine zweidimensionale Bewegung des Punktes P' dargestellt, die sich aus dem oben diskutierten eindimensionalen Fall aus **Tabelle 2.2** mit einer zusätzlichen Überlagerung von $w_{\eta,P}^*(\tau) = 2 \cos \tau + 3 \cos 3\tau$ ergibt. Aus **Bild 2.23b** wird deutlich, dass sich schon bei der Berücksichtigung nur einer höher Harmonischen sehr komplexe Verläufe der Kontaktkräfte ergeben. Zusätzlich zu den Komponenten $F_{\xi,P}^*$ und $F_{\eta,P}^*$ ist der Betrag $|F_{T,P}^*|$ der tangentialen Punktcontactkraft dargestellt, der maximal den Wert $F_{N,P}^{**}$ annehmen kann.

Die Komplexität der Lösungen für die Tangentialkräfte schließt im Allgemeinen eine a priori-Lösung unter Umgehung der Zeitschrittintegration aus. Innerhalb des Simulationsprogramms ließe sich diese Zeitschrittintegration u. U. für einige wenige Punktcontacte durchführen. Vor dem Hintergrund der Beschreibung der Kontaktfläche durch eine

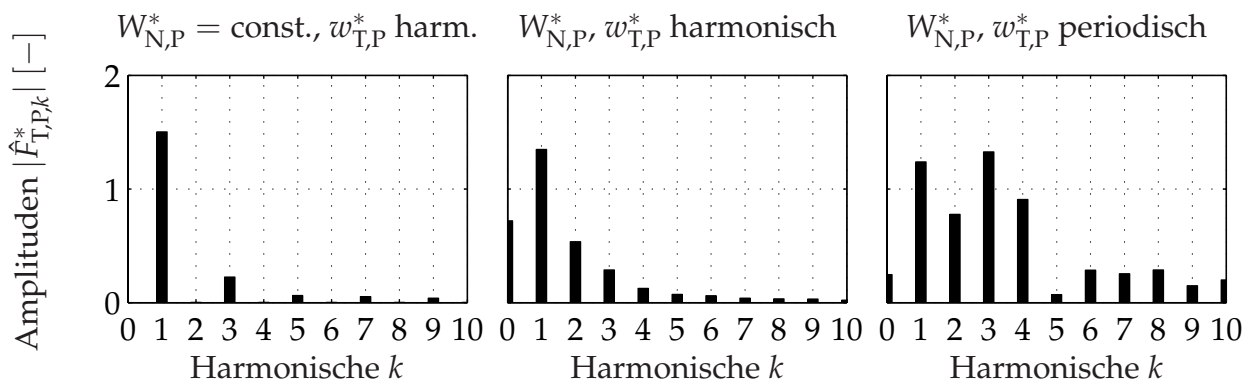


Bild 2.22: FOURIER-Analyse der Tangentialkraft $F_{T,P}^*(\tau)$ der drei Beispielfälle aus **Bild 2.21**

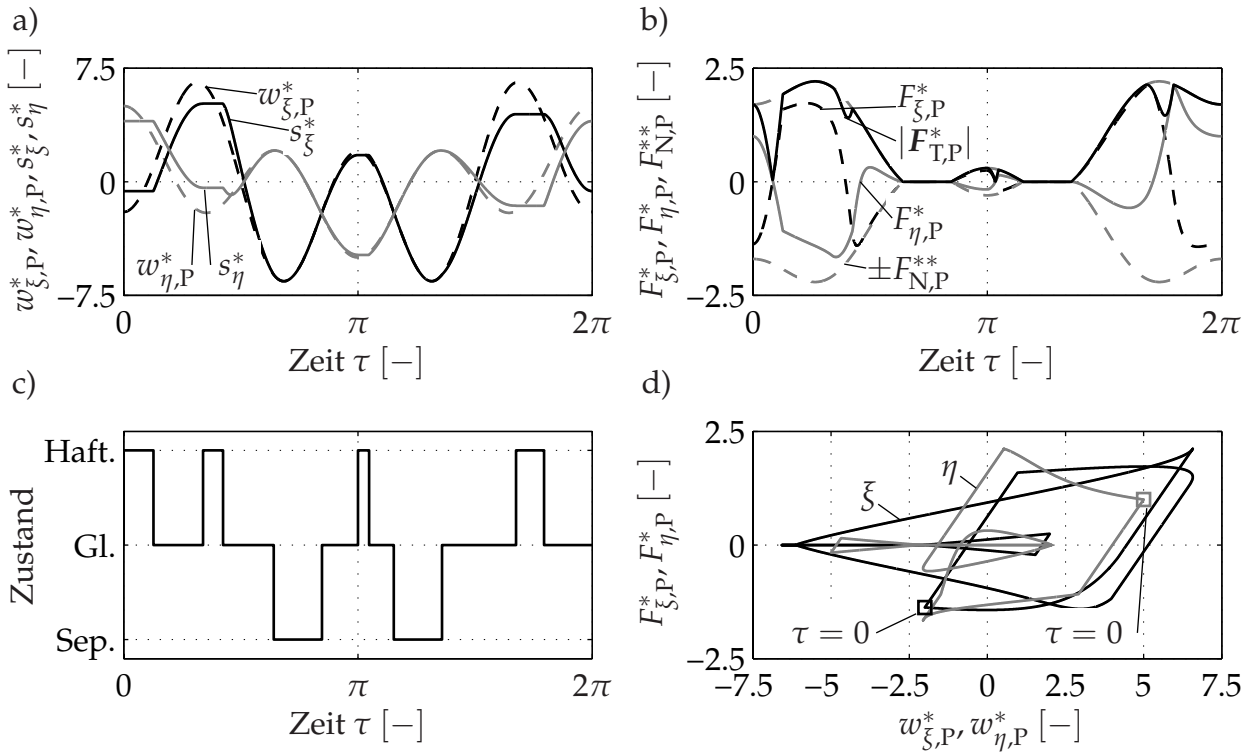


Bild 2.23: Zweidimensionales Elasto-Gleit-Modell mit variabler Normalkraft: a) Relativverschiebungen $w_{T,P}^*$ und s^* ; b) Punktkontaktkräfte $F_{T,P}^*$ und $F_{N,P}^{**}$; c) Kontaktzustand; d) Reibhysteresen $F_{\xi,P}^*(w_{\xi,P}^*)$ und $F_{\eta,P}^*(w_{\eta,P}^*)$

Anzahl diskreter Kontaktpunkte als Voraussetzung für die Betrachtung möglichst beliebiger Reibelementgeometrien erscheint dieses Vorgehen aber aus Rechenzeitgründen für eine praktische Schaufelauslegung wenig sinnvoll. Dies gilt im Besonderen für den Fall einer verstimmten Beschauflung und der damit verbundenen großen Anzahl Freiheitsgrade. Eine effektive Bestimmung der tangentialen Kontaktkräfte erfordert daher eine Approximation der exakten Simulationsergebnisse. Aus diesem Grund sollen im Folgenden analog der Betrachtung des Normalkontaktes in einem ersten Schritt ausschließlich *monofrequente* Relativbewegungen und Kontaktkräfte berücksichtigt werden, sodass eine Lösung des Gesamtsystems im Frequenzbereich ermöglicht wird, vgl. auch **Bild 2.28** in Abschnitt 2.4.3.

Für die tangentialen Relativbewegungen ergeben sich dann, wie in **Bild 2.16b** dargestellt, elliptische Trajektorien, deren Lage innerhalb der Kontaktfläche für verschiedene Punktkontakte sehr unterschiedlich sein kann, vgl. auch **Bild 2.15b**. Die Transformation der in kontaktflächenfesten Koordinaten angegebenen Relativverschiebungen ${}_{KL}\hat{w}_P$ aus Gl. (2.97) in das Hauptachsensystem der individuellen Ellipse, das durch die $\tilde{\xi}$ - und $\tilde{\eta}$ -Achse aufgespannt wird, erfolgt mit Hilfe der Koordinatentransformation

$${}_{E}\hat{w}_P = \begin{bmatrix} \hat{w}_{\tilde{\xi}} & \hat{w}_{\tilde{\eta}} & \hat{w}_{\tilde{z}} \end{bmatrix}_P^T = \mathbf{G}_{E\ KL} \hat{w}_P \quad (2.148)$$

und der Transformationsmatrix

$$\mathbf{G}_E = \begin{bmatrix} \cos \delta_E & \sin \delta_E & 0 \\ -\sin \delta_E & \cos \delta_E & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.149)$$

sodass sich stets

$$w_{\xi}(\tau) = |\hat{w}_{\xi}| \cos \tau, \quad w_{\eta}(\tau) = |\hat{w}_{\eta}| \sin \tau \quad (2.150)$$

ergibt. Der Transformationswinkel δ_E lässt sich aufgrund der Orthogonalität der komplexen Zeiger,

$$\operatorname{Re}\{\hat{w}_{\xi,P}\} \operatorname{Re}\{\hat{w}_{\eta,P}\} + \operatorname{Im}\{\hat{w}_{\xi,P}\} \operatorname{Im}\{\hat{w}_{\eta,P}\} = 0, \quad (2.151)$$

bestimmen. Wird Gl. (2.151) in Gl. (2.148) eingesetzt, ergibt sich nach SEXTRO [147]

$$\delta_E = \frac{1}{2} \arctan \left(2 \frac{\operatorname{Re}\{\hat{w}_{\xi,P}\} \operatorname{Re}\{\hat{w}_{\eta,P}\} + \operatorname{Im}\{\hat{w}_{\xi,P}\} \operatorname{Im}\{\hat{w}_{\eta,P}\}}{|\hat{w}_{\xi,P}|^2 - |\hat{w}_{\eta,P}|^2} \right). \quad (2.152)$$

Nach dem Übergang in den Frequenzbereich lassen sich die tangentialen Kontaktkräfte im Hauptachsensystem der Ellipse unter Vernachlässigung höher harmonischer Anteile analog zu Gl. (2.130) aus

$$\hat{F}_{\xi,P}^* \approx \hat{k}_{\xi,P}^* \hat{w}_{\xi,P}^*, \quad \hat{F}_{\eta,P}^* \approx \hat{k}_{\eta,P}^* \hat{w}_{\eta,P}^* \quad (2.153)$$

bestimmen. Die komplexen, normierten Ersatzsteifigkeiten

$$\hat{k}_{\xi,P}^* = \frac{\hat{k}_{S,P}}{k_{T,P}}, \quad \hat{k}_{\eta,P}^* = \frac{\hat{k}_{\eta,P}}{k_{T,P}} \quad (2.154)$$

ergeben sich aus der FOURIER-Reihenentwicklung der entsprechenden Komponenten der tangentialen Punktkontaktkräfte $F_{\xi,P}^*(\tau)$ bzw. $F_{\eta,P}^*(\tau)$ mit Hilfe von Gl. (A.6). Sie sind neben den Amplituden der tangentialen Relativverschiebungen im Hauptachsensystem der Ellipse auch von dem Verlauf der Relativverschiebung $W_{N,P}(\tau)$ in Normalenrichtung abhängig, da nach Gl. (2.135) zur Berechnung der Tangentialkräfte auch der Verlauf $F_{N,P}(\tau)$ sowie $k_{T,P}(\tau)$ benötigt wird. Es ergibt sich somit die Abhängigkeit

$$\left. \begin{array}{l} \hat{k}_{\xi,P}^* \\ \hat{k}_{\eta,P}^* \end{array} \right\} = f(|\hat{w}_{\xi,P}|, |\hat{w}_{\eta,P}|, \bar{w}_{N,P}, \hat{w}_{N,P}), \quad (2.155)$$

wobei unter der Annahme eines isotropen Kontaktes

$$\hat{k}_{\eta,P}^*(|\hat{w}_{\xi,P}|, |\hat{w}_{\eta,P}|, \bar{w}_{N,P}, \hat{w}_{N,P}) = \hat{k}_{\xi,P}^*(|\hat{w}_{\eta,P}|, |\hat{w}_{\xi,P}|, \bar{w}_{N,P}, \hat{w}_{N,P}) \quad (2.156)$$

gilt.

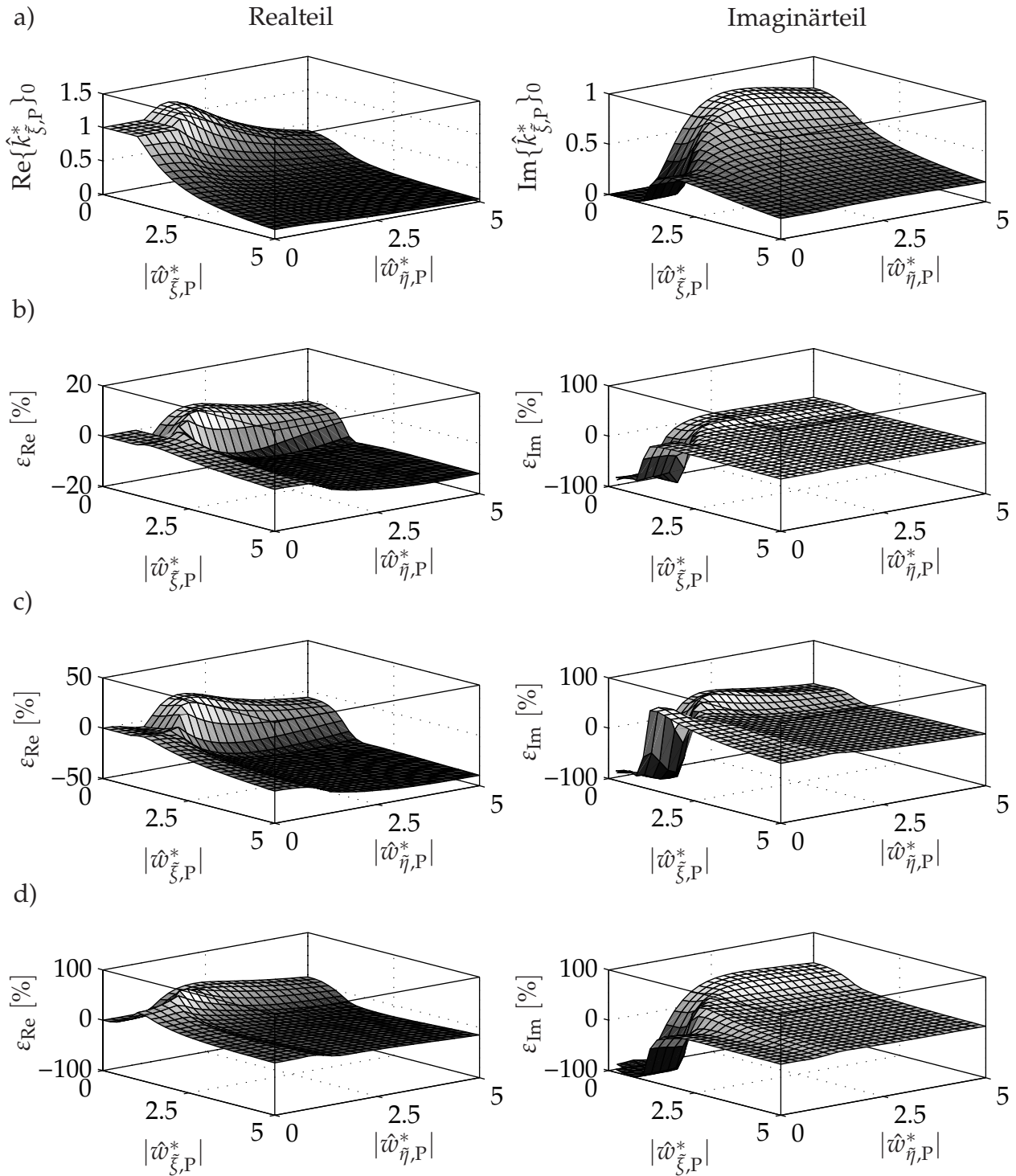


Bild 2.24: Komplexe Ersatzsteifigkeit $\hat{k}_{\xi,P}^*$ und $\hat{k}_{\eta,P}^*$ und relative Fehler $\varepsilon_{\text{Re}}, \varepsilon_{\text{Im}}$. Links: Realteil; rechts: Imaginärteil. Jeweils: a) Parameter $\kappa_{\zeta} = 0, \psi = 0$; b) Parameter $\kappa_{\zeta} = 0.5, \psi = 0$; c) Parameter $\kappa_{\zeta} = 1.0, \psi = 0$; d) Parameter $\kappa_{\zeta} = 1.0, \psi = \frac{\pi}{2}$

In **Bild 2.24** ist der Realteil (Ersatzsteifigkeit) und der Imaginärteil (Ersatzdämpfung) der komplexen Ersatzsteifigkeiten in Abhängigkeit der tangentialen Relativverschiebungen für verschiedene Amplituden und Phasenwinkel der Normalverschiebung

$$W_{N,P}(\tau) = \bar{w}_{N,P} + |\hat{w}_{N,P}| \cos(\tau + \psi) \quad (2.157)$$

dargestellt. Der Phasenwinkel ψ kennzeichnet die Phasenlage der Relativverschiebung in Normalenrichtung zu der tangentialen Relativverschiebung $w_{\xi,P}(\tau)$. Rauheitseinflüsse werden an dieser Stelle nicht berücksichtigt, sodass neben der Phasenlage ψ das in Gl. (2.132) angegebene Verhältnis κ_ζ aus dynamischer und statischer Relativverschiebung in Normalenrichtung als weiterer Parameter in die Berechnung der tangentialen Kontaktkräfte eingeht. Die Ergebnisse für eine Variation von κ_ζ und ψ zeigt **Bild 2.24a** bis **d**. Hierin sind auch die eindimensionalen Fälle, etwa mit $|\hat{w}_{\eta,P}^*| = 0$, enthalten. Das Maximum der Ersatzdämpfung tritt dabei, wie in früheren Untersuchungen festgestellt, bei einer normierten Relativverschiebung von $|\hat{w}_{\eta,P}^*| = 2$ auf, die zu einem maximalen Flächeninhalt der eindimensionalen Reibhysterese führt, siehe u. a. POPP ET AL. [132]. In **Bild 2.24b** bis **Bild 2.24d** ist der relative Fehler

$$\varepsilon_{\text{Re}} = \frac{\text{Re}\{\hat{k}_{\xi,P}^*\}_0 - \text{Re}\{\hat{k}_{\xi,P}^*\}}{\text{Re}\{\hat{k}_{\xi,P}^*\}} \quad (2.158)$$

für verschiedene Parameterkombinationen κ_ζ, ψ gegeben, wobei $\text{Re}\{\hat{k}_{\xi,P}^*\}_0$ den Realteil aus **Bild 2.24a** als Referenzwert bezeichnet. Analog gilt dies für den Imaginärteil. Es wird deutlich, dass die Annahme einer konstanten Normalkraft mit $\kappa_\zeta = 0$ aus **Bild 2.24a** bei moderatem κ_ζ in weiten Bereichen zu akzeptablen Näherungen der mit fluktuierender Normalkraft berechneten Werte führt. Dies gilt insbesondere dann, wenn sich eine Vorzugsrichtung der Relativverschiebungen einstellt, sodass etwa $|\hat{w}_{\eta,P}^*| \ll |\hat{w}_{\xi,P}^*|$ gilt. Die Approximation durch die in **Bild 2.24a** dargestellten Ersatzsteifigkeiten verliert mit wachsendem κ_ζ an Güte. Der in **Bild 2.24c** und **d** dargestellte Fall kennzeichnet mit $\kappa_\zeta = 1.0$ gerade den Fall des einsetzenden Abhebens. Die relativen Fehler des Realteils in **Bild 2.24b** und **c** zeigen, dass die Ersatzsteifigkeit durch die Annahme einer konstanten Normalkraft in weiten Bereichen unterschätzt wird, während die Ersatzdämpfung leicht überschätzt wird. Dies ist in der gleichphasig zu der Relativbewegung veränderlichen Normalkraft begründet, die länger anhaltende Haftphasen bewirkt. Eine Änderung des Phasenwinkels ψ führt dementsprechend zu abweichenden Ergebnissen, siehe **Bild 2.24d**. Dieser Einfluss des Phasenwinkels wird auch von PETROV UND EWINS [127] berichtet. Zu den relativen Fehlern der Imaginärteile bei kleinen Relativverschiebungen ist anzumerken, dass in diesem Bereich aufgrund des Makroschlupfverhaltens eines Punktkontaktes reines Haften mit $\text{Im}\{\hat{k}_{\xi,P}^*\} \rightarrow 0$ vorliegt, sodass der relative Fehler aufgrund der kleinen Absolutwerte nicht sinnvoll zu interpretieren ist.

Der komplizierte Einfluss der Normalkraftvariation einschließlich ihrer Phasenlage im Fall des zeitweiligen Abhebens ($\kappa_\zeta > 0$) führt in einem weiteren Schritt zu der Verwendung einer über der gesamten Periode konstant angenommenen *mittleren* Normalkraft $F_{N,P}(\tau) \approx \bar{F}_{N,P}$. Analog wird mit der zur Normierung in Gl. (2.135) notwendigen Punktkontakt tangentialsteifigkeit $k_{T,P}(\tau) \approx \bar{k}_{T,P}$ verfahren, die unter Berücksichtigung von Separation und/oder Rauheitseffekten einen zeitlichen Mittelwert $\bar{k}_{T,P} \neq k_{T,P}$ aufweisen kann.

2.3.3 Generalisierte Kontaktkräfte

Für den Fall monofrequenter Relativverschiebungen und Kontaktkräfte lässt sich mit der komplexen Punktkontaktsteifigkeitsmatrix

$${}^{(i)}\hat{\mathbf{K}}_{K,P} = \begin{bmatrix} {}^{(i)}\hat{k}_{\xi,P} & 0 & 0 \\ 0 & {}^{(i)}\hat{k}_{\eta,P} & 0 \\ 0 & 0 & {}^{(i)}\hat{k}_{\zeta,P} \end{bmatrix} \quad (2.159)$$

eines individuellen Punktkontaktes (i), die die denormierten Kontaktsteifigkeiten aus Gl. (2.131) und Gl. (2.154) enthält, der Zusammenhang

$${}_{E}\hat{\mathbf{f}}_{K,P} = {}^{(i)}\hat{\mathbf{K}}_{K,P} {}_E\hat{\mathbf{w}}_P \quad (2.160)$$

mit den Punktkontaktkräften

$${}_{E}\hat{\mathbf{f}}_{K,P} = \left[{}^{(i)}\hat{F}_{\xi} \quad {}^{(i)}\hat{F}_{\eta} \quad {}^{(i)}\hat{F}_{\zeta} \right]_P^T \quad (2.161)$$

und den Relativverschiebungen ${}^{(i)}\hat{\mathbf{w}}_P$ nach Gl. (2.148) im Hauptachsensystem der Ellipse angeben. Die verallgemeinerten Kontaktkräfte bezüglich des linken Kontaktpunktes OL ergeben sich durch Summation der n_{Dis} Punktkontaktkräfte unter Berücksichtigung der Rücktransformationen von Gl. (2.95) und Gl. (2.149) aus

$${}_{KL}\hat{\mathbf{f}}_{K,OL} = \left[\hat{F}_{\xi,OL} \quad \hat{F}_{\eta,OL} \quad \hat{F}_{\zeta,OL} \quad \hat{M}_{\xi}^{(OL)} \quad \hat{M}_{\eta}^{(OL)} \quad \hat{M}_{\zeta}^{(OL)} \right]^T = \hat{\mathbf{K}}_{K,OL} {}_{KL}\hat{\mathbf{w}}_{OL} \quad (2.162)$$

mit der Gesamtsteifigkeitsmatrix

$$\hat{\mathbf{K}}_{K,OL} = \sum_{i=1}^{n_{\text{Dis}}} {}^{(i)}\mathbf{G}_P^T {}^{(i)}\mathbf{G}_E^T {}^{(i)}\hat{\mathbf{K}}_{K,P} {}^{(i)}\mathbf{G}_E {}^{(i)}\mathbf{G}_P, \quad (2.163)$$

den individuellen Matrizen ${}^{(i)}\mathbf{G}_P$ und ${}^{(i)}\mathbf{G}_E$ nach Gl. (2.95) bzw. Gl. (2.149) und den Punktkontaktsteifigkeitsmatrizen ${}^{(i)}\hat{\mathbf{K}}_{K,P}$ nach Gl. (2.159). Die im rechten Kontaktpunkt OR auftretenden Kontaktkräfte werden analog bestimmt und es ergeben sich zusammenfassend die an einem Reibelement (k) im linken und rechten Kontakt auf die Schaufelfußplatten wirkenden Kräfte aus

$${}^{(k)}\hat{\mathbf{f}}_K = \begin{bmatrix} {}^{(k)}\hat{\mathbf{f}}_{K,OL} \\ {}^{(k)}\hat{\mathbf{f}}_{K,OR} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^{(k)}\hat{\mathbf{K}}_{K,OL} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^{(k)}\hat{\mathbf{K}}_{K,OR} \end{bmatrix}}_{{}^{(k)}\hat{\mathbf{K}}_K} \begin{bmatrix} {}^{(k)}\hat{\mathbf{w}}_{OL} \\ {}^{(k)}\hat{\mathbf{w}}_{OR} \end{bmatrix}. \quad (2.164)$$

Die auf diese Weise ermittelten Kontaktkräfte werden abschließend, wie in Abschnitt 2.4.1 erläutert wird, in die modal transformierten Bewegungsgleichungen eingebunden. An gleicher Stelle wird die Ermittlung der für Gl. (2.164) benötigten physikalischen Relativverschiebungen aus den modalen Koordinaten beschrieben.

Eine zusammenfassende schematische Darstellung der Ermittlung des Zusammenhanges $\hat{\mathbf{K}}_{K,OL}(\hat{\mathbf{w}}_{OL})$ gibt **Bild 2.25**. Dabei wird deutlich, dass Normal- und Tangentialpunkt-kontakt über die mittlere Punktkontaktnormalkraft $\bar{F}_{\zeta,P}$ gekoppelt sind. Analog wird für

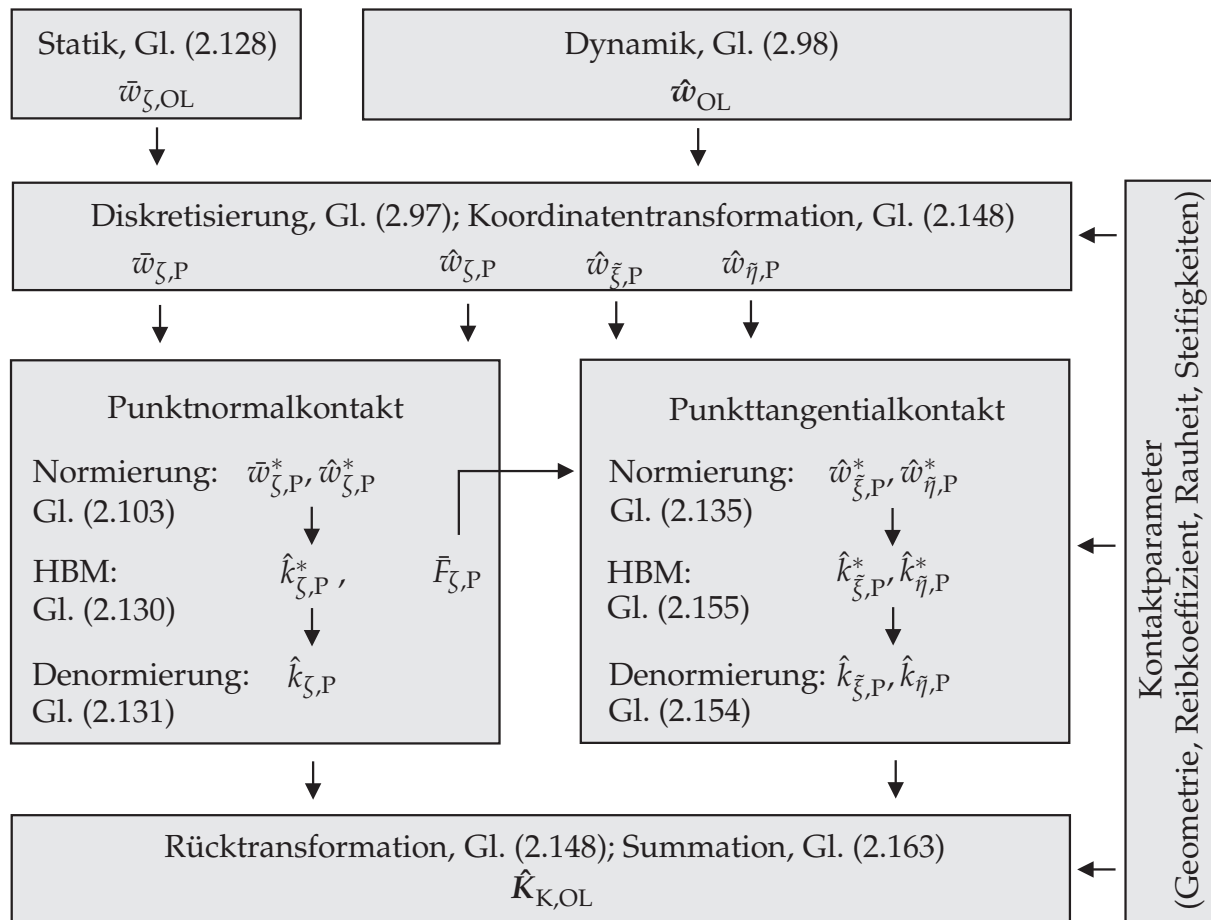


Bild 2.25: Schematische Darstellung der Ermittlung der Kontaktsteifigkeitsmatrix $\hat{K}_{K,OL}$

den rechten Kontakt vorgegangen. Eine weitere Kopplung der normalen und tangentialen Kontaktkräfte in beiden Kontakten erfolgt über die Gleichgewichtsbedingungen am Reibelement.

2.4 Entwicklung und Lösung der Systemgleichung

Die Entwicklung der Systemgleichung erfordert zunächst die Betrachtung des allgemeinen Falls der als Gesamtsystem behandelten gekoppelten Schaufel-Scheibe-Struktur. Darauf aufbauend lassen sich verschiedene Systemtypen unterscheiden, für die sich als Sonderfälle des allgemeinen Falls eine vereinfachte oder modifizierte Systemgleichung ergibt. Die betrachteten Systemtypen lassen sich anhand verschiedener Merkmale klassifizieren:

- **Art der Verstimmung:** Grundsätzlich lässt sich ein verstimmtes oder unverstimmtes System unterscheiden. Eine Verstimmung kann hinsichtlich
 - der Schaufelparameter wie Eigenfrequenzen, modalen Dämpfungen und Eigenvektoren,
 - der Dämpferparameter wie Reibelementmasse und Dämpfergeometrie oder

- der Kontaktparameter wie Kontaktgeometrie, Reibkoeffizient und Oberflächenrauheit auftreten.

In der Realität wird aufgrund unvermeidlicher Fertigungstoleranzen stets eine Kombination verschiedener Verstimmungsmechanismen zu beobachten sein. Im Allgemeinen ist es erforderlich, im verstimmten Fall das Gesamtsystem zu betrachten bzw. Näherungsverfahren zur Berechnung der Schwingungsantwort anzuwenden. Für den Fall des unverstimmten Systems ergibt sich dagegen eine deutlich vereinfachte Systemgleichung, auf die in Abschnitt 2.4.2 eingegangen wird.

- **Art der Schaufel-Scheibe-Kopplung:** In Ausnahmefällen lassen sich bei relativ steifer Radscheibe die einzelnen Schaufeln als voneinander entkoppelte Strukturen auffassen. Ist dies nicht zulässig, lässt sich die gekoppelte Schaufel-Scheibe-Struktur als Gesamtsystem modellieren und modal transformieren. Dies gilt für das unverstimmte System ebenso wie unter Berücksichtigung einiger Annahmen auch für das verstimmte System.
- **Art der Schaufelanordnung:** Neben zyklischen Schaufelkränzen lassen sich auch Systeme mit Kettenstruktur untersuchen. Diese sind für Betrachtung realer Beschaukelungen in der Praxis von eher untergeordneter Bedeutung. Häufig jedoch dienen vereinfachte, nicht-rotierende Modelle, deren Kettenstruktur einen Ausschnitt aus dem zyklischen System darstellen, als Basis für experimentelle Untersuchungen hinsichtlich der Wirksamkeit von Dämpferelementen, siehe auch Abschnitt 4.1.
- **Art des Koppелеlements:** Im Rahmen der in Kapitel 3 folgenden Untersuchungen soll sowohl der Einfluss von Reibelementen als auch vergleichend die Wirkungsweise von geteilten Deckbändern untersucht werden. Der aus den beiden Koppелеlementen resultierenden unterschiedlichen Kinematik wird mit Hilfe einer Modifikation der Systemgleichung Rechnung getragen, die als Sonderfall in Abschnitt 2.4.2.4 erläutert wird.

Zunächst soll die Systemgleichung für den allgemeinen Fall einer gekoppelten Schaufel-Scheibe-Struktur, die als Gesamtstruktur betrachtet wird, entwickelt werden. Sie ergibt sich durch die Verknüpfung der Schaufel-Scheibe- und Dämpfer-Dynamik aus Gl. (2.31) und Gl. (2.71), dem Erregerkraftvektor nach Gl. (2.91) sowie dem in Abschnitt 2.3 hergeleiteten Zusammenhang zwischen Relativverschiebungen und Kontaktkräften. Anschließend soll für die verschiedenen Systemtypen die z. T. deutlich vereinfachte Systemgleichung angegeben werden.

2.4.1 Allgemeiner Fall

Als Ausgangspunkt dient die Systemgleichung des Gesamtsystems

$$\mathcal{S} \hat{q} = \hat{\mathcal{F}} = \hat{\mathcal{F}}_E + \hat{\mathcal{F}}_K \quad (2.165)$$

mit der dynamischen Steifigkeitsmatrix

$$\hat{\mathbf{S}} = \text{diag} \left(\hat{\mathbf{S}}_G, {}^{(1)}\hat{\mathbf{S}}_D, {}^{(2)}\hat{\mathbf{S}}_D, \dots, {}^{(n_S)}\hat{\mathbf{S}}_D \right), \quad (2.166)$$

die in den Matrizen ${}^{(k)}\hat{\mathbf{S}}_D$ die dynamischen Eigenschaften der beteiligten Dämpfer nach Gl. (2.72) und in der Matrix $\hat{\mathbf{S}}_G$ die des gekoppelten Gesamtsystems aus Schaufeln und Scheibe nach Gl. (2.31) enthält. Letztere enthält analog zu Gl. (2.28) die Eigenfrequenzen und modalen Dämpfungen der gekoppelten Schaufel-Scheibe-Struktur und damit zunächst alle in Abschnitt 2.1.3 diskutierten möglichen Schwingungsformen. Der Lösungsvektor der modalen Amplituden lautet entsprechend

$$\hat{\mathbf{q}} = \left[\hat{q}_G^H \quad {}^{(1)}\hat{q}_D^H \quad {}^{(2)}\hat{q}_D^H \quad \dots \quad {}^{(n_S)}\hat{q}_D^H \right]^H. \quad (2.167)$$

Die ausschließlich an den Schaufeln angreifenden modalen äußeren Erregerkräfte lassen sich in dem Vektor

$$\hat{\mathbf{f}}_E = \left[\hat{\mathbf{f}}_{G,E}^H \quad {}^{(1)}\hat{\mathbf{f}}_{D,E}^H \quad {}^{(2)}\hat{\mathbf{f}}_{D,E}^H \quad \dots \quad {}^{(n_S)}\hat{\mathbf{f}}_{D,E}^H \right]^H = \left[\hat{\mathbf{f}}_{G,E}^H \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{0} \right]^H \quad (2.168)$$

zusammenfassen. Die Berücksichtigung der in Gl. (2.91) gegebenen, auf die Gesamtstruktur wirkenden Erregerkräfte $\hat{\mathbf{f}}_E$ lassen sich analog Gl. (2.24) durch Multiplikation mit der hermitesch Transponierten der in Gl. (2.33) gegebenen Modalmatrix $\hat{\Psi}_G$ ausdrücken,

$$\hat{\mathbf{f}}_{G,E} = \hat{\Psi}_{G,E}^H \hat{\mathbf{f}}_E. \quad (2.169)$$

Die in der Modalmatrix $\hat{\Psi}_{G,E}$ berücksichtigten Freiheitsgrade umfassen dabei notwendigerweise nur diejenigen, an denen eine diskrete Anregung der Schaufeln erfolgt.

Analog ergeben sich die auf die beschauelte Scheibe und die Dämpfer wirkenden modalen Kontaktkräfte aus

$$\hat{\mathbf{f}}_K = \left[\hat{\mathbf{f}}_{G,K}^H \quad {}^{(1)}\hat{\mathbf{f}}_{D,K}^H \quad {}^{(2)}\hat{\mathbf{f}}_{D,K}^H \quad \dots \quad {}^{(n_S)}\hat{\mathbf{f}}_{D,K}^H \right]^H. \quad (2.170)$$

Die Bestimmung der Kontaktkräfte in den einzelnen Koppelstellen zwischen Schaufel und Dämpfer nach Gl. (2.164) in Abschnitt 2.3 erfordert zunächst die Kenntnis der Relativverschiebungen $\hat{\mathbf{w}}$ der entsprechenden Kontaktpunkte OL bzw. OR in den jeweiligen Kontaktkoordinatensystemen KL bzw. KR, vgl. **Bild 2.2**. Die Relativverschiebungen

$${}^{(k)}\hat{\mathbf{w}}_{OL} = {}^{(k)}\hat{\mathbf{u}}_{OL'} - {}^{(k)}\hat{\mathbf{u}}_{OL}, \quad {}^{(k)}\hat{\mathbf{w}}_{OR} = {}^{(k)}\hat{\mathbf{u}}_{OR'} - {}^{(k+1)}\hat{\mathbf{u}}_{OR} \quad (2.171)$$

im linken und rechten Referenzpunkt eines Kontaktes ${}^{(k)}$ ergeben sich aus den Absolutverschiebungen

$${}^{(k)}\hat{\mathbf{u}}_{OL'} = {}^{(k)}\mathbf{G}_{DL} \quad {}^{(k)}\hat{\boldsymbol{\phi}}_{OL',D} \quad {}^{(k)}\hat{q}_D, \quad {}^{(k)}\hat{\mathbf{u}}_{OR'} = {}^{(k)}\mathbf{G}_{DR} \quad {}^{(k)}\hat{\boldsymbol{\phi}}_{OR',D} \quad {}^{(k)}\hat{q}_D \quad (2.172)$$

der Referenzpunkte OL' und OR' des Dämpfers und den koinzidierenden Referenzpunkten OL bzw. OR der Fußplatten benachbarter Schaufeln,

$${}^{(k)}\hat{\mathbf{u}}_{OL} = {}^{(k)}\mathbf{G}_{SL} \quad {}^{(k)}\hat{\boldsymbol{\phi}}_{OL,G} \quad \hat{q}_G, \quad {}^{(k+1)}\hat{\mathbf{u}}_{OR} = {}^{(k)}\mathbf{G}_{SR} \quad {}^{(k+1)}\hat{\boldsymbol{\phi}}_{OR,G} \quad \hat{q}_G \quad (2.173)$$

mit den Geometriematrizen \mathbf{G} nach Gl. (2.7) und Gl. (2.8) sowie den Modalmatrizen $\hat{\boldsymbol{\Phi}}$ des Dämpfers und der beschaukelten Scheibe, die mit den Eigenvektoren der jeweiligen Kontaktreferenzpunkte besetzt sind. Im Gegensatz zu dem von SEXTRO [147] und GÖTTING [63] vorgeschlagenen Vorgehen, das auf der Annahme starrer Fußplatten beruht, werden hier unmittelbar die Eigenvektoren an den Referenzpunkten OL und OR verwendet, da die Fußplatten real ausgeführter Laufschaufeln mit kurzem Schaufelhals durchaus signifikante Verformungen erfahren. Einsetzen von Gl. (2.172) und Gl. (2.173) in Gl. (2.171) ergibt die für die Berechnung der Kontaktkräfte notwendigen Relativverschiebungen¹²

$$\begin{bmatrix} {}^{(k)}\hat{\boldsymbol{w}}_{\text{OL}} \\ {}^{(k)}\hat{\boldsymbol{w}}_{\text{OR}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -{}^{(k)}\mathbf{G}_{\text{SL}} {}^{(k)}\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\text{OL,G}} & {}^{(k)}\mathbf{G}_{\text{DL}} {}^{(k)}\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\text{OL',D}} \\ -{}^{(k)}\mathbf{G}_{\text{SR}} {}^{(k+1)}\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\text{OR,G}} & {}^{(k)}\mathbf{G}_{\text{DR}} {}^{(k)}\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\text{OR',D}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{q}}_{\text{G}} \\ {}^{(k)}\hat{\boldsymbol{q}}_{\text{D}} \end{bmatrix}. \quad (2.174)$$

Die Relativverschiebungen an allen Dämpfern $k = 1(1)n_{\text{S}}$ der beschaukelten Scheibe können in dem Vektor

$$\hat{\boldsymbol{w}} = \hat{\mathbf{G}}_{\boldsymbol{\Phi}} \hat{\boldsymbol{q}} \quad (2.175)$$

zusammengefasst werden mit der Matrix

$$\hat{\mathbf{G}}_{\boldsymbol{\Phi}} = \begin{bmatrix} -{}^{(1)}\mathbf{G}_{\text{SL}} {}^{(1)}\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\text{OL,G}} & {}^{(1)}\mathbf{G}_{\text{DL}} {}^{(1)}\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\text{OL',D}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -{}^{(1)}\mathbf{G}_{\text{SR}} {}^{(2)}\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\text{OR,G}} & {}^{(1)}\mathbf{G}_{\text{DR}} {}^{(1)}\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\text{OR',D}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & & \\ -{}^{(n_{\text{S}})}\mathbf{G}_{\text{SL}} {}^{(n_{\text{S}})}\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\text{OL,G}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^{(n_{\text{S}})}\mathbf{G}_{\text{DL}} {}^{(n_{\text{S}})}\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\text{OL',D}} \\ -{}^{(n_{\text{S}})}\mathbf{G}_{\text{SR}} {}^{(1)}\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\text{OR,G}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^{(n_{\text{S}})}\mathbf{G}_{\text{DR}} {}^{(n_{\text{S}})}\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\text{OR',D}} \end{bmatrix}, \quad (2.176)$$

die die modalen und Geometrie Größen aus Gl. (2.174) des Gesamtsystems enthält. Nach Berechnung der Kontaktsteifigkeitsmatrizen $\hat{\mathbf{K}}_{\text{K,OL}}$ und $\hat{\mathbf{K}}_{\text{K,OR}}$ gemäß Gl. (2.163) erfolgt eine Rücktransformation der physikalischen Kontaktkräfte in die zyklischen Koordinaten der Schaufel- bzw. Dämpferkoordinatensysteme und eine abschließende Transformation auf modale Koordinaten. Werden die Kontaktkräfte $\hat{\mathcal{F}}_{\text{K}}$ auf die linke Seite der Systemgleichung gebracht, ergibt sich das zu lösende nichtlineare algebraische Gleichungssystem

$$\left(\hat{\mathbf{S}} + \hat{\mathbf{K}}_{\text{K}}(\hat{\boldsymbol{q}}) \right) \hat{\boldsymbol{q}} = \hat{\mathcal{F}}_{\text{E}}. \quad (2.177)$$

Mit den Matrizen ${}^{(k)}\hat{\mathbf{K}}_{\text{K}}, k = 1(1)n_{\text{S}}$, nach Gl. (2.164) und der block-diagonalen Matrix

$$\hat{\mathbf{K}}_{\text{KG}} = \mathbf{bdiag} \left({}^{(1)}\hat{\mathbf{K}}_{\text{K}}, {}^{(2)}\hat{\mathbf{K}}_{\text{K}}, \dots, {}^{(n_{\text{S}})}\hat{\mathbf{K}}_{\text{K}} \right) \quad (2.178)$$

¹²Der Zählindex (k) bezieht sich auf die Schaufelnummer im Fall der segment- bzw. schaufelbezogenen Größen $\hat{\boldsymbol{q}}_{\text{S}}, \hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\text{OL,G}}$ und $\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\text{OR,G}}$, auf die Dämpfernummer für $\hat{\boldsymbol{q}}_{\text{D}}, \hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\text{OL',D}}$ und $\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\text{OR',D}}$ sowie auf die Kontakt nummer für die kontaktbezogenen Größen $\hat{\boldsymbol{w}}_{\text{OL}}, \hat{\boldsymbol{w}}_{\text{OR}}, \hat{\mathbf{K}}_{\text{K,OL}}, \hat{\mathbf{K}}_{\text{K,OR}}, \mathbf{G}_{\text{DL}}, \mathbf{G}_{\text{DR}}, \mathbf{G}_{\text{SL}}$ und \mathbf{G}_{SR} , vgl. **Bild 2.1** und **Bild 2.2**.

ergibt sich die von den Relativverschiebungen und somit den modalen Amplituden abhängige modale Systemkontaktsteifigkeitsmatrix

$$\hat{\mathcal{K}}_K(\hat{q}) = \hat{G}_\phi^H \hat{\mathcal{K}}_{KG} \hat{G}_\phi, \quad (2.179)$$

deren Struktur in Anhang C detailliert angegeben ist.

2.4.2 Sonderfälle

Die in Gl. (2.177) angegebene Systemgleichung lässt sich grundsätzlich für alle Systeme anwenden. Die modale Beschreibung der beschauelten Scheibe als Gesamtsystem ist im Allgemeinen aufgrund der großen Anzahl Freiheitsgrade aber weder praktikabel noch notwendig. Daher soll in den folgend dargestellten Sonderfällen auf Modifikationen und Vereinfachungen der Systemmatrix eingegangen werden. Diese umfassen

- den Fall entkoppelter Schaufeln,
- das unverstimmte zyklische System,
- das verstimmte System mit unverstimmter modaler Basis,
- die Kopplung der Schaufeln über ein geteiltes Deckband sowie
- die Kettenstruktur,

siehe auch die zusammenfassende Darstellung in **Bild 2.26**.

2.4.2.1 Entkoppelte Schaufeln

Für den Fall, dass die Radscheibe als starr angenommen werden kann, ergibt sich der besonders einfache Fall entkoppelter Schaufeln. Eine Kopplung tritt dann ausschließlich über die zusätzlich eingebrachten Koppellemente auf. Jede individuelle Schaufel kann somit als fest eingespannt angenommen werden, siehe **Bild 2.26b**, sodass die in Abschnitt 2.1.2 hergeleiteten Beziehungen für jede individuelle Schaufel angewandt werden können. In der Systemgleichung (2.177) treten dann an die Stelle der in Gl. (2.166) enthaltenen Matrix $\hat{\mathcal{S}}_G$ des gekoppelten Gesamtsystems die dynamischen Steifigkeitsmatrizen $^{(k)}\hat{\mathcal{S}}_S$ der einzelnen Schaufeln mit

$$\hat{\mathcal{S}}_G = \mathbf{diag} \left(^{(1)}\hat{\mathcal{S}}_S, ^{(2)}\hat{\mathcal{S}}_S, \dots, ^{(n_S)}\hat{\mathcal{S}}_S \right). \quad (2.180)$$

Für den Lösungsvektor aus Gl. (2.167) gilt entsprechend

$$\hat{q}_G = \left[^{(1)}\hat{q}_S^H \quad ^{(2)}\hat{q}_S^H \quad \dots \quad ^{(n_S)}\hat{q}_S^H \right]^H. \quad (2.181)$$

Die modalen Erregerkräfte $\hat{\mathcal{F}}_E$ sowie die Systemkontaktsteifigkeitsmatrix $\hat{\mathcal{K}}_K$ ergeben sich aus Gl. (2.169) und Gl. (2.179) durch den formalen Übergang der Modalmatrix $\hat{\Psi}_G$ aus Gl. (2.33) auf entkoppelte Schaufeln in der block-diagonalen Form

$$\hat{\Psi}_G = \mathbf{bdiag} \left(^{(1)}\hat{\Phi}_S, ^{(2)}\hat{\Phi}_S, \dots, ^{(n_S)}\hat{\Phi}_S \right). \quad (2.182)$$

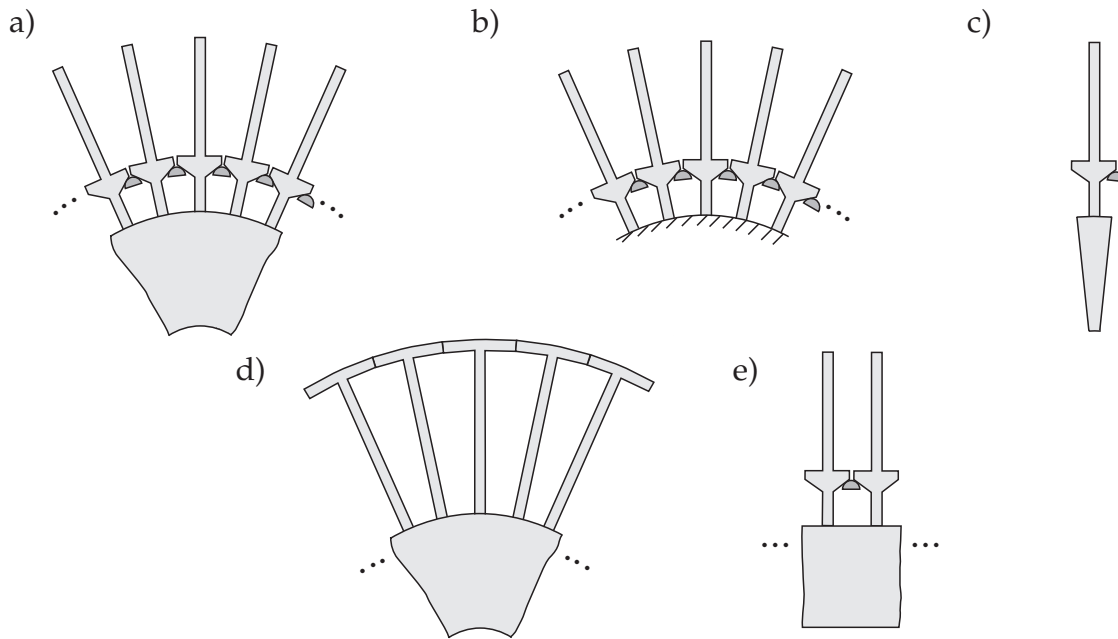


Bild 2.26: Verschiedene Systemtypen: a) Gesamtsystem der beschaufelten Scheibe; b) entkoppelte Schaufeln; c) zyklisches Segment; d) Deckbandkopplung; e) Kettenstruktur

Die benötigten Relativverschiebungen im Kontakt (k) ergeben sich nach Einsetzen von Gl. (2.182) in Gl. (2.33) und Gl. (2.174) aus

$$\begin{bmatrix} {}^{(k)}\hat{w}_{OL} \\ {}^{(k)}\hat{w}_{OR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -{}^{(k)}\mathbf{G}_{SL} & {}^{(k)}\hat{\boldsymbol{\phi}}_{OL,G} & \mathbf{0} & {}^{(k)}\mathbf{G}_{DL} & {}^{(k)}\hat{\boldsymbol{\phi}}_{OL',D} \\ \mathbf{0} & -{}^{(k)}\mathbf{G}_{SR} & {}^{(k+1)}\hat{\boldsymbol{\phi}}_{OR,G} & {}^{(k)}\mathbf{G}_{DR} & {}^{(k)}\hat{\boldsymbol{\phi}}_{OR',D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{(k)}\hat{q}_S \\ {}^{(k+1)}\hat{q}_S \\ {}^{(k)}\hat{q}_D \end{bmatrix}. \quad (2.183)$$

Diese Beziehungen gelten grundsätzlich sowohl für das unverstimmte als auch das verstimmte System mit der Möglichkeit, die Geometrie-, die Modal- und/oder die Kontaktsteifigkeitsmatrizen individuell zu besetzen.

2.4.2.2 Unverstimmtes zyklisches System

Für den Fall des unverstimmten Systems lässt sich die in Abschnitt 2.1.3 erläuterte besondere Eigenschaft der Eigenvektoren eines zyklischen Systems problemlos auf den Fall einer über Reibelemente gekoppelten Beschaufelung übertragen. Anstelle der Modellierung des Gesamtmodells mit entsprechender Systemmatrix $\hat{\mathbf{S}}_G$, Modalmatrix $\hat{\boldsymbol{\Psi}}_G$ und modalen äußeren Kräften $\hat{\mathcal{F}}_G$, vgl. Gl. (2.31) und Gl. (2.33), kann in diesem Fall ein den gesamten Schaufelkranz repräsentierendes Segment bestehend aus Schaufel, Scheibensegment und Reibelement betrachtet werden, siehe **Bild 2.26c**. Der Erregerkraftvektor beinhaltet ausschließlich die Freiheitsgrade eines Segmentes. Ebenso kann die Modalmatrix $\hat{\boldsymbol{\Psi}}_G$ auf die eines Segmentes mit ${}^{(1)}\hat{\boldsymbol{\phi}}_G$ reduziert werden, vgl. Gl. (2.33). Die Modalmatrix ${}^{(1)}\hat{\boldsymbol{\phi}}_G$ kann unter Berücksichtigung der Gestalt der äußeren Erregung, wie im Folgenden erläutert, weiter reduziert werden.

Mit der in Gl. (2.91) gegebenen monofrequenten äußeren Erregung lassen sich nur Schwingungsformen bestimmter Knotendurchmesser ND der rotierenden beschauelten Scheibe anregen. Diese müssen der Bedingung

$$ND = \begin{cases} EO - k n_S, & k n_S \leq EO < (k + \frac{1}{2}) n_S, \\ (k + 1) n_S - EO, & (k + \frac{1}{2}) n_S \leq EO < (k + 1) n_S, \quad k = 0(1)\infty, \end{cases} \quad (2.184)$$

genügen, vgl. auch Gl. (3.13) und die detaillierten Erläuterungen zum untersuchten Referenzsystem in Abschnitt 3.6.1. Aufgrund der Orthogonalität bzw. Unitarität der Erregung und aller Schwingungsformen, die Gl. (2.184) nicht erfüllen, werden diese modalen Erregerkräfte zu null. Die Modalmatrix ${}^{(1)}\hat{\Phi}_G$ aus Gl. (2.33) kann somit bei gegebener Erregerordnung EO auf die durch genau einen bestimmten Knotendurchmesser ND charakterisierten Schwingungsformen weiter reduziert werden. Im Fall doppelter Eigenwerte ist zu entscheiden, ob die in Abschnitt 2.1.3 diskutierte vorwärts oder rückwärts rotierende Schwingungsform berücksichtigt werden muss. Dies folgt unmittelbar aus Gl. (2.184): Erfüllt die Erregerordnung die erste Zeile von Gl. (2.184), so wird ausschließlich die rückwärts rotierende Schwingungsform angeregt. Ist die Bedingung der zweiten Zeile erfüllt, handelt es sich um die vorwärts rotierende Schwingungsform des Knotendurchmessers ND , vgl. auch das in Abschnitt 3.6.1 diskutierte Knotendiagramm des Referenzsystems. In diesem Zusammenhang ist zu erwähnen, dass es im Allgemeinen *nicht* gleichgültig ist, ob die vorwärts oder rückwärts rotierende Eigenform berücksichtigt wird, wie im Folgenden kurz am linearen zyklischen System ohne Koppellemente skizziert werden soll. Allgemein ergibt sich die Schwingungsamplitude \hat{u}_i eines Freiheitsgrades i des mit Hilfe von n_M Eigenformen modal beschriebenen, aus n_{Seg} Freiheitsgraden bestehenden Segments aus

$$\hat{u}_i = \sum_{m=1}^{n_M} \sum_{j=1}^{n_{\text{Seg}}} \underbrace{\hat{\phi}_{i,m} \hat{\phi}_{j,m}^H}_{\hat{\kappa}_{ij,m}} \underbrace{\frac{1}{\omega_m^2 - \Omega_E^2 + i 2D_m \omega_m \Omega_E}}_{\hat{s}_m^{-1}} \hat{f}_{E,j} \quad (2.185)$$

mit den in der Modalmatrix ${}^{(1)}\hat{\Phi}_{ND+1}$ nach Gl. (2.40) enthaltenen Eigenvektoren $\hat{\phi}_{i,m}$ und $\hat{\phi}_{j,m}$, $m = 1(1)n_M$, der Freiheitsgrade i und j . Wird ein zyklisches Segment betrachtet, ergibt sich aufgrund der Kürzung des Erregerkraftvektors auf die n_{Seg} Freiheitsgrade des Segments nicht zwangsläufig die Orthogonalität zur Erregung derjenigen Schwingungsformen, für die Gl. (2.184) nicht erfüllt ist. Entsprechend der Erregerordnung EO ist hier eine Auswahl der anregbaren Schwingungsformen zu treffen. Werden anstelle der nach Gl. (2.184) auszuwählenden Schwingungsformen $\hat{\phi}_{i,m}$ die zugehörigen konjugiert komplexen Schwingungsformen $\hat{\phi}_{i,m}^*$ verwendet, ergeben sich in Gl. (2.185) aufgrund der identischen Eigenwerte unveränderte Faktoren $\hat{s}_m^{-1} \hat{f}_{E,j}$, die jedoch für verschiedene Moden m gegeneinander phasenverschoben sein können. Die anschließende Multiplikation mit $\hat{\kappa}_{ij,m}^*$ anstelle von $\hat{\kappa}_{ij,m}$ ergibt in der komplexen Ebene eine Drehstreckung mit vertauschten Vorzeichen des Drehwinkels. Dieser Sachverhalt ist in **Bild 2.27** für einen Freiheitsgrad $i = j = 1$ beispielhaft skizziert. Aufgrund der Superposition der Anteile verschiedener Schwingungsformen stellen sich durch die Verwendung der konjugiert kom-

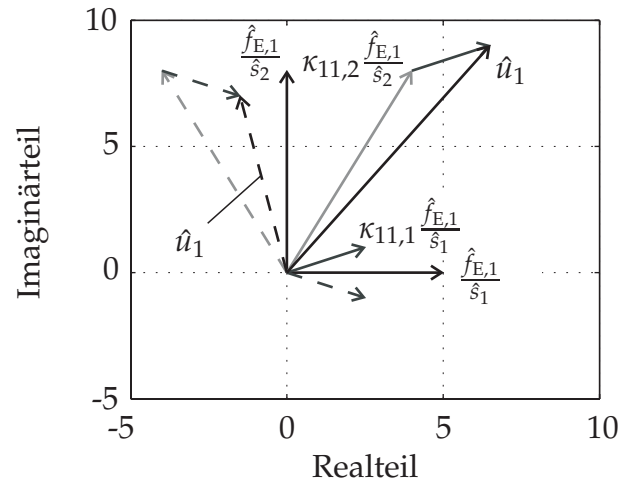


Bild 2.27: Zeigerdarstellung der komplexen Verschiebung \hat{u}_1 als Summe der Verschiebungsanteile zweier Eigenformen: Verwendung der Eigenvektoren $\hat{\phi}_{1,m}$ (durchgezogene Linien) und $\hat{\phi}_{1,m}^*$ (gestrichelte Linien)

plexen Eigenvektoren $\hat{\phi}_{1,m}^*$ anstelle von $\hat{\phi}_{1,m}$ somit abweichende Verschiebungen \hat{u}_1 ein¹³. In der Konsequenz bedeutet dies, dass die Schwingungsamplituden für die Erregerordnungen $EO = EO^*$ und $EO = n_S - EO^*$, die qualitativ identische Schwingungsmoden anregen, nicht immer exakt identisch sind. In der Praxis wird diese Abweichung relativ gering sein, da

- eine signifikante, von $\vartheta = 0^\circ$ und $\vartheta = 180^\circ$ verschiedene Lage der modalen Amplituden bei schwach gedämpften Systemen nur nahe der Eigenfrequenz eines Schwingungsmodes zu erwarten ist, wo aber der Einfluss weiterer Schwingungsformen ohnehin gering ist, sodass diese bei einer Superposition nur von untergeordneter Bedeutung sind,
- die komplexen Schwingungsformen nur geringe Phasenverschiebungen an den Schaufelblatfreiheitsgraden aufweisen, da sich die Einführung komplexer Zwangsbedingungen an den Segmenträndern im Bereich des Schaufelfußes und -blattes im Allgemeinen nur noch schwach auswirkt,
- der komplexe Erregerkraftvektor \hat{f}_E für die Freiheitsgrade eines Segments nur geringe Phasendifferenzen ψ_{EO} , vgl. Abschnitt 2.2.2, zwischen den einzelnen Freiheitsgraden aufweist.

Die Systemmatrix des zyklischen Segments mit Koppellementen setzt sich aus der dynamischen Steifigkeitsmatrix ⁽¹⁾ $\hat{\mathcal{S}}_{\text{Seg}}$, die die Eigenfrequenzen der berücksichtigten Schwingungsmoden des Schaufel-Scheibe-Segments enthält, sowie der gegenüber Gl. (2.166) auf einen repräsentativen Dämpfer reduzierten dynamischen Steifigkeitsmatrix der Dämpferelemente zusammen,

$$\hat{\mathcal{S}} = \text{diag} \left({}^{(1)}\hat{\mathcal{S}}_{\text{Seg}}, {}^{(1)}\hat{\mathcal{S}}_{\text{D}} \right). \quad (2.186)$$

¹³Die Berücksichtigung phasenverschobener Erregerkräfte an verschiedenen Freiheitsgraden hat als Folge der Superposition den gleichen Effekt.

Die Matrix ${}^{(1)}\hat{\mathcal{S}}_{\text{Seg}}$ ist grundsätzlich mit der Matrix $\hat{\mathcal{S}}_G$ aus Gl. (2.166) identisch. Die benötigten Eigenwerte lassen sich nach Anhang B.5 aber sehr viel einfacher unter Ausnutzung der zyklischen Symmetrie bestimmen. Die im Lösungsvektor berücksichtigten modalen Freiheitsgrade lassen sich entsprechend mit

$$\hat{\mathbf{q}} = \left[{}^{(1)}\hat{\mathbf{q}}_{\text{Seg}}^H \quad {}^{(1)}\hat{\mathbf{q}}_D^H \right]^H \quad (2.187)$$

angeben. Der in Gl. (2.91) angegebene Erregerkraftvektor des Gesamtsystems vereinfacht sich bei der Betrachtung eines Segments auf

$$\hat{\mathbf{f}}_E = {}^{(1)}\hat{\mathbf{f}}_E. \quad (2.188)$$

Entsprechend müssen die um den Faktor $\sqrt{n_S}$ größeren, auf die komplexe Massenmatrix des zyklischen Segments normierten Eigenvektoren $\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\text{Seg}}$ anstelle der in Gl. (2.33) gegebenen Modalmatrizen $\hat{\boldsymbol{\Phi}}_G$ verwendet werden, siehe auch die Erläuterungen zur Eigenvektornormierung in Gl. (B.69) in Anhang B.6. Die modalen Erregerkräfte lauten dann

$$\hat{\mathcal{F}}_E = \hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\text{Seg}}^H {}^{(1)}\hat{\mathbf{f}}_E. \quad (2.189)$$

Die für die Berechnung der Kontaktkräfte notwendigen Relativverschiebungen im Kontakt (1) ergeben sich dann aus den Verschiebungen der Schaufeln (1) und (2) sowie des Dämpfers (1) unter Zuhilfenahme der Besonderheit der Eigenvektoren des zyklischen Systems aus Gl. (2.33) und Gl. (2.40) für eine gegebene Erregerordnung EO aus

$$\begin{bmatrix} {}^{(1)}\hat{\mathbf{w}}_{\text{OL}} \\ {}^{(1)}\hat{\mathbf{w}}_{\text{OR}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{G}_{\text{SL}} \hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\text{OL,Seg}} & \mathbf{G}_{\text{DL}} \hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\text{OL',D}} \\ -e^{-i EO \delta} \mathbf{G}_{\text{SR}} \hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\text{OR,Seg}} & \mathbf{G}_{\text{DR}} \hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\text{OR',D}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{(1)}\hat{\mathbf{q}}_{\text{Seg}} \\ {}^{(1)}\hat{\mathbf{q}}_D \end{bmatrix}. \quad (2.190)$$

Die Systemkontaktsteifigkeitsmatrix setzt sich somit aus

$$\hat{\mathcal{K}}_K = \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{K}}_{K,\text{SegSeg}} & e^{i EO \delta} \hat{\mathcal{K}}_{K,\text{SegD}} \\ e^{-i EO \delta} \hat{\mathcal{K}}_{K,\text{DSeg}} & \hat{\mathcal{K}}_{K,\text{DD}} \end{bmatrix} \quad (2.191)$$

zusammen mit den analog zu Gl. (C.2) bis (C.5) in Anhang C formulierten Submatrizen, wobei anstelle des Index 'G' der Index 'Seg' tritt und die Zählindizes der Geometriematrizen \mathbf{G} , der Kontaktsteifigkeitsmatrizen $\hat{\mathcal{K}}_K$ und der Modalmatrizen $\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\text{Seg}}$ und $\hat{\boldsymbol{\Phi}}_D$ sowie auch der dynamischen Steifigkeitsmatrix $\hat{\mathcal{S}}_{\text{Seg}}$ aus Gl. (2.186) aufgrund der zyklischen Symmetrie entfallen. Die Matrix $\hat{\mathcal{K}}_K$ weist damit eine vergleichbare Struktur wie die komplexe Steifigkeitsmatrix eines zyklischen Segments auf, vgl. Gl. (B.65) in Anhang B.6.

2.4.2.3 Verstimmte beschaufelte Scheibe

Die Entwicklung der Gesamtgleichung des verstimmten Systems folgt grundsätzlich dem in Abschnitt 2.4.1 beschriebenen Vorgehen. Dabei entspricht die in Gl. (2.166) angegebene Matrix $\hat{\mathcal{S}}_G$ der in Abschnitt 2.1.4 hergeleiteten dynamischen Steifigkeitsmatrix $\hat{\mathcal{S}}_G^{\text{verst}}$ des verstimmten Systems aus Gl. (2.54). Der modal transformierte Erregerkraftvektor $\hat{\mathcal{F}}_{G,E}$ ergibt sich aus Gl. (2.169). Aufgrund der Orthogonalität ist der Vektor $\hat{\mathcal{F}}_{G,E}$ nur an denjenigen Positionen besetzt, für die die in Gl. (2.184) angegebene Bedingung erfüllt ist, sodass für das unverstimmte System in der Modalmatrix $\hat{\boldsymbol{\Psi}}_G$ nur die Eigenformen der

entsprechenden Knotendurchmesser berücksichtigt werden müssen, siehe hierzu die Erläuterungen auf Seite 89. Im Fall des verstimmt Systems muss die Matrix $\hat{\Psi}_G$ jedoch alle in Gl. (2.33) angegebenen Schwingungsformen enthalten, da zwar der modale Erregerkraftvektor $\hat{\mathcal{F}}_{G,E}$ dem des unverstimmt Systems entspricht, die Matrix $\hat{\mathcal{S}}_G^{\text{verst}}$ des verstimmt Systems aber im Gegensatz zu der Matrix $\hat{\mathcal{S}}_G$ des unverstimmt Systems keine Diagonalstruktur aufweist. Die hieraus resultierende Kopplung führt im verstimmt System zu einer Anregung von Schwingungsformen verschiedener Knotendurchmesser, auch solcher, die nach Gl. (2.184) nicht der Erregerordnung EO entsprechen, wie in **Bild 2.10** gezeigt wurde.

2.4.2.4 Deckbandkopplung

Einen Sonderfall hinsichtlich der Kontaktkinematik stellt die Kopplung der Schaufeln über ein geteiltes Deckband anstelle von Reibelementen dar. Das Deckband bewirkt im Gegensatz zu einem zusätzlichen Reibkörper eine unmittelbare Kopplung benachbarter Schaufeln, siehe **Bild 2.26d**. Alle in den vorausgehenden Betrachtungen enthaltenen reibelementbezogenen Größen wie die dynamischen Steifigkeitsmatrizen $\hat{\mathcal{S}}_D$ der Dämpfer, die modalen Amplituden \hat{q}_D und die Geometriematrizen G_D werden im Fall einer Deckbandkopplung nicht berücksichtigt, sodass sich die Systemmatrix $\hat{\mathcal{S}}$ nach Gl. (2.166), der Lösungsvektor \hat{q} nach Gl. (2.167) und die modal transformierten Erregerkräfte $\hat{\mathcal{F}}_E$ nach Gl. (2.168) in entsprechend verkürzter Form ergeben. Die in einem Kontakt (k) zwischen den Deckplatten auftretenden Relativverschiebungen lassen sich unmittelbar aus den Absolutverschiebungen der Kontaktpreferenzpunkte zweier benachbarter Schaufeln ermitteln. Unter Berücksichtigung von Gl. (2.11) und Gl. (2.12) ergibt sich

$${}^{(k)}\hat{w}_{OL} = {}^{(k)}G_{SL} \left(N_S {}^{(k+1)}\hat{\phi}_{OR,G} - {}^{(k)}\hat{\phi}_{OL,G} \right) \hat{q}_G. \quad (2.192)$$

Formal ergeben sich die betragsgleichen Relativverschiebungen in dem Koordinatensystem KR des 'rechten' Kontaktes aus

$${}^{(k)}\hat{w}_{OR} = -N_K {}^{(k)}\hat{w}_{OL}. \quad (2.193)$$

Die in Gl. (2.179) angegebene Systemkontaktsteifigkeitsmatrix vereinfacht sich für den Fall der Deckbandkopplung zu

$$\hat{\mathcal{K}}_K = \sum_{k=1}^{n_S} \left({}^{(k)}\hat{\phi}_{OL,G}^H - {}^{(k+1)}\hat{\phi}_{OR,G}^H N_S^T \right) {}^{(k)}G_{SL}^T {}^{(k)}\hat{\mathcal{K}}_{K,OL} {}^{(k)}G_{SL} \left({}^{(k)}\hat{\phi}_{OL,G} - N_S {}^{(k+1)}\hat{\phi}_{OR,G} \right), \quad (2.194)$$

vgl. auch Gl. (C.1) in Anhang C.

