

**A posteriori Fehlerschätzer
für elektromagnetische Kopplungsprobleme
in drei Dimensionen**

Vom Fachbereich Mathematik
der Universität Hannover
zur Erlangung des Grades
Doktor der Naturwissenschaften
Dr. rer. nat.

genehmigte Dissertation

von

Dipl.-Math. Matthias T. Teltscher

geboren am 17.09.1972 in Langen (Hessen)

2003

Referent: Prof. Dr. E. P. Stephan, Universität Hannover
Korreferent: Prof. Dr. C. Carstensen, TU Wien
Tag der Promotion: 28.10.2002

Zusammenfassung

Gegenstand dieser Arbeit ist die Erstellung von residualen und hierarchischen a posteriori Fehlerschätzern für zeitharmonische elektromagnetische FEM-BEM-Kopplungsprobleme auf Lipschitz-regulären Gebieten Ω im \mathbb{R}^3 .

Dabei betrachten wir zuerst eine symmetrische gekoppelte variationelle Formulierung zu einem Wirbelstromproblem (Hiptmair 2000) in einem beschränkten Leiter Ω mit Rand Γ . Die Unbekannten sind das zu einem vorgegebenen Induktionsstrom sich einstellende elektrische Feld $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$ und die Randvariable $\boldsymbol{\lambda} := \mathbf{curl} \mathbf{E} \times \mathbf{n} \in \mathbf{curl}_\Gamma H^{1/2}(\Gamma)$. Für das Galerkin-Verfahren werden die konformen Finite-Element-Räume $\mathcal{ND}_1 \subset \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$ und $\mathbf{curl}_\Gamma \mathcal{S}_1 \subset \mathbf{curl}_\Gamma H^{1/2}(\Gamma)$ verwendet. Hierbei bezeichnen \mathcal{ND}_1 den Raum der Nédélec-Elemente erster Ordnung und \mathcal{S}_1 den Raum der global stetigen, stückweise bilinearen Splines.

Danach betrachten wir eine weitere Kopplungsformulierung, diesmal zu einem Streuproblem (Levillain 1991, Ammari & Nédélec 1999) für einen stark verlustbehafteten Körper Ω_C , der von einer dielektrischen Schicht Ω_D umgeben ist. Gesucht werden das Gesamtfeld $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega_D)$ und die Randvariable $\boldsymbol{\lambda} := \mathbf{curl} \mathbf{E} \times \mathbf{n} \in \mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma_D)$ auf dem äußeren Rand Γ_D . Für das Galerkin-Verfahren verwendet man Nédélec-Elemente $\mathcal{ND}_1 \subset \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega_D)$ und Raviart-Thomas-Elemente $\mathcal{RT}_1 \subset \mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma_D)$.

Für beide Formulierungen konstruieren wir p -hierarchische und residuale Fehlerschätzer. Die hierarchischen Fehlerschätzer beruhen auf stabilen Zerlegungen der „höheren“ Ansatzräume \mathcal{ND}_2 und $\mathbf{curl}_\Gamma \mathcal{S}_2$ bzw. \mathcal{RT}_2 und setzen Saturationsannahmen voraus. Hierfür zeigen wir Zuverlässigkeit und Effizienz. Die residualen Fehlerschätzer beruhen auf L^2 -Abschätzungen der Residuen. Man erhält Terme auf Volumenelementen und deren Seitenflächen, in denen die singulären, schwach singulären und hypersingulären Randintegraloperatoren aus den variationellen Formulierungen vorkommen. Hierfür zeigen wir Zuverlässigkeit.

Beide a posteriori Fehlerschätzer berücksichtigen sowohl die Finiten Elemente wie auch die Randelemente. Durch die Anwendung von adaptiven Methoden für Kopplungsprobleme auf elektromagnetische Problemstellungen erweitern wir Ergebnisse von Hiptmair & Wohlmuth (1999) und von Carstensen & Stephan (1996,1997).

Schließlich belegen wir Zuverlässigkeit und Effizienz des residualen Fehlerschätzers (für die h -Version) zum Wirbelstromproblem durch numerische Tests. Für verschiedene rechte Seiten, für verschiedene Werte der elektrischen Konduktivität σ , und auf Hexaeder- wie auf Tetraeder-Gitter stellen wir die erwartete Konvergenzrate von 1 des Galerkinverfahrens und des Fehlerschätzers fest. Ein Beispiel mit adaptiver Verfeinerung rechtfertigt die Verwendung des Fehlerschätzers als Fehlerindikator.

Schlagwörter. Maxwell-Gleichungen, symmetrische Kopplung, a posteriori Fehlerschätzer

Abstract

This thesis is concerned with the construction of residual and hierarchical a posteriori error estimators for time-harmonic electromagnetic fem-bem coupling problems on Lipschitz regular domains in \mathbb{R}^3 .

We first consider a symmetric coupled variational formulation for an eddy current problem (Hiptmair 2000) in a bounded conductor Ω with boundary Γ . The unknowns are the electric field $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$ resulting from a given inducing current and the boundary variable $\boldsymbol{\lambda} := \mathbf{curl} \mathbf{E} \times \mathbf{n} \in \mathbf{curl}_\Gamma H^{1/2}(\Gamma)$. For the Galerkin method we use the conforming finite element spaces $\mathcal{ND}_1 \subset \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$ and $\mathbf{curl}_\Gamma \mathcal{S}_1 \subset \mathbf{curl}_\Gamma H^{1/2}(\Gamma)$. Here \mathcal{ND}_1 denotes the spaces of first degree Nédélec elements and \mathcal{S}_1 the space of globally continuous, piecewise bilinear splines.

We then consider a further coupling formulation, now pertaining to a scattering problem (Levillain 1991, Ammari & Nédélec 1999) for a highly lossy body Ω_C surrounded by a dielectric layer Ω_D . We search the total field $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega_D)$ and the boundary variable $\boldsymbol{\lambda} := \mathbf{curl} \mathbf{E} \times \mathbf{n} \in \mathbf{TH}_\parallel^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma_D)$ on the exterior boundary Γ_D . For the Galerkin method we use Nédélec elements $\mathcal{ND}_1 \subset \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega_D)$ and Raviart-Thomas elements $\mathcal{RT}_1 \subset \mathbf{TH}_\parallel^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma_D)$.

We construct p -hierarchical and residual error estimators for both formulations. The hierarchical error estimators rely on stable decompositions of the “richer” ansatz spaces \mathcal{ND}_2 and $\mathbf{curl}_\Gamma \mathcal{S}_2$ resp. \mathcal{RT}_2 and require a saturation assumption. For these estimators we show reliability and efficiency. The residual error estimators are based on L^2 -estimates of the residuals. We obtain terms on the volume elements and their faces in which the singular, weakly singular and hypersingular boundary integral operators of the variational formulations appear. For this we prove reliability.

Both a posteriori error estimators take into consideration the finite elements as well as the boundary elements. By applying adaptive methods for coupling problems to electromagnetic problems we extend the results of Hiptmair & Wohlmuth (1999) and of Carstensen & Stephan (1996,1997).

Finally, we underline reliability and efficiency of the residual error estimator (for the h -version of the fem-bem coupling) for the eddy current problem through numerical tests. Using various right hand sides, different values for the electric conductivity σ and hexahedral as well as tetrahedral grids we assert the expected convergence rate of 1 for the Galerkin method and for the error estimator. An example using adaptive mesh refinement justifies the use of the error estimator as error indicator.

Key words. Maxwell’s equations, symmetric coupling, a posteriori error estimators

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	11
1.1. Einführung	11
1.2. Überblick über die vorliegende Arbeit	13
2. Die Maxwell-Gleichungen	19
2.1. Räume und Spurooperatoren	19
2.2. Das physikalische Grundproblem	27
3. Diskretisierung	39
3.1. Finite-Element-Räume	40
3.1.1. Diskretisierung von $\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$	40
3.1.2. Diskretisierung von $\mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ und $\mathbf{TH}_{\perp}^{-1/2}(\text{curl}_{\Gamma}, \Gamma)$	44
3.2. Zwei-Level-Zerlegungen und hierarchische Fehlerschätzer	53
3.2.1. Zerlegung von $\mathcal{ND}_2(\mathcal{T}_h)$	54
3.2.2. Zerlegung von $\mathcal{RT}_2(\mathcal{K}_h)$	62
3.3. Interpolationsoperatoren	68
3.4. Hexaedrische Gitter im \mathbb{R}^3 mit hängenden Knoten	82
3.4.1. Verfeinerungsgesetze	84
3.4.2. Basisfunktionen	86
4. Das Eddy-Current-Problem	95
4.1. Problemstellung	95
4.1.1. Das Galerkin-Verfahren	102
4.2. Ein p -hierarchischer Fehlerschätzer	104
4.3. Ein residualer Fehlerschätzer	107

5. Das Streuproblem	119
5.1. Problemstellung	119
5.1.1. Das Galerkin-Verfahren	127
5.2. Ein p -hierarchischer Fehlerschätzer	128
5.3. Ein residualer Fehlerschätzer	132
6. Numerische Experimente	137
7. Ausblick	161
Literaturverzeichnis	165
A. Vektoridentitäten	173
B. Nédélec- und Raviart-Thomas-Räume	175
B.1. Nédélec Räume für $\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$ in drei Dimensionen	175
B.2. Raviart-Thomas-Räume für $\mathbf{H}(\mathbf{div}, \Omega)$ in zwei oder drei Dimensionen . . .	176
B.3. Eigenschaften	177
B.4. Basisfunktionen von \mathcal{ND}_2	179

Symbolverzeichnis

Symbol		Seiten
$(\cdot, \cdot)_\Omega, \langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$:= komplexe Dualitätspaarungen auf Ω bzw. Γ	19
$[\gamma \cdot]_F$:= Sprung über einer Seitenfläche F	108
$[\gamma \cdot]_\Gamma$:= Sprung über Γ	30
$\ \cdot\ _\epsilon$:= Energienorm auf Γ	64
$\ \cdot\ _\epsilon$:= Energienorm in Ω	56
\mathcal{A}	:= Bilinearform, die die variationelle Formulierung beschreibt	104,128
\mathcal{X}	:= Raum der variationellen Formulierung	104,124
\mathcal{X}_h	:= Raum der Galerkin-Formulierung	104,127
curl	:= Rotation	20
curl_Γ	:= skalare Flächenrotation	20
curl $_\Gamma$:= vektorielle Flächenrotation	20
Δ	:= Laplace-Operator	20
$\mathbf{\Delta}$:= vektorieller Laplace-Operator	20
Δ_Γ	:= Laplace-Beltrami-Operator	25
div	:= Divergenz	20
\mathcal{E}, E	:= das elektrische Feld	27,28
ϵ	:= elektrische Permittivität	27
div_Γ	:= Flächendivergenz	20
γ	:= Spur einer Funktion auf Γ	20
γ^+, γ^-	:= Spur aus dem Außenraum, bzw. aus dem Innenraum kommend	30
γ_n	:= Normalenspur	24
γ_N	:= Neumannspur	24
$\gamma_t, \gamma_t^\times$:= Tangentialanteil bzw. gedrehter Tangentialanteil	20
\mathbf{G}_Ω	:= das Vektor-Newton-Potential	35
grad	:= Gradient	20

\mathbf{grad}_Γ	$:=$ Flächengradient	20
\mathcal{H}, H	$:=$ das magnetische Feld	27,28
$\mathcal{H}(\Gamma)$	$:= \{u \in H^1(\Gamma)/\mathbb{C} : \Delta_\Gamma u \in H^{-1/2}(\Gamma)\}$	25
$\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega),$ $\mathbf{H}(\mathbf{div}, \Omega), \dots$	$:=$ verschiedene Sobolevräume auf Ω	21
\mathcal{J}, J	$:=$ die Stromdichte	27,28
\widehat{K}	$:=$ das Referenzelement zu \mathcal{K}_h	44,48
\mathcal{K}	$:= \gamma_t^+ \mathbf{K}$	31
$\tilde{\mathcal{K}}$	$:= \gamma_N^+ \mathbf{V}$	31
\mathcal{K}_h	$:=$ eine reguläre Triangulierung von Γ	44
\mathbf{K}	$:=$ das Vektordoppelschichtpotential	31
\mathcal{L}	$:=$ Funktional, das die rechte Seite der variationellen Formulierung beschreibt	104,128
μ	$:=$ magnetische Permeabilität	27
$\mathbf{M}(\Omega)$	$:= \mathbf{H}_0(\mathbf{div} 0, \Omega) \cap \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$	24
$\mathbf{n}(\mathbf{x})$	$:=$ die Normale zu Γ in $\mathbf{x} \in \Gamma$	19
N_h^0	$:=$ Interpolationsoperator nach $\mathcal{TND}_0(\mathcal{K}_h)$	74
$\mathcal{ND}_k(T), \mathcal{ND}_k(\mathcal{T}_h)$	$:=$ lokaler bzw. globaler Raum der Nédélec-Elemente von der Ordnung k	40,42
ω	$:=$ Frequenz	27
$\Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	$:=$ Fundamentallösung der Helmholtz-Gleichung mit Wellenzahl k	29
p_h^1	$:=$ Interpolationsoperator nach $\mathcal{S}_1(\mathcal{K}_h)$	74
P_h^1	$:=$ Interpolationsoperator nach $\mathcal{S}_1(\mathcal{T}_h)$	69
\mathfrak{P}_h^1	$:=$ Interpolationsoperator nach $\mathcal{ND}_1(\mathcal{T}_h)$	70
$\mathbb{P}_k(T), \mathbb{P}_{k,l,m}(T)$	$:=$ Polynomräume auf T	40,42
R_h^0	$:=$ Interpolationsoperator nach $\mathcal{RT}_0(\mathcal{K}_h)$	74
$\mathcal{RT}_k(K), \mathcal{RT}_k(\mathcal{K}_h)$	$:=$ lokaler bzw. globaler Raum der Raviart-Thomas-Elemente von der Ordnung k	44,48
σ	$:=$ elektrische Konduktivität	27
\mathcal{S}	$:=$ Gradient des skalaren Einfachschichtpotentials	30
$\mathcal{S}_k(\mathcal{T}_h), \mathcal{S}_k(\mathcal{K}_h)$	$:=$ global stetige Splines auf \mathcal{T}_h bzw. auf \mathcal{K}_h	54,63
\mathbf{t}_j	$:=$ die Tangente zur Kante e_j	45
\widehat{T}	$:=$ das Referenzelement zu \mathcal{T}_h	40,42
\mathcal{T}_h	$:=$ eine reguläre Triangulierung von Ω	40,42
$\mathbf{TL}^2(\Gamma),$ $\mathbf{TH}_*^{1/2}(\Gamma), \dots$	$:=$ verschiedene Sobolevräume auf Γ	22,23
$\mathcal{TND}_k(K),$ $\mathcal{TND}_k(\mathcal{K}_h)$	$:=$ lokaler bzw. globaler Raum der Tangentialan- teile der Nédélec-Elemente von der Ordnung k	50
\mathcal{V}	$:= \gamma_t^+ \mathbf{V}$	31

V	:=	das skalare Einfachschichtpotential	29,30
\mathbf{V}	:=	das Vektoreinfachschichtpotential	30
\mathcal{W}	:=	$\gamma_N^+ \mathbf{K}$	31
\mathbf{W}	:=	Rotation des Vektordoppelschichtpotentials	31

1. Einleitung

Das zentrale Anliegen dieser Dissertation ist es, für zwei verschiedene elektromagnetische Kopplungsformulierungen (ein Wirbelstrom- und ein Streuproblem) auf Lipschitz-regulären Gebieten hierarchische und residuale Fehlerschätzer zu finden, und numerische Berechnungen für den residualen Fehlerschätzer für das Wirbelstromproblem durchzuführen. Bevor wir zu dem Aufbau dieser Arbeit kommen, wollen wir zunächst einmal näher beleuchten, worum es hier geht.

1.1. Einführung

Das Verhalten elektromagnetischer Felder in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ mit Rand Γ und elektrischer Permittivität $\epsilon = \epsilon(\mathbf{x}) > 0$, magnetischer Permeabilität $\mu = \mu(\mathbf{x}) > 0$ und elektrischer Konduktivität $\sigma = \sigma(\mathbf{x}) > 0$ wird durch die *Maxwell-Gleichungen* bestimmt. Wir betrachten hier den Fall zeitperiodischer elektromagnetischer Felder, der in vielen Anwendungen eine Rolle spielt. Dazu halten wir eine Frequenz $\omega \in \mathbb{R}$ fest und bezeichnen mit $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{J} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}^3$ das elektrische Feld, das magnetische Feld und die Stromdichte zur Frequenz ω . Die Maxwell-Gleichungen haben dann die Form:

$$\begin{aligned}\mathbf{curl} \mathbf{E} &= i\omega\mu\mathbf{H} \quad \text{in } \Omega, \\ \mathbf{curl} \mathbf{H} &= -i\omega\epsilon\mathbf{E} + \mathbf{J} \quad \text{in } \Omega.\end{aligned}$$

Wir nehmen nun an, daß Ω beschränkt sei. Die naheliegendste variationelle Formulierung hierzu lautet: Finde $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$, so daß

$$(\mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{E}, \mathbf{curl} \mathbf{v})_{\Omega} - \omega^2(\epsilon\mathbf{E}, \mathbf{v})_{\Omega} - i\omega(\sigma\mathbf{E}, \mathbf{v})_{\Omega} = i\omega(\mathbf{J}, \mathbf{v})_{\Omega} + \langle \mu^{-1}\gamma_N\mathbf{E}, \gamma_t\mathbf{v} \rangle_{\Gamma}$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$. Hierbei ist $\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$ der Raum der Funktion aus $\mathbf{L}^2(\Omega)$, deren Rotation ($\mathbf{curl} \mathbf{u} := \nabla \times \mathbf{u}$) wieder in $\mathbf{L}^2(\Omega)$ liegt. Die Spurooperatoren auf Γ sind definiert durch $\gamma_t\mathbf{u} := \mathbf{n} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{n})$, $\gamma_t^{\times}\mathbf{u} := \mathbf{u} \times \mathbf{n}$ und $\gamma_N\mathbf{u} := \gamma_t^{\times}\mathbf{curl} \mathbf{u}$, wobei \mathbf{n} die in den Außenraum gerichtete Normale bezeichnet. Offensichtlich müssen zur Lösung des Problems die Randdaten $\gamma_N\mathbf{E}$ oder $\gamma_t\mathbf{E}$ vorgegeben sein. Möchte man auch den unbeschränkten, als homogen vorausgesetzten Außenraum $\Omega_E := \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ betrachten, so

1. Einleitung

bietet sich dazu die Randelementmethode (BEM) an, die mit Hilfe von Potentialen das Außenraumproblem auf ein Problem auf dem Rand Γ reduziert. Frühe Beispiele von Randelementmethoden bei Maxwell-Problemen in drei Dimensionen finden sich unter anderem bei MacCamy & Stephan [65, 66, 67, 68] und Nédélec [82, 83]. Als Unbekannte treten hierbei meist die Spuren $\gamma_t \mathbf{E}$ oder $\gamma_N \mathbf{E}$ auf, manchmal auch die Normalenspur $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}$ auf Γ . Hervorragende Überblicke über die Theorie der Integralgleichungen zu elektromagnetischen Fragestellungen finden sich bei Colton & Kress [40] und Nédélec [81]. Bei einem Transmissionsproblem, in dem sowohl Ω wie Ω_E betrachtet werden, verbindet man die Formulierungen von Innen- und Außenraum durch die vorgeschriebenen Sprünge der Randdaten über Γ und erhält eine sogenannte (FEM-BEM-)Kopplungsformulierung. Levillain leitet in seiner Dissertation [64] einige Formulierungen für elektromagnetische Kopplungsprobleme her. In allen oben genannten Arbeiten und Monographien wird der Rand Γ als glatt vorausgesetzt. Obwohl sich viele Autoren mit Randelementmethoden für elektromagnetische Fragestellungen auf nicht-glatten Gebieten beschäftigt haben, sind für uns insbesondere die neueren Arbeiten von Buffa, Costabel, Hiptmair und Schwab [32, 30, 58, 59] interessant, denn dort werden die Resultate von Buffa, Ciarlet, Costabel und Sheen [28, 29, 31] über die Spurräume von $\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$ in Polyeder- oder Lipschitzgebieten verwendet. In dieser Dissertation nämlich wollen wir Polyeder-Gebiete (bzw. dazu äquivalente Lipschitz-reguläre Gebiete, also stückweise glatte Gebiete) betrachten.

Nach Erlangung einer variationellen Formulierung stellt sich die Frage nach der Diskretisierung der Funktionenräume. Zur Diskretisierung von $\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$ empfehlen sich die Nédélec-Elemente $\mathcal{ND}_k(\mathcal{T}_h)$ erster Art vom Grad k zu einer Triangulierung \mathcal{T}_h von Ω in Hexaedern (genauer: in Spaten) oder in Tetraedern. $\mathcal{ND}_k(\mathcal{T}_h)$ ist eine echte Teilmenge des Raumes der stückweisen Polynome von Grad k auf \mathcal{T}_h . Zur Diskretisierung der Spurräume bieten sich dann die entsprechenden Spuren von Nédélec-Elementen an. So gelangt man zu dem Raum der verallgemeinerten Raviart-Thomas-Funktionen $\mathcal{RT}_k(\mathcal{K}_h)$ (der auf dem Spurgitter \mathcal{K}_h auf $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ definiert wird). Dieser Raum ist eine echte Teilmenge des Raumes der stückweisen Polynome vom Grad k auf \mathcal{K}_h . Nédélec-Elemente erster Art wurden zuerst in [84] eingeführt, Raviart-Thomas-Elemente in [89]. Finite-Elemente dieser Art werden oft als *Kantenelemente* bezeichnet, da ihre Freiheitsgrade niedrigster Ordnung kantenorientiert sind. Eine Betrachtung dieser Räume aus dem Blickwinkel der Differentialformen (und die Erkenntnis, daß diese Räume in gewissem Sinne natürliche Diskretisierungen der entsprechenden kontinuierlichen Räume darstellen) bietet Hiptmair [54]. Eine erste Erweiterung dieser Räume sind die Nédélec-Elemente zweiter Art [85], die den ganzen Polynomraum vom Grade k ausnutzen. Als weitere, sehr flexible Verallgemeinerung existieren die *hp*-Elemente von Demkowicz et al. (vgl. [44, 45, 46, 47] und die darin enthaltenen Referenzen) mit lokal variabler (sogar richtungsvariabler) Polynomordnung. In dieser Arbeit bleiben wir bei den Nédélec-Elementen erster Art.

Hat man einmal eine variationelle Formulierung mit zugehörigem Galerkin-Verfahren, so kann man durch eine Folge stets feiner werdender Gitter immer bessere Näherungslösungen finden: die h -Version der Finiten-Element-Methode. Eine solche Gitterfolge kann durch wiederholte uniforme Verfeinerung eines Ursprungsgitters gewonnen werden. Leider sind die so erstellten Gitter gerade bei Funktionen mit singulärem Verhalten nicht optimal – das Gitter ist überall gleich fein, unabhängig vom tatsächlichen lokalen Approximationsfehler. Eine adaptive Gittersteuerung dagegen besteht darin, bei jedem Verfeinerungsschritt im wesentlichen nur die Elemente zu verfeinern, auf denen der Fehler „groß“ ist. Da der exakte Fehler $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_T$ auf einem Element T aber unbekannt ist, braucht man eine Näherung, einen sogenannten lokalen Fehlerschätzer η_T . Wir betrachten hier zwei Arten von lokalen Fehlerschätzern, hierarchische und residuale. Eine gute Einführung und Übersicht über verschiedene Techniken zur a-posteriori-Fehlerabschätzung im allgemeinen findet man bei Verfürth [94]. Einen Überblick über Fehlerschätzer insbesondere für Kantenelemente im Elektromagnetismus (und über weitere Literatur zu dem Thema) findet sich in dem Übersichtsartikel [13]. Mit Fehlerschätzern für Kopplungsprobleme haben sich unter anderem Carstensen, Stephan et al [34, 35, 36, 37, 79] beschäftigt.

Hierarchische Fehlerschätzer beruhen auf einer Saturationsannahme und einer Defektkorrektur in einem „reicheren“ Finite-Element-Raum, der sich zerlegen läßt in den ursprünglichen Raum (aus der die Näherungslösung ist) und einem Zusatzraum, bestehend aus entweder Finite-Element-Funktionen auf einem feineren Gitter, also $\mathcal{N}\mathcal{D}_1(\mathcal{T}_{h/2})$ bzw. $\mathcal{RT}_1(\mathcal{K}_{h/2})$ statt $\mathcal{N}\mathcal{D}_1(\mathcal{T}_h)$ bzw. $\mathcal{RT}_1(\mathcal{K}_h)$ (h -hierarchisch) oder Funktionen höheren Grades, also $\mathcal{N}\mathcal{D}_2(\mathcal{T}_h)$ bzw. $\mathcal{RT}_2(\mathcal{K}_h)$ statt $\mathcal{N}\mathcal{D}_1(\mathcal{T}_h)$ bzw. $\mathcal{RT}_1(\mathcal{K}_h)$ (p -hierarchisch), der sich wiederum in lokale Anteile zerlegen läßt. Um Stabilität dieser Zerlegungen zu gewährleisten, muß die Helmholtz-Zerlegung dieser Räume berücksichtigt werden. Ergebnisse hierzu stammen aus den Arbeiten von Hiptmair et al. [13, 15, 55].

Beim residualen Fehlerschätzer wird die Fehlernorm durch die Norm des Residuums abgeschätzt und dann von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß die Defektgleichung als stetiges Funktional betrachtet für jede Funktion aus dem Finiten-Element-Raum Null ergibt. Es gilt, eine diskrete Funktion \mathbf{e}_h zu finden, die möglichst gut den echten Fehler $\mathbf{e} := \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$ approximiert. Dazu sind Interpolationsoperatoren auf $\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$ und seinen Spurräumen nötig. Dabei wird wieder die Helmholtz-Zerlegung herangezogen.

1.2. Überblick über die vorliegende Arbeit

Wir geben in dieser Arbeit erstmalig einen a posteriori Fehlerschätzer für elektromagnetische Kopplungsprobleme mit Hilfe von Finiten Elementen und Randelementen an. Gerade für Lipschitzgebiete gestaltet sich dies etwas umständlich, da nicht nur mit Helmholtz-Zerlegungen in Ω , sondern auch auf dem nicht-glatten Rand Γ gearbeitet

1. Einleitung

werden muß. Im folgenden soll die Gliederung dieser Arbeit dargestellt und dabei erklärt werden, welche Hilfsmittel wir neu erstellt und welche Ergebnisse wir erzielt haben:

Im ersten Abschnitt 2.1 führen wir verschiedene Sobolev-Räume wie $\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$ und $\mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega)$ auf Ω ein, wie auch solche auf dem Rand Γ , insbesondere $\mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ und $\mathbf{TH}_{\perp}^{-1/2}(\operatorname{curl}_{\Gamma}, \Gamma)$. Gleichzeitig definieren wir die Spurooperatoren γ_t , γ_t^{\times} , γ_N und γ_n und die Flächendifferentialoperatoren \mathbf{grad}_{Γ} , \mathbf{curl}_{Γ} , $\operatorname{div}_{\Gamma}$ und $\operatorname{curl}_{\Gamma}$. Die Lemmata 2.1.1 bis 2.1.5 geben Abbildungseigenschaften dieser Spurooperatoren an. Die für diese Arbeit wichtigsten Ergebnisse sind, daß die Abbildungen

$$\begin{aligned}\gamma_t &: \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega) \rightarrow \mathbf{TH}_{\perp}^{-1/2}(\operatorname{curl}_{\Gamma}, \Gamma), \\ \gamma_t^{\times} &: \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega) \rightarrow \mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma)\end{aligned}$$

stetig und surjektiv sind. Die Lemmata 2.1.6 und 2.1.7 befassen sich mit den *Helmholtz-Zerlegungen* dieser Räume. Diesen Zerlegungen kommt nachher bei der Konstruktion der Fehlerschätzer (hierarchischen und residualen) eine zentrale Rolle zu. Die Resultate aus diesem Abschnitt stammen hauptsächlich von Buffa, Ciarlet, Costabel und Sheen [28, 29, 31], die zum Teil Erweiterungen früherer Ergebnisse auf glatten Rändern (Girault & Raviart [50], Alonso & Valli [2], de La Bourdonnaye [22]) darstellen.

Im nächsten Abschnitt 2.2 beschäftigen wir uns dann mit den Maxwell-Gleichungen, definieren die für die Randelementmethode benötigten Randintegraloperatoren und geben dafür in den Lemmata 2.2.2 bis 2.2.10 Abbildungseigenschaften und Sprungbedingungen an. Schließlich zitieren wir in den Lemmata 2.2.11 bis 2.2.14 Darstellungsformeln für die Felder \mathbf{E} und \mathbf{H} auf beschränkten und unbeschränkten Gebieten. Diese Ergebnisse über Randintegraloperatoren auf Polyeder- und Lipschitzgebieten entnehmen wir Arbeiten von Buffa, Costabel, Hiptmair, Mitrea, Pipher und Schwab [32, 30, 58, 76], die wieder Verallgemeinerungen von Ergebnissen auf glatten Rändern von z.B. MacCamy, Levillain, Nédélec und Stephan [64, 68, 86] sind.

Abschnitt 3.1 beschäftigt sich mit der Diskretisierung von $\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$ und seinen Spurräumen $\mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ und $\mathbf{TH}_{\perp}^{-1/2}(\operatorname{curl}_{\Gamma}, \Gamma)$, nämlich $\mathcal{ND}_k(\mathcal{T}_h)$, $\mathcal{RT}_k(\mathcal{K}_h)$ und $\mathcal{TN}\mathcal{D}_k(\mathcal{K}_h)$. Dabei beschränken wir uns in unseren Betrachtungen meist auf den Fall $k = 1$, also auf $\mathcal{ND}_1(\mathcal{T}_h)$, $\mathcal{RT}_1(\mathcal{K}_h)$ und $\mathcal{TN}\mathcal{D}_1(\mathcal{K}_h)$. In diesem und anderen Abschnitten dieser Arbeit werden Ergebnisse für $\mathcal{RT}_1(\mathcal{K}_h)$ und $\mathcal{TN}\mathcal{D}_1(\mathcal{K}_h)$ in der Regel aus Ergebnissen für $\mathcal{ND}_1(\mathcal{T}_h)$ mittels der Spurabbildungen

$$\begin{aligned}\mathcal{ND}_1(\mathcal{T}_h) &\xrightarrow{\gamma_t^{\times}} \mathcal{RT}_1(\mathcal{K}_h), \\ \mathcal{ND}_1(\mathcal{T}_h) &\xrightarrow{\gamma_t} \mathcal{TN}\mathcal{D}_1(\mathcal{K}_h)\end{aligned}$$

erzielt. Die Freiheitsgrade der Finiten-Element-Räume $\mathcal{RT}_1(\mathcal{K}_h)$ und $\mathcal{TN}\mathcal{D}_1(\mathcal{K}_h)$ sind Gegenstand der Lemmata 3.1.2, 3.1.3, 3.1.7 und 3.1.8. Für die Implementierung eines

Galerkin-Verfahrens ist es insbesondere wichtig, die Transformationsgesetze zwischen Basisfunktionen auf einem beliebigen Element und solchen auf dem Referenzelement darzulegen. Für Nédélec-Elemente sind diese Gesetze bekannt, wie auch für Raviart-Thomas Funktionen in der Ebene (die sogenannte Piola-Transformation). Bei unseren verallgemeinerten, auf $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ definierten Spurräumen standen diese Untersuchungen noch aus – wir führen sie in den Lemmata 3.1.4, 3.1.5, 3.1.9 und 3.1.10 durch. Desweiteren zeigen wir in den Lemmata 3.1.6 und 3.1.11 Approximationseigenschaften von $\mathcal{RT}_1(\mathcal{K}_h)$ und $\mathcal{TN}\mathcal{D}_1(\mathcal{K}_h)$ in der $\mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ - bzw. in der $\mathbf{TH}_{\perp}^{-1/2}(\text{curl}_{\Gamma}, \Gamma)$ -Norm, und so insbesondere, daß die Raviart-Thomas-Elemente sich für die Diskretisierung von $\mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ genauso eignen, wie es schon für $\mathbf{H}(\text{div}, \tilde{\Gamma})$, $\tilde{\Gamma} \subset \mathbb{R}^2$ bekannt ist. Diese Approximationssätze gewinnen wir aus der Approximationseigenschaft von $\mathcal{ND}_1(\mathcal{T}_h)$ (Lemma 3.1.1).

Auf die Theorie über hierarchische Fehlerschätzer und stabile Zwei-Level-Zerlegungen von $\mathcal{ND}_2(\mathcal{T}_h)$ und $\mathcal{RT}_2(\mathcal{K}_h)$ wird in Abschnitt 3.2 eingegangen. Aus [13, 15] ist eine p -hierarchische Zerlegung von $\mathcal{ND}_2(\mathcal{T}_h)$ auf Tetraedern bekannt. Wir erweitern hier das Resultat auf Hexaeder. Die in [13, 15] gewählten Unterräume in der Zerlegung erweisen sich dabei als etwas zu „groß“ – die Zerlegung ist für Hexaeder keine direkte Summe mehr, und wir müssen die Räume ein wenig verkleinern. Hierbei ist es uns wichtig, die Basen dieser Räume explizit anzugeben. Dazu dient Abschnitt B.4 im Anhang, in dem wir die Basisfunktionen von $\mathcal{ND}_2(\hat{T})$ aufgelistet haben. Lemma 3.2.1 gibt die Stabilitätsresultate für diese Zerlegungen an, aus denen dann hierarchische Fehlerschätzer zum Problem: *Finde $\mathbf{u} \in \mathcal{ND}_1(\mathcal{T}_h)$, so daß*

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = f(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{ND}_1(\mathcal{T}_h)$$

konstruiert werden. Hierbei ist $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ eine auf $\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega) \times \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$ definierte stetige und positiv definite Bilinearform und $f \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)'$. In Satz 3.2.4 steht die schon bekannte Aussage über Effizienz und Zuverlässigkeit des Fehlerschätzers für tetraedrische Gitter, in Satz 3.2.5 dann das entsprechende Resultat für hexaedrische Gitter mit der von uns gefundenen Zerlegung. Danach verwenden wir die Zerlegungen von $\mathcal{ND}_2(\mathcal{T}_h)$, um durch Spurbildung $\mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ -stabile Zerlegungen von $\mathcal{RT}_2(\mathcal{K}_h)$ für Dreiecks- und Parallelogramm-Gitter zu finden. Diese ebenfalls neuen Resultate stehen in Lemma 3.2.6. Wieder konstruieren wir hierarchische Fehlerschätzer, diesmal für das Problem: *Finde $\mathbf{m}_h \in \mathcal{RT}_1(\mathcal{K}_h)$, so daß*

$$b(\mathbf{m}_h, \mathbf{w}_h) = g(\mathbf{w}_h) \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathcal{RT}_1(\mathcal{K}_h)$$

mit einer auf $\mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma) \times \mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ definierten stetigen und positiv definiten Bilinearform $b(\mathbf{m}, \mathbf{w})$ und einer rechten Seite $g \in \mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)'$. Die Effizienz- und Zuverlässigkeitsaussagen hierzu stehen dann in den Sätzen 3.2.9 und 3.2.10. Die bisher nicht erwähnten Lemmata 3.2.2, 3.2.3, 3.2.7 und 3.2.8 dienen dem Beweis der Sätze 3.2.4, 3.2.5, 3.2.9 und 3.2.10.

1. Einleitung

Wie im letzten Abschnitt erwähnt, beinhaltet die Konstruktion von residualen Fehlerschätzern die Verwendung von Interpolations- oder Projektionsoperatoren. In Abschnitt 3.3 untersuchen wir die Operatoren $P_h^1 : H^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{S}_1(\mathcal{T}_h)$, $\mathfrak{P}_h^1 : \mathbf{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{ND}_1(\mathcal{T}_h)$, $p_h^1 : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{S}_1(\mathcal{K}_h)$, $R_h^0 : \mathbf{TH}_\perp^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{RT}_1(\mathcal{K}_h)$ und $N_h^0 : \mathbf{TH}_\parallel^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{TN}\mathcal{D}_1(\mathcal{K}_h)$. Die Operatoren P_h^1 und \mathfrak{P}_h^1 stammen aus [90] bzw. [14] und sind über lokale Integrale definiert („local averaging interpolation operators“). Für diese Operatoren beweisen wir Stabilitäts- und Approximationsabschätzungen in verschiedenen Normen, auf Volumenelemente und auf den Seitenflächen solcher Elemente. Die Ergebnisse für P_h^1 stehen zum Teil in [90], zum Teil stammen sie von uns. Die Ergebnisse für \mathfrak{P}_h^1 stehen in [14], allerdings größtenteils ohne Beweis, so daß wir hier die fehlenden Beweise nachtragen. Die auf Γ definierten Operatoren p_h^1 , R_h^0 und N_h^0 sind neu. Wir beweisen hierzu die entsprechenden Approximationseigenschaften. Die Aussagen zu sämtlichen hier angeführten Interpolationsoperatoren stehen in Satz 3.3.3. In den vorangehenden Lemmata 3.3.1 und 3.3.2 werden Abschätzungen bereitgestellt, die wir für die Approximations- und Stabilitätsabschätzungen benötigen. In Satz 3.3.4 beweisen wir schließlich Approximationsabschätzungen für P_h^1 und \mathfrak{P}_h^1 auf Elementkanten. Dafür müssen wir bei den Funktionen eine etwas stärkere Regularität voraussetzen.

Im letzten Abschnitt 3.4 des Kapitels beschäftigen wir uns mit hängenden Knoten auf Gittern mit hexaedrischen Elementen. Als Vorlage dienten Arbeiten von Becker, Braack und Moore [16, 77]. Frühe Veröffentlichungen zu diesem Thema finden sich z.B. in [12, 33]. Die Verwendung von hängenden Knoten erlaubt es, genauere Verfeinerungen durchzuführen als es bei regulären Gittern der Fall ist, insbesondere bei hexaedrischen Elementen. In der Regel werden die hängenden Knoten (oder Kanten bei Kantenelementen) aus dem Galerkin-Gleichungssystem durch Hinzunahme von zusätzlichen Gleichungen entfernt. In dieser Arbeit schlagen wir vor, schon die Basisfunktionen dementsprechend zu modifizieren, und geben an, wie diese für knoten- und kantenorientierte Funktionen in zwei und drei Dimensionen aussehen.

Nachdem wir uns obige Werkzeuge zurechtgelegt und erarbeitet haben, sind wir bereit, die Theorie auf tatsächliche Kopplungsprobleme anzuwenden. Dazu nehmen wir uns in Kapitel 4 als erstes Beispiel eine Kopplungsformulierung für ein *Eddy-Current*-Problem (Wirbelstromproblem) im Niederfrequenzbereich her, bei dem ein vorgegebener Strom das elektromagnetische Feld induziert. Eine ausführliche Beschäftigung mit dem hier zugrunde liegenden mathematischen Modell findet sich bei Ammari, Buffa & Nédélec [3]. Das Hauptergebnis daraus stellen wir in Satz 4.1.1 vor. Die Herleitung der von uns verwendeten Kopplungsformulierung und des Galerkin-Verfahrens stammen von Hiptmair [58]. Als Unbekannte treten hier $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$ und $\gamma_N \mathbf{E} \in \mathbf{TH}^{-1/2}(\text{div}_\Gamma 0, \Gamma)$ auf. Es ergibt sich, daß \mathbf{E} im Außenraum harmonisch ist, und daß die Flächendivergenz von $\gamma_N \mathbf{E}$ verschwindet. So benötigen wir nur Randintegralgleichungen mit Laplace-Kern, außerdem kann die Randvariable durch Flächenrotationen (\mathbf{curl}_Γ) von Hutfunktionen

angenähert werden. Die Sätze 4.1.2, 4.1.3 und 4.1.4 stammen im wesentlichen aus [58] und konstatieren die Lösbarkeit der Formulierung und des Galerkin-Verfahrens. In Abschnitt 4.2 konstruieren wir hierzu einen p -hierarchischen Fehlerschätzer mit den Mitteln aus Abschnitt 3.2. Effizienz und Zuverlässigkeit für hexaedrische und tetraedrische Gitter stehen in den Sätzen 4.2.1 und 4.2.2. Abschnitt 4.3 befaßt sich mit der Konstruktion eines residualen Fehlerschätzers. Dazu müssen mehrere Sachen bedacht werden. So finden wir in Lemma 4.3.1 eine orthogonale Helmholtz-Zerlegung für $\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$, die selbst un stetige Koeffizienten μ und σ berücksichtigt. Außerdem zeigen wir in Lemma 4.3.2, daß einige Flächendivergenzen von Randintegraloperatoren (die bei der Verwendung Greenscher Formeln auf Γ entstehen) verschwinden. Für andere Randterme müssen wir zeigen, daß sie quadratintegrierbar sind, schließlich soll der Fehlerschätzer aus berechenbaren L^2 -Normen bestehen. Dies geschieht in Lemma 4.3.3. Zum Schluß erhalten wir einen aus mehreren Termen bestehenden Fehlerschätzer, dessen Zuverlässigkeit wir in Satz 4.3.4 angeben. Beim residualen Fehlerschätzer ist keine Unterscheidung zwischen hexaedrischen und tetraedrischen Gittern nötig.

Als weiteres Beispiel betrachten wir in Kapitel 5 eine in [8] und [64] vorgestellte symmetrische Kopplungsformulierung für ein *Streuproblem*, in dem ein einfallendes Feld auf einen perfekt leitenden Körper trifft, der von einer dielektrischen Schicht umhüllt ist, und von diesem gestreut wird. Beide Arbeiten gehen von einem glatten Rand aus. In [64] wird für das System keine inf-sup-Bedingung gezeigt, in [8] dagegen schon, allerdings werden dort die Variablen Helmholtz-zerlegt, so daß man eine Formulierung in vier statt in zwei Variablen erhält. Wir leiten die Formulierung (in den zwei Variablen $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$ und $\gamma_N \mathbf{E} \in \mathbf{TH}^{-1/2}(\text{div}_\Gamma 0, \Gamma)$) neu her, so daß sie auch für Lipschitz-reguläre Gebiete gilt. Außerdem müssen wir in Lemma 5.1.1 die Helmholtz-Zerlegung aus Lemma 2.1.6, 1 für gewisse nicht-konvexe Gebiete verallgemeinern. In Annahme 5.1.2 postulieren wir dann eine inf-sup-Bedingung für die Kopplungsformulierung. Für glatte Ränder können wir die inf-sup-Bedingung mit Hilfe des Ergebnisses aus [8] beweisen, dafür brauchen wir gewisse Normäquivalenzen. Diese zeigen wir in Lemma 5.1.3. Annahme 5.1.4 und Satz 5.1.5 befassen sich dann mit dem Galerkin-Verfahren. Wie für das Eddy-Current-Problem entwickeln wir auch hier einen p -hierarchischen (Sätze 5.2.1 und 5.2.2) und einen residualen Fehlerschätzer (Satz 5.3.1). Beim Streuproblem ergeben sich, abgesehen von der Geometrie, einige wesentlichen Unterschiede im Vergleich zum Eddy-Current-Problem: So genügt das Lösungsfeld im Außenraum einer Vektorhelmholtz-Gleichung mit Wellenzahl ungleich Null, außerdem ist die Randvariable hier nicht divergenzfrei. Damit benötigen wir Randintegraloperatoren mit echten Helmholtzkernen, und zur Diskretisierung von $\gamma_N \mathbf{E}$ müssen nun Raviart-Thomas-Elemente herhalten.

In Kapitel 6 kommen wir dann zu den numerischen Berechnungen. Wir haben das Galerkin-Verfahren und den residualen Fehlerschätzer zum Eddy-Current-Problem aus Kapitel 4 implementiert. Dabei kamen uns die ausführliche Beschäftigung mit den Kan-

1. Einleitung

tenelementen in Kapitel 3 und mit den Randintegraloperatoren in den Kapiteln 2 und 4 zugute. In verschiedenen Beispielen rechnen wir das Galerkin-Verfahren auf einer Folge uniformer hexaedrischer Gitter und vergleichen dabei den Galerkinfehler mit den Werten des residualen Fehlerschätzers (in graphischer und tabellarischer Form). Dabei kommen wir zu dem Ergebnis, das sich der Fehlerschätzer tatsächlich wie der Galerkinfehler verhält. In einem letzten Beispiel verwenden wir den Fehlerschätzer, um eine Folge adaptiv verfeinerter Gitter zu erzeugen (mit hexaedrischen Elementen, aber ohne hängende Knoten).

Zur mathematischen Schreibweise in dieser Arbeit sei angemerkt, daß grundsätzlich Vektoren und vektorielle Funktionenräume fettgedruckt sind, skalare dagegen normal. So schreiben wir z.B. $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^\top \in \mathbf{L}^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^3$. Es gibt nur wenige Ausnahmen: die (vektorwertigen) Finite-Element-Räume \mathcal{ND} , \mathcal{TND} und \mathcal{RT} sind aus ästhetischen Gründen nicht fettgedruckt, außerdem schreiben wir $(\mathbb{P}_k)^n$ für $\mathbb{P}_k \times \cdots \times \mathbb{P}_k$ (Polynome vom Grad k) und natürlich \mathbb{R}^n . Bei Abschätzungen verwenden wir in der Regel die Symbole \lesssim und \gtrsim , dabei bedeutet $f(x) \lesssim g(x)$, daß es eine Konstante C unabhängig von x gibt, so daß $f(x) \leq Cg(x)$ für alle x . Das Symbol \sim bedeutet „ \lesssim und \gtrsim “. Die Konstanten solcher Abschätzungen sind auch grundsätzlich unabhängig von einer eventuell vorhandenen Gitterweite h . Taucht doch mal in einer Abschätzung eine explizite Konstante C auf, so ist sie stets als generische Konstante zu verstehen. Zu allen sonstigen Bezeichnungen siehe das Symbolverzeichnis.

An dieser Stelle bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr. E. P. Stephan für die Anregung zu dieser Arbeit und für seine intensive Betreuung, auch und insbesondere in schwierigen Zeiten. Ebenfalls bedanke ich mich bei Herrn Priv.-Doz. Dr. M. Maischak für die vielen hilfreichen mathematischen Diskussionen und für seine unschätzbare Betreuung bei der Programmierung. Weiter möchte ich Herrn Prof. Dr. N. Heuer und Herrn Prof. Dr. R. Rodriguez von der Universidad de Concepción danken. Zum Schluß möchte ich mich noch bei all denen bedanken, die mich über die Zeit der Promotion ertragen und mir ihre Unterstützung haben zukommen lassen: meine Familie, meine Freunde (die Mensa-Gang), meine Kollegen und vor allem meine Frau Anne-Valérie. Ein letzter Dank geht hier an Herrn Dipl.-Math. M. Baer für das abschließende Korrekturlesen.

2. Die Maxwell-Gleichungen

2.1. Räume und Spuoperatoren

In dieser Arbeit sei $\Omega_C \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes, Lipschitz-reguläres Gebiet mit Rand $\Gamma := \partial\Omega_C$. *Lipschitz-regulär* bedeutet, daß Γ global Lipschitz-stetig und stückweise glatt ist, d.h. wir können Γ in $\Gamma = \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i$ zerlegen, so daß es zu jedem Punkt $\mathbf{x} \in \Gamma$ eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^3$ und eine injektive, Lipschitz-stetige Abbildung $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ von U nach \mathbb{R}^3 gibt mit ψ^{-1} Lipschitz-stetig auf $\psi(U)$ und $\Omega_C \cap U = \{\mathbf{y} \in \Omega : \psi_3 < 0\}$, und weiter zu jedem Punkt $\mathbf{x} \in \Gamma_i \setminus \partial\Gamma_i$ ($i = 1, \dots, n$) eine Umgebung $V \subset \mathbb{R}^3$ und eine injektive Abbildung $\phi_i = (\phi_1^{(i)}, \phi_2^{(i)}, \phi_3^{(i)})$ von V nach \mathbb{R}^3 mit $\phi_i \in \mathcal{C}^\infty(V)$, $\phi_i^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(\phi_i(V))$ und $\Omega_C \cap V = \{\mathbf{y} \in \Omega_C : \phi_3^{(i)} < 0\}$. Die Mannigfaltigkeiten Γ bzw. Γ_i ($i = 1, \dots, n$) werden also lokal durch die Gleichungen $\psi_3(\mathbf{x}) = 0$ bzw. $\phi_3^{(i)}(\mathbf{x}) = 0$ dargestellt. Weiter sei $\Omega_E := \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_C$ der unbeschränkte Außenraum. Im folgenden steht die Bezeichnung Ω für „ Ω_C oder Ω_E “.

Wir setzen weiter voraus, daß Ω_C *konvex* und Γ somit *einfach zusammenhängend* ist. Dies sind insbesondere für die Zerlegungssätze wesentliche Bedingungen¹.

Ein einfach zusammenhängendes, Lipschitz-reguläres Gebiet ist in jedem Punkt lokal \mathcal{C}^∞ -diffeomorph zu einer Umgebung eines Randpunktes eines Polyeders. Wir werden uns also im folgenden auf Polyeder beschränken.

Durchgängig bezeichnen $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_\Omega$ und $\langle \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\zeta} \rangle_\Gamma$ die komplexen Dualitätspaarungen. Für $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ und $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\zeta} \in \mathbf{L}^2(\Gamma)$ ist

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{v})_\Omega &:= \int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \overline{\mathbf{v}(\mathbf{x})} \, d\mathbf{x}, \\ \langle \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\zeta} \rangle_\Gamma &:= \int_\Gamma \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}) \cdot \overline{\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{x})} \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Da Γ Lipschitz-regulär ist, braucht die Normale \mathbf{n} nur fast überall auf Γ definiert zu sein. Folgende Definitionen gelten für alle $\mathbf{x} \in \Gamma$, für die auch $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ existiert:

¹Wir könnten Γ auch etwas allgemeiner als Vereinigung endlich vieler paarweiser disjunkter einfach zusammenhängender Mengen zulassen, ohne daß uns dies zusätzliche Schwierigkeiten bereiten würde.

2. Die Maxwell-Gleichungen

Für eine skalare Funktion $\phi \in H^1(\Omega)$ bezeichnet $\gamma\phi$ die Spur der Funktion auf Γ . Für eine vektorielle Funktion $\mathbf{u} \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})^3$ heißt

$$\gamma_t \mathbf{u}(\mathbf{x}) := \mathbf{u}_\Gamma := \mathbf{n}(x) \times (\mathbf{u}(\mathbf{x}) \times \mathbf{n}(x)) = (I - \mathbf{n}(x)\mathbf{n}(x)^\top) \mathbf{u}(\mathbf{x})$$

der *Tangentialanteil* oder die *Dirichlet-Spur* von \mathbf{u} auf Γ . Der *gedrehte Tangentialanteil* auf Γ wird durch

$$\gamma_t^\times \mathbf{u}(\mathbf{x}) := \mathbf{u}(\mathbf{x}) \times \mathbf{n}(x)$$

definiert.

Es seien $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ der Ableitungsoperator, u eine skalare Funktion und \mathbf{u} ein Vektorfeld \mathbf{u} in Ω . Dann heißen

$\mathbf{grad} u := \nabla u$	der <i>Gradient</i> von u ,
$\operatorname{div} \mathbf{u} := \nabla \cdot \mathbf{u}$	die <i>Divergenz</i> von \mathbf{u} ,
$\mathbf{curl} \mathbf{u} := \nabla \times \mathbf{u}$	die <i>Rotation</i> von \mathbf{u} ,
$\Delta u := \nabla \cdot \nabla u = \operatorname{div} \mathbf{grad} u$	der <i>Laplace</i> von u ,
$\Delta \mathbf{u} := (\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3)$	der <i>vektorielle Laplace</i> von \mathbf{u} .

Es gilt $\mathbf{curl} \mathbf{curl} \mathbf{u} = (\mathbf{grad} \operatorname{div} - \Delta) \mathbf{u}$.

Es sei $\phi \in H^2(\Omega)$ eine skalare Funktion. Wir definieren dann den *Flächengradient* auf Γ von ϕ als

$$\mathbf{grad}_\Gamma \phi := \gamma_t(\mathbf{grad} \phi)$$

und den *vektoriellen Flächencurl* auf Γ als

$$\mathbf{curl}_\Gamma \phi := \gamma_t^\times(\mathbf{grad} \phi) = \mathbf{grad}_\Gamma \phi \times \mathbf{n}.$$

Der *skalare Flächencurl* auf Γ einer vektoriellen Funktion $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^2(\Omega)$ mit $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ auf Γ ist durch

$$\operatorname{curl}_\Gamma \mathbf{u} := \mathbf{curl} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$$

gegeben, und die *Flächendivergenz* auf Γ durch

$$\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u} := \operatorname{div}(\gamma_t \mathbf{u}) = -\operatorname{curl}_\Gamma(\mathbf{u} \times \mathbf{n}).$$

Obige Definitionen gelten für alle regulären Punkte aus Γ , also insbesondere für alle $\mathbf{x} \in \Gamma \setminus \bigcup_{i=1}^n \partial\Gamma_i$. Man kann die Tangential- bzw. Flächen-Differentialoperatoren auch stückweise definieren, so z.B. $\mathbf{grad}_{\Gamma_i} \phi := \gamma_t(\mathbf{grad} \phi)$ auf $\Gamma_i \setminus \partial\Gamma_i$ und demnach $\mathbf{grad}_\Gamma \phi(\mathbf{x}) := \mathbf{grad}_{\Gamma_i} \phi(\mathbf{x})$ für $\mathbf{x} \in \Gamma_i \setminus \partial\Gamma_i$.

Die Definitionen dieser Flächen-Differentialoperatoren können nun auf Tangentialvektorfelder \mathbf{u} und skalare Funktionen ϕ , die nur auf Γ definiert sind, erweitert werden. Dazu muß der Definitionsbereich der Funktion \mathbf{u} bzw. ϕ folgendermaßen auf eine Umgebung von Γ erweitert werden: Da Γ_i regulär für jedes $i = 1, \dots, n$, gibt es $\delta > 0$ und eine Umgebung $U_{\delta,i}$ von $\Gamma_i \setminus \partial\Gamma_i$ definiert durch

$$U_{\delta,i} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : (\exists 0 < r < \delta, \mathbf{y}_x \in \Gamma_i, : \mathbf{x} = \mathbf{y}_x + r\mathbf{n}(\mathbf{y}_x))\},$$

und eine Projektion $P_{\Gamma_i} : U_{\delta,i} \rightarrow \Gamma_i \setminus \partial\Gamma_i$ mit $P_{\Gamma_i}\mathbf{x} := \mathbf{y}_x$. Mit den auf $U_{\delta,i}$ definierten Funktionen $\tilde{\mathbf{u}}_i := \mathbf{u} \circ P_{\Gamma_i}$ und $\tilde{\phi}_i := \phi \circ P_{\Gamma_i}$ können wir dann $\text{curl}_{\Gamma,i} \mathbf{u}$, $\text{div}_{\Gamma,i} \mathbf{u}$, $\mathbf{grad}_{\Gamma,i} \phi$ und $\mathbf{curl}_{\Gamma,i} \phi$ wie oben auf $\Gamma_i \setminus \partial\Gamma_i$ definieren, und erhalten durch Zusammensetzung dieser stückweise definierten Operatoren schließlich Operatoren auf $\Gamma \setminus \bigcup_{i=1}^n \partial\Gamma_i$. Auf Gebieten mit glatten Rändern Γ gelten folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{grad}_{\Gamma} \phi, \mathbf{u} \rangle_{\Gamma} &= -\langle \phi, \text{div}_{\Gamma} \mathbf{u} \rangle_{\Gamma}, \\ \langle \mathbf{curl}_{\Gamma} \phi, \mathbf{u} \rangle_{\Gamma} &= \langle \phi, \text{curl}_{\Gamma} \mathbf{u} \rangle_{\Gamma}. \end{aligned}$$

Mittels dieser Dualitäten und mit Dichtigkeitsargumenten können die Definitionsbereiche der Flächen-Differentialoperatoren auf verschiedene Sobolevräume erweitert werden. Diese Erweiterungen und die Abbildungseigenschaften dieser Operatoren wurden in [28, 29] erarbeitet. Wir werden die wichtigsten Ergebnisse daraus vorstellen, nachdem wir die nötigen Räume eingeführt haben.

Neben den gewöhnlichen Sobolevräumen $H^s(\Omega)$ für skalare Funktionen und $\mathbf{H}^s(\Omega)$ für vektorwertige Funktionen von der Ordnung $s \in \mathbb{R}$ (wir gehen davon aus, daß dem Leser diese Räume wohl vertraut sein werden, falls nicht vgl. die Standardwerke von Adams [1] über Sobolev-Räume und Grisvard [51] insbesondere für Lipschitzgebiete) definieren wir zusätzlich die Räume

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega) &:= \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \mathbf{curl} \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}, \\ \mathbf{H}_0(\mathbf{curl}, \Omega) &:= \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega) : \mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0 \text{ auf } \Gamma\}, \\ \mathbf{H}(\mathbf{curl} \mathbf{curl}, \Omega) &:= \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \mathbf{curl} \mathbf{curl} \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}, \\ \mathbf{H}(\text{div}, \Omega) &:= \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \text{div} \mathbf{u} \in L^2(\Omega)\}, \\ \mathbf{H}_0(\text{div}, \Omega) &:= \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega) : \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ auf } \Gamma\}. \end{aligned}$$

Steht zusätzlich eine 0 hinter dem Differentialoperator, so bedeutet dies, daß der Kern des Operators betrachtet wird – so ist z.B.

$$\mathbf{H}(\text{div} 0, \Omega) := \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega) : \text{div} \mathbf{u} = 0\}.$$

Ebenfalls als bekannt vorausgesetzt werden die Räume $H^s(\Gamma)$, $H^s(\Gamma_i)$ mit $|s| \leq 1$ für skalare Funktionen (siehe [51, Abschnitt 1.3.3]).

2. Die Maxwell-Gleichungen

Wir gehen nun nach [28, 29, 59] vor: Seien Γ_i und Γ_j zwei Flächen mit einer gemeinsamer Kante e_{ij} . Definiere \mathbf{t}_{ij} als Einheitstangentenvektor zu e_{ij} und $\mathbf{t}_i := \mathbf{t}_{ij} \times \mathbf{n}_i$. Das Paar $\{\mathbf{t}_{ij}, \mathbf{t}_i\}$ ist dann eine Orthonormalbasis zur von Γ_i generierten Fläche. Weiter sei \mathcal{I}_j die Menge der Indizes i , so daß die Flächen Γ_i und Γ_j eine gemeinsame Kante haben. Definiere damit für vektorwertige Funktionen die Räume

$$\begin{aligned} \mathbf{TL}^2(\Gamma) &:= \{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Gamma) : \mathbf{u}|_{\Gamma_j} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n \}, \\ \mathbf{TH}_*^{1/2}(\Gamma) &:= \{ \mathbf{u} \in \mathbf{TL}^2(\Gamma) : \mathbf{u}|_{\Gamma_j} \cdot \mathbf{t}_j, \mathbf{u}|_{\Gamma_j} \cdot \mathbf{t}_{ij} \in H^{1/2}(\Gamma_j) \quad \forall i \in \mathcal{I}_j, \forall j = 1, \dots, n \} \end{aligned}$$

und die Funktionale

$$\mathcal{N}_{i,j}^{\parallel}(\mathbf{u}) := \int_{\Gamma_i} \int_{\Gamma_j} \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_{ij})(\mathbf{x}) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_{ij})(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} dS(\mathbf{x}) dS(\mathbf{y})$$

und

$$\mathcal{N}_{i,j}^{\perp}(\mathbf{u}) := \int_{\Gamma_i} \int_{\Gamma_j} \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_i)(\mathbf{x}) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_j)(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} dS(\mathbf{x}) dS(\mathbf{y}).$$

Hiermit definieren wir folgende Unterräume von $\mathbf{TH}_*^{1/2}(\Gamma)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{TH}_{\parallel}^{1/2}(\Gamma) &:= \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{TH}_*^{1/2}(\Gamma) : \mathcal{N}_{i,j}^{\parallel}(\mathbf{u}) < \infty \quad \forall j = 1, \dots, n \quad \forall i \in \mathcal{I}_j \right\}, \\ \mathbf{TH}_{\perp}^{1/2}(\Gamma) &:= \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{TH}_*^{1/2}(\Gamma) : \mathcal{N}_{i,j}^{\perp}(\mathbf{u}) < \infty \quad \forall j = 1, \dots, n \quad \forall i \in \mathcal{I}_j \right\}, \end{aligned}$$

und mit $\mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\Gamma)$ bzw. $\mathbf{TH}_{\perp}^{-1/2}(\Gamma)$ bezeichnen wir den Dualraum zu $\mathbf{TH}_{\parallel}^{1/2}(\Gamma)$ bzw. $\mathbf{TH}_{\perp}^{1/2}(\Gamma)$. Es folgen nun die wichtigsten Eigenschaften der anfänglich vorgestellten Differentialoperatoren:

Lemma 2.1.1. *Ist Γ Lipschitz-regulär, so können die Differentialoperatoren \mathbf{grad}_{Γ} und \mathbf{curl}_{Γ} zu linearen und stetigen Operatoren*

$$\begin{aligned} \mathbf{grad}_{\Gamma} &: H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{TH}_{\perp}^{-1/2}(\Gamma), \\ \mathbf{curl}_{\Gamma} &: H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\Gamma) \end{aligned}$$

fortgesetzt werden, und die dazu adjungierten Operatoren

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{\Gamma} &: \mathbf{TH}_{\perp}^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma), \\ \operatorname{curl}_{\Gamma} &: \mathbf{TH}_{\parallel}^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma) \end{aligned}$$

sind linear, stetig und surjektiv. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(\operatorname{curl}_{\Gamma}(\mathbf{TH}_{\perp}^{-1/2}(\Gamma))) &= \operatorname{Im}(\mathbf{grad}_{\Gamma}(H^{1/2})), \\ \operatorname{Ker}(\operatorname{div}_{\Gamma}(\mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\Gamma))) &= \operatorname{Im}(\mathbf{curl}_{\Gamma}(H^{1/2})). \end{aligned}$$

Beweis. Siehe [28, Abschnitt 2.1] und [29, Abschnitt 3.2]. \square

Wir halten hier nochmals die Dualitäten fest:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{grad}_\Gamma \phi, \mathbf{u} \rangle_\Gamma &= -\langle \phi, \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u} \rangle_\Gamma, & \forall \phi \in H^{1/2}(\Gamma), \mathbf{u} \in \mathbf{TH}_\perp^{1/2}(\Gamma), \\ \langle \mathbf{curl}_\Gamma \phi, \mathbf{u} \rangle_\Gamma &= \langle \phi, \operatorname{curl}_\Gamma \mathbf{u} \rangle_\Gamma, & \forall \phi \in H^{1/2}(\Gamma), \mathbf{u} \in \mathbf{TH}_\parallel^{1/2}(\Gamma). \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Differentialoperatoren definieren wir nun die Spurräume

$$\begin{aligned} \mathbf{TH}_\parallel^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma) &:= \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{TH}_\parallel^{-1/2}(\Gamma) : \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u} \in H^{-1/2}(\Gamma) \right\}, \\ \mathbf{TH}_\perp^{-1/2}(\operatorname{curl}_\Gamma, \Gamma) &:= \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{TH}_\perp^{-1/2}(\Gamma) : \operatorname{curl}_\Gamma \mathbf{u} \in H^{-1/2}(\Gamma) \right\}. \end{aligned}$$

Das nächste Lemma behandelt die Abbildungseigenschaften der Spurooperatoren γ_t und γ_t^\times , die später in dieser Arbeit von großer Bedeutung sein werden:

Lemma 2.1.2. *Ist Γ Lipschitz-regulär, so sind die Spurooperatoren*

$$\begin{aligned} \gamma_t &: \mathbf{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{TH}_\parallel^{1/2}(\Gamma), \\ \gamma_t^\times &: \mathbf{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{TH}_\perp^{1/2}(\Gamma) \end{aligned}$$

linear, stetig und surjektiv. Die Erweiterungen

$$\begin{aligned} \gamma_t &: \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega) \rightarrow \mathbf{TH}_\perp^{-1/2}(\operatorname{curl}_\Gamma, \Gamma), \\ \gamma_t^\times &: \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega) \rightarrow \mathbf{TH}_\parallel^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma) \end{aligned}$$

sind ebenfalls linear, stetig und surjektiv.

Beweis. Diese Aussagen finden sich bei Buffa & Ciarlet [28, Proposition 1.7, Theorem 2.9, Theorem 2.10]. \square

Als einfache Folgerung haben wir die folgende Charakterisierung:

Lemma 2.1.3. *Definiere den Drehoperator $R\boldsymbol{\lambda} := \mathbf{n} \times \boldsymbol{\lambda}$. Dann sind*

$$\begin{aligned} R &: \mathbf{TL}^2(\Gamma) \rightarrow \mathbf{TL}^2(\Gamma), \\ R &: \mathbf{TH}_\parallel^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{TH}_\perp^{1/2}(\Gamma), \\ R &: \mathbf{TH}_\parallel^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{TH}_\perp^{-1/2}(\Gamma), \\ R &: \mathbf{TH}_\parallel^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma) \rightarrow \mathbf{TH}_\perp^{-1/2}(\operatorname{curl}_\Gamma, \Gamma) \end{aligned}$$

Isomorphismen mit $R^{-1} = -R$.

Beweis. Siehe [31, Abschnitt 2]. \square

2. Die Maxwell-Gleichungen

Wir führen noch folgende Spurooperatoren ein, die wir später in dieser Arbeit benötigen werden: Für $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl} \mathbf{curl}, \Omega)$ definieren wir die *Neumann-Spur* γ_N durch

$$\langle \gamma_N \mathbf{u}, \gamma_t \mathbf{v} \rangle_\Gamma = \pm (\mathbf{curl} \mathbf{u}, \mathbf{curl} \mathbf{v})_\Omega \mp (\mathbf{curl} \mathbf{curl} \mathbf{u}, \mathbf{v})_\Omega \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega). \quad (2.1.1)$$

Hierbei sind die oberen Vorzeichen bei $\Omega = \Omega_C$ zu verwenden, die unteren bei $\Omega = \Omega_E$. Es gilt $\gamma_N \mathbf{u} = \gamma_t^\times(\mathbf{curl} \mathbf{u})$. Weiter definieren wir die *Normalenspur* γ_n für $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{div}, \Omega)$ durch

$$\langle \gamma_n \mathbf{u}, \phi \rangle_\Gamma = (\mathbf{div} \mathbf{u}, \phi)_\Omega + (\mathbf{u}, \mathbf{grad} \phi)_\Omega \quad \forall \phi \in H^1(\Omega). \quad (2.1.2)$$

Für $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})^3$ gibt dies $\gamma_n \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$. Es gelten die Abbildungseigenschaften

Lemma 2.1.4. *Ist Γ Lipschitz-regulär, so sind die Spurooperatoren*

$$\begin{aligned} \gamma_N &: \mathbf{H}(\mathbf{curl} \mathbf{curl}, \Omega) \rightarrow \mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\mathbf{div}_\Gamma, \Gamma), \\ \gamma_n &: \mathbf{H}(\mathbf{div}, \Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma) \end{aligned}$$

linear, stetig und surjektiv.

Beweis. Die Stetigkeit von γ_N steht in [58, Abschnitt 3] und folgt sofort aus der Darstellung $\gamma_N = \gamma_t^\times \mathbf{curl}$ und Lemma 2.1.2. Die Stetigkeit von γ_n findet sich bei Girault & Raviart [50, Theorem 2.5]. \square

Weiter gilt

Lemma 2.1.5. *Für $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$ gilt*

$$\mathbf{div}_\Gamma(\mathbf{u} \times \mathbf{n}) = \mathbf{curl}_\Gamma \mathbf{u} = \gamma_n \mathbf{curl} \mathbf{u} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{curl} \mathbf{u}.$$

Beweis. Siehe [28, Abschnitt 2.2]. \square

Ein wichtiges Werkzeug im Umgang mit den oben vorgestellten Räumen sind die sogenannten Hodge- oder Helmholtz-Zerlegungen.

Lemma 2.1.6. *Es sei Ω ein konvexes Gebiet im \mathbb{R}^3 .*

1. *Es gilt die $\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$ -orthogonale Zerlegung*

$$\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega) = \mathbf{M}(\Omega) \oplus \mathbf{grad} H^1(\Omega)/\mathbb{C}, \quad (2.1.3)$$

d.h. zu jedem $\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$ existieren eindeutige Funktionen $\mathbf{v}^\perp \in \mathbf{M}(\Omega) := \mathbf{H}_0(\mathbf{div} 0, \Omega) \cap \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$ und $\psi \in H^1(\Omega)/\mathbb{C}$ mit $\mathbf{v} = \mathbf{v}^\perp + \mathbf{grad} \psi$, so daß die Abschätzungen

$$\|\mathbf{v}^\perp\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \lesssim \|\mathbf{curl} \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \quad \|\mathbf{grad} \psi\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)} \quad (2.1.4)$$

gelten.