Aus Gl. (2.192) und Gl. (2.194) wird unmittelbar deutlich, dass ein ungeteiltes Deckband, für das $N_S {}^{(k+1)}\hat{\phi}_{OR,G} = {}^{(k)}\hat{\phi}_{OL,G}$ gelten muss, zu keinen Relativbewegungen und somit zu einer Systemkontaktsteifigkeitsmatrix $\hat{\mathcal{K}}_K = \mathbf{0}$ führt. Die Kopplung zwischen den Schaufeln ist dann direkt in den Schwingungsmoden der linearen Struktur enthalten, die sich für die unverstimmt Schaufel wiederum unter Ausnutzung zyklischer Randbedingungen bestimmen lassen. Die obigen Formulierungen gelten mit den in diesem Abschnitt hergeleiteten Modifikationen auch für die genannten Sonderfälle mit einem geteilten Deckband als Koppellement.

2.4.2.5 Kettenstruktur

Das in **Bild 2.26e** dargestellte System mit Kettenstruktur unterscheidet sich in einigen Punkten von den bisher betrachteten zyklischen Systemen: Zunächst entfällt aufgrund der offenen Kettenstruktur der vereinfachende Fall des zyklischen Segments mit identischen, sich wiederholenden Segmenten, sodass im Allgemeinen die Untersuchung der Gesamtstruktur erforderlich ist. Weiterhin muss die äußere Erregung nicht zwangsläufig der in Gl. (2.91) angegebenen Gestalt folgen, da die Kettenstruktur einer beliebigen Erregung ausgesetzt sein kann. Verschiedene der insgesamt n_S Schaufeln können somit auch unterschiedliche Erregerkräfte erfahren, sodass

$$\hat{f}_E = \left[{}^{(1)}\hat{f}_E^H \ {}^{(2)}\hat{f}_E^H \ \dots \ {}^{(n_S)}\hat{f}_E^H \right]^H \quad (2.195)$$

gilt¹⁴, siehe auch Abschnitt 4.1. Die Systemkontaktsteifigkeitsmatrix $\hat{\mathcal{K}}_K$ einer Kettenstruktur ergibt sich durch Öffnen des letzten Kontaktes n_S , d. h. die Kopplung zwischen der Schaufel n_S und der Schaufel 1 entfällt. Formal wird dies durch Nullsetzen der letzten Hyperzeile und der letzten Hyperspalte der Systemkontaktsteifigkeitsmatrix $\hat{\mathcal{K}}_K$ aus Gl. (2.179) erreicht. Grundsätzlich lässt sich die Kettenstruktur wie auch die zyklische Struktur über das gekoppelte Gesamtsystem oder auch auf der Basis entkoppelter Teilsysteme unter Berücksichtigung der entsprechenden Modifikationen beschreiben.

2.4.3 Lösung der Systemgleichung

Die Systemgleichung hat stets die in Gl. (2.177) angegebene Struktur, die im Gegensatz zu obigen Ausführungen an dieser Stelle zunächst nicht zwangsläufig auf die Berücksichtigung monofrequenter Anregung und Schwingungsantwort beschränkt sein soll. Das allgemeine Vorgehen auch bei Berücksichtigung höher Harmonischer zeigt **Bild 2.28**. Die als Systemeingang definierten zeitvarianten äußeren Erregerkräfte $f_E(t)$ sowie die nichtlinearen Kontaktkräfte $f_K(t)$ werden als periodisch angenommen. Der Übergang vom Zeit- in den Frequenzbereich erfolgt über die FFT-Analyse der resultierenden Kräfte $f(t)$, die n_H Harmonische beinhaltet. Aufgrund der angenommenen Linearität der Gesamtstruktur ohne Koppellelemente lassen sich die modalen Amplituden $\hat{q}_n, n = 1(1)n_H$, im Frequenzbereich superponieren, sodass sich nach Anwendung der Modaltransformation mit der Modalmatrix $\hat{\Phi}$ die Relativverschiebungen $w(t)$ in den Kontakten sowie die als Systemausgang definierten Absolutverschiebungen $u(t)$ ergeben. Aus den Relativverschiebungen $w(t)$ ergeben sich gemäß den in Abschnitt 2.3 hergeleiteten Beziehungen die Kontaktkräfte $f_K(t)$.

Im Fall monofrequenter Kräfte und Verschiebungen lässt sich der nichtlineare Zusammenhang zwischen Relativverschiebungen $w(t)$ und Kontaktkräften $f_K(t)$ durch die

¹⁴Eine auf diese Weise definierte beliebige Erregung kann auch genutzt werden, um nicht rotierende beschaufelte Scheiben zu untersuchen, die zwar eine zyklische Struktur aufweisen, im Gegensatz zu den obigen Annahmen aber aufgrund einer beliebigen Anregung mehrere anregbare Schwingungsformen verschiedener Knotendurchmesser aufweisen.

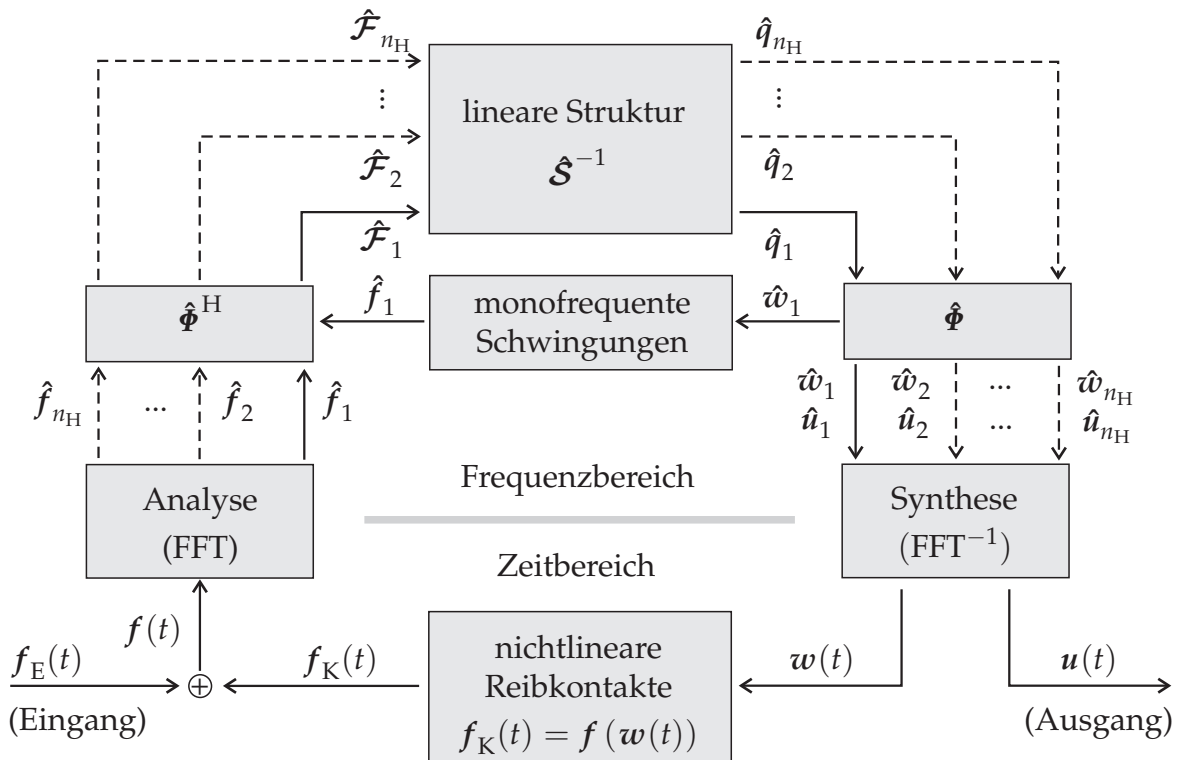


Bild 2.28: Nichtlineares Gesamtsystem für allgemeine periodische Schwingungen

a priori-Berechnung der nach Gl. (2.130) und Gl. (2.155) harmonisch linearisierten Ersatzsteifigkeiten und -dämpfungen nach der Einführung komplexer Größen sofort im Frequenzbereich ohne den Übergang in den Zeitbereich darstellen. Die im Sinne einer möglichst effizienten, schnellen Berechnung der Schwingungsantwort störende numerische Zeitschrittintegration zur Bestimmung des Zusammenhangs $f_K(t) = f(w(t))$ innerhalb des Simulationsprogramms entfällt somit. Sollen die in **Bild 2.28** gestrichelt dargestellten höher harmonischen Anteile berücksichtigt werden, ist eine direkte Zuordnung zwischen den Relativverschiebungen \hat{w}_n und Kontaktkräften $\hat{f}_{K,n}$ einzelner Harmonischer n im Allgemeinen nicht möglich, da zur korrekten Bestimmung der Umschaltzeitpunkte zwischen Haften und Gleiten der exakte zeitliche Verlauf der Relativverschiebungen $w(t)$ zunächst aus den einzelnen Frequenzanteilen überlagert werden muss. Somit lassen sich zwar ebenfalls komplexe Ersatzsteifigkeiten \hat{k}_n für jede Harmonische n bestimmen, diese sind aber von *allen* in den Relativverschiebungen $w(t)$ enthaltenen Harmonischen $\hat{w}_n, n = 1(1)n_H$, abhängig, d. h. $\hat{k}_n = f(|\hat{w}_1|, |\hat{w}_2|, \dots, |\hat{w}_{n_H}|)$. Da neben den Amplituden $|\hat{w}_n|$ auch die Phasenlage der einzelnen Harmonischen der Relativbewegungen zueinander berücksichtigt werden muss, erscheint eine a priori-Berechnung schon für den eindimensionalen Fall aufgrund der großen Anzahl möglicher Kombinationen nicht sinnvoll, sodass eine zeitintensive Berechnung innerhalb jeder Iterationsschleife erforderlich wäre.

Dieses Vorgehen wird von BRUNS [21] zur Parameteridentifikation in nichtlinearen Schwingungssystemen am Beispiel des in Abschnitt 4.1 beschriebenen Schaufelmodells vorgeschlagen, indem eindimensionale Relativverschiebungen betrachtet werden. Hö-

her harmonische Anteile in den Kontaktkräften werden abschnittsweise für allgemeine, periodische Relativverschiebungen nach einer numerischen Ermittlung der Haft-Gleit-Umschaltunkte ermittelt. In diesem Zusammenhang berichtet SIEWERT [157] von numerischen Instabilitäten eines zu diesem Zweck von WANG UND CHEN [172] vorgeschlagenen Verfahrens, die schon bei der iterativen Bestimmung der Umschaltunkte für nur eine berücksichtigte höher Harmonische in den eindimensional angenommenen Relativverschiebungen $w(t)$ auftreten. Dieser zusätzlichen, zeitintensiven numerischen Iteration steht im Fall der Berücksichtigung dreidimensionaler Schaufelschwingungen mit mehreren Freiheitsgraden im Kontakt die Forderung nach einer möglichst effizienten Berechnung realer Schaufelkränze entgegen. Dies gilt insbesondere für die Behandlung verstimpter Systeme mit einer großen Anzahl Freiheitsgrade. Im Sinne eines Kompromisses aus Genauigkeit und praktischer Anwendbarkeit werden im Folgenden die *höher harmonischen Anteile vernachlässigt* und es werden ausschließlich monofrequente Schwingungen betrachtet.

Um die in Gl. (2.177) gegebene, auf der Basis monofrequenter Schwingungen anzugebende, komplexe, nichtlineare Systemgleichung einer Lösung mit rein reell formulierten Standardalgorithmen für nichtlineare Gleichungssysteme zugänglich zu machen, wird Gl. (2.177) zunächst in eine reelle Form überführt. Hierzu wird jedes komplexe Matrix- bzw. Vektorelement durch eine reelle $[2 \times 2]$ -Submatrix bzw. einen reellen $[2 \times 1]$ -Subvektor ersetzt. Mit

$$\hat{a}_{ij} = \text{Re}\{\hat{a}_{ij}\} + i \text{Im}\{\hat{a}_{ij}\} \Rightarrow a_{ij}^* = \begin{bmatrix} \text{Re}\{\hat{a}_{ij}\} & -\text{Im}\{\hat{a}_{ij}\} \\ \text{Im}\{\hat{a}_{ij}\} & \text{Re}\{\hat{a}_{ij}\} \end{bmatrix} \quad (2.196)$$

bzw.

$$\hat{b}_i = \text{Re}\{\hat{b}_i\} + i \text{Im}\{\hat{b}_i\} \Rightarrow b_i^* = \begin{bmatrix} \text{Re}\{\hat{b}_i\} \\ \text{Im}\{\hat{b}_i\} \end{bmatrix} \quad (2.197)$$

ergibt sich ein rein reelles Gleichungssystem doppelter Dimension mit

$$\left(\mathbf{S}^* + \mathbf{K}_K^*(q^*) \right) q^* = \mathcal{F}_E^*. \quad (2.198)$$

Zur Unterscheidung werden für die folgenden Ausführungen die reell ausgedrückten komplexen Größen durch den Index $()^*$ gekennzeichnet¹⁵. Zur Lösung von Gl. (2.198) wird das gedämpfte NEWTON-Verfahren angewandt, siehe u. a. ENGELN-MÜLLGES UND REUTER [47], welches erfolgreich u. a. von BALMER [8] und SEXTRO [147] zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme eingesetzt wurde. Nach Berechnung des Defektvektors

$${}^{(j)}\mathbf{D}^* = \left(\mathbf{S}^* + \mathbf{K}_K^* \left({}^{(j)}q^* \right) \right) {}^{(j)}q^* - \mathcal{F}_E^* \quad (2.199)$$

für den Iterationsschritt (j) erfolgt die Berechnung des neuen Lösungsvektors ${}^{(j+1)}q^*$ für

¹⁵Aus Gl. (2.196) wird unmittelbar deutlich, dass die Transposition einer nach Gl. (2.196) dargestellten komplexen Matrix in rein reeller Form unmittelbar auf die hermitesch transponierte Matrix führt, d. h. $(\hat{\cdot})^H = (\cdot)^{*T}$.

das Standard-NEWTON-Verfahren aus

$${}^{(j+1)}\mathbf{q}^* = {}^{(j)}\mathbf{q}^* - {}^{(j)}\Delta\mathbf{q}^* \quad (2.200)$$

mit dem aus

$${}^{(j)}\mathbf{J}^* {}^{(j)}\Delta\mathbf{q}^* = {}^{(j)}\mathbf{D}^* \quad (2.201)$$

berechneten Differenzvektor ${}^{(j)}\Delta\mathbf{q}^*$. Die Matrix

$${}^{(j)}\mathbf{J}^* = \left. \frac{d\mathbf{D}^*}{d\mathbf{q}^{*\top}} \right|_{\mathbf{q}^* = {}^{(j)}\mathbf{q}^*} = \mathbf{S}^* + \mathcal{K}_{\mathbf{K}}^* \left({}^{(j)}\mathbf{q}^* \right) + \left. \frac{d\mathcal{K}_{\mathbf{K}}^* \left(\mathbf{q}^* \right)}{d\mathbf{q}^{*\top}} \right|_{\mathbf{q}^* = {}^{(j)}\mathbf{q}^*} {}^{(j)}\mathbf{q}^* \quad (2.202)$$

kennzeichnet die $[2n_{\mathbf{M}} \times 2n_{\mathbf{M}}]$ -JACOBI-Matrix mit der Gesamtanzahl berücksichtigter Moden $n_{\mathbf{M}}$. Die Berechnung der partiellen Ableitungen des zweiten Terms der JACOBI-Matrix ist insbesondere aufgrund der durchgeführten Diskretisierung der Kontaktfläche und der komplexen Zusammenhänge zwischen den modalen Amplituden und den Punktkontaktsteifigkeiten u. a. über den in Gl. (2.152) definierten Transformationswinkel numerisch relativ aufwändig und erfordert die Formulierung zusätzlicher Matrizenmultiplikationen. Die Erfahrung hat gezeigt, dass eine Approximation der JACOBI-Matrix durch den ohnehin bei der Bestimmung der Systemgleichung berechneten ersten Term mit

$${}^{(j)}\mathbf{J}^* \approx \mathbf{S}^* + \mathcal{K}_{\mathbf{K}}^* \left({}^{(j)}\mathbf{q}^* \right) \quad (2.203)$$

im Allgemeinen ausreichend ist, ohne dass das Konvergenzverhalten entscheidend nachteilig beeinflusst wird. Zur Lösung von Gl. (2.201) wird eine LU-Zerlegung der JACOBI-Matrix anstelle ihrer Inversen genutzt. Abweichend vom Standard-NEWTON-Verfahren wird der neue Lösungsvektor ${}^{(j+1)}\mathbf{q}^*$ zunächst nach dem Schema

$${}^{(j+1)}\mathbf{q}^* = {}^{(j)}\mathbf{q}^* - \frac{1}{2^m} {}^{(j)}\Delta\mathbf{q}^*, \quad m = 0(1)m_{\max}, \quad (2.204)$$

modifiziert, bis die Bedingung

$$\| {}^{(j+1)}\mathbf{D}^*(m) \| \rightarrow \text{Min} \quad (2.205)$$

erfüllt ist. Erst dann wird mit dem auf diese Weise bestimmten so genannten Dämpfungsparameter m der neue Lösungsvektor akzeptiert. Das iterative Verfahren wird mit der Lösung der modalen Amplituden ${}^{(j)}\mathbf{q}^*$ abgebrochen, wenn eines der folgenden Konvergenzkriterien erfüllt ist:

$$\| {}^{(j)}\mathbf{D}^* \| < \varepsilon_{\text{abs}}, \quad (2.206)$$

$$\| {}^{(j)}\mathbf{q}^* - {}^{(j-1)}\mathbf{q}^* \| < \varepsilon_{\text{abs}} \quad (2.207)$$

oder

$$\frac{\| {}^{(j)}\mathbf{q}^* - {}^{(j-1)}\mathbf{q}^* \|}{\| {}^{(j-1)}\mathbf{q}^* \|} < \varepsilon_{\text{rel}}, \quad (2.208)$$

wobei ε_{abs} und ε_{rel} zu definierende absolute und relative Fehlertoleranzen sind. Als guten Kompromiss aus Rechenzeit und Genauigkeit der Lösung haben sich $\varepsilon_{\text{abs}} = 10^{-20}$ und

$\varepsilon_{\text{rel}} = 10^{-4}$ bewährt. Eine Möglichkeit der Kontrolle des iterativ bestimmten Lösungsvektors $\hat{\boldsymbol{q}}$ besteht in der Überprüfung der Energiebilanz im eingeschwungenen Zustand, siehe Abschnitt 3.6.2.2.

Werden die Reibelemente als Starrkörper betrachtet, ist es grundsätzlich auch möglich, die in dem Lösungsvektor $\hat{\boldsymbol{q}}$ enthaltenen Starrkörperfreiheitsgrade auf der Basis des am Reibelement herrschenden Kräftegleichgewichts aus dem Lösungsvektor zu eliminieren, sodass sich unmittelbar ein funktionaler Zusammenhang $\hat{\boldsymbol{w}}_{\text{OL}} = \hat{\boldsymbol{w}}_{\text{OL}}(\hat{\boldsymbol{u}}_{\text{OL}})$ zwischen Relativ- und Absolutverschiebungen der Fußplatten ergibt. Für symmetrische, zylinderförmige, masselose Reibelemente gibt SEXTRO [147] eine einfache, lineare Lösung der Funktion $\hat{\boldsymbol{w}}_{\text{OL}}(\hat{\boldsymbol{u}}_{\text{OL}})$ an. Für beliebige Reibelemente ergibt sich ein nichtlinear von den Absolutverschiebungen $\hat{\boldsymbol{u}}_{\text{OL}}$ abhängiger Zusammenhang, der von PANNING ET AL. [118] zur Berechnung keilförmiger Reibelemente einschließlich Reibelementträgheit angegeben und später auch von GÖTTING [63] genutzt wird. Formal werden zu diesem Zweck die modalen Freiheitsgrade jedes Reibelements (k) aus der Bedingung des Kräftegleichgewichts aus Gl. (2.177) extrahiert,

$${}^{(k)}\hat{\boldsymbol{q}}_{\text{D}} = - \left({}^{(k)}\hat{\boldsymbol{S}}_{\text{D}} + {}^{(k)}\hat{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_{\text{K,DD}} \right)^{-1} {}^{(k)}\hat{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_{\text{K,DG}} \hat{\boldsymbol{q}}_{\text{G}} \quad (2.209)$$

mit ${}^{(k)}\hat{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_{\text{K,DD}}$ und ${}^{(k)}\hat{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_{\text{K,DG}}$ nach Gl. (C.3) und Gl. (C.5). Letztlich führt dies zu einer Elimination der Starrkörperfreiheitsgrade der Reibelemente, sodass die notwendigen Relativverschiebungen nach Gl. (2.174) unmittelbar aus den modalen Amplituden der Schaufeln bzw. des als Gesamtsystem betrachteten Schaufelkranzes ermittelt werden können. Unter Ausnutzung der Beziehung aus Gl. (2.74) ergeben sich dann die in PANNING ET AL. [118] dargestellten Zusammenhänge. Der Vorteil ist in der Reduzierung der Anzahl modaler Freiheitsgrade zu sehen. Als nachteilig haben sich letztlich aber die zusätzlichen Matrizenmultiplikationen und ein aufgrund des nichtlinearen Zusammenhangs $\hat{\boldsymbol{w}}_{\text{OL}}(\hat{\boldsymbol{u}}_{\text{OL}})$ weniger stabiles Konvergenzverhalten erwiesen, das weitere interne Iterationsschritte erfordert. Die konsistente Berücksichtigung der Reibelementfreiheitsgrade $\hat{\boldsymbol{q}}_{\text{D}}$ im Vektor der unbekannt modalen Amplituden $\hat{\boldsymbol{q}}$ ist somit vorzuziehen. Im Fall der Notwendigkeit der Berücksichtigung elastischer Moden des Dämpfers ist diese Vorgehensweise ohnehin erforderlich.

Ein alternatives Lösungskonzept verfolgen u. a. YANG UND MENQ [195] und auch BRUNS [21], die zunächst eine iterative Lösung des Zusammenhangs $\hat{\boldsymbol{f}}_{\text{K}} = \hat{\boldsymbol{f}}_{\text{K}}(\hat{\boldsymbol{w}})$ vorschlagen. Angewandt auf das oben entwickelte Modell ergibt sich mit den Matrizen $\hat{\boldsymbol{G}}_{\phi}$ und $\hat{\boldsymbol{K}}_{\text{KG}}$ aus Gl. (2.176) und Gl. (2.178) der nichtlineare Zusammenhang

$$\left(\boldsymbol{E} + \hat{\boldsymbol{G}}_{\phi} \hat{\boldsymbol{S}}^{-1} \hat{\boldsymbol{G}}_{\phi}^{\text{H}} \hat{\boldsymbol{K}}_{\text{KG}}(\hat{\boldsymbol{w}}) \right) \hat{\boldsymbol{w}} = \hat{\boldsymbol{G}}_{\phi} \hat{\boldsymbol{S}}^{-1} \hat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{\text{E}}. \quad (2.210)$$

Gl. (2.210) lässt sich durch Einsetzen von Gl. (2.175) und Multiplikation mit $\hat{\boldsymbol{S}}(\hat{\boldsymbol{G}}_{\phi}^{\text{H}} \hat{\boldsymbol{G}}_{\phi})^{-1} \hat{\boldsymbol{G}}_{\phi}^{\text{H}}$ in die Systemgleichung (2.177) überführen. Die iterative Lösung von Gl. (2.210) hat gegenüber Gl. (2.177) nach BRUNS [21] den Vorteil einer geringeren Anzahl Unbekannter im Fall einer großen Anzahl n_{M} berücksichtigter Moden, da die Anzahl unbekannter Relativverschiebungen je Kontakt - mit in diesem Fall sechs - konstant ist. Sind die nach Gl. (2.210) iterativ bestimmten Relativverschiebungen bekannt, lassen sich

die entsprechenden Kontaktkräfte berechnen und neben den Erregerkräften als zusätzliche äußere Kräfte auf die lineare Struktur zur Ermittlung der Schwingungsantwort aufprägen.

2.5 Programmtechnische Umsetzung

Die in den vorangehenden Kapiteln entwickelten theoretischen Grundlagen wurden zu großen Teilen problemangepasst in verschiedenen Programmsystemen implementiert, die der Auslegung von Koppellelementen in realen Beschaufelungen dienen. Die entwickelten Simulationsprogramme sind in FORTRAN umgesetzt worden und sowohl in WINDOWS- als auch UNIX-Umgebungen als Stand-alone-Anwendungen ohne externe Bibliotheken lauffähig. Neben dem eigentlichen Programmkern, der im Wesentlichen der Berechnung der Frequenzgänge und der Ermittlung optimaler Auslegungsparameter dient, sind angepasste Schnittstellen zu kommerziellen (z. B. ANSYS) und nichtkommerziellen Finite-Element-Programmen entwickelt worden, um einen weitgehend automatisierten Datenaustausch, etwa hinsichtlich der Verwendung verschiedener Koordinatensysteme, der Extraktion relevanter Schwingungsformen usw., zu gewährleisten. Somit ist es möglich, die Vorteile einer sehr genauen Modellierung der Schaufelgeometrie innerhalb eines linearen Finite-Element-Modells mit der effizienten externen, nichtlinearen Berechnung der Schaufeldynamik mit Koppellelementen zu kombinieren, sodass z. B. Parameterstudien zur Optimierung einzelner Parameter möglich sind. Das grundlegende Gesamtkonzept zur Auslegung von Koppellelementen ist in **Bild 2.29** skizziert und lässt sich in die folgenden Schritte zusammenfassen:

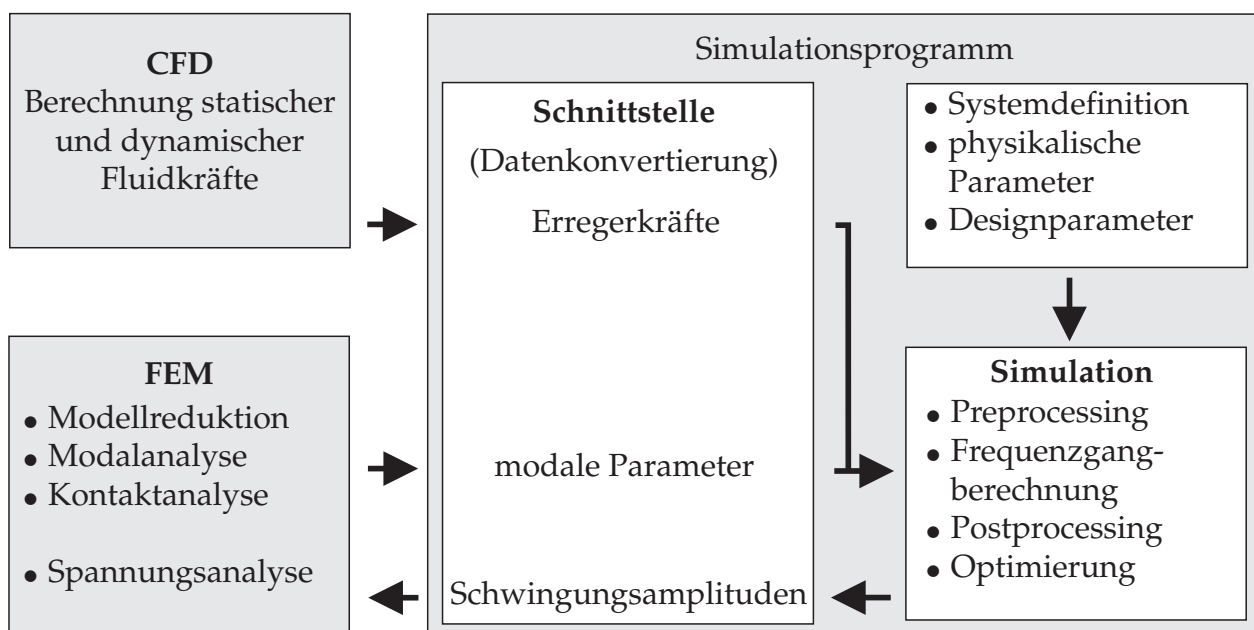
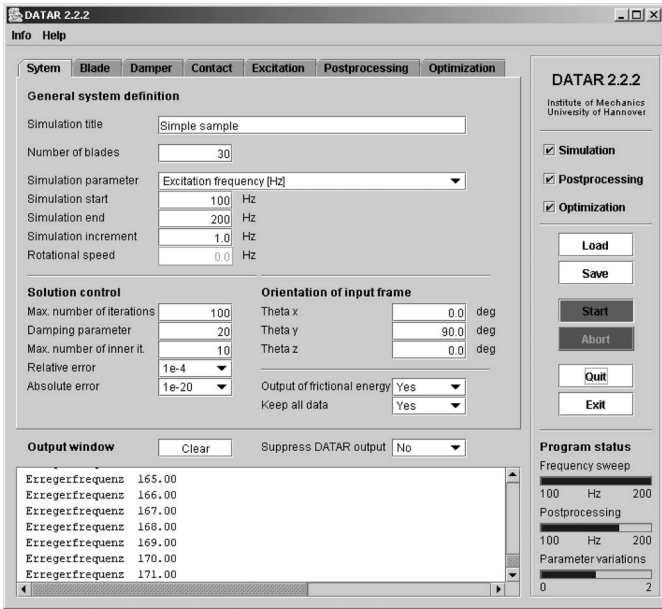


Bild 2.29: Gesamtkonzept des entwickelten Berechnungsverfahrens mit Schnittstelle zur Datenkonvertierung und Koordinatentransformation, vgl. Abschnitt 2.1.1

1. Ermittlung modaler Parameter (Modalanalyse) sowie u. U. Ermittlung der nominalen Kontaktfläche und -kräfte (statische Kontaktrechnung) aus dem Finite-Element-Modell und Aufbereitung bzw. Konvertierung der Daten.
2. Bestimmung der Anregungsmechanismen und dynamischen Fluidkräfte.
3. Systemdefinition und Festlegung von physikalischen Parametern (u. a. Reibkoeffizient) sowie Designparametern (konstruktive Größen: Kontaktwinkel, Reibelementgeometrie usw.).
4. Berechnung der nichtlinearen Frequenzgänge sowie automatisierte Optimierungsrechnungen und Parametervariationen.
5. Ausgabe und Aufbereitung der Schwingungsamplituden zur weiteren Verwendung in externen Programmen.
6. Abschließende Spannungsanalyse auf der Basis des vorliegenden Finite-Element-Modells zur Beurteilung der Lebensdauer, der Sicherheitsfaktoren bezüglich Dauerfestigkeit usw.

Auf den eigentlichen Programmkern setzt eine plattformunabhängige, in JAVA programmierte grafische Benutzeroberfläche auf, die eine übersichtliche, benutzerfreundliche Steuerung des Programmablaufs gewährleistet, siehe **Bild 2.30**. Die zur Berechnung benötigten ASCII-Eingabedateien können auf diese Weise sehr einfach über die grafische Oberfläche erzeugt und verwaltet werden.

grafische Benutzeroberfläche (GUI)



Eingabedateien

```

%*****
%
%      EINGABEDATEI DATAR_SIM
%
%*****
%
%      SYSTEMDEFINITION
%
%
%      Titel                [-]: Simple sample
%      Erregerordnung        [-]:      3
%      Erregerdefinition     [-]:      1
%      Simulationsstart     [ ]: 100.00
%      Simulationseende     [ ]: 200.00
%      Inkrement            [ ]:      1.00
%      Drehzahl             [ ]:      0.00
%      relativer Fehler     [-]: 1.0E-04
%      absoluter Fehler     [-]: 1.0E-20
%      max. Anzahl Iterat.  [-]:      100
%
%      ...

```

Ausgabedateien

%	FREQ. [Hz]	U_X AMP [m]	U_X PHASE [deg]	U_Y AMP [m]
100.00	165.00	0.7613E-04	-0.1902E+02	0.1618E-04
101.00	166.00	0.7729E-04	-0.1914E+02	0.1640E-04
102.00	167.00	0.7845E-04	-0.1927E+02	0.1663E-04
103.00	168.00	0.7963E-04	-0.1940E+02	0.1686E-04
104.00	169.00	0.8085E-04	-0.1954E+02	0.1710E-04
105.00	170.00	0.8210E-04	-0.1967E+02	0.1734E-04
106.00	171.00	0.8339E-04	-0.1981E+02	0.1760E-04

Bild 2.30: Beispiel einer grafischen Benutzeroberfläche für die entwickelten Simulationsprogramme

2.6 Ermittlung der Modellparameter

Im Hinblick auf eine zuverlässige Anwendung des entwickelten Berechnungsverfahrens kommt der möglichst genauen Ermittlung der Modellparameter eine entscheidende Bedeutung zu. Hierzu zählt neben modalen Parametern, die das zunächst lineare System der beschauelten Scheibe beschreiben, auch die Bestimmung der Kontaktparameter. Das Ziel ist dabei, möglichst viele Parameter a priori auf theoretischem Wege zu ermitteln, wenngleich experimentelle Untersuchungen zur Ermittlung und/oder zur Absicherung der gewählten Modellparameter z. T. unvermeidlich sind.

2.6.1 Modale Parameter

Die Ermittlung der Eigenfrequenzen und -vektoren erfolgt zweckmäßigerweise direkt aus dem Finite-Element-Modell unter Berücksichtigung aller relevanten Einflüsse, zu denen u. a. die Temperaturabhängigkeit des Elastizitätsmoduls, die so genannte Fliehkraftversteifung (*centrifugal stiffening*) und das *spin softening* gehören, in denen sich die Drehzahlabhängigkeit der Eigenwerte und -vektoren niederschlägt. Diese Effekte des so genannten *prestressings* gehen im Sinne statischer Vorlasten in die Modalanalyse ein und lassen sich in kommerziellen Finite-Element-Programmen problemlos berücksichtigen, siehe u.a. [6]. Auf die gleiche Weise lässt sich der Einfluss der zwischen den Deckplatten bzw. zwischen Reibelement und Fußplatte herrschenden statischen bzw. quasistatischen Kräfte berücksichtigen. Den versteifenden Einfluss des *prestressings* geben die Eigenfrequenzen $f_{S,1}$ und $f_{S,2}$ der ersten beiden Schwingungsmoden der Schaufel in **Bild 2.31a** wieder. Um eine fehlerhafte Auslegung der Koppellemente zu vermeiden, sollte das lineare System so exakt wie möglich abgebildet werden. Hierzu zählt auch die sorgfältige Wahl der Eigenvektoren, insbesondere im Fall des zyklischen Systems, vgl. Abschnitt 2.4.2.2.

Die für die Berechnung der Relativverschiebungen einzelner Kontaktpunkte notwendigen, in Gl. (2.96) enthaltenen Rotationsfreiheitsgrade der Eigenvektoren für die Kontaktreferenzpunkte stehen im Allgemeinen nicht unmittelbar im Anschluss an eine Finite-Element-Berechnung zur Verfügung, da die verwendeten Elemente zumeist nur translatorische Verschiebungsfreiheitsgrade berücksichtigen¹⁶. Wird die in Abschnitt 2.3.1 getroffene Annahme der Starrkörperbewegung der Kontaktfläche vorausgesetzt, lassen sich die Rotationsfreiheitsgrade für kleine Verdrehungen für die in **Bild 2.31b** gestrichelt dargestellte Approximation der verformten Kontaktfläche aus den translatorischen Eigenvektoren und den Abständen $r_{OL,P}$ zum Referenzpunkt OL *aller* in der Kontaktfläche enthaltenen Kontaktpunkte ermitteln. Hierzu wird angenommen, dass sich die translatorischen Eigenvektoren $\varphi_{u,P}$ aller Kontaktpunkte P durch die translatorischen ($\varphi_{u,OL}$) und rotatorischen ($\varphi_{\varphi,OL}$) Freiheitsgrade des Eigenvektors des Referenzpunktes OL und die

¹⁶Eine Ausnahme bildet hier u. a. das lineare 3D-Element SOLID73 aus der ANSYS-Elementbibliothek, das unmittelbar die Verdrehungen an den Knoten bereitstellt.

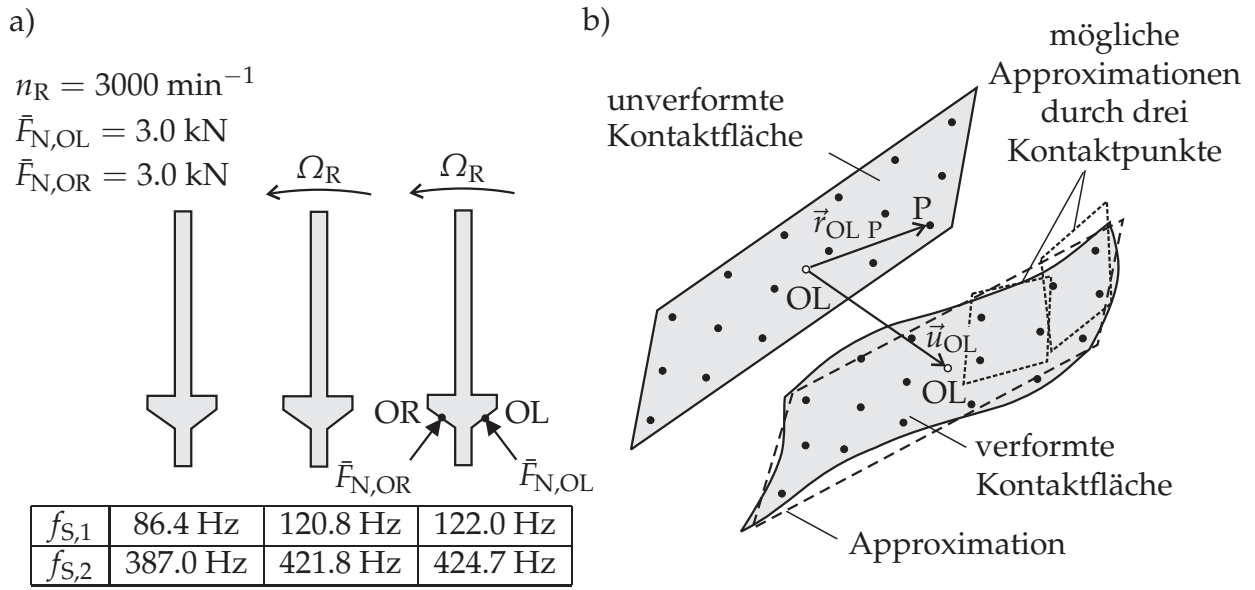


Bild 2.31: Ermittlung modaler Größen: a) Einfluss statischer Vorlasten auf modale Parameter; b) Approximation der Fußplattenverformungen durch Starrkörperannahme mit Verdrehungen

entsprechenden Abstände $\tilde{r}_{OL P}$ darstellen lässt,

$$\boldsymbol{\varphi}_{u,P} \approx \boldsymbol{\varphi}_{u,OL} - \tilde{\boldsymbol{r}}_{OL P} \boldsymbol{\varphi}_{\varphi,OL} \quad (2.211)$$

mit dem Tilde-Operator $\tilde{\boldsymbol{r}}_{OL P}$ nach Gl. (A.3). Die drei unbekannt, in dem Vektor $\boldsymbol{\varphi}_{\varphi,OL}$ enthaltenen Rotationen lassen sich unter Berücksichtigung der Fehlerquadratminimierung mit Hilfe der Pseudo-Inversen aus

$$\boldsymbol{\varphi}_{\varphi,OL} = -\left(\Delta \boldsymbol{R}_P^T \Delta \boldsymbol{R}_P\right)^{-1} \Delta \boldsymbol{R}_P^T \Delta \boldsymbol{\Phi}_P \quad (2.212)$$

mit der Matrix

$$\Delta \boldsymbol{R}_P^T = -\left[\tilde{\boldsymbol{r}}_{OL P_1} \quad \cdots \quad \tilde{\boldsymbol{r}}_{OL P_{n_{K,FEM}}}\right], \quad (2.213)$$

die die Abstände aller Kontaktpunkte zum Referenzpunkt in Kontaktkoordinaten enthält, siehe auch Gl. (2.95), und der Matrix

$$\Delta \boldsymbol{\Phi}_P^T = \begin{bmatrix} \varphi_{u_{\xi,1}} - \varphi_{u_{\xi,OL}} & \varphi_{u_{\eta,1}} - \varphi_{u_{\eta,OL}} & \varphi_{u_{\zeta,1}} - \varphi_{u_{\zeta,OL}} & \cdots \\ \varphi_{u_{\xi,n_{K,FEM}}} - \varphi_{u_{\xi,OL}} & \varphi_{u_{\eta,n_{K,FEM}}} - \varphi_{u_{\eta,OL}} & \varphi_{u_{\zeta,n_{K,FEM}}} - \varphi_{u_{\zeta,OL}} & \cdots \end{bmatrix}, \quad (2.214)$$

die die Differenzen der translatorischen Eigenvektoren zwischen den $n_{K,FEM}$ Kontaktpunkten P des Finite-Element-Modells und dem Referenzpunkt OL enthält, bestimmen. Für den Fall relativ steifer Fußplatten lassen sich die Rotationseigenvektoren auch ohne weiteres aus drei beliebigen, die Kontaktfläche aufspannenden Kontaktknoten ermitteln. Im Allgemeinen führt eine Berechnung nach Gl. (2.212) zu besseren Approximationen, da - abhängig von der Wahl der drei Kontaktpunkte - u. U. eine fehlerhafte und bezüglich der Wahl der Stützpunkte sehr sensitive Orientierung der Tangentialebene bestimmt wird, wie dies in **Bild 2.31b** angedeutet ist. Eine analoge Vorgehensweise zur Berech-

nung der Rotationseigenvektoren empfiehlt sich, wenn die in einem Profilschnitt auf das Schaufelblatt wirkenden verteilten Erregerkräfte auf eine resultierende Kraft und ein resultierendes Moment reduziert werden sollen. Der relative Fehler

$$\varepsilon_\varphi = \frac{\| (\Delta R_P (\Delta R_P^T \Delta R_P)^{-1} \Delta R_P^T - E) \Delta \Phi_P \|}{\| \Phi_P \|}, \quad (2.215)$$

der den Betrag des approximierten Eigenvektors aller Kontaktfreiheitsgrade auf den Betrag der exakten Eigenvektoren

$$\Phi_P^T = \left[\varphi_{u_{\xi,1}} \quad \varphi_{u_{\eta,1}} \quad \varphi_{u_{\zeta,1}} \quad \cdots \quad \varphi_{u_{\xi,n_{K,FEM}}} \quad \varphi_{u_{\eta,n_{K,FEM}}} \quad \varphi_{u_{\zeta,n_{K,FEM}}} \right] \quad (2.216)$$

bezieht, kann zur Abschätzung der Güte der Approximation herangezogen werden. Im Fall großer Verformungen im Bereich des Schaufelfußes wird dieser Fehler große Werte annehmen, sodass die Annahme einer Starrkörperverschiebung der Kontaktfläche nicht mehr gerechtfertigt ist. An die Stelle der in Gl. (2.94) angegebenen Beziehung sollte dann eine modale Beschreibung der einzelnen Kontaktpunkte P mit individuell besetzten Modalmatrizen treten, was aber zu einer größeren an das Simulationsprogramm zu übergebenden Datenmenge führt.

2.6.2 Kontaktparameter

Zu den wichtigen Modellparametern sind neben den modalen Größen die Kontaktparameter wie nominelle Kontaktfläche, Reibkoeffizient, Rauheit und Kontaktsteifigkeiten zu zählen, auf deren Ermittlung im Folgenden kurz eingegangen werden soll.

2.6.2.1 Nominelle Kontaktfläche

Während sich die Bestimmung der nominellen Kontaktfläche A_K am Reibelement in guter Näherung unmittelbar aus der Reibelementgeometrie ergibt, kann für deren Bestimmung bei komplexen geometrischen Verhältnissen eine statische Finite-Element-Kontaktberechnung erforderlich sein, etwa um die aus einer Schaufelentwindung resultierende Kontaktfläche im Deckbandkontakt zu ermitteln. Unter der Annahme kleiner Schwingungen kann die auf diese Weise bestimmte Kontaktfläche als Approximation der nominellen Kontaktfläche auch für den dynamischen Kontakt angenommen werden¹⁷. Neben der Bestimmung der Kontaktfläche kann auf diese Weise auch eine Abschätzung der in der Kontaktfläche verteilten statischen Normalkräfte erfolgen, die ebenfalls Eingang in das Berechnungsverfahren finden, siehe Abschnitt 2.3.2.1. Im Fall eines Reibelements können diese unter Berücksichtigung der Drehzahl und der Reibelementmasse aus einem statischen Kräftegleichgewicht am Reibelement ermittelt werden. Für den Deckbandkontakt ist die explizite Angabe der verteilten Normalkräfte bzw. deren resultierende Kraft $\bar{F}_{N,OL}$ und Momente $\bar{M}_{\xi}^{(OL)}$ und $\bar{M}_{\eta}^{(OL)}$ oder aber ein funktio-

¹⁷Die reale Kontaktfläche kann dann zusätzlich aufgrund der in Abschnitt 2.3.2.1 beschriebenen Rauheitseinflüsse deutlich von der nominellen Kontaktfläche abweichen. Dieser Effekt kann dann durch die Berücksichtigung einer normalkraftabhängigen Steifigkeit nach Gl. (2.106) abgebildet werden.

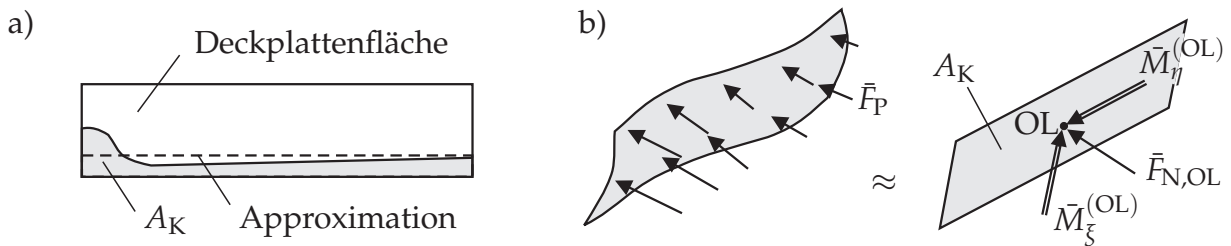


Bild 2.32: Statische Kontaktanalyse: a) Ermittlung der nominellen Kontaktfläche, nach SZWEDOWICZ ET AL. [163], und Approximation durch Rechteckfläche; b) Bestimmung der statischen Normalkraftverteilung in der verformten Kontaktfläche und Reduktion auf den Kontaktpunkt OL

naler Zusammenhang $\bar{F}_{N,OL}(\Omega_R), \bar{M}_\xi^{(OL)}(\Omega_R), \bar{M}_\eta^{(OL)}(\Omega_R)$ zu der drehzahlabhängigen Entwindung anzugeben, vgl. **Bild 2.32b** und Abschnitt 2.3.2.1. Den Untersuchungen von SZWEDOWICZ ET AL. [163, 165] lässt sich entnehmen, dass die reale Kontaktfläche z. T. deutlich kleiner als die auf geometrischen Überlegungen basierende angenommene Kontaktfläche ist, vgl. **Bild 2.32a**. In der Folge führt die kleinere Kontaktfläche aufgrund der geringeren resultierenden Steifigkeit im Deckband zu einer Reduktion der Resonanzfrequenzen von über 10%. Ein in [163] angegebener Vergleich mit Experimenten unterstreicht die Notwendigkeit der genauen Bestimmung der nominellen Kontaktfläche. Im Sinne der Annahmen aus Abschnitt 2.3.1 kann die so ermittelte nominelle Kontaktfläche durch eine in **Bild 2.32a** gestrichelt dargestellte Rechteckfläche approximiert werden.

2.6.2.2 Reibkoeffizient

Der Reibkoeffizient μ bestimmt in wesentlichem Maße die maximale Reibkraft und damit den Übergang vom Haft- in den Gleitzustand. Aus diesem Grund sollte dieser Parameter unter Berücksichtigung der relevanten Einflussgrößen, wie der im Betriebspunkt herrschenden Temperatur, möglichst exakt bestimmt werden. Aufgrund fehlender theoretischer Ansätze, die eine ausreichend genaue Abschätzung des Reibkoeffizienten ermöglichen, sollte hier auf eine hinreichend abgesicherte empirische Datenbasis für die verwendete Materialpaarung zurückgegriffen werden bzw. experimentelle Untersuchungen an Standversuchen unter Temperatur hinzugezogen werden. CSABA [37], BERRUTI ET AL. [9] und FILIPPI ET AL. [56] ermitteln den Reibkoeffizienten aus den annähernd horizontalen Makroschlupfbereichen gemessener Reibhysteresen, vgl. **Bild 1.10**. Aufgrund der Annahme eines konstanten Reibkoeffizienten in dem oben entwickelten Modell ist u. U. eine geeignete Mittelung der Messwerte im Fall geschwindigkeits- oder verschiebungsabhängiger gemessener Reibkoeffizienten erforderlich. KOH ET AL. [90] weisen zusätzlich auf einen von der veränderlichen Oberflächenbeschaffenheit abhängigen Reibkoeffizienten hin. Für die reale Anwendung bedeutet dies einen von der Anzahl der Betriebsstunden abhängigen Wert, dessen einmalige Bestimmung zumeist nur Anhaltswerte liefert und der zumindest eine gewisse Einlaufphase erfordert, siehe hierzu auch GÖTTING [63]. Der Einfluss des Reibkoeffizienten auf die Auslegung von Reibungsdämpfern wird in Abschnitt 3.2.2.1 untersucht.

2.6.2.3 Rauheit

Die Bestimmung der Rauheitsparameter basiert auf der experimentellen Ermittlung von Oberflächenprofilen, die z. B. mit einem Tastschnittgerät gewonnen werden können. Die statistische Auswertung der gemessenen Profile ist mit entsprechender Hard- und Software weitestgehend automatisiert durchführbar. Beispielmessungen an einem real ausgeführten asymmetrischen Reibelement mit der Reibelementhöhe h_D zeigt **Bild 2.33**. Aus den mikroskopischen Aufnahmen der Reibflächen, den gemessenen Rauheitsprofilen und den daraus ermittelten ABBOTT-Kurven wird deutlich, dass sich die Kontaktbedingungen in der nominellen Kontaktfläche durchaus unterscheiden können. So lassen sich Bereiche erkennen, in denen das Reibelement an der Kontaktfläche anliegt, während in anderen Bereichen kein Kontakt auftritt, vgl. auch **Bild 2.19b**. Aus diesen Bedingungen resultieren unterschiedliche Rauheitsprofile mit verschiedenen Rauheitsparametern. Aus den ABBOTT-Kurven wird u. a. deutlich, dass in Bereichen des Kontaktes die Anzahl sehr hoher Rauheitsspitzen aufgrund des Verschleißes abnimmt, was sich in einer Verschiebung der ABBOTT-Kurve nach oben widerspiegelt. Aus dem gezeigten Beispiel wird zum einen deutlich, dass die Modellparameter möglichst unter betriebsnahen Bedingungen ermittelt werden sollten. Zum anderen wird es aus praktischen Gesichtspunkten nicht möglich sein, etwa das Rauheitsprofil der gesamten Kontaktfläche zu ermitteln und zu verarbeiten. Aus diesem Grund wird stets die Ermittlung von über der gesamten Kontaktfläche gemittelten Parametern erforderlich sein. Dies schließt auch die Annahme der Isotropie im Kontakt ein. Aufschlüsse über den Einfluss der Rauheitsparameter geben die in Abschnitt 3.2.2.4 durchgeführten Parameterstudien.

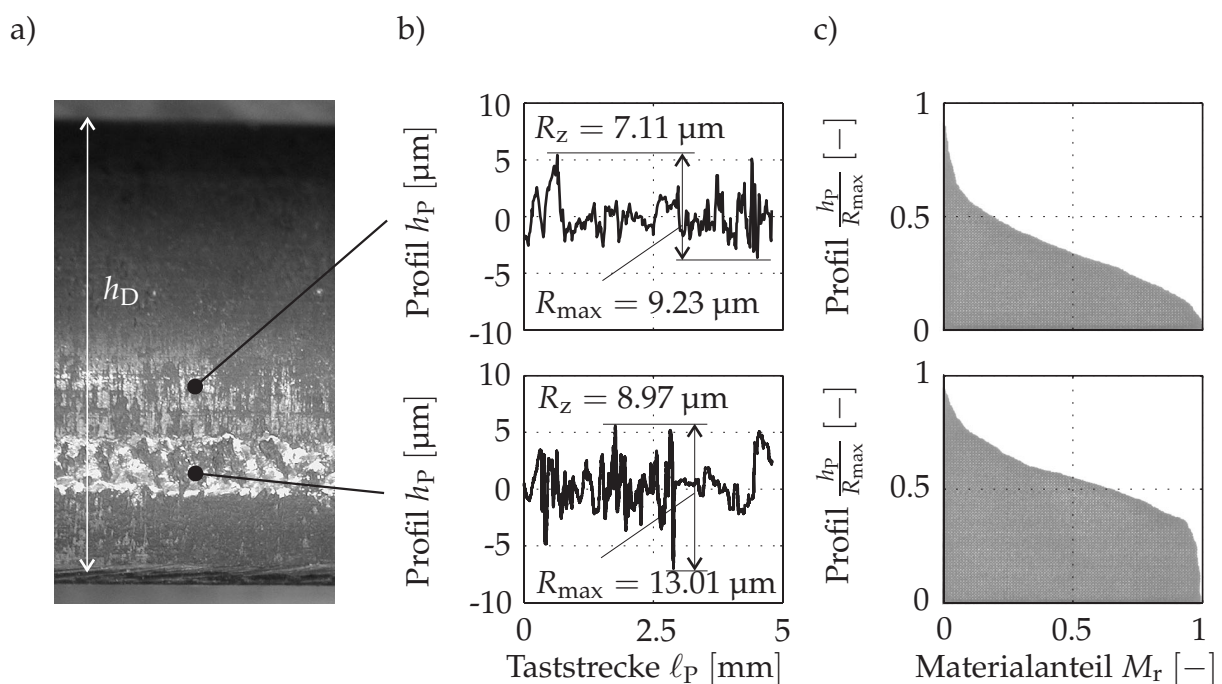


Bild 2.33: Ermittlung der Rauheitsparameter: a) Kontaktfläche eines realen Reibelements; b) gemessene Rauheitsprofile; c) Materialanteilkurven

2.6.2.4 Kontaktsteifigkeiten

Der korrekten Ermittlung der Kontaktsteifigkeiten kommt besondere Bedeutung zu, da sich diese unmittelbar auf die Frequenzverschiebung der gekoppelten Beschaufelung im Vergleich zum ungekoppelten Fall und damit auf die Vorhersage der Resonanzfrequenzen auswirken. Die experimentelle Ermittlung der Kontaktsteifigkeiten kann entweder auf der Basis statischer Kennlinien, siehe u. a. TREYDE [168] und SEXTRO [149], oder der Ermittlung von Reibhysteresen, siehe u. a. SZWEDOWICZ ET AL. [164], FILIPPI ET AL. [56] und KOH ET AL. [90], erfolgen. Bei Messungen dieser Art tritt aber das grundsätzliche Problem auf, nicht direkt an den Kontaktpunkten messen zu können, sodass stets ein Anteil elastischer Verformung der beteiligten Körper in die Messungen eingeht. Dieses Problem wird u. a. von BERRUTI ET AL. [9] geschildert. Die Bestimmung der Kontaktsteifigkeiten ist damit abhängig von der Wahl der Messpunkte zwischen denen die Relativbewegung gemessen wird. Aus diesem Grund beinhaltet der Begriff der *Kontaktsteifigkeit* nicht ausschließlich den in **Bild 2.17** dargestellten Bereich des eigentlichen Kontaktes der Rauheitsspitzen. Auch CSABA [37] weist auf die Problematik der Definition der Kontaktsteifigkeit hin und ermittelt die Tangentialsteifigkeiten einzelner Bürsten des in **Bild 1.8b** dargestellten Bürstenmodells aus einem von JOHNSON [84] vorgeschlagenen festen Verhältnis zu der Normalsteifigkeit, welche aus einer Anpassung der WINKLER-Bettung an den HERTZ'schen Kontakt erfolgt. Eine weitere Möglichkeit der Abschätzung der Kontaktsteifigkeit im Sinne des entwickelten Berechnungsverfahrens ist die Anpassung an die Messergebnisse im linearen Grenzfall sehr großer Normalkräfte. Das Modell muss in der Lage sein, die Zunahme der Resonanzfrequenz im Grenzfall des Haftens der Kontaktzonen abzubilden. Dies gelingt durch eine wiederholte Berechnung unter einer Variation der Kontaktsteifigkeiten.

Eine Abschätzung der Kontaktsteifigkeiten lässt sich auch auf theoretischer Ebene durch einen Vergleich von Resultaten einer Finite-Element-Berechnung mit Ergebnissen des Simulationsprogramms durchführen. Dabei kann die Modellierung des Kontaktes in dem Finite-Element-Modell entweder durch die Berücksichtigung von Kontaktelementen und Relativbewegungen oder durch die Annahme des linearen Grenzfalls, eines so genannten verschweißten Kontaktes, durch Einführung entsprechender Zwangsbedingungen erfolgen. Aus einem Vergleich der Resonanzfrequenzen können die zu berücksichtigenden Steifigkeiten bzw. Nachgiebigkeiten angepasst werden. Diese können auch als residuale Nachgiebigkeiten interpretiert werden, da das auf der modalen Beschreibung von Schaufel und Reibelement basierende Berechnungsverfahren aufgrund der Vernachlässigung höherer Schwingungsformen grundsätzlich nicht in der Lage ist, alle Verschiebungszustände abzubilden. Eine ebenfalls auf der Vorstellung residualer Nachgiebigkeiten basierende Ermittlung der Kontaktsteifigkeiten kann auf der getrennten Betrachtung der kontaktierenden Körper (zwei Deckbandschaufeln bzw. Schaufel und Reibelement) erfolgen. Hierzu werden der Deckplattenkontakt bzw. Reibelement und Schaufelfußplatte statisch belastet und mit Hilfe des Finite-Element-Modells statische Nachgiebigkeiten in den Kontaktpunkten ermittelt. Ein Vergleich der Nachgiebigkeiten des mit $\Omega_E = 0$ berechneten modalen Modells führt auf residuale Nachgiebigkeiten der beteiligten Körper, die durch

eine Reihenschaltung zusammengefasst werden können. Der Vorteil gegenüber einer Anpassung auf der Basis eines Abgleichs der Resonanzfrequenz ist in der Unabhängigkeit von der betrachteten Schwingungsform zu sehen. Weiterhin sind keine experimentellen Untersuchungen notwendig.

Bild 2.34 und **Bild 2.35** zeigen beispielhaft die Vorgehensweise zur Ermittlung der Kontaktsteifigkeiten am Deckbandkontakt und für den Kontakt zwischen Fußplatte und Reibelement. Hierzu wird das in **Bild 2.34** dargestellte Finite-Element-Modell zunächst statisch mit homogen verteilten Kräften \bar{F}_{Q_i} an sämtlichen Knoten Q_i der Kontaktfläche jeweils in einer der drei Koordinatenrichtungen ξ, η und ζ belastet, wie dies beispielhaft für die ζ -Richtung skizziert ist. Mit Hilfe der aus dieser Belastung resultierenden statischen Verschiebungen \bar{u}_{ζ, Q_i} lassen sich durch einen Vergleich mit der Summe der modalen Nachgiebigkeiten der berücksichtigten Schwingungsformen die residualen Steifigkeiten

$$k_{\zeta, Q_i \text{ Res}} = \frac{\bar{F}_{\zeta, Q_i}}{\bar{u}_{\zeta, Q_i} - \sum_{j=1}^{n_M} \frac{\varphi_{\zeta, Q_i} \varphi_{\zeta, Q_j}^T \bar{f}_{\zeta, Q}}{\omega_j^2}} \quad (2.217)$$

für alle Knoten Q_i angeben. Die residualen Steifigkeiten werden als voneinander unabhängig und nur in der betrachteten Richtung wirksam angenommen. Eine Kopplung von tangentialer und normaler Richtung wird nicht berücksichtigt. Die so ermittelten residualen Steifigkeiten $k_{\zeta, Q_i \text{ Res}}$ lassen sich auf ein Netz äquidistanter Knoten projizieren und anschließend nach Division durch die Kontaktfläche A_K als spezifische Steifigkeiten $\tilde{k}_{\zeta, \text{Res}}$ analog Gl. (2.117) interpretieren. Diese ist inhomogen über der Kontaktfläche verteilt, da auch eine große Anzahl Moden zumeist nicht in der Lage ist, den Verformungszustand der Kontaktfläche exakt wiederzugeben. Im Bereich des Kontaktrandes für $\eta^* = -\frac{1}{2}$ weist die Kontaktfläche aufgrund ihrer geometrischen Gestaltung eine relativ große Nachgiebigkeit auf, sodass hier die residualen Steifigkeiten im Vergleich zur restlichen Kontaktfläche kleine Werte annehmen. Weiterhin wird aus **Bild 2.35a** der Ein-

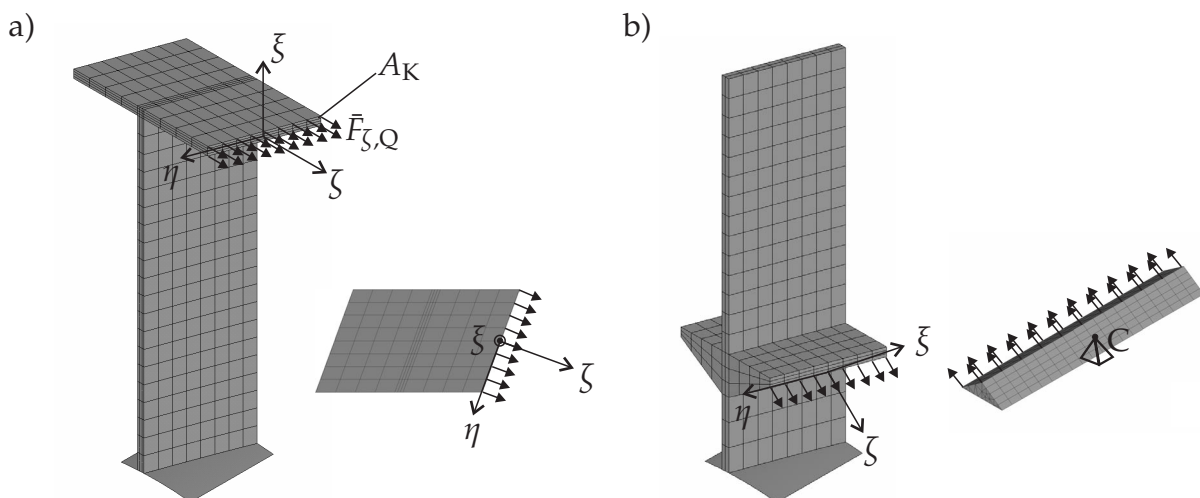


Bild 2.34: Statische Analyse zur Abschätzung residualer Kontaktsteifigkeiten: a) Deckbandkontakt; b) Kontakt zwischen Schaufelfußplatte und Reibelement

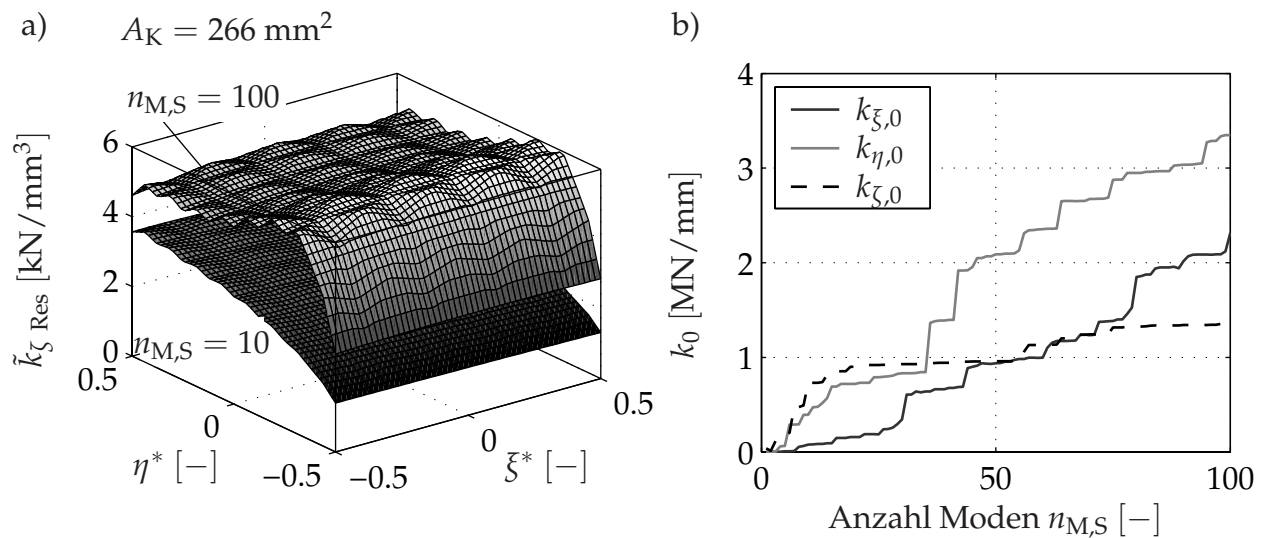


Bild 2.35: Ermittlung residualer Steifigkeiten für den Deckbandkontakt aus **Bild 2.34a**: a) spezifische residuale Punktkontaktsteifigkeiten $\tilde{k}_{\zeta,\text{Res}}$ für variierende Anzahl berücksichtigter Moden $n_{M,S}$; b) globale residuale Steifigkeiten k_0 in drei Koordinatenrichtungen des Kontaktes

fluss der Anzahl $n_{M,S}$ berücksichtigter Schaufelmoden deutlich: Mit zunehmender Anzahl steigt die modale Nachgiebigkeit, sodass die residualen Steifigkeiten ansteigen, vgl. auch STELTER [161]. Nach Summation bzw. Integration der spezifischen Steifigkeiten über der Kontaktfläche ergibt sich die in **Bild 2.35b** dargestellte globale Kontaktsteifigkeit $k_{\zeta,0}$. Hier wird besonders der Einfluss der Anzahl Moden deutlich. Gleiches gilt für die residualen tangentialen Steifigkeiten $k_{\xi,0}$ und $k_{\eta,0}$, die auf die gleiche Weise durch Aufbringen statischer Lasten in der jeweiligen Koordinatenrichtung bestimmt werden. Alle residualen Steifigkeiten liegen in gleicher Größenordnung, wobei die tangentialen Steifigkeiten durchaus unterschiedliche Werte annehmen können. Im Sinne des in Abschnitt 2.3.2.2 isotrop angenommenen Kontaktes sollte hier eine Mittelung bzw. bei bekannter Vorzugsrichtung der Relativverschiebungen in der Kontaktebene eine Gewichtung stattfinden. Die so ermittelten globalen residualen Kontaktsteifigkeiten k_0 werden anschließend auf die diskreten Punktkontakte P_i einer nach Abschnitt 2.3.1 mit n_{Dis} diskretisierten Kontaktfläche homogen verteilt, sodass sich $k_P = \frac{k_0}{n_{\text{Dis}}}$ ergibt, wobei grundsätzlich auch eine inhomogene, individuelle Verteilung der Punktkontaktsteifigkeiten k_{P_i} möglich ist. Dieses Vorgehen entspricht dann der in Abschnitt 2.3.2.1 beschriebenen Abbildung bestimmter Flächenpressungen in der Kontaktfläche.

Die vorgeschlagene Vorgehensweise wird für beide Kontaktpartner durchgeführt, wobei im Fall des Reibelements zur Bestimmung statischer Nachgiebigkeiten der Schwerpunkt in allen Freiheitsgraden gefesselt wird, um Starrkörperbewegungen zu verhindern, vgl. **Bild 2.34b**. Ein vergleichbares Vorgehen wird auch von CSABA [37] vorgeschlagen. Der Kontakt zwischen zwei Körpern lässt sich dann als Reihenschaltung modaler und residualer Elastizitäten sowie der nichtlinearen elastischen Bettung zur Abbildung des Rau-

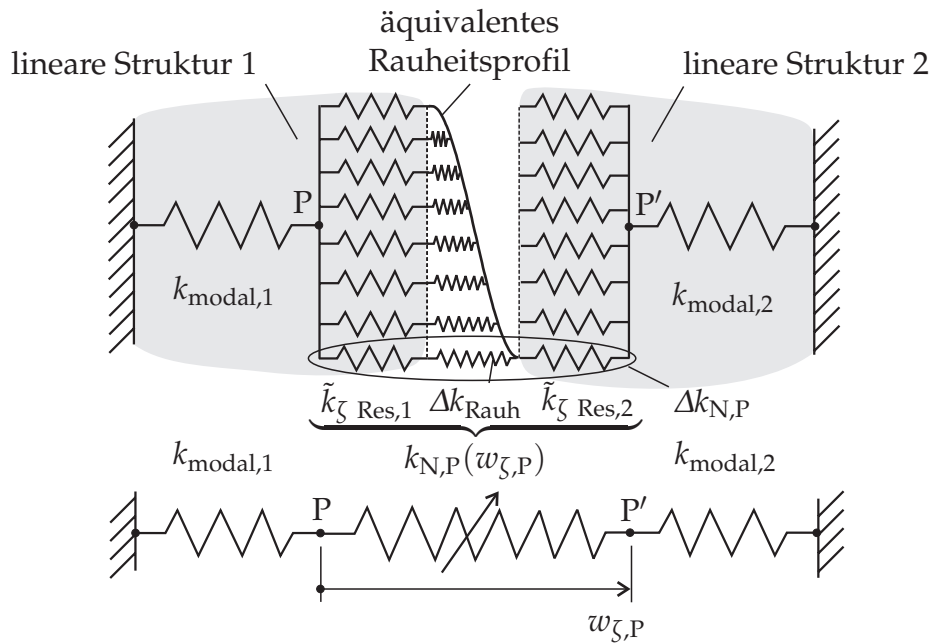


Bild 2.36: Reihenschaltung aus modalen und residualen Elastizitäten und Kopplung zweier Punktkontakte mit ΔA_K über nichtlinearen Kontakt

heitsprofils zusammenfassen, wie in **Bild 2.36** für den Normalkontakt dargestellt¹⁸. Der Einfluss der Größenordnung der Kontaktsteifigkeiten wird in Abschnitt 3.2.2.2 detaillierter untersucht.

Die Rauheitsspitzen und die diskreten Elastizitäten einer homogenen residualen spezifischen Steifigkeit werden als voneinander unabhängig angenommen. Daraus ergibt sich die aus der Reihenschaltung zusammengesetzte Punktkontaktsteifigkeit für ein Flächenelement ΔA_K der diskretisierten Kontaktfläche aus

$$k_{N,P} = \frac{\Delta A_K}{\frac{1}{\tilde{k}_{\zeta \text{ Res},1}} + \frac{1}{\tilde{k}_{\zeta \text{ Res},2}}}, \quad (2.218)$$

wenn die Steifigkeit des Rauheitsprofils mit $k_{\text{Rauh}} \gg \Delta A_K \tilde{k}_{\zeta \text{ Res}}$ sehr viel größer als die residuale Steifigkeit eines Punktkontaktes angenommen wird. Diese in Gl. (2.218) ermittelte Steifigkeit wird gemäß **Bild 2.19** und **Bild 2.16** bzw. Gl. (2.106) als Parameter des Kontaktmodells verwendet.

¹⁸Der Kontakt zwischen den betrachteten Punkten P und P' lässt somit eine Relativverschiebung in Normalenrichtung zu, die auch als 'Eindringung' zu interpretieren ist. Im Grenzfall unendlich vieler Moden und somit unendlich großer residualer Steifigkeit kann diese mit der so genannten *Penalty*-Steifigkeit einer Kontaktberechnung mit Hilfe der Finite-Element-Methode verglichen werden, die aus numerischen Gründen eingeführt wird.

2.7 Abschließende Anmerkungen zur Modellbildung

In den vorigen Abschnitten wurde ein theoretisches Modell zur Berechnung reibungsge­dämpfter verstimmt­er Beschaulungen entwickelt. Es basiert im Wesentlichen auf drei grundsätzlichen Annahmen:

- Vernachlässigung höher harmonischer Anteile in den Erreger- und Kontaktkräften sowie Verschiebungen,
- vereinfachende Annahmen zur Kontaktmodellierung sowie
- Beschreibung der Dynamik des verstimmt­en Systems durch die Schwingungsformen des unverstimmt­en Segments.

Im Folgenden sollen diese Annahmen kurz auf ihre Gültigkeit untersucht und somit die Anwendbarkeit des Berechnungsverfahrens auf reale Beschaulungen sowie Grenzen der Modellierung aufgezeigt werden.

Die Vernachlässigung höher harmonischer Anteile betrifft zunächst die Modellierung der äußeren Erregerkräfte. Wie in Abschnitt 2.2.2 dargestellt, kann das Erregerspektrum verschiedene Drehzahlvielfache als Anregungsfrequenz liefern. Lässt sich hier keine eindeutig dominierende Harmonische feststellen, führt dies zu deutlichen Resonanzerscheinungen bei verschiedenen Drehzahlen. Dies ist beispielhaft in **Bild 2.37a** für den ersten Biegemode und die Erregerordnungen *EO4* und *EO5* anhand des CAMPBELL-Diagramms dargestellt. Bei ausreichend voneinander getrennten kritischen Drehzahlen wird dennoch eine Erregerordnung dominieren, sodass der Anteil weiterer Harmonischer zumeist vernachlässigt werden kann. Im Fall variabler Betriebsdrehzahl ist ein sinnvoller Kompromiss zu finden, da eine Dämpferauslegung nach dem vorgeschlagenen Verfahren für jeweils eine monofrequente Anregung erfolgen muss. Werden weitere Schwingungsformen betrachtet, ergeben sich im relevanten Drehzahlbereich u. U. zusätzliche kritische Drehzahlen, die berücksichtigt werden müssen und die Dämpferauslegung entsprechend erschweren. Wird das Koppel­element hingegen in erster Linie zur Versteifung des Sys-

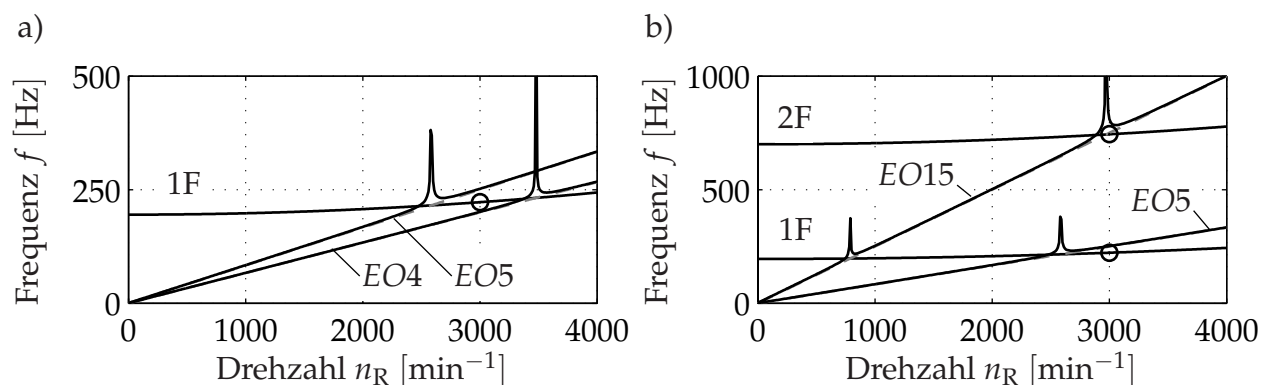


Bild 2.37: CAMPBELL-Diagramm: a) multifrequente äußere Erregung des 1F-Modes; b) höher harmonische Erregerkräfte durch Oberwellen aufgrund des nichtlinearen Reibkontaktes

tems eingesetzt und die Eigenfrequenzen auf eine bestimmte Nennbetriebsdrehzahl abgestimmt, wie dies in **Bild 2.37a** für $n_R = 3000 \text{ min}^{-1}$ angedeutet ist, kann aufgrund der geringen Schwingungsamplituden außerhalb der Resonanzen u. U. in guter Näherung von einem linearen System ausgegangen werden, da das Reibelement in diesem Fall aufgrund der geringen Relativverschiebungen im Kontakt ohnehin haftet. In diesem stets zu prüfenden Fall kann die Schwingungsantwort auf eine multifrequente Anregung durch Superposition der Teillösungen ermittelt werden. Soll das Reibelement für genau diese Drehzahl hinsichtlich seiner Dämpfungswirkung optimiert werden und treten in der Folge entsprechende Nichtlinearitäten aufgrund einsetzender Reibung auf, ist eine Überlagerung nicht mehr zulässig. In diesem Fall ist entsprechend dem Anteil der wesentlichen benachbarten Erregerordnungen im Anregungsspektrum eine geeignete Erregerkraftamplitude zu definieren und eine Reibelementoptimierung mit nur *einer*, aus einer der beteiligten Erregerordnungen resultierenden Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ vorzunehmen.

Des Weiteren treten auch im Fall monofrequenter Fremderregung bei vorhandener Reibung höherfrequente Anteile der Reibkräfte als Folge der Nichtlinearität als Erregerkräfte auf die Schaufeln auf. Diese beinhalten nach **Bild 2.13a** insbesondere die 3., 5. usw. Harmonische der Grundfrequenz. Dies kann z. B. nach **Bild 2.37b** dazu führen, dass sich weitere Resonanzstellen im unteren Drehzahlbereich des CAMPBELL-Diagramms ergeben. Liegen diese Schnittpunkte ausreichend weit auseinander, ist die Wechselwirkung zwischen verschiedenen Harmonischen bei einer bestimmten Drehzahl allerdings gering. Werden weitere Schwingungsformen wie der 2F-Mode berücksichtigt, ergibt sich aber u. U. eine signifikante Anregung dieser höheren Moden. Hier gilt aber ebenfalls die oben erwähnte Tatsache, dass für eine bestimmte Nenn Drehzahl im Fall kleiner Schwingungsamplituden des 1F-Moden nur geringe Nichtlinearitäten und damit eine zu vernachlässigende Anregung höherer Moden zu erwarten ist. Im Fall auftretender Reibung treten allerdings verstärkt höher harmonische Anteile auf, die insbesondere dann nicht mehr zu vernachlässigen sind, wenn sich im CAMPBELL-Diagramm weitere Resonanzstellen mit höheren Schwingungsformen ergeben und die Schwingungsamplituden und somit auch die Relativverschiebungen im Kontakt signifikante Anteile höher Harmonischer aufweisen. In diesem Fall ist auch die Annahme monofrequenter Relativverschiebungen $w(t)$ im Kontakt nicht mehr erfüllt, sodass nach **Bild 2.28** zunächst eine Synthese mit anschließender Lösung des Kontaktproblems im Zeitbereich erforderlich ist.

Die Anwendung der Harmonischen Balance (HBM) erscheint über einem weiten Bereich auch für den Fall einer in Abschnitt 2.3.2.2 berücksichtigten fluktuierenden Normalkraft in den Kontaktflächen anwendbar. Für große dynamische Normalkräfte und zeitweiliges Abheben der Kontaktpunkte wird die Approximation an Güte verlieren. In diesem Zusammenhang ist aber zu erwarten, dass aufgrund der großen Fliehkräfte der dynamische Anteil der Normalkräfte im Fall des Kontaktes zwischen Reibelement und Fußplatte gering ist, wie auch schon von CSABA [37] beobachtet. Dagegen ist im Fall des Deckbandkontaktes aufgrund der Entwindung der Schaufeln durchaus eine Separation von Teilen der Kontaktfläche zu erwarten. Diese tritt aber primär an den Rändern der Kontaktfläche auf, sodass die Anzahl der u. U. fehlerhaft bestimmten Punktkontaktkräfte aufgrund der

Diskretisierung gering bleibt. Tritt ein großflächiges Abheben der Kontaktflächen bis hin zu einer vollständigen Separation auf, ist das entwickelte Verfahren nicht mehr in der Lage, verlässliche Ergebnisse zu liefern. Ein Übergang in den Zeitbereich erscheint dann unumgänglich. Aus konstruktiver Sicht ist dieser Zustand aber ohnehin wenig wünschenswert, da ein vollständiger Kontaktverlust zu Stoßvorgängen in der Kontaktzone, erhöhtem Verschleiß und einer drastischen Abnahme der Steifigkeit des Gesamtsystems führt. Dies gilt insbesondere für den Deckbandkontakt.

Hinsichtlich der Annahmen zur Beschreibung des Kontaktes ist die Forderung isotroper Kontaktbedingungen zu prüfen. Dies betrifft sowohl die Verteilung der Punktkontaktsteifigkeiten als auch die Reduzierung der zweidimensionalen Verteilung der Rauheitsspitzen auf den eindimensionalen Fall und deren homogene Verteilung innerhalb der Kontaktfläche. Des Weiteren ist die Annahme über die Modellierung der Kontaktzone als starre, ebene Fläche zu prüfen. Diese ist bei einem sehr steif ausgeführten Schaufelfuß u. U. nicht mehr gerechtfertigt. Die Verformung einzelner Kontaktpunkte sollte dann anstelle über die Referenzpunktverschiebung mit Hilfe der individuellen Eigenvektoren bestimmt werden.

Bezüglich der vereinfachten Berücksichtigung verstimmter Schaufeln ist zu prüfen, ob die Annahme schaufelinduzierter Schwingungsformen zutreffend ist. Dies ist für relativ starr ausgeführte Scheiben im Dampfturbinenbau sicherlich realistisch. Im Fall sehr weicher Scheiben und einer signifikanten Änderung der Schwingungsform über einer Variation der Knotendurchmesser sind mit der vorgestellten Approximation nur noch eingeschränkte Aussagen über den Einfluss einer Schaufelverstimmung zu erwarten.

Viele der genannten Annahmen lassen sich durch den Übergang vom Frequenz- in den Zeitbereich vermeiden. Dies betrifft einerseits die Berücksichtigung höher Harmonischer in den Erreger- und Kontaktkräften sowie den Relativverschiebungen im Kontakt. Weiterhin kann so die Grundlage eines isotropen Kontaktes für eine a priori-Berechnung der Ersatzsteifigkeiten entfallen, sodass z. B. anisotrope tangentielle Ersatzsteifigkeiten berücksichtigt werden können. Der Lösung im Zeitbereich steht aber die oben erwähnte Forderung nach einem möglichst effizienten Berechnungsverfahren entgegen, das den Konstrukteur in die Lage versetzt, grundsätzliche Einblicke in die Wirkungsweise verschiedener Koppellelemente zu gewinnen und mit vertretbarem Aufwand Parameterstudien zur Optimierung durchführen zu können. Aus diesem Grund wurde auf eine Formulierung im Zeitbereich verzichtet. Die daraus resultierenden, oben genannten Annahmen sind als Folge des notwendigen Kompromisses aus Genauigkeit und praktischer Anwendbarkeit des Berechnungsverfahrens zu sehen.

3 Auslegung und Optimierung von Reibelementen

Die optimale Auslegung von Reibungsdämpfern und Koppелеlementen zur gezielten Beeinflussung der Schaufeldynamik erfordert die genaue Kenntnis der verschiedenen Einflussgrößen und deren Auswirkung auf das dynamische Gesamtverhalten. In dem folgenden Kapitel sollen daher ausführliche Parametervariationen den Einfluss verschiedener physikalischer und konstruktiver Größen auf die Effektivität insbesondere von Reibelementen sowie vergleichend auch von Deckbandkopplungen aufzeigen. Hierzu wird zunächst ein Modellschaufelkranz definiert, der allen folgenden Untersuchungen als Referenz dienen soll. Basierend auf den Ergebnissen der Parametervariationen soll ein zusammenfassender Vergleich der Wirkungsweise verschiedener Reibelemente gegeben werden. Abschließend wird ein Gesamtkonzept zur praktischen Auslegung von Reibungsdämpfern vorgeschlagen.

3.1 Definition des Referenzsystems

Als Referenzmodell dient eine beschaufelte Scheibe mit $n_S = 30$ zunächst identischen Schaufeln. Im Sinne der Untersuchung des Einflusses einzelner Parameter wird ein einfaches Modell zu Grunde gelegt, in dem der Scheibeneinfluss vernachlässigt und die Schaufeln als fest eingespannt angenommen werden, sodass sich für alle Knotendurchmesser identische Schwingungsformen ergeben. Weiterhin wird die Drehzahlabhängigkeit der modalen Größen vernachlässigt. Das in ANSYS erstellte Finite-Element-Modell der auf diese Weise definierten Referenzschaufel zeigt **Bild 3.1a**. Dabei wurden einfache Volumenelemente mit linearen Verschiebungsansätzen verwendet. Die Materialeigenschaften entsprechen mit der Dichte $\rho = 7700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, dem Elastizitätsmodul $E = 0.201 \cdot 10^{12} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ und der Querkontraktionszahl $\nu = 0.3$ realistischen Werten. Die angegebenen geometrischen Größen wurden zu $\ell_S = 200 \text{ mm}$, $b_R = 50 \text{ mm}$ und $r_P = 30 \text{ mm}$ gewählt. Die ermittelten modalen Parameter der Referenzschaufel sind zusammenfassend **Tabelle D.1** in Anhang D zu entnehmen.

Schwerpunkt der folgenden Untersuchungen ist zunächst der 1F-Mode. Um im späteren Verlauf auch weitere Schwingungsformen untersuchen zu können, wird eine Anregung derart gewählt, dass beliebige räumliche Schwingungen einschließlich der E- und T-Moden angeregt werden können, vgl. **Bild 2.4**. Die Erregerkraft wird vereinfacht als unter einem Winkel von $\alpha = 45^\circ$ gegenüber der Rotorachse in der x - y -Ebene in einem

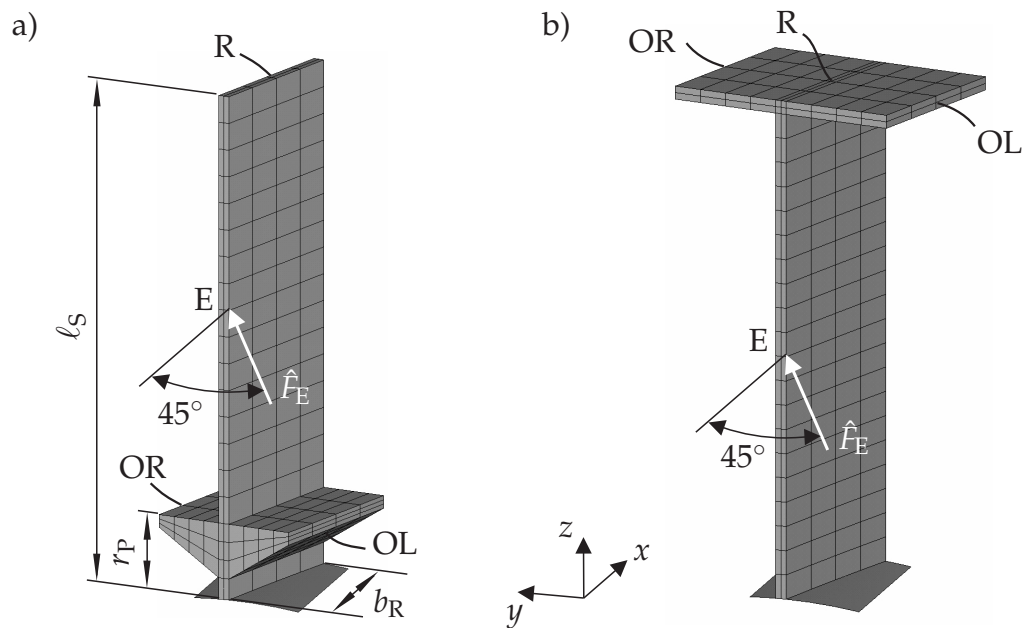


Bild 3.1: Finite-Element-Netz der Referenzschaufel: a) mit Fußplatten zur Aufnahme von Reibelementen; b) mit Deckbandkontakt

Knoten angreifende diskrete Kraft an der Eintrittskante der Schaufel modelliert. Als so genannter *response node* dient der mit R bezeichnete Knoten an der Schaufelspitze, dessen Schwingungsamplitude in den folgenden Parameterstudien detailliert untersucht werden soll. Alle weiteren Referenzparameter können **Tabelle 3.1** entnommen werden. Zur Definition der einzelnen Parameter sei auf Kapitel 2 verwiesen.

Tabelle 3.1: Definition des Referenzsystems

Parameter	Wert
Schaufelanzahl n_S	30
Anzahl Schaufelmoden $n_{M,S}$	10
Anzahl Reibelementmoden $n_{M,D}$	6
Anstellwinkel β	20°
Kontaktsteifigkeiten $k_{N,0}, k_{T,0}$	$0.5 \cdot 10^8 \text{ N/m}$
Kontaktwinkel $\gamma_L = \gamma_R$	36.7°
Kontakthöhe h_K bei flächigem Kontakt	4.0 mm
Kontaktlänge ℓ_K	53.2 mm
Diskretisierung n_{ξ}, n_{η}	11, 11
Rauheitsparameter ¹ R_0	0.0 μm
Reibkoeffizient μ	0.3
Abstand Reibelementschwerpunkt r_D	100 mm
Erregerordnung EO	3
Erregerkraftamplitude $ \hat{F}_E $	1.0 N

¹Rauheitseinflüsse sollen im Referenzzustand zunächst nicht berücksichtigt werden. Die in Gl. (2.103) vorzunehmende Normierung erfolgt mit Hilfe des programminternen Dummy-Wertes $R_0 = 10^{-6} \mu\text{m}$, wobei der nichtlineare Charakter der Kontaktsteifigkeiten ausgeblendet wird.

3.2 Parameterstudien

Ausgehend von dem oben definierten Referenzsystem sollen detaillierte Parameterstudien einen Überblick über den Einfluss verschiedener konstruktiver und physikalischer Parameter geben und die Simulationsergebnisse ausführlich diskutiert werden. Zu diesem Zweck wird im Folgenden grundsätzlich *ein isolierter* Parameter variiert, um dessen Einfluss auf das Schwingungsverhalten beurteilen zu können. Dabei ist anzumerken, dass eine Variation eines Parameters in der realen Anwendung zumeist weitere Größen beeinflusst: So führt eine Variation des Kontaktwinkels bei zylinderförmigen Reibelementen gleicher Geometrie zu einer Verschiebung der Kontaktpreferenzpunkte, sodass u. U. die modalen Eingabegrößen angepasst werden müssen. Eine Variation der Kontaktfläche, insbesondere für verschiedene Reibelementtypen, wird veränderte Kontaktsteifigkeiten nach sich ziehen. Da diese Zusammenhänge aber zumeist sehr komplex sind, lässt sich ein einfacher funktionaler, in dem Simulationsprogramm implementierbarer Zusammenhang nicht angeben. Aus diesem sowie dem oben genannten Grund der ursächlichen Zuordnung einzelner Einflüsse werden derartige Abhängigkeiten im Folgenden nicht berücksichtigt. Implizit zu berücksichtigte Wechselwirkungen, wie beispielsweise die Drehzahlabhängigkeit der auf das Reibelement wirkenden Fliehkraft, die von den Kontaktwinkeln abhängige Kontaktnormalkraft oder die von der Fliehkraft abhängige Gleichgewichtslage des Reiblements bleiben jedoch erhalten. Dieses Vorgehen der Betrachtung isolierter Parameter wird auch von JARELAND [80] vorgeschlagen, der u. a. auf den Zusammenhang zwischen der Masse und der Nachgiebigkeit des Reiblements hinweist und diese ebenfalls getrennt voneinander betrachtet.

Die folgenden Studien sollen auch dazu dienen, einige elementare Unterschiede in der Wirkungsweise verschiedener Reibelementtypen aufzuzeigen. Zu diesem Zweck werden die drei in **Bild 1.12** dargestellten Grundtypen hinsichtlich ihres Dämpfungspotenzials und ihres Einflusses auf die Resonanzfrequenz untersucht.

Zunächst soll mit der Dämpfermasse der wichtigste Auslegungsparameter variiert und eine Optimierung für die verschiedenen Reibelementtypen durchgeführt werden. Auf der Basis dieser Ergebnisse werden grundsätzliche Effekte, die unter Verwendung der verschiedenen Reibelemente auftreten können, diskutiert. Im Anschluss erfolgt zunächst die Untersuchung weiterer dämpferrelevanter Parameter, da die Gestaltung des Reiblements aus konstruktiver Sicht die am einfachsten zu modifizierenden Größen umfasst. Weiterhin soll der Einfluss von kontakt- und schaufelrelevanten Größen untersucht werden, wenngleich insbesondere einzelne geometrische Größen die Gestaltung sowohl des Kontaktes, des Dämpfers und auch der Schaufelfußplatte betreffen und eine Zuordnung nicht immer eindeutig erfolgen kann. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden diese Parameterstudien auf der Basis eines zylinderförmigen Reiblements durchgeführt. Treten besondere Effekte oder deutlich voneinander abweichende Ergebnisse unter Verwendung anderer Reibelementtypen auf, wird dies an den entsprechenden Stellen beispielhaft dargestellt. Weiterhin soll der Einfluss der Erregerkräfte auf die Reiblementauslegung diskutiert werden.

Eine Parametervariation erfolgt stets derart, dass zunächst eine Variation bei einer konstanten, der optimalen Dämpfermasse des Referenzsystems entsprechenden Masse durchgeführt und der Einfluss auf Resonanzfrequenz und -amplitude dargestellt wird. Eine derartige Variation lässt aber im Allgemeinen nur bedingt Rückschlüsse auf die Auswirkung einer Veränderung eines Parameters zu. Aus diesem Grund soll zusätzlich eine Parametervariation bei sehr großen Massen durchgeführt werden, sodass Aussagen über den maximal erreichbaren Frequenzshift möglich sind. Darüber hinaus soll für jede Parametervariation eine erneute Optimierung der Masse durchgeführt werden. Erst dann lassen sich sinnvolle Aussagen über den Einfluss eines Parameters treffen. Im Sinne einer kompakten Darstellungsweise werden in Ausnahmefällen die simulierten Frequenzgänge aufgeführt, zumeist aber die kompakte Darstellung der Resonanzfrequenzen und -amplituden über einer Parametervariation bevorzugt.

3.2.1 Einfluss der Reibelementeigenschaften

Zu den wichtigsten Eigenschaften des Reibelements zählen neben seiner Masse auch die geometrische Gestaltung der Kontaktflächen sowie die Elastizität und Trägheit. Insbesondere vor dem Hintergrund der in **Bild 1.12** dargestellten Dämpfertypen sollen die folgenden Simulationsergebnisse grundsätzliche Unterschiede aufzeigen.

3.2.1.1 Optimierung der Reibelementmasse

Einer der wichtigsten Parameter zur Auslegung von Reibungsdämpfern ist die Reibelementmasse. Zum einen bestimmt diese in wesentlichem Maße die aufgrund der auf das Reibelement wirkenden Fliehkraft in den Kontaktzonen auftretende Normalkraft und damit den einsetzenden Gleitzustand des Dämpfers. Zum anderen stellt die Reibelementmasse einen konstruktiv relativ einfach zu variierenden Parameter dar. So lässt sich die Masse des Reibelements über die Dichte des gewählten Materials oder auch die geometrische Gestaltung (Voll- oder Hohlzylinder) anpassen, ohne die Kontakt- oder Schaufelgeometrie zu modifizieren.

Die Ergebnisse einer Variation der Reibelementmasse für zylinderförmige, asymmetrische und keilförmige Reibelemente, vgl. **Bild 1.12**, sind in **Bild 3.2** dargestellt. Zunächst können aus den jeweils für $m = 0, 20, 40, 100$ und 10^6 g dargestellten Frequenzgängen die charakteristischen linearen Grenzfälle verschwindender und unendlich großer Reibelementmasse entnommen werden. Ersterer führt zu der Schwingungsantwort der ungekoppelten Schaufel, letzterer zu einer geringfügig kleineren Schwingungsamplitude bei erhöhter Frequenz, da hier das Reibelement ständig haftet und somit eine Erhöhung der Steifigkeit, aber aufgrund der großen Normalkräfte keine zusätzliche Reibungsdämpfung auftritt. Zwischen diesen Grenzfällen ergibt sich mit ansteigender Masse eine kontinuierliche Erhöhung der Resonanzfrequenz, wobei die Schwingungsamplitude im Resonanzfall bei einer bestimmten Masse m_{opt} ein Minimum aufweist.

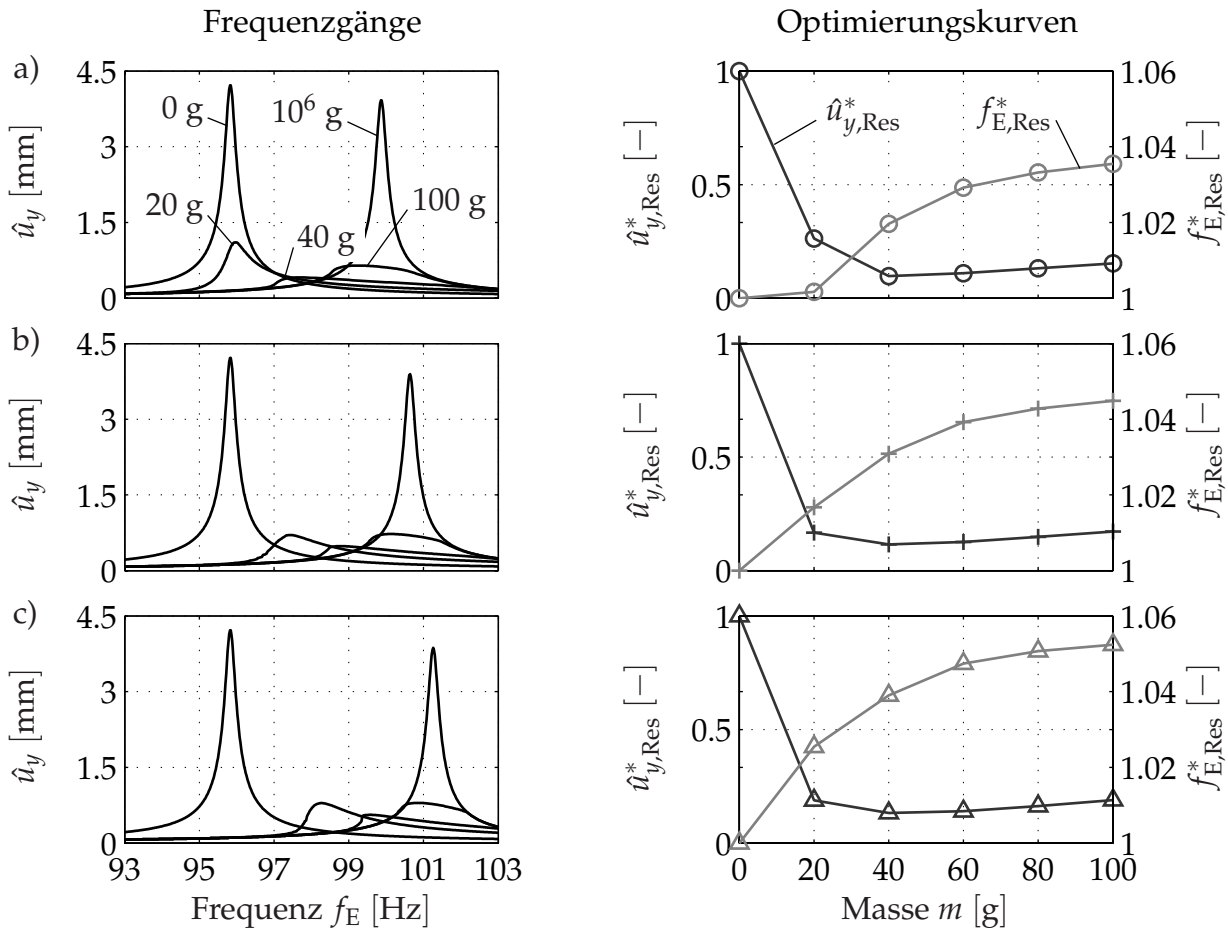


Bild 3.2: Frequenzgänge (links) und Optimierungskurven (rechts) bei Variation der Reibelementmasse: a) zylinderförmiges Reibelement; b) asymmetrisches Reibelement; c) keilförmiges Reibelement

Für die schwingungstechnische Auslegung von Reibungsdämpfern sind nun zwei Fragen zu beantworten, von denen, je nach Auslegungsfall, eine in den Vordergrund treten kann: Wie groß ist die erreichbare Reduktion der Schwingungsamplitude und wie stark wird die Resonanzfrequenz von der Verwendung der Reibelemente beeinflusst? Eine kompakte Darstellung der Resultate der Frequenzgangsimulationen erfolgt daher mit Hilfe so genannter Optimierungskurven, die die Erregerfrequenz $f_{E,Res}^*$ und Schwingungsamplitude $\hat{u}_{y,Res}^*$ im Resonanzfall über der Reibelementmasse in normierter Form mit

$$f_{E,Res}^* = \frac{f_{E,Res}}{f_{S,1}}, \quad \hat{u}_{y,Res}^* = \frac{\hat{u}_{y,Res}}{\hat{u}_{y,0}} \quad (3.1)$$

wiedergeben. Darin bezeichnet $f_{S,1}$ die Eigenfrequenz des 1F-Schwingungsmodes der Schaufel im ungekoppelten Fall und $\hat{u}_{y,0}$ die dann auftretende Schwingungsamplitude. Aus den Verläufen der Resonanzamplitude lassen sich zunächst die optimalen Reibelementmassen zu $m_{opt,zyl} = 40$ g, $m_{opt,asymm} = 42$ g und $m_{opt,keil} = 45$ g ermitteln. Die verschiedenen Reibelementmassen weisen somit vergleichbare optimale Werte auf. Auch die erreichbare Amplitudenreduktion um 90.3% (zylinderförmig), 88.6% (asymmetrisch) bzw. 86.9% (keilförmig) zeigt ähnliche Werte, wobei das zylinderförmige Reibelement

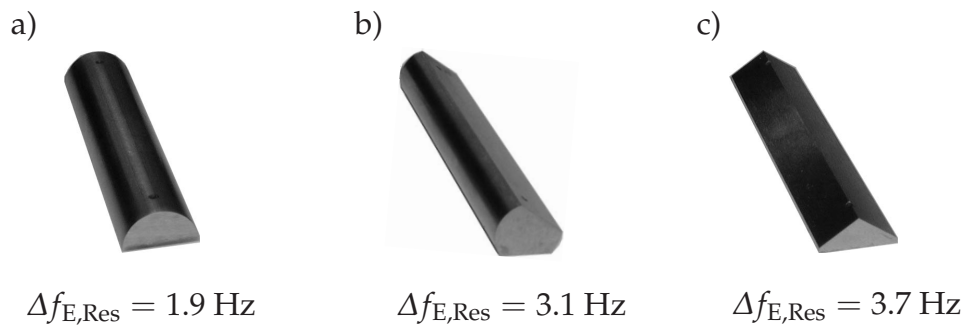


Bild 3.3: Verschiebung der Resonanzfrequenz $f_{E,Res}$ mit $m = 40 \text{ g}$: a) für zylinderförmige Reibelemente; b) für asymmetrische Reibelemente; c) für keilförmige Reibelemente

für die untersuchte Referenzkonfiguration den besten Dämpfungseffekt aufweist. Auffällig ist jedoch die unter Verwendung von Reibelementen mit flächigen Kontakten grundsätzlich höhere Resonanzfrequenz. So führt beispielsweise eine identische Masse von $m = 40 \text{ g}$ zu einem Frequenzshift von 2% (zylinderförmig), 3.1% (asymmetrisch) bzw. 3.9% (keilförmig). Die absoluten Frequenzverschiebungen fallen aufgrund der niedrigen ersten Eigenfrequenz $f_{S,1}$, des kurzen Schaufelhalses und der kleinen Erregerordnung relativ gering aus, vgl. Abschnitt 3.2.3.1 und Abschnitt 3.2.4.1. Verglichen mit zylinderförmigen Reibelementen führen keilförmige Reibelemente jedoch zu einer etwa doppelt so großen Zunahme der Resonanzfrequenz, siehe **Bild 3.3**.

Die Tendenz der ansteigenden Resonanzfrequenz von zylinderförmigen über asymmetrische bis hin zu keilförmigen Reibelementen bei identischen Massen ist, je nach Konfiguration, mehr oder weniger stark ausgeprägt und lässt sich grundsätzlich immer beobachten. Insbesondere bei kleinen Reibelementmassen keilförmiger oder asymmetrischer Reibelemente zeigt sich schon ein signifikanter Einfluss des Dämpfers auf die Resonanzfrequenz, während sich im Fall zylinderförmiger Reibelemente zunächst nur eine Amplitudenreduktion ohne nennenswerte Erhöhung der Resonanzfrequenz einstellt. Der Grund für die deutlichere Verschiebung der Resonanzfrequenz bei asymmetrischen und keilförmigen Reibelementen ist in der zusätzlichen, durch die Normalsteifigkeit der flächigen Kontakte eingebrachte Drehsteifigkeit zu sehen: Die bei einer Relativverdrehung auftretenden Momente bewirken eine Versteifung, die bei zylinderförmigen Reibelementen aufgrund der vernachlässigbaren Kontakthöhe und der damit verbundenen möglichen freien Relativverdrehung des Dämpfers gegenüber den Schaufelfußplatten nicht auftritt. Auf einen Vergleich zwischen den Resonanzfrequenzen unter Verwendung zylinderförmiger und asymmetrischer Reibelemente in realen Beschauelungen wird auch in **Bild 4.10** in Abschnitt 4.3 eingegangen. Die Verwendung von keilförmigen Reibelementen wird in Abschnitt 4.2 nochmals aufgegriffen.

Hinsichtlich der Resonanzamplitude in Abhängigkeit der Masse ist festzustellen, dass eine zu geringe Masse mit $m < m_{opt}$ zu deutlich ansteigenden Amplituden führt, während für $m > m_{opt}$ nur eine geringe Zunahme erfolgt, sodass aus praktischen Gesichtspunkten eine Auslegung stets derart erfolgen sollte, dass die realisierte Masse etwas größer als der theoretisch ermittelte Wert gewählt wird.

Neben dem größeren Frequenzshift weisen Reibelemente mit flächigen Kontakten einen weiteren wesentlichen Unterschied zu zylinderförmigen Reibelementen auf. Zunächst ist insbesondere bei keilförmigen Reibelementen sicherzustellen, dass die Dämpfergeometrie exakt an die Gestaltung der Schaufelfußplatten angepasst ist und keine Winkelfehler auftreten, um ein flächiges Anliegen des Dämpfers sicherzustellen, vgl. auch die Annahmen zur Modellbildung in Abschnitt 2.1.1. Dieser Aspekt wird in Abschnitt 3.6.2.1 nochmals aufgegriffen. An dieser Stelle soll auf das einsetzende *Klappern* eingegangen werden, welches das zeitweilige partielle Abheben des Reibelements von den Fußplatten bezeichnet. Bedingt durch den flächigen Kontakt kann es bei einer Relativverdrehung in den Kontaktzonen zu einer Öffnung des Kontaktes, insbesondere an den Rändern der Kontaktflächen kommen. Als Indikator kann das in Gl. (2.132) angegebene Verhältnis κ_{ζ} aus Schwingungsamplitude in ζ -Richtung und statischer Gleichgewichtslage eines Kontaktpunktes herangezogen werden. Weiterhin gibt der Anteil κ_{Dis} der kurzzeitig Separation aufweisenden Kontaktpunkte an der Gesamtzahl aller diskreten Punktkontakte erste Aufschlüsse über die Tendenz zum Kontaktverlust. Dabei gilt ein ursprünglich mit $\bar{w}_{\zeta, P}^* < 0$ in Kontakt befindlicher Punkt mit $\kappa_{\zeta} > 1$ auch dann als geöffnet, wenn diese Separation während einer Schwingungsperiode nur kurzzeitig auftritt. Der Anteil κ_{Dis} ist in **Bild 3.4a** beispielhaft für ein keilförmiges Reibelement aus **Bild 3.2c** für unterschiedliche Massen gezeigt. Zu Darstellungszwecken wurde hier von einer 11×11 - auf eine 51×51 -Diskretisierung der Kontaktflächen übergegangen. Es wird deutlich, dass der Anteil κ_{Dis} mit geringerer Masse und größerer Schwingungsamplitude im Bereich der Resonanzfrequenz ansteigt. Bei geringeren Schwingungsamplituden und damit kleineren Relativverdrehungen sowie bei großen Massen tritt keine Separation auf. Für den Fall der optimalen Reibelementmasse mit $m = m_{\text{opt}} = 45 \text{ g}$ verbleiben in Resonanz etwa 75% der Kontaktfläche in stetigem Kontakt ohne Separation. Aus den oben genannten Gründen und vor

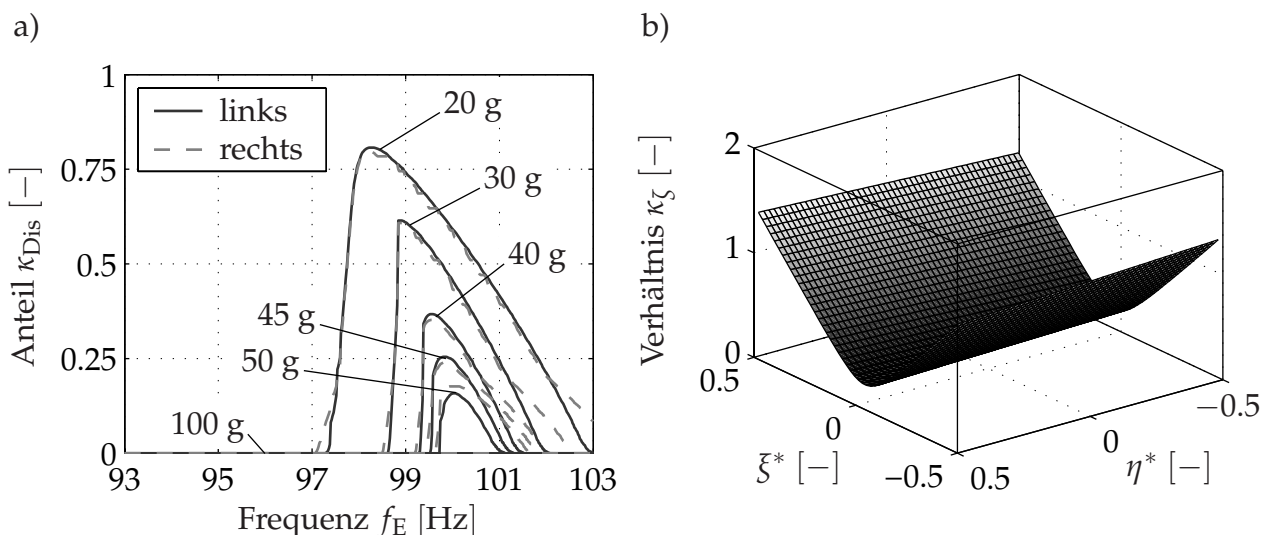


Bild 3.4: Separation bei flächigem Kontakt am keilförmigen Reibelement aus **Bild 3.2c** für verschiedene Massen m : a) Anteil κ_{Dis} diskreter Kontaktpunkte mit zeitweisigem Kontaktverlust im linken und rechten Kontakt; b) Verhältnis κ_{ζ} für $m = 45 \text{ g}$ im Resonanzfall bei $f_E = 99.8 \text{ Hz}$

dem Hintergrund des unerwünschten Zustandes der Separation mit den damit verbundenen Stößen bei erneutem Kontakt wird eine sinnvolle Auslegung der Reibelementmasse mit $m > m_{\text{opt}}$ erfolgen, sodass der Anteil der Kontaktfläche, die zeitweiligen Kontaktverlust aufweist, weiter gemindert wird. An dieser Stelle sei erwähnt, dass bei verschiedenen Konfigurationen beobachtet werden konnte, dass eine beginnende Separation zumeist nahe der optimalen Masse einsetzt.

Aus der Analyse des Verhältnisses κ_{ζ} in **Bild 3.4b** wird deutlich, dass das Reibelement im Fall des untersuchten 1F-Biegemodes zunächst an dem durch die Koordinate $\xi^* = \pm 0.5$ gegebenen oberen und unteren Rand der Kontaktfläche zeitweilig Separation aufweist. Entlang der ${}_Dx$ -Achse des Reiblements ist das Verhältnis κ_{ζ} aufgrund der Symmetrie der gegebenen Konfiguration nahezu konstant. Für den Fall realer Schaufeln mit komplexeren Schwingungsformen, die etwa einen deutlichen Torsionsanteil aufweisen, ist aber auch eine Separation am vorderen bzw. hinteren Rand der Kontaktfläche mit $\eta^* = \pm 0.5$ möglich. Den Berechnungen liegt die Annahme zu Grunde, dass im statischen Gleichgewicht kein Moment um die η -Achse der Kontaktzonen auftritt. Der Fall $\bar{M}_{\eta}^{(\text{OL}')} \neq 0$ folgt z. B. aus einer bestimmten Lage der Kontaktpreferenzpunkte bezüglich des Reiblementschwerpunktes, sodass für das statische Gleichgewicht zusätzlich zu den auf das Reibelement wirkenden Kontaktnormalkräften $\bar{F}_{\zeta, \text{OL}'}$ und $\bar{F}_{\zeta, \text{OR}'}$ auch Momente $\bar{M}_{\eta}^{(\text{OL}')}$ bzw. $\bar{M}_{\eta}^{(\text{OR}')}$ auftreten, vgl. Abschnitt 2.3.2.1. Diese führen dazu, dass die Kontaktnormalkräfte über der Kontakthöhe inhomogen verteilt sind, sodass u. U. schon in der statischen Gleichgewichtslage Separation auftritt. Das Verhältnis κ_{ζ} weist dann nicht mehr den in **Bild 3.4b** dargestellten, nahezu symmetrischen Verlauf bezüglich $\xi^* = 0$ auf. Neben der Schwingungsamplitude hat die Kontakthöhe h_K entscheidenden Einfluss auf den Zustand der Separation, wie in Abschnitt 3.2.1.2 gezeigt wird. In der Realität ausgeführte Reibelemente sind im Betrieb zumeist deutlich höheren als den hier angenommenen Fliehkräften ausgesetzt. Die hieraus resultierende lokale Verformung der Kontaktflächen am Reibelement und an den Schaufelfußplatten wird aufgrund der Modellannahme einer starren Kontaktfläche nicht berücksichtigt. Es ist daher zu erwarten, dass sich in der realen Anwendung ein zeitweiliges Öffnen des Kontaktes erst bei größeren als den hier angegebenen Schwingungsamplituden ergeben wird, da das Reibelement aufgrund der elastischen Verformung besser an den Schaufelfußplatten anliegt.

Abschließend sei hinsichtlich der Optimierung der Reibelementmasse bemerkt, dass alternativ zu einer Variation der Masse vereinzelt auch die so genannte *dampfer load* zur Dämpferoptimierung herangezogen wird, siehe u. a. JARELAND [80]. Diese bezeichnet eine konstante, von der Drehzahl unabhängige, auf das Reibelement wirkende Fliehkraft F_C . Dieses ist aber bei der Bestimmung der nichtlinearen Frequenzgänge einer rotierenden Beschauflung in zweierlei Hinsicht unvorteilhaft: Aufgrund der Kopplung von Dreh- und Erregerfrequenz über die Erregerordnung korrespondiert nach Gl. (2.124) zu einer konstant angenommenen Fliehkraft stets eine entsprechende drehzahlabhängige Reibelementmasse. Im Sinne einer konstruktiven Auslegung des Reiblements ist eine konstante Masse wesentlich anschaulicher zu interpretieren. Weiterhin können durch die Vernachlässigung der Drehzahlabhängigkeit der Fliehkraft und somit der Kontaktnor-

malkräfte einige Effekte nicht abgebildet werden, die zu einer deutlichen Abweichung der Frequenzgänge führen, wie dies besonders in Abschnitt 3.2.3.1 im Anschluss an eine Variation der radialen Position des Reiblements gezeigt wird. Die Annahme einer konstanten Fliehkraft ist nur bei konstanter oder in geringen Grenzen schwankender Drehzahl bzw. Erregerfrequenz zulässig.

3.2.1.2 Kontaktflächengeometrie

Die Kontaktlänge ℓ_K ist für den betrachteten 1F-Schwingungsmodus aufgrund der ausgeprägten Symmetrie der Struktur von untergeordneter Bedeutung. Werden andere Schwingungsformen betrachtet, ergibt sich aber ein durchaus bemerkenswerter Einfluss, siehe Abschnitt 3.3. Eine Variation der explizit vorgegebenen Kontakthöhe h_K ist nur für den flächigen Kontakt bei keilförmigen oder asymmetrisch gestalteten Reibelementen sinnvoll, da sich bei gekrümmten Kontaktflächen stets sehr kleine Kontakthöhen ergeben, vgl. Gl. (2.109) bzw. Gl. (2.112). Die Ergebnisse einer simultanen Variation der Kontakthöhe $h_K = h_{K,L} = h_{K,R}$ an einem keilförmigen Reiblement sind in **Bild 3.5** dargestellt. Aus **Bild 3.5d** wird zunächst deutlich, dass eine Variation der Kontakthöhe keinen signifikanten Einfluss auf die optimale Reibelementmasse hat, sodass die Ergebnisse aus **Bild 3.5a** und **Bild 3.5c** nahezu identische Verläufe zeigen. Bemerkenswert ist einerseits die Zunahme der Resonanzfrequenz, die sich mit der größeren Drehsteifigkeit des Kontaktes mit steigender Kontakthöhe begründen lässt, siehe auch **Bild 3.5b**. Weiterhin steigt die Resonanzamplitude an, d. h. die Dämpfungswirkung nimmt bei größeren Kontakthöhen ab. Die maximal erreichbare Amplitudenreduktion wird für $h_K \rightarrow 0$ erreicht, was den Ergeb-

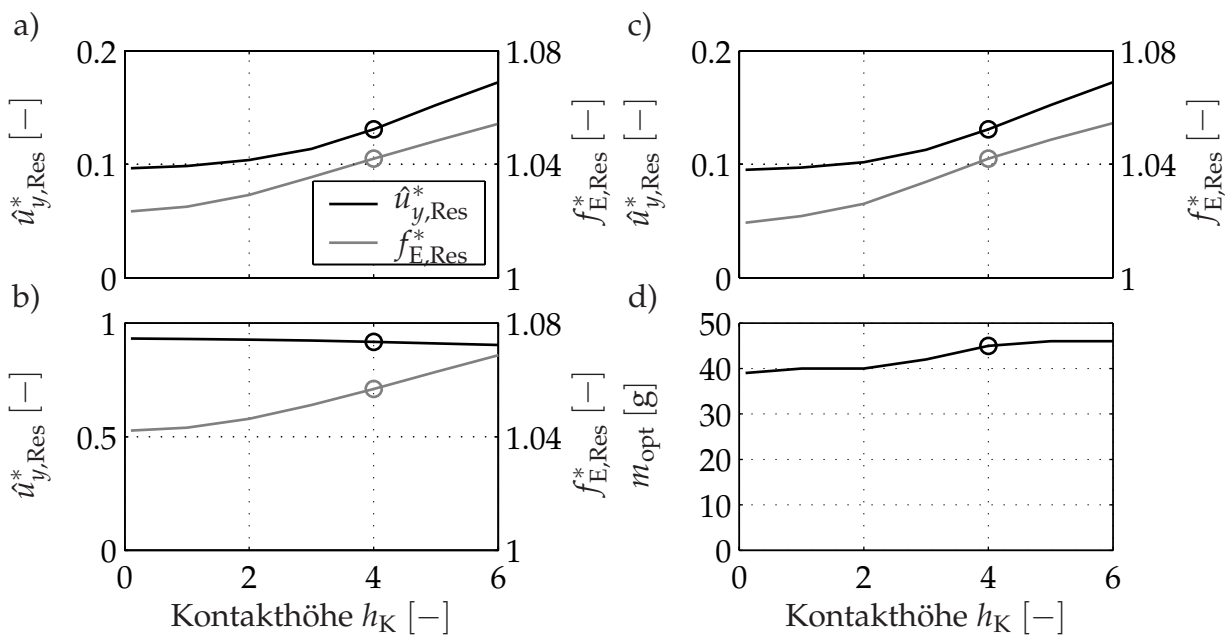


Bild 3.5: Variation der Kontakthöhe h_K am keilförmigen Reiblement: a) für konstante Dämpfermasse; b) im linearen Grenzfall; c) für optimierte Dämpfermasse; d) optimale Dämpfermasse

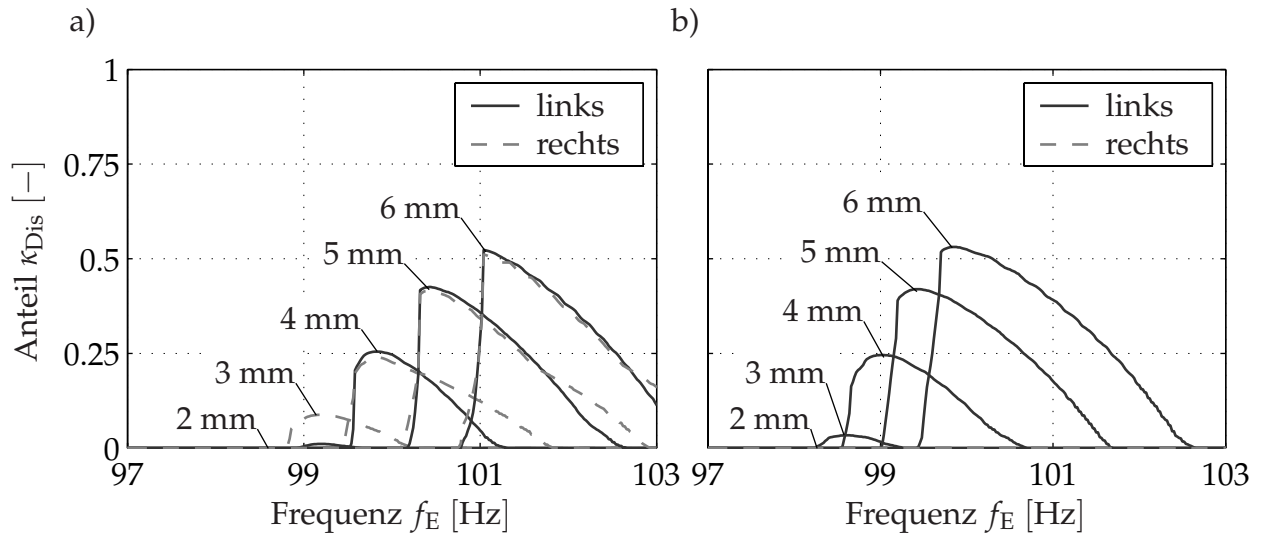


Bild 3.6: Separation bei flächigen Kontakten für verschiedene Kontakthöhen h_K :
a) keilförmiges Reibelement mit $m = 45$ g; b) asymmetrisches Reibelement mit $m = 45$ g

nissen eines zylinderförmigen Reiblements entspricht². Der Grund für die abnehmende Dämpfungswirkung liegt u. a. in der verstärkt einsetzenden Separation der Kontaktflächenränder, die **Bild 3.6** entnommen werden kann. Am Beispiel eines keilförmigen und eines asymmetrischen Reiblements mit jeweils $m = 45$ g lässt sich deutlich die Tendenz zu großflächigem Abheben mit steigender Kontakthöhe erkennen. So führt eine Kontakthöhe $h_K = 6$ mm zu zeitweiligem Kontaktverlust bei mehr als der Hälfte aller Punktkontakte der Kontaktfläche. Dies gilt sowohl für ein keilförmiges als auch ein asymmetrisches Reibelement, wobei bei letzterem nur der flächige Kontakt von einer Separation betroffen ist, siehe hierzu auch die experimentellen Untersuchungen in Abschnitt 4.1.

3.2.1.3 Reibelementelastizität

Neben der Gestaltung der Kontaktzonen hat auch die Reibelementgeometrie und die damit verbundene Elastizität des Dämpfers Einfluss auf den zu erwartenden Dämpfungseffekt. Zu diesem Zweck wird das sehr steife Referenzmodell des vollzylinderförmigen Reiblements durch das in **Bild 2.11e** und **Bild 3.7** dargestellte elastischere Reibelement ersetzt, welches durch sechs Starrkörper- sowie zehn weitere elastische Moden beschrieben wird. Zu dem Zweck der Untersuchung der Elastizität des Reiblements kann u. a. eine Variation der Position der Kontaktreferenzpunkte OL' und OR' in der in **Bild 3.7** dargestellten Weise erfolgen, sodass beginnend mit Position 1 die wirksame Elastizität zwischen den beiden Referenzpunkten zu Position 5 kontinuierlich abnimmt, siehe auch PANNING ET AL. [121]. Der aus einer Veränderung der Position der Kontaktpunkte resultierende veränderte Kontaktwinkel γ wird aus den oben genannten Gründen nicht simultan variiert.

²Wird nur eine Kontakthöhe variiert, führt dies z. B. im Grenzfall $h_{K,L} \rightarrow 0$ auf die Ergebnisse des asymmetrischen Reiblements nach **Bild 1.12b**.

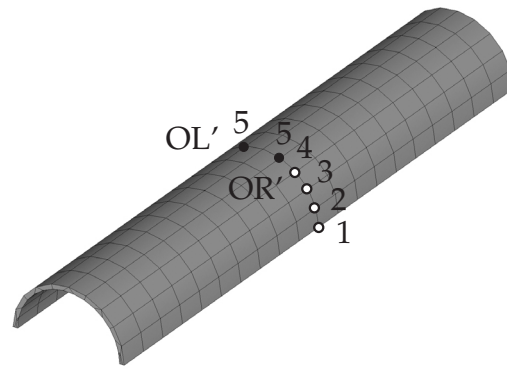


Bild 3.7: Elastisches Reibelement mit Variation der Position der Kontaktreferenzpunkte OL' und OR'

Aus **Bild 3.8** wird deutlich, dass mit zunehmender Elastizität die erreichbare Amplitudenreduktion deutlich gemindert wird, da in diesem Fall verstärkt eine elastische Verformung des Reibelementes auftritt und die notwendigen Relativverschiebungen in den Kontakten gemindert werden. Gleichzeitig nimmt die Resonanzfrequenz mit zunehmender Reibelementelastizität ab. Im Fall der Position 5 verhält sich das in **Bild 3.7** dargestellte Reibelement zwischen den Kontaktpunkten nahezu wie ein Starrkörper und die Ergebnisse entsprechen den als Referenz hinzugezogenen Resultaten des starren, vollzylinderförmigen Reibelementes. Die zugehörige optimale Reibelementmasse nimmt mit größerer Reibelementelastizität ab, da sonst stets Haften vorliegt, vgl. auch den qualitativen Verlauf der Reibhysteresen in **Bild 1.10**. Die Ergebnisse bestätigen die prinzipiellen Untersuchungen von GRIFFIN [65] und JARELAND [79], die auf der Basis einfacher mechanischer Ersatzmodelle die Forderung nach möglichst steifen Reibelementen aufstellen. Der Vor-

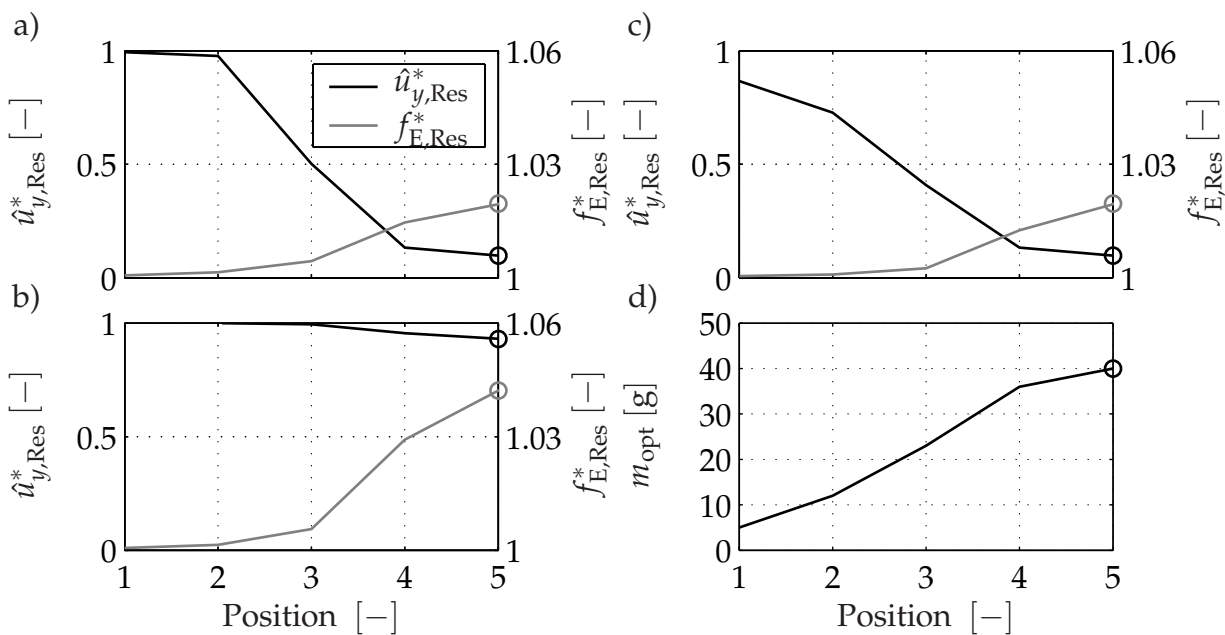


Bild 3.8: Variation der Position der Kontaktreferenzpunkte am elastischen Reibelement nach **Bild 3.7**: a) für konstante Dämpfermasse; b) im linearen Grenzfall; c) für optimierte Dämpfermasse; d) optimale Dämpfermasse

teil des hier vorgeschlagenen Vorgehens liegt aber in der unmittelbaren Verwendung der modalen Eigenschaften des real ausgeführten Reiblements und der Möglichkeit, auch dreidimensionale Schwingungsformen von Schaufel und Reibelement ohne weitere Modellanpassung oder der Ermittlung von Ersatzsteifigkeiten abbilden zu können. An dieser Stelle sei angemerkt, dass die modalen Nachgiebigkeiten in guter Näherung durch statische Nachgiebigkeiten approximiert werden können, da die Eigenfrequenzen der unteren elastischen Moden des Reiblements weit oberhalb der betrachteten Erregerfrequenz liegen. Für den Fall sehr weicher Reiblemente wäre die Annahme ebener Kontaktflächen kritisch zu prüfen, vgl. auch Abschnitt 2.6.1. Vor dem Hintergrund der Ergebnisse aus **Bild 3.8** ist dieser Fall aber ohnehin wenig praxisrelevant.

3.2.1.4 Reibelementträgheit

Die Trägheit des Reiblements wurde in der Definition des Referenzsystems zunächst nicht berücksichtigt. Im Allgemeinen ist dies aufgrund der geringen Reibelementmasse auch nicht notwendig, sofern ausreichend geringe Erregerfrequenzen betrachtet werden. In zweierlei Hinsicht kann jedoch die Berücksichtigung der Trägheit erforderlich sein: zum einen bei sehr großen Reibelementmassen und zum anderen bei höheren Schwingungsmoden und den damit verbundenen größeren Eigenfrequenzen. Der erste Sachverhalt wird aus **Bild 3.9a** deutlich, worin der Einfluss der Reibelementträgheit auf den 1F-Schwingungsmodus für verschiedene Massen dargestellt ist. Im Sinne der Interpretierbarkeit der Simulationsergebnisse wirkt sich die dargestellte Massenvariation nur auf die Trägheitseigenschaften, jedoch *nicht* auf die auf das Reibelement wirkende Fliehkraft aus, für die eine konstante Masse von $m = m_{\text{opt}} = 40 \text{ g}$ maßgeblich ist. Aus den Ergebnissen wird deutlich, dass sich erst bei sehr großen Massen ein signifikanter Einfluss der Trägheit einstellt. Dieser schlägt sich in einer verminderten Resonanzfrequenz des gekoppelten Schaufel-Dämpfer-Systems nieder. Die geringere Schwingungsamplitude lässt sich mit

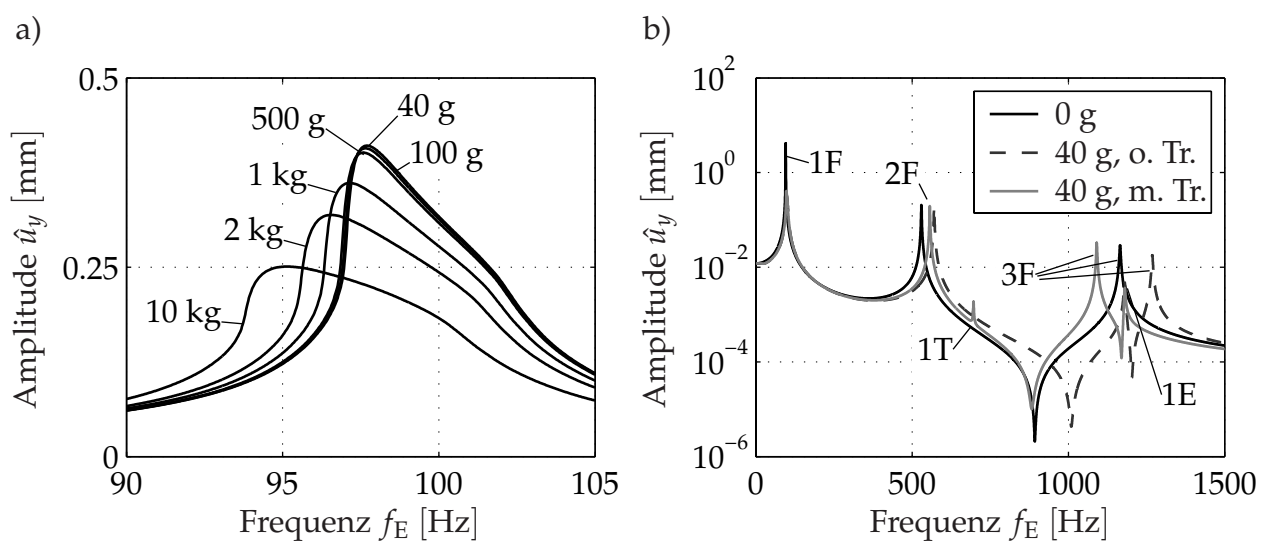


Bild 3.9: Einfluss der Reibelementträgheit: a) Frequenzgänge im Bereich des 1F-Modes; b) Frequenzgänge im Bereich der ersten fünf Schwingungsmoden ohne Reiblement sowie mit Reiblement mit (m. Tr.) und ohne (o. Tr.) Trägheit für $m = 40 \text{ g}$

der geringeren Absolutbewegung des Dämpfers und somit größeren Relativbewegung in den Kontaktzonen begründen. In den Frequenzgängen treten nun entsprechend der Anzahl der Starrkörperfreiheitsgrade des Reibelements weitere mögliche Resonanzstellen auf. Grundsätzlich sind auch Tilgungseffekte mit geringen Schwingungsamplituden der Schaufel möglich, die aber erst bei sehr großen Reibelementmassen auftreten und damit kaum praktische Bedeutung haben.

Wird der Einfluss der Trägheit des Dämpfers mit $m = m_{\text{opt}} = 40$ g auf höhere Schwingungsmoden untersucht, so lässt sich **Bild 3.9b** entnehmen, dass bei ausreichend großen Erregerfrequenzen auch geringe Dämpfermassen zu einer deutlichen Verminderung der Resonanzfrequenz führen können. Dieser Effekt tritt verstärkt bei den relativ großen Schwingungsamplituden der F-Moden auf. Bemerkenswert ist in diesem Zusammenhang der ausgeprägte Einfluss des Reibelements auf die Resonanzfrequenzen höherer F-Moden auch ohne Berücksichtigung der Trägheit, siehe auch Abschnitt 3.3. Dies lässt sich mit der Lage der Schwingungsknoten und -bäuche und den daraus resultierenden Schwingungsamplituden in den Kontaktpunkten begründen, die den Einfluss des Dämpfers auf das Gesamtverhalten bestimmen.