2. Es sei Γ Lipschitz-regulär, dann gelten die \mathbf{L}^2 -orthogonalen Zerlegungen

$$\begin{aligned}\mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma) &= \mathbf{curl}_{\Gamma} H^{1/2}(\Gamma)/\mathbb{C} \oplus \mathbf{grad}_{\Gamma} \mathcal{H}(\Gamma)/\mathbb{C}, \\ \mathbf{TH}_{\perp}^{-1/2}(\operatorname{curl}_{\Gamma}, \Gamma) &= \mathbf{grad}_{\Gamma} H^{1/2}(\Gamma)/\mathbb{C} \oplus \mathbf{curl}_{\Gamma} \mathcal{H}(\Gamma)/\mathbb{C}\end{aligned}$$

mit

$$\mathcal{H}(\Gamma) := \{u \in H^1(\Gamma)/\mathbb{C} : \Delta_{\Gamma} u \in H^{-1/2}(\Gamma)\}$$

mit dem Laplace-Beltrami-Operator $\Delta_{\Gamma} \phi := \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{grad}_{\Gamma} \phi = -\operatorname{curl}_{\Gamma} \mathbf{curl}_{\Gamma} \phi$. Man beachte, daß die Orthogonalität im Sinne von Grenzwerten zu verstehen ist (man ersetze $\beta \in H^{1/2}(\Gamma)$ durch $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$, $\beta_n \in H^1(\Gamma)$), da das \mathbf{L}_2 -Skalarprodukt sonst nicht definiert ist.

3. Es sei Γ Lipschitz-regulär, dann gelten die nicht \mathbf{L}^2 -orthogonalen (jedoch direkten) Zerlegungen

$$\begin{aligned}\mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma) &= \mathbf{curl}_{\Gamma} H^{1/2}(\Gamma)/\mathbb{C} + \mathbf{TH}_{\perp}^{1/2}(\Gamma), \\ \mathbf{TH}_{\perp}^{-1/2}(\operatorname{curl}_{\Gamma}, \Gamma) &= \mathbf{grad}_{\Gamma} H^{1/2}(\Gamma)/\mathbb{C} + \mathbf{TH}_{\parallel}^{1/2}(\Gamma).\end{aligned}$$

Für eine Funktion $\Phi \in \mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ mit $\Phi = \mathbf{curl}_{\Gamma} \phi + \boldsymbol{\rho}$, $\phi \in H^{1/2}(\Gamma)/\mathbb{C}$, $\boldsymbol{\rho} \in \mathbf{TH}_{\perp}^{1/2}(\Gamma)$ gelten die Abschätzungen

$$\|\mathbf{curl}_{\Gamma} \phi\|_{\mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\Gamma)} \leq \|\Phi\|_{\mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma)}, \quad \|\boldsymbol{\rho}\|_{\mathbf{TH}_{\perp}^{1/2}(\Gamma)} \lesssim \|\operatorname{div}_{\Gamma} \Phi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}.$$

Für eine Funktion $\Psi \in \mathbf{TH}_{\perp}^{-1/2}(\operatorname{curl}_{\Gamma}, \Gamma)$ mit $\Psi = \mathbf{grad}_{\Gamma} \psi + \boldsymbol{\sigma}$, $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)/\mathbb{C}$, $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{TH}_{\parallel}^{1/2}(\Gamma)$ gelten die Abschätzungen

$$\|\mathbf{grad}_{\Gamma} \psi\|_{\mathbf{TH}_{\perp}^{-1/2}(\Gamma)} \leq \|\Psi\|_{\mathbf{TH}_{\perp}^{-1/2}(\operatorname{curl}_{\Gamma}, \Gamma)}, \quad \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathbf{TH}_{\parallel}^{1/2}(\Gamma)} \lesssim \|\operatorname{curl}_{\Gamma} \Psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}.$$

Beweis. Zu 1: Die $\mathbf{H}(\mathbf{curl})$ -orthogonale Zerlegung

$$\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega) = \mathbf{M}(\Omega) \oplus \mathbf{grad} H^1(\Omega)/\mathbb{C}$$

mit $\mathbf{M}(\Omega) = \mathbf{H}_0(\operatorname{div} 0, \Omega) \cap \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$ wird z.B. in [14, Abschnitt 3] ohne Beweis verwendet und folgt sofort aus der \mathbf{L}^2 -orthogonalen Zerlegung

$$\mathbf{L}^2(\Omega) = \mathbf{H}_0(\operatorname{div} 0, \Omega) \oplus \mathbf{grad} H^1(\Omega)/\mathbb{C}$$

für zusammenhängende Lipschitz-Gebiete (siehe z.B. [42, Band 3, Chap. IX, §1, Prop. 1]). Die Abschätzungen erhalten wir folgendermaßen: Es ist $\mathbf{M}(\Omega) \subseteq \mathbf{X}_T(\Omega) := \mathbf{H}_0(\operatorname{div}, \Omega) \cap \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$, und [9] entnehmen wir die stetige Einbettung $\mathbf{X}_T(\Omega) \subset \mathbf{H}^1(\Omega)$ (Theorem 2.17) für konvexe Gebiete und die Normäquivalenz $\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{X}(\Omega)} \sim \|\mathbf{curl} \mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\operatorname{div} \mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$ für $\mathbf{w} \in \mathbf{X}_T(\Omega)$ (Corollary 3.16). Damit erhalten wir die gesuchte

2. Die Maxwell-Gleichungen

Abschätzung $\|\mathbf{v}^\perp\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \lesssim \|\mathbf{curl} \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$. Die zweite Abschätzung folgt sofort aus der $\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$ -Orthogonalität:

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)}^2 = \|\mathbf{v}^\perp\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)}^2 + \|\mathbf{grad} \psi\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)}^2 \geq \|\mathbf{grad} \psi\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)}^2 = \|\mathbf{grad} \psi\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2.$$

Zu 2 und 3: Den Beweis der Zerlegungen aus 2. und 3. findet man bei Buffa & Ciarlet [29, Theoreme 4.1 und 4.3] und ist (für $\mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$) eine Verallgemeinerung der Zerlegung von Armel de La Bourdonnaye [43] für Gebiete mit glatten Rändern. Wir werden hier kurz den Beweis der ersten Zerlegung aus 3. angeben, um damit die darauffolgende Normabschätzung begründen zu können, die wir wiederum in Abschnitt 5.3 benötigen werden: Es sei $\Phi \in \mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$. Dann ist $\delta := \text{div}_\Gamma \Phi$ aus $H^{-1/2}(\Gamma)$. Nach Lemma 2.1.1 ist $\text{div}_\Gamma : \mathbf{TH}_{\perp}^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ stetig, linear und surjektiv, so daß nach dem Satz über offene Abbildungen ein $\boldsymbol{\rho} \in \mathbf{TH}_{\perp}^{1/2}(\Gamma)$ existiert mit $\text{div}_\Gamma \boldsymbol{\rho} = \delta$ und

$$\|\boldsymbol{\rho}\|_{\mathbf{TH}_{\perp}^{1/2}(\Gamma)} \lesssim \|\delta\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} = \|\text{div}_\Gamma \Phi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}.$$

Da nun $\text{div}_\Gamma(\Phi - \boldsymbol{\rho}) = 0$, gibt es nach Lemma 2.1.1 ein $\phi \in H^{1/2}(\Gamma)$ mit $\mathbf{curl}_\Gamma \phi = \Phi - \boldsymbol{\rho}$. Die zweite Abschätzung folgt folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{curl}_\Gamma \phi\|_{\mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\Gamma)} &\leq \|\Phi\|_{\mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\Gamma)} + \|\boldsymbol{\rho}\|_{\mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\Gamma)} \\ &\lesssim \|\Phi\|_{\mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\Gamma)} + \|\boldsymbol{\rho}\|_{\mathbf{TH}_{\perp}^{1/2}(\Gamma)} \\ &\lesssim \|\Phi\|_{\mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\Gamma)} + \|\text{div}_\Gamma \Phi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \lesssim \|\Phi\|_{\mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)}. \end{aligned}$$

□

Als Folgerung aus dem zweiten Teil des Lemmas ergibt sich:

Lemma 2.1.7. *Die Räume $\mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ und $\mathbf{TH}_{\perp}^{-1/2}(\text{curl}_\Gamma, \Gamma)$ sind zueinander dual bezüglich des \mathbf{L}^2 -Skalarprodukts.*

Beweis. Diese Aussage findet sich in [29, Ende Abschnitt 4]. Wir schreiben hier den Beweis explizit hin: Für $\Phi \in \mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$, $\Psi \in \mathbf{TH}_{\perp}^{-1/2}(\text{curl}_\Gamma, \Gamma)$ mit $\Phi = \mathbf{curl}_\Gamma \varphi_1 + \mathbf{grad}_\Gamma \varphi_2$ mit $\varphi_1 \in H^{1/2}(\Gamma)$, $\varphi_2 \in \mathcal{H}(\Gamma)$ und $\Psi = \mathbf{grad}_\Gamma \psi_1 + \mathbf{curl}_\Gamma \psi_2$ mit $\psi_1 \in H^{1/2}(\Gamma)$, $\psi_2 \in \mathcal{H}(\Gamma)$ gilt

$$\begin{aligned} \langle \Phi, \Psi \rangle_\Gamma &= \langle \mathbf{curl}_\Gamma \varphi_1 + \mathbf{grad}_\Gamma \varphi_2, \mathbf{grad}_\Gamma \psi_1 + \mathbf{curl}_\Gamma \psi_2 \rangle_\Gamma \\ &= \langle \mathbf{curl}_\Gamma \varphi_1, \mathbf{curl}_\Gamma \psi_2 \rangle_\Gamma + \langle \mathbf{grad}_\Gamma \varphi_2, \mathbf{grad}_\Gamma \psi_1 \rangle_\Gamma \\ &= -\langle \varphi_1, \Delta_\Gamma \psi_2 \rangle_\Gamma - \langle \Delta_\Gamma \varphi_2, \psi_1 \rangle_\Gamma. \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Für $\Phi, \Psi \in \mathbf{TL}^2(\Gamma)$ ist $\langle \Phi, \Psi \rangle_\Gamma$ das $\mathbf{TL}^2(\Gamma)$ -Skalarprodukt. Für $\Phi \in \mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$, $\Psi \in \mathbf{TH}_{\perp}^{-1/2}(\text{curl}_\Gamma, \Gamma)$ definiert (2.1.5) gerade die Dualitätspaarung zwischen $\mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ und $\mathbf{TH}_{\perp}^{-1/2}(\text{curl}_\Gamma, \Gamma)$. □

2.2. Das physikalische Grundproblem

Wir betrachten das Verhalten von elektromagnetischen Wellen in einem isotropen Medium $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (weiterhin mit Lipschitz-regulärem Rand) mit elektrischer Permittivität (dielektrischer Konstante) $\epsilon = \epsilon(\mathbf{x}) > 0$, magnetischer Permeabilität $\mu = \mu(\mathbf{x}) > 0$ und elektrischer Konduktivität (Leitfähigkeit) $\sigma = \sigma(\mathbf{x}) > 0$ ². Gilt $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $\sigma = \sigma_0$ für Konstanten $\epsilon_0, \mu_0, \sigma_0 \in \mathbb{R}$, so heißt das Material *homogen*, anderenfalls nennt man es *inhomogen*. Ein Medium mit $\sigma = 0$ nennen wir *dielektrisch*. Ist σ dagegen sehr groß, so kann man vereinfachend das Material (meist ein Metall) durch ein Medium mit unendlicher Konduktivität ersetzen. Dieses (natürlich fiktive) Medium nennen wir dann einen *perfect conductor*, einen perfekten Leiter.

Bezeichnen wir mit $\mathcal{E}, \mathcal{H}, \mathcal{J} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{C}^3$ das elektrische Feld, das magnetische Feld und die Stromdichte, so sind die Beziehungen zwischen diesen Größen durch die *Maxwell-Gleichungen*

$$\mathbf{curl} \mathcal{E} = -\mu \frac{d}{dt} \mathcal{H} \quad \text{in } \Omega, \quad (2.2.6)$$

$$\mathbf{curl} \mathcal{H} = \epsilon \frac{d}{dt} \mathcal{E} + \mathcal{J} \quad \text{in } \Omega \quad (2.2.7)$$

gegeben.

In vielen Anwendungen spielen zeitperiodische elektromagnetische Felder eine Rolle. So führt z.B. eine zeitperiodische Quelle \mathcal{F} nach kurzer Zeit (nach Abklingen eines Zusatzfeldes) auf stabile, zeitperiodische Felder \mathcal{E} und \mathcal{H} mit gleicher Periode wie die Quelle. Wir schreiben ein solches zeitperiodisches Quellfeld \mathcal{F} mit Periode T als Summe einfacher harmonischer (monochromatischer) Funktionen

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}, t) = \sum_{m=1}^M \mathbf{F}_m(\mathbf{x}) e^{-im\omega t} \quad (2.2.8)$$

mit Frequenz $\omega = 2\pi/T$ und komplexen vektorwertigen Funktionen \mathbf{F}_m . Nun erzeugt eine Quelle der Form $\mathcal{F}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}$ Lösungsfelder

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{E}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}, \\ \mathcal{H}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{H}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}, \\ \mathcal{J}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{J}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

²Die Bezeichnung *isotrop* bezieht sich auf die skalaren Funktionen ϵ , μ und σ . Im allgemeinen Fall eines anisotropen Materials sind diese Größen als reelle, symmetrische, positiv definite (3×3) -Matrizen definiert. Im isotropen Fall hat z.B. die dielektrische Matrix die Form $\begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}$ und man schreibt einfach ϵ .

2. Die Maxwell-Gleichungen

mit gleicher Periode T und damit gleicher Frequenz ω , so daß wir aufgrund der Linearität der Maxwell-Gleichungen jede Lösung $(\mathcal{E}, \mathcal{H})$ zu einem gegebenen zeitperiodischen Quellfeld als Summe von Lösungen zu monochromatischen Quellfeldern darstellen können. Weiter gilt, daß nur die Realteile von \mathcal{E} und \mathcal{H} physikalisch bedeutsam sind, so daß wir uns letztendlich auf den Fall

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\mathbf{x}, t) &= \operatorname{Re}\{\mathbf{F}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}\}, \\ \mathcal{E}(\mathbf{x}, t) &= \operatorname{Re}\{\mathbf{E}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}\}, \\ \mathcal{H}(\mathbf{x}, t) &= \operatorname{Re}\{\mathbf{H}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}\}, \\ \mathcal{J}(\mathbf{x}, t) &= \operatorname{Re}\{\mathbf{J}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}\}\end{aligned}$$

mit $\mathbf{F}, \mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{J} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^3$ beschränken können.

Setzen wir die Darstellung (2.2.9) in die Gleichungen (2.2.6),(2.2.7) ein, so erhalten wir die *reduzierten Maxwell-Gleichungen*

$$\mathbf{curl} \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H} \quad \text{in } \Omega, \quad (2.2.10)$$

$$\mathbf{curl} \mathbf{H} = -i\omega\epsilon\mathbf{E} + \mathbf{J} \quad \text{in } \Omega. \quad (2.2.11)$$

Nun gilt in einem isotropen Leiter das *Ohmsche Gesetz*

$$\mathcal{J} = \sigma\mathcal{E}, \quad (2.2.12)$$

das die Stromdichte durch die Konduktivität beschreibt, und damit erhalten wir aus (2.2.10),(2.2.11) die Formulierung

$$\mathbf{curl} \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}, \quad (2.2.13)$$

$$\mathbf{curl} \mathbf{H} = -i\omega\epsilon^*\mathbf{E} \quad (2.2.14)$$

mit $\epsilon^* = \epsilon + i\frac{\sigma}{\omega}$.

Bemerkung 1. Es ist genauso möglich, anstelle von (2.2.8) den Ansatz

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}, t) = \sum_{m=1}^M \mathbf{F}_m(\mathbf{x})e^{im\omega t} \quad (2.2.15)$$

zu wählen. Dann lauten die reduzierten Maxwell-Gleichungen

$$\mathbf{curl} \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H} \quad \text{in } \Omega,$$

$$\mathbf{curl} \mathbf{H} = i\omega\epsilon\mathbf{E} + \mathbf{J} = i\omega\epsilon^*\mathbf{E} \quad \text{in } \Omega$$

mit $\epsilon^* = \epsilon - i\frac{\sigma}{\omega}$. Wir machen diese Bemerkung, da wir in Kapitel 4 diese Darstellung verwenden werden.

Indem man die erste Gleichung (2.2.13) durch μ teilt und darauf den **curl**-Operator anwendet, dann den Term **curl H** mittels Gleichung (2.2.14) ersetzt, gegen $\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \mathbb{R}^3)$ testet und schließlich (2.1.1) verwendet, gelangt man zu einer ersten schwachen Formulierung des Maxwell-Problems:

Finde $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$, so daß

$$(\mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{E}, \mathbf{curl} \mathbf{v})_{\Omega} - \omega^2 (\epsilon \mathbf{E}, \mathbf{v})_{\Omega} - i\omega (\sigma \mathbf{E}, \mathbf{v})_{\Omega} = \pm \langle \mu^{-1} \gamma_N \mathbf{E}, \gamma_t \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} \quad (2.2.16)$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$.

Das positive Vorzeichen auf der rechten Seite gilt für das beschränkte Gebiet $\Omega = \Omega_C$, das negative für das Außengebiet $\Omega = \Omega_E$. Obige Maxwell-Gleichungen und die Identität $\Delta F = \mathbf{grad} \operatorname{div} F - \mathbf{curl} \operatorname{curl} F$ ergeben das folgende

Lemma 2.2.1. *Es sei Ω homogen. Sind \mathbf{E} und \mathbf{H} Lösungen der Maxwell-Gleichungen (2.2.13), (2.2.14), so gilt $\operatorname{div} \mathbf{E} = \operatorname{div} \mathbf{H} = 0$. Außerdem genügen sie den Vektor-Helmholtz-Gleichungen*

$$\Delta \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \quad \text{und} \quad \Delta \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0$$

mit Wellenzahl $k := \omega \sqrt{\epsilon^* \mu}$. Ist umgekehrt \mathbf{E} (bzw. \mathbf{H}) eine Lösung der Vektor-Helmholtz-Gleichung mit $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ (bzw. $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$), dann genügen \mathbf{E} und $\mathbf{H} := -\frac{i}{\omega \mu} \mathbf{curl} \mathbf{E}$ (bzw. \mathbf{H} und $\mathbf{E} := \frac{i}{\omega \epsilon^*} \mathbf{curl} \mathbf{H}$) den Maxwell-Gleichungen.

Beweis. Siehe Colton & Kress [40, Theorem 6.4]. □

Nun wollen wir uns den Potentialen zuwenden. Es sei

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$$

die Fundamentallösung der Helmholtz-Gleichung; es gelten also für alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$

$$\Delta \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -k^2 \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (2.2.17)$$

und

$$\mathbf{grad}_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\mathbf{grad}_{\mathbf{y}} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (2.2.18)$$

Beachte, daß wir hierbei vereinfachend Φ anstatt Φ_k schreiben. Das skalare **Einfachschichtpotential** ist für $u \in L^2(\Gamma)$ durch

$$V(u)(\mathbf{x}) := \int_{\Gamma} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \notin \Gamma$$

2. Die Maxwell-Gleichungen

definiert. Der Operator V kann zu einer stetigen Abbildung $V : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H_{loc}^1(\mathbb{R}^3)$ fortgesetzt werden und genügt den Sprungbedingungen

$$[\gamma V(u)]_\Gamma = 0, \quad [\gamma \mathbf{grad} V(u)]_\Gamma = -u\mathbf{n}$$

mit der nach außen gerichteten Normalen \mathbf{n} auf Γ , wobei $[\gamma u]_\Gamma := \gamma^+ u - \gamma^- u$ der Sprung der Spur γ einer Funktion u über den Rand Γ ist. Hierbei bezeichnen γ^+ und γ^- jeweils die aus Ω_E bzw. Ω_C kommende Spur. Aus der zweiten Beziehung folgt

$$[\gamma_n \mathbf{grad} V(u)]_\Gamma = -u, \quad [\mathbf{grad}_\Gamma V(u)]_\Gamma = 0.$$

Dies führt auf die Definition der Randintegraloperatoren

$$Vu(\mathbf{x}) := \gamma Vu(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma \tag{2.2.19}$$

und

$$Su(\mathbf{x}) := \gamma_t \mathbf{grad} Vu(\mathbf{x}) = \mathbf{grad}_\Gamma Vu(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \tag{2.2.20}$$

Es ist bekannt (siehe z.B. Costabel [41]), daß der Randintegraloperator $V : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ stetig ist und eine positive definite Bilinearform auf $H^{-1/2}(\Gamma)$ definiert. Um die restlichen benötigten Randintegraloperatoren definieren zu können, brauchen wir zuerst das **Vektoreinfachschichtpotential**, welches für $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{TH}^2(\Gamma)$ durch

$$\mathbf{V}(\boldsymbol{\lambda})(\mathbf{x}) := \int_\Gamma \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \notin \Gamma$$

definiert ist.

Lemma 2.2.2. *Der Operator \mathbf{V} kann zu einer stetigen Abbildung*

$$\mathbf{V} : \mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_{loc}^1(\mathbb{R}^3)$$

fortgesetzt werden.

Beweis. Siehe Hiptmair [58, Abschnitt 5] oder Buffa et al. [32, Theorem 3.8]. □

Ein nützliches Ergebnis stellt das folgende Lemma dar:

Lemma 2.2.3. *Für $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ gilt*

$$\text{div } \mathbf{V}(\boldsymbol{\lambda}) = V(\text{div}_\Gamma \boldsymbol{\lambda}) \text{ in } \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^3).$$

Beweis. Siehe [58, Lemma 5.2]. □

Weiter definieren wir das **Vektordoppelschichtpotential** für $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{TH}_{\perp}^{-1/2}(\Gamma)$ durch

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\lambda}) := \mathbf{curl} \mathbf{V}(\mathbf{n} \times \boldsymbol{\lambda})$$

und zusätzlich

$$\mathbf{W}(\boldsymbol{\lambda}) := \mathbf{curl} \mathbf{K}(\boldsymbol{\lambda}) = k^2 \mathbf{V}(\mathbf{n} \times \boldsymbol{\lambda}) + \mathbf{grad} \mathbf{V}(\operatorname{div}_{\Gamma}(\mathbf{n} \times \boldsymbol{\lambda})). \quad (2.2.21)$$

Die letzte Gleichung folgt mit der Identität $\mathbf{curl} \mathbf{curl} \equiv \mathbf{grad} \operatorname{div} - \Delta$, der Eigenschaft $\Delta \Phi = -k^2 \Phi$ und schließlich Lemma 2.2.3. Aus dieser Gleichung folgt wiederum, daß $\mathbf{curl} \mathbf{W}(\boldsymbol{\lambda}) = k^2 \mathbf{curl} \mathbf{V}(\mathbf{n} \times \boldsymbol{\lambda})$ gilt, so daß man insgesamt

$$\mathbf{curl} \mathbf{K} = \mathbf{W}, \quad \mathbf{curl} \mathbf{W} = k^2 \mathbf{K} \quad (2.2.22)$$

erhält. Die Vektorschichtpotentiale erfüllen folgende Stetigkeitsbeziehungen:

Lemma 2.2.4. *Die Operatoren*

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &: \mathbf{TH}_{\perp}^{-1/2}(\operatorname{curl}_{\Gamma}, \Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_{loc}(\mathbf{curl} \mathbf{curl}, \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma), \\ \mathbf{W} &: \mathbf{TH}_{\perp}^{-1/2}(\operatorname{curl}_{\Gamma}, \Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_{loc}(\mathbf{curl} \mathbf{curl}, \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma) \end{aligned}$$

sind stetig.

Beweis. Die Aussage findet sich bei [32, Abschnitt 3.3] und folgt sofort aus Lemma 2.2.2 und (2.2.22). \square

Wir wollen nun die Spuren dieser Integraloperatoren auf Γ betrachten. Dazu definieren wir die Randintegraloperatoren als Spuren vom Außengebiet Ω_E her kommend:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\boldsymbol{\lambda}) &:= \gamma_t^+ \mathbf{V}(\boldsymbol{\lambda}), \\ \mathcal{K}(\boldsymbol{\lambda}) &:= \gamma_t^+ \mathbf{K}(\boldsymbol{\lambda}), \\ \tilde{\mathcal{K}}(\boldsymbol{\lambda}) &:= \gamma_N^+ \mathbf{V}(\boldsymbol{\lambda}) = (\gamma_t^{\times})^+ \mathbf{K}(\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{n}) = k^{-2} \gamma_N^+ \mathbf{W}(\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{n}), \\ \mathcal{W}(\boldsymbol{\lambda}) &:= \gamma_N^+ \mathbf{K}(\boldsymbol{\lambda}) = (\gamma_t^{\times})^+ \mathbf{W}(\boldsymbol{\lambda}). \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

Die Umformungen folgen sofort aus den Definitionen der Spuroperatoren und (2.2.22). Wir erinnern zusätzlich an die Definition des Randintegraloperators \mathcal{S} aus (2.2.20). Als nächstes interessiert uns, wie sich die angegebenen Randintegraloperatoren verhalten. Dazu geben wir als erstes folgende Stetigkeitsaussagen an:

Lemma 2.2.5. *Die Operatoren*

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &: \mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{TH}_{\parallel}^{1/2}(\Gamma), \\ \mathcal{K} &: \mathbf{TH}_{\perp}^{-1/2}(\operatorname{curl}_{\Gamma}, \Gamma) \rightarrow \mathbf{TH}_{\perp}^{-1/2}(\operatorname{curl}_{\Gamma}, \Gamma), \\ \tilde{\mathcal{K}} &: \mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma) \rightarrow \mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma), \\ \mathcal{W} &: \mathbf{TH}_{\perp}^{-1/2}(\operatorname{curl}_{\Gamma}, \Gamma) \rightarrow \mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma), \\ \mathcal{S} &: H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{TH}_{\perp}^{-1/2}(\operatorname{curl}_{\Gamma}, \Gamma) \end{aligned}$$

sind stetig.

2. Die Maxwell-Gleichungen

Beweis. Alle Aussagen folgen sofort aus der Definition der Operatoren und durch sukzessive Anwendung der Stetigkeitsaussagen für die Spurooperatoren (Lemmata 2.1.2, 2.1.3 und 2.1.4) und der für die Integraloperatoren (Lemmata 2.2.2 und 2.2.4). \square

Das Verhalten der Randintegraloperatoren als Grenzwerte von Operatoren in Ω wird durch die Sprungrelationen beschrieben:

Lemma 2.2.6. *Für $\boldsymbol{\lambda}$ aus $\mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\Gamma)$ gilt*

$$\begin{aligned} [\gamma_t \mathbf{V}(\boldsymbol{\lambda})]_{\Gamma} &= 0, \\ [\gamma_N \mathbf{V}(\boldsymbol{\lambda})]_{\Gamma} &= -\boldsymbol{\lambda}. \end{aligned}$$

Für $\boldsymbol{\lambda}$ aus $\mathbf{TH}_{\perp}^{-1/2}(\Gamma)$ gilt

$$\begin{aligned} [\gamma_t \mathbf{K}(\boldsymbol{\lambda})]_{\Gamma} &= \boldsymbol{\lambda}, \\ [\gamma_N \mathbf{K}(\boldsymbol{\lambda})]_{\Gamma} &= 0. \end{aligned}$$

Beweis. Siehe Buffa et al [32, Abschnitt 3.3]. \square

Es sei

$$\Phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$$

die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung, dann bezeichnen wir mit V_0 , \mathbf{V}_0 , \mathbf{K}_0 , \mathbf{W}_0 , \mathcal{V}_0 , \mathcal{K}_0 , $\tilde{\mathcal{K}}_0$, \mathcal{W}_0 und \mathcal{S}_0 die entsprechenden Integraloperatoren mit Kern Φ_0 anstelle von Φ . Die Operatoren mit Index 0 sind natürlich nur Spezialfälle der Operatoren ohne Index (nämlich die für $k = 0$), so daß sämtliche bisherigen Aussagen für \mathcal{V} , \mathcal{K} , $\tilde{\mathcal{K}}$ und \mathcal{S} auch für \mathcal{V}_0 , \mathcal{K}_0 , $\tilde{\mathcal{K}}_0$ und \mathcal{S}_0 gelten.

Lemma 2.2.7. *Es gelten die folgenden Eigenschaften der Randintegraloperatoren:*

1. *Die durch \mathcal{V}_0 auf $\mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_{\Gamma} 0, \Gamma)$ induzierte Bilinearform ist symmetrisch und koerzitiv, d.h. es gibt eine Konstante $c > 0$ so daß*

$$\langle \mathcal{V}_0 \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\Gamma} \geq c \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_{\Gamma} 0, \Gamma)}^2 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_{\Gamma} 0, \Gamma).$$

2. *Der Randoperator $\tilde{\mathcal{K}}_0$ ist adjungiert zu $\mathcal{K}_0 - \mathcal{I}$, d.h.*

$$\langle \tilde{\mathcal{K}}_0 \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} = \langle \mathbf{u}, (\mathcal{K}_0 - \text{Id}) \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_{\Gamma} 0, \Gamma), \mathbf{v} \in \mathbf{TH}_{\perp}^{-1/2}(\text{curl}_{\Gamma}, \Gamma).$$

3. *Es gilt*

$$\langle \mathcal{W}_0 \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} = -\langle V_0(\text{curl}_{\Gamma} \mathbf{u}), \text{curl}_{\Gamma} \mathbf{v} \rangle_{-1/2, \Gamma} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{TH}_{\perp}^{-1/2}(\text{curl}_{\Gamma}, \Gamma),$$

wobei $V : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ der gewöhnliche Einfachschichtoperator auf Γ ist.

4. Die durch \mathcal{W}_0 auf $\mathbf{TH}_\perp^{-1/2}(\text{curl}_\Gamma, \Gamma)$ induzierte Bilinearform ist symmetrisch und negativ semidefinit, insbesondere gibt es eine Konstante $c > 0$ so daß

$$-\langle \mathcal{W}_0 \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_\Gamma \geq c \|\text{curl}_\Gamma \mathbf{u}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{TH}_\perp^{-1/2}(\text{curl}_\Gamma, \Gamma).$$

Beweis. Zu allen Beweisen siehe [58]. Es sei angemerkt, daß 4. direkt aus 3. folgt. \square

Wir werden jetzt die genauen Darstellungen dieser Randintegraloperatoren für Dichten aus $\mathbf{TL}^2(\Gamma)$ betrachten. Dann nämlich sind die Operatoren als Cauchy-Hauptwert-Integrale darstellbar. Dazu brauchen wir ein paar neue Operatoren: Für $u \in L^2(\Gamma)$, $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{TL}^2(\Gamma)$ und $\mathbf{x} \in \Gamma$ definiere

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u(\mathbf{x}) &:= \int_\Gamma \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}), \\ \mathcal{L}\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}) &:= \int_\Gamma \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}), \end{aligned} \tag{2.2.24}$$

und für $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{TL}^2(\Gamma)$ und $\mathbf{x} \in \Gamma$ definiere den folgenden Randintegraloperator als Cauchy-Hauptwert-Integral:

$$\mathcal{M}\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}) := \int_\Gamma \text{curl}_\mathbf{x}(\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{y})) dS(\mathbf{y}) = \int_\Gamma \text{grad}_\mathbf{x} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \times \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}).$$

Es ist

$$\begin{aligned} (\mathbf{n} \times \mathcal{M}\boldsymbol{\lambda})(\mathbf{x}) &= \int_\Gamma \mathbf{n}(\mathbf{x}) \times (\text{grad}_\mathbf{x} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \times \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{y})) dS(\mathbf{y}) \\ &= \int_\Gamma \left\{ \text{grad}_\mathbf{x} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{y})) - \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} \right\} dS(\mathbf{y}) \end{aligned} \tag{2.2.25}$$

und

$$\begin{aligned} (\mathbf{n} \cdot \mathcal{M}\boldsymbol{\lambda})(\mathbf{x}) &= \int_\Gamma \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot (\text{grad}_\mathbf{x} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \times \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{y})) dS(\mathbf{y}) \\ &= \int_\Gamma (\mathbf{n}(\mathbf{x}) \times \text{grad}_\mathbf{x} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \cdot \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}), \end{aligned} \tag{2.2.26}$$

wobei wir die Entwicklungssätze (A.1.2) und (A.2.11) aus dem Anhang verwendet haben. Definiere außerdem als Cauchy-Hauptwert-Integral

$$\widetilde{\mathcal{M}}\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}) := \int_\Gamma \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}).$$

2. Die Maxwell-Gleichungen

Lemma 2.2.8. Für $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\zeta} \in \mathbf{TL}^2(\Gamma)$ gilt

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{\lambda}, \mathcal{L}\boldsymbol{\zeta} \rangle_\Gamma &= \langle \mathcal{L}\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\zeta} \rangle_\Gamma, \\ \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathcal{M}(\mathbf{n} \times \boldsymbol{\zeta}) \rangle_\Gamma &= -\langle \mathbf{n} \times \mathcal{M}\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\zeta} \rangle_\Gamma.\end{aligned}$$

Beweis. Die erste Aussage folgt sofort durch Vertauschen der Integrale, für die zweite Aussage benötigt man zusätzlich $\mathbf{grad}_x \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\mathbf{grad}_y \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ und

$$\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{grad}_x \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \times \{\mathbf{n}(\mathbf{x}) \times \boldsymbol{\zeta}(\mathbf{x})\}) = (\mathbf{n}(\mathbf{x}) \times \{\mathbf{grad}_x \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \times \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{y})\}) \cdot \boldsymbol{\zeta}(\mathbf{x})$$

mit den Entwicklungssätzen für das Kreuzprodukt (siehe Anhang A). \square

Die Sprungrelationen lassen sich dann wie folgt schreiben:

Lemma 2.2.9. Es sei $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{TL}^2(\Gamma)$. Mit \mathbf{x}^+ bezeichnen wir einen Punkt aus Ω_E , mit \mathbf{x}^- einen Punkt aus Ω_C und mit \mathbf{x}_0 einen Punkt aus Γ , für den die Normale $\mathbf{n}(\mathbf{x}_0)$ definiert ist. Dann gelten folgende Grenzwerte

1. $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{V}\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}) = \mathcal{L}\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}_0),$
2. $\lim_{\mathbf{x}^\pm \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{n}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{grad} \mathbf{V}\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}) = \widetilde{\mathcal{M}}\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}_0) \mp \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}_0),$
3. $\lim_{\mathbf{x}^\pm \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{curl} \mathbf{V}\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}) = \mathcal{M}\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}_0) \mp \frac{1}{2}\mathbf{n}(\mathbf{x}_0) \times \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}_0),$
4. $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{n}(\mathbf{x}) \times \mathbf{curl} \mathbf{curl} \mathbf{V}\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}) = k^2 \mathbf{n}(\mathbf{x}) \times \mathcal{L}\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}) + \mathbf{n}(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad} \mathcal{L}(\operatorname{div}_\Gamma \boldsymbol{\lambda}).$

Beweis. Siehe entweder Mitrea [76, Abschnitt 3] oder Colton & Kress [40, Abschnitt 6.3] (in [40] werden die Ergebnisse nur für \mathcal{C}^2 -Ränder angegeben). \square

Die in (2.2.23) definierten Randintegraloperatoren haben dann die folgende Form:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}\boldsymbol{\lambda} &:= -\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathcal{L}\boldsymbol{\lambda}), \\ \mathcal{K}\boldsymbol{\lambda} &:= \mathcal{M}(\mathbf{n} \times \boldsymbol{\lambda}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}, \\ \widetilde{\mathcal{K}}\boldsymbol{\lambda} &:= -\mathbf{n} \times \mathcal{M}\boldsymbol{\lambda} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}, \\ \mathcal{W}\boldsymbol{\lambda} &:= -k^2 \mathbf{n} \times \mathcal{L}(\mathbf{n} \times \boldsymbol{\lambda}) - \mathbf{n} \times \mathbf{grad} \mathcal{L}(\operatorname{div}_\Gamma(\mathbf{n} \times \boldsymbol{\lambda})) \\ &= -k^2 \mathbf{n} \times \mathcal{L}(\mathbf{n} \times \boldsymbol{\lambda}) - \mathbf{curl}_\Gamma \mathcal{L}(\mathbf{curl}_\Gamma \boldsymbol{\lambda}).\end{aligned}\tag{2.2.27}$$

Es gilt

Lemma 2.2.10. *Die Randintegraloperatoren*

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &: \mathbf{TL}^2(\Gamma) \rightarrow \mathbf{TL}^2(\Gamma) \cap \mathbf{H}^1(\Gamma), \\ \mathcal{K} &: \mathbf{TL}^2(\Gamma) \rightarrow \mathbf{TL}^2(\Gamma), \\ \tilde{\mathcal{K}} &: \mathbf{TL}^2(\Gamma) \rightarrow \mathbf{TL}^2(\Gamma), \\ \mathcal{W} &: \mathbf{TL}^2(\Gamma) \rightarrow \mathbf{TL}^2(\Gamma)\end{aligned}$$

sind stetig.