3.2.2 Variation der Kontakteigenschaften

Zu den wichtigen physikalischen Eigenschaften der Kontaktflächen zählen der Reibkoeffizient μ , die Kontaktsteifigkeiten $k_{N,0}$ und $k_{T,0}$ sowie der in Abschnitt 2.3.2.1 eingeführte Rauheitsparameter R_0 . Die in diesem Abschnitt diskutierten Parameter haben z. T. großen Einfluss auf das Kontaktgeschehen, sind aber konstruktiv zumeist nur sehr eingeschränkt modifizierbar. So lassen sich bestimmte Reibkoeffizienten und Rauheitsgrößen u. U. durch die Wahl einer bestimmten Materialkombination, einer Beschichtung der Kontaktflächen oder der Anwendung spezieller Bearbeitungsverfahren zur Herstellung einer vorgegebenen Oberflächengüte in gewissen Grenzen variieren.

3.2.2.1 Reibkoeffizient

Eine Variation des Reibkoeffizienten μ hat zunächst den gleichen Einfluss wie eine Variation der Kontaktnormalkraft bzw. der Reibelementmasse, vgl. Abschnitt 3.2.1.1, da das Produkt aus Normalkraft und Reibkoeffizient entscheidend für das einsetzende Gleiten ist, vgl. auch die Normierung in Gl. (2.135). Die in **Bild 3.10a** dargestellten Ergebnisse für eine Variation des Reibkoeffizienten bei konstanter Reibelementmasse zeigt demnach qualitativ gleiche Verläufe wie **Bild 3.2a** mit einem starken Anstieg der Resonanzamplitude bei kleineren Reibkoeffizienten. Analog zu der Wahl einer sinnvollen Reibelementmasse mit $m > m_{\text{opt}}$ ist bei unsicherem Reibkoeffizienten für eine Auslegungsrechnung der kleinere Wert anzusetzen. Die Ergebnisse für eine unendlich große Reibelementmasse zeigen nach **Bild 3.10b** konstante Werte für Resonanzfrequenz und -amplitude, da sich das Reibelement ohnehin im Zustand des Haftens befindet und eine Variation des Reibkoeffizienten keinen Einfluss hat. Wird die Reibelementmasse optimiert, so ergibt sich nach **Bild 3.10d** ein hyperbolischer Verlauf, gemäß der Forderung, dass das Produkt μF_N

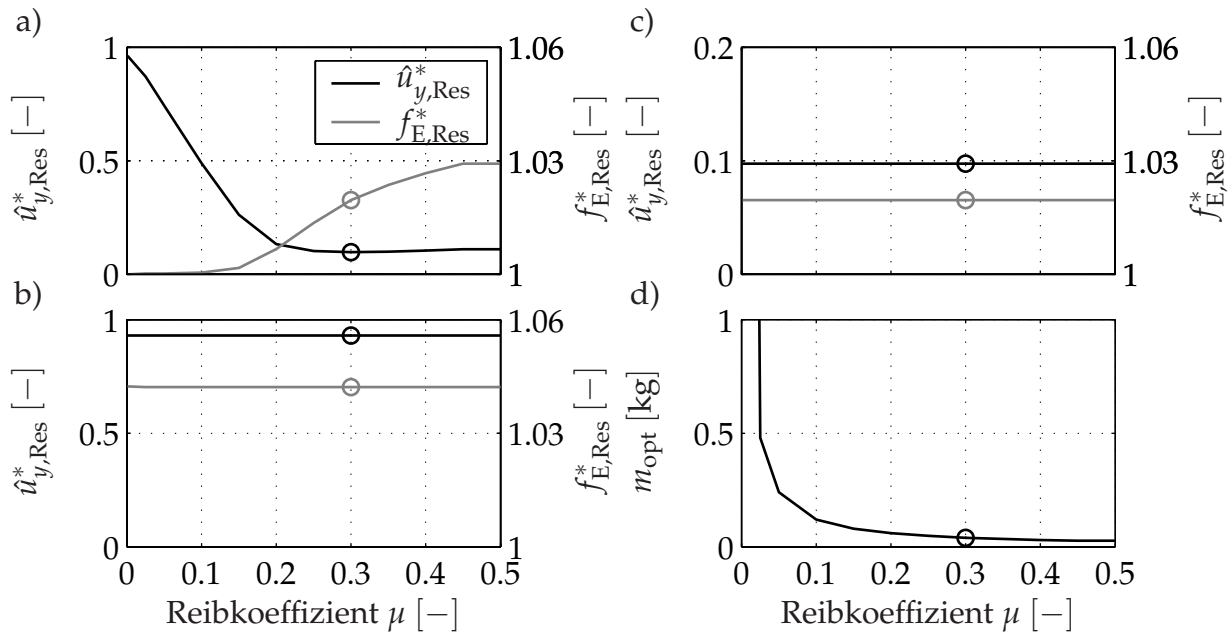


Bild 3.10: Variation des Reibkoeffizienten μ : a) für konstante Dämpfermasse; b) im linearen Grenzfall; c) für optimierte Dämpfermasse; d) optimale Dämpfermasse

optimiert werden muss und die Kontaktnormalkraft F_N direkt proportional der Reibelementmasse m ist. Die erreichbare Amplitudenreduktion ist dann nach **Bild 3.10c** bei optimierter Reibelementmasse von dem Reibkoeffizienten unabhängig. Diese Aussagen gelten aber nur für den Fall, dass sich eine Variation des Reibkoeffizienten exakt wie eine Variation der Kontaktnormalkraft auswirkt. Zusätzlich kann sich aber eine veränderte Normalkraft, etwa im Fall der Berücksichtigung des in Abschnitt 3.2.2.4 untersuchten Rauheitseinflusses, auf die Gleichgewichtslage und die effektiven Kontaktsteifigkeiten auswirken. Da der Reibkoeffizient hierauf keinen Einfluss hat, muss in diesem Fall eine getrennte Betrachtung der Parameter anstelle des Produktes μF_N erfolgen.

Neben der dynamischen Schwingungsantwort des Systems wirkt sich der Reibkoeffizient auch auf eine mögliche statische Gleichgewichtslage des Reibelements aus. Diese wird in Abschnitt 3.6.2.1 untersucht.

3.2.2.2 Kontaktsteifigkeiten

Die Simulationsergebnisse einer Variation der nominellen Kontaktsteifigkeiten $k_{T,0}$ und $k_{N,0}$ zeigt **Bild 3.11**. Dem obigen Vorgehen folgend, wird zunächst eine Variation der tangentialen Kontaktsteifigkeit bei konstanter Normalkontaktsteifigkeit (durchgezogene Linien) und anschließend eine Variation der Normalsteifigkeit bei konstanter Tangentialkontaktsteifigkeit (gestrichelte Linien) vorgenommen. Da beide Parameter physikalisch eng miteinander gekoppelt sind, werden zusätzlich die Ergebnisse einer simultanen Variation beider Größen dargestellt (gepunktete Linien). Allen Simulationen liegt die Annahme symmetrischer Kontaktbedingungen mit $k_{T,0L} = k_{T,0R}$ sowie $k_{N,0L} = k_{N,0R}$ zu Grunde. Aus den dargestellten Ergebnissen wird zunächst deutlich, dass beide Parameter grundsätzlich ähnliche Auswirkungen auf das Schwingungsverhalten und darüber

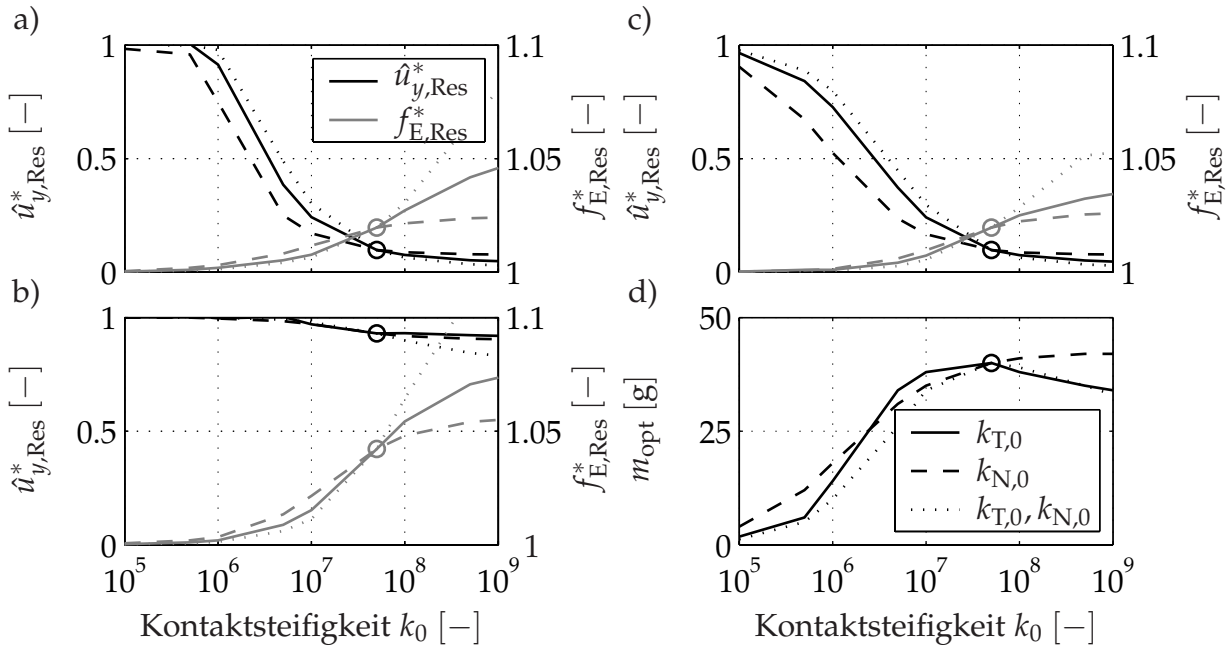


Bild 3.11: Variation der nominellen Kontaktsteifigkeiten $k_{T,0}$ (durchgezogene Linien) und $k_{N,0}$ (gestrichelte Linien) sowie simultane Variation beider Größen (gepunktete Linien): a) für konstante Dämpfermasse; b) im linearen Grenzfall; c) für optimierte Dämpfermasse; d) optimale Dämpfermasse

hinaus qualitativ den gleichen Einfluss wie die **Bild 3.8** zu entnehmende Reibelementelastizität aufweisen. Dies ist aufgrund der in **Bild 2.36** dargestellten Reihenschaltung der beteiligten Elastizitäten auch zu erwarten. Bei konstanter Reibelementmasse zeigt sich mit abnehmender Steifigkeit eine Zunahme der Schwingungsamplitude, siehe **Bild 3.11a**. Diese ist dadurch begründet, dass mit abnehmender Steifigkeit zunehmend elastische Verformung auftritt, sodass die zur Erzeugung von Reibkräften notwendigen Relativverschiebungen in geringerem Maße oder gar nicht mehr auftreten. Dabei tritt, je nach Verhältnis der tangentialen zur normalen Kontaktsteifigkeit vornehmlich eine Verformung in tangentialer oder normaler Richtung auf. Die Abnahme der Resonanzfrequenz ist mit der insgesamt geringeren zusätzlichen Steifigkeit zu begründen. Da beide Steifigkeiten qualitativ ähnliche Verläufe aufweisen, verstärkt sich deren Einfluss, sodass eine simultane Variation den größten Einfluss auf Resonanzamplitude und -frequenz zeigt. Gleiches gilt für den in **Bild 3.11b** dargestellten linearen Grenzfall. Eine Erhöhung der Steifigkeiten zieht zwangsläufig größere Resonanzfrequenzen nach sich. Die geringfügige Amplitudenreduktion ist im Fall des Haftens des Reiblements ausschließlich auf die erhöhte statische Steifigkeit des Systems zurückzuführen. Die in **Bild 3.11c** dargestellten Resultate für eine optimierte Reibelementmasse zeigen ähnliche Verläufe wie für eine konstante Masse. Eine signifikante zusätzliche Amplitudenreduktion lässt sich nur im Bereich sehr kleiner Steifigkeiten erzielen. Die zugehörigen optimalen Massen zeigt **Bild 3.11d**. Die kleineren optimalen Massen bei geringeren Steifigkeiten resultieren unmittelbar aus der in Gl. (2.135) angegebenen Normierung der Relativverschiebungen für den Tangentialkontakt: Die Haftgrenze μF_N wird bei geringen Steifigkeiten erst bei sehr kleinen Massen erreicht, sodass entsprechende Reibkräfte erzeugt werden können.

3.2.2.3 Normalkraftverteilung

Der Einfluss der in Abschnitt 2.3.2.1 beschriebenen Verteilung der Normalkräfte in der Kontaktzone kann den Frequenzgängen in **Bild 3.12a** entnommen werden. Zu diesem Zweck wird die Normalkraft- bzw. Pressungsverteilung $p(\xi)$ für eine gekrümmte Kontaktfläche durch eine konstante Pressung $p = \text{const.}$ ersetzt. Die zugehörigen Optimierungskurven sind **Bild 3.12b** zu entnehmen. Hieraus wird deutlich, dass die Verteilung der Normalkräfte keinen signifikanten Einfluss auf das globale Schwingungsverhalten hat. Die Frequenzgänge zeigen aber u. a. in dem markierten Bereich für eine konstante Normalkraftverteilung verstärkt Makroschlupfverhalten, da die Schaufelgeometrie deutliche Symmetrieeigenschaften aufweist. Hieraus ergeben sich für den 1F-Mode nahezu identische Relativverschiebungen aller Punkte in der Kontaktfläche. Für eine inhomogene Verteilung stellt sich eher Mikroschlupfverhalten ein, da identische Relativverschiebungen aufgrund der individuell verschiedenen Normalkräfte zu Haft- und Gleitbereichen in der Kontaktfläche führen. Dies wird besonders durch die Darstellung der in den Kontaktflächen während einer Schwingungsperiode dissipierten Energie deutlich, siehe auch Abschnitt 3.6.2.2. Hierzu ist in **Bild 3.13** die Verteilung der normierten spezifischen dissipierten Energie

$$\tilde{W}_{R,L}^* = \frac{\Delta W_{R,L}}{\Delta A_{K,L}} \frac{A_{K,L}}{W_{R,L}} = n_{\text{Dis},L} \frac{\Delta W_{R,L}}{W_{R,L}} \quad (3.2)$$

in der jeweils linken Kontaktzone für den Fall $m = 70 \text{ g}$ und $f_E = 101.5 \text{ Hz}$ dargestellt. Aus **Bild 3.13a** lässt sich deutlich die für eine gekrümmte Kontaktfläche typische Verteilung der Energiedissipation über der Kontaktkoordinate ξ erkennen: Im inneren Bereich der Kontaktfläche mit $\xi^* = 0$ stellen sich aufgrund der Normalkraftüberhöhung Haftbereiche ein, sodass die Energiedissipation verschwindet. An den Rändern des Kontaktes

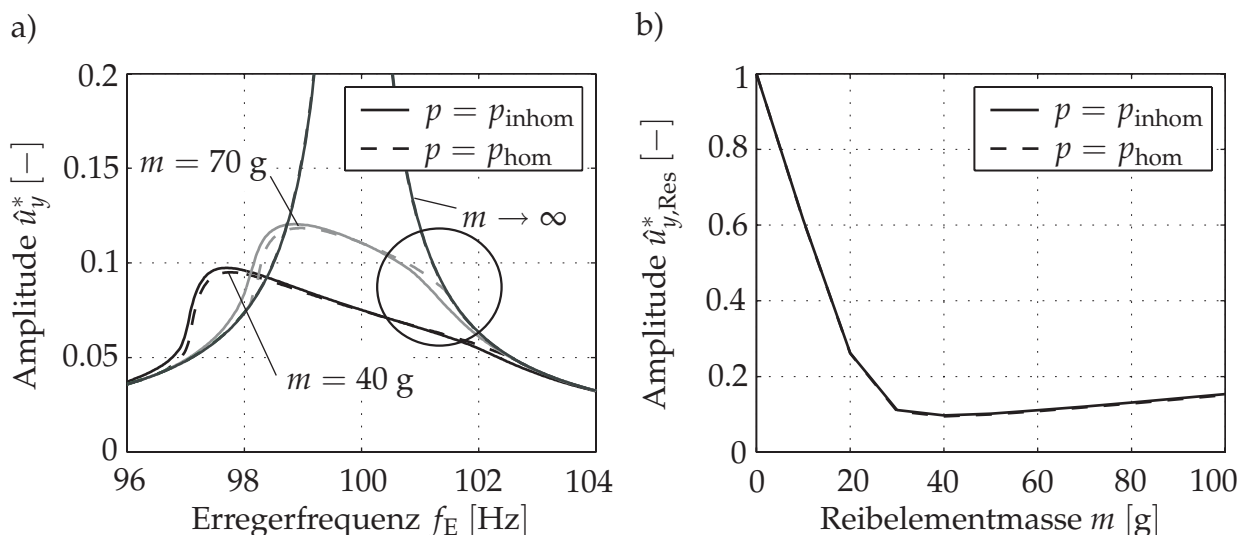


Bild 3.12: Einfluss der Normalkraftverteilung: a) Frequenzgänge für verschiedene Reibelementmassen und inhomogene (durchgezogene Linien) bzw. homogene (gestrichelte Linien) Verteilung der Normalkräfte; b) maximale Amplitude über der Reibelementmasse

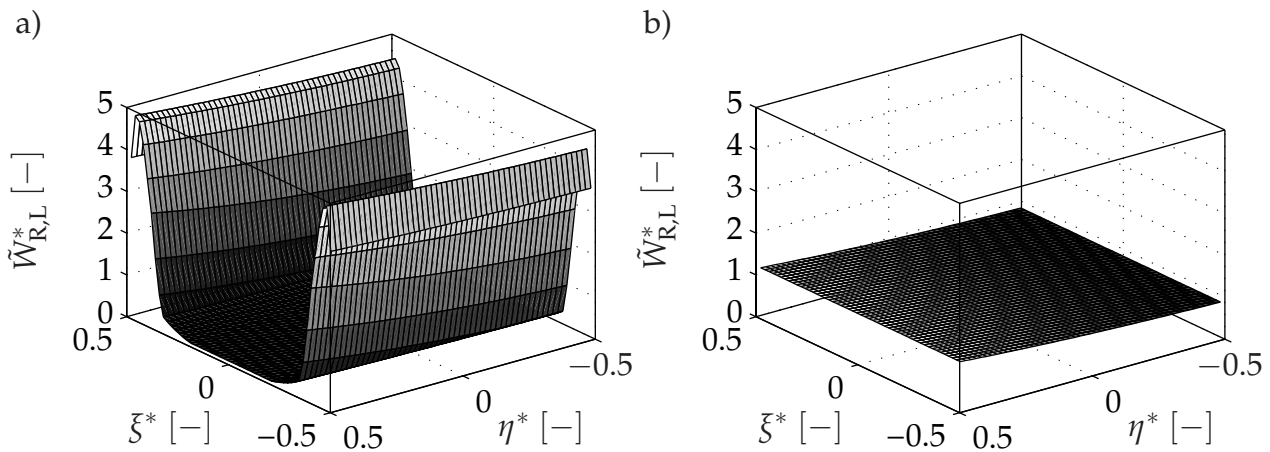


Bild 3.13: Verteilung der dimensionslosen spezifischen Energiedissipation: a) für inhomogene Verteilung der Normalkräfte; b) für konstante Normalkraftverteilung

mit $\xi^* = \pm 0.5$ hingegen wird die Flächenpressung etwa nach Gl. (2.108) oder Gl. (2.115) zu null, sodass auch hier aufgrund der fehlenden Reibkräfte die Energiedissipation gegen null geht³. Zwischen diesen Bereichen tritt ein Maximum der Energiedissipation auf, das u. a. von SEXTRO [147] für einen HERTZ'schen Kontakt beschrieben wird. **Bild 3.13b** zeigt dagegen die für eine konstante Normalkraftverteilung erwartete nahezu homogene Verteilung der Energiedissipation, die sich nur entlang der η -Koordinate des Kontaktes aufgrund der nicht vollständig gegebenen Symmetrie der Schaufelfußplatten durch den Anstellwinkel β leicht verändert. Interessanterweise wirkt sich die deutlich voneinander abweichende Verteilung der Energiedissipation nur unwesentlich auf das globale Schwingungsverhalten aus, siehe **Bild 3.12**.

3.2.2.4 Rauheit

Wird im Gegensatz zum oben definierten Referenzfall die Rauheit der Kontaktflächen mit Hilfe des in Abschnitt 2.3.2.1 definierten Rauheitsparameters R_0 berücksichtigt, ergeben sich die in **Bild 3.14** dargestellten Ergebnisse. Durch Berücksichtigung der Oberflächenrauheiten werden die effektiven Kontaktsteifigkeiten gemäß Gl. (2.106) durch den von der Normalkraft abhängigen Materialanteil M_r aus Gl. (2.102) gegenüber den Nominalwerten aus **Tabelle 3.1** gemindert, da nicht die gesamte nominelle Kontaktfläche A_K in Kontakt steht. Diese Abnahme der Kontaktsteifigkeiten bewirkt sowohl bei konstanter als auch optimierter Reibelementmasse eine Minderung der erreichbaren Amplitudenreduktion bei gleichzeitiger Abnahme der Resonanzfrequenz, siehe **Bild 3.14a** und **c**. Für den Fall unendlich großer Reibelementmasse nimmt der Materialanteil den Wert $M_r = 1$ an (Vollkontakt, siehe **Bild 2.18**), sodass die nominellen Kontaktsteifigkeiten $k_{N,0}$ und $k_{T,0}$ wirksam werden und sich identische Resultate für alle Rauheitsparameter R_0 ergeben, siehe **Bild 3.14b**.

³Dieser Wert wird in **Bild 3.13a** nur aufgrund einer endlichen Diskretisierung nicht erreicht.

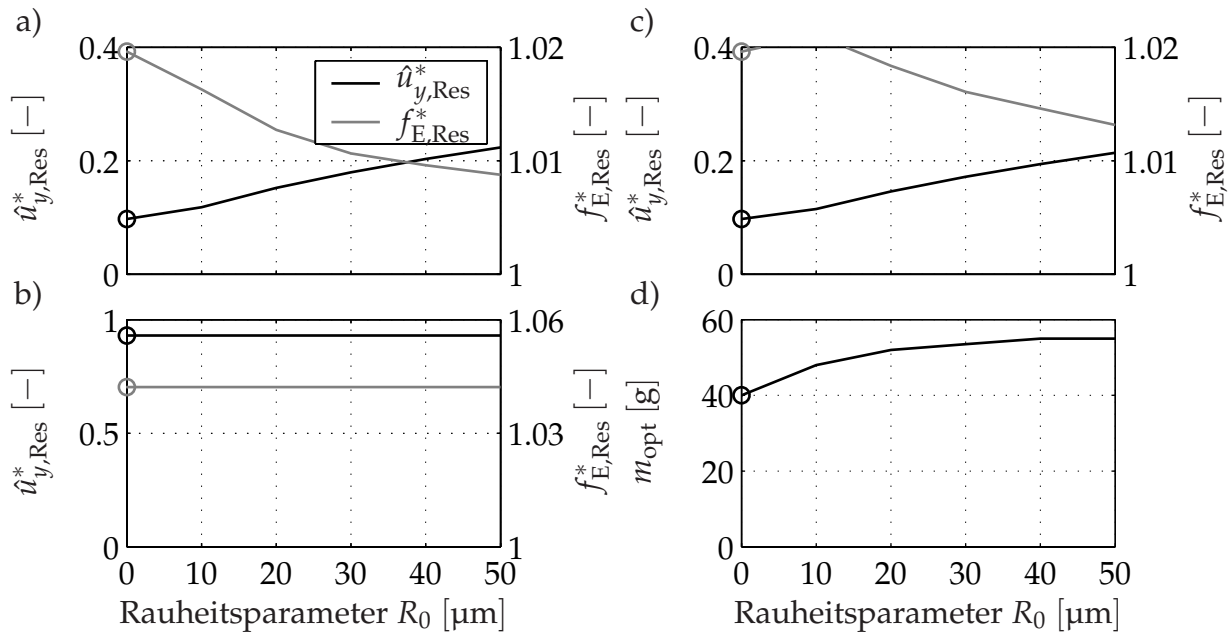


Bild 3.14: Variation des Rauheitsparameters R_0 : a) für konstante Dämpfermasse; b) im linearen Grenzfall; c) für optimierte Dämpfermasse; d) optimale Dämpfermasse

3.2.3 Einfluss der Schaufelgeometrie

Zu den relevanten Schaufelparametern, die die Effektivität des Reibungsdämpfers beeinflussen, zählen zum einen der Kopplungsort, d. h. die radiale Position r_P der Fußplatten und somit der radiale Abstand der Kontaktpunkte von der Drehachse. Dieser kann auch über das Verhältnis der Schaufelhals- zur Schaufelblattlänge, der so genannten *shank ratio*, ausgedrückt werden. Entscheidend für den Einfluss des Kopplungsortes ist hierbei die Änderung der modalen Größen, insbesondere der Eigenvektoren und somit die Verformung der Schaufel an den Koppelstellen. Zum anderen sind die schaufelseitig vorgegebenen Kontaktwinkel γ_L und γ_R von Bedeutung für die Dämpferauslegung.

3.2.3.1 Kopplungsort

Im Zusammenhang mit der Änderung des Kopplungsortes soll ausschließlich der Einfluss der veränderten modalen Parameter der Schaufel auf die Dämpferoptimierung untersucht werden. Eine simultan erforderliche Veränderung der radialen Position r_D des Reibelementschwerpunktes wird aus den oben genannten Gründen der Analyse des Einflusses einzelner Parameter nicht vorgenommen⁴. Die Untersuchung des Einflusses der Koppelposition erfordert modifizierte Finite-Element-Modelle, die entsprechend veränderte Eigenvektoren und -werte liefern. Aus diesen Gründen erfolgt die Darstellung der normierten Resonanzfrequenzen und -amplituden derart, dass die *jeweiligen* Werte der Schwingungsamplitude und Eigenfrequenz der ungekoppelten Schaufel zur Normierung herangezogen werden, um die Effektivität der Reibungsdämpfer in den konkreten Konfigurationen beurteilen zu können.

⁴Unter Zuhilfenahme von Gl. (2.120) ließe sich die veränderte Position des Reibelementschwerpunktes zur Optimierung der Reibelementmasse leicht berücksichtigen.

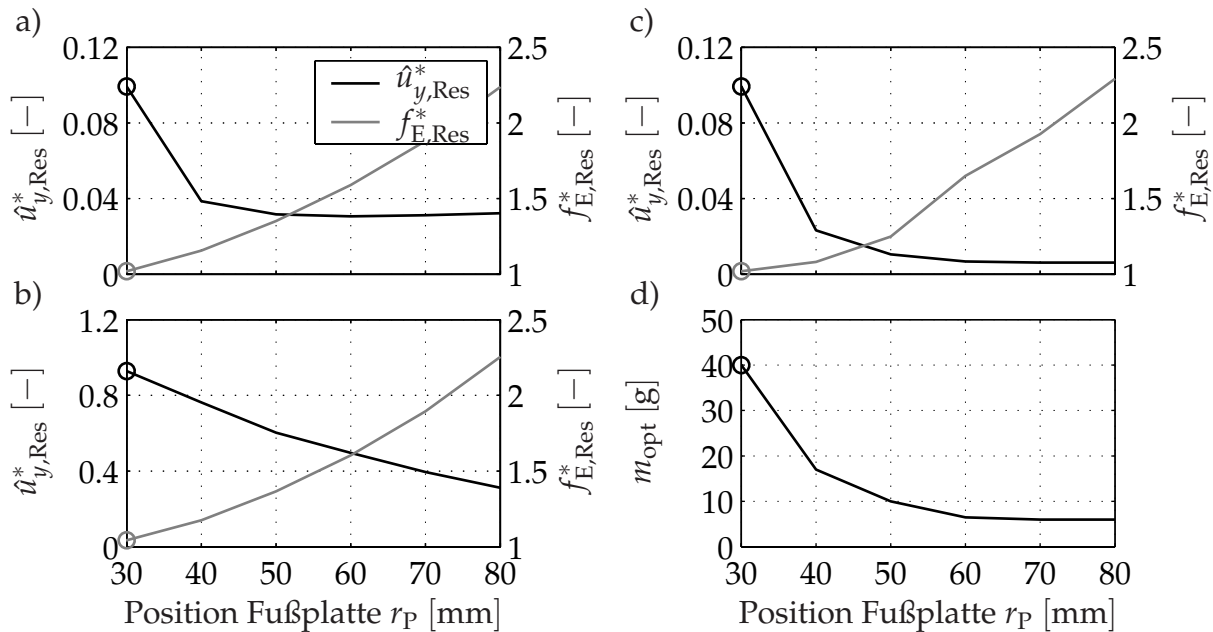


Bild 3.15: Variation der radialen Position r_p der Fußplatten: a) für konstante Dämpfermasse; b) im linearen Grenzfall; c) für optimierte Dämpfermasse; d) optimale Dämpfermasse

Aus **Bild 3.15a** wird deutlich, dass eine Verlagerung der Schaufelfußplatten nach außen eine Erhöhung der Dämpfungswirkung bei gleichzeitig deutlicher Erhöhung der Resonanzfrequenz bewirkt. Dieser Effekt lässt sich leicht mit den größeren Absolut- bzw. Relativverschiebungen der Kontaktpunkte OL und OR bei größeren Abständen von der Schaufeleinspannung erklären, sodass das Reibelement ein größeres Dämpfungspotenzial aufweist. Grundsätzlich gilt dies auch für höhere Schwingungsformen, wenn die Koppelposition in Richtung eines Schwingungsbauches verlagert wird. Dabei ist anzumerken, dass das Dämpfungspotenzial nahe einer Knotenlinie aufgrund der geringen Relativverschiebungen deutlich abnimmt. Dieser Effekt ist grundsätzlich bei allen Koppel-elementen zu beachten, deren radiale Position deutlich von der Schaufelspitze oder der -einspannung abweicht, vgl. u. a. **Bild 1.3b** und **e**. Die in **Bild 3.15b** dargestellten Ergebnisse für den linearen Grenzfall zeigen ebenfalls eine Abnahme der Resonanzamplitude mit ansteigendem radialem Abstand r_p . Diese ist aber nicht auf eine bessere Dämpfungswirkung, sondern auf den deutlich versteifenden Einfluss des Reibelements zurückzuführen. Aus den Verläufen der Resonanzfrequenz lässt sich wiederum gut der große Einfluss der radialen Position der Kopplung auf den zu erwartenden Frequenzshift ermitteln.

Die erreichbare normierte Amplitudenreduktion für eine optimierte Dämpfermasse ist aus **Bild 3.15c** abzulesen. Gegenüber einer konstanten Dämpfermasse ergibt sich ein nochmals deutlich verbessertes Dämpfungspotenzial. So lässt sich die Schwingungsamplitude im Fall $r_p = 80$ mm auf etwa 0.6% der Schwingungsamplitude der ungekoppelten Schaufel reduzieren. Die zugehörigen optimalen Reibelementmassen nehmen mit größerem Radius r_p ab und lassen sich in **Bild 3.15d** entnehmen. Die abnehmende Masse lässt sich anhand des in **Bild 3.16** dargestellten einfachen Ein-Freiheitsgrad-Modells erklären, wobei die Größen m , d und k_0 die modalen Parameter eines Schwingungsmodales

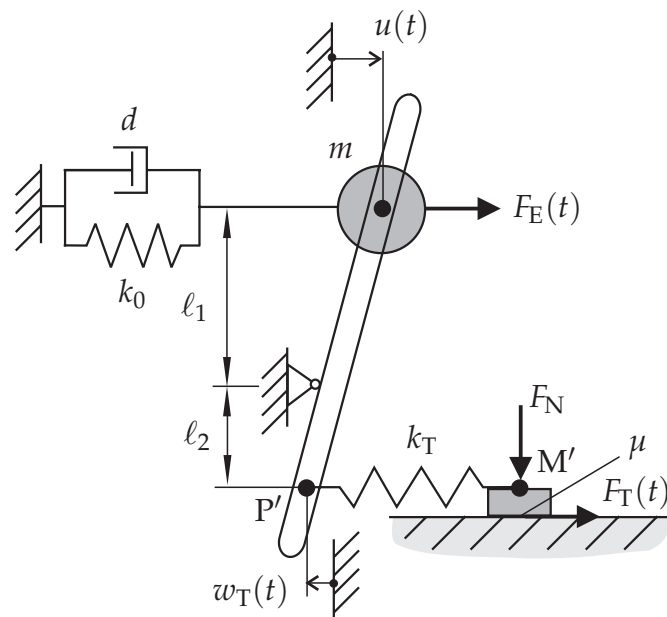


Bild 3.16: Modellvorstellung für einen Einmassenschwinger zur Abbildung der Variation des Kopplungsortes bei Betrachtung des 1F-Schwingungsmodes

der Schaufel repräsentieren. Die Variation des Kopplungsortes, die in erster Linie eine von der Schwingungsform abhängige Änderung der Absolut- und damit Relativverschiebungen der Kontaktpunkte bewirkt, kann durch eine Änderung des Längenverhältnisses

$$\kappa_\ell = \frac{\ell_2}{\ell_1} = \frac{w_T(t)}{u(t)} \quad (3.3)$$

repräsentiert werden. Unter Vernachlässigung der viskosen Dämpfung d lässt sich die Resonanzamplitude und die zugehörige optimale Normalkraft $F_{N,\text{opt}}$ aus einer Energiebilanz ermitteln. Aufbauend auf den Überlegungen von KLAMT [88] ergibt sich die optimale Normalkraft, die zu einer minimalen Resonanzamplitude führt, unter zusätzlicher Berücksichtigung von κ_ℓ für eine harmonische Erregung mit $F_E(t) = |\hat{F}_E| \cos \Omega t$ aus

$$F_{N,\text{opt}} = \frac{\pi |\hat{F}_E|}{2\mu\kappa_\ell}. \quad (3.4)$$

Eine Verlagerung des Kopplungsortes zur Schaufelspitze entspricht einem ansteigenden Längenverhältnis κ_ℓ , aus dem nach Gl. (3.4) unmittelbar eine geringere optimale Kontaktnormalkraft folgt. Weiterhin führt ein größerer Abstand r_P nach **Bild 3.15c** zu höheren Resonanzfrequenzen, sodass aufgrund der Drehzahlabhängigkeit der Kontaktnormalkräfte die Reibelementmasse weiter gemindert werden muss.

Im Fall großer Relativverschiebungen, die sich bei sehr weit außen angebrachten Fußplatten ergeben, und dem damit verbundenen großen Einfluss der Reibungsdämpfer auf das Schwingungsverhalten, treten einige besondere Effekte auf, die sich bei konstanter Reibelementmasse und damit *drehzahlabhängiger* Kontaktnormalkraft einstellen. In **Bild 3.17** sind die Frequenzgänge und Optimierungskurven für eine Variation der Dämpfermasse beispielhaft für den Fall $r_P = 60$ mm dargestellt. Insbesondere aus dem Verlauf der Reso-

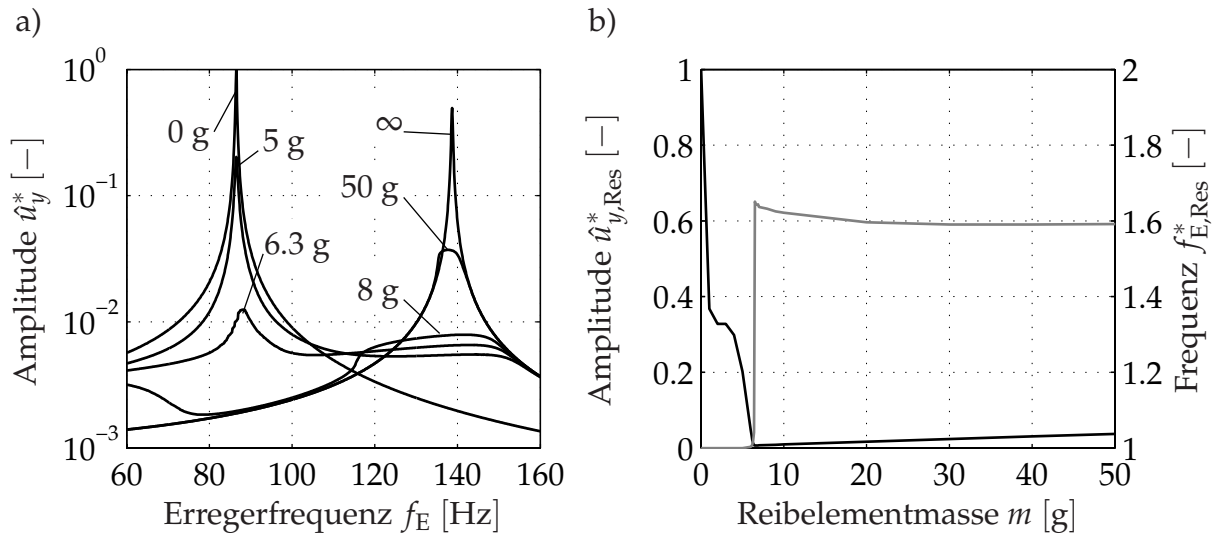


Bild 3.17: Variation der Dämpfermasse für $r_P = 60$ mm: a) Frequenzgänge; b) Optimierungskurven

nanzfrequenz in **Bild 3.17b**, d. h. der zu der maximal im untersuchten Frequenzbereich auftretenden Schwingungsamplitude gehörigen Erregerfrequenz, wird mit dem Sprung im Bereich der optimalen Masse $m_{opt} \approx 6.5$ g eine Besonderheit deutlich, die grundsätzlich bei einer Variation der Dämpfermasse auftreten kann. Die Ursache hierfür und für die bei großen Dämpfermassen abfallende Resonanzfrequenz sowie die in **Bild 3.17a** auftretenden Nebenmaxima in den Amplitudengängen sollen im Folgenden erläutert werden.

Bild 3.18a zeigt zunächst die im CAMPBELL-Diagramm dargestellten Resonanzfrequenzen bei verschiedenen Erregerordnungen und konstanten, d. h. von der Drehzahl *unabhängigen* Fliehkräften F_C . Hieraus wird die versteifende Wirkung des Reibelements mit ansteigender Fliehkraft deutlich, die sich in einer Zunahme der Resonanzfrequenz zeigt. Die Grenzfälle einer verschwindenden sowie einer gegen unendlich große Werte strebenden Fliehkraft sind gestrichelt dargestellt. Neben der Fliehkraft kann der Darstellung auch der Einfluss der Erregerordnung entnommen werden, der in Abschnitt 3.2.4.1 detailliert untersucht wird. Der Effekt der abnehmenden Resonanzfrequenz mit steigender Drehzahl ist auf die schwächere Kopplung bei kleinen Erregerordnungen zurückzuführen. Die Verläufe der Frequenzkurven sind damit qualitativ vergleichbar mit denen eines gekoppelten Schaufel-Scheibe-Systems mit ausgeprägtem Scheibeneinfluss, vgl. auch **Bild 3.33a**.

Eine exakte Ermittlung des Verlaufs der Resonanzfrequenzen 'zwischen' den einzelnen Harmonischen erfordert die Definition eines kontinuierlichen Phasenwinkels $\Delta\varphi$, vgl. Gl. (2.92). Dieses Vorgehen wird auch von KENYON ET AL. [87] zur detaillierten Untersuchung so genannter *veering*-Effekte vorgeschlagen, siehe auch Abschnitt 3.6.1. An dieser Stelle sollen entsprechend der Modellbildung nur diskrete Erregerordnungen betrachtet werden und der Verlauf der Resonanzfrequenzen für konstant angenommenen Fliehkräfte durch lineare Interpolation zwischen den Harmonischen angenähert werden, da in diesem Fall keine zusätzliche Abhängigkeit von der Drehzahl auftritt.

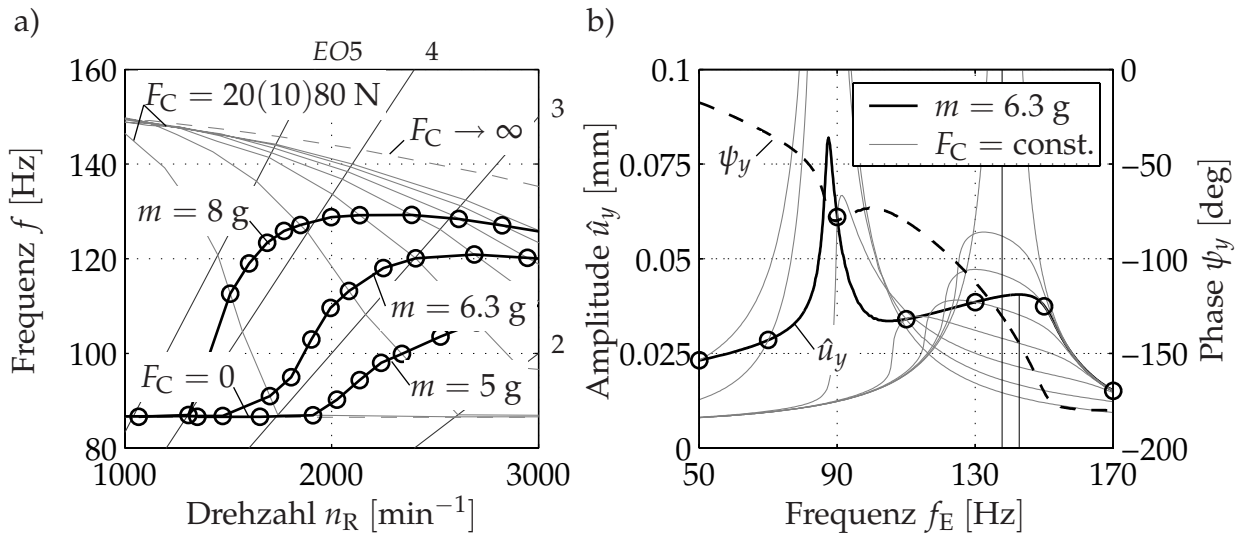


Bild 3.18: Einfluss einer konstanten *damper load*: a) CAMPBELL-Diagramm für konstante und variable Fliehkraft; b) Frequenzgang für $EO = 3$ mit Nebenmaximum bei variabler Fliehkraft

Wird die zu einer Fliehkraft bei definierter Reibelementmasse korrespondierende Drehzahl ermittelt, lassen sich die in **Bild 3.18a** dargestellten Verläufe der Resonanzfrequenz für den ersten Biegemode unter Annahme einer variablen Fliehkraft bei konstanter Reibelementmasse ermitteln. Dabei wird deutlich, dass sich, je nach Drehzahlbereich, Reibelementmasse und Verlauf der Kurven konstanter Fliehkraft, recht komplexe Verläufe ergeben können. Aufgrund der Drehzahlabhängigkeit der Fliehkraft nähert sich der Verlauf der Resonanzfrequenzen für $m = \text{const.}$ für kleine Drehzahlen der Kurve für $F_C = 0$, für große Drehzahlen der Kurve für $F_C \rightarrow \infty$ an. Potenzielle Resonanzstellen lassen sich in der üblichen Weise durch Ermittlung der Schnittpunkte mit den einzelnen Harmonischen ermitteln. Aufgrund der Nichtlinearität kann jedoch aus der Annäherung der Resonanzfrequenzkurve an die Harmonischen nicht unmittelbar auf die Höhe der Schwingungsamplitude geschlossen werden, siehe **Bild 3.18b**. Aus dem Verlauf des Amplituden- und Phasenganges für $m = 6.3$ g wird deutlich, dass Nebenmaxima auftreten können, deren Erkennung bei konstanter Fliehkraft nicht möglich ist. Diese Zweideutigkeit kann zu den in **Bild 3.17b** dargestellten Sprüngen in den Verläufen der Resonanzfrequenz führen, wenn diese aus einer Bestimmung der maximal auftretenden Schwingungsamplitude im betrachteten Frequenzintervall erfolgt. Der für die Erregerordnung $EO = 3$ simulierte Amplitudengang lässt sich auch aus der Verbindungslinie einzelner Punkte der Frequenzgänge konstanter Fliehkraft konstruieren. Der Verlauf der Schwingungsamplitude macht deutlich, dass das Maximum aufgrund der Nichtlinearität nicht in dem aus **Bild 3.18a** ermittelbaren Schnittpunkt der dritten Harmonischen mit der Resonanzfrequenzkurve bei $f_E \approx 120$ Hz auftritt. Der Frequenzgang für eine konstante, bei dieser Drehzahl auftretende Fliehkraft weist hier zwar gerade ein Maximum auf, dieses wird jedoch in den Frequenzgängen anderer konstanter Fliehkraft auch außerhalb der Resonanzen noch überschritten, siehe **Bild 3.18b**. Ein Verlauf der Resonanzfrequenz nach **Bild 3.18a** deutet im Allgemeinen auf Frequenzgänge hin, die keine eindeutig dominierende Resonanzfrequenz aufweisen. Dabei kann auch der von EWINS [49] in anderem

Zusammenhang geschilderte Effekt der so genannten *resonance coincidence* auftreten, bei dem eine Drehzahlerhöhung eine Erhöhung der Resonanzfrequenz derart bewirkt, dass über einen weiten Drehzahlbereich die Resonanzbedingung erfüllt ist.

Bemerkenswert ist in diesem Zusammenhang auch die Tatsache, dass eine Erhöhung der Reibelementmasse in den Bereichen großer Fliehkräfte nicht zwangsläufig zu einem Anstieg der Resonanzfrequenz führen muss, vgl. **Bild 3.17b**. So wird aus **Bild 3.18b** deutlich, dass das relative Maximum bei $f_E = 142.8$ Hz auftritt, während eine unendlich große Reibelementmasse bzw. Fliehkraft zu einer Resonanzfrequenz von nur $f_E = 137.8$ Hz führt. Dieser Effekt ist ebenfalls nur bei einer Variation der Reibelementmasse zu beobachten, da eine Erhöhung der konstant angenommenen Fliehkraft stets eine Versteifung und damit Erhöhung der Resonanzfrequenz zur Folge hat.

Neben den Eigenvektoren an der Koppelstelle wirkt sich selbstverständlich auch eine Änderung der Eigenfrequenz, etwa nach einer Modifikation der Schaufelgeometrie im Anschluss an einen Re-Design-Prozess, auf das Schwingungsverhalten aus, da sich der Abstand zu den einzelnen Harmonischen im CAMPBELL-Diagramm verändert und sich somit die Schwingungsamplitude erhöht oder vermindert. Im Fall relativ weicher Scheiben ist in jedem Fall die Elastizität der Radscheibe in den modalen Größen zu berücksichtigen, da die Eigenvektoren an den Kontaktpreferenzpunkten OL und OR der Schaufel in erheblichem Maße die Auslegung des Reibelements beeinflussen. Auch hat die modale Dämpfung, siehe Abschnitt 2.1.2, einen Einfluss auf die Schwingungsamplitude. Wie aber an späterer Stelle in Abschnitt 3.6.2.2 gezeigt wird, ist der Anteil der durch Materialdämpfung dissipierten Energie im Fall einsetzender Reibung aber zumeist nur von untergeordneter Bedeutung.

3.2.3.2 Kontaktwinkel

Den Einfluss einer Variation des Kontaktwinkels $\gamma = \gamma_L = \gamma_R$ zeigt **Bild 3.19**. Für eine konstante Reibelementmasse ergibt sich zunächst nach **Bild 3.19a** ein Anstieg der Resonanzfrequenz mit größerem Kontaktwinkel γ , da nach Gl. (2.118) die Kontaktnormalkräfte ansteigen und somit das Reibelement mehr und mehr in den Zustand des Haftens übergeht. Für große Kontaktwinkel führt dies zu anwachsenden Schwingungsamplituden. Diese treten auch für kleine Kontaktwinkel auf, da die Reibelementmasse in diesem Fall zu klein gewählt ist. Die Schwingungsamplitude nimmt nach erneuter Optimierung der Masse leicht ab, da in diesem Fall die Relativbewegungen in den Kontakten erhöht werden. Die in **Bild 3.19d** dargestellte zugehörige optimale Masse ergibt sich für den Fall $\gamma_L = \gamma_R$ aus der des Referenzzustandes mit $\gamma_{\text{ref}} = 36.7^\circ$ und $m_{\text{opt,Ref}} = 40$ g aus

$$m_{\text{opt}}(\gamma) = m_{\text{opt}}(\gamma_{\text{Ref}}) \frac{\cos \gamma}{\cos \gamma_{\text{Ref}}}, \quad (3.5)$$

um die in Gl. (2.118) angegebene Abhängigkeit der Kontaktnormalkraft vom Kontaktwinkel zu kompensieren, sofern die Relativbewegungen und die Drehzahl identisch sind. Dieser Zusammenhang ist in **Bild 3.19d** strichpunktiert dargestellt. Nach **Bild 3.19c** kann die Resonanzfrequenz und die zugehörige Drehzahl als nahezu konstant angenommen

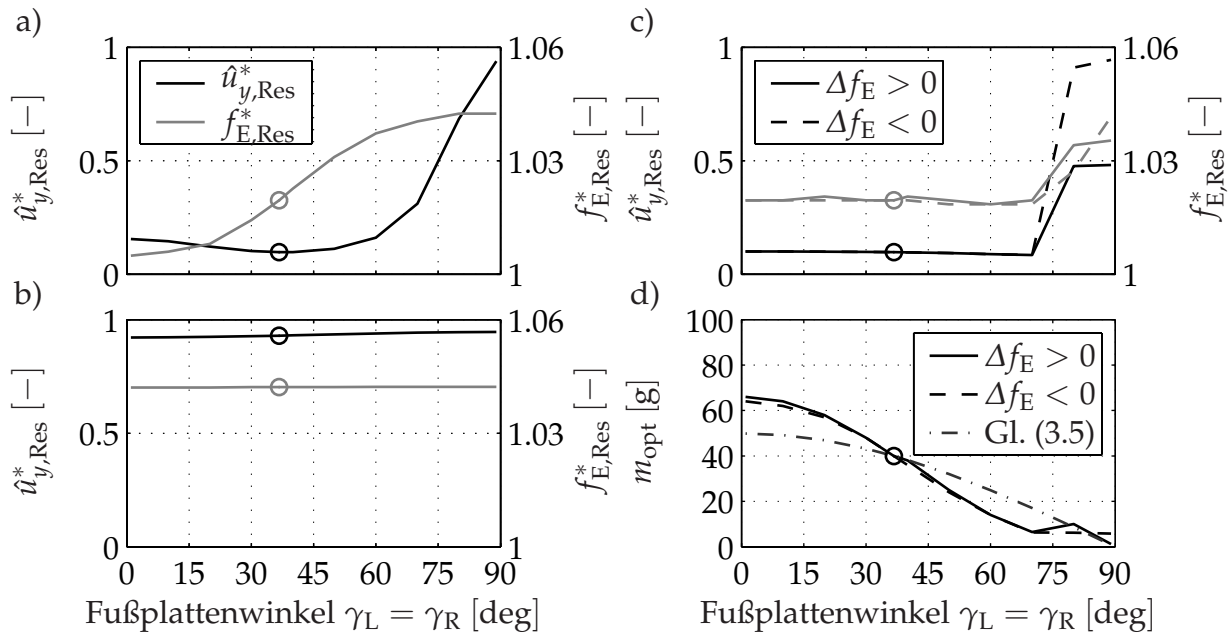


Bild 3.19: Variation des Kontaktwinkels γ : a) für konstante Dämpfermasse; b) im linearen Grenzfall; c) für optimierte Dämpfermasse; d) optimale Dämpfermasse

werden, wobei jedoch die Relativbewegungen mit größerem Kontaktwinkel ansteigen. Nach Gl. (3.4) muss demnach die optimale Masse für $\gamma > \gamma_{\text{Ref}}$ entsprechend kleiner als der in Gl. (3.5) angegebene Wert gewählt werden.

Im Fall stark ausgeprägter Nichtlinearitäten kann es zu Sprungeffekten in den Amplituden- und Phasengängen kommen, die eine Ermittlung der maximal auftretenden Schwingungsamplitude insofern erschweren, dass diese abhängig von der Richtung ist, mit der ein Frequenzgang durchlaufen wird (Hoch- bzw. Auslauf). Dieser Sachverhalt kann beispielhaft für einen Kontaktwinkel von $\gamma = 80^\circ$ **Bild 3.20** entnommen werden. Insbesondere aus **Bild 3.20b** wird der Unterschied in der Schwingungsamplitude und Resonanzfrequenz deutlich. Aus diesem Grund sind in **Bild 3.19c** und **Bild 3.19d** zusätzlich die Simulationsergebnisse für einen Auslauf mit $\Delta f_E < 0$ gestrichelt dargestellt.

Aus **Bild 3.20b** wird weiterhin deutlich, dass im Fall großer Kontaktwinkel schon bei sehr kleinen Reibelementmassen eine erhebliche Verschiebung der Resonanzfrequenz auftritt. Dies ist darin begründet, dass das Reibelement bei sehr großen Kontaktwinkeln $\gamma \rightarrow 90^\circ$ zwischen den Fußplatten benachbarter Schaufeln 'klemmt' und in erster Linie elastischen Verformungen in Normalenrichtung auftreten. Dies erklärt auch die ansteigenden Schwingungsamplituden in **Bild 3.19c**. Eine sinnvolle Bestimmung der optimalen Masse ist hier nicht mehr möglich, da keine ausreichend großen Relativbewegungen in tangentialer Richtung auftreten und sich das System nahezu linear verhält. Die von JARELAND [79] festgestellte Tendenz zu stetig besserer Dämpfungswirkung bei größeren Kontaktwinkeln ist somit nur unter der Annahme in Normalenrichtung unendlich steifer Fußplatten möglich. Darüber hinaus steht der sich dann theoretisch einstellenden sehr großen Vertikalbewegung des Reibelements dessen Trägheit gegenüber. Im Sinne einer sicheren Abschätzung der realisierbaren Amplitudenreduktion sind die Elastizitäten

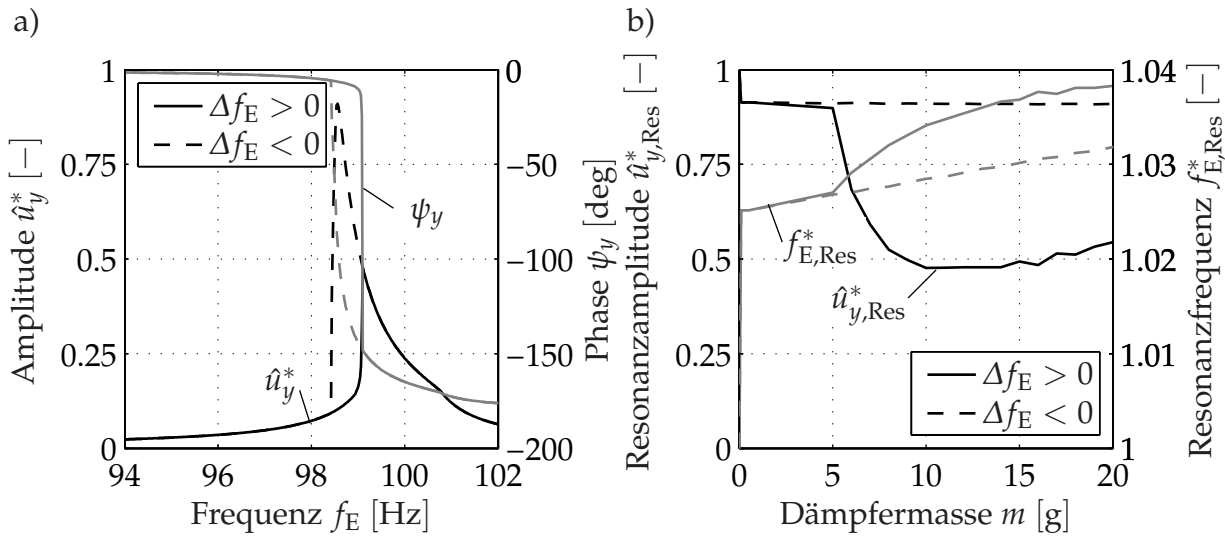


Bild 3.20: Sprungeffekte bei positivem ($\Delta f_E > 0$) und negativem ($\Delta f_E < 0$) Frequenzinkrement: a) Amplituden- und Frequenzgang für $\gamma_L = \gamma_R = 80^\circ$ und $m = 10$ g; b) maximale Amplitude und zugehörige Frequenz in Abhängigkeit der Dämpfermasse

in Normalenrichtung stets zu berücksichtigen, da sie sich mindernd auf den erreichbaren Dämpfungseffekt auswirken, siehe auch Abschnitt 3.2.2.2.

3.2.4 Veränderte Betriebsbedingungen: Der Einfluss der Erregung

Die Optimierung der untersuchten Reibelementtypen erfolgte unter Berücksichtigung einer festgelegten, konstanten äußeren Erregung. Für die Auslegung passiver Reibungsdämpfer ist die Kenntnis sowohl der Erregerkraftamplitude als auch der Gestalt der Erregung über dem Scheibenumfang von grundlegender Bedeutung, da das Gesamtsystem aufgrund der nichtlinearen Eigenschaften der Reibkontakte unter Umständen sehr sensitiv auf eine Änderung der äußeren Erregung reagiert. Der Nachteil der untersuchten passiven Dämpfungsmechanismen gegenüber aktiven Systemen liegt in der fehlenden Adaptierbarkeit auf geänderte Betriebsbedingungen, die von den Referenz- bzw. Auslegungsbedingungen abweichen.

Ein entscheidender Parameter zur Auslegung von Reibelementen ist die Phasenlage der Schwingung benachbarter Schaufeln, die durch den in Gl. (2.92) gegebenen Phasenwinkel $\Delta\varphi$ beschrieben wird und somit unmittelbar von der Erregerordnung EO abhängt. Weiterhin hat die Amplitude bzw. der Stimulus der Erregerkräfte einen entscheidenden Einfluss auf die Schwingungsantwort der Schaufeln, wobei sich die Amplituden der Erregerkräfte, d. h. der dynamische Anteil der auf das Schaufelblatt wirkenden Strömungskräfte, auch für den Referenzzustand mit Hilfe einer CFD-Analyse zumeist nur näherungsweise angeben lassen. Eine Skalierung der Schwingungsantwort ist aufgrund des nichtlinearen Charakters der Reibkräfte grundsätzlich nicht zulässig, sodass bei variierenden Erregerkräften eine erneute Berechnung der Schwingungsamplituden unumgänglich

ist. Da eine erneute Optimierung des Reibelements insbesondere aufgrund geänderter Betriebsbedingungen bei häufig wechselnden Lastprofilen zumeist nicht erfolgen kann, muss der Einfluss einer Änderung auf die Wirksamkeit des Dämpfers und somit die zu erwartende Schwingungsantwort a priori abgeschätzt werden und gegebenenfalls der Reibungsdämpfer so optimiert werden, dass, soweit möglich, für alle Betriebsbedingungen die erwünschte Amplitudenreduktion erzielt werden kann.

3.2.4.1 Erregerordnung

In **Bild 3.21** sind die Simulationsergebnisse für eine Variation der Erregerordnung mit $EO = 0 \dots 30$ dargestellt⁵. Aus **Bild 3.21a** wird zunächst deutlich, dass bei konstanter Reibelementmasse für alle von der Referenzkonfiguration abweichenden Erregerordnungen ein Anstieg der Resonanzamplituden sowie eine Verminderung der Resonanzfrequenzen eintritt. Für Erregerordnungen mit $EO > 3$ ist dies mit der nach der Beziehung

$$\Omega_R = \frac{2\pi}{EO} f_E \quad (3.6)$$

bei konstanter Erregerfrequenz f_E gegebenen geringeren Drehzahl Ω_R und damit der nach Gl. (2.120) kleineren auf das Reibelement wirkenden Fliehkraft zu begründen. Somit tritt aufgrund der zu geringen Normalkräfte im Kontakt ein Anstieg der Schwingungsamplituden bei gleichzeitiger Verringerung der Resonanzfrequenzen ein, da das Reibelement bei geringen Reibkräften nahezu ständig im Zustand des Gleitens ist. Als weitere Konsequenz einer Erhöhung der Erregerordnung nimmt nach Gl. (2.92) die Phasenlage zwischen den Schwingungen benachbarter Schaufeln bis $EO = 15$ zu, sodass sich größere Relativverschiebungen einstellen. Im Grenzfall $EO = 30$ stellen sich zum einen sehr geringe Normalkräfte und zum anderen gleichphasige Schwingungen ein, sodass die Dämpfungswirkung des Reibelements verschwindet und sich die normierte Schwingungsamplitude $u_{y,Res}^* = 1$ einstellt. Für Erregerordnungen $EO < 3$ geht das Reibelement in den Zustand des ständigen Haftens über, da aufgrund der hohen Drehzahlen die Kontaktnormalkräfte stark zunehmen. Dennoch sinkt die Resonanzfrequenz im Vergleich zum Referenzzustand ab. Dies ist in dem geringeren Einfluss der Reibelement- und Kontaktsteifigkeit bei kleinen Phasenwinkeln $\Delta\varphi$ nach Gl. (2.92) zu sehen.

Der maximal erreichbare Frequenzshift wird besonders deutlich, wenn eine unendlich große Reibelementmasse verwendet wird, siehe **Bild 3.21b**. Für den Sonderfall der gleichphasigen Schwingung benachbarter Schaufeln für $EO = 0$ bzw. $EO = 30$ und unendlich großer Reibelementmasse kommt es zum reinen Abrollen, sodass Haften vorliegt. Eine Frequenzverschiebung tritt aber nicht auf. Die Verläufe der normierten Resonanzfrequenz und -amplitude weisen bezüglich der Erregerordnung $EO = 15$ eine Achsensymmetrie auf, die in den identischen Phasenwinkeln $\Delta\varphi$ für $EO = EO^*$ und $EO = n_S - EO^*$ aufgrund der Symmetrieeigenschaften der cos-Funktion begründet sind. Die in Abschnitt 2.4.2.2 und **Bild 2.27** dargestellten geringfügigen Abweichungen treten hier nicht

⁵Grundsätzlich lassen sich auch Erregerordnungen mit $EO > 30$ untersuchen. Aufgrund der Periodizität ergeben sich aber mit Ausnahme der optimalen Reibelementmasse identische Resultate.

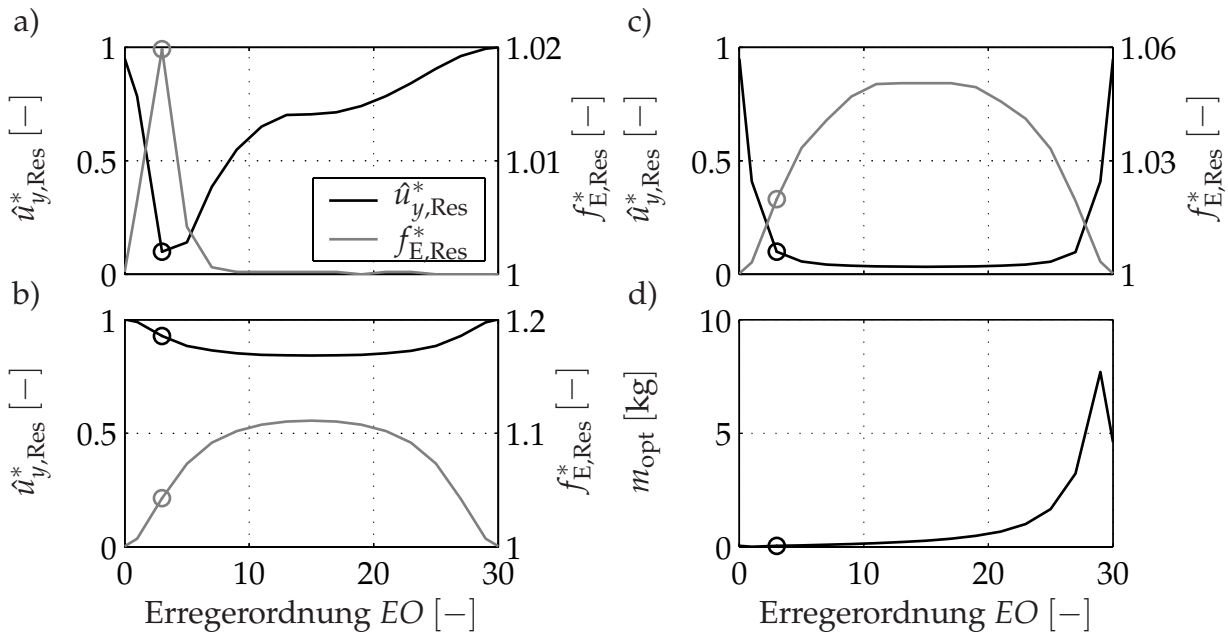


Bild 3.21: Variation der Erregerordnung EO : a) für konstante Dämpfermasse; b) im linearen Grenzfall; c) für optimierte Dämpfermasse; d) optimale Dämpfermasse

auf, da der erste Schwingungsmodus deutlich dominiert. Die maximal erreichbare Resonanzfrequenz tritt erwartungsgemäß bei der gegenphasigen Schwingung mit $EO = 15$ auf, da hier die zusätzlich eingebrachten Steifigkeiten eine entsprechend große zusätzliche potenzielle Energie nach sich ziehen. In diesem Fall wird die Resonanzfrequenz um etwa 11% zu größeren Werten verschoben und die Resonanzamplitude aufgrund der erheblichen Versteifung des Systems minimal.

Wird die Reibelementmasse erneut optimiert, ergeben sich die in **Bild 3.21c** dargestellten Verläufe, die qualitativ denen aus **Bild 3.21b** entsprechen, aber deutlich geringere Resonanzfrequenzen und Schwingungsamplituden aufweisen. Deren Minimum von $u_{y,Res}^* = 0.033$ tritt bei $EO = 15$ auf, da hier aufgrund der großen Relativbewegungen das Dämpfungspotenzial des Reibelements optimal genutzt werden kann. Bemerkenswert ist, dass auch deutlich kleinere bzw. größere Erregerordnungen trotz geringerer Relativbewegung noch eine merkliche Amplitudenreduktion ermöglichen. So führt eine optimierte Reibelementmasse bei $EO = 5$ auf eine Reduzierung der Schwingungsamplitude von 94.4%. Erst bei sehr geringen Relativverschiebungen zeigt sich ein signifikanter Anstieg der Schwingungsamplitude. Die zugehörigen optimierten Reibelementmassen sind **Bild 3.21d** zu entnehmen. Diese steigen aufgrund der zu einer größeren Erregerordnung korrespondierenden abnehmenden Drehzahl deutlich an⁶. Erst im Fall der gleichphasigen Schwingung benachbarter Schaufeln nimmt die optimale Masse wieder ab, da es hier zu äußerst kleinen Relativbewegungen kommt, die eine Verminderung der Kontaktnormalkraft erfordern, um eine Energiedissipation zu ermöglichen.

⁶Die zu sehr kleinen Erregerordnungen korrespondierenden hohen Drehzahlen, die zu Resonanz führen, ergeben sich unter der Annahme konstanter Eigenfrequenzen. Wird eine Drehzahlabhängigkeit der Eigenfrequenzen berücksichtigt, weisen die unteren Harmonischen des Erregerspektrums u. U. keine Schnittpunkte mit der Eigenfrequenzkurve auf, vgl. auch **Bild 3.33b**.

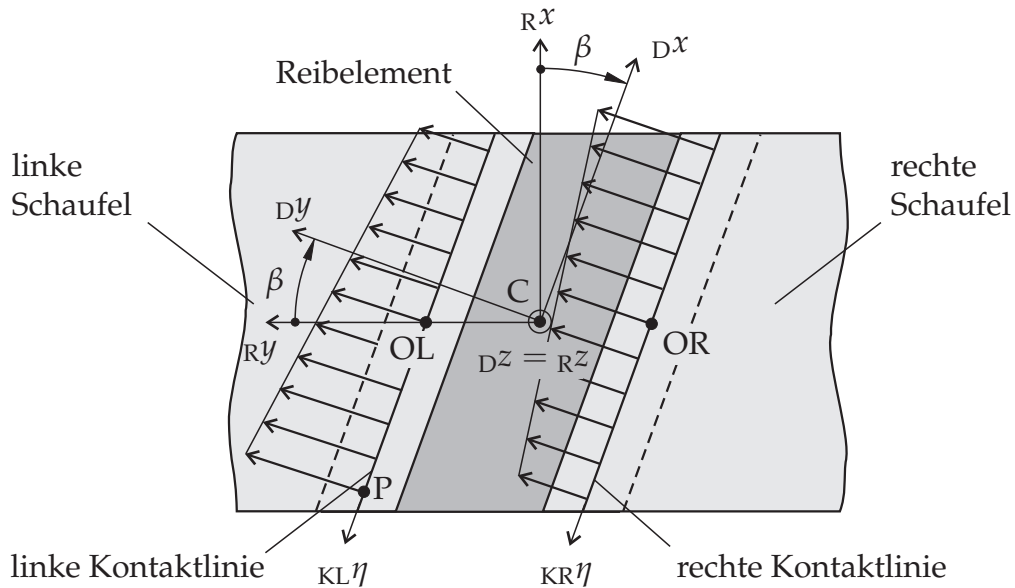


Bild 3.22: Absolutverschiebungen der diskreten Kontaktpunkte P der Kontaktlinien an einem zylinderförmigen Reibelement in der R^x - R^y -Ebene bei gleichphasiger Schwingung mit $\Delta\varphi = 0$

Die bei $EO = 0$ bzw. $EO = 30$ einsetzenden gleichphasigen Schwingungen erfordern eine detailliertere Betrachtung. Während die Erregerordnung $EO = 30$ nach Gl. (2.86) einen funktionalen Zusammenhang zwischen Dreh- und Erregerkreisfrequenz liefert, ist dies bei $EO = 0$ nicht mehr der Fall. Dieser Typ der Erregung stellt das in Abschnitt 2.2.2 erläuterte, von der Drehzahl unabhängige, gleichförmige Pulsieren des Strömungsfeldes mit der Pulsationsfrequenz $\Omega_E = \Omega_P$ dar. Da ein Zusammenhang zwischen Drehzahl und Erregerfrequenz fehlt, kann in diesem Fall keine sinnvolle Angabe der optimalen Reibelementmasse erfolgen, da diese von der jeweils gewählten Drehzahl abhängig ist. Bemerkenswert ist die erreichbare Amplitudenreduktion für den Fall der gleichphasigen Schaufelschwingung von etwa 5%, siehe **Bild 3.21c**. Dieses geringfügige verbleibende Dämpfungspotenzial ist darauf zurückzuführen, dass die Schwingungsamplituden der Kontaktpunkte benachbarter Schaufeln auch im Fall symmetrischer Schaufelgeometrie nicht exakt übereinstimmen müssen. Zur Veranschaulichung dieses Verhaltens sind in **Bild 3.22** die Absolutverschiebungen der Kontaktpunkte P eines vereinfachten Linienkontaktes im linken und rechten Kontakt an einem zylinderförmigen Reibelement in dem in **Bild 2.1b** und **Bild 2.2a** eingeführten Zwischensystem R dargestellt.

Sind die Eigenvektoren $\hat{\phi}_{OL}$ und $\hat{\phi}_{OR}$ der Kontaktreferenzpunkte wie im vorliegenden Fall des 1F-Schwingungsmodes 'symmetrisch', d. h. sind die translatorischen Verschiebungen in s^x - und s^y -Richtung identisch bzw. in s^z -Richtung vorzeichenverschieden, vgl. **Tabelle D.1** in Anhang D, so ergeben sich in der R^x - R^y -Ebene identische Absolutverschiebungen aus

$$\begin{aligned} R^{u_{OL,x}} &= SL^{u_{OL,x}}, \\ R^{u_{OL,y}} &= SL^{u_{OL,y}} \cos \frac{\delta}{2} + SL^{u_{OL,z}} \sin \frac{\delta}{2} \end{aligned} \quad (3.7)$$

und

$$\begin{aligned} {}^R u_{OR,x} &= {}^S R u_{OR,x} , \\ {}^R u_{OR,y} &= {}^S R u_{OR,y} \cos \frac{\delta}{2} - {}^S R u_{OR,z} \sin \frac{\delta}{2} . \end{aligned} \quad (3.8)$$

Aufgrund der Annahme kleiner Schwingungen und einer möglichen Verdrehung des zylinderförmigen Reibelements ist die ${}^R z$ -Komponente nicht relevant. Unter Berücksichtigung der in Abschnitt 2.1.1 hergeleiteten Beziehungen ergibt sich im R -Koordinatensystem eine vom Anstellwinkel β geringfügig abweichende Hauptschwingungsrichtung für den ersten Biegemode.

Die Verschiebungen in ${}^R x$ - und ${}^R y$ -Richtung eines beliebigen Punktes P der linken und rechten Kontaktzone lassen sich unter Zuhilfenahme der Verdrehungen aus

$$\begin{aligned} {}^R u_{PL,x} &= {}^R u_{OL,x} - \left(-{}^S L \varphi_{OL,y} \sin \frac{\delta}{2} + {}^S L \varphi_{OL,z} \cos \frac{\delta}{2} \right) r_\eta \sin \beta , \\ {}^R u_{PL,y} &= {}^R u_{OL,y} - \left(-{}^S L \varphi_{OL,y} \sin \frac{\delta}{2} + {}^S L \varphi_{OL,z} \cos \frac{\delta}{2} \right) r_\eta \cos \beta \end{aligned} \quad (3.9)$$

und

$$\begin{aligned} {}^R u_{PR,x} &= {}^R u_{OR,x} - \left({}^S R \varphi_{OR,y} \sin \frac{\delta}{2} + {}^S R \varphi_{OR,z} \cos \frac{\delta}{2} \right) r_\eta \sin \beta , \\ {}^R u_{PR,y} &= {}^R u_{OR,y} - \left({}^S R \varphi_{OR,y} \sin \frac{\delta}{2} + {}^S R \varphi_{OR,z} \cos \frac{\delta}{2} \right) r_\eta \cos \beta \end{aligned} \quad (3.10)$$

ermitteln. Ein Vergleich mit den in **Tabelle D.1** gegebenen rotatorischen Eigenvektoren zeigt, dass die Verdrehungen der Kontaktzonen um die ${}^S y$ -Achse identische Beträge und Vorzeichen, die Verdrehungen um die ${}^S z$ -Achse identische Beträge und gegensätzliche Vorzeichen aufweisen. Aus Gl. (3.9) und Gl. (3.10) lassen sich dann die in **Bild 3.22** dargestellten Verschiebungen ermitteln, die aus den gegensätzlichen Verdrehungen der Kontaktlinien um die ${}^R z$ -Achse resultieren. Aufgrund des Kräftegleichgewichts wird das Reibelement in diesem Fall zu einer Rotation um seine ${}^D y$ -Achse gezwungen, sodass Relativbewegungen in den Kontaktzonen auftreten. Eine reibungsfreie Bewegung des Reibelements, in dem permanentes Haften vorliegt, ist somit nicht möglich, sodass ein geringes Dämpfungspotenzial verbleibt. Entscheidend für diesen Effekt ist das Zusammenwirken des Teilungswinkels δ und des Anstellwinkels β : In schaufelfesten Koordinaten tritt im Fall des 1F-Schwingungsmodes eine signifikante, gleichphasige Verdrehung um die ${}^S y$ -Achse aufgrund des Anstellwinkels auf. Eine Transformation von den schaufelfesten Koordinatensystemen SL und SR in das Zwischensystem R bewirkt entsprechend gegenphasige Verdrehungen der Kontaktlinien um die ${}^R z$ -Achse.

Der hier diskutierte Effekt tritt nicht auf, wenn eine vereinfachte Schaufelgeometrie mit Symmetrie zur ${}^S x$ - ${}^S z$ -Ebene mit $\beta = 0$ zu Grunde gelegt wird und/oder der Teilungswinkel δ unberücksichtigt bleibt, vgl. PANNING ET AL. [118]. In diesem Fall nehmen die Verdrehungen in Gl. (3.9) und Gl. (3.10) sehr kleine Werte an oder sind im Idealfall vollständiger Symmetrie exakt null bzw. aufgrund von $\beta = 0$ ohne Einfluss. Aufgrund der sich einstellenden gleichphasigen, identischen Relativbewegung korrespondierender Kontakt-

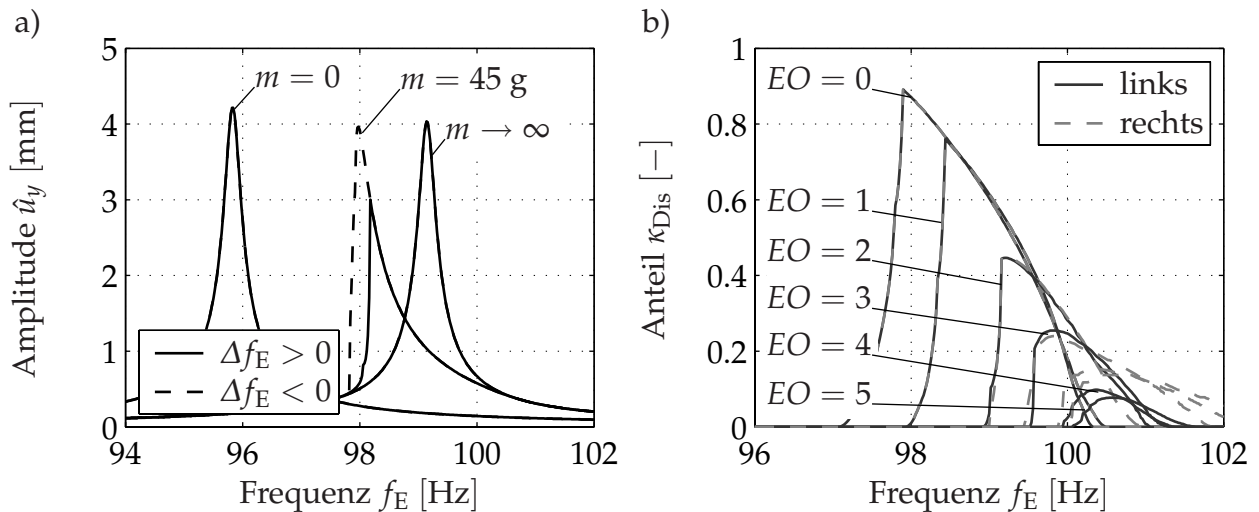


Bild 3.23: Keilförmiges Reibelelement: a) Frequenzgänge unter Vernachlässigung des Teilungswinkels δ bei $EO = 0$; b) Anteil κ_{Dis} der Punktkontakte mit zeitweiliger Separation im linken und rechten Kontakt bei verschiedenen Erregerordnungen

punkte im linken und rechten Kontakt ist dann unter der Annahme kleiner Schwingungen ein vollständiges Abrollen des zylinderförmigen Reibelements möglich. Als Folge setzt hier die Dämpfungswirkung des Reibelements gänzlich aus und es stellt sich mit $y_{Res,y}^* = 1$ und $f_{E,Res}^* = 1$ die Schwingungsamplitude und -frequenz der ungekoppelten Schaufel ein. In diesem Fall sind asymmetrische oder keilförmige Reibelelemente vorzuziehen, da reines Abrollen bei diesen Dämpfungstypen nicht möglich ist. Aus **Bild 3.23a** wird deutlich, dass auch für den Fall $\delta = 0$, d. h. ohne Berücksichtigung des Teilungswinkels, die Verwendung eines keilförmigen Reibelements verschiedener Massen bei $EO = 0$ eine Frequenzverschiebung und eine geringfügige Amplitudenreduktion bewirkt, während in diesem Fall eine Massenvariation des zylinderförmigen Reibelements aufgrund des reinen Abrollens stets auf den Fall der ungekoppelten Schaufel mit $m = 0$ führt. Aus **Bild 3.23a** lässt sich erneut der Einfluss eines positiven (durchgezogene Linien) oder negativen (gestrichelte Linien) Frequenzinkrements ablesen. Die schon in Abschnitt 3.2.1.1 dargestellte Tendenz des keilförmigen Reibelements zum Abheben von den Schaufel Fußplatten wird insbesondere bei kleinen Erregerordnungen, d. h. nahezu gleichphasiger Schwingung benachbarter Schaufeln deutlich, wie **Bild 3.23b** zu entnehmen ist. Dargestellt ist analog zu **Bild 3.4a** und **Bild 3.6** der Anteil κ_{Dis} der Punktkontakte mit zeitweiliger Separation in den Kontaktflächen bei der jeweils optimalen Masse des keilförmigen Reibelements für verschiedene Erregerordnungen.

3.2.4.2 Erregerkraftamplitude (Stimulus)

Aufgrund der Nichtlinearität hat die Größe der Erregerkräfte einen erheblichen Einfluss auf das zu erwartende Schwingungsverhalten, dessen Vorhersage über eine lineare Skalierung der Schwingungsamplitude mit den Erregerkräften nur im linearen Grenzfall zulässig ist. Aufgrund der ohnehin nur näherungsweise bestimmbar dynamischen Fluid-

kräfte und unter Berücksichtigung von lastabhängigen Erregerkraftschwankungen erfordert die Abschätzung des Erregerkrafteinflusses besondere Aufmerksamkeit. Zu diesem Zweck wird der in **Bild 3.1** dargestellte Erregerkraftvektor mit dem Skalierungsfaktor κ_E multipliziert. In diesem einfachen Fall entspricht dieser gerade dem Betrag der Erregerkraft in N. Die Simulationsergebnisse für eine konstante Reibelementmasse sind **Bild 3.24a** zu entnehmen. Es wird deutlich, dass eine Erhöhung der Erregerkräfte zunächst zu einer unterlinearen Zunahme der Schwingungsamplitude führt. Gleichzeitig nimmt die Resonanzfrequenz ab. Beide Effekte sind in Analogie zu einer Verminderung der Reibelementmasse damit zu begründen, dass das Reibelement in diesem Fall mehr und mehr in den Gleitzustand bei kleinen Reibkräften versetzt wird und der Einfluss auf das Schwingungsverhalten abnimmt. Der gegenteilige Effekt setzt bei einer Verminderung der Erregerkräfte ein: Hier führen die kleinen Erregerkräfte bei konstanter Reibelementmasse zum Haften und somit zu einem Anstieg der Resonanzfrequenz und zu geringeren Schwingungsamplituden. Der für die praktische Auslegung wichtige Verlauf der zu erwartenden Schwingungsamplitude über der Erregerkraft wird als *dampfer performance curve* bezeichnet und, wie in Abschnitt 1.2.2.1 erwähnt, von CAMERON ET AL. [22] eingeführt. Die Steigung der *dampfer performance curve* nähert sich für sehr große Erregerkräfte asymptotisch dem Wert 1, da hier die Reibkräfte zu gering sind und das Gesamtverhalten nur geringfügig beeinflussen (gestrichelte Linie). Im Fall sehr kleiner Erregerkräfte haftet das Reibelement, sodass sich der zweite lineare Grenzfall ergibt, der aufgrund der zusätzlichen Steifigkeit zu einer Steigung der *dampfer performance curve* von etwa 0.92 führt (gepunktete Linie). Diese Linie entspricht gerade dem in **Bild 3.24b** dargestellten Verlauf der Schwingungsamplitude bei unendlich großer Reibelementmasse. Der geringere Anstieg der Schwingungsamplitude im Bereich $\kappa_E < 1$ ist in Analogie zu dem geringeren Anstieg für $m > m_{\text{opt}}$ in **Bild 3.2** zu sehen. Bei unsicherer Abschätzung der Erregerkräfte

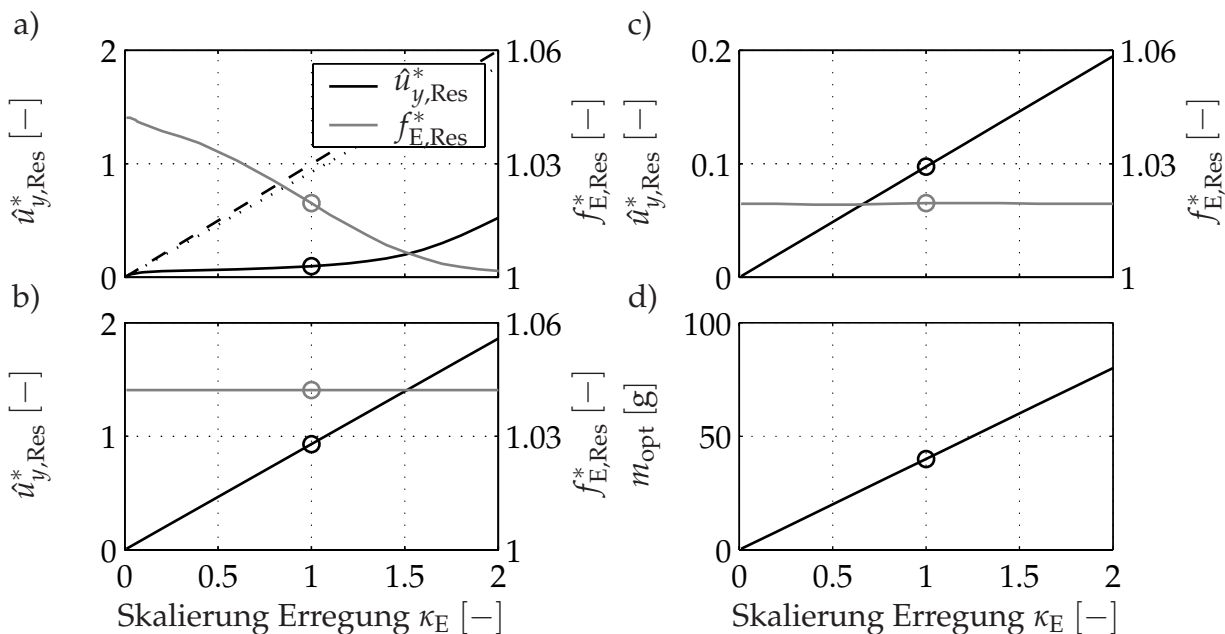


Bild 3.24: Skalierung der Erregerkräfte: a) für konstante Dämpfermasse; b) im linearen Grenzfall; c) für optimierte Dämpfermasse; d) optimale Dämpfermasse

ist demnach eine Auslegung mit $m > m_{\text{opt}}$ in jedem Fall vorzuziehen. Weitere Darstellungen dieser Zusammenhänge lassen sich u. a. SZWEDOWICZ ET AL. [164] entnehmen.

Nach einer erneuten Optimierung der Masse lässt sich ein quasilineares Systemverhalten erreichen, welches sich in **Bild 3.24c** in einem linearen Anstieg der Schwingungsamplitude bei konstanter Resonanzfrequenz niederschlägt. Die dazugehörige optimale Masse ist nach **Bild 3.24d** proportional der Erregerkraft. Dies gilt immer dann, wenn keine weiteren Nichtlinearitäten wie normalkraftabhängige Kontaktsteifigkeiten aufgrund des Rauheitsinflusses berücksichtigt werden. In letzterem Fall weicht die *performance curve* geringfügig von dem in **Bild 3.24a** dargestellten Verlauf ab, siehe auch PANNING ET AL. [119].

3.3 Einfluss auf höhere Schwingungsformen

Der grundsätzliche Nachteil eines passiven Dämpfers besteht in der mangelnden Fähigkeit auf variierende Systemparameter adaptierbar zu sein, wie schon am Beispiel des Betrages der Erregerkräfte gezeigt. Hierzu zählt auch der Nachteil, dass eine Optimierung etwa für den oben betrachteten 1F-Schwingungsmodus zwar Auswirkungen auf weitere Schwingungsformen hat, eine optimale Auslegung für diese jedoch zumeist nicht gegeben ist. Daher soll eine exemplarische Untersuchung des 1T-Torsionsmodes dazu dienen, die erneute Reibelementoptimierung sowie Auswirkungen der Verwendung eines für den 1F-Mode optimierten Dämpfers auf weitere Schwingungsformen darzustellen.

Entscheidenden Einfluss auf die Optimierung des Reibungsdämpfers besitzt die betrachtete Schwingungsform und die damit verbundene Absolut- bzw. Relativverschiebung in den Kontaktzonen. Daher ist es unumgänglich, etwa die Dämpfermasse individuell der jeweiligen Schwingungsform anzupassen. Die Optimierungskurven der drei betrachteten Reibelementtypen für den 1T-Mode sind in **Bild 3.25a** dargestellt, wobei die Verdrehung $\hat{\varphi}_z$ um die s_z -Achse an der Schaufelspitze zur Beurteilung der Effektivität des Reibelements herangezogen wird. Es wird deutlich, dass alle Reibelementtypen einen ähnlichen Dämpfungseffekt nach sich ziehen, wobei bemerkenswert ist, dass im Gegensatz zum 1F-Mode keine partielle Separation auftritt und der keilförmige Dämpfer die maximale Amplitudenreduktion bewirkt. Die optimale Masse aller Reibelementtypen liegt mit etwa $m_{\text{opt}} = 0.4$ g sehr niedrig. Dies ist bedingt durch die hohe Drehzahl, die bei der gegebenen Erregerordnung $EO = 3$ zu Resonanz mit dem 1T-Mode führt, dessen Eigenfrequenz der ungekoppelten Schaufel bei $f_{S,3} = 695.3$ Hz liegt, vgl. **Tabelle D.1** in Anhang D. Aufgrund der geringen Relativbewegung ist im Gegensatz zum 1F-Mode eine Reduktion der Schwingungsamplitude nur um etwa 29% möglich. Hinsichtlich der Resonanzfrequenz zeigt sich die schon beobachtete Tendenz höherer Frequenzen bei Verwendung des keilförmigen Reiblements. Der auf die Eigenfrequenz $f_{S,3}$ des Torsionsmodes normierte Frequenzshift $\Delta f_{E,Res}^*$ fällt mit maximal 0.2% sehr niedrig aus.

Im Gegensatz zum 1F-Mode weisen die individuellen Punktkontakte der Kontaktfläche nunmehr verschieden große Relativverschiebungen auf, die sich z. B. in der in **Bild 3.25b**

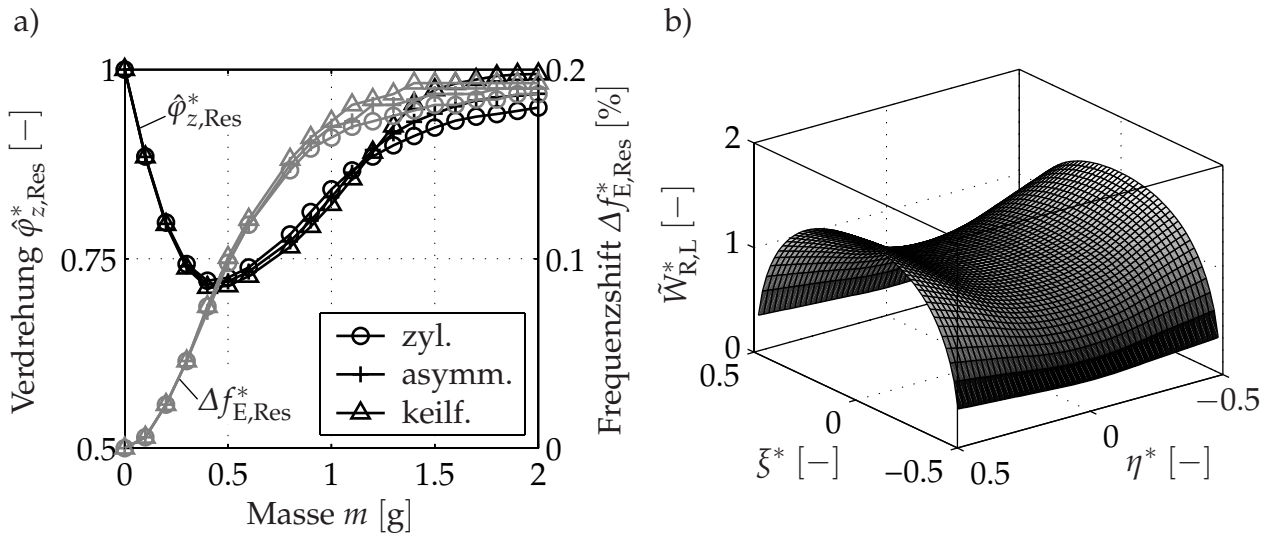


Bild 3.25: Dämpferoptimierung für den 1T-Schwingungsmodus: a) Optimierungskurven für die untersuchten Reibelementtypen; b) charakteristische Verteilung der normierten spezifischen Energiedissipation für Torsionsschwingungen

dargestellten charakteristischen Verteilung der normierten spezifischen Reibenergie $\tilde{W}_{R,L}^*$ des linken Kontaktes nach Gl. (3.2) für ein zylinderförmiges Reibelement niederschlagen. Deutlich ist die Erhöhung der Energiedissipation an den Rändern mit $\eta^* = \pm 0.5$ zu erkennen, die auf die dort auftretenden größeren Relativbewegungen zurückzuführen sind, die sich durch eine Verdrehung des Reibelements bei einem Torsionsmode ergeben. Die angegebene Verteilung der Reibenergie kann darüber hinaus Aufschlüsse über den zu erwartenden Verschleiß am Reibelement oder den Schaufelfußplatten geben.

Grundsätzlich ließen sich die für den 1F-Mode durchgeführten Parameterstudien auch für den 1T-Mode anstellen, wobei hier nur auf den Einfluss einer Variation der Kontaktlänge ℓ_K eingegangen werden soll, die bei dem oben untersuchten Biegemode ohne Einfluss war. **Bild 3.26** zeigt die entsprechenden Simulationsergebnisse für ein zylinderförmiges Reibelement. Aus **Bild 3.26a** und **3.26c** wird zunächst deutlich, dass eine erneute Optimierung der Reibelementmasse kaum signifikante Verbesserungen der Dämpfungswirkung nach sich zieht. Dies lässt sich mit der in **Bild 3.26d** dargestellten optimalen Masse erklären, die nur für sehr kleine Kontaktlängen von der optimalen Masse im Referenzzustand abweicht. Die Abnahme der Masse bei sehr kurzen Reibelementen lässt sich mit den geringeren Relativverschiebungen am Rand des Reiblements erklären. Inwieweit bei kleinen Relativbewegungen die als optimal bestimmten Massen konstruktiv zu realisieren sind, muss der jeweilige Anwendungsfall entscheiden. Die in **Bild 3.26** dargestellte Zunahme der Resonanzfrequenz mit steigender Kontaktlänge ist mit der ansteigenden Drehsteifigkeit zu begründen, die Abnahme der Schwingungsamplitude mit den größeren Relativverschiebungen an den Rändern der Kontaktfläche. Der Grenzfall $\ell_K \rightarrow 0$ führt aufgrund fehlender Relativbewegungen zu den Schwingungsamplituden der ungekoppelten Schaufel.

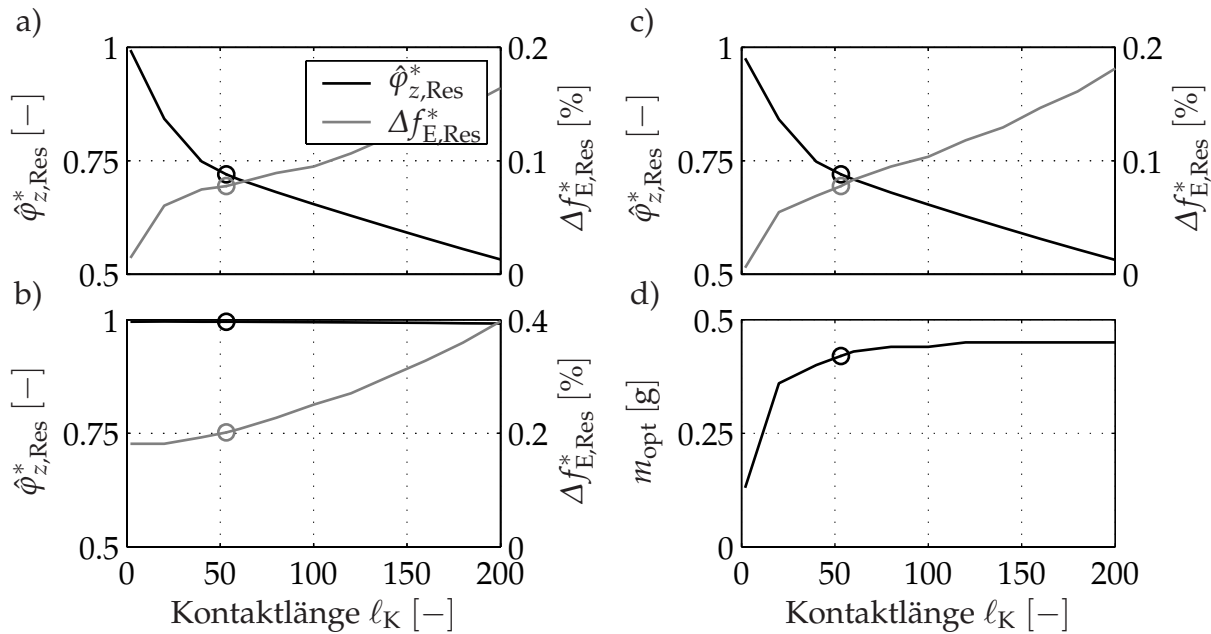


Bild 3.26: Variation der Kontaktlänge l_K für den 1T-Schwingungsmodus: a) für konstante Dämpfermasse; b) im linearen Grenzfall; c) für optimierte Dämpfermasse; d) optimale Dämpfermasse

Wird anstelle der optimalen Masse für den 1T-Mode die mit $m_{\text{opt}} = 40$ g für den 1F-Mode optimierte Masse verwendet, ergibt sich ausschließlich eine Versteifung des Systems, die eine Verschiebung der Resonanzfrequenz zu höheren Werten bewirkt. Eine Dämpfungswirkung ist nicht zu erwarten, da die für den 1F-Mode optimale Masse bei gleicher Erregerordnung ein stetiges Haften aufgrund der großen Drehzahlen für höhere Schwingungsmoden nach sich zieht. Die Erhöhung der Resonanzfrequenz dieser Moden kann aber durchaus von Interesse sein, wie auch **Bild 3.9b** zeigt. Werden in einem Drehzahlbereich verschiedene Schwingungsformen mit kritischen Schwingungsamplituden angeregt, ist ein sinnvoller Kompromiss der optimalen Dämpfermasse zu finden, sodass die Schwingungsamplituden und/oder Resonanzfrequenzen der betrachteten Schwingungsformen zufriedenstellend beeinflusst werden können.

3.4 Resultate für den verstimmten Schaufelkranz

Der Untersuchung verstimmter periodischer Systeme widmen sich eine große Anzahl Publikationen, daher soll an dieser Stelle nur auf einige grundlegende Eigenschaften verstimmter Schaufelkränze mit Reibelementen eingegangen werden. Hierbei sind insbesondere die folgenden Fragestellungen interessant:

- Wie wirkt sich eine Verstimmung der Schaufel- und Kontaktparameter auf die Schwingungsantwort aus?
- Gibt es eine optimale oder zu vermeidende Anordnung der Schaufeln auf dem Scheibenumfang?

- Kann eine bewusste Verstimmung des ursprünglich unverstimmten oder des stochastisch verstimmten Systems genutzt werden, um die Schwingungsamplituden weiter zu reduzieren?

Da die Berechnung des verstimmten Schaufelkranzes im Allgemeinen die Modellierung des Gesamtsystems erfordert, wird hier ein vereinfachtes Modell bestehend aus $n_S = 10$ Schaufeln betrachtet, welches hinsichtlich des Teilungswinkels δ und des Phasenwinkels $\Delta\varphi$ an das aus $n_S = 30$ Schaufeln bestehende Referenzsystem angepasst wurde. Die Resultate unterscheiden sich somit nur hinsichtlich der Schaufelzahl, nicht aber der daraus resultierenden physikalischen Gegebenheiten. Sie lassen sich daher grundsätzlich auf andere Schaufelkränze übertragen. Eine Kopplung über die elastische Radscheibe ist bei der Betrachtung des 1F-Modes aufgrund der geringen Nachgiebigkeit in Umfangsrichtung und der damit verbundenen starken Kopplung nicht notwendig, entscheidend ist in diesem Fall die zusätzliche Kopplung über die Reibelemente.

Im Folgenden soll nur beispielhaft auf einige Resultate verstimmter Beschauelungen eingegangen werden. Auf aufwändige MONTE-CARLO-Simulationen oder die statistische Auswertung der Schwingungsamplituden verstimmter Systeme soll verzichtet und auf die entsprechende Literatur, siehe u. a. SEXTRO [147] und GÖTTING [63] und die Ausführungen in Abschnitt 1.2.1.1 und Abschnitt 1.2.2.7, verwiesen werden. Weiterhin sollen extreme Fälle der Verstimmung, wie u. a. das Fehlen oder vollständige Verschweißen eines Reibelements, nicht betrachtet werden.

3.4.1 Frequenzverstimmung

Zu den wichtigsten Fragestellungen bei der Untersuchung verstimmter Systeme gehört die Problematik einer sinnvollen Anordnung stochastisch verstimmter Schaufeln auf dem Scheibenumfang. Neben den grundsätzlichen Bestrebungen einer möglichst geringen Unwucht und der daraus resultierenden bewussten Anordnung der Schaufeln hinsichtlich ihrer Masse, kann eine Verteilung auch nach dem Kriterium der Eigenfrequenzen erfolgen, wobei beide Eigenschaften mitunter auch gut korreliert sein können, aber nicht

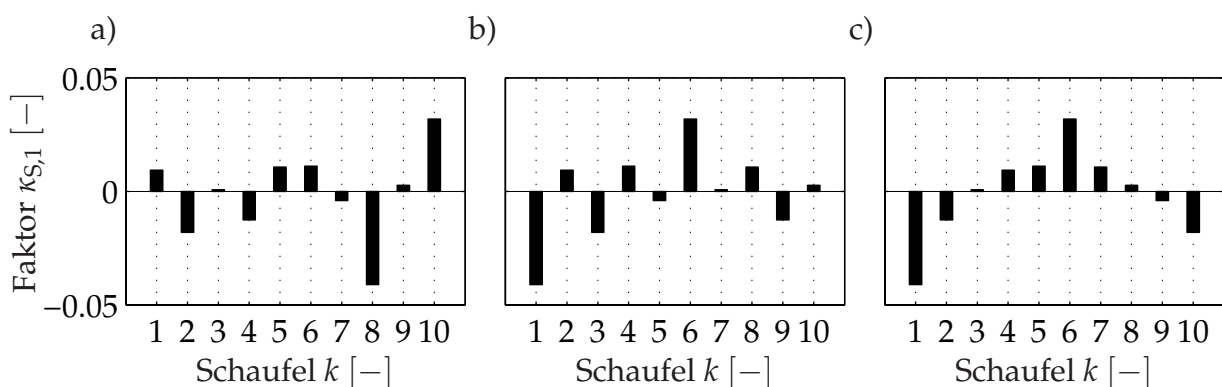


Bild 3.27: Schaufelanordnung: a) stochastisch; b) nach maximaler Frequenzdifferenz; c) nach minimaler Frequenzdifferenz

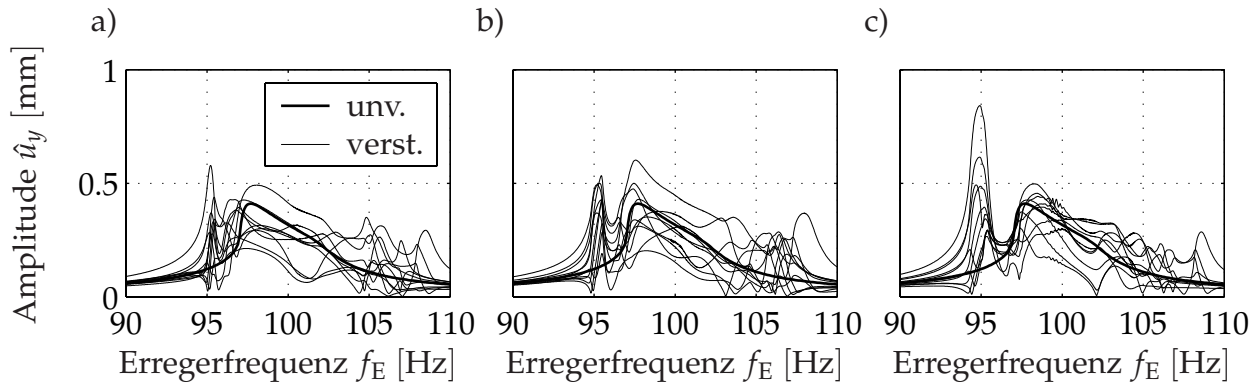


Bild 3.28: Ergebnisse der in **Bild 3.27** angegebenen Schaufelanordnungen bei Frequenzverstimmung mit $\sigma_{\kappa_{S,1}} = 0.02$

zwangsläufig sein müssen. Die individuellen Eigenfrequenzen

$${}^{(k)}f_{S,j} = {}^{(k)}\kappa_{S,j} {}^{(0)}f_{S,j}, \quad k = 1(1)n_S, \quad j = 1(1)n_{M,S}, \quad (3.11)$$

für die berücksichtigten $n_{M,S} = 10$ Moden ergeben sich aus einer Multiplikation der Eigenfrequenzen ${}^{(0)}f_{S,j}$ des unverstimmten Systems mit den Verstimmungsfaktoren ${}^{(k)}\kappa_{S,j} = {}^{(k)}\kappa_{S,1}$. Für diese wird eine Normalverteilung mit dem Mittelwert $\bar{\kappa}_{S,1} = 1$ und der Standardabweichung $\sigma_{\kappa_{S,1}} = 0.02$ angenommen. Eine stochastische Anordnung der Verstimmungsfaktoren zeigt **Bild 3.27a**, während in **Bild 3.27b** und **c** eine Anordnung derart gewählt wurde, dass die Differenz der Eigenfrequenzen benachbarter Schaufeln möglichst groß bzw. möglichst gering ausfällt⁷. Diese durchaus typischen Anordnungsprinzipien führen zu den in **Bild 3.28a** bis **c** dargestellten simulierten Frequenzgängen. Die Ergebnisse zeigen, dass eine frequenzorientierte Anordnung nach möglichst großen Frequenzdifferenzen keine signifikante Reduktion der Schwingungsamplituden bewirkt und die maximal im Verbund auftretende Schwingungsamplitude vergleichbar mit **Bild 3.28a** ist. Eine Anordnung nach **Bild 3.27c** zeigt jedoch eine deutliche Überhöhung der Schwingungsamplituden gegenüber dem des unverstimmten und auch des stochastisch verstimmten Ausgangssystems. Während die bei den Anordnungen nach **Bild 3.27a** und **b** jeweils maximal auftretende Schwingungsamplitude etwa um den Faktor 1.4 über der des unverstimmten Systems liegt, weist die Konfiguration nach **Bild 3.27c** eine Überhöhung um den Faktor 2 auf. Diese Anordnung hat sich für verschiedene Schaufelkränze als nachteilig erwiesen und bestätigt die von BALMER [8] gefundenen Ergebnisse. Es kann davon ausgegangen werden, dass bei größerer Schaufelzahl n_S dieser Effekt noch deutlicher hervortritt, da die Frequenzunterschiede benachbarter Schaufeln dann im Allgemeinen noch geringer als in **Bild 3.27c** ausfallen.

3.4.2 Verstimmung der Kontakt- und Dämpferparameter

Neben einer fertigungsbedingten Streuung der Schaufeleigenfrequenzen stellen die Reibkontakte eine zusätzliche Quelle für eine Verstimmung des Systems dar. Stellvertretend

⁷Eine aufwändige Optimierung dieser Forderung wurde nicht durchgeführt. Stattdessen wurden einfache Sortierschemata angewandt, wenngleich auch alternative Anordnungen möglich sind.

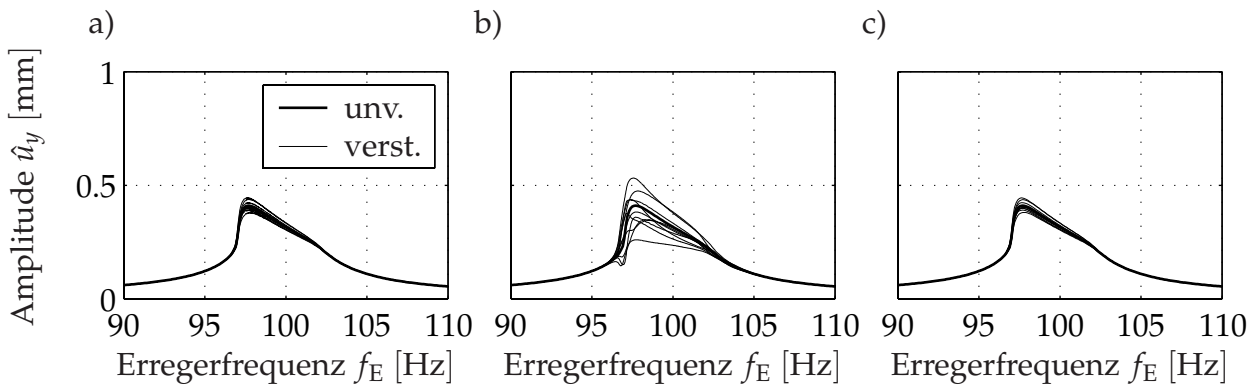


Bild 3.29: Einfluss einer stochastischen Verstimmung der Kontakt- und Dämpferparameter: a) Reibkoeffizient mit $\sigma_{\kappa_\mu} = 0.02$; b) Reibkoeffizient mit $\sigma_{\kappa_\mu} = 0.10$; c) Reibelementmasse mit $\sigma_{\kappa_m} = 0.02$

für die vielfältigen, in die Berechnung der Kontaktkräfte eingehenden Parameter sollen hier zum einen der Reibkoeffizient und zum anderen die Masse der Reibelemente betrachtet werden. In **Bild 3.29a** und **b** sind zunächst die Resultate für eine stochastische Verstimmung des Reibkoeffizienten mit $\sigma_{\kappa_\mu} = 0.02$ bzw. $\sigma_{\kappa_\mu} = 0.10$ dargestellt, wobei die Verteilung der Reibkoeffizienten auf die Kontakte nach **Bild 3.27a** erfolgt und $\mu_L = \mu_R$ gelten soll. Erwartungsgemäß wirkt sich eine größere Streuung auf eine deutlichere Aufweitung der Frequenzgänge aus. Weiterhin wird der schon von BALMER [8] beschriebene Effekt deutlich, dass sich der Einfluss einer Verstimmung des Reibkoeffizienten zumeist auf den Bereich der Resonanz beschränkt. Die in **Bild 3.29c** dargestellten Resultate einer mit $\sigma_{\kappa_m} = 0.02$ durchgeführten Verstimmung der Reibelementmasse entsprechen denen aus **Bild 3.29a**, da Reibelementmasse und Reibkoeffizient in dem betrachteten Fall den gleichen Einfluss auf die generierten Reibkräfte haben, siehe auch die Erläuterungen in Abschnitt 3.2.2.1. Allgemein ist ersichtlich, dass eine Frequenzverstimmung bei vergleichbarer Standardabweichung einen deutlich größeren Einfluss auf die Schwingungsamplituden aufweist als eine Verstimmung der Kontaktparameter.

3.4.3 Bewusste Verstimmung

Eine bewusst eingebrachte Verstimmung kann eingesetzt werden, um das Systemverhalten des unverstimmten oder auch des stochastisch verstimmten Ausgangssystems gezielt zu beeinflussen. Hierzu stehen in erster Linie diejenigen Parameter zur Verfügung, die relativ einfach zu modifizieren sind, etwa durch eine Änderung der Geometrie oder des verwendeten Materials. Daher soll an dieser Stelle ausschließlich der Einfluss einer bewussten Verstimmung bezüglich der Eigenfrequenzen der Schaufeln sowie der Reibelementmassen betrachtet werden. Die Schaufeln bzw. Reibelemente werden zu diesem Zweck alternierend mit Abweichungen von $\pm 2\%$ bzw. $\pm 10\%$ vom Nominalwert angeordnet, sodass sich im Fall des ursprünglich unverstimmten Schaufelkranzes wieder ein periodisches System ergibt, wobei ein zyklisches Segment zwei Schaufeln bzw. Reibelemente umfasst. Die in **Bild 3.30a** dargestellten Ergebnisse für alternierende Schaufel-eigenfrequenzen zeigen, dass sich zwei deutlich ausgeprägte Resonanzen ergeben, wobei

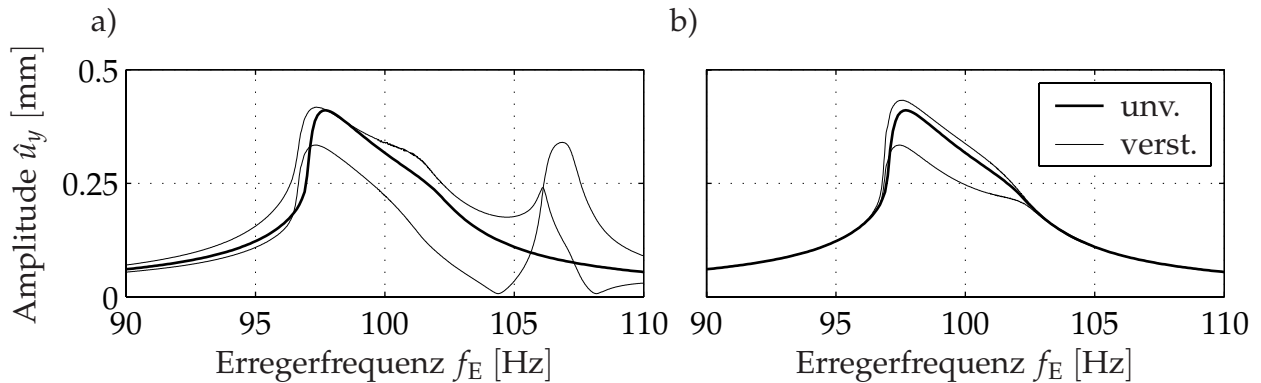


Bild 3.30: Bewusste Verstimmung des unverstimmten Systems: a) alternierende Verstimmung der Eigenfrequenzen; b) alternierende Verstimmung der Reibelementmassen

die maximal auftretende Amplitude geringfügig über der des unverstimmten Systems liegt. Gleichzeitig wird die Schwingungsamplitude der jeweils zweiten Schaufel gemindert. Im Mittel werden die maximalen Schwingungsamplituden somit gesenkt. In Einzelfällen kann auch die maximal auftretende Amplitude gegenüber dem unverstimmten System geringfügig gemindert werden, siehe auch PANNING ET AL. [120] und GÖTTING [63]. Vergleichbare Resultate ergeben sich nach **Bild 3.30b** für die um $\pm 10\%$ um die optimale Masse des unverstimmten Systems alternierende Reibelementmasse. Auch hier wird die im Mittel auftretende Schwingungsamplitude abgesenkt, während der Maximalwert des Schaufelkranzes geringfügig über dem des unverstimmten Systems liegt. Im Gegensatz zu einer alternierenden Eigenfrequenz tritt hier aber keine ausgeprägte zweite Resonanz auf, sodass auch der in **Bild 3.30a** dargestellte Tilgungseffekt nicht zu beobachten ist.

Abschließend zeigt **Bild 3.31** die in **Bild 3.30** angenommene alternierende Anordnung von Eigenfrequenzen oder Reibelementmassen im Fall des zusätzlich stochastisch frequenzverstimmten Systems nach **Bild 3.27a**. Gegenüber dem ursprünglich verstimmten System aus **Bild 3.28a** ergibt sich aber keine signifikante Minderung der Schwingungsamplituden.

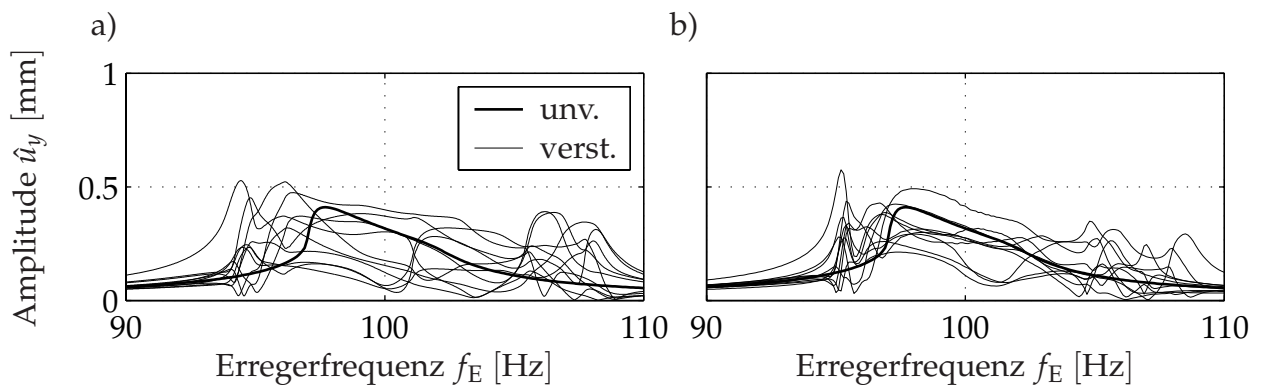


Bild 3.31: Bewusste Verstimmung des stochastisch verstimmten Systems aus **Bild 3.27a**: a) alternierende Verstimmung der Eigenfrequenzen mit ${}^{(k)}f_{S,1} = {}^{(0)}f_{S,1} \pm 2\%$; b) alternierende Verstimmung der Reibelementmassen mit ${}^{(k)}m = {}^{(0)}m \pm 10\%$

Es sei angemerkt, dass die hier dargestellten Resultate für verstimmte Systeme auf der für den unverstimmten Fall optimalen Masse von $m = m_{\text{opt}} = 40$ g basieren. Detailliertere Studien hinsichtlich der optimalen Masse des verstimmten Systems haben in vielen Fällen gezeigt, dass diese nicht signifikant von der des unverstimmten Systems abweicht, vgl. auch die Untersuchungen von JARELAND UND CSABA [81].

3.5 Deckbandkopplung

Zum Vergleich der Schaufelkopplung über Reibelemente soll im Folgenden kurz die in der Praxis ebenfalls sehr verbreitete Kopplungsmöglichkeit der Schaufeln über ein geteiltes Deckband behandelt werden. Zu diesem Zweck wird die Referenzschaufel an der Schaufelspitze mit einem Deckband versehen, siehe **Bild 3.1b**. Grundsätzlich lassen sich auf diese Weise auch Stützflügel oder ähnliche Koppellelemente behandeln, vgl. **Bild 1.3**. Entscheidend ist in diesem Fall die direkte Kopplung benachbarter Schaufeln und die daraus resultierenden veränderten kinematischen Beziehungen nach Abschnitt 2.4.2.4.

In **Bild 3.32** sind die Frequenzgänge des Knotens R an der Schaufelspitze und des Erregerknotens E dargestellt, vgl. **Bild 3.1b**. Im Vergleich zur ungekoppelten Schaufel mit verschwindender Kontaktnormalkraft werden die Resonanzfrequenzen im linearen Grenzfall mit $\bar{F}_N \rightarrow \infty$ zu deutlich höheren Werten verschoben und die Schwingungsformen ändern sich aufgrund der Koppelkräfte im Deckband, wobei die Schwingungsamplitude an der Schaufelspitze aufgrund der Koppelkräfte abnimmt und die maximale Schwingungsamplitude nunmehr im Schaufelblatt auftritt. Aus diesem Grund ist es im Allgemeinen erforderlich, die Anzahl der Ansatzfunktionen deutlich zu erhöhen, um die sich einstellenden Schwingungsformen mit Hilfe der Schwingungsformen der ungekoppelten Schaufel abbilden zu können. Hier wurde im Gegensatz zur Reibelementkopplung $n_{M,S} = 30$ gewählt. Die Versteifung des Gesamtsystems führt letztlich zu einer deutlichen Reduktion der Schwingungsamplituden.

Aufgrund der im Vergleich zur Referenzschaufel aus **Bild 3.1a** sehr großen Relativverschiebungen in den Kontaktpunkten der ungekoppelten Deckbandschaufel besitzt diese grundsätzlich ein vergleichsweise großes Dämpfungspotenzial. Es zeigt sich aber, dass sich der Deckbandkontakt aufgrund der starken Tendenz zur Separation von großen Teilen der Kontaktfläche nur bedingt zur Optimierung im Hinblick auf eine möglichst gute Reibungsdämpfung eignet. Hinzu kommt die grundsätzlich im Vergleich zur Reibelementkopplung weitaus schwieriger zu bestimmende Kontaktnormalkraft und deren Verteilung, z. B. aufgrund der Entwindung der Schaufel im Fliehkraftfeld. Hiermit ist auch die aufwändigere Abschätzung der nominellen Kontaktfläche verbunden, siehe hierzu die bereits in Abschnitt 2.6.2.1 erwähnten Untersuchungen von SZWEDOWICZ ET AL. [163, 165]. Ein großflächiges Öffnen des Kontaktes sollte stets verhindert werden, da dieses zu einem im Vergleich zur gekoppelten Schaufel gänzlich anderen Schwingungsverhalten führen kann. In diesem Zustand sind etwa stoßartige Anregungen von Eigenschwingungen der Schaufel möglich, wenn die Deckplatten benach-

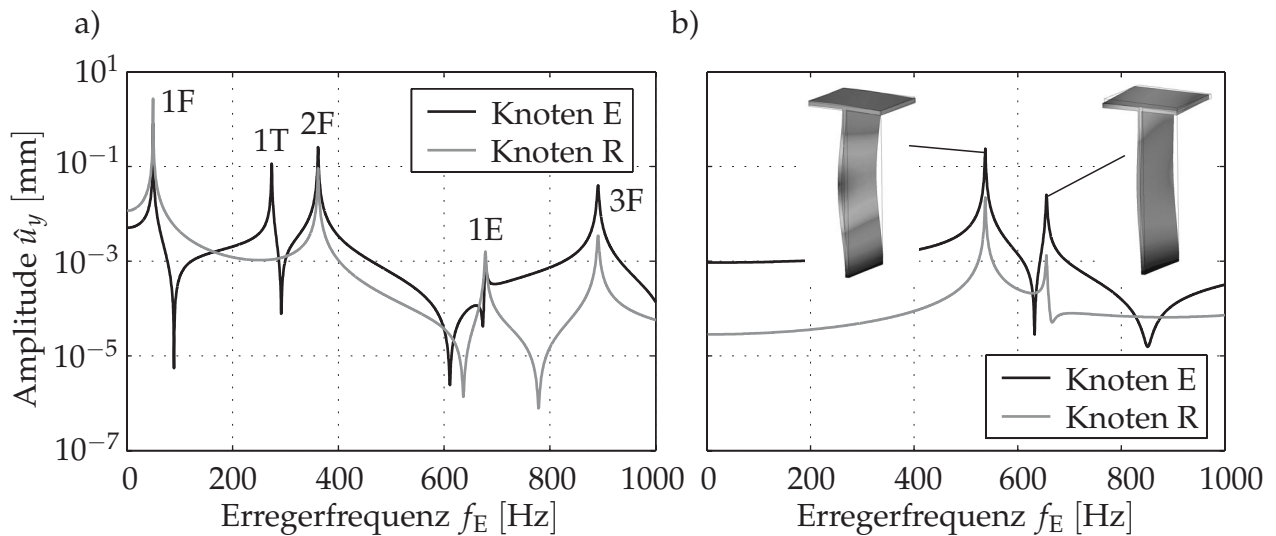


Bild 3.32: Frequenzgänge der Deckbandschaufel: a) ohne Kopplung; b) mit $\bar{F}_N \rightarrow \infty$

barter Schaufeln wieder in Kontakt treten. Aus diesem Grund ist die primäre Forderung an den Deckbandkontakt die einer möglichst dauerhaften Kopplung zur Versteifung des Schaufelkranzes. Dennoch wird es auch für große Kontaktkräfte aufgrund einer inhomogenen Normalkraftverteilung zu Mikrogleitvorgängen kommen, die zur Gesamtdämpfung beitragen.

3.6 Konzept zur praktischen Auslegung

In Anlehnung an die in Abschnitt 2.5 skizzierte Vorgehensweise zur Einbettung des Simulationsprogramms in den Auslegungsprozess lässt sich das Vorgehen in die Schritte

- Analyse des linearen Ausgangssystems (Dynamik der beschauften Scheibe, Beschreibung der Erregung usw.),
- Optimierung des Koppellements unter Berücksichtigung der in Abschnitt 3.2 gewonnenen Erkenntnisse und
- abschließende lineare Spannungsanalyse und Überprüfung des Einflusses des Koppellements auf das Gesamtsystem

unterteilen. Dieses Vorgehen soll im Folgenden kurz skizziert werden.

3.6.1 Schwingungsverhalten des linearen Systems

Die Auslegung von Reibungsdämpfern erfordert neben der Kenntnis der Erregerkräfte zunächst eine detaillierte Analyse der Dynamik des linearen Ausgangssystems, basierend zum Beispiel auf einer Finite-Element-Berechnung der zyklischen beschauften Scheibe, vgl. u. a. Abschnitt 2.1.3. Diese Ergebnisse dienen als Basis für die anschließende Frage-

stellung, ob und wenn ja, welche Koppellelemente zur Erhöhung der Betriebsfestigkeit der Beschauelung sinnvoll eingesetzt werden können. Zur Darstellung des Schwingungsverhaltens haben sich mit dem Knoten- (oder Interferenz-) und dem CAMPBELL-Diagramm⁸ in der Praxis im Wesentlichen zwei Darstellungsformen etabliert. Das Knotendiagramm eignet sich insbesondere zur Darstellung des Schwingungsverhaltens von scheibeninduzierten Schwingungsformen bei konstanter Drehzahl, während im CAMPBELL-Diagramm die Drehzahlabhängigkeit der Eigenfrequenzen zum Ausdruck kommt.

Beide Diagramme sind in **Bild 3.33** für die oben definierte Referenzschaufel einschließlich einer elastischen Radscheibe, vgl. **Bild 2.6**, dargestellt. Aus **Bild 3.33a** wird zunächst der Anstieg der für eine Drehzahl von $n_R = 2000 \text{ min}^{-1}$ bestimmten Eigenfrequenzen mit größeren Knotendurchmessern ND deutlich. Insbesondere die E-Moden mit ausgeprägter axialer Schwingungskomponente zeigen einen deutlichen Scheibeneinfluss, während die F- bzw. T-Moden nahezu vollständig vom Schwingungsverhalten der Schaufel bestimmt werden. Im Vergleich zu der fest eingespannten Schaufel (gestrichelte Kurven), weisen die E-Moden aufgrund der Scheibenelastizität deutlich geringere Eigenfrequenzen auf, während dieser Einfluss im Fall der F- und T-Moden nur von untergeordneter Bedeutung ist. Bei bestimmten Knotendurchmessern kommt es zum so genannten *frequency veering* oder *mode veering*, bei dem sich die Eigenfrequenzkurven verschiedener Schwingungsformen annähern, siehe etwa die Wechselwirkung zwischen dem 1E- und dem 2F-Mode im Bereich $ND = 11 \dots 13$. Hier kommt es zu einer Überlagerung zweier Moden, sodass eine Zuordnung zu einer Schwingungsfamilie auch bei geometrisch einfachen Schaufeln nicht immer eindeutig erfolgen kann. Insbesondere im Fall verstimmter Beschauelungen kommt dem Bereich des *veerings* aufgrund der dort vorhandenen Sensitivität der Schwingungsform bezüglich Parameterschwankungen große Bedeutung zu. Der Effekt des *veerings* ist Gegenstand u. a. der Arbeiten von YANG UND GRIFFIN [197], MARUGABANDHU UND GRIFFIN [100], AFOLABI UND ALABI [3], BLADH ET AL. [16] sowie KENYON ET AL. [87], die detaillierte Untersuchungen unter Einführung eines kontinuierlichen Phasenwinkels $\Delta\varphi$ durchführen.

Wird zusätzlich zu den Eigenfrequenzen der Schwingungsformen die so genannte Impulsgerade in das Knotendiagramm eingetragen, ergibt sich das in **Bild 3.33a** dargestellte vollständige Knotendiagramm. Die Impulsgerade kennzeichnet die Verbindungslinie der bei gegebener Drehzahl $n_R = 2000 \text{ min}^{-1}$ im Anregungsspektrum enthaltenen möglichen Anregungsfrequenzen, die sich aus der Drehzahl und der entsprechenden Erregerordnung ergeben, wobei noch keine Aussage darüber getroffen wird, ob und wie stark eine bestimmte Erregerfrequenz im Spektrum der Erregerkräfte enthalten ist. Die Schnittpunkte der Impulsgeraden mit den Eigenfrequenzkurven stellen mögliche Resonanzstellen und damit kritische Betriebspunkte dar. Dabei kann, je nach Verlauf der Eigenfrequenzkurven über der Anzahl der Knotendurchmesser, die Situation eintreten, dass die Eigenfrequenzkurve einer Schwingungsfamilie mehrfach von der Impulsgeraden nahe den diskreten Punkten der verschiedenen Knotendurchmesser geschnitten wird. Dies führt da-

⁸Im englischen Sprachraum wird der Begriff *Interference diagram* mitunter auch für das CAMPBELL-Diagramm verwendet.

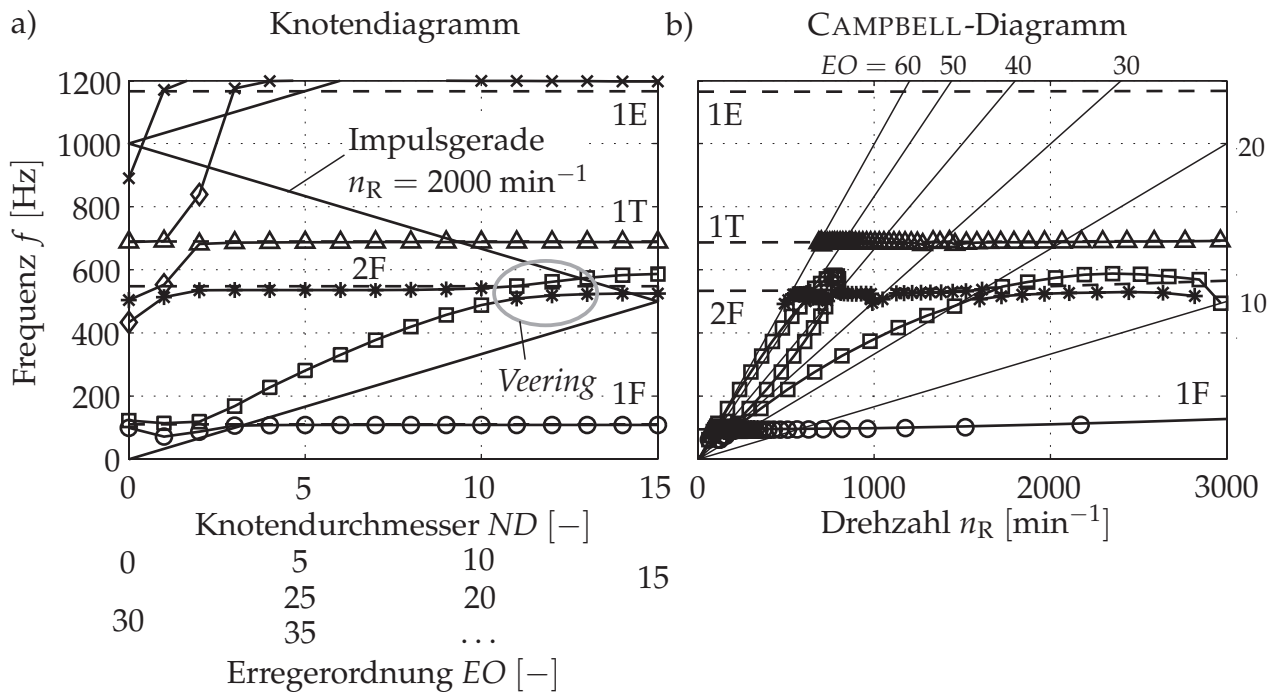


Bild 3.33: Analyse des Schwingungsverhaltens einer beschauelten Scheibe ohne Reibelemente: a) Knotendiagramm; b) CAMPBELL-Diagramm; Legende: \circ 1F-Mode; $*$ 2F-Mode; \times 3F-Mode; \square 1E-Mode; \diamond 2E-Mode; \triangle 1T-Mode

zu, dass die Schwingungen einer Schwingungsfamilie mit verschiedenen Knotendurchmesserzahlen angeregt werden können. Dieser Effekt wird von EWINS [49] als *resonance coincidence* bezeichnet. Der Darstellung der Impulsgeraden in **Bild 3.33a** liegt die Annahme einer zeitinvarianten, raumfesten Erregung und somit einer drehzahlproportionalen Erregerkreisfrequenz Ω_E zu Grunde. Wird zusätzlich ein in Gl. (2.79) enthaltenes Pulsieren $g(t)$ der Strömung mit der Pulsationsfrequenz Ω_P berücksichtigt, ergeben sich nach Gl. (2.81) weitere Anregungsfrequenzen, die zu mehreren Impulsgeraden und somit mehreren möglichen Resonanzstellen führen, siehe auch RIEHM [134]. Auf die Darstellung wird an dieser Stelle verzichtet. WILDHEIM [182] gibt hierzu eine ausführliche Herleitung einschließlich der unter dem Einfluss gyroskopischer Kräfte zu beobachtenden Splitting der Eigenfrequenzen der vorwärts und rückwärts rotierenden Eigenvektoren, siehe hierzu auch die detaillierte Darstellung von REUTER [133].

Für die mit n_S Schaufeln besetzte Scheibe wird entsprechend Abschnitt 2.2.1 angenommen, dass die äußeren Erregerkräfte ausschließlich an den Schaufeln angreifen, sodass eine diskrete Anregung der zyklischen Struktur vorliegt. Es werden somit ausschließlich Schwingungsformen angeregt, die der Bedingung

$$\sum_{k=1}^{n_S} \cos((k-1)\Delta\varphi) \cos((k-1)\widetilde{\Delta\varphi}) \neq 0 \quad (3.12)$$

genügen, mit dem in Gl. (2.92) angegebenen Phasenwinkel der Erregung $\Delta\varphi$ und dem analog definierten Phasenwinkel der Schwingungsform $\widetilde{\Delta\varphi}$ nach Gl. (2.39). Aufgrund der Symmetrie und der Periodizität der \cos -Funktion sind im Gegensatz zu reinen Scheiben-

schwingungen alle Schwingungsformen anregbar, für die

$$EO = k n_S \pm ND \quad \text{bzw.} \quad ND = \pm(EO - k n_S) \quad (3.13)$$

gilt⁹, mit $k = 0(1)\infty$, $ND = 0(1)\frac{n_S}{2}$ und $EO \geq 0$, siehe auch Gl. (2.184). Dieser Zusammenhang schlägt sich in **Bild 3.33a** durch eine fortlaufende Spiegelung der Impulsgeraden bei $ND = \frac{n_S}{2}$ und $ND = 0$ nieder. Die diskreten Punkte der Eigenfrequenzkurven repräsentieren für $ND \neq 0, ND \neq \frac{n_S}{2}$ jeweils zwei identische, aber gegensinnig rotierende Eigenvektoren des gekoppelten Schaufel-Scheibe-Systems, siehe Abschnitt 2.1.3. Schnittpunkte der Eigenfrequenzkurven mit der Impulsgeraden stellen mögliche Resonanzstellen dar. Diese erfüllen die Resonanzbedingung

$$\omega_{G,j}(ND) = \begin{cases} (k n_S + ND) \Omega_R, & k = 0(1)\infty \quad (\text{rückw. rot. Eigenvektoren}), \\ (k n_S - ND) \Omega_R, & k = 0(1)\infty \quad (\text{vorw. rot. Eigenvektoren}), \end{cases} \quad (3.14)$$

da die Abschnitte positiver Steigung der Impulsgeraden bezüglich des rotierenden Systems eine Anregung in Form einer rückwärts wandernden Welle und die Abschnitte negativer Steigung eine Anregung in Form einer vorwärts wandernden Welle darstellen, siehe auch Seite 58 in Abschnitt 3.2.4. Entsprechend wird der jeweilige Schwingungsmodus angeregt. In dem gegebenen Beispiel sind somit bei $n_R = 2000 \text{ min}^{-1}$ Resonanzerscheinungen u. a. bei der Erregerordnung $EO = 3$ zu erwarten, da hier das Produkt aus Drehfrequenz und Erregerordnung nahe der Eigenfrequenz der 1F-Schwingung liegt und die Gestalt der Erregung derjenigen der Schwingungsformen entspricht ($EO = ND = 3$). Gleiches gilt für $EO = 17$ und den 1E-Mode. Welche der möglichen Resonanzstellen letztlich als kritisch zu beurteilen ist, hängt entscheidend von den in dem Erregerspektrum enthaltenen Harmonischen ab.

Das in **Bild 3.33a** dargestellte Knotendiagramm ist nur für eine konstante Drehzahl n_R gültig. Soll eine Variation der Drehzahl berücksichtigt werden, hat dies zur Folge, dass sich die Impulsgeraden durch eine veränderte Steigung verlagern. Weiterhin muss dann ein Anstieg der Eigenfrequenzen bei größeren Drehzahlen berücksichtigt werden (so genanntes *centrifugal stiffening*), wie für die ersten vier Schwingungsformen dem in **Bild 3.33b** dargestellten CAMPBELL-Diagramm entnommen werden kann. Grundsätzlich können im CAMPBELL-Diagramm die in so genannten Schwingungsfamilien zusammengefassten Eigenfrequenzkurven für alle Knotendurchmesser jeder Schwingungsform dargestellt werden, siehe u. a. JAROSCH [82]. Aus der Vielzahl möglicher Schnittpunkte der durch Ursprungsgeraden repräsentierten einzelnen Drehzahlharmonischen des Erregerspektrums mit den Eigenfrequenzkurven sind aber nur diejenigen von Interesse, die der Bedingung aus Gl. (3.14) genügen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind nur Erregerordnungen $EO \leq 60$ im Bereich der Drehzahl $n_R = 0 \dots 3000 \text{ min}^{-1}$ dargestellt, sodass einige Schwingungsformen in dem betrachteten Bereich nicht angeregt werden.