Beweis. Siehe Mitrea et al [76, Abschnitt 3 und Theorem 5.1]. Dieses Lemma ist nur eine kleine Auswahl der dort gezeigten Abbildungsverhalten für vom Einfachschichtpotential abgeleitete Pseudodifferentialoperatoren auf Γ . Die Autoren betrachten dort insbesondere, wie diese Operatoren als Isomorphismen zwischen $\mathbf{L}^p(\Gamma)$ -verwandten Räumen wirken. \square

Ein wesentliches Werkzeug bei der Verwendung von Randintegralmethoden für partielle Differentialgleichungen sind Darstellungsformeln, die die gesuchte Lösung als Kombination von Potentialen angeben. Dazu definieren wir zuerst für $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ das **Vektor-Newton-Potential**

$$\mathbf{G}_\Omega(\mathbf{u})(\mathbf{x}) = \int_\Omega \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{u}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}.$$

\mathbf{G} ist eine stetige Abbildung von $\mathbf{L}^2(\Omega)$ nach $\mathbf{H}^2(\Omega)$ [76, Beweis zu Lemma 3.1]. Es folgt der erste Darstellungssatz, er gilt im beschränkten Lipschitz-Gebiet Ω_C :

Lemma 2.2.11. *Es sei $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl} \, \mathbf{curl}, \Omega_C) \cap \mathbf{H}(\mathbf{div}, \Omega_C)$. Dann gilt für alle $\mathbf{x} \in \Omega_C$*

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(\mathbf{x}) &= -k^2 \mathbf{G}_{\Omega_C} \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}_{\Omega_C}(\mathbf{curl} \, \mathbf{curl} \, \mathbf{u})(\mathbf{x}) - \mathbf{grad} \, \mathbf{G}_{\Omega_C}(\mathbf{div} \, \mathbf{u})(\mathbf{x}) \\ &\quad - \mathbf{K}(\mathbf{u})(\mathbf{x}) + \mathbf{grad} \, V(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{x}) - \mathbf{V}(\mathbf{n} \times \mathbf{curl} \, \mathbf{u})(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Beweis. Siehe Mitrea et al [76, Theorem 3.2] oder Hiptmair [58, Abschnitt 4] (für den Fall $k = 0$). \square

Offensichtlich fallen die \mathbf{G} -Terme weg, falls $\mathbf{div} \, \mathbf{u} = 0$ und somit $\mathbf{curl} \, \mathbf{curl} \, \mathbf{u} = \mathbf{grad} \, \mathbf{div} \, \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u} = k^2 \mathbf{u}$ gilt. Dies sind aber nach Lemma 2.2.1 gerade Eigenschaften von Lösungsfeldern \mathbf{E} und \mathbf{H} der Maxwell-Gleichungen in einem homogenen Gebiet. Damit erhalten wir als einfache Folgerung aus dem letzten Lemma:

Lemma 2.2.12. *Für $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl} \, \mathbf{curl}, \Omega_C)$ Lösungen der Maxwell-Gleichungen (2.2.13), (2.2.14) in Ω_C gelten die Stratton-Chu-Formeln*

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{x}) &= -\mathbf{K}(\gamma_t \mathbf{E})(\mathbf{x}) + I_1 + I_2, \quad \mathbf{x} \in \Omega_C, \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}) &= -\mathbf{K}(\gamma_t \mathbf{H})(\mathbf{x}) + J_1 + J_2, \quad \mathbf{x} \in \Omega_C\end{aligned}$$

2. Die Maxwell-Gleichungen

mit

$$\begin{aligned}
I_1 &= \mathbf{grad} V(\gamma_n \mathbf{E}) = \frac{i}{\omega \epsilon^*} \mathbf{grad} V(\operatorname{div}_\Gamma(\mathbf{H} \times \mathbf{n})) = \frac{1}{\omega^2 \epsilon^* \mu} \mathbf{grad} V(\operatorname{div}_\Gamma \gamma_N \mathbf{E}), \\
I_2 &= i\omega \mu \mathbf{V}(\mathbf{H} \times \mathbf{n}) = \mathbf{V}(\gamma_N \mathbf{E}), \\
I_1 + I_2 &= -\frac{i}{\omega \epsilon^*} \mathbf{curl} \mathbf{K}(\gamma_t \mathbf{H}), \\
J_1 &= \mathbf{grad} V(\gamma_n \mathbf{H}) = -\frac{i}{\omega \mu} \mathbf{grad} V(\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{n})), \\
J_2 &= -i\omega \epsilon^* \mathbf{V}(\mathbf{E} \times \mathbf{n}) = -\mathbf{V}(\gamma_N \mathbf{H}), \\
J_1 + J_2 &= \frac{i}{\omega \mu} \mathbf{curl} \mathbf{K}(\gamma_t \mathbf{E}).
\end{aligned}$$

Alle Spurooperatoren γ sind als Spur aus Ω_C kommend, also als γ^- zu lesen.

Beweis. Die Aussage folgt sofort aus dem letzten Theorem, es sind nur die Umformungen der I_1, I_2, J_1, J_2 zu erklären. Mit Lemma 2.1.5 und (2.2.14) gilt $\gamma_n \mathbf{E} = \frac{i}{\omega \epsilon^*} \operatorname{div}_\Gamma(\mathbf{H} \times \mathbf{n})$, woraus sofort die Darstellung von I_1 folgt. Die Gleichung für I_2 folgt sofort aus (2.2.13). Um die Darstellung von $I_1 + I_2$ zu beweisen, beachte man, daß wegen $\Delta \Phi = -k^2 \Phi$ und $\mathbf{curl} \mathbf{curl} \equiv \mathbf{grad} \operatorname{div} - \Delta$ gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{curl} \mathbf{K}(\gamma_t \mathbf{H}) &= -\mathbf{curl} \mathbf{curl} \mathbf{V}(\mathbf{H} \times \mathbf{n}) = -\mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{V}(\mathbf{H} \times \mathbf{n}) + \Delta \mathbf{V}(\mathbf{H} \times \mathbf{n}) \\
&= -\mathbf{grad} V(\operatorname{div}_\Gamma(\mathbf{H} \times \mathbf{n})) - \omega^2 \epsilon^* \mu \mathbf{V}(\mathbf{H} \times \mathbf{n}).
\end{aligned}$$

Die Gleichungen für J_1, J_2 folgen genauso. □

Liegt das \mathbf{x} aus Lemma 2.2.11 und Lemma 2.2.12 in $\Omega_E = \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_C$, so zeigt man leicht:

Lemma 2.2.13. *Für $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl} \mathbf{curl}, \Omega_C)$ Lösungen der Maxwell-Gleichungen (2.2.13), (2.2.14) in Ω_C gilt mit den Bezeichnungen aus Lemma 2.2.11*

$$\begin{aligned}
0 &= -\mathbf{K}(\gamma_t \mathbf{E})(\mathbf{x}) + I_1 + I_2, \quad \mathbf{x} \in \Omega_E, \\
0 &= -\mathbf{K}(\gamma_t \mathbf{H})(\mathbf{x}) + J_1 + J_2, \quad \mathbf{x} \in \Omega_E.
\end{aligned}$$

Alle Spurooperatoren γ sind als Spur aus Ω_C kommend, also als γ^- zu lesen.

Beweis. Siehe Colton & Kress [40, Gleichungen (6.11), (6.12)]. Hier in aller Kürze die Begründung: Das $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ auf der linken Seite der Gleichung in Lemma 2.2.11 wird durch die Singularität von $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ bei $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ erzeugt (vgl. [40, Beweis zu Theorem 6.1]). Ist $\mathbf{x} \in \Omega_E$, so ist Φ analytisch in Ω_C , und man erhält eine Null anstelle des $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. □

Wir betrachten nun das unbeschränkte Gebiet Ω_E , das ebenfalls als homogen vorausgesetzt wird. Um zu einer zu Lemma 2.2.11 und Lemma 2.2.12 analogen Formulierung zu gelangen, bedarf es einer Voraussetzung an das Feld \mathbf{u} , nämlich der Abklingbedingung

$$\mathbf{curl} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \times \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} - ik\mathbf{u}(\mathbf{x}) = o\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right) \quad (2.2.28)$$

für $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ gleichmäßig in alle Richtungen $\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$. Eine Lösung \mathbf{u} der Vektor-Helmholtz-Gleichung $(\Delta + k^2)\mathbf{u} = 0$, die (2.2.28) erfüllt, heißt **abklingend**. Man sieht leicht: Sind $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega_E)$ abklingende Lösungen der Maxwell-Gleichungen (2.2.13), (2.2.14) in Ω_E , so gelten die **Silver-Müller-Abklingbedingungen**

$$\sqrt{\epsilon^*} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \times \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} + \sqrt{\mu} \mathbf{H}(\mathbf{x}) = o\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right) \quad (2.2.29)$$

und

$$\sqrt{\mu} \mathbf{H}(\mathbf{x}) \times \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} - \sqrt{\epsilon^*} \mathbf{E}(\mathbf{x}) = o\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right) \quad (2.2.30)$$

Hiermit beweist man das folgende Lemma:

Lemma 2.2.14. *Für $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl} \mathbf{curl}, \Omega_E)$ abklingende Lösungen der Maxwell-Gleichungen (2.2.13), (2.2.14) in Ω_E gelten die Stratton-Chu-Formeln*

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}) &= \mathbf{K}(\gamma_t \mathbf{E})(\mathbf{x}) - I_1 - I_2, \quad \mathbf{x} \in \Omega_E, \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}) &= \mathbf{K}(\gamma_t \mathbf{H})(\mathbf{x}) - J_1 - J_2, \quad \mathbf{x} \in \Omega_E, \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} I_1 &= \mathbf{grad} V(\gamma_n \mathbf{E}) = \frac{i}{\omega \epsilon^*} \mathbf{grad} V(\operatorname{div}_\Gamma(\mathbf{H} \times \mathbf{n})) = \frac{1}{\omega^2 \epsilon^* \mu} \mathbf{grad} \mathbf{V}(\operatorname{div}_\Gamma \gamma_N \mathbf{E}), \\ I_2 &= i\omega \mu \mathbf{V}(\mathbf{H} \times \mathbf{n}) = \mathbf{V}(\gamma_N \mathbf{E}), \\ I_1 + I_2 &= -\frac{i}{\omega \epsilon^*} \mathbf{curl} \mathbf{K}(\gamma_t \mathbf{H}), \\ J_1 &= \mathbf{grad} V(\gamma_n \mathbf{H}) = -\frac{i}{\omega \mu} \mathbf{grad} V(\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{n})), \\ J_2 &= -i\omega \epsilon^* \mathbf{V}(\mathbf{E} \times \mathbf{n}) = -\mathbf{V}(\gamma_N \mathbf{H}), \\ J_1 + J_2 &= \frac{i}{\omega \mu} \mathbf{curl} \mathbf{K}(\gamma_t \mathbf{E}). \end{aligned}$$

Alle Spurooperatoren γ sind als Spur aus Ω_E kommend, also als γ^+ zu lesen.

Beweis. Die Aussage folgt aus Lemma 2.2.12, indem man das beschränkte Gebiet $\Omega_E \cap B_R$ betrachtet, wobei B_R eine Kugel um Ω_C mit Radius R ist (die Vorzeichen drehen sich

2. Die Maxwell-Gleichungen

um im Vergleich zu Lemma 2.2.12, da die Normale \mathbf{n} auf Γ nun in das Gebiet hineinzeigt). Dadurch kommen Integrale über den Teilrand ∂B_R hinzu, für die gezeigt werden muß, daß sie für $R \rightarrow \infty$ gegen Null laufen. An dieser Stelle kommt die Abklingbedingung (2.2.28) ins Spiel, aus der man $\int_{\partial B_R} |\mathbf{u}|^2 ds = \mathcal{O}(1)$ für $R \rightarrow \infty$ folgert. Siehe dazu [40, Theorem 6.6] oder [76, Abschnitt 6]. \square

3. Diskretisierung

Im folgenden Kapitel geht es um die Diskretisierungen der Finite-Element-Räume und um damit verwandte Themen wie p -hierarchische Zerlegungen, Interpolationsoperatoren und Gitterverfeinerung. Ein Begriff, der des öfteren auftauchen wird, ist der der Regularität. In dieser Arbeit sei ein Gitter \mathcal{T}_h *regulär*, falls es nur reguläre Knoten (also keine hängenden) beinhaltet, und falls das Gitter form-regulär ist. *Form-regulär* bedeutet, daß die Elemente nicht beliebig „spitz“ werden dürfen, d.h.

$$\frac{h_T}{r_T} \leq c_1 \quad \forall T \in \mathcal{T},$$

wobei h_T den Durchmesser eines Elements T bezeichnet und

$$r_T := \max\{r : \text{es existiert eine Kugel } K \text{ mit Radius } r, K_r \subseteq T\}$$

und c_1 eine globale Konstante ist. Weiter bezeichne h_F den Durchmesser einer Fläche F . Dann impliziert die Regularität eines Gitters lokale Uniformität, d.h. es existiert eine Konstante c_2 , so daß

$$h_{T'} \leq c_2 h_T \quad \forall T, T' \in \mathcal{T}_h, T \cap T' \neq \emptyset.$$

Außerdem gilt

$$h_F \leq c_3 h_T \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \quad \forall F \text{ Fläche von } T$$

für eine Konstante c_3 . Ein reguläres Gitter \mathcal{T}_h in Ω induziert ein reguläres Gitter \mathcal{K}_h (das Spurgitter von \mathcal{T}_h) auf Γ .

Wir behandeln hier zwei Arten von drei-dimensionalen Gittern \mathcal{T}_h : Solche mit tetraedrischen Elementen (also Elemente mit vier Seiten) und solche mit Spat-Elementen (auch Parallelepipede genannt). Spate sind Hexaeder (also Körper mit sechs Seiten), die durch eine affin-lineare Transformation aus einem Würfel hervorgehen. Jede Seitenfläche eines Spats ist ein Parallelogramm. Wir sprechen dabei im folgenden vereinfachend von *tetraedrischen* und *hexaedrischen* Gittern. Bei zwei-dimensionalen Gittern \mathcal{K}_h verwenden wir dementsprechend die Bezeichnungen *dreieckig* und *viereckig*, obwohl mit viereckigen Elementen auch hier in Wahrheit Parallelogramme gemeint sind.

3. Diskretisierung

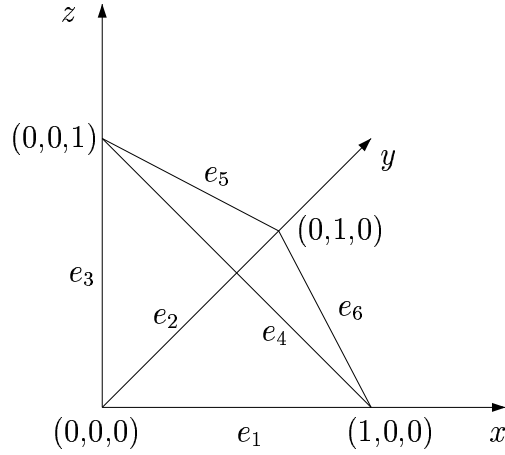


Abbildung 3.1.: Das tetraedrische Referenzelement \hat{T}

3.1. Finite-Element-Räume

3.1.1. Diskretisierung von $\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$

In [84] definiert Nédélec eine Familie konformer Finite Elemente für $\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$. Wir betrachten hier nur den einfachsten Fall stückweiser trilinearere Funktionen. Dazu sei $\mathcal{T}_h := \{T_i\}_i$ eine reguläre Zerlegung von Ω in Tetraeder und

$$\hat{T} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, x_1 + x_2 + x_3 \leq 1\} \quad (3.1.1)$$

das Referenzelement mit den Kanten $e_j, j = 1, \dots, 6$ (vgl. Abb. 3.1). Der Gebrauch von gekrümmten Elementen ist durchaus möglich, doch gehen wir hier vereinfachend davon aus, daß Ω ein Polyeder ist, und damit exakt in nicht-gekrümmte Elemente zerlegt werden kann.

Wir definieren unseren lokalen Finite-Element-Raum durch

$$\mathcal{ND}_1(T) := \{\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{x} : \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^3\} \subset (\mathbb{P}_1(T))^3,$$

was den globalen Finite-Element-Raum

$$\mathcal{ND}_1(\mathcal{T}_h) := \{\boldsymbol{\eta}_h \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega); \boldsymbol{\eta}_{h|T} \in \mathcal{ND}_1(T) \forall T \in \mathcal{T}_h\}$$

liefert. Der Index 1 bezieht sich auf den Gebrauch trilinearere Funktionen, und $\mathbb{P}_k(T)$ bezeichne den Raum der Polynome vom Grad k . Auf Tetraedern ist ein Monom vom Grad k , wenn die Summe der Exponenten höchstens k ergibt.

Die lokalen Freiheitsgrade sind durch

$$\Xi^{\mathcal{N}\mathcal{D}_1}(T) := \left\{ \boldsymbol{\zeta} \mapsto \int_{e_j} \boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{t}_j \, ds; j = 1, \dots, 6 \right\} \quad (3.1.2)$$

gegeben, wobei \mathbf{t}_j der Tangentialvektor ist, der e_j beschreibt. Man beachte, daß $\Xi^{\mathcal{N}\mathcal{D}_1}(T)$ und $\mathcal{N}\mathcal{D}_1(T)$ beide die Dimension sechs haben. Für die Approximation von $\mathbf{H}_0(\mathbf{curl}, \Omega)$ (im Gegensatz zu $\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$) definiert man kanonisch die Räume $\mathcal{N}\mathcal{D}_{1,0}(T)$ und $\mathcal{N}\mathcal{D}_{1,0}(\Gamma)$, indem man die Freiheitsgrade auf Kanten, die in Γ liegen, weglässt.

Weiter definieren wir $\Pi^{\mathcal{N}\mathcal{D}_1(T)} \mathbf{u} \in \mathcal{N}\mathcal{D}_1(T)$ als die eindeutige Interpolierende von $\mathbf{u} \in (\mathcal{C}^\infty(\overline{T}))^3$, so daß

$$\alpha(\mathbf{u} - \Pi^{\mathcal{N}\mathcal{D}_1(T)} \mathbf{u}) = 0 \quad \forall \alpha \in \Xi^{\mathcal{N}\mathcal{D}_1}(T).$$

Das oben beschriebene Finite Element ist konform in $\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$ [84, Theorem 1] – diese Eigenschaft ist äquivalent zur folgenden Bedingung [84, Lemma 6]:

- Seien T_1 und T_2 zwei Elemente mit einer gemeinsamen Fläche F und sei $\mathbf{u} \in (\mathcal{C}^\infty(\overline{T_1 \cup T_2}))^3$. Dann sind die Tangentialanteile von $\Pi^{\mathcal{N}\mathcal{D}_1(T_1)} \mathbf{u}$ und $\Pi^{\mathcal{N}\mathcal{D}_1(T_2)} \mathbf{u}$ gleich auf F , d.h.

$$\gamma_t \Pi^{\mathcal{N}\mathcal{D}_1(T_1)} \mathbf{u} = \gamma_t \Pi^{\mathcal{N}\mathcal{D}_1(T_2)} \mathbf{u} \quad \text{auf } F.$$

Nun sei $\{\hat{\mathbf{b}}_\kappa, \kappa \in \Xi^{\mathcal{N}\mathcal{D}_1}(\hat{T})\}$ die duale Basis von $\mathcal{N}\mathcal{D}_1(\hat{T})$ bezüglich $\Xi^{\mathcal{N}\mathcal{D}_1}(\hat{T})$, d.h.

$$\int_{e_{\kappa_i}} \hat{\mathbf{b}}_{\kappa_j} \cdot \mathbf{t}_i \, ds = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, \dots, 6. \quad (3.1.3)$$

Auf dem Referenzelement \hat{T} erhalten wir (wobei wir $\hat{\mathbf{b}}_j$ statt $\hat{\mathbf{b}}_{\kappa_j}$ und (x, y, z) statt (x_1, x_2, x_3) schreiben):

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{b}}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z - y \\ x \\ x \end{pmatrix}, & \hat{\mathbf{b}}_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ -x - z \\ y \end{pmatrix}, & \hat{\mathbf{b}}_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ z \\ -x - y \end{pmatrix}, \\ \hat{\mathbf{b}}_4 &= \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}, & \hat{\mathbf{b}}_5 &= \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix}, & \hat{\mathbf{b}}_6 &= \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ist ein Element T das Bild von \hat{T} unter der durch

$$\mathbf{x} = B\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{d}, \quad B \in \mathcal{L}(\hat{T}, \mathbb{R}^3), \quad \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3 \quad (3.1.4)$$

beschriebenen Transformation, dann erhält man eine Basis auf T durch

$$\mathbf{b}_j(\mathbf{x}) = (B^\top)^{-1} \hat{\mathbf{b}}_j(\hat{\mathbf{x}}), \quad j = 1, \dots, 6. \quad (3.1.5)$$

3. Diskretisierung

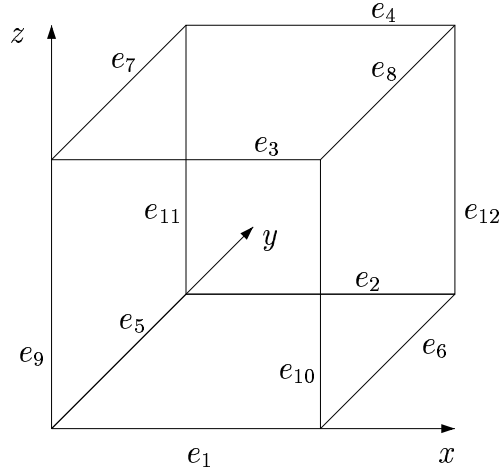


Abbildung 3.2.: Das kubische Referenzelement \widehat{T}

\mathcal{ND} ist also invariant unter affinen Transformationen, vorausgesetzt wir verwenden die obige Basistransformation [84, Theorem 2].

Die globalen Formfunktionen erhält man wie gewohnt durch Zusammenfassen der zu einer gemeinsamen Seite gehörenden lokalen Basisfunktionen. Damit haben wir einen Freiheitsgrad pro Kante von \mathcal{T}_h .

Die Konstruktion von Nédélec Finiten-Elementen auf Hexaedern geschieht in analoger Art und Weise:

Es sei $\mathcal{T}_h := \{T_i\}_i$ eine reguläre Zerlegung von Ω in Hexaeder (eigentlich Spate, vgl. Seite 39) und

$$\widehat{T} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, 3\} = [-1, 1]^3 \quad (3.1.6)$$

das Referenzelement mit den Kanten e_j , $j = 1, \dots, 12$ (vgl. Abb. 3.2).

Es sei $\mathbb{P}_{k,l,m}(T)$ der Raum der Polynome in drei Variablen (x, y, z) mit maximalen Graden k in x , l in y und m in z . Auf Hexaedern sei $\mathbb{P}_k := \mathbb{P}_{k,k,k}$ (im Gegensatz zur Definition von $\mathbb{P}_k(T)$ auf Tetraedern, vgl. Seite 40). Definiere dann den lokalen Finite-Element-Raum

$$\mathcal{ND}_1(T) := \{\mathbf{u} : u_1 \in \mathbb{P}_{0,1,1}(T), u_2 \in \mathbb{P}_{1,0,1}(T), u_3 \in \mathbb{P}_{1,1,0}(T)\}.$$

Wir definieren den globalen Finite-Element-Raum $\mathcal{ND}_1(\mathcal{T}_h)$, die Freiheitsgrade $\Xi^{\mathcal{ND}_1}(T)$ und den Interpolationsoperator $\Pi^{\mathcal{ND}_1}(T)$ genauso wie im tetraedrischen Fall auf den Seiten 40f. Diesmal haben $\Xi^{\mathcal{ND}_1}(T)$ und $\mathcal{ND}_1(T)$ die Dimension zwölf. Wieder ist der Finite-Element-Raum konform in $\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$ [84, Theorem 5].

Die duale Basis $\{\hat{\mathbf{b}}_\kappa, \kappa \in \Xi^{\mathcal{N}\mathcal{D}_1}(\hat{T})\}$ von $\mathcal{N}\mathcal{D}_1(\hat{T})$ bezüglich $\Xi^{\mathcal{N}\mathcal{D}_1}(\hat{T})$ ist dann

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{b}}_1 &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} (1-y)(1-z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \hat{\mathbf{b}}_2 &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} (1+y)(1-z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{\mathbf{b}}_3 &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} (1-y)(1+z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \hat{\mathbf{b}}_4 &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} (1+y)(1+z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{\mathbf{b}}_5 &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 \\ (1-x)(1-z) \\ 0 \end{pmatrix}, & \hat{\mathbf{b}}_6 &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 \\ (1+x)(1-z) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{\mathbf{b}}_7 &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 \\ (1-x)(1+z) \\ 0 \end{pmatrix}, & \hat{\mathbf{b}}_8 &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 \\ (1+x)(1+z) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{\mathbf{b}}_9 &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (1-x)(1-y) \end{pmatrix}, & \hat{\mathbf{b}}_{10} &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (1+x)(1-y) \end{pmatrix}, \\ \hat{\mathbf{b}}_{11} &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (1-x)(1+y) \end{pmatrix}, & \hat{\mathbf{b}}_{12} &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (1+x)(1+y) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wie bisher ist $\mathcal{N}\mathcal{D}$ invariant unter der affinen Transformation (3.1.4) wenn wir die Basisfunktionen mittels (3.1.5) umformen, und wir erhalten die globalen Basisfunktionen durch Zusammensetzen der zu einer Kante gehörenden lokalen Basisfunktionen.

Bemerkung 2. Sowohl für Tetraeder wie auch für Hexaeder rechnet man einfach nach, daß der Ausdruck $\mathbf{b}_{\kappa_j} \cdot \mathbf{t}_i$ in (3.1.3) konstant auf e_j ist, so daß man für Nédélec-Elemente niedrigster Ordnung die Freiheitsgrade

$$\int_{e_{\kappa_i}} \mathbf{b}_{\kappa_j} \cdot \mathbf{t}_i \, ds = |e_{\kappa_i}| \mathbf{b}_{\kappa_j} \cdot \mathbf{t}_i$$

erhält. Insbesondere ist $\mathbf{b}_{\kappa_j} \cdot \mathbf{t}_i = 0$ für $i \neq j$.

Für tetraedrische wie hexaedrische Elemente gilt die folgende Approximationseigenschaft:

Lemma 3.1.1. *Für $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^2(T) \subset \mathbf{H}(\mathbf{curl}, T)$ und ein Element T mit Durchmesser h_T gilt*

$$\|\mathbf{u} - \Pi^{\mathcal{N}\mathcal{D}_1(T)} \mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl}, T)} \leq ch_T |\mathbf{u}|_{\mathbf{H}^2(T)}.$$

Beweis. Siehe [84, Theorem 2]. Das Beweisprinzip ist genau das Gleiche wie das, welches wir später in Lemma 3.3.3 ausführlich anwenden. Hier in aller Kürze: Zuerst wird

3. Diskretisierung

die Aussage über eine Stabilitätsabschätzung für $\Pi^{\mathcal{ND}_1(T)}$ und die Äquivalenz der \mathbf{H}^1 -Seminorm auf $\mathbf{H}^1/\mathbb{P}_0$ zur \mathbf{H}^1 -Norm auf dem Referenzelement \widehat{T} gezeigt, und diese dann mittels der Transformation (3.1.4) auf T übertragen. Schließlich wird von der Beziehung $|\det B| \sim h_T$ (dies folgt aus der Form-Regularität, siehe [38, Theorem 3.1.3]) Gebrauch gemacht. \square

3.1.2. Diskretisierung von $\mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ und $\mathbf{TH}_{\perp}^{-1/2}(\operatorname{curl}_{\Gamma}, \Gamma)$

Als nächstes suchen wir einen Finite-Element-Raum zur Diskretisierung von $\mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma)$. Wir haben vorhin vereinfachend angenommen, daß Ω ein Polyeder, Γ also stückweise eben ist. Anderenfalls würden wir Ω durch einen Polyeder $\widehat{\Omega}$ ersetzen und das diskrete Randwertproblem auf $\widehat{\Gamma} := \partial\widehat{\Omega}$ statt auf Γ lösen.

Nach Lemma 2.1.2, 2 wissen wir, daß der Raum $\mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ gerade der gedrehte Tangentialspurraum von $\mathbf{H}(\operatorname{curl}, \Omega)$ ist. Wir haben soeben dargestellt, wie $\mathbf{H}(\operatorname{curl}, \Omega)$ mittels dem Raum der Nédélec-Elemente diskretisiert werden kann. Folglich liegt es nahe, dessen gedrehte Tangentialspur zur Diskretisierung von $\mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ zu verwenden. Es ist bekannt [55, Lemma 2.4], daß der gedrehte Tangentialspurraum von \mathcal{ND}_k gerade der Raviart-Thomas Finite-Element-Raum der Ordnung k in zwei Dimensionen ist, hier mit \mathcal{RT}_k bezeichnet:

$$\gamma_t^{\times} : \mathcal{ND}_k(\mathcal{T}_h) \rightarrow \mathcal{RT}_k(\mathcal{K}_h), \quad (3.1.7)$$

wobei \mathcal{K}_h das aus dreieckigen bzw. viereckigen Elementen bestehende Spurgitter von \mathcal{T}_h ist. Eine Definition der Raviart-Thomas-Räume findet sich z.B. in [25, 84]. Es gilt sogar, daß die durch diese Abbildung induzierten Freiheitsgrade mit denen für \mathcal{RT}_k übereinstimmen [55].

Da wir nur den Fall $k = 1$ betrachten, nehmen wir uns die Zeit, diese Behauptung zu überprüfen und dabei ein bißchen mehr ins Detail zu gehen.

Es sei \widehat{T} das Referenzelement (3.1.1), und sei $\Gamma = \widehat{K}$ die „untere“ Seite von \widehat{T} , also das durch

$$\widehat{K} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_i \geq 0, i = 1, 2, x_3 = 0, x_1 + x_2 \leq 1\}$$

definierte Dreieck mit den Kanten e_1, e_2, e_6 und dem Normalenvektor $\mathbf{n} = (0, 0, -1)^{\top}$. Um Verwirrung zu vermeiden, schreiben wir jetzt e_3 statt e_6 . Die gedrehte Tangentialspurabbildung γ_t^{\times} bilde also von \widehat{T} nach \widehat{K} ab. Man prüft schnell nach, daß folgende Beziehung gilt:

$$\mathcal{ND}_1(\widehat{T}) \xrightarrow{\gamma_t^{\times}} \mathcal{RT}_1(\widehat{K}) = \{\boldsymbol{\alpha} + \beta\mathbf{x} : \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^2, \beta \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{P}_1(\widehat{K}),$$

wobei wir bei Vektoren aus \mathcal{RT}_1 die dritte Dimension weglassen, da diese Komponente stets Null ist. Wenn nötig, identifizieren wir $(x, y)^{\top} \in \mathbb{R}^2$ mit $(x, y, 0)^{\top} \in \mathbb{R}^3$. Die Definition von \mathbb{P}_k auf Dreiecken ist analog zu der auf Tetraedern (vgl. Seite 40).

Wir definieren die Basisfunktionen

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_1 &:= \gamma_t^\times \hat{\mathbf{b}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}, & \hat{\varphi}_2 &:= \gamma_t^\times \hat{\mathbf{b}}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \\ \hat{\varphi}_3 &:= \gamma_t^\times \hat{\mathbf{b}}_6 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{3.1.8}$$

Die Aussagen der folgenden zwei Lemmata 3.1.2 und 3.1.3 werden in [55, Lemma 2.4] bewiesen.

Lemma 3.1.2. *Es gilt*

$$\int_{e_j} \hat{\varphi}_i \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{t}_j) ds = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, 2, 3,$$

wobei \mathbf{t}_j den Tangentialvektor in Richtung e_j darstellt.

Beweis. Zur Vereinfachung schreiben wir jetzt $\hat{\mathbf{b}}_3$ an Stelle von $\hat{\mathbf{b}}_6$. Dann haben wir $\hat{\varphi}_i = \mathbf{n} \times \hat{\mathbf{b}}_i$ auf der Kante e_j ($i, j = 1, 2, 3$). Hieraus erhalten wir

$$(\hat{\varphi}_i \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{t}_j = ((\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})\hat{\mathbf{b}}_i - (\hat{\mathbf{b}}_i \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}) \cdot \mathbf{t}_j = \hat{\mathbf{b}}_i \cdot \mathbf{t}_j.$$

Aus der Definition von $\hat{\mathbf{b}}_i$ folgt

$$\delta_{ij} = \int_{e_j} \hat{\mathbf{b}}_i \cdot \mathbf{t}_j ds = \int_{e_j} (\hat{\varphi}_i \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{t}_j ds = \int_{e_j} \hat{\varphi}_i \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{t}_j) ds.$$

□

Dieses Lemma definiert unsere Freiheitsgrade $\Xi^{\mathcal{RT}_1}(K)$ für \mathcal{RT}_1 , die mit den in [25] gegebenen Freiheitsgraden für \mathcal{RT}_1 übereinstimmen. Die Dimension von $\Xi^{\mathcal{RT}_1}(K)$ ist natürlich drei, passend zu den drei Kanten des dreieckigen Elements K . Wieder definiert dies die Interpolierende $\Pi^{\mathcal{RT}_1(K)}\varphi$ einer Funktion $\varphi \in (\mathcal{C}^\infty(\bar{K}))^2$, analog zu $\Pi^{\mathcal{ND}_1(T)}\mathbf{u}$ im letzten Abschnitt:

$$\alpha(\varphi - \Pi^{\mathcal{RT}_1(K)}\varphi) = 0 \quad \forall \alpha \in \Xi^{\mathcal{RT}_1}(K).$$

Erneut erhält man die globalen Formfunktionen durch Zusammenfassen zweier zu einer gemeinsamen Kante gehörenden lokalen Basisfunktionen.

Bemerkung 3. Wie bei den Nédélec-Elementen niedrigster Ordnung erhält man, daß $\varphi_i \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{t}_j)$ auf e_j stets eine Konstante ergibt, so daß die Freiheitsgrade für Raviart-Thomas-Elemente niedrigster Ordnung die Form

$$\int_{e_j} \varphi_i \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{t}_j) ds = |e_j| \varphi_i \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{t}_j)$$

haben, und es gilt $\varphi_i \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{t}_j) = 0$ für $i \neq j$.

3. Diskretisierung

Sei T ein Tetraeder und K eine Seite von T . Aufgrund von Lemma 3.1.2 und der Konstruktion von $\Pi^{\mathcal{RT}_1(K)}$ erhalten wir sofort:

Lemma 3.1.3. *Sei $\mathbf{u} \in (\mathcal{C}^\infty(\bar{T}))^3$. Dann ist $\gamma_t^\times \Pi^{\mathcal{ND}_1(T)} \mathbf{u} = \Pi^{\mathcal{RT}_1(K)} \gamma_t^\times \mathbf{u}$.*

Nun wollen wir das Abbildungsverhalten analog zu (3.1.5) zwischen Basisfunktionen auf dem Referenzelement \widehat{K} und auf einem Element K bestimmen. Dazu sei das Volumenelement T das Abbild von \widehat{T} unter der durch (3.1.4) beschriebenen affinen Transformation $F(\widehat{\mathbf{x}}) = B\widehat{\mathbf{x}} + \mathbf{d}$. Die Matrix B habe die Gestalt $B = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ mit Spaltenvektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^3$. Die Seiten von T seien mit $K_{126}, K_{134}, K_{235}, K_{456}$ bezeichnet, so daß K_{ijk} das Bild von \widehat{K}_{ijk} unter F ist. Hierbei ist \widehat{K}_{ijk} die von den Kanten e_i, e_j, e_k aufgespannte Seite von \widehat{T} (vgl. Abb. 3.1). Mit γ_{ijk}^\times bzw. $\widehat{\gamma}_{ijk}^\times$ bezeichnen wir die Abbildung γ_t^\times von T nach K_{ijk} bzw. von \widehat{T} nach \widehat{K}_{ijk} .

Lemma 3.1.4. *Mit den Bezeichnungen von oben gelten für die Basisfunktionen $\varphi_\ell := \gamma_t^\times \mathbf{b}_{g(\ell)}$ auf den Seiten von T (wobei $g : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, \dots, 6\}$ die Zuordnung zwischen \mathcal{RT} -Basisfunktionen und \mathcal{ND} -Basisfunktionen auf einer Seite K von T beschreibt) die Transformationen*

$$\varphi_\ell(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2\|} (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) \tilde{\varphi}_\ell(\widehat{\mathbf{x}}) \quad (3.1.9)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1 &:= \mathbf{a}_1, \mathbf{c}_2 := \mathbf{a}_2, \tilde{\varphi}_\ell(\widehat{\mathbf{x}}) := \widehat{\varphi}_\ell(\tilde{\mathbf{x}}), \tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \widehat{x} \\ \widehat{y} \end{pmatrix} && \text{auf } K_{126}, \\ \mathbf{c}_1 &:= \mathbf{a}_1, \mathbf{c}_2 := \mathbf{a}_3, \tilde{\varphi}_\ell(\widehat{\mathbf{x}}) := \widehat{\varphi}_\ell(\tilde{\mathbf{x}}), \tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \widehat{x} \\ \widehat{z} \end{pmatrix} && \text{auf } K_{134}, \\ \mathbf{c}_1 &:= \mathbf{a}_2, \mathbf{c}_2 := \mathbf{a}_3, \tilde{\varphi}_\ell(\widehat{\mathbf{x}}) := \widehat{\varphi}_\ell(\tilde{\mathbf{x}}), \tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \widehat{y} \\ \widehat{z} \end{pmatrix} && \text{auf } K_{235}, \\ \mathbf{c}_1 &:= \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3, \mathbf{c}_2 := \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3, \tilde{\varphi}_\ell(\widehat{\mathbf{x}}) := -\widehat{\varphi}_\ell(\tilde{\mathbf{x}}), \tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \widehat{x} \\ \widehat{y} \end{pmatrix} && \text{auf } K_{456}. \end{aligned}$$

Es sind $\widehat{\varphi}_\ell$ die Raviart-Thomas Basisfunktionen auf $\widehat{K}_{126} = \widehat{K}$ wie in (3.1.8) definiert. Die Numerierung der φ_ℓ erfolgt passend zu der der $\widehat{\varphi}_\ell$, d.h. φ_1 und φ_2 gehören zu den Kanten von K_{ijk} mit den Richtungsvektoren \mathbf{c}_1 und \mathbf{c}_2 , φ_3 gehört zu der dritten Kante von K_{ijk} (mit Richtungsvektor $\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2$).

Beweis. Nach (3.1.5) gilt $\mathbf{b}_j(\mathbf{x}) = (B^\top)^{-1} \widehat{\mathbf{b}}_j(\widehat{\mathbf{x}})$, wobei $\widehat{\mathbf{b}}_j$ die Basisfunktionen auf dem Referenzelement bezeichnen. Für $B = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ rechnet man die Darstellung $(B^\top)^{-1} = \frac{1}{\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)} (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)$ nach. Die Seite $K_{126} = F(\widehat{K}_{126})$ wird von

den Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ aufgespannt und besitzt die Normale $\mathbf{n} = -\frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|}$. Damit gilt mit dem Entwicklungssatz (A.2.10) im Anhang für mehrfache Kreuzprodukte

$$\begin{aligned} \gamma_{126}^\times \hat{\mathbf{b}}_{g(\ell)} &= -\mathbf{n} \times (B^\top)^{-1} \cdot \hat{\mathbf{b}}_{g(\ell)} = -\frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\| \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)} \times (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \hat{\mathbf{b}}_{g(\ell)} \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\| \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)} \left(((\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{a}_3) \mathbf{a}_2, -((\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{a}_3) \mathbf{a}_1, 0 \right) \cdot \hat{\mathbf{b}}_{g(\ell)} \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|} (\mathbf{a}_2, -\mathbf{a}_1, 0) \cdot \hat{\mathbf{b}}_{g(\ell)} = \frac{1}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|} (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, 0) \cdot \hat{\mathbf{b}}_{g(\ell)} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|} (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, 0) \cdot \hat{\gamma}_{126}^\times \hat{\mathbf{b}}_{g(\ell)} = \frac{1}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|} (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \cdot \hat{\varphi}_\ell. \end{aligned}$$

Damit ist die Aussage des Lemmas für K_{126} bewiesen. Die Umrechnungen für die anderen Seiten folgen durch Koordinatentransformation. So besitzt K_{134} die Normale $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3\|}$, woraus

$$\begin{aligned} \gamma_{134}^\times \hat{\mathbf{b}}_{g(\ell)} &= \frac{-\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3\| \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)} \times (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \hat{\mathbf{b}}_{g(\ell)} \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3\|} (-\mathbf{a}_3, 0, \mathbf{a}_1) \cdot \hat{\mathbf{b}}_{g(\ell)} = \frac{1}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3\|} (\mathbf{a}_1, 0, \mathbf{a}_3) \cdot \hat{\mathbf{b}}_{g(\ell)} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3\|} (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3) \cdot \begin{pmatrix} -\hat{b}_3 \\ \hat{b}_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3\|} (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, 0) \cdot \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_3 \\ \hat{b}_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

folgt. Sei nun $\tilde{\mathbf{x}} := G(\hat{\mathbf{x}}) := D\hat{\mathbf{x}}$ mit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ die Abbildung von \hat{K}_{134} auf das Referenzelement \hat{K}_{126} . Es ist $(D^\top)^{-1} = D$. Nach dem Transformationsgesetz (3.1.5) gilt, daß

$$\tilde{\mathbf{b}}_{g(\ell)}(\tilde{\mathbf{x}}) := \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_3 \\ \hat{b}_2 \end{pmatrix}(\hat{\mathbf{x}}) = (D^\top)^{-1} \hat{\mathbf{b}}_{g(\ell)}(\hat{\mathbf{x}})$$

eine Nédélec-Basisfunktion auf dem Referenzelement \hat{K}_{126} ist. Also ist der gedrehte Tangentialanteil von $\tilde{\mathbf{b}}_{g(\ell)}(\tilde{\mathbf{x}})$ eine Raviart-Thomas-Basis-Funktion auf \hat{K}_{126} , d.h.

$$\begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_3 \\ \hat{b}_2 \end{pmatrix}(\hat{\mathbf{x}}) \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{b}}_{g(\ell)}(\tilde{\mathbf{x}}) \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \hat{\varphi}_\ell(\tilde{\mathbf{x}}).$$

Bei den anderen zwei Flächen verfährt man genauso. Für K_{456} rechnen wir noch einmal vor: Die Richtungsvektoren der ersten zwei Kanten der Fläche sind $\mathbf{c}_1 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3$ und $\mathbf{c}_2 = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3$, folglich ist $\mathbf{n} = \frac{(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3) \times (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3)}{\|(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3) \times (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3)\|} = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{\|(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3) \times (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3)\|}$ die Normale auf K_{456} . Damit gilt

$$\begin{aligned} \gamma_{456}^\times \hat{\mathbf{b}}_{g(\ell)} &= -\frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{\|(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3) \times (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3)\| \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)} \times (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \hat{\mathbf{b}}_{g(\ell)} \\ &= \frac{-1}{\|(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3) \times (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3)\|} (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2) \cdot \hat{\mathbf{b}}_{g(\ell)} \\ &= \frac{-1}{\|(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3) \times (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3)\|} (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3) \cdot \begin{pmatrix} \hat{b}_3 - \hat{b}_2 \\ \hat{b}_1 - \hat{b}_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\|(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3) \times (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3)\|} (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3, 0) \cdot \begin{pmatrix} \hat{b}_3 - \hat{b}_1 \\ \hat{b}_3 - \hat{b}_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. Diskretisierung

Es ist $G(\hat{\mathbf{x}}) = D\hat{\mathbf{x}} + d$ mit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ und $d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Abbildung von \widehat{K}_{456} nach \widehat{K}_{126} . Wegen $(D^\top)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ erhält man wie oben

$$\begin{pmatrix} \hat{b}_3 - \hat{b}_1 \\ \hat{b}_3 - \hat{b}_2 \\ 0 \end{pmatrix} (\hat{\mathbf{x}}) \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (-D^\top)^{-1} \hat{b}_{g(\ell)}(\hat{\mathbf{x}}) \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\hat{\varphi}_\ell(\tilde{\mathbf{x}})$$

mit $\tilde{\mathbf{x}} := G(\hat{\mathbf{x}})$. Damit ist der Beweis abgeschlossen. \square

Zur Konstruktion des Raviart-Thomas-Raums auf viereckigen Finiten Elementen gehen wir in genau gleicher Weise vor:

Als Referenzelement nehme man

$$\widehat{K} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x_1, x_2 \leq 1\} = [-1, 1]^2,$$

die untere Seite von \widehat{T} wie in (3.1.6) definiert. Es hat die Kanten e_1, e_2, e_5 and e_6 . Unter Auslassung der überflüssigen dritten Dimension erhalten wir die Abbildung

$$\mathcal{N}\mathcal{D}_1(\widehat{T}) \xrightarrow{\gamma_t^\times} \mathcal{RT}_1(\widehat{K}) = \{\mathbf{u} : u_1 \in \mathbb{P}_{1,0}, u_2 \in \mathbb{P}_{0,1}\}$$

(die Definition von $\mathbb{P}_{k,l}$ ist analog zu der auf Hexaedern, vgl. Seite 42, und es ist $\mathbb{P}_k := \mathbb{P}_{k,k}$) und die Basisfunktionen

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_1 &:= \gamma_t^\times \hat{\mathbf{b}}_1 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - y \end{pmatrix}, & \hat{\varphi}_2 &:= \gamma_t^\times \hat{\mathbf{b}}_2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 + y \end{pmatrix}, \\ \hat{\varphi}_3 &:= \gamma_t^\times \hat{\mathbf{b}}_5 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 + x \\ 0 \end{pmatrix}, & \hat{\varphi}_4 &:= \gamma_t^\times \hat{\mathbf{b}}_6 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 - x \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

Wie vorhin sind die Freiheitsgrade durch Lemma 3.1.2 definiert (nur läuft j jetzt von 1 bis 4), und sowohl die darauffolgende Bemerkung 3 wie das Lemma 3.1.3 behalten ihre Gültigkeit. Das Abbildungsverhalten zwischen Raviart-Thomas-Basisfunktionen auf einem Parallelogramm K und denen auf dem Referenzelement \widehat{K} ist wie in Lemma 3.1.4 gegeben, wir geben hier das analoge Ergebnis ohne Beweis an:

Lemma 3.1.5. *Mit den Bezeichnungen analog zu denen von Lemma 3.1.4 gelten für die Basisfunktionen $\varphi_\ell := \gamma_t^\times \mathbf{b}_{g(\ell)}$ auf den Seiten eines Hexaeders T die Transformationen*

$$\varphi_\ell(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2\|} (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) \tilde{\varphi}_\ell(\hat{\mathbf{x}}), \tag{3.1.11}$$

mit

$$\begin{aligned}
 \mathbf{c}_1 &:= \mathbf{a}_1, \mathbf{c}_2 := \mathbf{a}_2, \tilde{\varphi}_\ell(\hat{\mathbf{x}}) := \hat{\varphi}_\ell(\tilde{\mathbf{x}}), \tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} && \text{auf } K_{1,2,5,6}, \\
 \mathbf{c}_1 &:= \mathbf{a}_1, \mathbf{c}_2 := \mathbf{a}_2, \tilde{\varphi}_\ell(\hat{\mathbf{x}}) := -\hat{\varphi}_\ell(\tilde{\mathbf{x}}), \tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} && \text{auf } K_{3,4,7,8}, \\
 \mathbf{c}_1 &:= \mathbf{a}_1, \mathbf{c}_2 := \mathbf{a}_3, \tilde{\varphi}_\ell(\hat{\mathbf{x}}) := \hat{\varphi}_\ell(\tilde{\mathbf{x}}), \tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{z} \end{pmatrix} && \text{auf } K_{1,3,9,10}, \\
 \mathbf{c}_1 &:= \mathbf{a}_1, \mathbf{c}_2 := \mathbf{a}_3, \tilde{\varphi}_\ell(\hat{\mathbf{x}}) := -\hat{\varphi}_\ell(\tilde{\mathbf{x}}), \tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{z} \end{pmatrix} && \text{auf } K_{2,4,11,12}, \\
 \mathbf{c}_1 &:= \mathbf{a}_2, \mathbf{c}_2 := \mathbf{a}_3, \tilde{\varphi}_\ell(\hat{\mathbf{x}}) := \hat{\varphi}_\ell(\tilde{\mathbf{x}}), \tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} && \text{auf } K_{5,7,9,11}, \\
 \mathbf{c}_1 &:= \mathbf{a}_2, \mathbf{c}_2 := \mathbf{a}_3, \tilde{\varphi}_\ell(\hat{\mathbf{x}}) := -\hat{\varphi}_\ell(\tilde{\mathbf{x}}), \tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} && \text{auf } K_{6,8,10,12}.
 \end{aligned}$$

Es sind $\hat{\varphi}_\ell$ die Raviart-Thomas Basisfunktionen auf $\widehat{K}_{1,2,5,6} = \widehat{K}$ wie in (3.1.10) definiert. Die Numerierung der φ_ℓ erfolgt passend zu der der $\hat{\varphi}_\ell$, d.h. φ_1 und φ_2 gehören zu den Kanten von $K_{i,j,k,l}$ mit dem Richtungsvektor \mathbf{c}_1 , und φ_3 und φ_4 gehören zu den Kanten von $K_{i,j,k,l}$ mit dem Richtungsvektor \mathbf{c}_2 .

Daß wir die obigen Transformationen erhalten haben, ist keine Überraschung – es war sogar zu erwarten, denn in [25] findet sich die Normalenanteil-erhaltende Piola-Transformation

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) := \frac{1}{|\det DF(\hat{\mathbf{x}})|} DF(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\boldsymbol{\varphi}}(\hat{\mathbf{x}})$$

als Abbildung von $\mathbf{H}(\operatorname{div}, \widehat{K})$ nach $\mathbf{H}(\operatorname{div}, K)$ für $\widehat{K}, K \in \mathbb{R}^n$, $K \ni \mathbf{x} = F(\hat{\mathbf{x}}) \in \widehat{K}$. Betrachten wir nun unser Referenzelement \widehat{K} als Teilmenge des \mathbb{R}^3 statt des \mathbb{R}^2 (also $\widehat{K} \rightsquigarrow \widehat{K} \times \{0\}$) und damit F als Abbildung von \mathbb{R}^3 nach \mathbb{R}^3 , also $F(\hat{\mathbf{x}}) = A\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{a}$ mit $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mp \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|})$ (F bildet die Normale $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$ von \widehat{K} auf die Normale $\pm \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|}$ von K ab). Wegen $DF(\hat{\mathbf{x}}) = A$, $|\det A| = \|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|$ und $\hat{\varphi}_3(\hat{\mathbf{x}}) = 0$ entspricht (3.1.9) bzw. (3.1.11) gerade der Piola-Transformation.

Analog zur Aussage $\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{|\det DF|} \widehat{\operatorname{div}} \hat{\boldsymbol{\varphi}}$ in [25] schließt man für die Flächendivergenz

$$\operatorname{div}_\Gamma \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2\|} \widehat{\operatorname{div}} \tilde{\boldsymbol{\varphi}}. \quad (3.1.12)$$

Es bleibt die Frage, wie gut \mathcal{RT}_1 den Raum $\mathbf{TH}_{\|\cdot\|}^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$ approximiert. Das folgende Lemma beinhaltet eine Approximationseigenschaft analog zu Lemma 3.1.1.

Lemma 3.1.6. *Für $\mathbf{u} \in \mathbf{TH}^{3/2}(K) \subset \mathbf{TH}^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, K)$ und ein Element K mit Durchmesser h gilt*

$$\|\mathbf{u} - \Pi^{\mathcal{RT}_1(K)} \mathbf{u}\|_{\mathbf{TH}^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, K)} \leq ch \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^{3/2}(K)}.$$

3. Diskretisierung

Beweis. Wir schreiben $\|\cdot\|_{-1/2, \text{div}_\Gamma}$ für $\|\cdot\|_{\mathbf{TH}^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, K)}$. Es sei $\mathbf{U} \in \mathbf{H}^2(T) \subset \mathbf{H}(\mathbf{curl}, T)$ mit $(\mathbf{U} \times \mathbf{n})|_K = \mathbf{u}$. Mit der Stetigkeit von γ_t^\times , Lemma 3.1.3 und Lemma 3.1.1 erhalten wir

$$\|\mathbf{u} - \Pi^{\mathcal{RT}_1(K)} \mathbf{u}\|_{-1/2, \text{div}_\Gamma} \leq c \|\mathbf{U} - \Pi^{\mathcal{ND}_1(T)} \mathbf{U}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl}, T)} \leq ch \|\mathbf{U}\|_{\mathbf{H}^2(T)}. \quad (3.1.13)$$

Definieren wir die $\mathbf{H}^{3/2}$ -Norm auf K durch

$$\|\phi\|_{\mathbf{H}^{3/2}(K)} = \inf_{\Phi \in \mathbf{H}^2(T), \Phi|_K = \phi} \|\Phi\|_{\mathbf{H}^2(T)},$$

so erhalten wir

$$\|\mathbf{n} \times \mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^{3/2}(K)} = \inf_{\substack{\mathbf{U} \in \mathbf{H}^2(T) \\ \mathbf{U}|_K = \mathbf{u} \times \mathbf{n}}} \|\mathbf{U}\|_{\mathbf{H}^2(T)}.$$

Da wegen $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ jedes \mathbf{U} mit $\mathbf{U}|_K = \mathbf{u} \times \mathbf{n}$ die Bedingung $(\mathbf{U} \times \mathbf{n})|_K = \mathbf{u}$ erfüllt, führt (3.1.13) auf

$$\|\mathbf{u} - \Pi^{\mathcal{RT}_1(K)} \mathbf{u}\|_{-1/2, \text{div}_\Gamma} \leq ch \|\mathbf{n} \times \mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^{3/2}(K)} \leq ch \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^{3/2}(K)}.$$

□

Dieses Resultat erweitert die in [84] gegebene Fehlerabschätzung für \mathcal{RT}_1 und \mathbf{u} ausreichend regulär:

$$\|\mathbf{u} - \Pi^{\mathcal{RT}_1(K)} \mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\text{div}, K)} \leq ch \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^2(K)}.$$

Zum Schluß dieses Abschnitts beschreiben wir den Finite-Element-Raum zur Diskretisierung von $\mathbf{TH}_\perp^{-1/2}(\text{curl}_\Gamma, \Gamma)$. Nach Lemma 2.1.2, 2 wissen wir, daß der Raum $\mathbf{TH}_\perp^{-1/2}(\text{curl}_\Gamma, \Gamma)$ der Tangentialspurraum von $\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$ ist und damit das Bild von $\mathbf{TH}_\parallel^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ unter dem Drehoperator R (siehe Lemma 2.1.3). Wir definieren also den diskreten Raum $\mathcal{TN}\mathcal{D}_k$ (\mathcal{T} angentialanteile von $\mathcal{N}\mathcal{D}$) durch

$$\gamma_t : \mathcal{N}\mathcal{D}_k(\mathcal{T}_h) \rightarrow \mathcal{TN}\mathcal{D}_k(\mathcal{T}_{h|\Gamma}) \quad (3.1.14)$$

bzw. äquivalent dazu

$$R : \mathcal{RT}_k(\mathcal{K}_h) \rightarrow \mathcal{TN}\mathcal{D}_k(\mathcal{K}_h). \quad (3.1.15)$$

Auf dem üblichen Referenzdreieck \widehat{K} erhalten wir somit die Basisfunktionen

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_1 &:= -\mathbf{n} \times \hat{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, & \hat{\psi}_2 &:= -\mathbf{n} \times \hat{\varphi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}, \\ \hat{\psi}_3 &:= -\mathbf{n} \times \hat{\varphi}_3 = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

und auf dem Referenzquadrat die Basisfunktionen

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\psi}}_1 &:= \gamma_t \hat{\mathbf{b}}_1 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1-y \\ 0 \end{pmatrix}, & \hat{\boldsymbol{\psi}}_2 &:= \gamma_t \hat{\mathbf{b}}_2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1+y \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{\boldsymbol{\psi}}_3 &:= \gamma_t \hat{\mathbf{b}}_5 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 1-x \end{pmatrix}, & \hat{\boldsymbol{\psi}}_4 &:= \gamma_t \hat{\mathbf{b}}_6 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 1+x \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{3.1.17}$$

Hierbei haben wir uns beim Ausführen des Kreuzprodukts die dritte Komponente der Funktionen $\boldsymbol{\varphi}_j$ (welche gleich Null ist) dazugedacht, und sie danach zur Darstellung von $\boldsymbol{\varphi}_j$ wieder weggelassen. Aus Lemma 3.1.2 folgt damit sofort das folgende

Lemma 3.1.7. *Es gilt*

$$\int_{e_j} \hat{\boldsymbol{\psi}}_i \cdot \mathbf{t}_j \, ds = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, 2, 3,$$

wobei \mathbf{t}_j den Tangentialvektor in Richtung e_j darstellt.

Dieses Lemma definiert unsere Freiheitsgrade $\Xi^{\mathcal{TN}\mathcal{D}_1}(K)$ für $\mathcal{TN}\mathcal{D}_1$, die beruhigenderweise mit denen von $\mathcal{N}\mathcal{D}_1$ (vgl. (3.1.2)) übereinstimmen, und damit ist auch die Interpolierende $\Pi^{\mathcal{TN}\mathcal{D}_1(K)} \mathbf{u}$ einer Funktion $\mathbf{u} \in (\mathcal{C}^\infty(\bar{K}))^2$ bestimmt.

Bemerkung 4. Natürlich gilt auch hier, daß $\boldsymbol{\psi}_i \cdot \mathbf{t}_j$ auf e_j stets eine Konstante ergibt, so daß die Freiheitsgrade für tangentiale Nédélec-Elemente niedrigster Ordnung die Form

$$\int_{e_j} \boldsymbol{\psi}_i \cdot \mathbf{t}_j \, ds = |e_j| \boldsymbol{\psi}_i \cdot \mathbf{t}_j$$

haben, und es gilt $\boldsymbol{\psi}_i \cdot \mathbf{t}_j = 0$ für $i \neq j$.

Sei T ein Tetraeder und K eine Seite von T . Aufgrund der Konstruktion von $\Pi^{\mathcal{TN}\mathcal{D}_1(K)}$ erhalten wir sofort:

Lemma 3.1.8. *Sei $\mathbf{u} \in (\mathcal{C}^\infty(\bar{T}))^3$. Dann ist $\gamma_t \Pi^{\mathcal{N}\mathcal{D}_1(T)} \mathbf{u} = \Pi^{\mathcal{TN}\mathcal{D}_1(K)} \gamma_t \mathbf{u}$.*

Das Abbildungsverhalten zwischen Basisfunktionen auf dem Referenzelement \hat{K} und auf einem Element K ergeben sich aus den Lemmata 3.1.9 und 3.1.10. Man erhält:

Lemma 3.1.9. *Mit den Bezeichnungen aus Lemma 3.1.4 gelten für die Basisfunktionen $\boldsymbol{\psi}_\ell := \gamma_t \mathbf{b}_{g(\ell)}$ auf den Seiten eines Tetraeders T die Transformationen*

$$\boldsymbol{\psi}_\ell(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2\|^2} (\mathbf{c}_2 \times (\mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2), (\mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2) \times \mathbf{c}_1) \tilde{\boldsymbol{\psi}}_\ell(\hat{\mathbf{x}})\tag{3.1.18}$$

3. Diskretisierung

mit

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_1 &:= \mathbf{a}_1, \mathbf{c}_2 := \mathbf{a}_2, \tilde{\psi}_\ell(\hat{\mathbf{x}}) := \hat{\psi}_\ell(\tilde{\mathbf{x}}), \tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} && \text{auf } K_{126}, \\
\mathbf{c}_1 &:= \mathbf{a}_1, \mathbf{c}_2 := \mathbf{a}_3, \tilde{\psi}_\ell(\hat{\mathbf{x}}) := \hat{\psi}_\ell(\tilde{\mathbf{x}}), \tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{z} \end{pmatrix} && \text{auf } K_{134}, \\
\mathbf{c}_1 &:= \mathbf{a}_2, \mathbf{c}_2 := \mathbf{a}_3, \tilde{\psi}_\ell(\hat{\mathbf{x}}) := \hat{\psi}_\ell(\tilde{\mathbf{x}}), \tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} && \text{auf } K_{235}, \\
\mathbf{c}_1 &:= \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3, \mathbf{c}_2 := \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3, \tilde{\psi}_\ell(\hat{\mathbf{x}}) := \hat{\psi}_\ell(\tilde{\mathbf{x}}), \tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} && \text{auf } K_{456}.
\end{aligned}$$

Es sind $\hat{\psi}_\ell$ die TND Basisfunktionen auf $\widehat{K}_{126} = \widehat{K}$ wie in (3.1.16) definiert. Die Numerierung der ψ_ℓ erfolgt passend zu der der $\hat{\psi}_\ell$, d.h. ψ_1 und ψ_2 gehören zu den Kanten von K_{ijk} mit den Richtungsvektoren \mathbf{c}_1 und \mathbf{c}_2 , ψ_3 gehört zu der dritten Kanten von K_{ijk} (mit Richtungsvektor $\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2$).

Lemma 3.1.10. Mit den Bezeichnungen analog zu denen von Lemma 3.1.4 gelten für die Basisfunktionen $\psi_\ell := \gamma_t \mathbf{b}_{g(\ell)}$ auf den Seiten eines Hexaeders T die Transformationen

$$\psi_\ell(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2\|^2} (\mathbf{c}_2 \times (\mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2), (\mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2) \times \mathbf{c}_1) \tilde{\psi}_\ell(\hat{\mathbf{x}}) \quad (3.1.19)$$

mit

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_1 &:= \mathbf{a}_1, \mathbf{c}_2 := \mathbf{a}_2, \tilde{\psi}_\ell(\hat{\mathbf{x}}) := \hat{\psi}_\ell(\tilde{\mathbf{x}}), \tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} && \text{auf } K_{1,2,5,6}, \\
\mathbf{c}_1 &:= \mathbf{a}_1, \mathbf{c}_2 := \mathbf{a}_2, \tilde{\psi}_\ell(\hat{\mathbf{x}}) := \hat{\psi}_\ell(\tilde{\mathbf{x}}), \tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} && \text{auf } K_{3,4,7,8}, \\
\mathbf{c}_1 &:= \mathbf{a}_1, \mathbf{c}_2 := \mathbf{a}_3, \tilde{\psi}_\ell(\hat{\mathbf{x}}) := \hat{\psi}_\ell(\tilde{\mathbf{x}}), \tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{z} \end{pmatrix} && \text{auf } K_{1,3,9,10}, \\
\mathbf{c}_1 &:= \mathbf{a}_1, \mathbf{c}_2 := \mathbf{a}_3, \tilde{\psi}_\ell(\hat{\mathbf{x}}) := \hat{\psi}_\ell(\tilde{\mathbf{x}}), \tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{z} \end{pmatrix} && \text{auf } K_{2,4,11,12}, \\
\mathbf{c}_1 &:= \mathbf{a}_2, \mathbf{c}_2 := \mathbf{a}_3, \tilde{\psi}_\ell(\hat{\mathbf{x}}) := \hat{\psi}_\ell(\tilde{\mathbf{x}}), \tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} && \text{auf } K_{5,7,9,11}, \\
\mathbf{c}_1 &:= \mathbf{a}_2, \mathbf{c}_2 := \mathbf{a}_3, \tilde{\psi}_\ell(\hat{\mathbf{x}}) := \hat{\psi}_\ell(\tilde{\mathbf{x}}), \tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} && \text{auf } K_{6,8,10,12}.
\end{aligned}$$

Es sind $\hat{\psi}_\ell$ die TND Basisfunktionen auf $\widehat{K}_{1,2,5,6} = \widehat{K}$ wie in (3.1.17) definiert. Die Numerierung der ψ_ℓ erfolgt passend zu der der $\hat{\psi}_\ell$, d.h. ψ_1 und ψ_2 gehören zu den Kanten von $K_{i,j,k,l}$ mit dem Richtungsvektor \mathbf{c}_1 , und ψ_3 und ψ_4 gehören zu den Kanten von $K_{i,j,k,l}$ mit dem Richtungsvektor \mathbf{c}_2 .

Die Formel für den Flächencurl einer Funktion $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})$ unter der oben beschriebenen Transformation folgt aus der Beziehung $\text{curl}_\Gamma \boldsymbol{\psi} = \text{div}_\Gamma(\boldsymbol{\psi} \times \mathbf{n})$ und der Formel (3.1.12). Man erhält

$$\text{curl}_\Gamma \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}) = \frac{\pm 1}{\|\mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2\|} \widehat{\text{curl}} \tilde{\boldsymbol{\psi}}, \quad (3.1.20)$$

mit positivem Vorzeichen falls $\mathbf{n} = -\frac{\mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2}{\|\mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2\|}$ und negativem falls $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2}{\|\mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2\|}$.

Zum Schluß kommen wir zur Approximationseigenschaft der $\mathcal{TN}\mathcal{D}$ -Elemente analog zu Lemma 3.1.6, der Beweis läuft genauso wie dort.

Lemma 3.1.11. *Für $\mathbf{u} \in \mathbf{TH}^{3/2}(K) \subset \mathbf{TH}^{-1/2}(\text{curl}_\Gamma, K)$ und einem Element K mit Durchmesser h gilt*

$$\|\mathbf{u} - \Pi^{\mathcal{TN}\mathcal{D}_1(K)} \mathbf{u}\|_{-1/2, \text{curl}_\Gamma} \leq ch \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^{3/2}(K)}.$$

3.2. Zwei-Level-Zerlegungen und hierarchische Fehlerschätzer

Für die im letzten Abschnitt vorgestellten Finite-Element-Räume suchen wir nun stabile Zwei-Level-Zerlegungen, um letztendlich damit hierarchische Fehlerschätzer zu definieren.

Erst seit kurzem gibt es Ergebnisse über stabile Zerlegungen von Nédélec- und Raviart-Thomas-Räumen, meist im Zusammenhang mit Multigrid-Methoden. So findet man z.B. $\mathbf{H}(\text{curl})$ -stabile, allerdings nicht hierarchische Multilevel-Zerlegungen von \mathcal{ND}_1 in [56, 55, 10, 13] oder $\mathbf{H}(\text{div})$ -stabile Multilevel-Zerlegungen von \mathcal{RT}_1 in [91, 92]. Einen ausführlichen theoretischen Vergleich zwischen verschiedenen a posteriori Fehlerschätzern (residuale, hierarchische und weitere) für ein gemischtes Problem in $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega) \times \mathbf{L}^2$ findet man in [60]. In [13] beschäftigen sich die Autoren auch mit einer p -hierarchischen Zwei-Level-Zerlegung von \mathcal{ND}_2 und beschreiben die Konstruktion eines hierarchischen Fehlerschätzers auf Tetraedern. Auf dieses für unsere Zwecke nützliche Resultat wollen wir jetzt näher eingehen, dieses auf Hexaeder erweitern und schließlich mittels der Abbildung (3.1.7) daraus $\mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ -stabile Zerlegungen von $\mathcal{RT}_2(\mathcal{K}_h)$ und Fehlerschätzer ableiten. Zur Definition des Nédélec-Raumes zweiter Ordnung $\mathcal{ND}_2(\mathcal{T}_h)$ und des Raviart-Thomas-Raumes erster Ordnung $\mathcal{RT}_2(\mathcal{K}_h)$ siehe Anhang B.