⁹Dieses Phänomen wird von EWINS [51] sehr anschaulich als *Aliasing* beschrieben. Ein ähnlicher Effekt tritt nach MOHAMAD ET AL. [109] auch bei der Finite-Element-Modellierung rotationssymmetrischer Scheiben auf, deren vollständige Rotationssymmetrie aufgrund der endlichen Diskretisierung in Umfangsrichtung verloren geht.

Die Eigenfrequenzkurven der 1F-, 2F- und 1T-Schwingung zeigen gegenüber den gestrichelt dargestellten Kurven der fest eingespannten Schaufel geringfügig niedrigere Eigenfrequenzen, die auf die zusätzliche Elastizität der Scheibe zurückzuführen sind. Sehr viel deutlicher ist der Einfluss der Scheibenelastizität bei der hauptsächlich senkrecht zur Scheibenebene ausgeprägten 1E-Schwingung zu erkennen. Hier zeigt sich zum einen eine deutliche Abnahme der Eigenfrequenz gegenüber der fest eingespannten Schaufel, zum anderen wird auch der Einfluss der Knotendurchmesserzahl deutlich: Schwingungsformen mit einer Knotendurchmesserzahl von $ND = \frac{n_s}{2}$, die die gegenphasige Schwingung benachbarter Schaufeln kennzeichnen, weisen sehr viel größere Eigenfrequenzen auf als Schwingungsformen niedrigerer Knotendurchmesser, vgl. **Bild 3.33a**. Aufgrund der Abhängigkeit der Eigenfrequenzen von der Knotendurchmesserzahl und der Drehzahl sowie der Wechselwirkung zwischen verschiedenen Schwingungsformen können sich sehr komplexe Verläufe der Eigenfrequenzen ergeben, wie in **Bild 3.33b** im Fall des 1E-Modes zu erkennen ist, siehe auch WILDHEIM [180]. Die EO0-Anregung lässt sich im CAMPBELL-Diagramm nicht sinnvoll darstellen, da die Erregerfrequenz in keinem funktionalen Zusammenhang zur Drehfrequenz des Rotors steht. Grundsätzlich ist diese Art der Erregung aber, wie auch eine EO30- oder EO60-Erregung, in der Lage, Schwingungsformen mit $ND = 0$ anzuregen, sodass dieser Sonderfall (z.B. aufgrund des in Abschnitt 2.2.2 genannten Pulsierens der Strömung) eine gesonderte Betrachtung erfordert.

An dieser Stelle muss erwähnt werden, dass die obigen Betrachtungen zunächst nur für das ideale, unverstimmte System, basierend auf n_s identischen Schaufeln, beruhen. Im Fall eines verstimmt Systems ergeben sich Streubänder für die Verläufe der Eigenfrequenzen der verschiedenen Schwingungsformen. Aufgrund stets vorhandener Toleranzen und Unsicherheiten bzgl. der Schaufelgeometrie und der Werkstoffdaten werden die Schaufeleigenfrequenzen zumeist so abgestimmt, dass bei Nenndrehzahl ein hinreichend großer Abstand zu den Drehzahlharmonischen eingehalten wird. Unterliegt die Drehzahl ebenfalls Schwankungen, so schränkt die Forderung, die Beschaukelung möglichst resonanzfrei auszulegen, den Auslegungsspielraum weiter ein. Neben dem unvermeidlichen Passieren von Resonanzstellen beim Hoch- bzw. Auslauf einer Turbomaschine, muss ein gefahrloser Betrieb der Beschaukelung u. U. auch resonanznah oder sogar in Resonanz möglich sein. Dies ist insbesondere bei Gasturbinen mit variabler Drehzahl der Fall, sodass die Eigenfrequenzen nicht auf eine konstante Betriebsdrehzahl ausgelegt werden können.

Der Einfluss der Temperatur auf den Elastizitätsmodul ist in dieser Darstellung nicht berücksichtigt. Insbesondere bei den ersten, der Brennkammer unmittelbar folgenden Hochdruckstufen einer Gasturbine kann der mit steigender Betriebstemperatur sinkende Elastizitätsmodul zu einer deutlichen Absenkung der Eigenfrequenzen führen. Dieser Effekt ist auch in der erweiterten Darstellung des CAMPBELL-Diagramms erkennbar, in dem neben der Drehzahlabhängigkeit auch der Einfluss des Lastzustandes (Leerlauf, Teillast, Vollast) ermittelt werden kann, siehe u. a. PANNING ET AL. [117].

3.6.2 Optimierung und Analyse des Reibelements

Sind die Randbedingungen hinsichtlich der Dynamik der beschauften Scheibe und der Erregerkräfte bekannt, lässt sich anhand von **Bild 3.33** der kritische Betriebszustand und die relevante Schwingungsform ermitteln. Hieraus resultieren die an das Koppellement zu stellenden Forderungen. Dies kann bei Betriebsbedingungen mit starken Drehzahlschwankungen in erster Linie die Erhöhung der Dämpfung sein, bei konstanter Drehzahl jedoch u. U. eine möglichst exakte Abstimmung der Resonanzfrequenz. Insbesondere in letzterem Fall kommt der gewählten Reibelementgeometrie besondere Bedeutung zu, vgl. Abschnitt 3.2.1.1. Auf Basis der Anforderungen an das Koppellement erfolgt nach Abschnitt 3.2 eine Optimierung und Auslegung. Ist diese erfolgt, sollte die konstruktive Machbarkeit unter den gegebenen Randbedingungen beurteilt werden und zusätzlich eine genauere Analyse der Gleichgewichtslage des Reiblements erfolgen, um die getroffenen Modellannahmen auf ihre Gültigkeit zu überprüfen. Abschließend kann auf der Basis von Energiebetrachtungen ein erster Anhaltspunkt über den zu erwartenden Verschleiß und somit das Langzeitverhalten gewonnen werden.

3.6.2.1 Analyse der Gleichgewichtslage des Reiblements

Im Fall von Reibelementen mit flächigen Kontakten stellt sich die Frage, inwieweit die eingangs getroffene Annahme gültig ist, dass das Reibelement flächig an den Fußplatten anliegt und nicht verkantet. In diesem Zuge ist eine Analyse der Gleichgewichtslage hilfreich, um eine mögliche unerwünschte Position des Reiblements zu verhindern. Diese kann sich nach **Bild 3.34b** und **c** beim asymmetrischen und keilförmigen Reibelement durch ein Verkippen des Reiblements ergeben. Zusätzlich zu den Modellannahmen und der Darstellung in **Bild 3.34** sollen in den folgenden Betrachtungen in der statischen Gleichgewichtslage Reibkräfte berücksichtigt werden, die ein Aufliegen des Reiblements auf den Kontakträndern begünstigen. Befindet sich das Reibelement in einem derartigen Zustand, wird eine Vorhersage des Schwingungsverhaltens deutlich erschwert, da insbesondere die bei flächigen Kontakten berücksichtigte Drehsteifigkeit im Fall des Linienkontaktes deutlich abnimmt, siehe hierzu auch die experimentellen Ergebnisse in Abschnitt 4.1. Im Fall des keilförmigen Reiblements kann zusätzlich die in **Bild 3.34d** dargestellte Situation eintreten, dass die Summe aus Kontakt- und Dämpferwinkel (so genannter *Roof angle*) nicht 180° entspricht. Eine verlässliche Vorhersage der Gleichgewichtslage wird durch diesen Winkelfehler weiter erschwert. Auf die Probleme einer exakten Positionierung des keilförmigen Reiblements geht in diesem Zusammenhang auch CSABA [37] ein, vgl. Abschnitt 1.2.2.2. Im Gegensatz zum zylinderförmigen und auch asymmetrischen Reibelement kann dies neben dem oben geschilderten Problem des Abhebens als weiterer Nachteil des keilförmigen Reiblements angesehen werden. Der in **Bild 3.34d** dargestellte Fall soll aber nicht weiter betrachtet werden, da er die in Abschnitt 2.1.1 getroffenen grundsätzlichen Annahmen nicht erfüllt.

Am Beispiel eines asymmetrischen Reiblements soll ein Auslegungskriterium hergeleitet werden, welches eine unerwünschte Gleichgewichtslage nach **Bild 3.34b** verhindert.

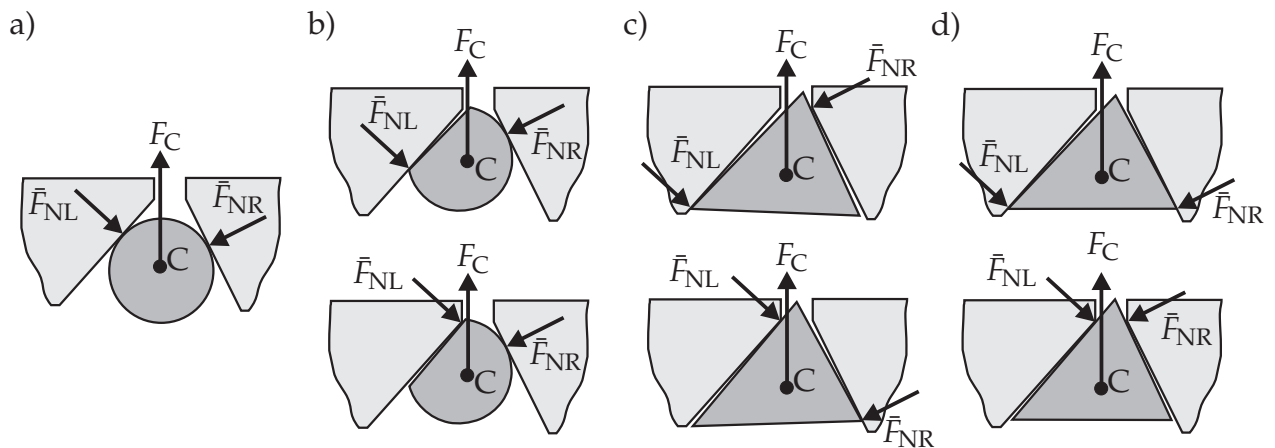


Bild 3.34: Grenzfälle einer von der Nominallage abweichenden Gleichgewichtslage verschiedener Reibelemente: a) zylinderförmiges Reibelement; b) asymmetrisches Reibelement; c) keilförmiges Reibelement; d) keilförmiges Reibelement mit Winkelfehler $\alpha + \beta \neq 180^\circ - (\gamma_L + \gamma_R)$

Zu diesem Zweck wird das Reibelement um einen kleinen Winkel φ_x gegenüber der D_x -Achse verdreht. Entsprechend der Reibkoeffizienten im linken bzw. rechten Kontakt ergeben sich die dargestellten Reibkegel mit den Öffnungswinkeln

$$\vartheta_L = \arctan \mu_L, \quad \vartheta_R = \arctan \mu_R, \quad (3.15)$$

wobei die Resultierende aus Normal- und Tangentialkraft stets innerhalb dieser Reibkegel verläuft, siehe **Bild 3.35**. Um die dargestellte Gleichgewichtslage bei kleiner Verdrehung φ_x des Reibelements zu verhindern, muss die Forderung

$$M_x^{(C)} < 0 \quad (3.16)$$

aufgestellt werden, die wieder zu einem flächigen Anliegen im linken Kontakt führt, in dem im Gegensatz zum Linienkontakt in A_1 ein Moment aufgenommen werden kann. Geometrisch lässt sich diese Forderung auf die Bedingung $s > t$ zurückführen, siehe **Bild 3.35**. Eine Auswertung führt unter Berücksichtigung der Geometrie des asymmetrischen Reibelements und der Lage seines Schwerpunktes C auf die Bedingung

$$f(\alpha) = k_1 + \sin \alpha - \mu_L \cos \alpha > 0 \quad (3.17)$$

mit den Abkürzungen

$$k_1 = \frac{r_{MC,y}}{R} \left[\mu_L \sin \gamma_L - \cos \gamma_L - k_2 (\mu_R \sin \gamma_R + \cos \gamma_R) \right] - k_2 \mu_R \quad (3.18)$$

und

$$k_2 = \frac{\sin \gamma_L + \mu_L \cos \gamma_L}{\sin \gamma_R - \mu_R \cos \gamma_R}. \quad (3.19)$$

Die Bestimmung des kritischen Öffnungswinkels α_{krit} aus Gl. (3.17) führt letztlich auf die Bedingung

$$\kappa_h = \frac{h_{D,L}}{R} > \kappa_{h,\text{min},1} = 2 \sin \alpha_{\text{krit}}. \quad (3.20)$$

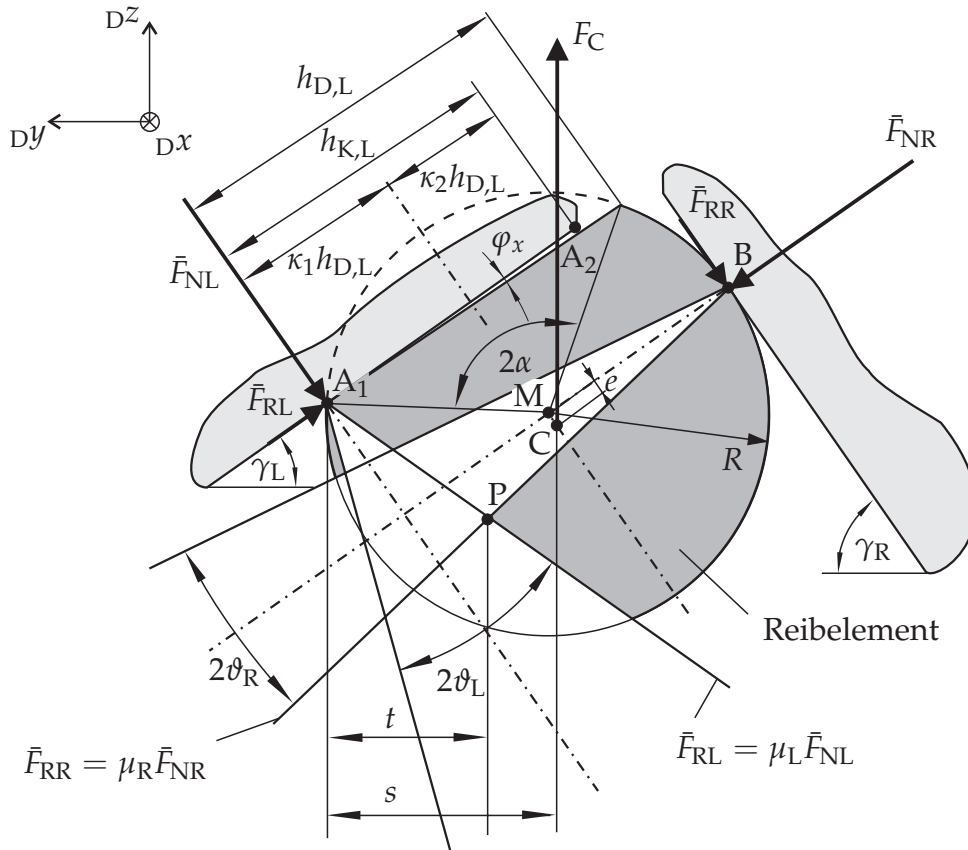


Bild 3.35: Analyse der statischen Gleichgewichtslage des Reibelements unter Berücksichtigung von Reibkräften

Der Verlauf $\kappa_{h,\min,1}(\gamma)$ ist in **Bild 3.36** für verschiedene Reibkoeffizienten μ in Abhängigkeit des Kontaktwinkels $\gamma = \gamma_L = \gamma_R$ dargestellt. Darüber hinaus lässt sich eine analoge Beziehung für einen unerwünschten Linienkontakt im Punkt A_2 aufstellen, vgl. **Bild 3.34b** unten, die für den Fall eines 'überhängenden' Reibelements mit $h_{K,L} \neq h_{D,L}$ den Wert $\kappa_{h,\min,2}(\gamma)$ liefert. Zusätzlich sollte der Wert

$$\kappa_{h,\max} = 2 \sin(\gamma_L + \gamma_R) \tag{3.21}$$

nicht überschritten werden, um einen HERTZ'schen Kontakt im Punkt B zu gewährleisten. Die in **Bild 3.36** hell hinterlegten Bereiche stellen Parameterkombinationen dar, die eine unerwünschte Gleichgewichtslage auf der Reibelementkante weder in Punkt A_1 noch in Punkt A_2 zulassen. Aus einer Variation des Reibkoeffizienten von $\mu = 0.1 \dots 0.5$ ist ersichtlich, dass dieses Gebiet deutlich eingeschränkt wird, da mit ansteigendem Reibkoeffizienten die in **Bild 3.35** dargestellten Reibkegel aufgeweitet werden. Für ausreichend große Reibkoeffizienten ist die Forderung, eine im obigen Sinne unerwünschte Gleichgewichtslage zu verhindern, oftmals nicht zu erfüllen.

Erfüllt ein keilförmiges Reibelement die Bedingung $\alpha + \beta + \gamma_L + \gamma_R = 180^\circ$, dann lassen sich die Ergebnisse des asymmetrischen Reibelements übertragen, wobei zur Bestimmung des rückstellenden Momentes $M_x^{(C)}$ die entsprechenden Ortsvektoren \vec{r}_{CA} bzw. \vec{r}_{CB} aufgestellt werden müssen.

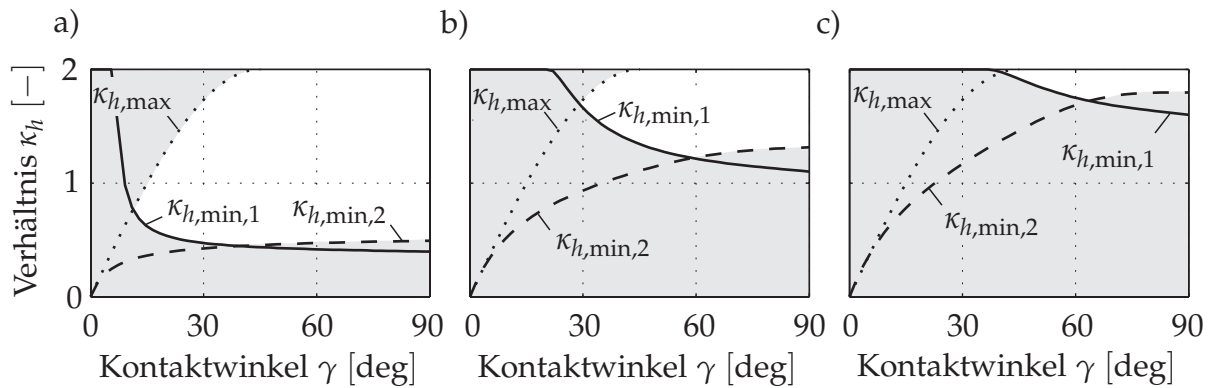


Bild 3.36: Verhältnis κ_h für $\kappa_1 = 0.5$ und $\kappa_2 = 0.4$: a) für $\mu = 0.1$; b) $\mu = 0.3$; c) $\mu = 0.5$

An dieser Stelle sei erwähnt, dass insbesondere im Fall des asymmetrischen Reibelements, je nach Lage der Kontaktpreferenzpunkte, ein resultierendes Moment bezüglich des Schwerpunktes erzeugt werden kann. Unter Vernachlässigung der Tangentialkräfte nach Abschnitt 2.3.2.1 wird dieses durch eine Verdrehung und das hieraus resultierende Moment um die $\kappa_L \eta$ -Achse des flächigen Kontaktes kompensiert. Dies führt zu einer inhomogenen Verteilung der Kontaktnormalkräfte, wobei diese zum oberen Rand des Reibelements anwachsen. Dieser Effekt konnte auch anhand von Verschleißspuren an real ausgeführten Reibelementen beobachtet werden.

3.6.2.2 Energiedissipation

Die Wirksamkeit eines Dämpfers kann über die in den Reibkontakten dissipierte Energie beurteilt werden, die Aufschlüsse über den vorliegenden Haft- oder Gleitzustand des Reibelements und somit ein mögliches Optimierungspotenzial und den zu erwartenden Verschleiß zulässt. Allgemein ergibt sich die an einer diskretisierten Struktur mit n_{FHG} Freiheitsgraden während einer Schwingungsperiode der Periodendauer T verrichtete Arbeit

$$W = \int_0^T \mathbf{F}^T(t) \dot{\mathbf{u}}(t) dt \quad (3.22)$$

aus der Integration der Leistung. Unter der Voraussetzung harmonischer Verschiebungen und Kräfte ergibt sich in komplexer Schreibweise

$$W = \pi \sum_{j=1}^{n_{\text{FHG}}} \text{Im}\{\hat{F}_j\} \text{Re}\{\hat{u}_j\} - \text{Re}\{\hat{F}_j\} \text{Im}\{\hat{u}_j\}. \quad (3.23)$$

Im eingeschwungenen Zustand gilt der Energieerhaltungssatz

$$W_{\text{zu}} + W_{\text{D}} + W_{\text{R}} = 0 \quad (3.24)$$

mit der zugeführten Energie der äußeren Kräfte, $W_{\text{zu}} > 0$, der Energiedissipation aufgrund viskoser Dämpfung, $W_{\text{D}} < 0$, und der Energiedissipation durch Reibung, $W_{\text{R}} \leq 0$. Für das modale Modell ergibt sich mit den modalen Amplituden \hat{q}_j die zugeführte Ener-

gie durch die modalen Erregerkräfte analog zu Gl. (3.23) aus

$$W_{\text{zu}} = \pi \sum_{j=1}^{n_M} \text{Im}\{\hat{\mathcal{F}}_{E,j}\} \text{Re}\{\hat{q}_j\} - \text{Re}\{\hat{\mathcal{F}}_{E,j}\} \text{Im}\{\hat{q}_j\} \quad (3.25)$$

und die Energiedissipation durch viskose Dämpferkräfte $F_D = D\dot{u}$ unter Annahme einer symmetrischen Dämpfungsmatrix D aus

$$W_D = -\pi \sum_{j=1}^{n_M} 2D_j \omega_j \Omega_E |\hat{q}_j|^2. \quad (3.26)$$

Die in einem Kontaktpunkt P_i einer Kontaktzone aufgrund von Reibung dissipierte Energie wird durch Summation der in beiden Koordinatenrichtungen ξ und η dissipierten Energie ermittelt,

$$\begin{aligned} W_{R,P_i} = & -\pi \left(\text{Im}\{\hat{F}_{\xi,P_i}\} \text{Re}\{\hat{w}_{\xi,P_i}\} - \text{Re}\{\hat{F}_{\xi,P_i}\} \text{Im}\{\hat{w}_{\xi,P_i}\} \right) \\ & -\pi \left(\text{Im}\{\hat{F}_{\eta,P_i}\} \text{Re}\{\hat{w}_{\eta,P_i}\} - \text{Re}\{\hat{F}_{\eta,P_i}\} \text{Im}\{\hat{w}_{\eta,P_i}\} \right). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Durch Summation aller diskreten Kontaktpunkte des linken und des rechten Kontaktes ergibt sich die gesamte durch Reibung dissipierte Energie aus

$$W_R = \underbrace{\sum_{i=1}^{n_{\text{Dis,L}}} W_{R,P_i}}_{W_{R,L}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n_{\text{Dis,R}}} W_{R,P_i}}_{W_{R,R}}. \quad (3.28)$$

Die Bedingung für einen eingeschwungenen Zustand nach Gl. (3.24) kann zudem zur Kontrolle des in Abschnitt 2.4.3 dargestellten iterativen Lösungsverfahrens herangezogen werden, indem der relative Fehler

$$\varepsilon_W = 1 + \frac{W_{R,L}}{W_{\text{zu}}^*} + \frac{W_{R,R}}{W_{\text{zu}}^*} + \frac{W_D}{W_{\text{zu}}^*} \quad (3.29)$$

definiert wird. Die normierten Größen $W_{R,L}^*$ und $W_{R,R}^*$ geben Aufschluss über den Anteil der durch Reibung dissipierten Energie und deren Verteilung auf den linken und rechten Kontakt. Aus **Bild 3.37** wird deutlich, dass im Bereich der Resonanz der Anteil der durch Reibung dissipierten Energie überwiegt, sodass die Größenordnung der modalen Dämpfung, wie bereits in Abschnitt 3.2.3.1 angedeutet, nur eine untergeordnete Rolle spielt.

Außerhalb der Resonanz geht der Anteil der durch Reibung dissipierten Energie zurück, da die geringeren Schwingungsamplituden das Reibelement mehr und mehr in den Haftzustand versetzen. Im Fall des symmetrischen Kontaktes der Referenzkonfiguration mit identischen Kontaktwinkeln $\gamma_L = \gamma_R$ teilt sich die Energiedissipation zu gleichen Teilen auf den linken und rechten Kontakt auf, siehe **Bild 3.37a**. Wird dagegen eine asymmetrische Gestaltung gewählt, so führt etwa eine Erhöhung des rechten Kontaktwinkels auf $\gamma_R = 70^\circ$ nach Gl. (2.118) zu einer Zunahme der Normalkraft im linken Kontakt. Dies hat zur Folge, dass das Reibelement im linken Kontakt nahezu vollständig haftet und eine Energiedissipation ausschließlich im rechten Kontakt erfolgt, siehe **Bild 3.37b**. Aus dem

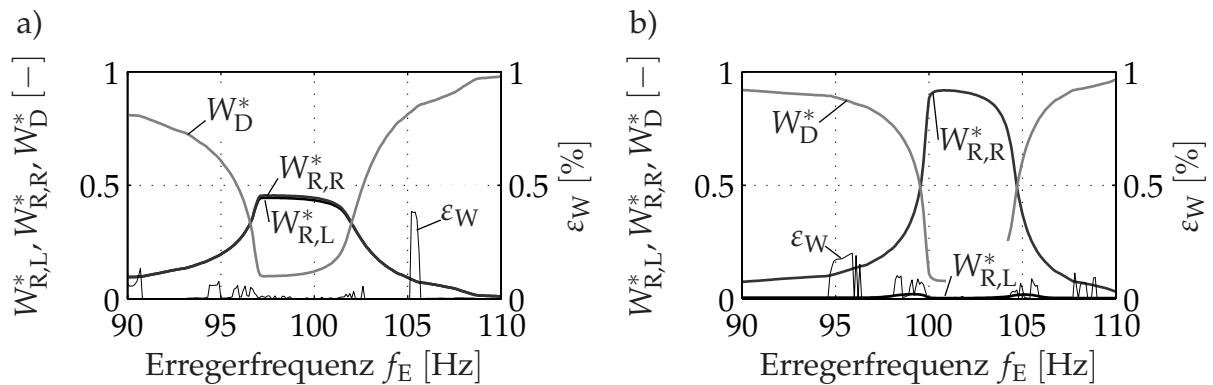


Bild 3.37: Energiedissipation in den Reibkontakten sowie relativer Fehler ϵ_W : a) symmetrischer Kontakt mit $\gamma_L = \gamma_R = 36.7^\circ$; b) asymmetrischer Kontakt mit $\gamma_R = 70^\circ$

Anteil und der Verteilung der Energiedissipation lassen sich zusätzliche wertvolle Informationen über die Effektivität des Reibelements ableiten, so etwa, ob das Reibelement in den einzelnen Kontakten eher zum Haften oder zum Gleiten neigt.

Der zusätzlich in **Bild 3.37** dargestellte Fehler ϵ_W nach Gl. (3.29) zeigt darüber hinaus, dass der in Abschnitt 2.4.3 beschriebene Algorithmus zur Lösung der nichtlinearen Systemgleichung sehr gute Resultate liefert.

3.6.3 Lineare Spannungsanalyse

Wird das Koppellement in erster Linie zur gezielten Abstimmung der Eigenfrequenzen bei einer mit konstanter Drehzahl betriebenen Beschaufelung eingesetzt und treten keine kritischen Resonanzen auf, so ist die Schwingungsamplitude häufig von sekundärer Bedeutung. Dennoch sollte sich an eine Optimierung des Koppellements eine Analyse des Spannungszustandes anschließen, um verlässliche Aussagen zur Dauerfestigkeit treffen zu können.

Kleine Verformungen, lineares Materialverhalten und damit die Gültigkeit des HOOKE'schen Gesetzes vorausgesetzt, ergeben sich die sechs Komponenten des Spannungstensors für einen räumlichen Spannungszustand allgemein aus den Verzerrungen ϵ bzw. den Verschiebungen u aus

$$\sigma = H \epsilon = H L u \quad (3.30)$$

mit der bekannten symmetrischen Elastizitätsmatrix H und dem linearen Differenzialoperator L , siehe u. a. SCHWERTASSEK UND WALLRAPP [144]. Wird zur Berechnung der Vergleichsspannung z. B. die Gestaltänderungsarbeitshypothese nach VON MISES herangezogen, ergibt sich aus den Komponenten des Spannungstensors

$$\sigma_{V, Mises} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - (\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx}) + 3(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2)}. \quad (3.31)$$

Ändert sich die Schwingungsform unter Verwendung des Koppellements nur geringfügig und dominiert ein Schwingungsmodus, so kann in erster Näherung davon ausgegan-

gen werden, dass eine Minimierung der Schwingungsamplitude, etwa in einem Knoten an der Schaufelspitze, auch zu minimalen Vergleichsspannungen führt. Dies ist z. B. der Fall für die in **Bild 3.38a** dargestellte Referenzschaufel mit Reibelement, deren Schwingungsform sich im Bereich der Eigenfrequenz des ersten Biegemodes auch für sehr große Reibelementmassen ($m \rightarrow \infty$) kaum ändert, siehe **Bild 3.38b**. Entscheidend ist in diesem Zusammenhang die in Abschnitt 3.2.3.1 untersuchte radiale Position der Kontaktpunkte.

Setzt sich die Schwingungsform aus einer Überlagerung verschiedener Moden zusammen, kann von der minimalen Schwingungsamplitude eines Freiheitsgrades im Allgemeinen nicht auf das Vorliegen einer minimalen Vergleichsspannung geschlossen werden. Auch kann der Ort der maximal auftretenden Spannungen a priori unbekannt sein. So setzt sich der Verformungszustand der Deckbandschaufel in **Bild 3.38d** für den Fall sehr großer Normalkräfte im Deckband ($\bar{F}_N \rightarrow \infty$) aus mehreren Schwingungsformen der freistehenden Schaufel zusammen. Kritische Bereiche großer Vergleichsspannungen können aufgrund der Kopplung beispielsweise auch unterhalb der Deckplatten oder im Schaufelblatt auftreten. Darüber hinaus können die einzelnen modalen Amplituden in der komplexen Ebene gegeneinander phasenverschoben auftreten, siehe auch **Bild 2.27**, sodass im allgemeinen Fall eine harmonische Analyse über eine Schwingungsperiode erforderlich ist, um sowohl den zeitlich als auch örtlich maximal auftretenden Wert der Vergleichsspannung zu ermitteln. Dieser muss der Bedingung

$$\max \{ \sigma_V(\mathbf{x}, \tau) \} < \sigma_{V, \text{Grenz}}, \quad \tau = 0 \dots 2\pi, \quad (3.32)$$

genügen, wobei für $\sigma_{V, \text{Grenz}}$ ein geeigneter Grenzwert zu definieren ist und \mathbf{x} den Ortsvektor aller Knoten des Finite-Element-Modells bezeichnet. Eine derartige Analyse kann auf der Basis des vorliegenden Finite-Element-Modells der Schaufel erfolgen, indem das mit Hilfe des Simulationsprogramms durch Anwendung der Modaltransformation auf alle Freiheitsgrade des Modells ermittelte Verschiebungsfeld auf das Finite-Element-Netz aufgeprägt wird. Auf eine quantitative Bestimmung der Spannungen im Schaufelmaterial

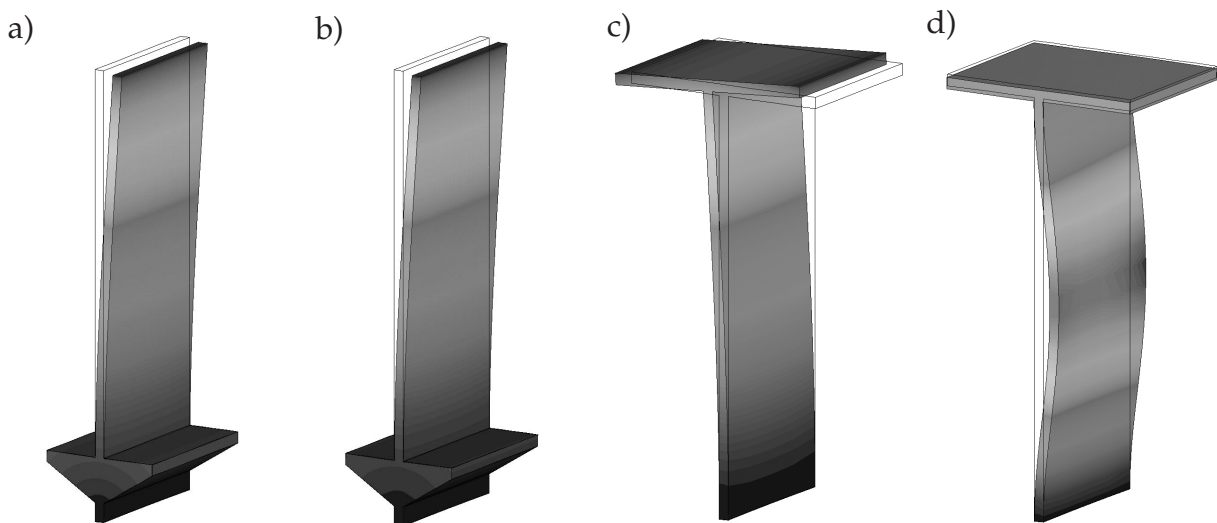


Bild 3.38: Schwingungsformen für die linearen Grenzfälle der Referenzschaufeln aus **Bild 3.1a** und **b**: a) für $m = 0$; b) für $m \rightarrow \infty$; c) für $\bar{F}_N = 0$; d) für $\bar{F}_N \rightarrow \infty$

des Referenzmodells soll an dieser Stelle verzichtet werden, da die relativ grobe Elementierung ohnehin keine verlässlichen Aussagen über die Spannungsverteilung erwarten lässt, vgl. **Bild 3.1**.

Erfüllt das Koppelement nach einer Optimierung die gestellten Anforderungen hinsichtlich Resonanzfrequenz und Schwingungsamplitude des betrachteten Schwingungsmodes, sollte abschließend geprüft werden, ob durch die Verwendung des Koppelements eine Verschiebung der Resonanzfrequenzen anderer Schwingungsformen erfolgt ist. Dies kann unter Zuhilfenahme des in **Bild 3.33** dargestellten Knoten- und CAMPBELL-Diagramms erfolgen, indem mehrere Simulationen für verschiedene Knotendurchmesser bzw. Drehzahlen durchgeführt werden. Ergeben sich unter Einsatz des gewählten Koppelements neue kritische Betriebspunkte, muss ein Kompromiss gefunden werden, der diese berücksichtigt. Eine Simulation der Grenzfälle der ungekoppelten Schaufel und eines mit sehr großen Normalkräften belasteten Koppelements kann hier erste Aufschlüsse etwa über die maximal zu erwartende Verschiebung der Resonanzfrequenz geben, vgl. **Bild 3.18a**.

3.7 Vergleichende Bewertung verschiedener Koppelemente

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die untersuchten Reibelemente ein z. T. erhebliches Dämpfungspotenzial aufweisen. Aus den obigen Parameterstudien wurde deutlich, dass bei identischen Randbedingungen verschiedene Reibelementgeometrien eine vergleichbare Amplitudenreduktion ermöglichen. Demgegenüber ist die zu erwartende Verschiebung der Resonanzfrequenz stark von der Reibelementgeometrie abhängig und nimmt von zylinderförmigen über asymmetrische bis zu keilförmigen Reibelementen stetig zu. Dies ist insbesondere für eine exakte Abstimmung der Resonanzfrequenz im Hinblick auf die im Erregerspektrum enthaltenen Harmonischen von großer Bedeutung. Dieser Sachverhalt wird in Abschnitt 4.3.1 am Beispiel real ausgeführter Gasturbinschaufeln nochmals aufgegriffen. Aus konstruktiver Sicht ist festzuhalten, dass sich die einfache Geometrie eines zylinderförmigen Reiblements vorteilhaft auf die Gleichgewichtslage des Reiblements auswirkt, da es im Allgemeinen nicht zu einem Abheben des Reiblements von den Fußplatten kommt. Dieser, je nach Wahl der Reibelementgeometrie, bei flächigen Kontakten auftretende Effekt der partiellen Separation des Reiblements von den Fußplatten führt zu einem unerwünschten 'Klappern' des Reiblements. Die daraus resultierenden Stöße, ein u. U. erhöhter Materialabtrag an den Reiblementkanten bzw. an den Schaufelfußplatten und letztlich eine erschwerte Berechnung der Schwingungsantwort aufgrund der nicht eindeutig definierten Lage des Reiblements sind zu den Nachteilen von Reibelementen mit flächigen Kontakten zu zählen. Wird ein reines Abrollen eines zylinderförmigen Reiblements, d. h. eine gleichphasige Bewegung benachbarter Schaufeln, und das daraus resultierende verminderte Dämpfungspotenzial verhindert, so ist dieser Reibelementtyp vorzuziehen.

Im Vergleich zu Reibelementen zeigt sich, dass der im geteilten Deckband auftretende Reibkontakt nur bedingt zur Erhöhung der Dämpfung genutzt werden kann. In diesem Fall steht die Erhöhung der Steifigkeit im Vordergrund, wobei ein Öffnen des Kontaktes im Deckband unter allen Umständen vermieden werden muss, da sich die Eigenfrequenz und die Schwingungsform im Vergleich zum gekoppelten Schaufelverband bei geöffnetem Deckbandkontakt deutlich ändert. Auch hier kann es, analog der Verhältnisse in den flächigen Kontakten eines Reibelements, bei großflächigem Abheben zu unerwünschten Stößen und sogar der Anregung von Eigenschwingungen kommen. Darüber hinaus wird für diesen Fall eine verlässliche Vorhersage des Schwingungsverhaltens mit den aus Kapitel 2 zur Verfügung stehenden Methoden deutlich erschwert.

4 Anwendungsbeispiele

Im Folgenden sollen einige Anwendungsbeispiele die Effektivität des Einsatzes von Reibelementen aufzeigen. Hierzu dienen neben einem Modellschaufelpaar auch verschiedene Beschaukelungen real ausgeführter Gasturbinen aus dem Triebwerksbau sowie stationärer, zur Energieerzeugung eingesetzter Gasturbinen, anhand derer die praktische Auslegung von Reibelementen mit Hilfe des entwickelten Verfahrens aufgezeigt werden soll.

4.1 Modellschaufelpaar

Zur experimentellen Untersuchung der Wirkungsweise verschiedener Reibelementbauformen und zur Validierung des Berechnungsverfahrens wird ein nicht rotierender Versuchsstand mit zwei Modellschaufeln, die über ein Reibelement gekoppelt werden, ver-

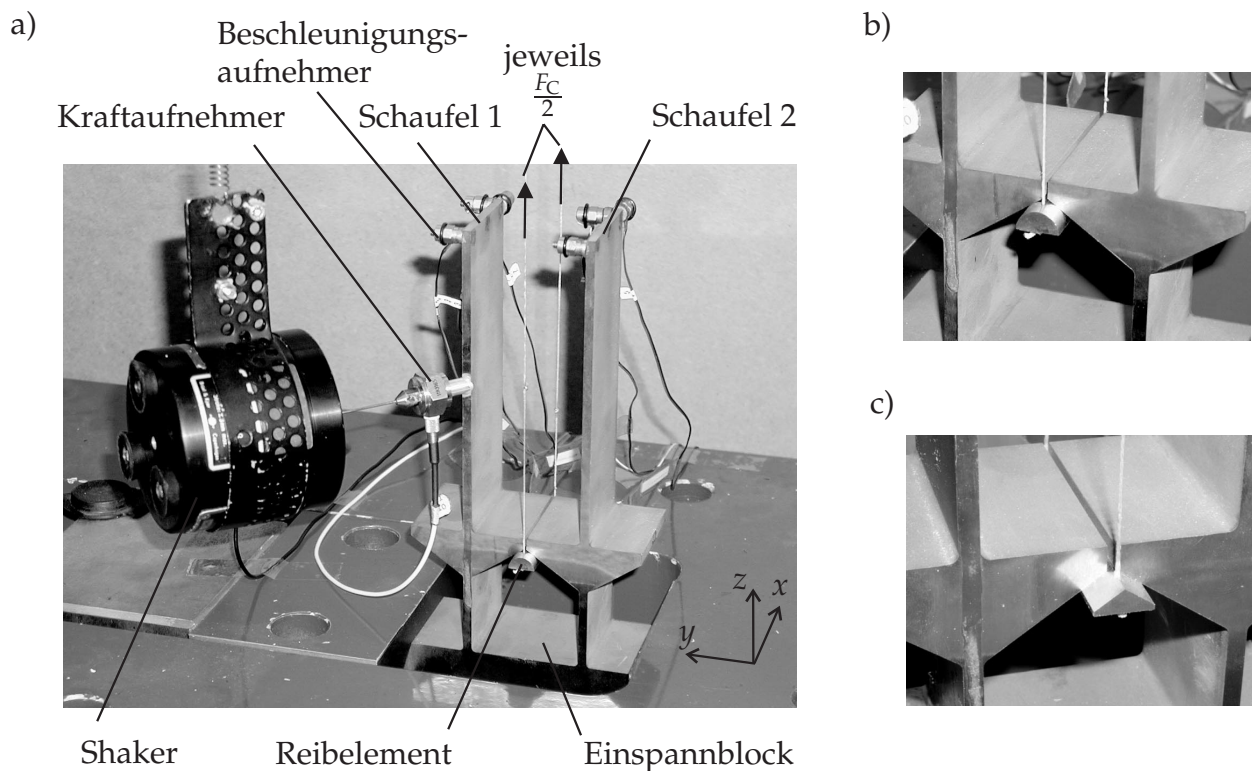


Bild 4.1: Versuchsstand mit Modellschaufelpaar: a) Gesamtansicht mit installierter Messtechnik; b) zylinderförmiges Reibelement; c) keilförmiges Reibelement

wendet. Die Schaufelgeometrie entspricht im Wesentlichen der untersuchten Referenzschaufel aus Abschnitt 3.1, wobei die Modellschaufeln nicht angestellt sind und die Position der Fußplatten sich mit $r_P = 60$ mm von der der Referenzschaufel unterscheidet, um ausreichend große Relativbewegungen zu erreichen. Das Modellschaufelpaar wurde zur Vermeidung zusätzlicher Fügestellen aus einem Stück drahterodiert und über eine hydraulische Presse an den Stirnseiten des Einspannblocks verspannt, siehe **Bild 4.1a**. Schaufel 1 wird über einen angekoppelten Shaker derart angeregt, dass grundsätzlich verschiedene Schwingungsformen untersucht werden können. Aus dem gleichen Grund werden an der Schaufelspitze in verschiedenen Richtungen messende Beschleunigungsaufnehmer installiert. Die folgenden Untersuchungen sollen sich jedoch auf den 1F-Mode konzentrieren. Über Gewichte und Umlenkrollen können Reibelemente unterschiedlicher Geometrie appliziert und verschiedene Fliehkräfte F_C simuliert werden, siehe **Bild 4.1b** und **c**. Aufgrund der Nichtlinearität in den Reibkontakten wird die Amplitude $|\hat{F}_E|$ der Erregung gemessen und mit Hilfe der Modalanalyse-Software CADA-X auf ein konstantes Niveau geregelt.

Die modalen Größen werden mit Hilfe des Finite-Element-Programms ANSYS ermittelt. Das entsprechende Finite-Element-Modell der Struktur ist in **Bild 4.2a** dargestellt. Zusatzmassen durch die installierte Messtechnik werden ebenso berücksichtigt wie die Kopplung der Schaufeln über den Einspannblock. Im Bereich bis $f_E = 1$ kHz treten vier

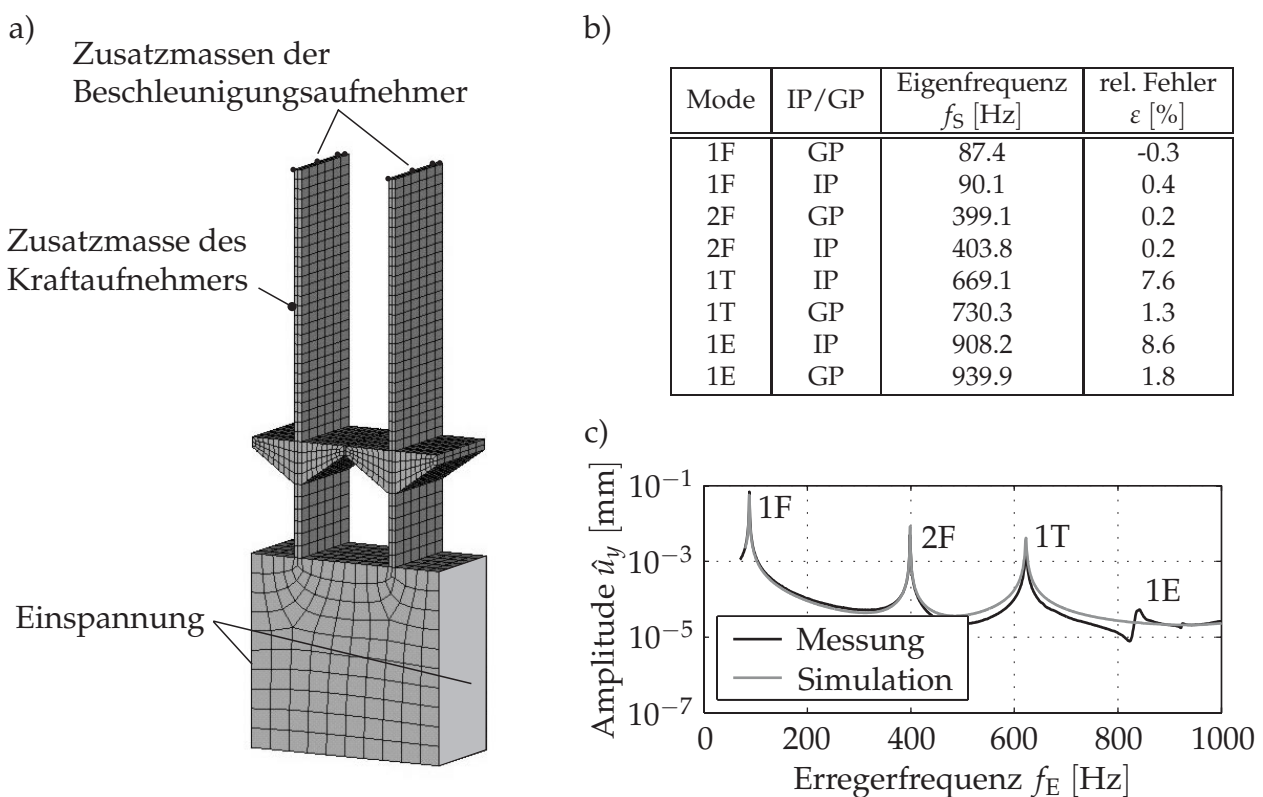


Bild 4.2: Untersuchung des linearen Ausgangssystems: a) Finite-Element-Modell; b) mit ANSYS berechnete Eigenfrequenzen und relativer Fehler zur Messung; c) gemessener und simulierter Frequenzgang an der Schaufelspitze der Schaufel 1

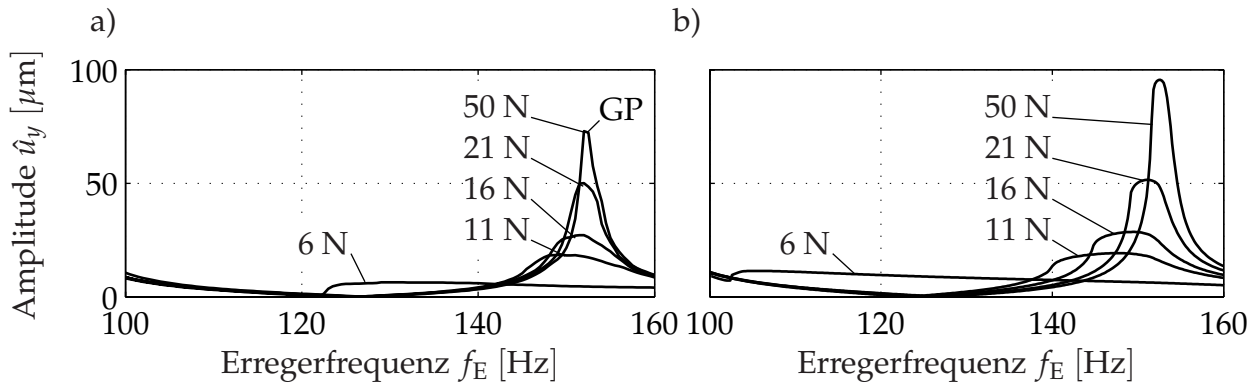


Bild 4.3: Vergleich Messung-Simulation am Modellschaufelpaar mit zylinderförmigem Reibelement und $|\hat{F}_E| = 0.5 \text{ N}$: a) Messung; b) Simulation

Schwingungsformen auf, die jeweils gleich- (IP) und gegenphasige (GP) Schwingbewegungen der beiden Schaufeln zeigen, siehe **Bild 4.2b**, wobei jeweils eine Schaufel deutliche Schwingungsamplituden aufweist. Um diesen Effekt entsprechend abbilden zu können, wurde die Gesamtstruktur als Kettenstruktur unter Berücksichtigung des Einspannblocks modelliert, vgl. Abschnitt 2.4.2.5. Die Berechnung der Eigenfrequenzen der F-Moden zeigt eine sehr gute Übereinstimmung mit den Messungen. Die Torsionsmoden weisen größere Fehler auf, was mit der mitschwingenden Masse des Shakers zu erklären ist. Nach einer Anpassung dieser Eigenfrequenzen sowie der Bestimmung der modalen Dämpfungen ergibt sich der in **Bild 4.2c** dargestellte Vergleich des gemessenen und berechneten Frequenzganges an der Schaufelspitze der Schaufel 1.

Unter Verwendung eines zylinderförmigen Reiblements ergeben sich für eine Variation der Fliehkraft F_C bei einer Erregerkraftamplitude von $|\hat{F}_E| = 0.5 \text{ N}$ die in **Bild 4.3** dargestellten Mess- und Simulationsergebnisse. Die Konzentration erfolgt hier auf die gegenphasige Schwingungsform (GP), da nur diese signifikant von einer Variation der Fliehkraft beeinflusst wird. Aufgrund der gekrümmten Kontaktflächen kommt es bei gleichphasiger Schwingung zum Abrollen des zylinderförmigen Reiblements und damit wegen fehlender Relativbewegungen nicht zu einer Dämpfungswirkung. Die Resonanzfrequenz der gegenphasigen Schwingung wird aufgrund der Kopplung zu deutlich höheren Werten verschoben, wobei die Frequenzgänge bei einer Variation der Fliehkraft die typischen Verläufe zeigen. Sowohl Resonanzfrequenz als auch Schwingungsamplitude werden in der Simulation gut wiedergegeben. Eine Ausnahme bildet nur der Fall relativ großer Fliehkraft, da hier der Maximalwert in den Messungen aufgrund schwacher Dämpfung und eines endlich großen Frequenzinkrements Δf_E während der gestuften Sinus-Anregung nicht detektiert wurde. Auch die zwischen gleich- und gegenphasiger Schwingung liegende Antiresonanz, d. h. Schwingungstilgung der direkt angeregten Schaufel 1, bei etwa $f_E \approx 125 \text{ Hz}$ wird richtig wiedergegeben.

Wird anstelle des zylinderförmigen Reiblements ein asymmetrisches Reibelement in der eingangs in **Bild 1.12** dargestellten Geometrie verwendet, ergeben sich die in **Bild 4.4** gezeigten Resultate. Es wird insbesondere deutlich, dass nunmehr auch die gleichphasige Schwingungsform (IP) eine Frequenzverschiebung und eine Reduktion der Schwin-

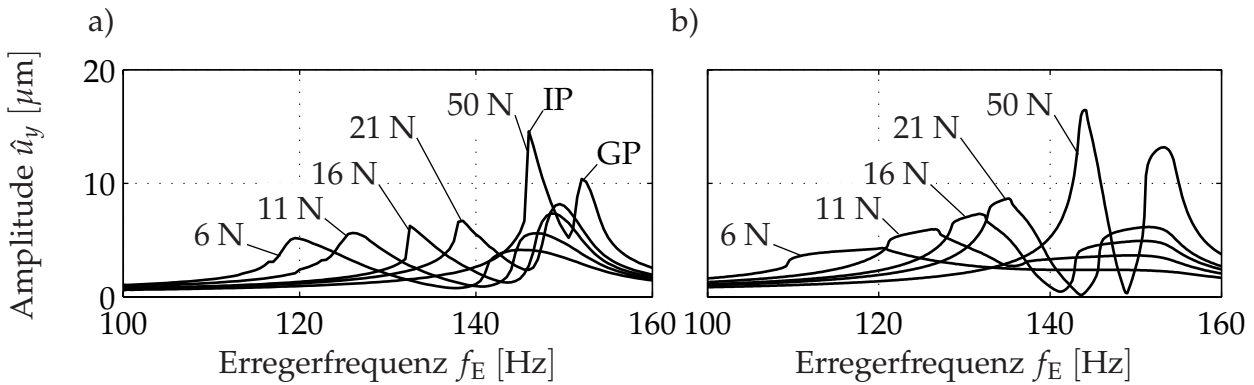


Bild 4.4: Vergleich Messung-Simulation am Modellschaufelpaar mit asymmetrischem Reibelement und $|\hat{F}_E| = 0.1 \text{ N}$: a) Messung; b) Simulation

gungsamplitude im Vergleich zur ungekoppelten Schaufel erfährt. Der Grund ist darin zu sehen, dass im Gegensatz zu zylinderförmigen Reibelementen ein Abrollen nicht stattfinden kann, solange das asymmetrische Reibelement flächig an der Schaufelfußplatte anliegt. Um ein Abheben des Reibelements von den Fußplatten zu verhindern, wurde die Erregerkraftamplitude auf $|\hat{F}_E| = 0.1 \text{ N}$ gesenkt. Die Simulationsergebnisse geben den qualitativen Verlauf und insbesondere die Resonanzfrequenz der gleich- und gegenphasigen Schwingungsform sehr gut wieder. Eine Separation der Kontaktflächen nach Gl. (2.132) konnte in den Simulationen nicht festgestellt werden.

Wird die Erregerkraftamplitude auf $|\hat{F}_E| = 0.5 \text{ N}$ erhöht, ergeben sich die in **Bild 4.5** dargestellten Frequenzgänge, die Sprungphänomene aufweisen, bei denen sich das Schwingungsverhalten schlagartig ändert. Diese Sprünge sind nicht auf den nichtlinearen Reibkontakt zurückzuführen, sondern auf die Tatsache, dass das asymmetrische Reibelement von einem flächigen zu linienförmigem Kontakt übergeht, siehe **Bild 4.5**. In diesem Zustand verhält sich das asymmetrische Reibelement sehr ähnlich einem zylinderförmigen und die gleichphasige Schwingungsform wird nur geringfügig von dem Reibelement beeinflusst, da es zum Abrollen über die Kante des flächigen Kontaktes kommt. Diese Ergebnisse bestätigen die Möglichkeit der in **Bild 3.34b** diskutierten unerwünschten Gleichgewichtslage, in der die Reibkräfte das Reibelement in der in **Bild 4.5** dargestellten Lage stabilisieren. Hieraus wird die Notwendigkeit deutlich, die in Abschnitt 3.6.2.1 erarbeite-

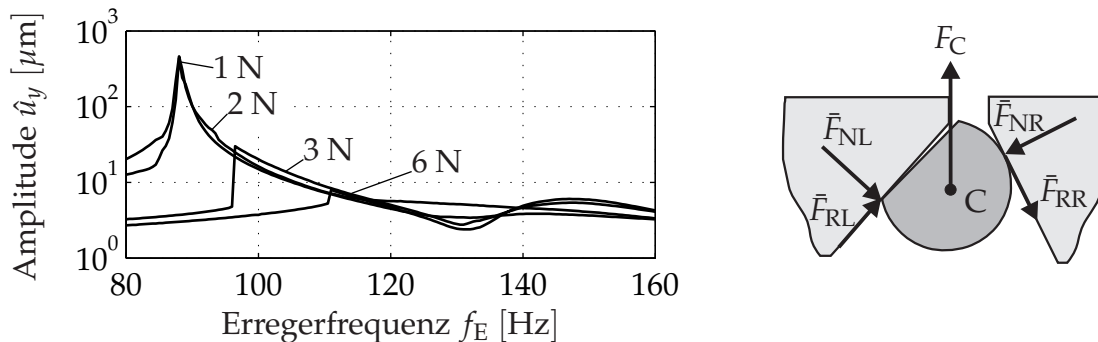


Bild 4.5: Sprungeffekte durch Verkanten des asymmetrischen Reibelements bei kleinen Fliehkräften und $|\hat{F}_E| = 0.5 \text{ N}$

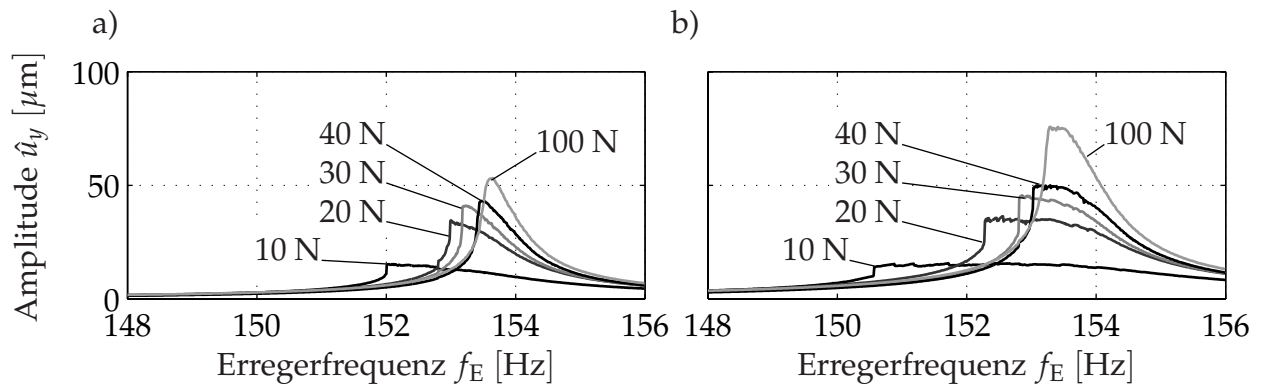


Bild 4.6: Messergebnisse am Modellschaufelpaar für die gegenphasige Schwingung mit keilförmigem Reibelement: a) für $|\hat{F}_E| = 0.05 \text{ N}$; b) für $|\hat{F}_E| = 0.1 \text{ N}$

ten Hinweise zur konstruktiven Gestaltung von Reibelementen mit flächigen Kontakten zu berücksichtigen.

Die Tendenz des asymmetrischen Reiblements zu einer unerwünschten Gleichgewichtslage setzt sich für ein keilförmiges Reiblement fort und tritt hier besonders deutlich auf. Aus diesem Grund lassen sich die Messungen aufgrund der zufällig auftretenden Sprünge nur bedingt reproduzieren. Beispielhaft sind in **Bild 4.6** die Messergebnisse für eine Variation der Fliehkraft für die Erregerkraftamplituden $|\hat{F}_E| = 0.05 \text{ N}$ und $|\hat{F}_E| = 0.1 \text{ N}$ im Bereich der gegenphasigen Schwingung dargestellt. Hieraus wird deutlich, dass eine Verdopplung der Erregerkraftamplitude in Bereichen guter Dämpfungswirkung nur eine geringfügige Zunahme der Schwingungsamplitude bewirkt, vgl. auch die Ausführungen zur *performance curve* in **Bild 3.24** aus Abschnitt 3.2.4.2. Insbesondere im Bereich der hier nicht mehr dargestellten gleichphasigen Schwingung kommt es, je nach Lage des Reiblements, zu willkürlichen Sprüngen in den Amplitudengängen, die von dem Berechnungsverfahren nicht abgebildet werden können.

4.2 Hochdruck-Laufschaukel eines Flugtriebwerkes

Die Auslegung einer beispielhaft in **Bild 4.7** dargestellten Laufschaukel von Fluggasturbinen erfordert eine erhöhte Aufmerksamkeit, da neben hohen und darüber hinaus variablen Drehzahlen sowie hohen Gastemperaturen nach der Brennkammer auch die Forderung nach möglichst leichter Bauweise bei gleichzeitig hoher Betriebssicherheit zu berücksichtigen ist. Da ein vollständig resonanzfreier Betrieb nur in seltenen Fällen möglich ist, kommt der Auslegung von Reibelementen mit dem primären Ziel der Erhöhung der Dämpfung eine besondere Bedeutung zu.

Zu diesem Zweck können mit Hilfe des entwickelten Simulationsprogramms ausführliche Parameterstudien zur Optimierung von Reibungsdämpfern erfolgen, wobei entsprechend **Bild 2.29** detaillierte angepasste Schnittstellen zu externen, nichtkommerziellen Finite-Element- und CFD-Programmen entwickelt wurden, auf die an dieser Stelle aber nicht weiter eingegangen werden soll. Stellvertretend für die Möglichkeit einer ausführli-

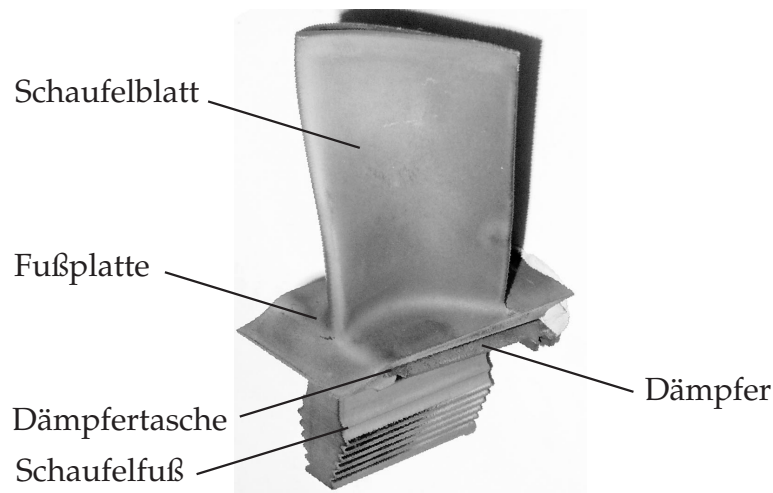


Bild 4.7: Hochdruckturbinenschaufel eines Rolls-Royce-Triebwerks mit *Cottage Roof Damper*. Quelle: Rolls-Royce Deutschland Ltd & Co KG, Blankenfelde-Mahlow

chen Analyse verschiedener, in Abschnitt 3.2 diskutierter Systemparameter zeigt **Bild 4.8** die Ergebnisse einer Massenoptimierung für ein im Triebwerksbau sehr verbreitetes *keilförmiges Reibelement*, dem so genannten *Cottage Roof Damper* mit beidseitig flächigen Kontakten, siehe auch **Bild 4.7**.

Aus **Bild 4.8a** wird der Einfluss verschiedener Reibelementmassen auf die Amplitudengänge eines Knotens an der Schaufelspitze in Umfangsrichtung im Bereich des ersten Schwingungsmodes deutlich. Dabei werden die dimensionslosen Größen

$$m^* = \frac{m}{m_{\text{opt}}}, \quad f_E^* = \frac{f_E}{f_{S,1}}, \quad \hat{u}_y^* = \frac{\hat{u}_y}{\hat{u}_{y,0}} \quad (4.1)$$

für Reibelementmasse, Erregerfrequenz und Schwingungsamplitude eingeführt, mit der optimalen Reibelementmasse m_{opt} , der Eigenfrequenz $f_{S,1}$ der ersten Schwingungsform

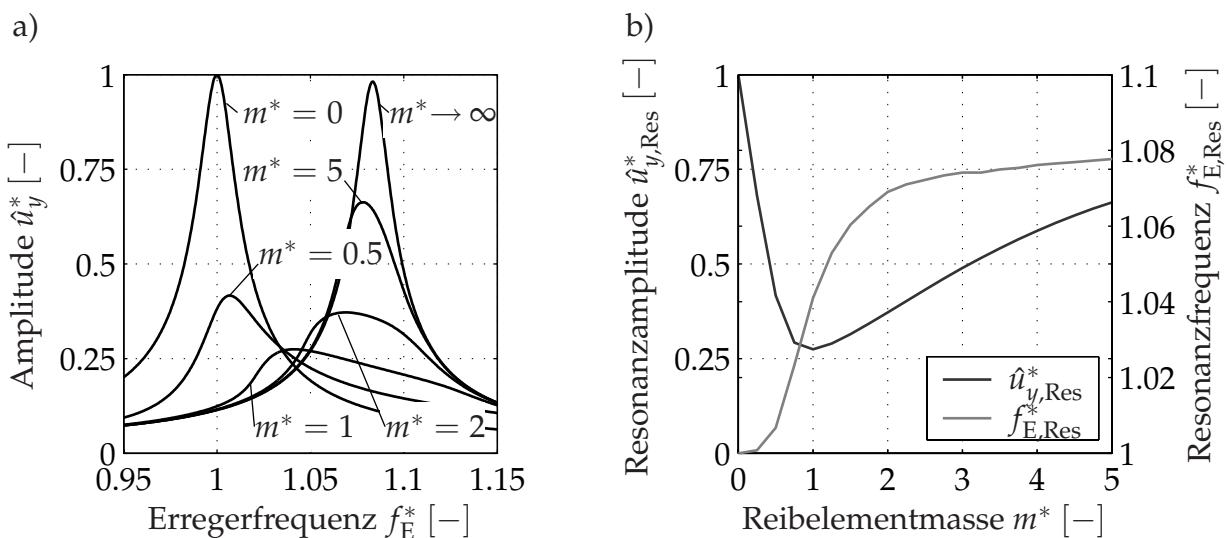


Bild 4.8: Optimierung der Reibelementmasse für die Hochdruckschaufel eines Rolls-Royce-Triebwerks: a) Variation der Dämpfermasse; b) Optimierungskurven

ohne Reibelemente sowie der Schwingungsamplitude $\hat{u}_{y,0}$ für $f_E^* = 1$ und $m^* = 0$ ohne Reibelemente, vgl. auch Gl. (3.1). Auf weitere Systemparameter soll an dieser Stelle nicht weiter eingegangen werden.

Entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 3.2.1.1 können analog zu der Darstellung in **Bild 3.2** aus den Frequenzgängen die Optimierungskurven in **Bild 4.8b** ermittelt werden. Hieraus wird, wie schon im Fall des in Kapitel 3 diskutierten Referenzsystems, deutlich, dass eine zu klein gewählte Reibelementmasse zu einem deutlichen Anstieg der Schwingungsamplitude führt. Die Resonanzfrequenz ließe sich unter Verwendung eines sehr schweren Reibelements um etwa 8% zu höheren Werten verschieben. Die maximal erreichbare Amplitudenreduktion beträgt für eine optimal gewählte Masse bei $m^* = 1$ etwa 73%. Größere Werte wären erreichbar, wenn die so genannte *shank ratio*, d. h. der radiale Abstand der Kontaktreferenzpunkte von der Schaufeleinspannung, vergrößert würde, vgl. Abschnitt 3.2.3.1, wengleich konstruktive Vorgaben dies nur in engen Grenzen zulassen.

4.3 Laufschaufeln stationärer Gasturbinen

Neben in den zumeist bei variablen Drehzahlen betriebenen Flugtriebwerken finden Reibelemente auch in stationären, bei konstanter Drehzahl im Energieerzeugungssektor eingesetzten Gasturbinen verbreitet Einsatz, siehe auch PANNING ET AL. [117]. Im Fall konstanter Drehzahl kommt bei dem Einsatz von Reibelementen neben der Erhöhung der Dämpfungswirkung insbesondere der präzisen Frequenzabstimmung eine besondere Bedeutung zu. Hierzu sollen drei Beispiele von Laufschaufeln unterschiedlicher Gasturbinenstufen dienen, von denen zwei in **Bild 4.9** dargestellt sind.

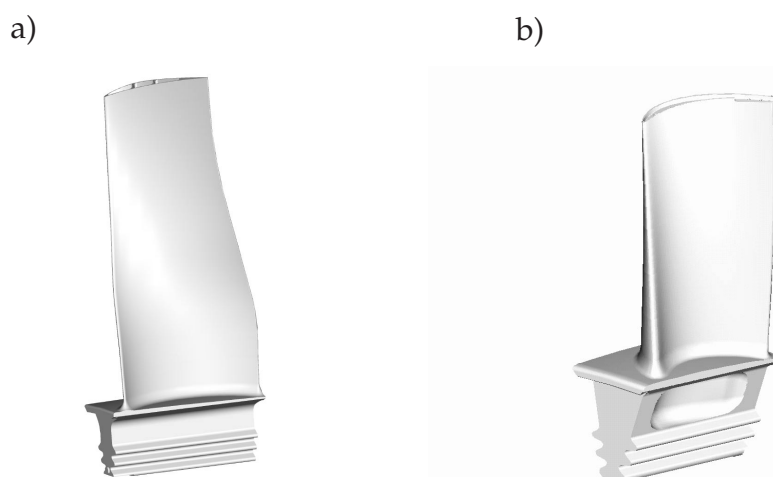


Bild 4.9: Gasturbinenschaufeln von Siemens Power Generation: a) V94.3A(2)-T1a4-Laufschaukel; b) V64.3A-T1a3-Laufschaukel. Quelle: Siemens Power Generation, Mülheim a.d. Ruhr

4.3.1 Beispiel I: Laufschaufel V84.2-T1a2

In **Bild 4.10** sind zunächst die Resultate von Schwingungsmessungen in einem Schleuderbunker im Rahmen der Unwuchtbestimmung dargestellt. Zu diesem Zweck wurden sechs Schaufeln der zweiten Laufschaufelreihe mit Dehnungsmessstreifen versehen und die Schwingungsamplitude während des Hochlaufs auf Nenndrehzahl aufgenommen. Die Schwingungsanregung erfolgte über eine Druckluftdüse mit Hilfe eines Luftstroms. In **Bild 4.10a** ist zunächst qualitativ die Höhe der Schwingungsamplituden für die Beschaukelung ohne Reibelemente dargestellt. Deutlich lassen sich die Schwingungsmaxima bei den Schnittpunkten der mit anwachsender Drehzahl steigenden Eigenfrequenzkurve mit den verschiedenen im Anregungsspektrum enthaltenen Erregerordnungen EO erkennen. Die Drehzahl und Frequenz sind auf die Nenndrehzahl $\Omega_{R,0}$ und die sich dort einstellende Resonanzfrequenz f_0 normiert,

$$\Omega_R^* = \frac{\Omega_R}{\Omega_{R,0}}, \quad f^* = \frac{f}{f_0}. \quad (4.2)$$

In **Bild 4.10b** sind die Schwingungsamplituden unter Verwendung zylinderförmiger Reibelemente dargestellt. Aus den Resultaten lassen sich zwei grundsätzliche Tendenzen ablesen: Zunächst zeigt sich eine deutliche Aufweitung des Bandes der Resonanzfrequenzen, sodass eine Vielzahl von Schnittpunkten mit den einzelnen Harmonischen auftritt, die zu zusätzlichen kritischen Drehzahlen führt. Die Ursache hierfür liegt in der zusätzlichen Kopplung des Schaufelkranzes über das Reibelement, die zu deutlicheren Mistuningeffekten führt als dies für eine reine Kopplung über die Scheibe der Fall ist. Des Weiteren tritt nicht nur ein mögliches Frequenzmistuning der Schaufeln deut-

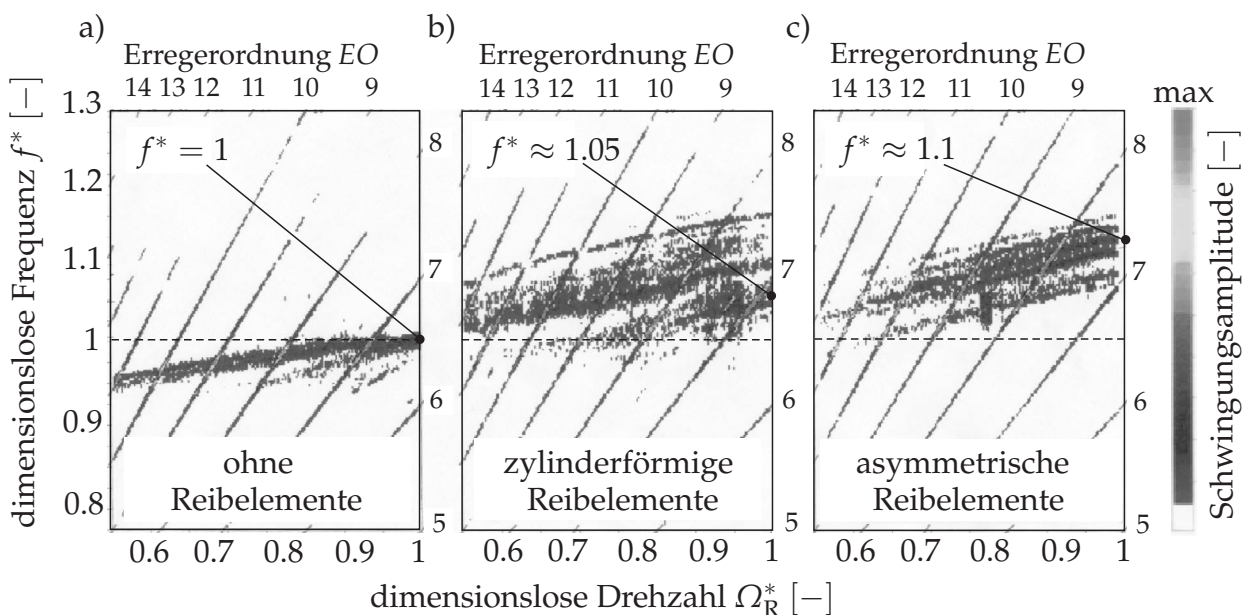


Bild 4.10: Gemessene Schwingungsamplituden an der V84.2-T1a2-Laufschaufelreihe: a) ohne Reibelemente; b) mit zylinderförmigen Reibelementen; c) mit asymmetrischen Reibelementen. Quelle: Siemens Power Generation, Mülheim a.d. Ruhr

licher hervor, sondern auch ein zusätzliches, durch abweichende Kontaktbedingungen oder Reibelementmassen eingebrachtes zusätzliches Mistuning auf. Darüber hinaus ist ein deutlicher Anstieg der Resonanzfrequenzen zu erkennen, der mit der zusätzlichen, über das Reibelement eingebrachten Koppelsteifigkeit zu begründen ist. Die bei Nenn-drehzahl auftretende Frequenz der Hauptresonanz liegt etwa 5% über der Beschau felung ohne Reibelemente.

Werden die zylinderförmigen Reibelemente durch asymmetrische ersetzt, vgl. die Darstellung in **Bild 1.12**, ergeben sich die in **Bild 4.10c** gezeigten Resultate. Bemerkenswert ist die im Vergleich zu der Verwendung zylinderförmiger Reibelemente bei Nenndrehzahl weiter erhöhte Resonanzfrequenz. Die größten Schwingungsamplituden treten hier bei Frequenzen auf, die etwa 10% über der Resonanzfrequenz der ungekoppelten Schaufel liegen. Dies bestätigt die in Abschnitt 3.2.1.1 erläuterte Tendenz zu höheren Resonanzfrequenzen bei der Verwendung von Reibelementen mit flächigen Kontakten. In diesem Zusammenhang ist anzumerken, dass sich die in den Messungen verwendeten asymmetrischen Reibelemente durch eine geringere Masse gegenüber den zylinderförmigen auszeichnen. Bei vergleichbarer Masse ist ein noch deutlicherer Frequenzshift zu erwarten. Diese Ergebnisse demonstrieren nachdrücklich die notwendige Unterscheidung verschiedener Reibelementtypen und die Berücksichtigung unterschiedlicher Geometrien für eine verlässliche Vorhersage des Schwingungsverhaltens. Insbesondere hinsichtlich der Forderung einer möglichst resonanzfreien Schaufelauslegung kommt der Reibelementgeometrie besondere Bedeutung zu. In diesem Sinne ist in dem gezeigten Beispiel die Verwendung von asymmetrischen Reibelementen aufgrund der günstigeren Abstimmung der Resonanzfrequenz bei Nenndrehzahl vorzuziehen.

4.3.2 Beispiel II: Laufschaufel V94.3A(2)-T1a4

Im Folgenden wird die Reibelementauslegung am Beispiel der in **Bild 4.9a** dargestellten Schaufel V94.3A(2)-T1a4 demonstriert. Es handelt sich hierbei um eine freistehende Laufschaufel der vierten Stufe, die über *asymmetrische Reibelemente* mit den benachbarten Schaufeln gekoppelt ist. Die Resultate einer Variation der Dämpfermasse sind in **Bild 4.11a** dargestellt. Die Frequenzgänge zeigen die Schwingungsamplitude \hat{u}_y^* in Umfangsrichtung an der Schaufelspitze im Bereich der ersten Biegeschwingung. Die dimensionslose Masse, Erregerfrequenz und Schwingungsamplitude sind entsprechend Gl. (4.1) normiert. Die notwendigen Eingabeparameter zur Simulation entstammen Finite-Element-Berechnungen (Eigenwerte und -vektoren der ungekoppelten Schaufel sowie Bestimmung der Nachgiebigkeiten des Reibelements), strömungsmechanischen Berechnungen (Betrag und Verteilung der auf das Schaufelblatt wirkenden Fluidkräfte), Messungen (Rauheitsprofile) und Erfahrungswerten (Höhe des Stimulus).

Zusammenfassend lassen sich die Resonanzamplituden $\hat{u}_{y,Res}^*$ und -frequenzen $f_{E,Res}^*$ in Abhängigkeit der Reibelementmasse der Darstellung in **Bild 4.11b** entnehmen. Es wird deutlich, dass sich die realisierte Masse durchaus von der optimalen Masse im Hin-

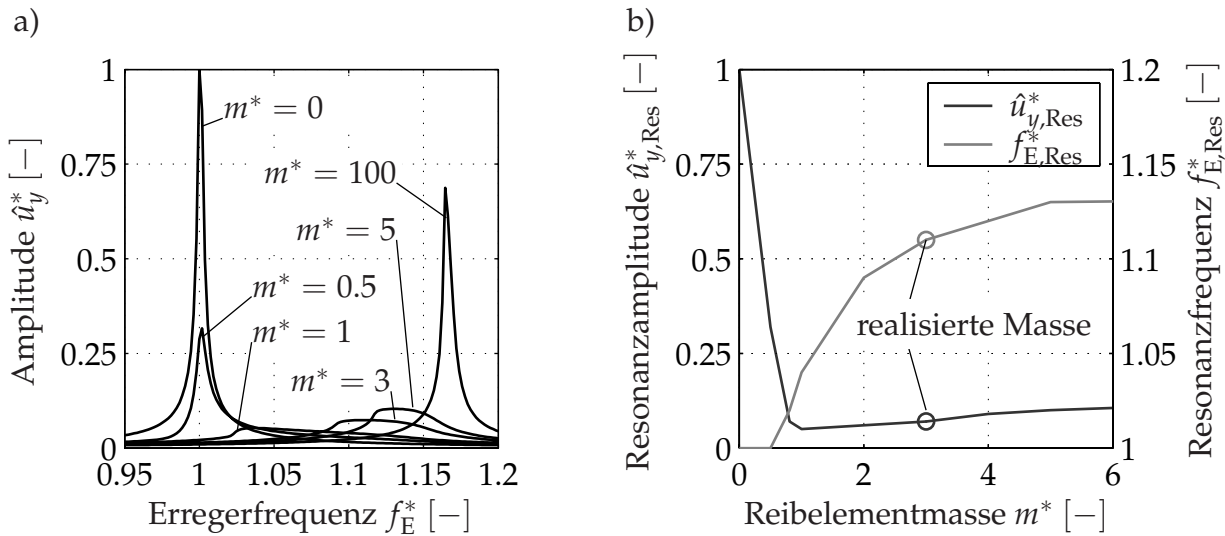


Bild 4.11: Optimierung der Reibelementmasse für die Laufschaufel V94.3A(2)-Tla4: a) Variation der Dämpfermasse; b) Optimierungskurven

blick auf eine Minimierung der Schwingungsamplituden unterscheidet. Die Amplitudenreduktion beträgt dennoch bemerkenswerte 92.5% bei gleichzeitiger Frequenzerhöhung um etwa 11% im Vergleich zur ungekoppelten Schaufel. Eine Auslegung auf die optimale Masse ist ohnehin nicht empfehlenswert, da die Frequenzgänge eine deutlich größere Sensitivität hinsichtlich Resonanzamplitude und auch -frequenz bei kleinen Reibelementmassen zeigen. Dies birgt insbesondere hinsichtlich einer verlässlichen Abschätzung der Resonanzfrequenz eine größere Gefahr fehlerhafter Ergebnisse bei mit gewissen Unsicherheiten behafteten Eingabeparametern. Für eine zu groß gewählte Reibelementmasse zeigen die Verläufe der Resonanzamplitude und -frequenz hingegen eine geringere Sensitivität, ohne jedoch eine signifikante Erhöhung der Schwingungsamplituden im Vergleich mit der optimalen Masse nach sich zu ziehen.

In **Bild 4.12a** ist ein Vergleich des simulierten Frequenzganges mit Messergebnissen für die realisierte Masse von $m^* = 3$ dargestellt. Diese weisen aufgrund von Verstimmungseffekten ein Streuband auf, dessen Mittelwert bezüglich Resonanzfrequenz und -amplitude von der Simulation aber sehr gut wiedergegeben wird.

Die erweiterte Form des CAMPBELL-Diagramms, die neben dem Drehzahleinfluss auch die bei steigender Leistung abnehmenden Resonanzfrequenzen aufgrund der Temperaturabhängigkeit des Elastizitätsmoduls berücksichtigt, siehe auch LECHNER UND SEUME [95], ist in **Bild 4.12b** skizziert. Dabei sind zum Vergleich die Ergebnisse einer zunächst durchgeführten Finite-Element-Berechnung ohne Reibelement gestrichelt dargestellt. Die Simulationsergebnisse unter Berücksichtigung der Reibelementeigenschaften zeigen eine deutlich bessere Vorhersage der Resonanzfrequenzen. Dies gilt nicht nur für die erste Biegeschwingung, sondern ebenso für höhere, komplexe Schwingungsformen, die auch Torsionsanteile aufweisen. Der relative Fehler

$$\varepsilon_{f_j} = \frac{f_j^{\text{Sim}} - f_j^{\text{Mess}}}{f_j^{\text{Mess}}}, \quad j = 1(1)4, \quad (4.3)$$

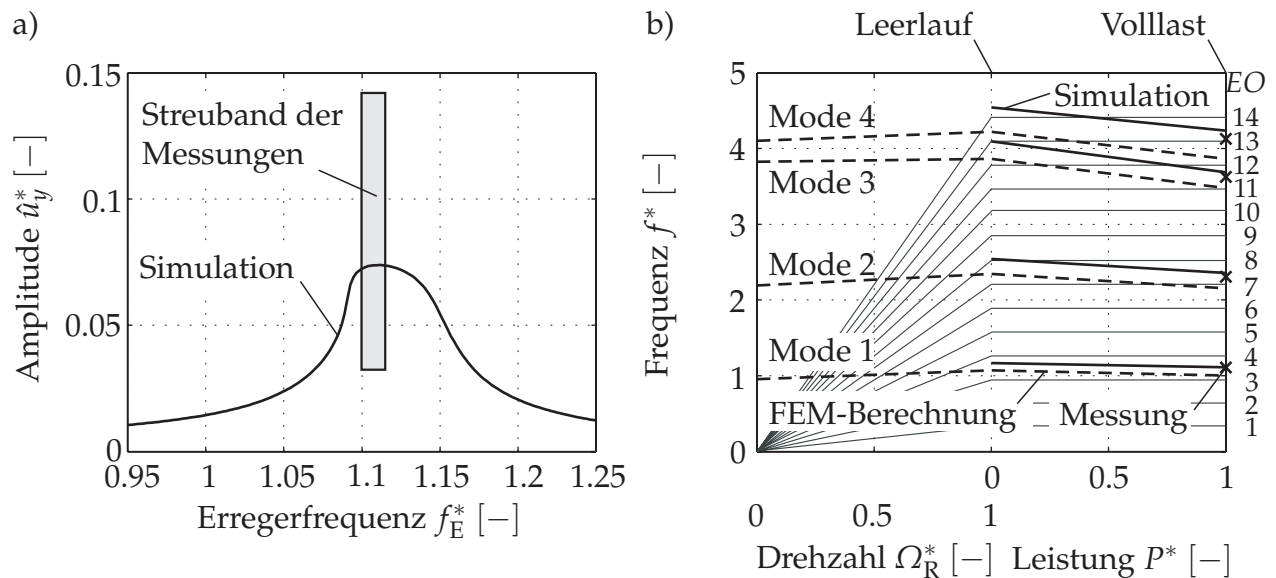


Bild 4.12: Vergleich Messung-Rechnung für die V94.3A(2)-Tla4-Laufschaufel: a) Frequenzgang; b) erweitertes CAMPBELL-Diagramm

zwischen der simulierten und gemessenen Resonanzfrequenz der ersten vier Schwingungsformen ist in **Tabelle 4.1** zusammengefasst. Der geringe Fehler unterstreicht die Anwendbarkeit des Verfahrens auch auf höhere Schwingungsformen, die sich durch komplexe, dreidimensionale Verformungszustände auszeichnen. Auf der Basis des räumlich formulierten Kontaktmodells lässt sich der Einfluss des Reiblements auch auf diese Schwingungsformen unter der direkten Verwendung der modalen Größen des Finite-Element-Modells ohne weitere Anpassung des Simulationsmodells abschätzen.

Tabelle 4.1: Relativer Fehler ε_{f_j} der Simulation der Resonanzfrequenz der ersten vier Schwingungsmoden aus **Bild 4.12b** bei Nennleistung $P^* = 1$

Schwingungsmode j	1	2	3	4
relativer Fehler ε_{f_j}	0.2%	2.2%	1.7%	2.6%

4.3.3 Beispiel III: Laufschaufel V64.3A-Tla3

Die allgemeine Anwendbarkeit des Simulationsverfahrens zeigt ein weiteres Beispiel einer Beschaukelung mit *zylinderförmigen Reibelementen*, siehe **Bild 4.13**. Die Messwerte der Resonanzfrequenzen wurden bei Nenn Drehzahl im Leerlauf sowie bei etwa 20 bzw. 80% Teillast aufgenommen und zeigen ebenfalls einen Streubereich. Auch hier ergeben die für Vollast durchgeführten Simulationen eine gute Übereinstimmung mit den Messergebnissen. Insbesondere die Finite-Element-Berechnung ohne Reibelement weicht dagegen deutlich von den Messwerten ab. Der Frequenzshift von etwa 15% gegenüber der ungekoppelten Schaufel liegt höher als der des vorhergehenden Beispiels mit asymmetrischen Reibelementen. Dies ist darin begründet, dass es sich hier um eine vollständig andere Beschaukelung mit geänderten Randbedingungen (u. a. kleinerer Stimulus usw.) handelt.

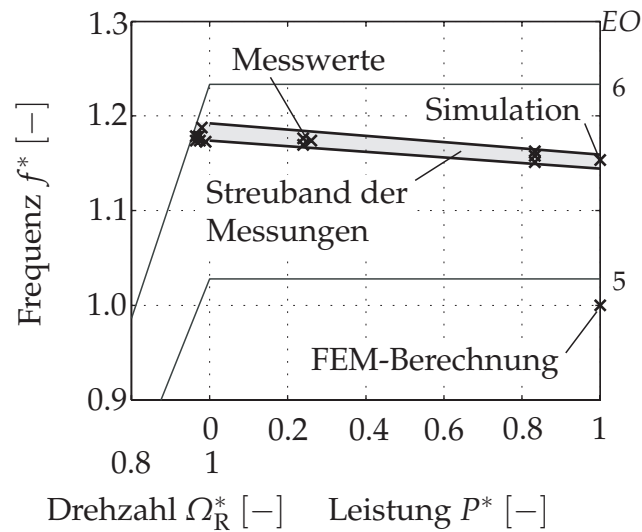


Bild 4.13: Erweitertes CAMPBELL-Diagramm für die V64.3A-Tla3-Laufschaukel

Dies macht deutlich, dass sich die Resultate zwar qualitativ, jedoch quantitativ nur begrenzt von einem Auslegungsfall auf einen weiteren übertragen lassen.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass sich das entwickelte Modell und die erstellten Programmsysteme im praktischen Einsatz bewähren konnten und eine verlässliche Vorhersage des Schwingungsverhaltens realer, reibelementgedämpfter Beschaukelungen erlauben. Die entwickelten Simulationswerkzeuge lassen sich neben den gezeigten Beispielen problemlos auf weitere Anwendungsfälle wie Dampfturbinen- oder Verdichterbeschaukelungen übertragen, sodass schon während der Konstruktionsphase einer beliebigen Verdichter- oder Turbinenbeschaukelung der Einfluss verschiedener Reibelementgeometrien auf die zu erwartenden Schwingungsamplituden und Resonanzfrequenzen abgeschätzt werden kann.

5 Zusammenfassung

Die rotierenden Laufschaufeln von Gas- und Dampfturbinen stellen thermisch und mechanisch hochbeanspruchte Bauteile dar. Neben den insbesondere auf die Laufschaufelreihen unmittelbar nach der Brennkammer wirkenden Gastemperaturen sind die Schaufeln einer hohen Fliehkraftbelastung ausgesetzt. Hinzu kommt eine u. a. aus der Brenneranordnung oder dem vorgeschalteten Leitschaufelgitter resultierende Schwingungsanregung der Laufschaufeln aufgrund inhomogener Strömungsgeschwindigkeiten des Fluids. Diese dynamischen Belastungen reduzieren die Dauerfestigkeit entscheidend. Aus diesem Grund wird stets das Ziel verfolgt, die Laufschaufeln möglichst resonanzfrei und mit ausreichend hoher Dämpfung zur Minderung der Schwingungsamplituden auszulegen.

Ein verbreitetes Konzept zur Erhöhung der Dämpfung ist der Einsatz von Reibelementen, die gezielt zusätzliche Reibkontakte schaffen, um durch Energiedissipation eine Reduktion der Schwingungsamplituden zu ermöglichen. Die in der Praxis eingesetzten Reibelemente zeigen hinsichtlich ihrer Geometrie und dynamischen Eigenschaften eine äußerst breite Vielfalt. Insbesondere lassen sich verschiedene Reibelementgeometrien unterscheiden, wobei in erster Linie Reibelemente mit zylinderförmigem, keilförmigem oder asymmetrischem Querschnitt zum Einsatz kommen. Die derzeit bekannten Berechnungsverfahren zur Simulation des Schwingungsverhaltens beschauelter Scheiben mit Reibelementen tragen der Vielfalt der eingesetzten Reibelementbauformen nur unzureichend Rechnung, da die Reibelementgeometrie zumeist gänzlich unberücksichtigt bleibt.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist daher die Entwicklung eines Berechnungsverfahrens, das es ermöglicht, nahezu beliebige Reibelementbauformen hinsichtlich ihrer Wirksamkeit und ihres Dämpfungspotenzials vergleichend zu untersuchen und unter Berücksichtigung gegebener Randbedingungen zu optimieren. Zu diesem Zweck werden Simulationsprogramme entwickelt, die über geeignete Schnittstellen eine unmittelbare Integration des Berechnungsverfahrens in den Konstruktionsprozess realer Beschauelungen erlauben, sodass eine Abschätzung der zu erwartenden Dämpfung und eine Parameteroptimierung schon frühzeitig erfolgen kann.

Das Berechnungsverfahren basiert zunächst auf einer modalen Beschreibung der beschauelten Scheibe. Dabei werden für den unverstimmten Schaufelkranz zyklische Randbedingungen genutzt, um das Gesamtsystem auf ein Segment einer beschauelten Scheibe mit einem Reibelement zu reduzieren. Darüber hinaus können verstimmte beschauelte Scheiben betrachtet werden, deren Dynamik mit Hilfe der Schwingungsformen des un-

verstimmten Schaufelkranzes beschrieben wird. Der Vorteil gegenüber alternativen Verfahren wie der Substrukturformulierung ist die exakte Erfüllung der Koppelbedingungen zwischen Schaufel und Scheibe und die korrekte Wiedergabe des Grenzfalls der unverstimmt beschaufelten Scheibe. Darüber hinaus sind keine expliziten Informationen über die Massen- und Steifigkeitsverteilung von Schaufel und Scheibe notwendig. Die Dynamik des Reiblements wird mit Hilfe von Starrkörper- sowie elastischer Moden abgebildet. Dies erlaubt die Berücksichtigung sehr allgemeiner Reiblementgeometrien, da die häufig getroffene Annahme einer reinen Starrkörperbewegung des Reiblements entfallen kann.

Die Kopplung zwischen Reiblement und Schaufel erfolgt über ein dreidimensionales Kontaktmodell, das zunächst eine Diskretisierung der Kontaktfläche in einzelne Punktkontakte erfordert. Jeder individuelle Kontaktpunkt besitzt neben zwei Freiheitsgraden in der Kontaktebene einen weiteren in kontaktnormaler Richtung. Somit ist es möglich, auch eine Normalkraftfluktuation im Kontakt abzubilden und insbesondere den Zustand des einsetzenden Kontaktverlustes zu detektieren. Dieser bisher nicht näher untersuchte Zustand ist insbesondere für den flächigen Kontakt an keilförmigen oder asymmetrischen Reiblementen von großem Interesse. Des Weiteren ist das Kontaktmodell in der Lage, in der Kontaktfläche inhomogen verteilte Kontaktkräfte und aufgrund der Diskretisierung auch Momente abzubilden. Dies ist als Grundvoraussetzung für die Behandlung flächiger Kontakte anzusehen, da der Relativverdrehung der Kontaktflächen zueinander eine entscheidende Bedeutung zukommt. Dieser Einfluss wurde in der bisher bekannten Modellierung des Kontaktes zwischen Reiblement und Schaufelfußplatte zumeist vernachlässigt oder über empirische Ansätze nur grob abgeschätzt.

Die aus der Kopplung von Schaufel- und Reiblementdynamik unter Verwendung des Kontaktmodells resultierende Systemgleichung wird numerisch im Frequenzbereich gelöst. Dies erlaubt eine äußerst effiziente Berechnung der Dynamik des Gesamtsystems, sodass eine Optimierung einzelner Systemparameter möglich wird. Zu diesem Zweck kommt die Harmonische Balance zum Einsatz, die auch für den Fall fluktuierender Normalkräfte ausreichend genaue Ergebnisse für die Dämpferauslegung liefert. Mit Hilfe des entwickelten Modells lassen sich automatisierte Parameterstudien bezüglich aller relevanten konstruktiven und physikalischen Parameter durchführen, sodass detaillierte Aussagen über die Effizienz verschiedener Reiblementtypen möglich sind. Dabei wird das Konzept eines mehrstufigen Optimierungsprozesses verfolgt, in dem die Reiblementmasse als eine der wichtigsten Reiblementeigenschaften nach erfolgter Parametervariation erneut optimiert wird, um fehlerhafte Aussagen über den Einfluss eines Parameters zu vermeiden.

Die Resultate für den unverstimmten Schaufelkranz zeigen zunächst, dass die erreichbare Amplitudenreduktion stark von den gegebenen Randbedingungen, wie z. B. der Erregerordnung oder der radialen Position der Kontaktpunkte abhängig ist. So lässt sich mit größeren Relativverschiebungen benachbarter Schaufeln im Allgemeinen eine größere Dämpfungswirkung erzielen. Dies kann u. a. durch höhere Erregerordnungen oder die radiale Verlagerung der Kontaktknoten zum Schaufelblatt erfolgen. Es hat sich gezeigt,

dass in diesen Fällen eine erneute Optimierung der Reibelementmasse unabdingbar ist, um die optimale Dämpfungswirkung zu erzielen.

Hinsichtlich der Dämpfungseigenschaften kann zunächst festgestellt werden, dass ein möglichst steifes Reibelement zu bevorzugen ist, da die vorhandenen Relativbewegungen zwischen zwei Schaufeln dann optimal in Reibkräfte umgesetzt werden, ohne das Reibelement elastisch zu verformen. Der Einfluss der Reibelementträgheit kann bei geringen Drehzahlen bzw. Reibelementmassen ohne Genauigkeitseinbußen vernachlässigt werden. Es wird jedoch aufgezeigt, dass diese im Fall höherer Schwingungsmoden eine durchaus signifikante Reduzierung der Resonanzfrequenz bewirken kann. Einen entscheidenden Parameter stellt die Reibelementmasse dar, die für verschiedene Reibelementgeometrien vergleichbare optimale Werte aufweist. Als entscheidender Einflussparameter hat sich die geometrische Gestaltung des Reiblements und der Kontaktzonen erwiesen. Die mit Hilfe des entwickelten Berechnungsverfahrens erstmalig mögliche Unterscheidung zwischen zylinderförmigen, keilförmigen und asymmetrischen Reibelementen zeigt, dass insbesondere die Kontakthöhe des flächigen Kontaktes aufgrund der zusätzlichen Drehsteifigkeit großen Einfluss auf die zu erwartende Resonanzfrequenz hat. Diese stellt neben der erreichbaren Amplitudenreduktion eine entscheidende Größe dar. Insbesondere vor dem Hintergrund einer exakten Abstimmung der Resonanzfrequenz, um mögliche Anregungen mit Drehzahlharmonischen zu vermeiden, kommt dem eingesetzten Reibelement somit besondere Bedeutung zu. Hier zeigt sich, dass die Verschiebung der Resonanzfrequenz im Fall des keilförmigen Reiblements deutlich größere Werte im Vergleich zu einem zylinderförmigen Reibelement annimmt. In diesem Zusammenhang ist bemerkenswert, dass die maximale Schwingungsamplitude aufgrund der Nichtlinearität und der Drehzahlabhängigkeit der Kontaktnormalkräfte nicht zwangsläufig bei den Schnittpunkten der Resonanzfrequenzkurven mit den Drehzahlharmonischen im CAMPBELL-Diagramm auftreten müssen. Als negative Eigenschaft der Reibelemente mit flächigen Kontakten stellt sich jedoch heraus, dass sowohl asymmetrische als auch keilförmige Reibelemente aufgrund der Relativverdrehungen in den Kontaktflächen zu zeitweiligem Kontaktverlust an den Rändern der Kontaktzone neigen. Dieser unerwünschte Effekt tritt mit anwachsender Kontakthöhe immer deutlicher hervor. Die Konsequenz ist ein abnehmender Dämpfungseffekt und ein möglicher verstärkter Verschleiß im Bereich der Kontaktränder. Darüber hinaus zeigt eine Analyse der statischen Gleichgewichtslage, dass das zylinderförmige Reibelement deutliche Vorteile hinsichtlich einer eindeutig definierten Lage zwischen den Schaufelfußplatten aufweist.

Untersuchungen zu verstimmten Schaufelkränzen haben gezeigt, dass eine gezielte Anordnung der Schaufeln, etwa nach möglichst maximaler Differenz der Eigenfrequenzen benachbarter Schaufeln, keine zusätzliche Reduktion der Schwingungsamplituden im Vergleich zu einer beliebigen Anordnung bewirkt. Andererseits kann festgestellt werden, dass sich eine Anordnung nach minimaler Eigenfrequenzdifferenz mit einem Anstieg der Schwingungsamplituden eher nachteilig auswirkt. Eine bewusste Verstimmung des Schaufelkranzes hat in dem untersuchten Beispiel keinen signifikanten Einfluss.

Eine abschließende Betrachtung verschiedener Anwendungsfälle bestätigt die auf der Grundlage des entwickelten Berechnungsverfahrens gewonnenen Erkenntnisse zur Wirkungsweise verschiedener Reibelementgeometrien. Hierzu dient zunächst ein Vergleich von gemessenen und berechneten Frequenzgängen an einem nicht rotierenden Modellschaufelpaar mit verschiedenen Reibelementen. Es wird deutlich, dass die gemessene Resonanzamplitude und insbesondere die Resonanzfrequenz in der Simulation sehr gut wiedergegeben werden können. Die experimentellen Untersuchungen bestätigen darüber hinaus die deutlichen qualitativen Unterschiede unter Verwendung zylinderförmiger oder asymmetrischer bzw. keilförmiger Reibelemente. In diesem Zusammenhang kann experimentell auch die Problematik des Kontaktverlustes bei flächigem Kontakt nachgewiesen werden. Zur Vermeidung dieses Zustandes werden Auslegungskriterien erarbeitet, die zu einer besser definierten Gleichgewichtslage des Reiblements führen.

Die Auslegung von Reibelementen anhand verschiedener real ausgeführter Beschauflungen aus dem Gasturbinenbau zeigt, dass mit dem entwickelten Verfahren sowohl eine qualitative als auch quantitative Vorhersage der zu erwartenden Resonanzfrequenz bei der Verwendung verschiedener Reibelementbauformen möglich ist. So zeigen experimentelle Untersuchungen, dass sich die Resonanzfrequenz etwa unter Verwendung asymmetrischer Reibelemente mit einseitig flächigem Kontakt im Vergleich zu zylinderförmigen Reibelementen zu höheren Werten verschiebt. Vergleiche gemessener und berechneter Frequenzgänge realer reibelementgedämpfter Schaufelkränze zeigen darüber hinaus, dass neben der Resonanzfrequenz auch die Schwingungsamplitude eine sehr gute Übereinstimmung zeigt. Somit steht dem Konstrukteur erstmalig ein umfassendes Werkzeug zur verlässlichen Abschätzung des Einflusses verschiedener, in der Praxis eingesetzter Reibelemente zur Verfügung.

Anhang

A Mathematische Grundlagen

A.1 Tilde-Operator

Das Kreuzprodukt

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad (\text{A.1})$$

zweier in einem orthogonalen Rechtshandsystem angegebenen Vektoren $\mathbf{a}^T = [a_1 \ a_2 \ a_3]$ und $\mathbf{b}^T = [b_1 \ b_2 \ b_3]$ lässt sich in die für matrizielle Operationen günstigere Form

$$\mathbf{c} = \tilde{\mathbf{a}} \mathbf{b} = -\tilde{\mathbf{b}} \mathbf{a} \quad (\text{A.2})$$

mit dem antimetrischen Tilde-Operator

$$\tilde{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

überführen, siehe u. a. ZURMÜHL UND FALK [200].

A.2 FOURIER-Reihenentwicklung

Eine beliebige periodische Funktion $h(t) = h(t + T)$ mit der Periodendauer T und der Grundkreisfrequenz $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ lässt sich als FOURIER-Reihe in der Form

$$h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(n\Omega t + \psi_n) \quad (\text{A.4})$$

mit den FOURIER-Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T h(t) dt, & b_0 &= 0, \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T h(t) \cos n\Omega t dt, & b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T h(t) \sin n\Omega t dt, \quad n = 1(1)\infty, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

und

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \psi_n = -\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right), \quad n = 1(1)\infty, \quad (\text{A.6})$$

darstellen, siehe u. a. MAGNUS UND POPP [99].

A.3 Harmonische Balance

Die auf KRYLOV und BOGOLJUBOV zurückgehende und u. a. von MAGNUS UND POPP [99] beschriebene Methode der Harmonischen Balance (HBM) stellt eine Approximation einer nichtlinearen Funktion $h(x)$ bereit, wie sie u. a. als Rückführfunktion in Systemen mit COULOMB'scher Reibung auftritt. Ausgehend von der Annahme einer harmonischen Eingangsgröße $x(t) = x_0 \cos \Omega t$ ergibt sich eine ebenfalls periodische Funktion $h(t)$, die nach Anhang A.2 in eine FOURIER-Reihe entwickelt werden kann. Wird von dieser ausschließlich die Grundharmonische betrachtet, lässt sich nach Gl. (A.4)

$$h(t) = \bar{h} + a_1 \cos \Omega t + b_1 \sin \Omega t \quad (\text{A.7})$$

mit $\bar{h} = a_0$ schreiben. Einsetzen der Funktion $x(t)$ und deren Ableitung nach der Zeit ergibt

$$h(x, \dot{x}) = \bar{h} + \frac{a_1}{x_0} x(t) - \frac{b_1}{\Omega x_0} \dot{x}(t) \quad (\text{A.8})$$

bzw. in komplexer Formulierung mit $x(t) = \hat{x} e^{i \Omega t}$

$$h(t) = \bar{h} + \hat{h} e^{i \Omega t} = \bar{h} + \hat{k} \hat{x} e^{i \Omega t} \quad (\text{A.9})$$

mit der komplexen Steifigkeit

$$\hat{k}(x_0) = \frac{a_1}{x_0} - i \frac{b_1}{x_0}. \quad (\text{A.10})$$

Die auf diese Weise dargestellte Funktion $h(t)$ lässt sich dann problemlos etwa in die im Frequenzbereich formulierten Bewegungsgleichungen integrieren. Der nichtlineare Charakter bleibt über die amplitudenabhängige komplexe Steifigkeit $\hat{k}(x_0)$ erhalten, was als großer Vorteil gegenüber einer Linearisierung nach der Methode der kleinen Schwingungen angesehen werden kann.

B Eigenwertanalyse zyklischer Systeme

B.1 Das KRONECKER-Produkt

Das so genannte KRONECKER-Produkt¹ einer $[m \times n]$ -Matrix Q mit einer $[p \times q]$ -Matrix R ergibt die $[mp \times nq]$ -Matrix P und ist definiert durch

$$P = Q \otimes R = \begin{bmatrix} q_{11}R & q_{12}R & \cdots & q_{1n}R \\ q_{21}R & q_{22}R & \cdots & q_{2n}R \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{m1}R & q_{m2}R & \cdots & q_{mn}R \end{bmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

Einige wichtige Eigenschaften des KRONECKER-Produktes sind u. a. in DAVIS [40] aufgeführt:

$$(\alpha Q) \otimes R = Q \otimes (\alpha R), \quad (\text{B.2})$$

$$(Q + R) \otimes S = (Q \otimes S) + (R \otimes S), \quad (\text{B.3})$$

$$Q \otimes (R + S) = (Q \otimes R) + (Q \otimes S), \quad (\text{B.4})$$

$$Q \otimes (R \otimes S) = (Q \otimes R) \otimes S, \quad (\text{B.5})$$

$$(Q \otimes R)(S \otimes T) = (QS) \otimes (RT), \quad (\text{B.6})$$

$$(Q \otimes R)^* = Q^* \otimes R^*, \quad (\text{B.7})$$

$$(Q \otimes R)^T = Q^T \otimes R^T \quad \text{bzw.} \quad (Q \otimes R)^H = Q^H \otimes R^H. \quad (\text{B.8})$$

B.2 Komplexe FOURIER-Matrix

Eine entscheidende Bedeutung bei der Behandlung zyklischer Matrizen kommt der komplexen FOURIER-Matrix²

$$F = [f_{mn}], \quad f_{mn} = \frac{1}{\sqrt{n_S}} e^{-i(m-1)(n-1)\delta}, \quad m, n = 1(1)n_S, \quad (\text{B.9})$$

¹Im englischen Sprachraum ist auch der Begriff *direct product* geläufig.

²Die FOURIER-Matrix F überführt mit $\hat{z} = F z(t)$ eine zeitdiskrete Funktion $z(t)$ in die komplexen FOURIER-Koeffizienten \hat{z} (Diskrete FOURIER-Transformation, DFT). Die Rücktransformation, d. h. die Synthese des Zeitsignals aus den einzelnen Harmonischen, erfolgt über $z(t) = F^H \hat{z}$.

zu. Sie ist mit den Potenzen der Einheitswurzeln besetzt, die sich durch fortlaufende Drehung von

$$w = e^{i\delta} \quad (\text{B.10})$$

um den in Gl. (2.1) gegebenen Teilungs- bzw. Segmentwinkel

$$\delta = \frac{2\pi}{n_S} \quad (\text{B.11})$$

in der komplexen Ebene ergeben. Auf die Darstellung ($\hat{\quad}$) zur Kennzeichnung komplexer Größen wird in diesem Anhang aus Gründen der Übersichtlichkeit durchgehend verzichtet. Die konjugiert komplex (hermitesch) transponierte FOURIER-Matrix F^H ergibt sich aus

$$F^H = \frac{1}{\sqrt{n_S}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \dots & w^{n_S-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \dots & w^{2(n_S-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & w^{n_S-1} & w^{2(n_S-1)} & \dots & w^{(n_S-1)(n_S-1)} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.12})$$

Aufgrund der Eigenschaft

$$\sum_{k=0}^{n_S-1} e^{i k \delta} = \sum_{k=0}^{n_S-1} w^k = 0 \quad (\text{B.13})$$

gelten die Beziehungen

$$F^H F = E \quad \text{bzw.} \quad F^{-1} = F^H, \quad (\text{B.14})$$

d.h. F ist unitär. Mit Hilfe der für die Darstellung zyklischer Matrizen wichtigen Permutationsmatrix

$$\pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.15})$$

und der Diagonalmatrix Ω^k , die die Potenzen der Einheitswurzel w mit

$$\Omega^k = \mathbf{diag}(1, w^k, w^{2k}, \dots, w^{(n_S-1)k}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{i k \delta} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{i 2k \delta} & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & & e^{i (n_S-1)k \delta} \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

enthält und deren Hauptdiagonale dem $\sqrt{n_S}$ -fachen der $(k+1)$ -ten Zeile von F^H entspricht, lässt sich durch Einsetzen leicht die Diagonalisierung

$$\pi = F^H \Omega F \quad (\text{B.17})$$

der Matrix π zeigen. Unter Berücksichtigung von Gl. (B.14) gilt

$$\pi^k = (F^H \Omega F)^k = F^H \Omega^k F. \quad (\text{B.18})$$

B.3 Zyklische Matrizen

Zyklische und block-zyklische Matrizen weisen besondere Eigenschaften auf, die u. a. zu einer deutlichen Vereinfachung der Eigenwertberechnung führen. Eine ausführliche Darstellung zyklischer Matrizen gibt insbesondere DAVIS [40] sowie KNOTHE UND WESSELS [89] und ZURMÜHL UND FALK [200]. Anwendungen auf technische Systeme behandeln u. a. BLADH ET AL. [15] (Schaufelkranz), RIPKE [135] (Gleis als zyklische Struktur) und THOMAS [166] (Kühlturmsegmente). Basierend auf den Ausführungen in [40] wird im Folgenden zusammenfassend die Eigenwertanalyse zyklischer und block-zyklischer Matrizen dargestellt.

Eine reelle zyklische $[n_S \times n_S]$ -Matrix

$$C = \text{circ}(c_0, c_1, \dots, c_{n_S-1}) = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n_S-1} \\ c_{n_S-1} & c_0 & \cdots & c_{n_S-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.19})$$

zeichnet sich durch aufeinander folgende Zeilen aus, deren Koeffizienten aus einer zyklischen Vertauschung der Koeffizienten der ersten Zeile hervorgehen. Allgemein gilt, dass C eine zyklische Matrix darstellt, wenn

$$C\pi = \pi C \quad (\text{B.20})$$

mit der Permutationsmatrix π nach Gl. (B.15) erfüllt ist. Die Matrix C lässt sich auch als Summe von Potenzen der Matrix π in der Form

$$C = c_0 E + c_1 \pi + \dots + c_{n_S-1} \pi^{(n_S-1)} = \sum_{k=0}^{n_S-1} c_k \pi^k \quad (\text{B.21})$$

darstellen. Unter Berücksichtigung von Gl. (B.18) ergibt sich

$$C = F^H \left(\sum_{k=0}^{n_S-1} c_k \Omega^k \right) F \quad (\text{B.22})$$

mit Ω^k nach Gl. (B.16). Mit der Diagonalmatrix

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n_S}) = \sum_{k=0}^{n_S-1} c_k \Omega^k \quad (\text{B.23})$$

ergibt sich die Zerlegung

$$C = F^H \Lambda F. \quad (\text{B.24})$$

Mit Hilfe von Gl. (B.14) lässt sich Gl. (B.24) in

$$CF^H = F^H \Lambda \quad (\text{B.25})$$

umformen. Dieser Ausdruck entspricht den Eigenwertgleichungen zur Bestimmung der in der Spektralmatrix Λ zusammengefassten Eigenwerte

$$\lambda_j = \sum_{k=0}^{n_S-1} c_k w^{k(j-1)}, \quad j = 1(1)n_S, \quad (\text{B.26})$$

der Matrix C nach Gl. (B.23). Die hermitesch transponierte FOURIER-Matrix F^H entspricht der Modalmatrix, die die spaltenweise angeordneten Rechtseigenvektoren der zyklischen Matrix C enthält. Die Identität von Gl. (B.25) lässt sich leicht durch Einsetzen der Gln. (B.12), (B.19) und (B.23) zeigen. Eine beliebige zyklische Matrix C lässt sich somit unter Verwendung der FOURIER-Matrix F auf Diagonalform bringen. Die entsprechenden Eigenwerte der Matrix C ergeben sich aus Gl. (B.26).

B.4 Block-zyklische Matrizen

Analog zu Gl. (B.19) lässt sich eine reelle block-zyklische Matrix in der Form

$$B = \text{bcirc}(B_0, B_1, \dots, B_{n_S-1}) = \begin{bmatrix} B_0 & B_1 & \cdots & B_{n_S-1} \\ B_{n_S-1} & B_0 & \cdots & B_{n_S-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_1 & B_2 & \cdots & B_0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.27})$$

definieren, in der sich die so genannten Hyperzeilen durch eine zyklische Vertauschung der $[n_{\text{Seg}} \times n_{\text{Seg}}]$ -Matrizen $B_0 \dots B_{n_S-1}$, die die erste Hyperzeile bilden, ergeben. Für B ergibt sich somit die Dimension $[n_S n_{\text{Seg}} \times n_S n_{\text{Seg}}]$. Die Matrizen B_j müssen dabei selbst keine zyklische Struktur aufweisen. Im Folgenden bezeichnet F die $[n_S \times n_S]$ -FOURIER-Matrix nach Gl. (B.9), π die $[n_S \times n_S]$ -Permutationsmatrix nach Gl. (B.17) und E die $[n_{\text{Seg}} \times n_{\text{Seg}}]$ -Einheitsmatrix. Analog zu Gl. (B.20) ist eine Matrix B genau dann block-zyklisch, wenn

$$B (\pi \otimes E) = (\pi \otimes E) B \quad (\text{B.28})$$

gilt. Entsprechend Gl. (B.21) kann eine block-zyklische Matrix durch

$$B = \sum_{k=0}^{n_S-1} \pi^k \otimes B_k \quad (\text{B.29})$$

dargestellt werden, d. h. an die Stelle einer Multiplikation mit dem skalaren Faktor c_k tritt das KRONECKER-Produkt mit der Matrix B_k .

Unter Berücksichtigung von Gl. (B.17) und den Eigenschaften des KRONECKER-Produktes aus Gl. (B.6) lässt sich Gl. (B.29) umschreiben und die block-zyklische Matrix B

analog Gl. (B.22) mit Hilfe der Zerlegung

$$\mathbf{B} = (\mathbf{F} \otimes \mathbf{E})^{\text{H}} \left(\sum_{k=0}^{n_{\text{S}}-1} \boldsymbol{\Omega}^k \otimes \mathbf{B}_k \right) (\mathbf{F} \otimes \mathbf{E}) \quad (\text{B.30})$$

angeben. Mit

$$\mathbf{F}_{\text{B}} = \mathbf{F} \otimes \mathbf{E} \quad (\text{B.31})$$

und der Block-Diagonalmatrix

$$\boldsymbol{\Lambda}_{\text{B}} = \mathbf{bdiag}(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \dots, \mathbf{D}_{n_{\text{S}}}) = \sum_{k=0}^{n_{\text{S}}-1} \boldsymbol{\Omega}^k \otimes \mathbf{B}_k \quad (\text{B.32})$$

ergibt sich

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}_{\text{B}}^{\text{H}} \boldsymbol{\Lambda}_{\text{B}} \mathbf{F}_{\text{B}}, \quad (\text{B.33})$$

vgl. Gl. (B.23) und Gl. (B.24). Die Matrizen \mathbf{D}_j aus Gl. (B.32) ergeben sich in Analogie zu Gl. (B.26) aus

$$\mathbf{D}_j = \sum_{k=0}^{n_{\text{S}}-1} w^{k(j-1)} \mathbf{B}_k, \quad j = 1(1)n_{\text{S}}. \quad (\text{B.34})$$

Für jede der n_{S} Matrizen \mathbf{D}_j der Dimension $[n_{\text{Seg}} \times n_{\text{Seg}}]$ ergibt sich das gewöhnliche Eigenwertproblem

$$\mathbf{D}_j \boldsymbol{\Phi}_j = \boldsymbol{\Phi}_j \boldsymbol{\Lambda}_j, \quad (\text{B.35})$$

mit der Modalmatrix $\boldsymbol{\Phi}_j$, die spaltenweise die n_{Seg} Eigenvektoren $\boldsymbol{\varphi}_{j,m}$, $m = 1(1)n_{\text{Seg}}$, enthält, und der diagonal mit den Eigenwerten $\lambda_{j,m}$, $m = 1(1)n_{\text{Seg}}$, besetzten Spektralmatrix $\boldsymbol{\Lambda}_j$. Sind die Eigenvektoren linear unabhängig und darüber hinaus orthogonal bzw. unitär, so ist die Modalmatrix orthogonal bzw. unitär. Die Diagonalisierung der Matrizen \mathbf{D}_j erfolgt dann mit

$$\mathbf{D}_j = \boldsymbol{\Phi}_j \boldsymbol{\Lambda}_j \boldsymbol{\Phi}_j^{\text{H}} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{\Lambda}_j = \boldsymbol{\Phi}_j^{\text{H}} \mathbf{D}_j \boldsymbol{\Phi}_j, \quad j = 1(1)n_{\text{S}}. \quad (\text{B.36})$$

Wird Gl. (B.36) in Gl. (B.32) und Gl. (B.30) eingesetzt, gelingt die Diagonalisierung der block-zyklischen Matrix \mathbf{B} durch

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\Psi}_{\text{B}}^{\text{H}} \tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_{\text{B}} \boldsymbol{\Psi}_{\text{B}}, \quad (\text{B.37})$$

mit

$$\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_{\text{B}} = \mathbf{bdiag}(\boldsymbol{\Lambda}_1, \boldsymbol{\Lambda}_2, \dots, \boldsymbol{\Lambda}_{n_{\text{S}}}), \quad (\text{B.38})$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{\text{B}} = \mathbf{bdiag}(\boldsymbol{\Phi}_1, \boldsymbol{\Phi}_2, \dots, \boldsymbol{\Phi}_{n_{\text{S}}}) \quad (\text{B.39})$$

und

$$\boldsymbol{\Psi}_{\text{B}} = \boldsymbol{\Phi}_{\text{B}}^{\text{H}} \mathbf{F}_{\text{B}}. \quad (\text{B.40})$$

Analog zu Gl. (B.25) kann durch Umformen von Gl. (B.37) in das Eigenwertproblem

$$\mathbf{B} \Psi_{\mathbf{B}}^{\mathbf{H}} = \Psi_{\mathbf{B}}^{\mathbf{H}} \tilde{\Lambda}_{\mathbf{B}} \quad (\text{B.41})$$

gezeigt werden, dass die Matrizen $\tilde{\Lambda}_{\mathbf{B}}$ und $\Psi_{\mathbf{B}}^{\mathbf{H}}$ die Eigenwerte und die unitären Eigenvektoren der zyklischen Matrix \mathbf{B} enthalten. Die Eigenwerte der reellen, zyklischen $[n_{\text{S}} n_{\text{Seg}} \times n_{\text{S}} n_{\text{Seg}}]$ -Matrix \mathbf{B} ergeben sich somit aus der Analyse der durch Gl. (B.34) gegebenen, sehr viel kleineren, aber komplexen $[n_{\text{Seg}} \times n_{\text{Seg}}]$ -Matrizen \mathbf{D}_j . Dies erweist sich insbesondere bei sehr großen Matrizen \mathbf{B} als vorteilhaft. Die $n_{\text{S}} n_{\text{Seg}}$ Eigenvektoren der Matrix \mathbf{B} können den Spalten der in Gl. (B.40) definierten Modalmatrix

$$\Psi_{\mathbf{B}}^{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \psi_1 & \dots & \psi_{n_{\text{S}} n_{\text{Seg}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \dots & \Phi_{n_{\text{S}}} \\ \Phi_1 & w \Phi_2 & \dots & w^{n_{\text{S}}-1} \Phi_{n_{\text{S}}} \\ \Phi_1 & w^2 \Phi_2 & \dots & w^{2(n_{\text{S}}-1)} \Phi_{n_{\text{S}}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Phi_1 & w^{n_{\text{S}}-1} \Phi_2 & \dots & w^{(n_{\text{S}}-1)(n_{\text{S}}-1)} \Phi_{n_{\text{S}}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.42})$$

entnommen werden. Sie lassen sich durch die Eigenvektoren Φ_j der Matrizen \mathbf{D}_j und eine entsprechende Drehung in der komplexen Ebene um Vielfache des Segmentwinkels δ darstellen. Aus Gl. (B.42) ist unmittelbar ersichtlich, dass die für die Ermittlung von Gl. (B.37) vorausgesetzte Unitarität der Matrix $\Psi_{\mathbf{B}}^{\mathbf{H}}$ gegeben ist, denn für zwei beliebige Spalten von $\Psi_{\mathbf{B}}^{\mathbf{H}}$ gilt die Beziehung

$$\psi_{(s-1)n_{\text{Seg}}+v}^{\mathbf{H}} \psi_{(r-1)n_{\text{Seg}}+u} = \varphi_{s,v}^{\mathbf{H}} \varphi_{r,u} \sum_{k=0}^{n_{\text{S}}-1} w^{k(r-s)}, \quad (\text{B.43})$$

worin $\varphi_{s,v}$ die Spalte v der Modalmatrix Φ_s und $\varphi_{r,u}$ die Spalte u der Modalmatrix Φ_r kennzeichnet und die Eigenvektoren u und v einer Modalmatrix Φ_j als orthogonal bzw. unitär angenommen werden. Sind diese Segmenteigenvektoren φ jeweils auf den Betrag $\|\varphi\| = 1$ normiert, d. h. bilden sie ein Ortho- bzw. unitäres Normalsystem, ergibt sich mit dem KRONECKER-Symbol δ_{vu}

$$\varphi_{r,v}^{\mathbf{H}} \varphi_{r,u} = \delta_{vu} = \begin{cases} 1 & \text{für } u = v, \\ 0 & \text{für } u \neq v, \end{cases} \quad r = 1(1)n_{\text{S}}, \quad u, v = 1(1)n_{\text{Seg}}. \quad (\text{B.44})$$

Weiterhin gilt

$$\sum_{k=0}^{n_{\text{S}}-1} w^{k(r-s)} = \begin{cases} n_{\text{S}} & \text{für } r = s, \\ 0 & \text{für } r \neq s, \end{cases} \quad r, s = 1(1)n_{\text{S}}, \quad (\text{B.45})$$

vgl. Gl. (B.13). Mit einer geeigneten Normierung der Eigenvektoren φ der einzelnen Segmente auf den Betrag $\|\varphi\| = \sqrt{\frac{1}{n_{\text{S}}}}$ lässt sich die in Gl. (B.37) vorausgesetzte Bedingung

$$\Psi_{\mathbf{B}}^{\mathbf{H}} \Psi_{\mathbf{B}} = \mathbf{E} \quad (\text{B.46})$$

erfüllen. An dieser Stelle sei bemerkt, dass sich die Zusammenhänge für block-zyklische Matrizen mit $n_{\text{Seg}} = 1$ und damit dem Übergang der Blockmatrizen \mathbf{B}_k auf die Skalare c_k auf zyklische Matrizen als Sonderfall block-zyklischer Matrizen übertragen lassen, vgl. Anhang B.3.

B.5 Lösung des Eigenwertproblems für zyklische mechanische Systeme

In zyklischen mechanischen Systemen weisen Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrix charakteristische Strukturen auf, wie am Beispiel der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} gezeigt werden kann. In der Matrix

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} (1)\mathbf{K}_{II} & (1)\mathbf{K}_{IR} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & (1)\mathbf{K}_{IL} \\ (1)\mathbf{K}_{RI} & (1)\mathbf{K}_{RR} + (2)\mathbf{K}_{LL} & (2)\mathbf{K}_{LI} & & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (2)\mathbf{K}_{IL} & (2)\mathbf{K}_{II} & (2)\mathbf{K}_{IR} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & & (n_s)\mathbf{K}_{IL} & (n_s)\mathbf{K}_{II} & (n_s)\mathbf{K}_{IR} \\ (1)\mathbf{K}_{LI} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & (n_s)\mathbf{K}_{RI} & (n_s)\mathbf{K}_{RR} + (1)\mathbf{K}_{LL} \end{bmatrix} \quad (\text{B.47})$$

bezeichnen die $(j)\mathbf{K}$ mit $j = 1(1)n_s$ die Steifigkeitsmatrizen der n_s Segmente des zyklischen Systems. Der Index $(\)_L$ kennzeichnet die Freiheitsgrade des linken Segmentrandes, der Index $(\)_R$ die des rechten Segmentrandes und der Index $(\)_I$ die Freiheitsgrade im Segmentinneren, welche nicht mit den Freiheitsgraden benachbarter Segmente gekoppelt sind, vgl. **Bild B.1** auf Seite 194. In einem zyklischen System weisen alle sich wiederholenden Segmente identische mechanische Eigenschaften auf, sodass der hochgestellte Segmentindex entfallen kann und $(j)\mathbf{K}_{mn} = \mathbf{K}_{mn}$ sowie aufgrund der Annahme symmetrischer Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{mn} = \mathbf{K}_{nm}^T$ mit $m, n = L, I, R$ gilt. Der entsprechende Verschiebungsvektor des Gesamtsystems lautet

$$\boldsymbol{\psi} = \left[(1)\boldsymbol{\varphi}_I^T \ (1)\boldsymbol{\varphi}_R^T \ (2)\boldsymbol{\varphi}_I^T \ (2)\boldsymbol{\varphi}_R^T \ \cdots \ (n_s)\boldsymbol{\varphi}_I^T \ (n_s)\boldsymbol{\varphi}_R^T \right]^T. \quad (\text{B.48})$$

Bei schwingungsfähigen mechanischen Systemen tritt ein gewöhnliches, quadratisches Eigenwertproblem anstelle eines speziellen Eigenwertproblems auf. Mit der block-zyklischen Steifigkeits- und Massenmatrix \mathbf{K} und \mathbf{M} , die beide von der in Gl. (B.47) angegebenen Struktur sind, ergibt sich

$$(\lambda^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0}. \quad (\text{B.49})$$

Gl. (B.49) lässt sich über verschiedene Verfahren in ein spezielles Eigenwertproblem überführen. Mit $\Lambda = -\lambda^2$ ergibt sich durch einfache Linksmultiplikation von Gl. (B.49) mit der Inversen der Massenmatrix unmittelbar das spezielle Eigenwertproblem

$$(\mathbf{A} - \Lambda \mathbf{E}) \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0} \quad (\text{B.50})$$

mit $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$. Aufgrund der Tatsache, dass sowohl die Inverse einer block-zyklischen Matrix als auch das Produkt zweier block-zyklischer Matrizen - und somit die Matrix \mathbf{A} - ebenfalls block-zyklische Matrizen darstellen, vgl. Gln. (B.14) und (B.33), gelten für die Eigenwertberechnung aus Gl. (B.50) alle in Anhang B.4 hergeleiteten Zusammenhänge mit $\mathbf{B} = \mathbf{A}$. Es ergibt sich die u. U. vollbesetzte block-zyklische Systemmatrix \mathbf{A} mit

$$\mathbf{A} = \text{bcirc}(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_{n_s-1}). \quad (\text{B.51})$$

Einsetzen von Gl. (B.51) in Gl. (B.34) führt auf die Matrizen D_j , wobei sich

$$D_{n_S+2-j} = D_j^*, \begin{cases} j = 2(1)\frac{1}{2}n_S, & \text{wenn } n_S \text{ gerade,} \\ j = 2(1)\frac{1}{2}(n_S + 1), & \text{wenn } n_S \text{ ungerade,} \end{cases} \quad (\text{B.52})$$

ergibt, d. h. es entstehen jeweils zwei konjugiert komplexe Matrizen D_j , wenn $j \neq 1$ und $j \neq \frac{n_S}{2} + 1$ gilt. Die zugehörigen Eigenwertprobleme führen im Allgemeinen auf konjugiert komplexe Eigenwerte und -vektoren. Im vorliegenden Fall stellt die Systemmatrix A eine diagonalähnliche Matrix dar, deren Eigenwerte $\Lambda_j = -\lambda_j^2$ aufgrund der angenommenen Symmetrie der Strukturmatrizen und der positiven Definitheit der Massenmatrix sämtlich reell und mit der in Gl. (B.49) gewählten Definition des Eigenwertproblems überdies positiv sind, siehe auch ZURMÜHL UND FALK [200]. Jeweils zwei Matrizen $D_{n_S+2-j} = D_j^*$ führen somit auf identische Eigenwerte $\Lambda_{n_S+2-j} = \Lambda_j$ und konjugiert komplexe Eigenvektoren $\Phi_{n_S+2-j} = \Phi_j^*$. Für $j = 1$ sowie für $j = \frac{n_S}{2} + 1$ im Fall einer geraden Segmentanzahl n_S gibt es kein entsprechendes Äquivalent, sodass die zugehörigen Eigenwerte und -vektoren nur einfach auftreten. Mit

$$w^{k(n_S-1)} = (w^k)^* \quad (\text{B.53})$$

bedeutet dies für die Eigenvektoren des Gesamtsystem aus Gl. (B.42) bzw. Gl. (2.33)³:

$$\Psi_B^H = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \cdots & \Phi_{\frac{n_S}{2}+1} & \cdots & \Phi_3^* & \Phi_2^* \\ \Phi_1 & w \Phi_2 & w^2 \Phi_3 & \cdots & -\Phi_{\frac{n_S}{2}+1} & \cdots & (w^2 \Phi_3)^* & (w \Phi_2)^* \\ \Phi_1 & w^2 \Phi_2 & w^4 \Phi_3 & \cdots & \Phi_{\frac{n_S}{2}+1} & \cdots & (w^4 \Phi_3)^* & (w^2 \Phi_2)^* \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ \Phi_1 & w^{n_S-1} \Phi_2 & w^{2(n_S-1)} \Phi_3 & \cdots & -\Phi_{\frac{n_S}{2}+1} & \cdots & (w^{2(n_S-1)} \Phi_3)^* & (w^{n_S-1} \Phi_2)^* \end{bmatrix}. \quad (\text{B.54})$$

Somit lassen sich die Eigenvektoren, wie bereits auf Seite 37 in Abschnitt 2.1.3 erwähnt, klassifizieren in

Eigenvektoren zu den einfachen Eigenwerten Λ_1 , bei denen keine Phasendifferenz zwischen den Verschiebungen der einzelnen Segmente auftritt (erste Hyperspalte von Ψ_B^H),

Eigenvektoren zu den einfachen Eigenwerten $\Lambda_{\frac{n_S}{2}+1}$ für den Fall einer geraden Segmentanzahl n_S , bei denen eine Phasendifferenz von jeweils 180° zwischen den Verschiebungen benachbarter Segmente auftritt (Hyperspalte $\frac{n_S}{2} + 1$ von Ψ_B^H) und

*konjugiert komplexe Eigenvektoren zu den doppelten Eigenwerten $\Lambda_j = \Lambda_{n_S+2-j}$ mit j gemäß Gl. (B.52), die als *vorwärts* und *rückwärts rotierende Eigenvektoren* bezeichnet werden. Die zu einem doppelten Eigenwert gehörigen konjugiert komplexen, unitären Eigenvektoren*

³Es ist zu beachten, dass für die Modalmatrix des Gesamtsystems aus Gl. (2.33) $\hat{\Psi}_G = \Psi_B^H$ gilt. Die hermitesch transponierte Form Ψ_B^H wurde hier aus Gründen der Konsistenz mit der in Anhang B.2 angegebenen FOURIER-Matrix genutzt.

$\boldsymbol{\psi}_1$ und $\boldsymbol{\psi}_2 = \boldsymbol{\psi}_1^*$ können durch die Linearkombination

$$\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\psi}}_1 \\ \tilde{\boldsymbol{\psi}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_1 \\ \boldsymbol{\psi}_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}\{\boldsymbol{\psi}_1\} \\ \operatorname{Im}\{\boldsymbol{\psi}_1\} \end{bmatrix} \quad (\text{B.55})$$

in zwei orthogonale reelle Eigenvektoren $\tilde{\boldsymbol{\psi}}_1$ und $\tilde{\boldsymbol{\psi}}_2$ überführt werden, die dem Real- bzw. Imaginärteil des Eigenvektors $\boldsymbol{\psi}_1$ entsprechen. Zwei konjugiert komplexe Eigenvektoren werden somit durch zwei um $\frac{\pi}{2}$ gegeneinander verschobene, 'stationäre' reelle Eigenvektoren ersetzt, siehe auch THOMAS [166]. Mit

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_1 = \left[{}^{(1)}\tilde{\boldsymbol{\psi}}_1^T \ {}^{(2)}\tilde{\boldsymbol{\psi}}_1^T \ \dots \ {}^{(n_S)}\tilde{\boldsymbol{\psi}}_1^T \right]^T, \quad \tilde{\boldsymbol{\psi}}_2 = \left[{}^{(1)}\tilde{\boldsymbol{\psi}}_2^T \ {}^{(2)}\tilde{\boldsymbol{\psi}}_2^T \ \dots \ {}^{(n_S)}\tilde{\boldsymbol{\psi}}_2^T \right]^T \quad (\text{B.56})$$

und den Beziehungen

$${}^{(k)}\tilde{\boldsymbol{\psi}}_1 = {}^{(k)}\mathbf{C}^T \mathbf{P}, \quad {}^{(k)}\tilde{\boldsymbol{\psi}}_2 = {}^{(k)}\mathbf{S}^T \mathbf{P}, \quad k = 1(1)n_S, \quad (\text{B.57})$$

sowie

$${}^{(k)}\mathbf{C}^T = \left[\cos \left(ND(k-1)\delta + \vartheta_1 \right) \ \dots \ \cos \left(ND(k-1)\delta + \vartheta_{n_{\text{Seg}}} \right) \right], \quad k = 1(1)n_S, \quad (\text{B.58})$$

$${}^{(k)}\mathbf{S}^T = \left[\sin \left(ND(k-1)\delta + \vartheta_1 \right) \ \dots \ \sin \left(ND(k-1)\delta + \vartheta_{n_{\text{Seg}}} \right) \right], \quad k = 1(1)n_S \quad (\text{B.59})$$

und

$$\mathbf{P}^T = \left[|\varphi_{ND+1,1}| \ \dots \ |\varphi_{ND+1,n_{\text{Seg}}}| \right] \quad (\text{B.60})$$

ergeben sich mit den Beträgen

$$|\varphi_{ND+1,m}| = \sqrt{\operatorname{Re}\{\varphi_{ND+1,m}\}^2 + \operatorname{Im}\{\varphi_{ND+1,m}\}^2}, \quad m = 1(1)n_{\text{Seg}}, \quad (\text{B.61})$$

und den Phasenwinkeln

$$\vartheta_m = -\arctan \left(\frac{\operatorname{Im}\{\varphi_{ND+1,m}\}}{\operatorname{Re}\{\varphi_{ND+1,m}\}} \right), \quad m = 1(1)n_{\text{Seg}}, \quad (\text{B.62})$$

die reellen Eigenvektoren $\tilde{\boldsymbol{\psi}}_1$ und $\tilde{\boldsymbol{\psi}}_2$, die die als cos- bzw. sin-Welle zu interpretierende Verschiebung jedes Segmentfreiheitsgrades m enthalten. Dabei ist zu bemerken, dass der Phasenwinkel ϑ_m für jeden Freiheitsgrad m verschieden sein kann und den örtlichen Versatz in Umfangsrichtung des Auftretens der maximalen Verschiebung verschiedener Freiheitsgrade zueinander repräsentiert. Die Größe $ND = j - 1$ aus Gl. (2.38) bezeichnet dabei die aus der Dynamik rotationssymmetrischer Scheiben bekannte Anzahl Knotendurchmesser ND , die zur Klassifizierung von Scheibenschwingungen herangezogen wird, siehe auch Abschnitt 2.1.3. Die Anzahl der Knotendurchmesser gibt an, durch wie viele cos- bzw. sin-Perioden am Scheibenumfang eine Schwingungsform charakterisiert wird. Für den Fall rotationssymmetrischer Kontinua ergibt sich eine unendliche Zahl möglicher Knotendurchmesser, für zyklisch periodische Strukturen mit n_S identischen Segmenten treten Schwingungsformen mit $ND = 0(1)\frac{n_S}{2}$ auf, wobei $ND = 0$ die gleichphasige Schwingung aller Segmente und $ND = \frac{n_S}{2}$ die gegenphasige Schwingung

benachbarter Segmente beschreibt. Für den Fall einer ungeraden Anzahl Segmente n_S entfällt letztere Schwingungsform.