3.2.1. Zerlegung von $\mathcal{ND}_2(\mathcal{T}_h)$

Es sei \mathcal{T}_h eine reguläre Zerlegung von Ω mit Durchmesser h . Es bezeichnen M die Anzahl der Kanten, N die Anzahl der Flächen und L die Anzahl der Elemente. Wegen des großen Kerns des **curl**-Operators muß eine Multilevelzerlegung von \mathcal{ND}_k , die stabil sein soll, die Helmholtz-Zerlegung (2.1.3) berücksichtigen, denn diese spaltet ja gerade den Raum in Kern des Differentialoperators, also $\mathbf{grad} H^1(\Omega)$, und sein orthogonales Komplement \mathbf{M} auf. Das diskrete Pendant zum wirbelfreien Anteil $\mathbf{grad} H^1(\Omega)$ ist durch $\mathbf{grad} \mathcal{S}_k$ gegeben, wobei wir mit $\mathcal{S}_k(\mathcal{T}_h)$ den global stetigen Raum der stückweisen Polynome vom Grad k mit der Dimension $\dim \mathcal{S}_k(T) = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(k+3)$ mit $T \in \mathcal{T}_h$ für Tetraeder und $\dim \mathcal{S}_k(T) = (k+1)^3$ für Hexaeder bezeichnen. Als Problem stellt sich heraus, daß das diskrete orthogonale Komplement

$$\mathcal{ND}_k^\perp(\mathcal{T}_h) = \{\mathbf{u}_h \in \mathcal{ND}_k(\mathcal{T}_h) : (\mathbf{u}_h, \mathbf{grad} \phi_h)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = 0 \ \forall \phi_h \in \mathcal{S}_k(\mathcal{T}_h)\}$$

von $\mathbf{grad} \mathcal{S}_k$ nicht verfügbar ist, da es keine lokale Basis besitzt [55]. Außerdem gilt sowohl $\mathcal{ND}_k^\perp(\mathcal{T}_h) \not\subset \mathbf{M}$ als auch $\mathcal{ND}_k^\perp(\mathcal{T}_{2h}) \not\subset \mathcal{ND}_k^\perp(\mathcal{T}_h)$, was diesen Raum endgültig unbrauchbar macht. Aus diesem Grund muß ein diskreter Raum $\widetilde{\mathcal{ND}}_k^\perp(\mathcal{T}_h)$ als Ersatz erhalten.

Bezeichnen wir nun mit $\widetilde{\mathcal{S}}_k$ den Raum $\mathcal{S}_k \setminus \mathcal{S}_{k-1}$ (hierarchischer Zusatzraum). Dann gilt nach Hiptmair et al. [13, 15] auf Tetraedern die Zerlegung

$$\mathcal{ND}_2(\mathcal{T}_h) = \mathcal{ND}_1(\mathcal{T}_h) \oplus \mathbf{grad} \widetilde{\mathcal{S}}_2(\mathcal{T}_h) \oplus \widetilde{\mathcal{ND}}_2^\perp(\mathcal{T}_h) \quad (3.2.21)$$

mit

$$\widetilde{\mathcal{ND}}_2^\perp(\mathcal{T}_h) := \{\mathbf{u}_h \in \mathcal{ND}_2(\mathcal{T}_h) : \langle \mathbf{u}_h, \mathbf{t} \rangle_e = 0, e \text{ Kante von } T_h\}.$$

Man überprüft schnell durch Zusammenzählen der Freiheitsgrade auf einem Element T , daß (3.2.21) eine direkte Summe ist: die Dimension von $\mathcal{ND}_1(T)$ ist gleich der Anzahl der Kanten von T , also 6, und die Dimension von $\widetilde{\mathcal{S}}_2(T)$ ist gleich $10 - 4 = 6$ (ebenfalls gleich der Anzahl der Kanten). Wir schreiben $\mathbf{grad} \widetilde{\mathcal{S}}_2(\mathcal{T}_h) = \text{span}\{\mathbf{grad} \phi^{(e_1)}, \dots, \mathbf{grad} \phi^{(e_M)}\}$. Der Raum $\mathcal{ND}_2(T)$ hat die Dimension 20, entsprechend 2 Basisfunktionen auf jeder Kante und zwei auf jeder Seitenfläche von T . Die Basisfunktionen auf den Seiten spannen gerade den Raum $\widetilde{\mathcal{ND}}_2^\perp(T)$ auf, der damit die Dimension 8 hat. Wir schreiben also für ein tetraedrisches Gitter

$$\widetilde{\mathcal{ND}}_2^\perp(\mathcal{T}_h) = \text{span}\{\mathbf{b}_1^{(F_1)}, \mathbf{b}_2^{(F_1)}, \dots, \mathbf{b}_1^{(F_N)}, \mathbf{b}_2^{(F_N)}\},$$

der Raum, der von den „seitenorientierten“ Basisfunktionen aufgespannt wird (in \mathcal{ND}_2 gibt es bei tetraedrischen Elementen zwei Basisfunktionen pro Seite, siehe Anhang B.1). So können wir die Zerlegung (3.2.21) weiter herunterbrechen:

$$\mathcal{ND}_2(\mathcal{T}_h) = \mathcal{ND}_1(\mathcal{T}_h) \oplus \sum_{i=1}^M \text{span}\{\mathbf{grad} \phi^{(e_i)}\} \oplus \sum_{j=1}^N \text{span}\{\mathbf{b}_1^{(F_j)}, \mathbf{b}_2^{(F_j)}\}. \quad (3.2.22)$$

In [13, 15] wird nur der Fall tetraedrischer Elemente betrachtet. Wir wollen nun die dortigen Resultate auf Hexaeder erweitern. Wir werden sehen, daß wir die Zerlegung (3.2.21) nicht einfach übertragen können. Woran liegt das? Für Tetraeder ist (3.2.21) eine direkte Summe, auf Hexaedern dagegen ergibt das Zusammenzählen der Freiheitsgrade, daß sich die Räume $\mathbf{grad} \tilde{\mathcal{S}}_2(T)$ und das oben definierte $\widetilde{\mathcal{ND}}_2^\perp(T)$ überschneiden: die Dimension von $\mathcal{ND}_1(T)$ ist gleich der Anzahl der Kanten von T , also 12, die Dimension von $\tilde{\mathcal{S}}_2(T)$ ist gleich $27 - 8 = 19$ (entsprechend einer Funktion pro Kante, einer pro Fläche und einer im Inneren) und die Dimension von $\widetilde{\mathcal{ND}}_2^\perp(T)$ beträgt 30 (entsprechend vier Funktionen pro Fläche und sechs im Inneren). Die Dimension von $\mathcal{ND}_2(T)$ ist aber 54, so daß $\dim(\mathbf{grad} \tilde{\mathcal{S}}_2(T) \cap \mathcal{ND}_2^\perp(T)) = 7$ gelten muß.

Wir schreiben

$$\mathbf{grad} \tilde{\mathcal{S}}_2(T) = \text{span}\{\mathbf{grad} \phi^{(e_1)}, \dots, \mathbf{grad} \phi^{(e_{12})}, \mathbf{grad} \phi^{(F_1)}, \dots, \mathbf{grad} \phi^{(F_6)}, \mathbf{grad} \phi^{(T)}\}$$

und

$$\widetilde{\mathcal{ND}}_2^\perp(T) = \text{span}\{\mathbf{b}_1^{(F_1)}, \dots, \mathbf{b}_4^{(F_1)}, \dots, \mathbf{b}_1^{(F_6)}, \dots, \mathbf{b}_4^{(F_6)}, \mathbf{b}_1^{(T)}, \dots, \mathbf{b}_6^{(T)}\}$$

(in \mathcal{ND}_2 gibt es bei hexaedrischen Elementen vier Basisfunktionen pro Seite und sechs Basisfunktionen pro Element, siehe Anhang B.1. Die Basisfunktionen von $\mathcal{ND}_2(T)$ sind in Anhang B.4 aufgelistet). Wir müssen nun feststellen, welche 7 Basisfunktionen wir aus der Vereinigung der Basen von $\mathbf{grad} \tilde{\mathcal{S}}_2(T)$ und $\widetilde{\mathcal{ND}}_2^\perp(T)$ weglassen können: Durch direktes Ausrechnen (anhand der Auflistung in Anhang B.4) stellt man fest, daß sich die Flächenfunktionen aus $\mathbf{grad} \tilde{\mathcal{S}}_2(T)$ durch Flächen- und Volumenfunktionen aus $\widetilde{\mathcal{ND}}_2^\perp(T)$ darstellen lassen, so ist z.B.

$$\mathbf{grad} \phi^{(F_5)} = \mathbf{grad}(1 - x^2)(1 - y^2)(1 - z) = \frac{32}{9}(\mathbf{b}_2^{(F_5)} + \mathbf{b}_4^{(F_5)} - \mathbf{b}_2^{(T)} - \mathbf{b}_4^{(T)} - \mathbf{b}_5^{(T)})$$

und entsprechend für die übrigen $\mathbf{grad} \phi^{(F_j)}$. Außerdem gilt

$$\mathbf{grad} \phi^{(T)} = \mathbf{grad}(1 - x^2)(1 - y^2)(1 - z^2) = -\frac{64}{27}(\mathbf{b}_2^{(T)} + \mathbf{b}_4^{(T)} + \mathbf{b}_6^{(T)}).$$

Um zu einer direkten Summe zu gelangen, können wir also z.B. die Basisfunktion $\phi^{(T)}$ aus der Basis von $\tilde{\mathcal{S}}_2(T)$ entfernen und die Basisfunktionenpaare $\mathbf{b}_2^{(F_j)}, \mathbf{b}_4^{(F_j)}$ ($j = 1, \dots, 6$) aus der Basis von $\widetilde{\mathcal{ND}}_2^\perp(T)$ durch $\mathbf{b}_2^{(F_j)} - \mathbf{b}_4^{(F_j)}$ ($j = 1, \dots, 6$) ersetzen. Damit erhalten wir die Räume

$$\tilde{\mathcal{S}}_2^-(\mathcal{T}_h) = \text{span}\{\phi^{(e_i)}, \phi^{(F_j)}, i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, N\}$$

und

$$\widetilde{\mathcal{ND}}_2^{\perp,-}(\mathcal{T}_h) = \text{span}\{\mathbf{b}_1^{(F_j)}, \mathbf{b}_3^{(F_j)}, \mathbf{b}_2^{(F_j)} - \mathbf{b}_4^{(F_j)}, \mathbf{b}_1^{(T_\ell)}, \dots, \mathbf{b}_6^{(T_\ell)}, j = 1, \dots, N, \ell = 1, \dots, L\}.$$

3. Diskretisierung

Natürlich gibt es unzählige Möglichkeiten, die Räume $\widetilde{\mathcal{S}}_2^-(\mathcal{T}_h)$ und $\widetilde{\mathcal{N}\mathcal{D}}_2^{\perp,-}(T)$ auszuwählen (d.h. Basisfunktionen aus $\widetilde{\mathcal{S}}_2^-(\mathcal{T}_h)$ und $\widetilde{\mathcal{N}\mathcal{D}}_2^{\perp,-}(T)$ zu entfernen), so daß $\widetilde{\mathcal{S}}_2^-(\mathcal{T}_h) + \widetilde{\mathcal{N}\mathcal{D}}_2^{\perp,-}(T)$ eine direkte Summe ergibt. Die obige Wahl schien uns einfach am „symmetrischsten“.

Folglich gilt auf Hexaedern die Zerlegung

$$\mathcal{N}\mathcal{D}_2(\mathcal{T}_h) = \mathcal{N}\mathcal{D}_1(\mathcal{T}_h) \oplus \mathbf{grad} \widetilde{\mathcal{S}}_2^-(\mathcal{T}_h) \oplus \widetilde{\mathcal{N}\mathcal{D}}_2^{\perp,-}(\mathcal{T}_h). \quad (3.2.23)$$

Auch diese Zerlegung brechen wir weiter herunter:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}\mathcal{D}_2(\mathcal{T}_h) = \mathcal{N}\mathcal{D}_1(\mathcal{T}_h) \oplus \sum_{i=1}^M \text{span}\{\mathbf{grad} \phi^{(e_i)}\} \oplus \sum_{j=1}^N \left(\text{span}\{\mathbf{grad} \phi^{(F_j)}\} \right. \\ \left. \oplus \text{span}\{\mathbf{b}_1^{(F_j)}, \mathbf{b}_3^{(F_j)}, \mathbf{b}_2^{(F_j)} - \mathbf{b}_4^{(F_j)}\} \right) \oplus \sum_{k=1}^L \text{span}\{\mathbf{b}_1^{(T_k)}, \dots, \mathbf{b}_6^{(T_k)}\}. \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

Wir gehen von einer auf $(\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega))^2$ stetigen und positiv definiten Bilinearform

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\alpha \mathbf{curl} \mathbf{u}, \mathbf{curl} \mathbf{v})_{\Omega} + (\beta \mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega} \quad (3.2.25)$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{R}_{<0}$ aus. Sei

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathfrak{E}} := \|\mathbf{v}\|_{\mathfrak{E}(\Omega)} := |a(\mathbf{v}, \mathbf{v})|^{1/2}$$

die durch a induzierte, zu $\|\cdot\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)}$ äquivalente Energienorm.

Für das weitere Vorgehen ist die Stabilität der Zerlegung (3.2.22) bzw. (3.2.24) entscheidend. Dazu definieren wir für Tetraeder die Unterraum-Projektionen

$$\begin{aligned} P_1 &: \mathcal{N}\mathcal{D}_2(\mathcal{T}_h) \rightarrow \mathcal{N}\mathcal{D}_1(\mathcal{T}_h), \\ P^{(F)} &: \mathcal{N}\mathcal{D}_2(\mathcal{T}_h) \rightarrow \text{span}\{\mathbf{b}_1^{(F)}, \mathbf{b}_2^{(F)}\}, \\ R^{(e)} &: \mathcal{N}\mathcal{D}_2(\mathcal{T}_h) \rightarrow \text{span}\{\mathbf{grad} \phi^{(e)}\}, \end{aligned}$$

und für Hexaeder die Projektionen

$$\begin{aligned} P_1 &: \mathcal{N}\mathcal{D}_2(\mathcal{T}_h) \rightarrow \mathcal{N}\mathcal{D}_1(\mathcal{T}_h), \\ P^{(F)} &: \mathcal{N}\mathcal{D}_2(\mathcal{T}_h) \rightarrow \text{span}\{\mathbf{b}_1^{(F)}, \mathbf{b}_3^{(F)}, \mathbf{b}_2^{(F)} - \mathbf{b}_4^{(F)}\}, \\ P^{(T)} &: \mathcal{N}\mathcal{D}_2(\mathcal{T}_h) \rightarrow \text{span}\{\mathbf{b}_1^{(T)}, \dots, \mathbf{b}_6^{(T)}\}, \\ R^{(e)} &: \mathcal{N}\mathcal{D}_2(\mathcal{T}_h) \rightarrow \text{span}\{\mathbf{grad} \phi^{(e)}\}, \\ R^{(F)} &: \mathcal{N}\mathcal{D}_2(\mathcal{T}_h) \rightarrow \text{span}\{\mathbf{grad} \phi^{(F)}\}, \end{aligned}$$

so daß wir die Zerlegungen (3.2.22) bzw. (3.2.24) dann als

$$\mathbf{u}_2 = P_1 \mathbf{u}_2 + \sum_{i=1}^M R^{(e_i)} \mathbf{u}_2 + \sum_{j=1}^N P^{(F_j)} \mathbf{u}_2 \quad (3.2.26)$$

bzw.

$$\mathbf{u}_2 = P_1 \mathbf{u}_2 + \sum_{i=1}^M R^{(e_i)} \mathbf{u}_2 + \sum_{j=1}^N (R^{(F_j)} \mathbf{u}_2 + P^{(F_j)} \mathbf{u}_2) + \sum_{k=1}^L P^{(T_k)} \mathbf{u}_2 \quad (3.2.27)$$

für $\mathbf{u}_2 \in \mathcal{ND}_2(\mathcal{T}_h)$ schreiben können.

Lemma 3.2.1. *Die Zerlegung (3.2.22) bzw. (3.2.24) ist stabil bzgl. der Energie- (und damit auch der $\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$)-Norm, d.h. für alle $\mathbf{u}_2 \in \mathcal{ND}_2(\mathcal{T}_h)$ gilt*

$$\|\mathbf{u}_2\|_{\mathfrak{E}}^2 \sim \|P_1 \mathbf{u}_2\|_{\mathfrak{E}}^2 + \sum_{i=1}^M \|R^{(e_i)} \mathbf{u}_2\|_{\mathfrak{E}}^2 + \sum_{j=1}^N \|P^{(F_j)} \mathbf{u}_2\|_{\mathfrak{E}}^2 \quad (3.2.28)$$

bzw.

$$\|\mathbf{u}_2\|_{\mathfrak{E}}^2 \sim \|P_1 \mathbf{u}_2\|_{\mathfrak{E}}^2 + \sum_{i=1}^M \|R^{(e_i)} \mathbf{u}_2\|_{\mathfrak{E}}^2 + \sum_{j=1}^N (\|R^{(F_j)} \mathbf{u}_2\|_{\mathfrak{E}}^2 + \|P^{(F_j)} \mathbf{u}_2\|_{\mathfrak{E}}^2) + \sum_{k=1}^L \|P^{(T_k)} \mathbf{u}_2\|_{\mathfrak{E}}^2. \quad (3.2.29)$$

Beweis. Dieses Lemma ist die Zusammenfassung von Lemma 3 und Lemma 4 aus [15] (dort nur (3.2.28), also für tetraedrische Gitter). Wir geben den Beweis für (3.2.28) wieder. Man sieht, daß das Ergebnis ohne weiteres auch für (3.2.29) gilt.

Zuerst stellen wir fest, daß wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung (3.2.22) die Abbildung $\|\cdot\|$ definiert durch

$$\|\mathbf{u}_2\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 := \|P_1 \mathbf{u}_2\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^M \|R^{(e_i)} \mathbf{u}_2\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \sum_{j=1}^N \|P^{(F_j)} \mathbf{u}_2\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 := \sum_P \|P \mathbf{u}_2\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2$$

eine Norm ist. Mit der Lokalität der L^2 -Norm und Gleichung (3.3.66) aus Lemma 3.3.1,2. (aus dem nächsten Abschnitt) gilt

$$\|\mathbf{u}_2\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{u}_2\|_{\mathbf{L}^2(T)}^2 = \sum_P \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|P \mathbf{u}_2\|_{\mathbf{L}^2(T)}^2 \sim \sum_P \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \|\hat{P} \hat{\mathbf{u}}_2\|_{\mathbf{L}^2(\hat{T})}^2, \quad (3.2.30)$$

wobei $\hat{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}}) = B^T \mathbf{v}(\mathbf{x})$ (mit den Bezeichnungen von Seite 41) die Transformation von \mathbf{v} auf das Referenzelement \hat{T} ist. Dabei hängt die Äquivalenzkonstante nur von der Form-Regularität des Gitters ab. Nun gilt

$$\|\hat{\mathbf{u}}_2\|_{\mathbf{L}^2(\hat{T})} = \sum_P \|\hat{P} \hat{\mathbf{u}}_2\|_{\mathbf{L}^2(\hat{T})} \sim \|\hat{\mathbf{u}}_2\|_{\mathbf{L}^2(\hat{T})}$$

3. Diskretisierung

für $\hat{\mathbf{u}}_2 \in \mathcal{ND}_2(\hat{T})$, da auf einem endlich-dimensionalen Raum alle Normen äquivalent sind. Die Äquivalenzkonstante hierbei hängt nur von der Zerlegung auf \hat{T} ab (genaugenommen von den Winkeln zwischen den Unterräumen). An (3.2.30) anknüpfend erhält man so (wieder mit (3.3.66))

$$\|\mathbf{u}_2\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \sim \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \|\hat{\mathbf{u}}_2\|_{\mathbf{L}^2(\hat{T})}^2 \sim \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{u}_2\|_{\mathbf{L}^2(T)}^2 = \|\mathbf{u}_2\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2.$$

Nun ist zu zeigen, daß auch

$$\|\mathbf{curl} \mathbf{u}_2\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \sim \|\mathbf{curl} \mathbf{u}_2\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$$

gilt, dann sind wir fertig. Dies folgt mit der gleichen Argumentation wie oben, wobei wir zur Transformation auf das Referenzelement jetzt die Gleichung (3.3.71) aus Lemma 3.3.1,3. zu verwenden haben (da $\mathbf{curl} \mathbf{u}_2 \in \mathcal{RT}_2$ für $\mathbf{u}_2 \in \mathcal{ND}_2$). Dabei ist zu beachten, daß die Zerlegung

$$\mathbf{curl} \mathbf{u}_2 = \mathbf{curl} P_1 \mathbf{u}_2 + \sum_{i=1}^M \mathbf{curl} R^{(e_i)} \mathbf{u}_2 + \sum_{j=1}^N \mathbf{curl} P^{(F_j)} \mathbf{u}_2$$

tatsächlich eindeutig ist, denn: Sei $\mathbf{curl} \mathbf{u}_2 = 0$. Dann gilt auch $\mathbf{curl} P_1 \mathbf{u}_2 = \mathbf{curl} \Pi^{\mathcal{ND}_1} \mathbf{u}_2 = 0$ (siehe B.3 im Anhang), außerdem ist $\mathbf{curl} R_i^{(e)} \mathbf{u}_2 = 0$ wegen $\mathbf{curl} \mathbf{grad} \equiv 0$. Wegen (3.2.26) muß dann $\mathbf{curl} \sum_{j=1}^N P^{(F_j)} \mathbf{u}_2 = 0$ gelten – das heißt aber, daß $\sum_{j=1}^N P^{(F_j)} \mathbf{u}_2 = \mathbf{grad} \psi_2$ für ein $\psi_2 \in \tilde{\mathcal{S}}_2(\mathcal{T}_h)$ ist. Da die Summe (3.2.21) aber direkt ist, ist $\psi_2 = 0$ und damit $P^{(F_j)} \mathbf{u}_2 = 0$ für alle j . Insbesondere ist auch $\mathbf{curl} P^{(F_j)} \mathbf{u}_2 = 0$ für alle j . Somit folgt aus $\mathbf{curl} \mathbf{u}_2 = 0$, daß auch $P \mathbf{curl} \mathbf{u}_2 = 0$ für alle Projektionsoperatoren P . Insgesamt gilt also

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_2\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} &\sim \|\mathbf{u}_2\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \\ \|\mathbf{curl} \mathbf{u}_2\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} &\sim \|\mathbf{curl} \mathbf{u}_2\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \end{aligned}$$

unabhängig von der Gitterweite h , und somit die Aussage des Lemmas für die $\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$ -Norm und die dazu äquivalente Energienorm. \square

Nun kommen wir zur Konstruktion eines hierarchischen Fehlerschätzers für das Galerkinverfahren zur variationellen Formulierung

Finde $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$, so daß

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) \tag{3.2.31}$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$

3.2. Zwei-Level-Zerlegungen und hierarchische Fehlerschätzer

für eine rechte Seite $f \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)'$. Seien \mathbf{u}_h und \mathbf{u}_2 die Lösungen der entsprechenden Galerkin-Formulierungen auf $\mathcal{ND}_1(\mathcal{T}_h)$ bzw. $\mathcal{ND}_2(\mathcal{T}_h)$. Als wesentliche Voraussetzung geht nun die *Saturationsannahme* ein: Es gebe eine Folge $(\delta_h)_h$ mit $\delta_h \leq \delta < 1$, so daß

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_2\|_{\mathfrak{E}} \leq \delta_h \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathfrak{E}}. \quad (3.2.32)$$

Hieraus folgert man, daß der Fehler $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|$ äquivalent zu $\|\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_h\|$ ist, genauer:

Lemma 3.2.2. *Gilt die Saturationsannahme (3.2.32), so folgt*

$$\|\mathbf{e}_2\|_{\mathfrak{E}} \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathfrak{E}} \leq \frac{1}{1 - \delta} \|\mathbf{e}_2\|_{\mathfrak{E}}$$

mit dem Fehlerterm $\mathbf{e}_2 := \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_h$.

Beweis. Siehe [15, Lemma 1] oder [11, Gleichung (4.13)]. \square

Gesucht ist also eine möglichst lokale Abschätzung von $\|\mathbf{e}_2\|_{\mathfrak{E}}$. Dazu beachte man, daß $\mathbf{e}_2 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_h$ die Defektgleichung

$$a(\mathbf{e}_2, \boldsymbol{\eta}) = r(\boldsymbol{\eta}) := f(\boldsymbol{\eta}) - a(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\eta}) \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{ND}_2(\mathcal{T}_h) \quad (3.2.33)$$

erfüllt. Sei nun \tilde{a} die auf $\mathcal{ND}_2(\mathcal{T}_h) \times \mathcal{ND}_2(\mathcal{T}_h)$ definierte Bilinearform, die sich aus der Bilinearform a und den Zerlegungen (3.2.26) bzw. (3.2.27) ergibt, d.h.

$$\tilde{a}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) = a(P_1 \mathbf{u}_2, P_1 \mathbf{v}_2) + \sum_{i=1}^M a(R^{(e_i)} \mathbf{u}_2, R^{(e_i)} \mathbf{v}_2) + \sum_{j=1}^N a(P^{(F_j)} \mathbf{u}_2, P^{(F_j)} \mathbf{v}_2) \quad (3.2.34)$$

für Tetraeder und

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) &= a(P_1 \mathbf{u}_2, P_1 \mathbf{v}_2) + \sum_{i=1}^M a(R^{(e_i)} \mathbf{u}_2, R^{(e_i)} \mathbf{v}_2) \\ &\quad + \sum_{j=1}^N (a(R^{(F_j)} \mathbf{u}_2, R^{(F_j)} \mathbf{v}_2) + a(P^{(F_j)} \mathbf{u}_2, P^{(F_j)} \mathbf{v}_2)) + \sum_{k=1}^L a(P^{(T_k)} \mathbf{u}_2, P^{(T_k)} \mathbf{v}_2) \end{aligned} \quad (3.2.35)$$

für Hexaeder. Lemma 3.2.1 besagt gerade, daß \tilde{a} eine zu a äquivalente Bilinearform ist, d.h. es gilt $\tilde{a}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2) \sim a(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2)$. Definiere dann den Fehlerterm $\tilde{\mathbf{e}}_2 \in \mathcal{ND}_2(\mathcal{T}_h)$ durch

$$\tilde{a}(\tilde{\mathbf{e}}_2, \boldsymbol{\eta}) = a(\mathbf{e}_2, \boldsymbol{\eta}) = r(\boldsymbol{\eta}) := f(\boldsymbol{\eta}) - a(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\eta}) \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{ND}_2(\mathcal{T}_h). \quad (3.2.36)$$

Man sollte erwarten, daß $\tilde{\mathbf{e}}_2$ eine gute Approximation von $\mathbf{e}_2 \in \mathcal{ND}_2(\mathcal{T}_h)$ ist, und tatsächlich gilt

3. Diskretisierung

Lemma 3.2.3. *Für das durch (3.2.36) definierte $\tilde{\mathbf{e}}_2$ gilt*

$$\|\tilde{\mathbf{e}}_2\|_{\mathfrak{E}} \sim \|\mathbf{e}_2\|_{\mathfrak{E}}.$$

Beweis. Siehe [15, Lemma 2]. Wir fügen hier den kurzen Beweis ein: Nach Lemma 3.2.1 gilt $\tilde{a}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2) \sim a(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2)$ für alle $\mathbf{u}_2 \in \mathcal{N}\mathcal{D}_2(\mathcal{T}_h)$. Damit, mit der Definition (3.2.36) von $\tilde{\mathbf{e}}_2$ und mit der Stetigkeit von a folgt

$$\|\tilde{\mathbf{e}}_2\|_{\mathfrak{E}}^2 = a(\tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_2) \lesssim \tilde{a}(\tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_2) = a(\mathbf{e}_2, \tilde{\mathbf{e}}_2) \lesssim \|\mathbf{e}_2\|_{\mathfrak{E}} \|\tilde{\mathbf{e}}_2\|_{\mathfrak{E}},$$

also $\|\tilde{\mathbf{e}}_2\|_{\mathfrak{E}} \lesssim \|\mathbf{e}_2\|_{\mathfrak{E}}$. Genauso gilt

$$\|\mathbf{e}_2\|_{\mathfrak{E}}^2 = a(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = \tilde{a}(\tilde{\mathbf{e}}_2, \mathbf{e}_2) \lesssim \|\tilde{\mathbf{e}}_2\|_{\mathfrak{E}} \|\mathbf{e}_2\|_{\mathfrak{E}},$$

also $\|\mathbf{e}_2\|_{\mathfrak{E}} \lesssim \|\tilde{\mathbf{e}}_2\|_{\mathfrak{E}}$. □

Sei nun P ein Projektionsoperator aus (3.2.26) bzw. (3.2.27) und $V_P \subset \mathcal{N}\mathcal{D}_2(\mathcal{T}_h)$ der dazugehörige Unterraum. Da die Bilinearform \tilde{a} die einzelnen Unterräume V_P vollständig entkoppelt, ist die Defektgleichung (3.2.36) lokal lösbar. Man erhält also die Defektgleichungen

$$a(P\tilde{\mathbf{e}}_2, \boldsymbol{\eta}) = r(\boldsymbol{\eta}) := f(\boldsymbol{\eta}) - a(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\eta}) \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in V_P \subset \mathcal{N}\mathcal{D}_2(\mathcal{T}_h). \quad (3.2.37)$$

Insbesondere gilt für $V_P = \mathcal{N}\mathcal{D}_1(\mathcal{T}_h)$ die lokalisierte Gleichung

$$a(P_1\tilde{\mathbf{e}}_2, \boldsymbol{\eta}) = f(\boldsymbol{\eta}) - a(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\eta}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{N}\mathcal{D}_1(\mathcal{T}_h).$$

Damit ist $P_1\tilde{\mathbf{e}}_2 = 0$, so daß $\tilde{\mathbf{e}}_2$ tatsächlich in $\widetilde{\mathcal{N}\mathcal{D}}_2(\mathcal{T}_h) := \mathcal{N}\mathcal{D}_2(\mathcal{T}_h) \setminus \mathcal{N}\mathcal{D}_1(\mathcal{T}_h)$, dem hierarchischen Zusatzraum, liegt. Ansonsten ergibt (3.2.37) für Tetraeder die eindimensionalen Teilprobleme

Für $i = 1, \dots, M$ finde $\psi^{(e_i)} \in \text{span}\{\phi^{(e_i)}\}$, so daß

$$(\beta \mathbf{grad} \psi^{(e_i)}, \mathbf{grad} \phi^{(e_i)})_{\Omega} = r(\mathbf{grad} \phi^{(e_i)}) \quad (3.2.38)$$

und die zweidimensionalen Teilprobleme

Für $j = 1, \dots, N$ finde $\Psi^{(F_j)} \in \text{span}\{\mathbf{b}_1^{(F_j)}, \mathbf{b}_2^{(F_j)}\}$, so daß

$$a(\Psi^{(F_j)}, \mathbf{b}_2^{\perp}) = r(\mathbf{b}_2^{\perp}) \quad \forall \mathbf{b}_2^{\perp} \in \text{span}\{\mathbf{b}_1^{(F_j)}, \mathbf{b}_2^{(F_j)}\}. \quad (3.2.39)$$

Es gilt $\mathbf{grad} \psi^{(e)} = P^{(e)}\tilde{\mathbf{e}}_2$ und $\Psi^{(F)} = P^{(F)}\tilde{\mathbf{e}}_2$. Wir definieren nun

$$\begin{aligned} \Theta^{(e)} &:= \|\mathbf{grad} \psi^{(e)}\|_{\mathfrak{E}}, \\ \Theta^{(F)} &:= \|\Psi^{(F)}\|_{\mathfrak{E}} \end{aligned}$$

und erhalten aufgrund der Stabilität (3.2.28):

Satz 3.2.4 (Theorem 1 aus [15]). *Es gelte die Saturationsannahme (3.2.32). Dann gilt für die Lösung \mathbf{u}_h des Galerkinverfahrens zu (3.2.31) auf einem Gitter mit tetraedrischen Elementen*

$$\eta \lesssim \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathfrak{E}} \lesssim \frac{1}{1 - \delta} \eta$$

mit dem Fehlerschätzer

$$\eta^2 := \sum_{i=1}^M (\Theta^{(e_i)})^2 + \sum_{j=1}^N (\Theta^{(F_j)})^2.$$

Beweis. Die Behauptung folgt sofort aus den Lemmata 3.2.2 und 3.2.3. Es ist $\eta = \|\tilde{\mathbf{e}}_2\|_{\mathfrak{E}}$. \square

Die Kanten eines Elements T entsprechen nun oBdA den Indizes $i = 1, \dots, 6$, und die Seiten entsprechen den Indizes $j = 1, \dots, 4$. Dann betrachtet man auf diesem Element den Anteil

$$\eta_T^2 = \sum_{i=1}^6 \frac{1}{k_i} (\Theta^{(e_i)})^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 (\Theta^{(F_j)})^2$$

an dem Gesamtfehlerschätzer η^2 für $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathfrak{E}}^2$, wobei k_i die Anzahl der Elemente bezeichnet, die sich die zum Index i gehörende Kante teilen. Ein adaptiver Algorithmus besteht darin, nach dem Berechnen von \mathbf{u}_h für jedes Element T von \mathcal{T}_h den leicht zu berechnenden lokalen Fehlerschätzer η_T zu ermitteln. Überschreitet dieser einen gewissen Grenzwert (der je nach Verfeinerungsstrategie anders aussehen kann), dann ist das Element T im nächsten Schritt zu verfeinern. Zum Schluß führt man noch zusätzliche Verfeinerungen zur Erhaltung der gewünschten Gitterregularität durch.

Eine letzte Vereinfachung ergibt sich aus der Tatsache, daß das Teilproblem für $\mathbf{grad} \phi^{(e_i)}$ eindimensional ist, man erhält nämlich

$$\Theta^{(e)} = \frac{|f(\mathbf{grad} \phi^{(e)}) - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{grad} \phi^{(e)})|}{\|\mathbf{grad} \phi^{(e)}\|_{\mathfrak{E}}}.$$

Leider läßt sich $\|\Psi^{(F)}\|_{\mathfrak{E}}$ nicht so einfach hinschreiben, da es sich dort um ein zweidimensionales Gleichungssystem handelt. Es gilt

$$\Theta^{(F)} = \|\Psi^{(F)}\|_{\mathfrak{E}} = \|\kappa_1 \mathbf{b}_1^{(F)} + \kappa_2 \mathbf{b}_2^{(F)}\|_{\mathfrak{E}},$$

wobei $(\kappa_1, \kappa_2)^T$ Lösung des LGS

$$\begin{pmatrix} a(\mathbf{b}_1^{(F)}, \mathbf{b}_1^{(F)}) & a(\mathbf{b}_2^{(F)}, \mathbf{b}_1^{(F)}) \\ a(\mathbf{b}_1^{(F)}, \mathbf{b}_2^{(F)}) & a(\mathbf{b}_2^{(F)}, \mathbf{b}_2^{(F)}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\mathbf{b}_1^{(F)}) - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{b}_1^{(F)}) \\ f(\mathbf{b}_2^{(F)}) - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{b}_2^{(F)}) \end{pmatrix}$$

ist.

Für Hexaeder ergibt diese Vorgehensweise den folgenden Satz; die Definitionen der verschiedenen Θ folgt danach.

3. Diskretisierung

Satz 3.2.5. *Es gelte die Saturationsannahme (3.2.32). Dann gilt für die Lösung \mathbf{u}_h des Galerkinverfahrens zu (3.2.31) auf einem Gitter mit hexaedrischen Elementen*

$$\eta \lesssim \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathfrak{E}} \lesssim \frac{1}{1-\delta} \eta$$

mit dem Fehlerschätzer

$$\eta^2 := \sum_{i=1}^M (\Theta^{(e_i)})^2 + \sum_{j=1}^N \left((\Theta_1^{(F_j)})^2 + (\Theta_2^{(F_j)})^2 \right) + \sum_{k=1}^L (\Theta^{(T_k)})^2.$$

Der lokale Anteil auf einem Element T hat die Form

$$\eta_T^2 := \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{12} (\Theta^{(e_i)})^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^6 \left((\Theta_1^{(F_j)})^2 + (\Theta_2^{(F_j)})^2 \right) + (\Theta^{(T)})^2.$$

Dabei sind

$$\begin{aligned} \Theta^{(e)} &:= \frac{|f(\mathbf{grad} \phi^{(e)}) - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{grad} \phi^{(e)})|}{\|\mathbf{grad} \phi^{(e)}\|_{\mathfrak{E}}}, \\ \Theta_1^{(F)} &:= \frac{|f(\mathbf{grad} \phi^{(F)}) - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{grad} \phi^{(F)})|}{\|\mathbf{grad} \phi^{(F)}\|_{\mathfrak{E}}}, \\ \Theta_2^{(F)} &:= \|\kappa_1 \mathbf{b}_1^{(F)} + \kappa_2 \tilde{\mathbf{b}}_2^{(F)} + \kappa_3 \mathbf{b}_3^{(F)}\|_{\mathfrak{E}}, \end{aligned}$$

wobei $\tilde{\mathbf{b}}_2^{(F)} := \mathbf{b}_2^{(F)} - \mathbf{b}_4^{(F)}$ und $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)^T$ Lösung des LGS

$$\begin{pmatrix} a(\mathbf{b}_1^{(F)}, \mathbf{b}_1^{(F)}) & a(\tilde{\mathbf{b}}_2^{(F)}, \mathbf{b}_1^{(F)}) & a(\mathbf{b}_3^{(F)}, \mathbf{b}_1^{(F)}) \\ a(\mathbf{b}_1^{(F)}, \tilde{\mathbf{b}}_2^{(F)}) & a(\tilde{\mathbf{b}}_2^{(F)}, \tilde{\mathbf{b}}_2^{(F)}) & a(\mathbf{b}_3^{(F)}, \tilde{\mathbf{b}}_2^{(F)}) \\ a(\mathbf{b}_1^{(F)}, \mathbf{b}_3^{(F)}) & a(\tilde{\mathbf{b}}_2^{(F)}, \mathbf{b}_3^{(F)}) & a(\mathbf{b}_3^{(F)}, \mathbf{b}_3^{(F)}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\mathbf{b}_1^{(F)}) - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{b}_1^{(F)}) \\ f(\tilde{\mathbf{b}}_2^{(F)}) - a(\mathbf{u}_h, \tilde{\mathbf{b}}_2^{(F)}) \\ f(\mathbf{b}_3^{(F)}) - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{b}_3^{(F)}) \end{pmatrix}$$

ist, und

$$\Theta^{(T)} := \left\| \sum_{\ell=1}^6 \kappa_{\ell} \mathbf{b}_{\ell}^{(T)} \right\|_{\mathfrak{E}},$$

wobei $(\kappa_1, \dots, \kappa_6)^T$ Lösung des LGS

$$(a(\mathbf{b}_k^{(T)}, \mathbf{b}_{\ell}^{(T)}))_{k,\ell=1,\dots,6} (\kappa_{\ell})_{\ell=1,\dots,6} = (f(\mathbf{b}_k^{(T)}) - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{b}_k^{(T)}))_{k=1,\dots,6}.$$

3.2.2. Zerlegung von $\mathcal{RT}_2(\mathcal{K}_h)$

Nun wenden wir uns dem Spurraum $\mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ zu. Wir wollen mit Hilfe der Zerlegungen aus Abschnitt 3.2.1 $\mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ -stabile Zerlegungen von $\mathcal{RT}_2(\mathcal{K}_h)$ finden. Es bezeichnen m die Anzahl der Kanten und n die Anzahl der Elemente in \mathcal{K}_h , dem aus

dreieckigen bzw. viereckigen Elementen bestehende Spurgitter von \mathcal{T}_h . Als erstes wenden wir die Spurabbildung (3.1.7) auf die $\mathcal{ND}_2(\mathcal{T}_h)$ -Zerlegung (3.2.21) für Tetraeder an und erhalten die Zerlegung

$$\mathcal{RT}_2(\mathcal{K}_h) = \mathcal{RT}_1(\mathcal{K}_h) \oplus \mathbf{curl}_\Gamma \widetilde{\mathcal{S}}_2(\mathcal{K}_h) \oplus \widetilde{\mathcal{RT}}_2^\perp(\mathcal{K}_h), \quad (3.2.40)$$

für Dreiecke, wobei

$$\widetilde{\mathcal{RT}}_2^\perp(\mathcal{K}_h) := \{\mathbf{u}_h \in \mathcal{RT}_2(\mathcal{K}_h) : \langle \mathbf{u}_h, \mathbf{t} \rangle_e = 0, e \text{ Seite von } \mathcal{K}_h\}$$

und $\widetilde{\mathcal{S}}_k(\mathcal{K}_h) := \mathcal{S}_k(\mathcal{K}_h) \setminus \mathcal{S}_{k-1}(\mathcal{K}_h)$. Hierbei ist $\mathcal{S}_k(\mathcal{K}_h)$ der Raum der stückweisen Polynome in zwei Dimensionen vom Grad k .

Für $K \in \mathcal{K}_h$ gilt $|\mathcal{S}_k(K)| = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$. Nach der Definition des Raumes $\mathcal{RT}_2(K)$ aus Anhang B ist $|\mathcal{RT}_2(K)| = 8$. Das entspricht zwei Basisfunktionen für jede Seite und zwei Funktionen für die Fläche. Das Gesamtelement K ist eine Seitenfläche eines Elements $T \in \mathcal{T}_h$, und die drei Seiten von $K = T|_\Gamma$ entsprechen den drei „unteren“ Kanten von T . So sind die drei Basisfunktionen von $\mathcal{RT}_1(K)$ gerade die Bilder der drei „unteren“ Basisfunktionen von $\mathcal{ND}_1(T)$ unter der Spurabbildung γ_t^\times , die drei Basisfunktionen von $\widetilde{\mathcal{S}}_2(K)$ die Bilder der drei „unteren“ Basisfunktionen von $\widetilde{\mathcal{S}}_2(T)$ und die zwei Basisfunktionen von $\widetilde{\mathcal{RT}}_2^\perp(K)$ die Bilder der zwei „unteren“ Basisfunktionen von $\widetilde{\mathcal{ND}}_1^\perp(T)$. Zusammenzählen der Basisfunktionen ergibt wieder, daß (3.2.40) eine direkte Summe ist. Wir schreiben $\mathbf{curl}_\Gamma \widetilde{\mathcal{S}}_2(\mathcal{K}_h) = \text{span}\{\mathbf{curl}_\Gamma \lambda^{(e_1)}, \dots, \mathbf{curl}_\Gamma \lambda^{(e_m)}\}$, und $\widetilde{\mathcal{RT}}_2^\perp(\mathcal{K}_h) = \text{span}\{\varphi_1^{(K_1)}, \varphi_2^{(K_1)}, \dots, \varphi_1^{(K_n)}, \varphi_2^{(K_n)}\}$. Lokalisierung der Zerlegung (3.2.40) (bzw. Anwendung von (3.1.7) auf (3.2.22)) ergibt

$$\mathcal{RT}_2(\mathcal{K}_h) = \mathcal{RT}_1(\mathcal{K}_h) \oplus \sum_{i=1}^m \text{span}\{\mathbf{curl}_\Gamma \lambda^{(e_i)}\} \oplus \sum_{j=1}^n \text{span}\{\varphi_1^{(K_j)}, \varphi_2^{(K_j)}\}. \quad (3.2.41)$$

Für das Spurgitter eines hexaedrischen Gitters erhalten wir die Zerlegung

$$\mathcal{RT}_2(\mathcal{K}_h) = \mathcal{RT}_1(\mathcal{K}_h) \oplus \mathbf{curl}_\Gamma \widetilde{\mathcal{S}}_2(\mathcal{K}_h) \oplus \widetilde{\mathcal{RT}}_2^{\perp,-}(\mathcal{K}_h), \quad (3.2.42)$$

wobei wir $\mathbf{curl}_\Gamma \widetilde{\mathcal{S}}_2(K) = \{\mathbf{curl}_\Gamma \lambda^{(e_1)}, \dots, \mathbf{curl}_\Gamma \lambda^{(e_4)}, \mathbf{curl}_\Gamma \lambda^{(K)}\}$ und $\widetilde{\mathcal{RT}}_2^{\perp,-}(K) = \{\varphi_1^{(K)}, \varphi_3^{(K)}, \varphi_2^{(K)} - \varphi_4^{(K)}\}$ schreiben. Man zählt nach, daß 3.2.42 tatsächlich eine direkte Summe ist (es ist $\dim \mathcal{RT}_2(K) = 12$ für viereckige Elemente in 2D) und ihre Lokalisierung hat die Form

$$\begin{aligned} \mathcal{RT}_2(\mathcal{K}_h) = \mathcal{RT}_1(\mathcal{K}_h) \oplus & \sum_{i=1}^m \text{span}\{\mathbf{curl}_\Gamma \lambda^{(e_i)}\} \\ & \oplus \sum_{j=1}^n \left(\text{span}\{\mathbf{curl}_\Gamma \lambda^{(K_j)}\} \oplus \text{span}\{\varphi_1^{(K_j)}, \varphi_3^{(K_j)}, \varphi_2^{(K_j)} - \varphi_4^{(K_j)}\} \right). \end{aligned} \quad (3.2.43)$$

3. Diskretisierung

Vordringlichste Aufgabe ist es, die Stabilität von (3.2.41) bzw. (3.2.43) zu zeigen. Dazu definiere mit Hilfe der Laplace-Einfachschicht-Randoperatoren V_0 und \mathcal{V}_0 (vgl. Seite 32) die auf $\mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ stetige und positiv definite Bilinearform

$$b(\mathbf{m}, \mathbf{w}) = \alpha \langle V_0 \text{div}_{\Gamma} \mathbf{m}, \text{div}_{\Gamma} \mathbf{w} \rangle_{\Gamma} + \beta \langle \mathcal{V}_0 \mathbf{m}, \mathbf{w} \rangle_{\Gamma} \quad (3.2.44)$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{R}_{<0}$ und die durch b induzierte, zur $\mathbf{TH}^{-1/2}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ -Norm äquivalente Energienorm

$$\|\mathbf{m}\|_{\epsilon} := |b(\mathbf{m}, \mathbf{m})|^{1/2},$$

außerdem für Dreiecke die Projektionen

$$\begin{aligned} p_0 &: \mathcal{RT}_2(\mathcal{K}_h) \rightarrow \mathcal{RT}_1(\mathcal{K}_h), \\ p^{(K)} &: \mathcal{RT}_2(\mathcal{K}_h) \rightarrow \text{span}\{\varphi_1^{(K)}, \varphi_2^{(K)}\}, \\ r^{(e)} &: \mathcal{RT}_2(\mathcal{K}_h) \rightarrow \text{span}\{\mathbf{curl}_{\Gamma} \lambda^{(e)}\} \end{aligned}$$

und für Vierecke die Projektionen

$$\begin{aligned} p_0 &: \mathcal{RT}_2(\mathcal{K}_h) \rightarrow \mathcal{RT}_1(\mathcal{K}_h), \\ p^{(K)} &: \mathcal{RT}_2(\mathcal{K}_h) \rightarrow \text{span}\{\varphi_1^{(K)}, \varphi_3^{(K)}, \varphi_2^{(K)} - \varphi_4^{(K)}\}, \\ r^{(e)} &: \mathcal{RT}_2(\mathcal{K}_h) \rightarrow \text{span}\{\mathbf{curl}_{\Gamma} \lambda^{(e)}\}, \\ r^{(K)} &: \mathcal{RT}_2(\mathcal{K}_h) \rightarrow \text{span}\{\mathbf{curl}_{\Gamma} \lambda^{(K)}\}, \end{aligned}$$

so daß die Zerlegungen (3.2.41) bzw. (3.2.43) dann als

$$\mathbf{m}_2 = p_0 \mathbf{m}_2 + \sum_{i=1}^m r^{(e_i)} \mathbf{m}_2 + \sum_{j=1}^n p^{(K_j)} \mathbf{m}_2 \quad (3.2.45)$$

bzw.

$$\mathbf{m}_2 = p_0 \mathbf{m}_2 + \sum_{i=1}^m r^{(e_i)} \mathbf{m}_2 + \sum_{j=1}^n (r^{(K_j)} \mathbf{m}_2 + p^{(K_j)} \mathbf{m}_2) \quad (3.2.46)$$

geschrieben werden können.

Es gilt

Lemma 3.2.6. *Die Zerlegung (3.2.41) bzw. (3.2.43) ist stabil bzgl. der Energie- bzw. $\mathbf{TH}^{-1/2}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ -Norm, d.h. für alle $\mathbf{m}_2 \in \mathcal{RT}_2(\mathcal{K}_h)$ gilt*

$$\|\mathbf{m}_2\|_{\epsilon}^2 \sim \|p_0 \mathbf{m}_2\|_{\epsilon}^2 + \sum_{i=1}^m \|p^{(e_i)} \mathbf{m}_2\|_{\epsilon}^2 + \sum_{j=1}^n \|p^{(K_j)} \mathbf{m}_2\|_{\epsilon}^2 \quad (3.2.47)$$

bzw.

$$\|\mathbf{m}_2\|_{\epsilon}^2 \sim \|p_0 \mathbf{m}_2\|_{\epsilon}^2 + \sum_{i=1}^m \|p^{(e_i)} \mathbf{m}_2\|_{\epsilon}^2 + \sum_{j=1}^n (\|r^{(K_j)} \mathbf{m}_2\|_{\epsilon}^2 + \|p^{(K_j)} \mathbf{m}_2\|_{\epsilon}^2). \quad (3.2.48)$$

3.2. Zwei-Level-Zerlegungen und hierarchische Fehlerschätzer

Beweis. Wir führen die Aussage auf die Stetigkeit der \mathcal{ND}_2 -Zerlegung aus Lemma 3.2.1 zurück. Sei \mathbf{m}_2 beliebig aus $\mathcal{RT}_2(\mathcal{K}_h)$. Wir zerlegen \mathbf{m}_2 nach (3.2.41) in $\mathbf{m}_2 = \sum_{i=0}^{m+n} \mathbf{m}_{2,i}$. Nach dem Satz über offene Abbildungen existiert ein linearer, stetiger Fortsetzungsoperator $\mathcal{R} : \mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma) \rightarrow \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$ als rechtsseitige Inverse zu γ_t^{\times} . Definiere dann $\mathbf{u}_2 := \Pi^{\mathcal{ND}_2} \mathcal{R} \mathbf{m}_2 \in \mathcal{ND}_2(\mathcal{T}_h)$ und $\mathbf{u}_{2,i} := \Pi^{\mathcal{ND}_2} \mathcal{R} \mathbf{m}_{2,i} \in \mathcal{ND}_2(\mathcal{T}_h)$. Da $\Pi^{\mathcal{ND}_2}$ und \mathcal{R} linear sind, gilt $\mathbf{u}_2 = \sum_{i=0}^{m+n} \mathbf{u}_{2,i}$. Weiter gilt mit der Vertauschbarkeit der Freiheitsgrade von \mathcal{ND}_k und \mathcal{RT}_k (siehe Seite 178)

$$\gamma_t^{\times} \mathbf{u}_2 = \gamma_t^{\times} \Pi^{\mathcal{ND}_2} \mathcal{R} \mathbf{m}_2 = \Pi^{\mathcal{RT}_2} \gamma_t^{\times} \mathcal{R} \mathbf{m}_2 = \mathbf{m}_2,$$

und genauso auch $\gamma_t^{\times} \mathbf{u}_{2,i} = \mathbf{m}_{2,i}$ ($i = 1, \dots, m+n$). Mit der Stetigkeit der Interpolationsoperatoren \mathcal{RT}_2 und \mathcal{ND}_2 und der Spur- und Fortsetzungsoperatoren γ_t^{\times} und \mathcal{R} erhalten wir dann die Äquivalenzen

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_2\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)} &\sim \|\mathbf{m}_2\|_{\mathbf{TH}^{-1/2}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)}, \\ \|\mathbf{u}_{2,i}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)} &\sim \|\mathbf{m}_{2,i}\|_{\mathbf{TH}^{-1/2}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)}, \quad i = 1, \dots, m+n. \end{aligned}$$

Lemma 3.2.1 liefert wiederum die Äquivalenz $\sum_{i=0}^{m+n} \|\mathbf{u}_{2,i}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)} \sim \|\mathbf{u}_2\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)}$, womit die Aussage des Lemmas bewiesen ist. \square

Wir suchen jetzt einen Fehlerschätzer für das Galerkinverfahren zum Problem

Finde $\mathbf{m} \in \mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$, so daß

$$b(\mathbf{m}, \mathbf{w}) = g(\mathbf{w}) \tag{3.2.49}$$

für alle $\mathbf{w} \in \mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$

mit einer rechten Seite $g \in \mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)'$. Nachdem wir im letzten Lemma die Stabilität der Zerlegung (3.2.41) bzw. (3.2.43) bewiesen haben, ist der Hauptteil der Arbeit getan. Der Rest läuft analog zur Konstruktion des Fehlerschätzers für die Nédélec-Elemente:

Es seien \mathbf{m}_h und \mathbf{m}_2 die Lösungen der entsprechenden diskreten variationellen Formulierungen auf $\mathcal{RT}_1(\mathcal{K}_h)$ bzw. $\mathcal{RT}_2(\mathcal{K}_h)$. Wie für Nédélec-Elemente auf Seite 59 setzen wir hier die *Saturationsannahme*

$$\|\mathbf{m} - \mathbf{m}_2\|_{\epsilon} \leq \delta_h \|\mathbf{m} - \mathbf{m}_h\|_{\epsilon} \tag{3.2.50}$$

mit $\delta_h \leq \delta < 1$ voraus. Damit gilt analog zu Lemma 3.2.2:

Lemma 3.2.7. *Gilt die Saturationsannahme (3.2.50), so folgt*

$$\|\epsilon_1\|_{\epsilon} \leq \|\mathbf{m} - \mathbf{m}_h\|_{\epsilon} \leq \frac{1}{1 - \delta} \|\epsilon_1\|_{\epsilon}$$

mit dem Fehlerterm $\epsilon_1 := \mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_h$.

3. Diskretisierung

Beweis. Siehe [15, Lemma 1] oder [11, Gleichung (4.13)]. \square

Analog zu (3.2.34) und (3.2.35) definiere nun mit den obigen Zerlegungen die neue „entkoppelnde“ Bilinearform \tilde{b} auf $\mathcal{RT}_2(\mathcal{K}_h) \times \mathcal{RT}_2(\mathcal{K}_h)$ durch

$$\tilde{b}(\mathbf{m}_2, \mathbf{w}_2) = b(p_0 \mathbf{m}_2, p_0 \mathbf{w}_2) + \sum_{i=1}^m b(r^{(e_i)} \mathbf{m}_2, r^{(e_i)} \mathbf{w}_2) + \sum_{j=1}^n b(p^{(K_j)} \mathbf{m}_2, p^{(K_j)} \mathbf{w}_2) \quad (3.2.51)$$

für Dreiecke und

$$\begin{aligned} \tilde{b}(\mathbf{m}_2, \mathbf{w}_2) &= b(p_0 \mathbf{m}_2, p_0 \mathbf{w}_2) + \sum_{i=1}^m b(r^{(e_i)} \mathbf{m}_2, r^{(e_i)} \mathbf{w}_2) \\ &\quad + \sum_{j=1}^n (b(r^{(K_j)} \mathbf{m}_2, r^{(K_j)} \mathbf{w}_2) + b(p^{(K_j)} \mathbf{m}_2, p^{(K_j)} \mathbf{w}_2)) \end{aligned} \quad (3.2.52)$$

für Vierecke. Definiere dann den Fehlerterm $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 \in \mathcal{RT}_2(\mathcal{K}_h)$ durch

$$\tilde{b}(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_1, \boldsymbol{\zeta}) = b(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\zeta}) = g(\boldsymbol{\eta}) - b(\mathbf{m}_h, \boldsymbol{\zeta}) \quad \forall \boldsymbol{\zeta} \in \mathcal{RT}_2(\mathcal{K}_h). \quad (3.2.53)$$

Es gilt

Lemma 3.2.8. *Für das durch (3.2.53) definierte $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_1$ gilt*

$$\|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_1\|_{\boldsymbol{\varepsilon}} \sim \|\boldsymbol{\varepsilon}_1\|_{\boldsymbol{\varepsilon}}.$$

Beweis. Siehe Lemma 3.2.8. \square

Aus den letzten beiden Lemmata folgen sofort mit $\eta = \|\boldsymbol{\varepsilon}\|_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ die zwei folgenden Sätze:

Satz 3.2.9. *Es gelte die Saturationsannahme (3.2.50). Dann gilt für die Lösung \mathbf{m}_h des Galerkinverfahrens zu (3.2.49) auf einem Gitter mit dreieckigen Elementen*

$$\eta \lesssim \|\mathbf{m} - \mathbf{m}_h\|_{\boldsymbol{\varepsilon}} \lesssim \frac{1}{1 - \delta} \eta$$

mit dem Fehlerschätzer

$$\eta^2 := \sum_{i=1}^m (\vartheta^{(e_i)})^2 + \sum_{j=1}^n (\vartheta^{(K_j)})^2.$$

Der lokale Anteil auf einem Dreieck K (dessen Seiten oBdA den Indizes $i = 1, 2, 3$ entsprechen) ist

$$\eta_K^2 := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (\vartheta^{(e_i)})^2 + (\vartheta^{(K)})^2$$

3.2. Zwei-Level-Zerlegungen und hierarchische Fehlerschätzer

mit

$$\vartheta^{(e)} := \frac{|g(\mathbf{curl}_\Gamma \lambda^{(e)}) - b(\mathbf{m}_h, \mathbf{curl}_\Gamma \lambda^{(e)})|}{\|\mathbf{curl}_\Gamma \lambda^{(e)}\|_\epsilon}$$

und

$$\vartheta^{(K)} = \|\kappa_1 \boldsymbol{\varphi}_1^{(K)} + \kappa_2 \boldsymbol{\varphi}_2^{(K)}\|_\epsilon,$$

wobei $(\kappa_1, \kappa_2)^\top$ Lösung des LGS

$$\begin{pmatrix} b(\boldsymbol{\varphi}_1^{(K)}, \boldsymbol{\varphi}_1^{(K)}) & b(\boldsymbol{\varphi}_2^{(K)}, \boldsymbol{\varphi}_1^{(K)}) \\ b(\boldsymbol{\varphi}_1^{(K)}, \boldsymbol{\varphi}_2^{(K)}) & b(\boldsymbol{\varphi}_2^{(K)}, \boldsymbol{\varphi}_2^{(K)}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(\boldsymbol{\varphi}_1^{(K)}) - b(\mathbf{m}_h, \boldsymbol{\varphi}_1^{(K)}) \\ g(\boldsymbol{\varphi}_2^{(K)}) - b(\mathbf{m}_h, \boldsymbol{\varphi}_2^{(K)}) \end{pmatrix}$$

ist.

Auf einem Gittern aus viereckigen Elementen lautet die entsprechende Aussage:

Satz 3.2.10. *Es gelte die Saturationsannahme (3.2.50). Dann gilt für die Lösung \mathbf{m}_h des Galerkinverfahrens zu (3.2.49) auf einem Gitter mit viereckigen Elementen*

$$\eta \lesssim \|\mathbf{m} - \mathbf{m}_h\|_\epsilon \lesssim \frac{1}{1 - \delta} \eta$$

mit dem Fehlerschätzer

$$\eta^2 := \sum_{i=1}^m (\vartheta^{(e_i)})^2 + \sum_{j=1}^n \left((\vartheta_1^{(K_j)})^2 + (\vartheta_2^{(K_j)})^2 \right).$$

Hier sind die lokalen Anteile (die Seiten eines Vierecks K entsprechen oBdA den Indizes $i = 1, 2, 3, 4$)

$$\eta_K^2 := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 (\vartheta^{(e_i)})^2 + (\vartheta_1^{(K)})^2 + (\vartheta_2^{(K)})^2$$

und die einzelnen Terme lauten

$$\begin{aligned} \vartheta^{(e)} &:= \frac{|g(\mathbf{curl}_\Gamma \lambda^{(e)}) - b(\mathbf{m}_h, \mathbf{curl}_\Gamma \lambda^{(e)})|}{\|\mathbf{curl}_\Gamma \lambda^{(e)}\|_\epsilon}, \\ \vartheta_1^{(K)} &:= \frac{|g(\mathbf{curl}_\Gamma \lambda^{(K)}) - b(\mathbf{m}_h, \mathbf{curl}_\Gamma \lambda^{(K)})|}{\|\mathbf{curl}_\Gamma \lambda^{(K)}\|_\epsilon}, \\ \vartheta_2^{(K)} &:= \|\kappa_1 \boldsymbol{\varphi}_1^{(K)} + \kappa_2 \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_2^{(K)} + \kappa_3 \boldsymbol{\varphi}_3^{(K)}\|_\epsilon, \end{aligned}$$

wobei $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_2^{(K)} := \boldsymbol{\varphi}_2^{(K)} - \boldsymbol{\varphi}_4^{(K)}$ und $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)^\top$ Lösung des LGS

$$\begin{pmatrix} b(\boldsymbol{\varphi}_1^{(K)}, \boldsymbol{\varphi}_1^{(K)}) & b(\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_2^{(K)}, \boldsymbol{\varphi}_1^{(K)}) & b(\boldsymbol{\varphi}_3^{(K)}, \boldsymbol{\varphi}_1^{(K)}) \\ b(\boldsymbol{\varphi}_1^{(K)}, \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_2^{(K)}) & b(\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_2^{(K)}, \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_2^{(K)}) & b(\boldsymbol{\varphi}_3^{(K)}, \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_2^{(K)}) \\ b(\boldsymbol{\varphi}_1^{(K)}, \boldsymbol{\varphi}_3^{(K)}) & b(\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_2^{(K)}, \boldsymbol{\varphi}_3^{(K)}) & b(\boldsymbol{\varphi}_3^{(K)}, \boldsymbol{\varphi}_3^{(K)}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(\boldsymbol{\varphi}_1^{(K)}) - b(\mathbf{m}_h, \boldsymbol{\varphi}_1^{(K)}) \\ g(\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_2^{(K)}) - b(\mathbf{m}_h, \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_2^{(K)}) \\ g(\boldsymbol{\varphi}_3^{(K)}) - b(\mathbf{m}_h, \boldsymbol{\varphi}_3^{(K)}) \end{pmatrix}.$$

3.3. Interpolationsoperatoren

In diesem Abschnitt wenden wir uns Interpolationsoperatoren

$$P_h^1 : H^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{S}_1(\mathcal{T}_h)$$

und

$$\mathfrak{P}_h^1 : \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega) \rightarrow \mathcal{ND}_1(\mathcal{T}_h)$$

zu. Desweiteren werden wir auf dem Rand Γ Interpolationsoperatoren

$$\begin{aligned} p_h^1 &: H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{S}_1(\mathcal{K}_h), \\ R_h^1 &: \mathbf{TH}_\perp^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{RT}_1(\mathcal{K}_h), \\ N_h^1 &: \mathbf{TH}_\parallel^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{TN}\mathcal{D}_1(\mathcal{K}_h). \end{aligned}$$

betrachten.

Das besondere an den Operatoren P_h^1 und \mathfrak{P}_h^1 soll ihre Eigenschaft sein, homogene Randbedingungen zu erhalten, d.h. es soll gelten $P_h^1 : \mathbf{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{S}_{1,0}(\mathcal{T}_h)$ und $\mathfrak{P}_h^1 : \mathbf{H}_0(\mathbf{curl}, \Omega) \rightarrow \mathcal{ND}_{1,0}(\mathcal{T}_h)$. Außerdem werden sie (wie auch die Randinterpolationsoperatoren p_h^1 , R_h^1 und N_h^1) günstige Approximationseigenschaften aufweisen, so daß wir sie bei der Konstruktion residualer Fehlerschätzer in den Abschnitten 4.3 und 5.3 verwenden können. Literatur zu derartigen Operatoren findet sich z.B. in [90, 88] für den H^1 -Fall und in [39, 14] für den $\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$ -Fall (stets für allgemeine Polynomgrade $k \in \mathbb{N}$). Aus diesen Arbeiten stammen auch die Definitionen der Operatoren P_h^1 und \mathfrak{P}_h^1 . Wir werden hier exemplarisch den Fall von tetraedrischen Elementen betrachten, aber selbstverständlich sind sämtliche Argumente und Konstruktionen ohne weiteres auf hexaedrische Elemente übertragbar.

Als erstes wollen wir klären, warum die kanonischen Interpolationsoperatoren $\Pi^{\mathcal{S}_1}$ und $\Pi^{\mathcal{ND}_1}$ diesen Zweck nicht erfüllen. Wir erinnern an die Bezeichnungen \mathcal{N}_h für die Menge der Knotenpunkte der Triangulierung \mathcal{T}_h , $\varphi_{\mathbf{y}}$ die zum Punkt $\mathbf{y} \in \mathcal{N}_h$ gehörende Hutfunktion, \mathcal{E}_h die Menge der Kanten aus \mathcal{T}_h und \mathbf{b}_e die stückweise trilineare Nédélec-Basisfunktion zur Kante e . Dann ist

$$\Pi^{\mathcal{S}_1} \psi := \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{N}_h} \psi(\mathbf{y}) \varphi_{\mathbf{y}}$$

der kanonische Interpolationsoperator in den Raum $\mathcal{S}_1(\mathcal{T}_h)$ der stückweise linearen Funktionen. Dieser Operator erhält sehr wohl homogene Randbedingungen, allerdings ist er wegen der Punktauswertung $\psi(\mathbf{y})$ nicht für alle $\psi \in H^1(\Omega)$ definiert (ψ kann durchaus unbeschränkt in einem Knotenpunkt auf dem Rand von Ω sein). Auch der kanonische Interpolationsoperator

$$\Pi^{\mathcal{ND}_1} \mathbf{q} := \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \mathbf{q}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{t} \, d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{b}_e$$

ist nicht für alle $\mathbf{q} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$ definiert (vgl. z.B. [89, §III.3.3]), außerdem muß keineswegs $\mathbf{\Pi}^{\mathcal{N}\mathcal{D}_1} \mathbf{q} \times \mathbf{n} = 0$ auf Γ für $\mathbf{q} \times \mathbf{n} = 0$ auf Γ gelten ¹.

Um einen wohldefinierten Operator auf $H^1(\Omega)$ zu erhalten, müssen wir die Punktauswertung durch eine Integralauswertung ersetzen. Dabei gehen wir folgendermaßen vor: Es sei \mathcal{F}_h die Menge der Flächen aus \mathcal{T}_h , dann ordnen wir jedem $\mathbf{y} \in \mathcal{N}_h$ eine Fläche $F_{\mathbf{y}} \in \mathcal{F}_h$ zu, so daß $\mathbf{y} \in F_{\mathbf{y}}$. Dabei liegen dieser Zuordnung keine weiteren Einschränkungen zugrunde, bis auf

$$F_{\mathbf{y}} \in \mathcal{F}_h^\Gamma \subset \Gamma \quad \text{falls } \mathbf{y} \in \Gamma. \quad (3.3.54)$$

Es sei nun F eine Fläche und $\mathcal{N}(F) = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3\}$ die Menge der Knoten auf F . Definiere dann lineare Funktionen $\rho_{\mathbf{y}_i}^F$ ($i = 1, 2, 3$) auf F durch die Bedingungen

$$\int_F \varphi_{\mathbf{y}_j}(\mathbf{x}) \rho_{\mathbf{y}_i}^F(\mathbf{x}) d\sigma_{\mathbf{x}} = \delta_{ij} \quad (j = 1, 2, 3), \quad (3.3.55)$$

wobei δ_{ij} das Kroneckerdelta ist. Die $\rho_{\mathbf{y}_i}^F$ bilden also eine zu den Hutfunktionen auf F duale Basis bzgl. des L^2 -Skalarprodukts. Den Interpolationsoperator P_h^1 definieren wir folgendermaßen:

$$P_h^1 \psi(\mathbf{x}) := \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{N}_h} \left(\int_{F_{\mathbf{y}}} \psi(\boldsymbol{\xi}) \rho_{\mathbf{y}}^F(\boldsymbol{\xi}) d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} \right) \varphi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}). \quad (3.3.56)$$

Anhand von (3.3.56), (3.3.55) und (3.3.54) überprüft man leicht, daß P_h^1 homogene Dirichletrandbedingungen erhält, denn:

Sei $\psi \equiv 0$ auf Γ und sei $F \in \mathcal{F}_h^\Gamma$ mit $\mathcal{N}(F) = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_F P_h^1 \psi(\boldsymbol{\xi}) \rho_{\mathbf{y}_i}^F(\boldsymbol{\xi}) d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} &= \sum_{j=1}^3 \left(\int_{F_{\mathbf{y}_j}} \psi(\boldsymbol{\xi}) \rho_{\mathbf{y}_j}^F(\boldsymbol{\xi}) d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} \right) \int_F \varphi_{\mathbf{y}_j}(\mathbf{x}) \rho_{\mathbf{y}_i}^F(\mathbf{x}) d\sigma_{\mathbf{x}} \\ &= \int_{F_{\mathbf{y}_i}} \underbrace{\psi(\boldsymbol{\xi})}_{=0} \rho_{\mathbf{y}_i}^F(\boldsymbol{\xi}) d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} = 0. \end{aligned}$$

Da die $\rho_{\mathbf{y}_i}^F$ eine Basis von $\mathcal{S}_1(F)$ bilden, gilt damit $P_h^1 \psi \equiv 0$ auf F .