B.6 Effiziente Eigenwertberechnung

Die in Anhang B.5 dargestellte Vorgehensweise zur Eigenwertberechnung in zyklischen Systemen ist aus praktischer Sicht unvorteilhaft, da u. a. die Steifigkeits- und Massenmatrix des Gesamtsystems benötigt werden und darüber hinaus eine Invertierung der Massenmatrix erforderlich ist. Weiterhin geht die Symmetrie der Systemmatrix verloren. In kommerziellen Finite-Element-Programmen wie z. B. ANSYS, siehe [6], haben sich daher alternative Vorgehensweisen wie die Anwendung komplexer zyklischer Zwangsbedingungen auf ein einzelnes Segment bewährt. Diese soll hier kurz erläutert werden, da das Verständnis über die Eigenwertberechnung von großer Bedeutung im Hinblick auf deren korrekte Verwendung in den in Abschnitt 2.1 hergeleiteten Beziehungen ist.

Zunächst wird von der zyklischen Gesamtstruktur nur ein einzelnes herausgeschnittenes Segment ohne Kopplung zu den benachbarten Segmenten betrachtet, siehe **Bild B.1**. Hierzu wird aus Gl. (B.47) die Kopplung zwischen den Segmenten entfernt und ein einzelnes Segment mit den inneren Freiheitsgraden sowie den an beiden Rändern vorhandenen Freiheitsgraden des linken und rechten Segmentrandes definiert. Für die Steifigkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{K}}_{\text{Seg}}$ und den Verschiebungsvektor $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{\text{Seg}}$ der Freiheitsgrade eines beliebigen Segments ergibt sich dann bei entsprechender Partitionierung

$$\tilde{\mathbf{K}}_{\text{Seg}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{LL}} & \mathbf{K}_{\text{LI}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{\text{IL}} & \mathbf{K}_{\text{II}} & \mathbf{K}_{\text{IR}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\text{RI}} & \mathbf{K}_{\text{RR}} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{\text{Seg}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_{\text{L}} \\ \boldsymbol{\varphi}_{\text{I}} \\ \boldsymbol{\varphi}_{\text{R}} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.63})$$

Die Massenmatrix $\tilde{\mathbf{M}}_{\text{Seg}}$ ist analog definiert. Die Anzahl der Freiheitsgrade pro ungekoppeltem Segment entspricht $\tilde{n}_{\text{Seg}} = n_{\text{L}} + n_{\text{I}} + n_{\text{R}}$, die damit um $n_{\text{L}} = n_{\text{R}}$ größer ist als die Anzahl der Freiheitsgrade n_{Seg} des gekoppelten Segments. Aufgrund der Kenntnis komplexer Eigenvektoren des zyklischen Gesamtsystems, die sich aus Gl. (B.54) ergeben, werden zur Beseitigung der zusätzlichen Freiheitsgrade n_{L} komplexe Zwangsbedingungen an den Segmenträndern formuliert. Mit $j = 1(1)n_S$ wird der in Gl. (B.63) angegebene Verschiebungsvektor $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{\text{Seg}}$ somit durch

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{\text{Seg}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_{\text{L}} \\ \boldsymbol{\varphi}_{\text{I}} \\ \boldsymbol{\varphi}_{\text{R}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & e^{-i(j-1)\delta} \mathbf{E} \\ \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_{\text{I}} \\ \boldsymbol{\varphi}_{\text{R}} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_j \boldsymbol{\varphi}_{\text{Seg}} \quad (\text{B.64})$$

ersetzt, vgl. auch PETROV [123]. Die auf diese Weise transformierten Strukturmatrizen werden ebenfalls komplex und ergeben sich aus

$$\mathbf{K}_{\text{Seg},j} = \mathbf{T}_j^{\text{H}} \tilde{\mathbf{K}}_{\text{Seg}} \mathbf{T}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{II}} & \mathbf{K}_{\text{IR}} + e^{-i(j-1)\delta} \mathbf{K}_{\text{IL}} \\ \mathbf{K}_{\text{RI}} + e^{i(j-1)\delta} \mathbf{K}_{\text{LI}} & \mathbf{K}_{\text{LL}} + \mathbf{K}_{\text{RR}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.65})$$

und entsprechend definierter komplexer Massenmatrix $M_{\text{Seg},j}$. Die Formulierung des zugehörigen Eigenwertproblems für verschiedene, die Phasenlage zwischen den Verschiebungen zweier benachbarter Segmente kennzeichnenden Werte j erfolgt analog zu Gl. (B.50) durch

$$(A_{\text{Seg},j} - \Lambda E) \boldsymbol{\varphi}_{\text{Seg},j} = \mathbf{0} \quad (\text{B.66})$$

mit Hilfe der komplexen Systemmatrix

$$A_{\text{Seg},j} = M_{\text{Seg},j}^{-1} K_{\text{Seg},j}. \quad (\text{B.67})$$

Diese Matrizen $A_{\text{Seg},j}$ entsprechen für $j = 1(1)n_S$ exakt den mit der vollständigen Systemmatrix A aus Gl. (B.51) gebildeten Matrizen D_j aus Gl. (B.34), sodass $\boldsymbol{\varphi}_{\text{Seg},j} = \boldsymbol{\varphi}_j$ gilt. Die Herleitung erfolgte allerdings sehr viel effizienter ohne Verwendung der u. U. sehr viele Freiheitsgrade umfassenden Strukturmatrizen des Gesamtsystems.

Eine Auswertung des mit der reduzierten Systemmatrix $A_{\text{Seg},j}$ gebildeten komplexen Eigenwertproblems erfolgt durch die Überführung in ein rein reelles Eigenwertproblem doppelter Dimension mit

$$\begin{bmatrix} \text{Re}\{A_{\text{Seg},j}\} & -\text{Im}\{A_{\text{Seg},j}\} \\ \text{Im}\{A_{\text{Seg},j}\} & \text{Re}\{A_{\text{Seg},j}\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Re}\{\boldsymbol{\varphi}_{\text{Seg},j}\} \\ \text{Im}\{\boldsymbol{\varphi}_{\text{Seg},j}\} \end{bmatrix} = \Lambda_{\text{Seg},j} \begin{bmatrix} \text{Re}\{\boldsymbol{\varphi}_{\text{Seg},j}\} \\ \text{Im}\{\boldsymbol{\varphi}_{\text{Seg},j}\} \end{bmatrix}, \quad j = 1(1)n_S. \quad (\text{B.68})$$

Hierzu ist die Definition eines identischen Duplikates des einzelnen betrachteten Segments notwendig, sodass sich ein 'reelles' und ein 'imaginäres' System ergibt, siehe **Bild B.1**. Die den Real- und Imaginärteil repräsentierenden Segmente sind über die entsprechend in reeller Form definierten Zwangsbedingungen aus Gl. (B.64) miteinander gekoppelt. Aufgrund der Kenntnis der doppelt auftretenden Eigenwerte und der zugehörigen konjugiert komplexen Eigenvektoren für $j \neq 1, j \neq \frac{n_S}{2} + 1$, erfolgt eine Eigenwertberechnung aus praktischen Gesichtspunkten nur für $j = 1(1)(\frac{n_S}{2} + 1)$ bzw. für die Knotendurchmesser $ND = 0(1)(\frac{n_S}{2})$. Werden die so bestimmten Eigenvektoren $\boldsymbol{\varphi}_{\text{Seg},j}$ eines Segments für verschiedene Werte j in den Modalmatrizen $\boldsymbol{\Phi}_j$ zusammengefasst, ergeben sich die Eigenvektoren $\boldsymbol{\psi}$ des Gesamtsystems durch Expansion gemäß Gl. (B.54).

Hinsichtlich der Normierung der Eigenvektoren ist anzumerken, dass die Massennormierung der komplexen Eigenvektoren des zyklischen Segments

$$\boldsymbol{\varphi}_{\text{Seg}}^H M_{\text{Seg}} \boldsymbol{\varphi}_{\text{Seg}} = m_{\text{gen, Seg}} = 1 \quad (\text{B.69})$$

nach Expansion auf die komplexen Eigenvektoren und die reelle Massenmatrix des Gesamtsystems auf die generalisierte Masse

$$\boldsymbol{\psi}^H M \boldsymbol{\psi} = m_{\text{gen}} = n_S \quad (\text{B.70})$$

führt, siehe auch die Anmerkungen zu Gl. (B.46) auf Seite 188 und die ausführliche Darstellung von WILDHEIM [181]. Sollen die nach Gl. (B.69) normierten und anschließend expandierten Segmenteigenvektoren zur Untersuchung des Gesamtsystems herangezogen werden, ist eine entsprechende Multiplikation mit dem Faktor $\sqrt{\frac{1}{n_S}}$ erforderlich, um

trix L , sodass sich das spezielle Eigenwertproblem

$$(A^\diamond - \lambda E) \boldsymbol{\varphi}^\diamond = \mathbf{0} \quad (\text{B.72})$$

mit $A^\diamond = L^{-1}KL^{-T}$ und $\boldsymbol{\varphi}^\diamond = L^T \boldsymbol{\varphi}$ ergibt, vgl. Gl. (2.18). Hierbei bleibt die Symmetrie der entstehenden Matrix A^\diamond erhalten, sie ist im Allgemeinen aber nicht mehr block-zyklisch. In Verbindung mit der statischen GUYAN-Reduktion ist dieses Verfahren beispielsweise in ANSYS implementiert, siehe [6]. Alternativ erfolgt die praktische Berechnung der Eigenwerte von Gl. (B.49) bzw. Gl. (B.66) für große Matrizen mit Hilfe von Finite-Element-Programmen unter Anwendung spezieller iterativer Gleichungslöser wie sehr effiziente Subspace- oder Block-LANCZOS-Solver, siehe [6], auf die an dieser Stelle aber nicht weiter eingegangen werden soll. Entscheidend ist in allen Fällen die erhebliche Verminderung des Rechenaufwandes durch die Reduktion des Gesamtsystems auf nur ein Segment einschließlich seines Duplikates, sodass sich die Anzahl der zu berücksichtigenden Freiheitsgrade um den Faktor $\frac{n_S}{2}$ reduziert.

C Besetzung der modalen Systemkontaktsteifigkeitsmatrix

Nach Ausmultiplikation des in Gl. (2.179) auf Seite 87 angegebenen Matrizenproduktes ergibt sich die modale Systemkontaktsteifigkeitsmatrix

$$\hat{\mathcal{K}}_K = \hat{G}_\phi^H \hat{K}_{KG} \hat{G}_\phi = \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{K}}_{K,GG} & {}^{(1)}\hat{\mathcal{K}}_{K,GD} & {}^{(2)}\hat{\mathcal{K}}_{K,GD} & \cdots & {}^{(n_S)}\hat{\mathcal{K}}_{K,GD} \\ {}^{(1)}\hat{\mathcal{K}}_{K,DG} & {}^{(1)}\hat{\mathcal{K}}_{K,DD} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ {}^{(2)}\hat{\mathcal{K}}_{K,DG} & \mathbf{0} & {}^{(2)}\hat{\mathcal{K}}_{K,DD} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ {}^{(n_S)}\hat{\mathcal{K}}_{K,DG} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & {}^{(n_S)}\hat{\mathcal{K}}_{K,DD} \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{K}}_{K,GG} = & \sum_{k=1}^{n_S} \left({}^{(k)}\hat{\boldsymbol{\phi}}_{OL,G}^H {}^{(k)}\mathbf{G}_{SL}^T {}^{(k)}\hat{K}_{K,OL} {}^{(k)}\mathbf{G}_{SL} {}^{(k)}\hat{\boldsymbol{\phi}}_{OL,G} \right. \\ & \left. + {}^{(k)}\hat{\boldsymbol{\phi}}_{OR,G}^H {}^{(k-1)}\mathbf{G}_{SR}^T {}^{(k-1)}\hat{K}_{K,OR} {}^{(k-1)}\mathbf{G}_{SR} {}^{(k)}\hat{\boldsymbol{\phi}}_{OR,G} \right), \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

$$\begin{aligned} {}^{(k)}\hat{\mathcal{K}}_{K,DD} = & {}^{(k)}\hat{\boldsymbol{\phi}}_{OL',D}^H {}^{(k)}\mathbf{G}_{DL}^T {}^{(k)}\hat{K}_{K,OL} {}^{(k)}\mathbf{G}_{DL} {}^{(k)}\hat{\boldsymbol{\phi}}_{OL',D} \\ & + {}^{(k)}\hat{\boldsymbol{\phi}}_{OR',D}^H {}^{(k)}\mathbf{G}_{DR}^T {}^{(k)}\hat{K}_{K,OR} {}^{(k)}\mathbf{G}_{DR} {}^{(k)}\hat{\boldsymbol{\phi}}_{OR',D}, \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

$$\begin{aligned}
{}^{(k)}\hat{\mathcal{K}}_{K,GD} &= -{}^{(k)}\hat{\boldsymbol{\phi}}_{OL,G}^H {}^{(k)}\mathbf{G}_{SL}^T {}^{(k)}\hat{\mathcal{K}}_{K,OL} {}^{(k)}\mathbf{G}_{DL} {}^{(k)}\hat{\boldsymbol{\phi}}_{OL',D} \\
&\quad - {}^{(k+1)}\hat{\boldsymbol{\phi}}_{OR,G}^H {}^{(k)}\mathbf{G}_{SR}^T {}^{(k)}\hat{\mathcal{K}}_{K,OR} {}^{(k)}\mathbf{G}_{DR} {}^{(k)}\hat{\boldsymbol{\phi}}_{OR',D}
\end{aligned} \tag{C.4}$$

und

$$\begin{aligned}
{}^{(k)}\hat{\mathcal{K}}_{K,DG} &= -{}^{(k)}\hat{\boldsymbol{\phi}}_{OL',D}^H {}^{(k)}\mathbf{G}_{DL}^T {}^{(k)}\hat{\mathcal{K}}_{K,OL} {}^{(k)}\mathbf{G}_{SL} {}^{(k)}\hat{\boldsymbol{\phi}}_{OL,G} \\
&\quad - {}^{(k)}\hat{\boldsymbol{\phi}}_{OR',D}^H {}^{(k)}\mathbf{G}_{DR}^T {}^{(k)}\hat{\mathcal{K}}_{K,OR} {}^{(k)}\mathbf{G}_{SR} {}^{(k+1)}\hat{\boldsymbol{\phi}}_{OR,G}
\end{aligned} \tag{C.5}$$

mit $k = 1(1)n_S$, wobei $k - 1 = n_S$ für $k = 1$ und $k + 1 = 1$ für $k = n_S$ aufgrund der zyklischen Symmetrie gilt. Die reellen Geometriematrizen \mathbf{G} nach Gln. (2.7) und (2.8) sowie die u. U. komplexen Modalmatrizen $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ stellen für jede Schaufel bzw. jeden Kontakt konstante Größen dar. Die individuellen Kontaktsteifigkeitsmatrizen $\hat{\mathcal{K}}_{K,OL}$ bzw. $\hat{\mathcal{K}}_{K,OR}$ nach Gl. (2.163) sind nichtlinear von den Relativverschiebungen $\hat{\boldsymbol{w}}$ im Kontakt und somit von den modalen Amplituden $\hat{\boldsymbol{q}}$ abhängig. Der Zählindex (k) der in Gl. (C.2) bis Gl. (C.5) gegebenen Größen folgt der Vereinbarung von Seite 86.

Aus der Struktur der Matrix $\hat{\mathcal{K}}_K$ lässt sich unmittelbar die Kopplung der als Gesamtsystem behandelten beschaufelten Scheibe mit den einzelnen Dämpfern ersehen. An dieser Stelle sei bemerkt, dass die komplexe Matrix $\hat{\mathcal{K}}_K$ im Allgemeinen *keine* Symmetrieeigenschaften aufweist. Insbesondere ist ${}^{(k)}\hat{\mathcal{K}}_{K,GD} \neq {}^{(k)}\hat{\mathcal{K}}_{K,DG}^H$, da die individuellen Kontaktsteifigkeitsmatrizen ${}^{(k)}\hat{\mathcal{K}}_{K,OL}$ bzw. ${}^{(k)}\hat{\mathcal{K}}_{K,OR}$ nach Gl. (2.163) nicht hermitesch sind. Würden diese in einen separaten Real- und Imaginärteil aufgespalten, ergäben sich analog zu Gl. (C.1) zwei komplexe *hermitesche* Matrizen $\hat{\mathcal{K}}_K^{\text{real}}$ und $\hat{\mathcal{K}}_K^{\text{imag}}$, wobei die aus dem Realteil der ${}^{(k)}\hat{\mathcal{K}}_K$ hervorgehende Matrix $\hat{\mathcal{K}}_K^{\text{real}}$ die modale Steifigkeitsmatrix und die aus den Imaginärteilen hervorgehende Matrix $\hat{\mathcal{K}}_K^{\text{imag}}$ die modale Dämpfungsmatrix der Reibkontakte repräsentiert. Mit der schiefhermiteschen Matrix $i\hat{\mathcal{K}}_K^{\text{imag}}$ ergibt sich dann durch Summation eine im Allgemeinen beliebige Matrix $\hat{\mathcal{K}}_K = \hat{\mathcal{K}}_K^{\text{real}} + i\hat{\mathcal{K}}_K^{\text{imag}}$.

D Modale Parameter des Referenzmodells

In **Tabelle D.1** sind die modalen Parameter der Referenzschaufel zusammengefasst. Diese umfassen die massennormierten Eigenvektoren des linken und rechten Kontaktpunktes, des Erregerknotens und der Schaufelspitze, vgl. **Bild 3.1**, sowie die modalen Dämpfungen und Eigenfrequenzen der ersten zehn Schwingungsformen¹.

¹Die Knotenverdrehungen wurden unmittelbar unter Verwendung des ANSYS-Elements SOLID73 ermittelt, siehe auch die Fußnote auf Seite 100. Eine Approximation nach Gl. (2.212) führt aufgrund der geringen Verformung der Fußplatten auf einen vernachlässigbaren Fehler nach Gl. (2.215).

Tabelle D.1: Modale Parameter der Referenzschaufel

Mode	f_S [Hz]	D_S [-]	Kn.	φ_{u_x}	φ_{u_y}	φ_{u_z}	φ_{φ_x}	φ_{φ_y}	φ_{φ_z}
1 (1F)	95.83	0.0015	OL	0.0210	0.0577	0.0706	-3.1920	1.1780	0.0287
			OR	0.0210	0.0577	-0.0706	-3.1920	1.1780	-0.0287
			E	0.4945	1.3450	0.0474	-22.8300	8.0980	0.9870
			R	1.2940	3.5340	0.0000	-26.0500	9.9710	0.0000
2 (2F)	529.89	0.0015	OR	-0.1495	-0.4102	0.4989	22.6900	-8.3250	0.2078
			OL	-0.1495	-0.4102	-0.4989	22.6900	-8.3250	-0.2078
			E	-0.7972	-2.2290	0.0481	-26.1200	10.3300	9.7580
			R	1.1750	3.2140	0.0000	-83.3100	28.2700	0.0000
3 (1T)	695.28	0.0015	OL	0.0234	-0.0005	0.0038	-0.4331	-0.3519	1.1410
			OR	-0.0234	0.0005	0.0038	0.4331	0.3519	1.1410
			E	-0.8752	-3.0830	-0.0635	30.4400	-8.0720	123.5000
			R	0.0000	0.0000	-0.0006	0.0000	0.0000	189.7000
4 (3F)	1165.50	0.0015	OL	0.2954	0.8498	1.0220	-46.8100	16.2400	0.6326
			OR	0.2954	0.8498	-1.0220	-46.8100	16.2400	-0.6326
			E	-0.7995	-1.4140	-0.1991	48.9500	-21.5000	12.8700
			R	0.3846	3.0170	0.0000	-99.0900	33.6200	0.0000
5 (1E)	1179.10	0.0015	OL	-0.1274	-0.1366	-0.1731	8.2740	-7.2770	1.1630
			OR	-0.1274	-0.1366	0.1731	8.2740	-7.2770	-1.1630
			E	-1.2950	0.8045	-0.5296	-18.1400	-15.3200	-2.6980
			R	-3.5000	0.6578	0.0000	12.2300	-29.1900	0.0000
6 (2T)	2173.40	0.0015	OL	-0.0903	0.0020	-0.0139	1.5540	1.2910	-4.4160
			OR	0.0903	-0.0020	-0.0139	-1.5540	-1.2910	-4.4160
			E	1.0530	3.7150	-0.1400	83.1100	-18.6200	-150.8000
			R	0.0000	0.0000	-0.0017	0.0000	0.0000	213.9000
7 (4F)	2195.80	0.0015	OL	-0.2324	-0.6342	-0.7497	34.9700	-12.6000	-0.2143
			OR	-0.2324	-0.6342	0.7497	34.9700	-12.6000	0.2143
			E	0.2550	0.7353	-0.2586	126.3000	-43.8200	-6.4050
			R	1.2620	3.5220	0.0000	-168.8000	63.9500	0.0000
8 (3T)	3885.40	0.0015	OL	0.2783	-0.0062	0.0386	-3.9650	-3.5240	13.6700
			OR	-0.2783	0.0062	0.0386	3.9650	3.5240	13.6700
			E	0.6034	2.1330	0.3427	-197.5000	44.6200	-88.7900
			R	0.0000	0.0000	-0.0040	0.0000	0.0000	246.4000
9 (5F)	3998.30	0.0015	OL	0.1482	0.4117	0.4638	-22.5200	7.7490	0.0845
			OR	0.1482	0.4117	-0.4638	-22.5200	7.7490	-0.0845
			E	0.9231	2.7870	0.0659	-37.3000	15.7400	-45.5000
			R	1.4550	3.8670	0.0000	-257.3000	86.3700	0.0000
10 (2E)	5353.90	0.0015	OL	0.5935	-0.1885	-0.0809	0.0590	16.8500	-16.8900
			OR	0.5935	-0.1885	0.0809	0.0590	16.8500	16.8900
			E	1.8190	-0.6276	-0.6744	-21.7300	-59.1200	-4.3440
			R	-2.6260	1.0810	0.0000	-37.5600	-74.0500	0.0000

Literatur

- [1] ABBOTT, E. J. ; FIRESTONE, F. A.: Specifying Surface Quality. In: *Mech. Eng. ASME* 55 (1933), S. 569
- [2] AFOLABI, D.: Vibration Amplitudes of Mistuned Blades. In: *Journal of Turbomachinery* 110 (1988), S. 251–257
- [3] AFOLABI, D. ; ALABI, B.: Catastrophe Theory, Curve Veering and the Vibration of Bladed Disks. In: *Proc. Instn. Mech. Engrs., Part C*. Bd. 206, 1992, S. 143–144
- [4] ALLEN, R. C.: *Turbine Blading*. U.S. Patent No. 1,554,614, 1925
- [5] AMONTONS, M.: Über den Widerstand in Maschinen. In: *Memoires de L'Académie Royale de Sciences* (1699), S. 203–222
- [6] *Ansys 6.1 Documentation*. Ansys Inc., 2002
- [7] ARRAO, A. S. ; NOURSE, J. G.: *Blade-to-Blade Vibration Damper*. U.S. Patent No. 4,936,749, 1990
- [8] BALMER, B.: *Erhöhung der Dämpfung von Turbinenschaufeln durch Reibelemente*. Fortschrittberichte VDI, Reihe 11: Schwingungstechnik, Nr. 197. Düsseldorf : VDI-Verlag, 1993
- [9] BERRUTI, T. ; FILIPPI, S. ; GOLA, M. M. ; SALVANO, S.: *Friction Damping of Interlocked Vane Segments: Experimental Results*. ASME Paper 2001-GT-0432, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., New Orleans, 2001
- [10] BERRUTI, T. ; FILIPPI, S. ; GOLA, M. M. ; SALVANO, S.: *Friction Damping of Interlocked Vane Segments: Validation of Friction Model and Dynamic Response*. ASME Paper GT-2002-30324, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., Amsterdam, 2002
- [11] BERRUTI, T. ; GOGLIO, L. ; FILIPPI, S. ; GOLA, M. M.: *Forced Vibrations of Frictionally Damped Stator Segments*. ASME Paper 99-GT-412, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., Indianapolis, 1999
- [12] BERRUTI, T. ; GOGLIO, L. ; FILIPPI, S. ; GOLA, M. M.: *A Test Rig for Frictionally Damped Bladed Segments*. ASME Paper 2000-GT-538, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., München, 2000
- [13] BERTHILLIER, M. ; DUPONT, C. ; MONDA, R. ; BARRAU, J. J.: Blades Forced Response Analysis with Friction Dampers. In: *Trans. ASME, Journal of Vibration and Acoustics* 120 (1998), S. 468–474

- [14] BLADH, R. ; CASTANIER, M. P. ; PIERRE, C.: *Reduced Order Modeling and Vibration Analysis of Mistuned Bladed Disk Assemblies with Shrouds*. ASME Paper 98-GT-484, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., Stockholm, 1998
- [15] BLADH, R. ; CASTANIER, M. P. ; PIERRE, C.: *Component-Mode-Based Reduced Order Modeling Techniques for Mistuned Bladed Disks, Part I: Theoretical Models*. ASME Paper 2000-GT-360, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., München, 2000
- [16] BLADH, R. ; CASTANIER, M. P. ; PIERRE, C.: *Component-Mode-Based Reduced Order Modeling Techniques for Mistuned Bladed Disks, Part II: Application*. ASME Paper 2000-GT-361, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., München, 2000
- [17] BOBO, M.: *Vibration Damping of Gas Turbine Engine Buckets*. U.S. Patent No. 5,156,528, 1992
- [18] BRÉARD, C. ; GREEN, J. S. ; VAHDATI, M. ; IMREGUN, M.: *A Resonance Tracking Algorithm for the Prediction of Turbine Forced Response with Friction Dampers*. ASME Paper 2000-GT-372, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., München, 2000
- [19] BREWER, M. E. ; CASTANIER, M. P. ; PIERRE, C.: *Effects of Harmonic Intentional Mistuning on the Free Response of Bladed Disks*. ASME Paper DETC99/VIB-8012. In: *Proc. of ASME 1999 Design Engineering Technical Conferences*. Las Vegas, 1999
- [20] BRONSTEIN, I. N. ; SEMENDJAJEW, K. A.: *Taschenbuch der Mathematik*. 23. Auflage. Leipzig : Teubner, 1987
- [21] BRUNS, J.-U.: *Detektion und Identifikation von Nichtlinearitäten in mechanischen Schwingungssystemen*. Fortschrittberichte VDI, Reihe 11: Schwingungstechnik, Nr. 324. Düsseldorf : VDI-Verlag, 2004
- [22] CAMERON, T. M. ; GRIFFIN, J. H. ; KIELB, R. E. ; HOOSAC, T. M.: *An Integrated Approach for Friction Damper Design*. In: *Trans. ASME, Journal of Vibration and Acoustics* 112 (1990), S. 175–182
- [23] CASTANIER, M. P. ; ÓTTARSSON, G. ; PIERRE, C.: *A Reduced-Order Modeling Technique for Mistuned Bladed Disks*. In: *J. of Vibration and Acoustics* 119 (1997), Nr. 3, S. 439–447
- [24] CATTANEO, C.: *Sul Contatto di Due Corpi Elastici: Distribuzione Locale degli Sforzi*. In: *Rend. Accad. naz. Lincei* 27 (1938), Nr. 6, S. 342–348, 434–436, 474–478
- [25] CHA, D. ; SINHA, A.: *Computation of the Optimal Normal Load of a Friction Damper under Different Types of Excitation*. ASME Paper 99-GT-413, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., Indianapolis, 1999
- [26] CHA, D. ; SINHA, A.: *Statistics of Responses of a Mistuned and Frictionally Damped Bladed Disk Assembly Subjected to White Noise and Narrow Band Excitations*. ASME Paper 2000-GT-542, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., München, 2000
- [27] CHA, D. ; SINHA, A.: *Computation of the Optimal Normal Load for a Mistuned and Frictionally Damped Bladed Disk Assembly under Different Types of Excitation*. ASME

- Paper 2001-GT-0278, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., New Orleans, 2001
- [28] CHEN, J. J. ; MENQ, C. H.: *Prediction of the Resonant Response of Frictionally Constrained Blade Systems Using Constrained Mode Shapes*. ASME Paper 98-GT-548, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., Stockholm, 1998
- [29] CHEN, J. J. ; MENQ, C. H.: *Prediction of Periodic Response of Blades Having 3D Nonlinear Shroud Constraints*. ASME Paper 99-GT-288, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., Indianapolis, 1999
- [30] CHEN, S. ; SINHA, A.: Probabilistic Method to Compute the Optimal Slip Load for a Mistuned Bladed Disk Assembly with Friction Dampers. In: *ASME Journal of Vibration and Acoustics* 112 (1990), S. 214–221
- [31] CHLADNY, E. F. F.: *Entdeckungen über die Theorie des Klanges*, 1787
- [32] CHOI, B.-K. ; LENTZ, J. ; RIVAS-GUERRA, A. J. ; MIGNOLET, M. P.: *Optimization of Intentional Mistuning Patterns for the Reduction of the Forced Response Effects of Unintentional Mistuning: Formulation and Assessment*. ASME Paper 2001-GT-0293, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., New Orleans, 2001
- [33] COULOMB, C. A.: *Théorie des machines simples, en ayant égard au frottement de leurs parties, et à la roideur des cordages*. In: *Mémoires de mathématique et de physique, présentés à L'Académie Royale des Sciences* (1785), S. 161–342
- [34] CRAIG JR., R. R. ; BAMPTON, M. C. C.: Coupling of Substructures for Dynamic Analysis. In: *AIAA Journal* 6 (1968), Nr. 7, S. 1313–1319
- [35] CRAIG JR., R. R. ; CHANG, C. J.: *On the Use of Attachment Modes in Substructure Coupling for Dynamic Analysis*. AIAA/ASME Paper, pres. at the 18th Structure, Structural Dynamics and Material Conf., 1977
- [36] CSABA, G.: Forced Response Analysis in Time and Frequency Domains of a Tuned Bladed Disk with Friction Dampers. In: *J. of Sound and Vibration* 214 (1998), Nr. 3, S. 395–412
- [37] CSABA, G.: *Modelling of a Microslip Friction Damper Subjected to Translation and Rotation*. ASME Paper 99-GT-149, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., Indianapolis, 1999
- [38] CSABA, G. ; ANDERSSON, M.: *Optimization of Friction Damper Weight, Simulation and Experiment*. ASME Paper 97-GT-115, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., Orlando, 1997
- [39] D'AMBROSIO, F. ; CHATELET, E. ; RAVOUX, J. ; JACQUET-RICHARDET, G.: *Forced Response of Shrouded Bladed Disc Assemblies: A Jointed Experimental Numerical Approach*. ASME Paper GT2004-53705, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., Wien, 2004
- [40] DAVIS, P. J.: *Circulant Matrices*. 2nd Edition. New York : Chelsea Publishing, 1994

- [41] DIETZ, S. ; KNOTHE, K.: Reduktion der Anzahl der Freiheitsgrade in Finite-Element-Substrukturen / Institut für Luft- und Raumfahrt der Technischen Universität Berlin, ILR-Mitteilung 315. 1997. – Forschungsbericht
- [42] DODD, A. G. ; PATEMAN, E.: *Aerofoil Blade Damping*. U.S. Patent No. 4,917,574, 1990
- [43] DOWSON, D.: *History of Tribology*. 2nd Edition. London : Professional Engineering Publishing, 1998
- [44] EBERHARD, P.: *Kontaktuntersuchungen durch hybride Mehrkörpersystem / Finite Elemente Simulationen*. Aachen : Shaker Verlag, 2000
- [45] EICH-SOELLNER, E. ; FÜHRER, C.: *Numerical Methods in Multibody Dynamics*. Stuttgart : B. G. Teubner, 1998
- [46] ELSNER, W.: Schäden im Heißgaspfad von Gasturbinen und ihre Ursachen. In: *Allianz Report für Risiko und Sicherheit* 71 (1998), Nr. 2, S. 97–103
- [47] ENGELN-MÜLLGES, G. ; REUTER, F.: *Formelsammlung zur Numerischen Mathematik mit Standard-FORTRAN 77-Programmen*. 6., völlig neu bearb. und erw. Auflage. Mannheim : BI Wissenschaftsverlag, 1988
- [48] EWINS, D. J.: The Effects of Detuning upon the Forced Vibrations of Bladed Disks. In: *J. of Sound and Vibration* 9 (1969), Nr. 1, S. 65–79
- [49] EWINS, D. J.: A Study of Resonance Coincidence in Bladed Discs. In: *Journal of Mechanical Engineering Science* 12 (1970), Nr. 5, S. 305
- [50] EWINS, D. J.: Vibration Characteristics of Bladed Disc Assemblies. In: *J. Mechanical Engineering Science* 15 (1973), Nr. 3, S. 165–186
- [51] EWINS, D. J.: Structural Dynamic Characteristics of Bladed Assemblies. In: *Von Karman Institute Fluid Dynamics Lecture Series 1992/06: Vibration and Rotor Dynamics*. 1992
- [52] EWINS, D. J.: *Modal Testing: Theory and Practice*. Taunton : Research Studies Press Ltd., 1995
- [53] FEINER, D. M. ; GRIFFIN, J. H.: *A Fundamental Model of Mistuning for a Single Family of Modes*. ASME Paper GT-2002-30425, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., Amsterdam, 2002
- [54] FEINER, D. M. ; GRIFFIN, J. H.: *Mistuning Identification of Bladed Disks Using a Fundamental Mistuning Model - Part I: Theory*. ASME Paper GT2003-38952, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., Atlanta, 2003
- [55] FEINER, D. M. ; GRIFFIN, J. H.: *Mistuning Identification of Bladed Disks Using a Fundamental Mistuning Model - Part II: Application*. ASME Paper GT2003-38953, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., Atlanta, 2003
- [56] FILIPPI, S. ; AKAY, A. ; GOLLA, M. M.: Measurement of Tangential Contact Hysteresis During Microslip. In: *Journal of Tribology, Trans. ASME* 126 (2004), S. 482–489

- [57] FINDEISEN, B.: *Eigenschwingungsanalyse von diskreten Strukturen mit Methoden der Freiheitsgradreduktion*, Technische Universität Chemnitz, Diss., 1991
- [58] FLANDERS, W. B.: *Vibration Dampener*. U.S. Patent No. 2,310,412, 1943
- [59] GASCH, R. ; KNOTHE, K.: *Strukturdynamik. Band 1: Diskrete Systeme*. Berlin : Springer-Verlag, 1987
- [60] GASCH, R. ; KNOTHE, K.: *Strukturdynamik. Band 2: Kontinua und ihre Diskretisierung*. Berlin : Springer-Verlag, 1989
- [61] GAUL, L. ; NITSCHKE, R.: Dynamics of Structures with Joint Connections. In: EWINS, D. J.; INMAN, D. J. (Hrsg.): *Structural Dynamics 2000: Current Status and Future Directions*. Baldock : Research Studies Press Ltd., 2001, S. 29–48
- [62] GOLDMAN, R. L.: Vibration Analysis by Dynamic Partitioning. In: *AIAA Journal* 7 (1969), S. 1152–1154
- [63] GÖTTING, F.: *Analyse des Schwingungsverhaltens von verstimmten Beschaufelungen mit Reibelementen*. Fortschrittberichte VDI, Reihe 11: Schwingungstechnik, Nr. 327. Düsseldorf : VDI-Verlag, 2005
- [64] GREENWOOD, J. A. ; WILLIAMSON, J. B. P.: Contact of Nominally Flat Surfaces. In: *Proc. Roy. Soc. London, A* 295 (1966), S. 300–319
- [65] GRIFFIN, J. H.: Friction Damping of Resonant Stresses in Gas Turbine Engine Airfoils. In: *Trans. ASME, J. of Engineering for Power* 102 (1980), S. 329–333
- [66] GRIFFIN, J. H.: An Analytical Comparison of Blade-to-Blade and Blade-to-Ground Dampers for Use in Gas Turbine Engines. In: *Proceedings of the 8th Canadian Congress of Applied Mechanics*. Moncton, 1981, S. 405–406
- [67] GRIFFIN, J. H. ; LABELLE, R. F.: *A Rational Method for Optimizing Shroud Damping*. ASME Paper 96-GT-402, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., Birmingham, 1996
- [68] GRIFFIN, J. H. ; SINHA, A.: *The Interaction between Mistuning and Friction in the Forced Response of Bladed Disk Assemblies*. ASME Paper 84-GT-139, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., Amsterdam, 1984
- [69] GUILLEN, J. ; PIERRE, C.: An Efficient, Hybrid, Frequency-Time Domain Method for the Dynamics of Large-Scale Dry-Friction Damped Structural Systems. In: PFEIFFER, F. ; GLOCKER, C. (Hrsg.): *IUTAM Symposium on Unilateral Multibody Contacts*, Kluwer Academic Publishers, 1999, S. 169–178
- [70] GUILLEN, J. ; PIERRE, C. ; LAGRANGE, T.: An Advanced Damper Model for the Dynamics of Dry Friction Damped Systems. ASME Paper DETC99/VIB-8083. In: *Proc. of ASME 1999 Design Engineering Technical Conferences*. Las Vegas, 1999
- [71] GUYAN, R. J.: Reduction of Stiffness and Mass Matrices. In: *AIAA Journal* 3 (1965), Nr. 2, S. 380

- [72] HAJEK, M.: *Reibungsdämpfer für Turbinenschaufeln*. Fortschrittberichte VDI, Reihe 11: Schwingungstechnik, Nr. 128. Düsseldorf : VDI-Verlag, 1990
- [73] HERTZ, H.: Über die Berührung fester elastischer Körper. In: *J. für die reine und angewandte Mathematik* 92 (1881), S. 156–171
- [74] HOU, S. N.: Review of Modal Synthesis Techniques and a New Approach. In: *Shock and Vibration Bulletin* 40 (1969), Nr. 4, S. 25–39
- [75] HÖXTERMANN, E.: *Ausführung von Dämpfungselementen an Dampfturbinenbeschaufelungen*. VGB Technisch-wissenschaftliche Berichte Wärmekraftwerke. Essen : VGB Technische Vereinigung der Großkraftwerksbetreiber e.V., 1991
- [76] HURTY, W. C.: Dynamic Analysis of Structural Systems Using Component Modes. In: *AIAA Journal* 3 (1965), Nr. 4, S. 678–685
- [77] IRRETIER, H.: Spectral Analysis of Mistuned Bladed Disk Assemblies by Component Mode Synthesis. In: *Proc. 'Vibrations of Bladed Disk Assemblies' of ASME 9th Conf. on Mech. Vibr. and Noise*. Dearborn, 1983, S. 115–125
- [78] IWAN, W. D.: On a Class of Models for the Yielding Behaviour of Continuous and Composite Systems. In: *J. Appl. Mech.* 34 (1967), Nr. 3, S. 612–617
- [79] JARELAND, M. H.: *A Parametric Study of a Cottage Roof Damper and Comparison with Experimental Results*. ASME Paper 2001-GT-0275, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., New Orleans, 2001
- [80] JARELAND, M. H.: Experimental Investigation of a Platform Damper with Curved Contact Areas. ASME Paper DETC2001/VIB-21391. In: *Proc. of ASME 2001 Design Engineering Technical Conference and Computers and Information in Engineering Conference*. Pittsburgh, 2001
- [81] JARELAND, M. H. ; CSABA, G.: *Friction Damper Mistuning of a Bladed Disk and Optimization with Respect to Wear*. ASME Paper 2000-GT-363, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., München, 2000
- [82] JAROSCH, J.: *Beitrag zum Schwingungsverhalten gekoppelter Schaufelsysteme*. Stuttgart, Institut für Thermische Strömungsmaschinen und Maschinenlaboratorium der Universität Stuttgart, Diss., 1983
- [83] JI, B. H. ; ZHANG, G. H. ; WANG, L. T. ; YUAN, Q. ; MENG, Q. J. ; LIU, D. Y.: Experimental Investigation of the Dynamic Characteristics of the Damped Blade. In: *J. of Sound and Vibration* 213 (1998), Nr. 2, S. 223–234
- [84] JOHNSON, K. L.: *Contact Mechanics*. Cambridge : Cambridge University Press, 1989
- [85] JUDGE, J. ; PIERRE, C. ; MEHMED, O.: *Experimental Investigation of Mode Localization and Forced Response Amplitude Magnification for a Mistuned Bladed Disk*. ASME Paper 2000-GT-358, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., München, 2000

- [86] KENYON, J. A. ; GRIFFIN, J. H. ; FEINER, D. M.: *Maximum Bladed Disk Forced Response from Distortion of a Structural Mode*. ASME Paper 2002-GT-30426, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., Amsterdam, 2002
- [87] KENYON, J. A. ; GRIFFIN, J. H. ; KIM, N. E.: *Sensitivity of Tuned Bladed Disk Response to Frequency Veering*. ASME Paper GT2004-53280, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., Wien, 2004
- [88] KLAMT, K.: *Zur optimalen Schwingungsdämpfung durch trockene Reibung in lokalen und ausgedehnten Fügestellen*. Fortschrittberichte VDI, Reihe 11: Schwingungstechnik, Nr. 134. Düsseldorf : VDI-Verlag, 1990
- [89] KNOTHE, K. ; WESSELS, H.: *Finite Elemente. Eine Einführung für Ingenieure*. 3. Auflage. Berlin : Springer-Verlag, 1999
- [90] KOH, K.-H. ; GRIFFIN, J. H. ; FILIPPI, S. ; AKAY, A.: *Characterization of Turbine Blade Friction Dampers*. ASME Paper GT2004-53278, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., Wien, 2004
- [91] KRUSE, M. J. ; PIERRE, C.: *Forced Response of Mistuned Bladed Disks Using Reduced-Order Modeling*. In: *Proc. of the 37th AIAA/ASME Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference Part 4*. Salt Lake City, 1996, S. 1938–1950
- [92] KRUSE, M. J. ; PIERRE, C.: *Localization in Bladed Disks, Part II: Forced Response*. ASME Paper 97-GT-502, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., Orlando, 1997
- [93] KRZYŻIŃSKI, T. ; POPP, K. ; SEXTRO, W.: *On Some Regularities in Dynamic Response of Cyclic Periodic Structures*. In: *Chaos, Solitons and Fractals* 11 (2000), Nr. 10, S. 1597–1609
- [94] KUANG, J. H. ; HUANG, B. W.: *Mode Localization in a Grouped Bladed Disk*. ASME Paper 2000-GT-369, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., München, 2000
- [95] LECHNER, C. ; SEUME, J. (Hrsg.): *Stationäre Gasturbinen*. Berlin : Springer, 2003
- [96] LIM, S.-H. ; CASTANIER, M. P. ; PIERRE, C.: *Intentional Mistuning Design Space Reduction Based on Vibration Energy Flow in Bladed Disks*. ASME Paper GT2004-53873, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., Wien, 2004
- [97] LIN, C.-C. ; MIGNOLET, M. P.: *Effects of Damping and Damping Mistuning on the Forced Vibration Response of Bladed Disks*. In: *J. of Sound and Vibration* 193 (1996), Nr. 2, S. 525–543
- [98] MACNEAL, R. H.: *A Hybrid Method of Component Mode Synthesis*. In: *Computers & Structures* 1 (1971), Nr. 4, S. 581–601
- [99] MAGNUS, K. ; POPP, K.: *Schwingungen*. 5., völlig neu bearb. und erw. Auflage. Stuttgart : Teubner Studienbücher, 1997
- [100] MARUGABANDHU, P. ; GRIFFIN, J. H.: *A Reduced Order Model for Evaluating the Effect of Rotational Speed on the Natural Frequencies and Mode Shapes of Blades*. ASME Paper 2000-GT-611, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., München, 2000

- [101] MASING, G.: Zur Heynschen Theorie der Verfestigung der Metalle durch verborgene elastische Spannungen. In: *Wiss. Veröffentlichungen aus dem Siemens-Konzern* 3 (1923/24), Nr. 1, S. 231–239
- [102] MENQ, C. H. ; BIELAK, J. ; GRIFFIN, J. H.: The Influence of Microslip on Vibratory Response, Part I: A New Microslip Model. In: *J. of Sound and Vibration* 107 (1986), Nr. 2, S. 279–293
- [103] MENQ, C. H. ; GRIFFIN, J. H. ; BIELAK, J.: *The Influence of a Variable Normal Load on the Forced Vibration of a Frictionally Damped Structure*. ASME Paper 85-GT-63, Int. Gas Turbine Conference and Exhibit., Houston, 1985
- [104] MENQ, C. H. ; GRIFFIN, J. H. ; BIELAK, J.: The Influence of Microslip on Vibratory Response, Part II: A Comparison with Experimental Results. In: *J. of Sound and Vibration* 107 (1986), Nr. 2, S. 295–307
- [105] MENQ, C. H. ; YANG, B. D.: Non-linear Spring Resistance and Friction Damping of Frictional Constraint Having Two-dimensional Motion. In: *J. of Sound and Vibration* 217 (1998), Nr. 1, S. 127–143
- [106] MIGNOLET, M. P. ; DELOR, J. P. ; RIVAS-GUERRA, A.: *Identification of Mistuning Characteristics of Bladed Disks from Free Response Data - Part II*. ASME Paper 99-GT-382, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., Indianapolis, 1999
- [107] MIGNOLET, M. P. ; RIVAS-GUERRA, A.: *Identification of Mistuning Characteristics of Bladed Disks from Free Response Data*. ASME Paper 98-GT-583, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., Stockholm, 1998
- [108] MINDLIN, R. D.: Compliance of Elastic Bodies in Contact. In: *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* 16 (1949), S. 259–268
- [109] MOHAMAD, A. H. ; RAVOUX, J. ; JACQUET-RICHARDET, G.: Forced Response of Disks Due to Distributed Pressure Fields. ASME Paper DETC2001/VIB-21392. In: *Proc. of ASME 2001 Design Engineering Technical Conference and Computers and Information in Engineering Conference*. Pittsburgh, 2001
- [110] MOYROUD, F. ; FRANSSON, T. ; JACQUET-RICHARDET, G.: *A Comparison of Two Finite Element Reduction Techniques for Mistuned Bladed Disks*. ASME Paper 2000-GT-362, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., München, 2000
- [111] MUELLER, P. W. ; STEVENSON, J. T. ; PANOVSKY, J. ; GLYNN, C. C. ; PARK, S. Y. ; WINES, D. E.: *Blade Damper*. U.S. Patent No. 5,226,784, 1993
- [112] MÜLLER, G. ; VALK, M.: Spitzentechnologie Gasturbine: Schadenmechanismen, -häufigkeiten und -kosten. In: *Allianz Report für Risiko und Sicherheit* 73 (2000), Nr. 5, S. 307–317
- [113] MUSZYNSKA, A. ; JONES, D. I. G.: On Tuned Bladed Disk Dynamics: Some Aspects of Friction Related Mistuning. In: *J. of Sound and Vibration* 86 (1983), Nr. 1, S. 107–128
- [114] NELSON, C. J.: *Turbine Blade Damper*. U.S. Patent No. 4,182,598, 1980

- [115] OTTL, D.: *Schwingungen mechanischer Systeme mit Strukturdämpfung*. VDI Forschungsheft Nr. 603. Düsseldorf : VDI-Verlag, 1981
- [116] PANNING, L.: *Schwingungsverhalten von Turbinenschaufeln mit Reibelementen*, Institut für Mechanik, Universität Hannover, Diplomarbeit, 1998. – unveröffentlicht
- [117] PANNING, L. ; POPP, K. ; SEXTRO, W. ; GÖTTING, F. ; WOLTER, I. ; KAYSER, A.: *Asymmetrical Underplatform Dampers in Gas Turbine Bladings: Theory and Application*. ASME Paper GT2004-53316, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., Wien, 2004
- [118] PANNING, L. ; SEXTRO, W. ; POPP, K.: *Optimization of Interblade Friction Damper Design*. ASME Paper GT-2000-541, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., München, 2000
- [119] PANNING, L. ; SEXTRO, W. ; POPP, K.: *Optimization of the Contact Geometry between Turbine Blades and Underplatform Dampers with Respect to Friction Damping*. ASME Paper GT-2002-30429, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., Amsterdam, 2002
- [120] PANNING, L. ; SEXTRO, W. ; POPP, K.: *Spatial Dynamics of Tuned and Mistuned Bladed Disk Assemblies with Cylindrical and Wedge Shaped Friction Dampers*. In: *Proc. of ISROMAC-9, The 9th International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics*, Paper DD-028. Honolulu, 2002
- [121] PANNING, L. ; SEXTRO, W. ; POPP, K.: *Design of friction dampers for mistuned bladed disks*. In: *PAMM Proc. Appl. Math. Mech.* 3 (2003), S. 118–119
- [122] PETERSMANN, N.: *Substrukturtechnik und Kondensation bei der Schwingungsanalyse*. Fortschrittberichte VDI, Reihe 11: Schwingungstechnik, Nr. 76. Düsseldorf : VDI-Verlag, 1985
- [123] PETROV, E. P.: *A Method for Use of Cyclic Symmetry Properties in Analysis of Nonlinear Multiharmonic Vibrations of Bladed Discs*. ASME Paper 2003-GT-38480, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., Atlanta, 2003
- [124] PETROV, E. P. ; EWINS, D. J.: *Analysis of the Worst Mistuning Patterns in Bladed Disc Assemblies*. ASME Paper 2001-GT-0292, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., New Orleans, 2001
- [125] PETROV, E. P. ; EWINS, D. J.: *Analytical Formulation of Friction Interface Elements for Analysis of Nonlinear Multi-Harmonic Vibrations of Bladed Discs*. ASME Paper GT-2002-30325, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., Amsterdam, 2002
- [126] PETROV, E. P. ; EWINS, D. J.: *Analytical Formulation of Friction Interface Elements for Analysis of Nonlinear Multi-Harmonic Vibrations of Bladed Discs*. In: *Trans. ASME, Journal of Turbomachinery* 125 (2003), S. 364–371
- [127] PETROV, E. P. ; EWINS, D. J.: *Generic Friction Models for Time-Domain Vibration Analysis of Bladed Discs*. ASME Paper 2003-GT-38475, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., Atlanta, 2003

- [128] PETROV, E. P. ; EWINS, D. J.: *Method for Analysis of Nonlinear Multiharmonic Vibrations of Mistuned Bladed Discs with Scatter of Contact Interface Characteristics*. ASME Paper GT2004-53891, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., Wien, 2004
- [129] PETROV, E. P. ; IGLIN, S. P.: Search of the Worst and Best Mistuning Patterns for Vibration Amplitudes of Bladed Disks by the Optimization Methods Using Sensitivity Coefficients. In: TOROPOV, V. V. (Hrsg.): *Proc. of the 1st ASMO UK/ISSMO Conference: Engineering Design Optimization - Product and Process Improvement*. West Yorkshire : MCB University Press, 1999, S. 303–310
- [130] PFEIFFER, F. ; HAJEK, M.: Stick-Slip Motion of Turbine Blade Dampers. In: *Phil. Trans. R. Soc. Lond., Series A* 338 (1992), Nr. 1651, S. 503–517
- [131] POPP, K.: Nichtlineare Schwingungen mechanischer Strukturen mit Füge- oder Kontaktstellen. In: *Z. angew. Math. Mech.* 74 (1994), Nr. 3, S. 147–165
- [132] POPP, K. ; PANNING, L. ; SEXTRO, W.: Vibration Damping by Friction Forces - Theory and Applications. In: *J. Vibration and Control* 9 (2003), Nr. 3-4, S. 419–448
- [133] REUTER, F.: *Zur modalen Theorie periodisch zeitvarianter Systeme und ihrer experimentellen Umsetzung auf rotierende scheibenförmige Strukturen*. Fortschrittberichte VDI, Reihe 11: Schwingungstechnik, Nr. 241. Düsseldorf : VDI-Verlag, 1997
- [134] RIEHM, S.: *Schwingungen freistehender ND-Endstufenschaufeln einer Kondensationsturbinen im Ventilationsbetrieb*, Lehrstuhl und Institut für Thermische Strömungsmaschinen und Maschinenlaboratorium der Universität Stuttgart, Diss., 1997
- [135] RIPKE, B.: *Hochfrequente Gleismodellierung und Simulation der Fahrzeug-Gleisdynamik unter Verwendung einer nichtlinearen Kontaktmechanik*. Fortschrittberichte VDI, Reihe 12: Verkehrstechnik/Fahrzeugtechnik, Nr. 249. Düsseldorf : VDI-Verlag, 1997
- [136] RIVAS-GUERRA, A. ; MIGNOLET, M. P.: *Local/Global Effects of Mistuning on the Forced Response of Bladed Disks*. ASME Paper 2001-GT-0289, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., New Orleans, 2001
- [137] RIVAS-GUERRA, A. ; MIGNOLET, M. P.: *Maximum Amplification of Blade Response Due to Mistuning: Localization and Mode Shapes Aspects of the Worst Disks*. ASME Paper GT-2002-30323, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., Amsterdam, 2002
- [138] SANLITURK, K. Y. ; EWINS, D. J.: Modelling Two-Dimensional Friction Contact and Its Application Using Harmonic Balance Method. In: *J. of Sound and Vibration* 193 (1996), Nr. 2, S. 511–523
- [139] SANLITURK, K. Y. ; EWINS, D. J. ; ELLIOTT, R. ; GREEN, J. S.: *Friction Damper Optimization: Simulation of Rainbow Tests*. ASME Paper 99-GT-336, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., Indianapolis, 1999
- [140] SANLITURK, K. Y. ; EWINS, D. J. ; STANBRIDGE, A. B.: *Underplatform Dampers for Turbine Blades: Theoretical Modelling, Analysis and Comparison with Experimental Data*.

- ASME Paper 99-GT-335, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., Indianapolis, 1999
- [141] SANLITURK, K. Y. ; IMREGUN, M. ; EWINS, D. J.: Harmonic Balance Vibration Analysis of Turbine Blades with Friction Dampers. In: *Trans. ASME, Journal of Vibration and Acoustics* 119 (1997), S. 96–103
- [142] SCHABER, U.: *Berechnung des Schwingungsverhaltens gekoppelter Rotor-Schaufel-Systeme in Turbomaschinen*, Institut für Thermische Strömungsmaschinen und Maschinenlaboratorium der Universität Stuttgart, Diss., 1995
- [143] SCHMIDT, K. J.: *Eigenschwingungsanalyse gekoppelter elastischer Strukturen*. Fortschrittsberichte VDI, Reihe 11: Schwingungstechnik, Nr. 39. Düsseldorf : VDI-Verlag, 1981
- [144] SCHWERTASSEK, R. ; WALLRAPP, O.: *Dynamik flexibler Mehrkörpersysteme*. Braunschweig/Wiesbaden : Vieweg-Verlag, 1999
- [145] SELLGREN, U. ; BJÖRKLUND, S. ; ANDERSSON, S.: A Finite Element-Based Model of Normal Contact Between Rough Surfaces. In: *Wear* 254 (2003), Nr. 11, S. 1180–1188
- [146] SEXTRO, W.: Schwingungsverhalten eines Schaufelkranzes mit Reibelementen bei Frequenzverstimmung / FVV Heft R 485. Nürnberg, 1995. – Zwischenbericht
- [147] SEXTRO, W.: *Schwingungsverhalten von Schaufelkranzen mit Reibelementen bei Frequenzverstimmung*. Fortschrittsberichte VDI, Reihe 11: Schwingungstechnik, Nr. 245. Düsseldorf : VDI-Verlag, 1997
- [148] SEXTRO, W.: Forced Vibration of Elastic Structures with Friction Contacts. ASME Paper DETC99/VIB-8180. In: *Proc. of ASME 1999 Design Engineering Technical Conferences*. Las Vegas, 1999
- [149] SEXTRO, W.: *The Calculation of the Forced Response of Shrouded Blades with Friction Contacts and Its Experimental Verification*. ASME Paper 2000-GT-540, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., München, 2000
- [150] SEXTRO, W.: *Dynamical Contact Problems with Friction*. Lecture Notes in Applied Mechanics Vol. 3. Berlin : Springer-Verlag, 2002
- [151] SEXTRO, W.: Optimierung des Schwingungsverhaltens elastischer Strukturen mit Reibfugen am Beispiel von Turbomaschinenbeschaufelungen (*Resonanzfeste Beschaufelungen*) / FVV Heft 753. Frankfurt am Main, 2003. – Abschlussbericht
- [152] SEXTRO, W. ; POPP, K.: Dynamical Behaviour of a Bladed Disk with Friction Dampers. In: *Proc. of EUROMECH, The 2nd European Nonlinear Oscillation Conference*. Prag, 1996
- [153] SEXTRO, W. ; POPP, K. ; KRZYŻYŃSKI, T.: Localization in Nonlinear Mistuned Systems with Cyclic Symmetry. In: *Nonlinear Dynamics* 25 (2001), Nr. 4, S. 207–220
- [154] SEXTRO, W. ; POPP, K. ; WOLTER, I.: *Improved Reliability of Bladed Disks Due to Friction Dampers*. ASME Paper 97-GT-189, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., Orlando, 1997

- [155] SEXTRO, W. ; POPP, K. ; WOLTER, I.: Three-dimensional Vibration of Bladed Disk Assemblies with Friction Dampers. In: *Proceedings of ISROMAC-7, Vol. B*. Honolulu, 1998
- [156] SHAPIRO, B.: *Passive Control of Flutter and Forced Response in Bladed Disks via Mistuning*. Pasadena, California Institute of Technology, Diss., 1999
- [157] SIEWERT, C.: *Anwendung der Harmonischen Balance auf den nichtlinearen Reibkontakt mit fluktuierender Normalkraft*, Institut für Mechanik, Universität Hannover, Projektarbeit, 2003. – unveröffentlicht
- [158] SOLLMANN, H.: *Schaufelschwingungen axialer Turbomaschinen, Band B*, Universität Dresden, Diss., 1978
- [159] SRINIVASAN, A. V. ; CUTTS, D. G.: Measurement of Relative Vibratory Motion at the Shroud Interfaces of a Fan. In: *Trans. ASME, J. of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design* 106 (1984), S. 189–197
- [160] STANBRIDGE, A. B. ; EWINS, D. J. ; SANLITURK, K. Y. ; FERREIRA, J. V.: Experimental Investigation of Dry Friction Damping and Cubic Stiffness Non-Linearity. ASME Paper DETC2001/VIB-21556. In: *Proc. of ASME 2001 Design Engineering Technical Conference and Computers and Information in Engineering Conference*. Pittsburgh, 2001
- [161] STELTER, P.: *Nichtlineare Schwingungen reibungserregter Strukturen*. Fortschrittberichte VDI, Reihe 11: Schwingungstechnik, Nr. 137. Düsseldorf : VDI-Verlag, 1990
- [162] STOIBER, J. ; ELSNER, W.: Reparatur von Gasturbinenschaufeln: Technische Machbarkeit versus Wirtschaftlichkeit. In: *Allianz Report für Risiko und Sicherheit* 72 (1999), Nr. 2, S. 108–118
- [163] SZWEDOWICZ, J.: *Cyclic Finite Element Modeling of Shrouded Turbine Blades Including Frictional Contacts*. ASME Paper 99-GT-92, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., Indianapolis, 1999
- [164] SZWEDOWICZ, J. ; KISSEL, M. ; RAVINDRA, B. ; KELLERER, R.: *Estimation of Contact Stiffness and Its Role in the Design of a Friction Damper*. ASME Paper 2001-GT-0290, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., New Orleans, 2001
- [165] SZWEDOWICZ, J. ; SEXTRO, W. ; VISSER, R. ; MASSEREY, P. A.: *On Forced Vibration of Shrouded Turbine Blades*. ASME Paper 2003-GT-38808, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., Atlanta, 2003
- [166] THOMAS, D. L.: Dynamics of Rotationally Periodic Structures. In: *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering* 14 (1979), S. 81–102
- [167] TRAUPEL, W.: *Thermische Turbomaschinen*. Bd. 2. 3. Auflage. Berlin : Springer-Verlag, 1982
- [168] TREYDE, T.: *Modellierung des Kontaktes zwischen den Deckplatten von Turbinenschaufeln*. Fortschrittberichte VDI, Reihe 11: Schwingungstechnik, Nr. 224. Düsseldorf : VDI-Verlag, 1995

- [169] URLICHS, K. ; AMANN, J. ; SCHMITZ, H. J.: Erwungene Biegeschwingungen verwundener Schaufeln mit Dämpferdraht. In: *VDI Berichte* (1985), Nr. 572.2, S. 163–179
- [170] VALK, M. ; WEISSER, H.: Schäden an Strömungsmaschinen. In: *VDI-Berichte* (1998), Nr. 1421, S. 1–23
- [171] WANG, J. H.: Design of a Friction Damper to Control Vibration of Turbine Blades. In: GURAN, A. ; PFEIFFER, F. ; POPP, K. (Hrsg.): *Dynamics with Friction: Modeling, Analysis and Experiment. Series on Stability, Vibration and Control of Systems, Series B, Vol. 7.* World Scientific Publishing Company, 2000
- [172] WANG, J. H. ; CHEN, W. K.: Investigation of the Vibration of a Blade with Friction Damper by HBM. In: *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 115 (1993), S. 294–299
- [173] WANG, J. H. ; SHIEH, W. L.: The Influence of a Variable Friction Coefficient on the Dynamic Behavior of a Blade with a Friction Damper. In: *J. of Sound and Vibration* 149 (1991), Nr. 1, S. 137–145
- [174] WEI, S. T. ; PIERRE, C.: Localization Phenomena in Mistuned Assemblies with Cyclic Symmetry. Part I: Free Vibrations. In: *Trans. ASME, Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design* 110 (1988), S. 429–438
- [175] WEI, S. T. ; PIERRE, C.: Localization Phenomena in Mistuned Assemblies with Cyclic Symmetry. Part II: Forced Vibrations. In: *Trans. ASME, Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design* 110 (1988), S. 439–449
- [176] WEISSER, H.: Risikotechnische Beurteilung moderner Kombinations- und Verbundkraftwerke. In: *Allianz Report* 69 (1996), Nr. 5, S. 164–171
- [177] WEISSER, H.: Moderne Gasturbinenkraftwerke - größer, schneller, billiger: Auswirkungen aus der Sicht eines Versicherers. In: *Allianz Report für Risiko und Sicherheit* 72 (1999), Nr. 1, S. 24–33
- [178] WHITEHEAD, D. S.: Effect of Mistuning on the Vibration of Turbomachine Blades Induced by Wakes. In: *J. Mech. Eng. Sci.* 8 (1966), Nr. 1, S. 15–21
- [179] WHITEMAN, W. E. ; FERRI, A. A.: Multi-Mode Analysis of Beam-Like Structures Subjected to Displacement-Dependent Dry Friction Damping. In: *J. of Sound and Vibration* 207 (1997), Nr. 3, S. 403–418
- [180] WILDHEIM, S. J.: Excitation of Rotationally Periodic Structures. In: *Journal of Applied Mechanics* 46 (1979), Nr. 4, S. 878–882
- [181] WILDHEIM, S. J.: *Dynamics of Circumferentially Periodic Structures*, Division of Mechanical Engineering Design, Department of Mechanical Engineering, Linköping University, Diss., 1981
- [182] WILDHEIM, S. J.: Excitation of Rotating Circumferentially Periodic Structures. In: *J. of Sound and Vibration* 75 (1981), Nr. 3, S. 397–416

- [183] WILLIAMS, E. J. ; EARLES, S. W. E.: Optimization of the Response of Frictionally Damped Beam Type Structures with Reference to Gas Turbine Compressor Bladings. In: *J. of Engineering for Industry* 24 (1972), S. 445–458
- [184] WILLNER, K.: *Ein statistisches Modell für den Kontakt metallischer Körper*, Bericht aus dem Institut für Mechanik, Universität der Bundeswehr Hamburg, Diss., 1995
- [185] WINKLER, E.: *Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit*. Prag : Dominicus, 1867
- [186] WISBROCK, H.: *Untersuchungen zur Fugendämpfung zusammengesetzter Bauteile*. Fortschrittberichte VDI, Reihe 11: Schwingungstechnik, Nr. 68. Düsseldorf : VDI-Verlag, 1985
- [187] WITTENBURG, J.: *Schwingungslehre. Lineare Schwingungen, Theorie und Anwendungen*. Berlin : Springer-Verlag, 1996
- [188] WOLTER, I.: *Experimentelle Untersuchung des Schwingungsverhaltens von Turbinen-Laufschaukeln unter realen Betriebsbedingungen mit und ohne Kopplung durch einen eingelegten 'Dämpferdraht'*, Institut für Thermische Strömungsmaschinen und Maschinenlaboratorium der Universität Stuttgart, Diss., 1980
- [189] WRIGGERS, P.: Finite Element Algorithms for Contact Problems. In: *Archives of Computational Methods in Engineering* 2 (1995), Nr. 4, S. 1–49
- [190] YANG, B. D.: *Contact Kinematics of Friction Interfaces and Applications to the Prediction of Resonant Response of Frictionally Constrained Turbine Blades*, The Ohio State University, Diss., 1996
- [191] YANG, B. D. ; CHEN, J. J. ; MENQ, C. H.: *Prediction of Resonant Response of Shrouded Blades with 3D Shroud Constraint*. ASME Paper 98-GT-485, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., Stockholm, 1998
- [192] YANG, B. D. ; CHU, M. L. ; MENQ, C. H.: Stick-Slip-Separation Analysis and Non-linear Stiffness and Damping Characterization of Friction Contacts Having Variable Normal Load. In: *J. of Sound and Vibration* 210 (1998), Nr. 4, S. 461–481
- [193] YANG, B. D. ; MENQ, C. H.: *Modeling of Friction Contact and Its Application to the Design of Shroud Contact*. ASME Paper 96-GT-472, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., Birmingham, 1996
- [194] YANG, B. D. ; MENQ, C. H.: *Characterization of Contact Kinematics and Application to the Design of Wedge Dampers in Turbomachinery Blading, Part I: Stick-Slip Contact Kinematics*. ASME Paper 97-GT-19, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., Orlando, 1997
- [195] YANG, B. D. ; MENQ, C. H.: *Characterization of Contact Kinematics and Application to the Design of Wedge Dampers in Turbomachinery Blading, Part II: Prediction of Forced Response and Experimental Verification*. ASME Paper 97-GT-20, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., Orlando, 1997

- [196] YANG, B. D. ; MENQ, C. H.: Characterization of 3D Contact Kinematics and Prediction of Resonant Response of Structures Having 3D Frictional Constraint. In: *J. of Sound and Vibration* 217 (1998), Nr. 5, S. 909–925
- [197] YANG, M.-T. ; GRIFFIN, J. H.: *A Reduced Order Model of Mistuning Using a Subset of Nominal System Modes.* ASME Paper 99-GT-288, Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress & Exh., Indianapolis, 1999
- [198] ZMITROVICZ, A.: A Vibration Analysis of a Turbine Blade System Damped by Dry Friction Forces. In: *Int. J. Mech. Sci.* 23 (1981), Nr. 12, S. 741–761
- [199] ZMITROVICZ, A.: A Note on Natural Vibrations of Turbine Blade Assemblies with Non-continuous Shroud Rings. In: *J. of Sound and Vibration* 192 (1996), Nr. 2, S. 521–533
- [200] ZURMÜHL, R. ; FALK, S.: *Matrizen und ihre Anwendungen. Teil 1: Grundlagen.* 5., überarb. und erw. Auflage. Berlin : Springer-Verlag, 1984

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name Lars Panning
geboren am 24. Dezember 1970
in Hannover
Staatsangehörigkeit deutsch
Familienstand ledig
Anschrift Darwinstraße 2, 30165 Hannover
E-Mail lars.panning@web.de

Schulbildung

1977-1981 Grundschule Vinnhorst, Hannover
1981-1983 Orientierungsstufe an der Uhlandschule, Hannover
1983-1990 Gymnasium Lutherschule, Hannover
1990 Allgemeine Hochschulreife

Grundwehrdienst

1990-1991 Instandsetzungsausbildungskompanie 6/1, Hannover,
und Flugabwehrregiment 8/1, Langenhagen

Studium

1991-1998 Studium des Maschinenbaus, Fachrichtung Energietechnik,
und der Wirtschaftswissenschaften an der Universität Hannover
1993 Vordiplom Maschinenbau
1995 Vordiplom Wirtschaftswissenschaften
1998 Diplom Maschinenbau,
Auszeichnung mit dem Dr.-Jürgen-Ulderup-Preis 1998

Praktika

Juni 1991 Sorst Blechverarbeitung, Hannover
August/Sept. 1991 Continental AG, Reifenherstellung, Hannover
Januar-März 1998 Stadtwerke Hannover AG, Kraftwerk Herrenhausen

Berufliche Tätigkeit

1994-1997 Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Mechanik,
Universität Hannover
1998-2004 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik,
Universität Hannover