Die Konstruktion von \mathfrak{P}_h^1 erfolgt analog zu der von P_h^1 . Diesmal betrachten wir \mathcal{E}_h die Menge der Kanten der Triangulierung \mathcal{T}_h . Jeder Kante e ordnet man eine Fläche $F_e \in \mathcal{F}_h$ mit $e \in F_e$ zu, wobei man die Einschränkung

$$F_e \in \mathcal{F}_h^\Gamma \subset \Gamma \quad \text{falls } e \subset \Gamma \quad (3.3.57)$$

zu beachten hat. Es sei nun F eine Fläche und $\mathcal{E}(F) = \{e_1, e_2, e_3\}$ die Menge der Kanten von F . Es seien $\mathbf{b}_{e_j} \in \mathcal{N}\mathcal{D}_1(\mathcal{T}_h)$ ($j = 1, 2, 3$) die zu den Kanten e_j aus $\mathcal{E}(F)$ gehörenden

¹Für Nédélec-Räume höheren Grades ($k > 1$) dagegen erhält $\mathbf{\Pi}^{\mathcal{N}\mathcal{D}_k}$ homogene Randbedingungen, wie man an den Freiheitsgraden in Abschnitt B.1 im Anhang sofort sieht.

3. Diskretisierung

Nédélec-Basisfunktionen. Man definiere lineare Funktionen $\boldsymbol{\rho}_{e_i}^F$ ($i = 1, 2, 3$) auf F durch die Bedingungen

$$\int_F (\mathbf{b}_{e_j}(\mathbf{x}) \times \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\rho}_{e_i}^F(\mathbf{x}) d\sigma_{\mathbf{x}} = \delta_{ij} \quad (j = 1, 2, 3). \quad (3.3.58)$$

Damit bilden die $\boldsymbol{\rho}_{e_i}^F$ eine zu den Nédélec-Basisfunktionen auf F duale Basis bzgl. des obigen Skalarprodukts. Den Interpolationsoperator \mathfrak{P}_h^1 definieren wir dann wie folgt:

$$\mathfrak{P}_h^1 \mathbf{q}(\mathbf{x}) := \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \left(\int_{F_e} (\mathbf{q}(\boldsymbol{\xi}) \times \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\rho}_e^F(\boldsymbol{\xi}) d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} \right) \mathbf{b}_e(\mathbf{x}). \quad (3.3.59)$$

Mit (3.3.59), (3.3.58) und (3.3.57) weist man nach, daß auch \mathfrak{P}_h^1 homogene Dirichletbedingungen erhält: Sei $\mathbf{q} \times \mathbf{n} \equiv 0$ auf Γ und sei $F \in \mathcal{F}_h(\Gamma)$ mit $\mathcal{E}(F) = \{e_1, e_2, e_3\}$. Es gilt

$$\begin{aligned} & \int_F (\mathfrak{P}_h^1 \mathbf{q}(\boldsymbol{\xi}) \times \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\rho}_{e_i}^F(\boldsymbol{\xi}) d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} \\ &= \sum_{j=1}^3 \left(\int_{F_{e_j}} (\mathbf{q}(\boldsymbol{\xi}) \times \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\rho}_{e_j}^F(\boldsymbol{\xi}) d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} \right) \int_F (\mathbf{b}_{e_j}(\mathbf{x}) \times \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\rho}_{e_i}^F(\mathbf{x}) d\sigma_{\mathbf{x}} \\ &= \int_{F_{e_i}} \underbrace{(\mathbf{q}(\boldsymbol{\xi}) \times \mathbf{n})}_{=0} \cdot \boldsymbol{\rho}_{e_i}^F(\boldsymbol{\xi}) d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} = 0. \end{aligned}$$

Nach (3.1.7) gilt $\mathfrak{P}_h^1 \mathbf{q} \times \mathbf{n} \in \mathcal{RT}_1(\mathcal{T}_h, \Gamma)$, und da die $\boldsymbol{\rho}_{e_i}^F$ nach Konstruktion eine Basis des Dualraums von $\mathcal{RT}_1(F)$ bilden, folgt $\mathfrak{P}_h^1 \mathbf{q} \times \mathbf{n} \equiv 0$ auf F .

Folgendes Lemma wird uns beim Nachweis der Stabilitäts- und Approximationseigenschaften der Interpolationsoperatoren nützlich sein. Es beschreibt das Verhalten verschiedener Normen beim Übergang von einem Element auf das Referenzelement. Dabei werden die Transformationen berücksichtigt, die bei H^1 -, $\mathbf{H}(\text{curl})$ - und $\mathbf{H}(\text{div})$ -konformen Finiten Elementen benutzt werden. Unter der H^1 -Seminorm $|v|_{H^1(\Omega)}$ einer skalarwertigen Funktion v verstehen wir die L^2 -Norm ihres Gradienten. Für eine vektorwertige Funktion $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ gilt die naheliegende Definition $|\mathbf{v}|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} := \left(\sum_{i=1}^n |v_i|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$.

Lemma 3.3.1. *Es seien $T \in \mathcal{T}_h$ ein Element mit Durchmesser h_T und $F \in \mathcal{F}_h$ eine Fläche mit Durchmesser h_F , und es seien \hat{T} und \hat{F} das Referenzelement und die Referenzfläche (vgl. dazu Abschnitt 3.1). Dabei gelte $T = \ell(\hat{T})$ mit*

$$\mathbf{x} = \ell(\hat{\mathbf{x}}) := B\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}, \quad B \in \mathcal{L}(\hat{T}, \mathbb{R}^3), \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3.$$

Weiter seien $\hat{\psi} : \hat{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi : T \rightarrow \mathbb{R}$ zwei skalarwertige und $\hat{\mathbf{q}} : \hat{T} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{q} : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ zwei vektorwertige Funktionen.

1. Die Funktion ψ gehe aus $\hat{\psi}$ durch die H^1 -konforme Transformation

$$\psi(\mathbf{x}) = \hat{\psi}(\ell^{-1}(\mathbf{x})) \quad (3.3.60)$$

hervor, dann gelten

$$\|\psi\|_{L^2(T)} \sim h^{3/2} \|\hat{\psi}\|_{L^2(\hat{T})}, \quad (3.3.61)$$

$$|\psi|_{H^1(T)} \sim h^{1/2} |\hat{\psi}|_{H^1(\hat{T})}, \quad (3.3.62)$$

$$\|\psi\|_{L^2(F)} \sim h \|\hat{\psi}\|_{L^2(\hat{F})}, \quad (3.3.63)$$

$$|\psi|_{H^1(F)} \sim |\hat{\psi}|_{H^1(\hat{F})}. \quad (3.3.64)$$

2. Die Funktion \mathbf{q} gehe aus $\hat{\mathbf{q}}$ durch die $\mathbf{H}(\text{curl})$ -konforme Transformation

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) = (B^\top)^{-1} \hat{\mathbf{q}}(\ell^{-1}\mathbf{x}) \quad (3.3.65)$$

hervor (vgl. (3.1.5)), dann gelten

$$\|\mathbf{q}\|_{\mathbf{L}^2(T)} \sim h^{1/2} \|\hat{\mathbf{q}}\|_{\mathbf{L}^2(\hat{T})}, \quad (3.3.66)$$

$$|\mathbf{q}|_{\mathbf{H}^1(T)} \sim h^{-1/2} |\hat{\mathbf{q}}|_{\mathbf{H}^1(\hat{T})}, \quad (3.3.67)$$

$$\|\mathbf{q}\|_{\mathbf{L}^2(F)} \sim \|\hat{\mathbf{q}}\|_{\mathbf{L}^2(\hat{F})}, \quad (3.3.68)$$

$$|\mathbf{q}|_{\mathbf{H}^1(F)} \sim h^{-1} |\hat{\mathbf{q}}|_{\mathbf{H}^1(\hat{F})}. \quad (3.3.69)$$

3. Die Funktion \mathbf{q} gehe aus $\hat{\mathbf{q}}$ durch die $\mathbf{H}(\text{div})$ -konforme Transformation

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\det B} B \hat{\mathbf{q}}(\ell^{-1}\mathbf{x}) \quad (3.3.70)$$

hervor (vgl. (3.1.9)), dann gelten

$$\|\mathbf{q}\|_{\mathbf{L}^2(T)} \sim h^{-1/2} \|\hat{\mathbf{q}}\|_{\mathbf{L}^2(\hat{T})}, \quad (3.3.71)$$

$$|\mathbf{q}|_{\mathbf{H}^1(T)} \sim h^{-3/2} |\hat{\mathbf{q}}|_{\mathbf{H}^1(\hat{T})}, \quad (3.3.72)$$

$$\|\mathbf{q}\|_{\mathbf{L}^2(F)} \sim h^{-1} \|\hat{\mathbf{q}}\|_{\mathbf{L}^2(\hat{F})}, \quad (3.3.73)$$

$$|\mathbf{q}|_{\mathbf{H}^1(F)} \sim h^{-2} |\hat{\mathbf{q}}|_{\mathbf{H}^1(\hat{F})}. \quad (3.3.74)$$

Beweis. Es handelt sich hierbei um Standardaussagen, die zum Teil in [90] und [14] verwendet werden. Sämtliche Aussagen folgen durch Ersetzen von \mathbf{q} durch $\hat{\mathbf{q}}$ mittels der jeweiligen Transformationsformel. Wir rechnen hier exemplarisch (3.3.66) – (3.3.69) vor.

Wegen (3.3.65) gilt

$$\|\mathbf{q}\|_{\mathbf{L}^2(T)}^2 \lesssim |\det B| \|B^{-1}\|^2 \|\hat{\mathbf{q}}\|_{\mathbf{L}^2(\hat{T})}^2.$$

3. Diskretisierung

Dabei haben wir $\|B^{-1}\|^2$ wegen der Submultiplikativität der Matrixnorm hervorziehen können, und das $|\det B|$ erscheint als Folge der Substitution $\mathbf{x} \rightarrow \hat{\mathbf{x}}$. Umgekehrt gilt

$$\|\hat{\mathbf{q}}\|_{\mathbf{L}^2(\hat{T})}^2 \lesssim |\det B|^{-1} \|B\|^2 \|\mathbf{q}\|_{\mathbf{L}^2(T)}^2.$$

Nun gelten aufgrund der Regularität unserer Triangulierung die Abschätzungen $\|B\| \sim h$, $\|B^{-1}\| \sim h^{-1}$ und $|\det B| \sim h^3$, so daß wir (3.3.66) gezeigt haben. Genauso gilt

$$\|\mathbf{q}\|_{\mathbf{H}^1(T)}^2 \lesssim |\det B| \|B^{-1}\|^4 \|\hat{\mathbf{q}}\|_{\mathbf{H}^1(\hat{T})}^2,$$

wobei hier ein zusätzliches $\|B^{-1}\|^2$ aufgrund der Kettenregel auftaucht (Man bedenke, daß in der $\mathbf{H}^1(\hat{T})$ -Norm nach $\hat{\mathbf{x}} = \ell^{-1}(\mathbf{x})$ abgeleitet wird). Damit (und mit der umgekehrten Ungleichung) folgt (3.3.67).

Für den Nachweis von (3.3.68) und (3.3.69) benötigen wir die Einschränkung der Abbildung ℓ von \hat{T} nach T als Abbildung vom zwei-dimensionalen Referenzelement \hat{F} nach F . Seien dazu a_i , $i = 1, 2, 3$, die Spaltenvektoren von B , also $B = (a_1, a_2, a_3)$. Definiere dann $A = (a_1, a_2, \frac{a_1 \times a_2}{\|a_1 \times a_2\|})$ und schreibe $F = \tilde{\ell}(\hat{F})$ mit

$$\mathbf{x} = \tilde{\ell}(\hat{\mathbf{x}}) := A\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{d}, \quad A \in \mathcal{L}(\hat{F}, \mathbb{R}^3), \quad \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3. \quad (3.3.75)$$

Es gelten $\|A\| \sim h$, $\|A^{-1}\| \sim h^{-1}$ und $|\det A| = \|a_1 \times a_2\| \sim h^2$. Genau wie vorhin gelten

$$\|\mathbf{q}\|_{\mathbf{L}^2(F)}^2 \lesssim |\det A| \|A^{-1}\|^2 \|\hat{\mathbf{q}}\|_{\mathbf{L}^2(\hat{F})}^2$$

und

$$\|\mathbf{q}\|_{\mathbf{H}^1(F)}^2 \lesssim |\det A| \|A^{-1}\|^4 \|\hat{\mathbf{q}}\|_{\mathbf{H}^1(\hat{F})}^2,$$

wie auch die umgekehrten Ungleichungen, und damit sind (3.3.68) und (3.3.69) bewiesen. \square

Lemma 3.3.2. *Für die in (3.3.55) und (3.3.58) definierten Funktionen $\rho_{\mathbf{x}}^F$ und ρ_e^F gelten*

$$\|\rho_{\mathbf{x}}^F\|_{L^\infty(F)} \lesssim h_F^{-2}, \quad \|\rho_e^F\|_{L^\infty(F)} \lesssim h_F^{-2}.$$

Beweis. Die Aussage für $\rho_{\mathbf{x}}^F$ findet sich in [90, Lemma 3.1], die für ρ_e^F in [14, Beweis zu Lemma 4]. Der Beweis in [14] läuft über das explizite Ausrechnen der Funktion ρ_e^F . Wir folgen hier dagegen für $\rho_{\mathbf{x}}^F$ und für ρ_e^F den Beweis aus [90].

Es sei $\tilde{\ell}$ die in (3.3.75) definierte Abbildung von \hat{F} nach F und A die dort angegebene Transformationsmatrix. Dann gilt für $\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_j \in \mathcal{N}(F)$

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= \int_F \varphi_{\mathbf{y}_j}(\mathbf{x}) \rho_{\mathbf{y}_i}^F(\mathbf{x}) d\sigma_{\mathbf{x}} = \int_{\hat{F}} \varphi_{\mathbf{y}_j}(\tilde{\ell}(\hat{\mathbf{x}})) \rho_{\mathbf{y}_i}^F(\tilde{\ell}(\hat{\mathbf{x}})) \det(A) d\sigma_{\hat{\mathbf{x}}} \\ &= \int_{\hat{F}} \hat{\varphi}_{\hat{\mathbf{y}}_j}(\hat{\mathbf{x}}) \rho_{\hat{\mathbf{y}}_i}^F(\tilde{\ell}(\hat{\mathbf{x}})) \det(A) d\sigma_{\hat{\mathbf{x}}}, \end{aligned}$$

also folgt (da die duale Basis eindeutig ist)

$$\hat{\rho}_{\hat{\mathbf{y}}_i}^{\hat{F}}(\hat{\mathbf{x}}) = \det(A) \rho_{\mathbf{y}_i}^F(\tilde{\ell}(\hat{\mathbf{x}})),$$

und damit gilt

$$\|\rho_{\mathbf{y}_i}^F\|_{L^\infty(F)} = |\det(A)|^{-1} \|\hat{\rho}_{\hat{\mathbf{y}}_i}^{\hat{F}}\|_{L^\infty(\hat{F})} \sim h_F^{-2}.$$

Genauso folgt

$$\hat{\rho}_{\hat{\mathbf{e}}_i}^{\hat{F}}(\hat{\mathbf{x}}) = \det(A) \rho_{\mathbf{e}_i}^F(\tilde{\ell}(\hat{\mathbf{x}}))$$

und das Lemma ist bewiesen. \square

Im folgenden bezeichnen wir mit D_T bzw. D_F bzw. D_e die Menge der Elemente aus \mathcal{T}_h , die mindestens eine gemeinsame Ecke mit dem Element T bzw. der Fläche F bzw. der Kante e haben, und mit D_T^1 bzw. D_F^1 die Menge der Elemente aus \mathcal{T}_h , die mindestens ein gemeinsames Randstück mit T bzw. F haben.

Satz 3.3.3. *Es sei Ω ein Polyeder im \mathbb{R}^3 , \mathcal{T}_h eine Triangulierung (in Tetraedern oder Hexaedern) von Ω , $T \in \mathcal{T}_h$ ein Element der Triangulierung, $F \subset T$ eine Seitenfläche von T und $e \subset T$ eine Kante von T . Weiter sei \mathcal{K}_h eine Triangulierung (in Dreiecken oder in Vierecken) von $\Gamma = \partial\Omega$, deren Elemente ebenfalls mit F bezeichnet werden.*

1. Für den in (3.3.56) definierten linearen Projektionsoperator $P_h^1 : H^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{S}_1(\mathcal{T}_h)$ und für alle $\psi \in H^1(\Omega)$ gilt

$$P_h^1 \psi_h = \psi_h, \quad (3.3.76)$$

$$\|P_h^1 \psi\|_{L^2(T)} \lesssim h_T \|\psi\|_{H^1(D_T)}, \quad (3.3.77)$$

$$|P_h^1 \psi|_{H^1(T)} \lesssim |\psi|_{H^1(D_T)}, \quad (3.3.78)$$

$$\|\psi - P_h^1 \psi\|_{L^2(T)} \lesssim h_T |\psi|_{H^1(D_T)}, \quad (3.3.79)$$

$$\|\psi - P_h^1 \psi\|_{L^2(F)} \lesssim h_F^{1/2} |\psi|_{H^1(D_F)}. \quad (3.3.80)$$

Die Konstanten in den Abschätzungen hängen nur von der Regularität des Gitters ab.

2. Für den in (3.3.59) definierten linearen Projektionsoperator $\mathfrak{P}_h^1 : \mathbf{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{N}\mathcal{D}_1(\mathcal{T}_h)$ und für alle $\mathbf{q} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ gilt

$$\|\mathfrak{P}_h^1 \mathbf{q}\|_{L^2(T)} \lesssim \|\mathbf{q}\|_{\mathbf{H}^1(D_T^1)}, \quad (3.3.81)$$

$$\|\mathbf{curl} \mathfrak{P}_h^1 \mathbf{q}\|_{L^2(T)} \lesssim |\mathbf{q}|_{\mathbf{H}^1(D_T^1)}, \quad (3.3.82)$$

$$\|\mathbf{q} - \mathfrak{P}_h^1 \mathbf{q}\|_{L^2(T)} \lesssim h_T |\mathbf{q}|_{\mathbf{H}^1(D_T^1)}, \quad (3.3.83)$$

$$\|\mathbf{q} - \mathfrak{P}_h^1 \mathbf{q}\|_{L^2(F)} \lesssim h_F^{1/2} |\mathbf{q}|_{\mathbf{H}^1(D_F^1)}. \quad (3.3.84)$$

Die Konstanten in den Abschätzungen hängen nur von Ω und von der Regularität des Gitters ab.

3. Diskretisierung

3. Es existiert ein linearer Projektionsoperator $p_h^1 : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{S}_1(\mathcal{K}_h)$, so daß für alle $\phi \in H^{1/2}(\Gamma)$ gilt

$$\|\phi - p_h^1 \phi\|_{L^2(F)} \lesssim h_F^{1/2} |v|_{H^1(D_F)}$$

für ein $v \in H^1(\Omega)$ mit $\mathbf{grad}_\Gamma v = \mathbf{grad}_\Gamma \phi$ und

$$\|\mathbf{grad} v\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \|\mathbf{curl}_\Gamma \phi\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}.$$

Die Konstanten in den Abschätzungen hängen nur von Ω und von der Regularität des Gitters ab.

4. Es existieren lineare Projektionsoperatoren $R_h^1 : \mathbf{TH}^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{RT}_1(\mathcal{K}_h)$ und $N_h^1 : \mathbf{TH}_{\parallel}^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{TN}\mathcal{D}_1(\mathcal{K}_h)$, so daß für alle $\zeta \in \mathbf{TH}_{\perp}^{1/2}(\Gamma)$ und alle $\xi \in \mathbf{TH}_{\parallel}^{1/2}(\Gamma)$ gelten

$$\|\zeta - R_h^1 \zeta\|_{L^2(F)} \lesssim h_F^{1/2} \|\zeta\|_{\mathbf{TH}_{\perp}^{1/2}(\Gamma)}$$

$$\|\xi - N_h^1 \xi\|_{L^2(F)} \lesssim h_F^{1/2} \|\xi\|_{\mathbf{TH}_{\parallel}^{1/2}(\Gamma)}.$$

Die Konstanten in den Abschätzungen hängen nur von der Regularität des Gitters und von Ω ab.

Beweis. Die Abschätzungen (3.3.76), (3.3.78) und (3.3.79) aus dem ersten Teil werden in [90] bewiesen, und (3.3.77) und (3.3.80) folgen ohne viel Aufwand. Die Abschätzungen (3.3.81) – (3.3.84) finden sich in [14] (allerdings zum Teil ohne expliziten Beweis). Da sich die Beweismethoden aus [90] und [14] etwas unterscheiden, und (3.3.80) und die Aussagen aus 3. und 4. noch zu beweisen sind, werden wir hier der Klarheit halber sämtliche Aussagen nochmals nachweisen, und zwar in einer einheitlichen Vorgehensweise.

zu 1: Sei $\mathbf{x} \in \mathcal{N}_h$ und $\varphi_{\mathbf{x}}$ die zugehörige Hutfunktion. Dann ist

$$P_h^1 \varphi_{\mathbf{x}} = \left(\int_{F_{\mathbf{x}}} \varphi_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\xi}) \rho_{\mathbf{x}}^F(\boldsymbol{\xi}) d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} \right) \varphi_{\mathbf{x}} = \varphi_{\mathbf{x}},$$

womit (3.3.76) bewiesen ist. Zum Nachweis der Stabilitätseigenschaft (3.3.77) brauchen wir Lemma 3.3.2, aus welchem direkt die Abschätzung $\|\rho_{\mathbf{x}}^F\|_{L^2(F)} \lesssim h_F^{-1}$ und daraus mittels der klassischen inversen Abschätzung für Polynome (siehe z.B. [38, Theorem 3.2.6]) schließlich

$$\|\rho_{\mathbf{x}}^F\|_{H^{-1/2}(F)} \lesssim h_F^{-1/2}$$

folgt. Damit gilt dann für alle $\mathbf{y} \in \mathcal{N}_h(F)$, $F \in \mathcal{F}_h$

$$\begin{aligned} \left| \int_F \psi(\boldsymbol{\xi}) \rho_{\mathbf{y}}^F(\boldsymbol{\xi}) d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} \right| &\lesssim \|\psi\|_{H^{1/2}(F)} \|\rho_{\mathbf{y}}^F\|_{H^{-1/2}(F)} \\ &\lesssim h_F^{-1/2} \|\psi\|_{H^{1/2}(F)} \lesssim h_F^{-1/2} \|\psi\|_{H^1(D_F)}. \end{aligned} \quad (3.3.85)$$

Eine Abschätzung über die L_2 -Stabilität der Freiheitsgrade von Finiten Elementen [56, Abschnitt 2.5] ergibt für $v_h \in \mathcal{S}_1(\Omega, \mathcal{T}_h)$

$$\|v_h\|_{L^2(T)}^2 \lesssim h_T^3 \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{N}_h(T)} v_h(\mathbf{y})^2.$$

Damit und mit der Definition der Hutfunktionen gilt

$$\begin{aligned} \|P_h^1 \psi\|_{L^2(T)}^2 &\lesssim h_T^3 \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{N}_h(T)} \left| \int_{F_{\mathbf{y}}} \psi(\boldsymbol{\xi}) \rho_{\mathbf{y}}^F(\boldsymbol{\xi}) d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} \right|^2 \\ &\stackrel{(3.3.85)}{\lesssim} h_T^3 \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{N}_h(T)} h_{F_{\mathbf{y}}}^{-1} \|\psi\|_{H^1(D_F)}^2 \\ &\lesssim h_T^2 \|\psi\|_{H^1(D_T)}^2, \end{aligned}$$

also ist (3.3.77) bewiesen. Erneute Anwendung der inversen Abschätzung für Polynome ergibt

$$|P_h^1 \psi|_{H^1(T)} \lesssim \|\psi\|_{H^1(D_T)}.$$

Nun möchten wir die H^1 -Norm auf der rechten Seite durch die H^1 -Seminorm ersetzen. Dazu benutzen wir das Resultat aus [38, Theorem 3.1.1], welches besagt, daß die $H^{k+1}(D)$ -Seminorm eine Norm auf dem Quotientenraum $H^{k+1}(D)/\mathbb{P}_k$ für Lipschitz-stetige Gebiete D beschreibt. Insbesondere bedeutet dies

$$\inf_{p_k \in \mathbb{P}_k(D)} \|\psi + p_k\|_{H^{k+1}(D)} \lesssim |\psi|_{H^{k+1}(D)} \quad (3.3.86)$$

mit einer nur vom Gebiet D abhängigen Konstante. Ist nun p_0 konstant auf D_T , dann ist $\mathbf{grad} P_h^1 p_0 = \mathbf{grad} p_0 \equiv 0$ auf T , so daß für alle $p_0 \in \mathbb{P}_0$ gilt

$$\|\mathbf{grad} P_h^1 \psi\|_{L^2(T)} = \|\mathbf{grad} P_h^1(\psi + p_0)\|_{L^2(T)} \leq \|\psi + p_0\|_{H^1(D_T)}.$$

Mit (3.3.86) gilt dann

$$\|\mathbf{grad} P_h^1 \psi\|_{L^2(\hat{T})} \lesssim \inf_{p_0 \in \mathbb{P}_0(D_T)} \|\psi + p_0\|_{H^1(D_T)} \lesssim |\psi|_{H^1(D_T)}, \quad (3.3.87)$$

also ist auch (3.3.78) bewiesen.

Zum Beweis der Approximationsabschätzungen gehen wir zuerst zum Referenzelement über und verwenden anschließend die Ungleichungen aus Lemma 3.3.1,1., da wir H^1 -konforme Elemente benutzen.

Die Dreiecksungleichung und (3.3.77) liefern

$$\begin{aligned} \|\hat{\psi} - P_h^1 \hat{\psi}\|_{L^2(\hat{T})} &\leq \|\hat{\psi}\|_{L^2(\hat{T})} + \|P_h^1 \hat{\psi}\|_{L^2(\hat{T})} \\ &\lesssim \|\hat{\psi}\|_{L^2(\hat{T})} + \|\hat{\psi}\|_{H^1(D_{\hat{T}})} \lesssim \|\hat{\psi}\|_{H^1(D_{\hat{T}})}, \end{aligned}$$

3. Diskretisierung

wobei $D_{\hat{T}}$ das zum Makroelement D_T gehörende Referenzmakroelement ist. Wieder möchten wir die H^1 -Norm auf der rechten Seite durch die H^1 -Seminorm ersetzen. Ist nun p_0 konstant auf D_T , dann ist $P_h^1 p_0 = p_0$ auf T , so daß für alle $p_0 \in \mathbb{P}_0$ gilt

$$\|\hat{\psi} - P_h^1 \hat{\psi}\|_{L^2(\hat{T})} = \|\hat{\psi} + p_0 - P_h^1(\hat{\psi} + p_0)\|_{L^2(\hat{T})} \leq \|\hat{\psi} + p_0\|_{H^1(D_{\hat{T}})}.$$

Mit (3.3.86) gilt dann

$$\|\hat{\psi} - P_h^1 \hat{\psi}\|_{L^2(\hat{T})} \lesssim \inf_{\hat{p}_0 \in \mathbb{P}_0(D_{\hat{T}})} \|\hat{\psi} + \hat{p}_0\|_{H^1(D_{\hat{T}})} \lesssim |\hat{\psi}|_{H^1(D_{\hat{T}})}. \quad (3.3.88)$$

Die Ungleichungen (3.3.61), (3.3.62) und (3.3.88) zusammenfassend erhalten wir die Approximationsabschätzung (3.3.77).

Für den Nachweis von (3.3.79) gehen wir in gleicher Weise vor:

$$\begin{aligned} \|\hat{\psi} - P_h^1 \hat{\psi}\|_{L^2(\hat{F})} &\leq \|\hat{\psi}\|_{L^2(\hat{F})} + \|P_h^1 \hat{\psi}\|_{L^2(\hat{F})} \\ &\lesssim \|\hat{\psi}\|_{L^2(\hat{F})} + \|\hat{\psi}\|_{H^1(D_{\hat{F}})} \lesssim \|\hat{\psi}\|_{H^1(D_{\hat{F}})}, \end{aligned}$$

wobei $D_{\hat{F}}$ das zum Makroelement D_F gehörende Referenzmakroelement ist. Dabei sind wir von der Norm auf der Referenzfläche \hat{F} zur einer Norm im Raum übergegangen. Da wir uns auf dem Referenzelement befinden, müssen wir uns dabei keine Gedanken über h -Potenzen machen. Ist nun p_0 konstant auf D_F , dann ist $P_h^1 p_0 = p_0$ auf F , also folgt mit (3.3.86)

$$\|\hat{\psi} - P_h^1 \hat{\psi}\|_{L^2(\hat{F})} \lesssim \inf_{\hat{p}_0 \in \mathbb{P}_0(D_{\hat{F}})} \|\hat{\psi} + \hat{p}_0\|_{H^1(D_{\hat{F}})} \lesssim |\hat{\psi}|_{H^1(D_{\hat{F}})}. \quad (3.3.89)$$

Mit (3.3.63), (3.3.62) und (3.3.89) erhalten wir die gesuchte Abschätzung (3.3.79).

zu 2: Als erstes beweisen wir die Stabilitätseigenschaft (3.3.81). Dazu stellen wir wie vorhin mittels Lemma 3.3.2 die Abschätzung

$$\|\boldsymbol{\rho}_e^F\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(F)} \lesssim h_F^{-1/2}$$

fest. Damit gilt dann für alle $E \in \mathcal{E}_h(F)$, $F \in \mathcal{F}_h$

$$\begin{aligned} \left| \int_F \mathbf{q}(\boldsymbol{\xi}) \times \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\rho}_e^F(\boldsymbol{\xi}) d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} \right| &\lesssim \|\mathbf{q}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(F)} \|\boldsymbol{\rho}_e^F\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(F)} \\ &\lesssim h_F^{-1/2} \|\mathbf{q}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(F)} \lesssim h_F^{-1/2} \|\mathbf{q}\|_{\mathbf{H}^1(D_F^1)}. \end{aligned} \quad (3.3.90)$$

Die vorher erwähnte Abschätzung über die L_2 -Stabilität der Freiheitsgrade von Finiten Elementen [56, Abschnitt 2.5] ergibt für $\mathbf{v}_h \in \mathcal{ND}_1(\Omega, \mathcal{T}_h)$

$$\|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{L}^2(T)}^2 \lesssim h_T \sum_{e \in \mathcal{E}_h(T)} \left| \int_e \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{t}_e ds_{\mathbf{x}} \right|^2. \quad (3.3.91)$$

Damit und mit der Definition der Nédélec-Elemente gilt

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{P}_h^1 \mathbf{q}\|_{\mathbf{L}^2(T)}^2 &\lesssim h_T \sum_{e \in \mathcal{E}_h(T)} \left| \int_{F_e} \mathbf{q}(\boldsymbol{\xi}) \times \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\rho}_e^F(\boldsymbol{\xi}) d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} \right|^2 \\ &\lesssim h_T \sum_{e \in \mathcal{E}_h(T)} h_{F_e}^{-1} \|\mathbf{q}\|_{\mathbf{H}^1(D_F^1)}^2 \\ &\lesssim \|\mathbf{q}\|_{\mathbf{H}^1(D_T^1)}^2, \end{aligned}$$

und (3.3.81) ist bewiesen.

Zum Beweis der Stabilitätseigenschaft (3.3.82) stellen wir erstmal fest, daß

$$\mathbf{curl} \mathfrak{P}_h^1 \mathbf{q}(\mathbf{x}) = \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \left(\int_{F_e} (\mathbf{q}(\boldsymbol{\xi}) \times \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\rho}_e^F(\boldsymbol{\xi}) d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} \right) \mathbf{curl} \mathbf{b}_e(\mathbf{x})$$

und damit $\mathbf{curl} \mathfrak{P}_h^1 \mathbf{q} \in \mathcal{RT}_1(\Omega, \mathcal{T}_h)$, da $\mathbf{curl} \mathbf{v}_h \in \mathcal{RT}_1$ für $\mathbf{v}_h \in \mathcal{ND}_1$ (siehe Abschnitt B.3 im Anhang). Analog zu (3.3.91) sind auch die Freiheitsgrade der Raviart-Thomas-Räume L_2 -stabil [56, Abschnitt 2.5]: Für $\mathbf{v}_h \in \mathcal{RT}_1(\mathcal{T}_h)$ gilt

$$\|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{L}^2(T)}^2 \lesssim h_T^{-1} \sum_{F \in \mathcal{F}_h(T)} \left| \int_F \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_F d\sigma_{\mathbf{x}} \right|^2. \quad (3.3.92)$$

Dies, zusammen mit Cauchy-Schwarz und (3.3.90), ergibt

$$\begin{aligned} \|\mathbf{curl} \mathfrak{P}_h^1 \mathbf{q}\|_{\mathbf{L}^2(T)}^2 &\lesssim h_T^{-1} \sum_{F \in \mathcal{F}_h(T)} \sum_{e \in \mathcal{E}_h(T)} \left| \int_{F_e} \mathbf{q}(\boldsymbol{\xi}) \times \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\rho}_e^F(\boldsymbol{\xi}) d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} \right|^2 \left| \int_F \mathbf{curl} \mathbf{b}_e(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} d\sigma_{\mathbf{x}} \right|^2 \\ &\lesssim h_T^{-1} \sum_{F \in \mathcal{F}_h(T)} \sum_{e \in \mathcal{E}_h(T)} h_F^{-1} \|\mathbf{q}\|_{\mathbf{H}^1(D_F^1)}^2 \|\mathbf{curl} \mathbf{b}_e\|_{\mathbf{L}^2(F)}^2 \|\mathbf{n}\|_{\mathbf{L}^2(F)}^2. \end{aligned} \quad (3.3.93)$$

Da $\mathbf{curl} \mathbf{b}_e \in \mathcal{RT}_1$, gilt die Transformation

$$\mathbf{curl} \mathbf{b}_e = \frac{1}{\det B} B \widehat{\mathbf{curl} \hat{\mathbf{b}}_e},$$

wobei \hat{e} die Kante des Referenzelements \hat{T} ist, die auf e abgebildet wird, $\mathbf{b}_{\hat{e}}$ die \mathcal{ND}_1 -Basisfunktion zur Kante \hat{e} darstellt und $\widehat{\mathbf{curl}}$ die Rotation bezüglich der Koordinaten $\hat{\mathbf{x}} = \ell^{-1}(\mathbf{x})$ bedeutet. Wir können also (3.3.73) anwenden und erhalten

$$\|\mathbf{curl} \mathbf{b}_e\|_{\mathbf{L}^2(F)} \lesssim h_F^{-2} \|\widehat{\mathbf{curl} \hat{\mathbf{b}}_e}\|_{\mathbf{L}^2(\hat{F})} \lesssim h_F^{-2}.$$

Dies und $\|\mathbf{n}\|_{\mathbf{L}^2(F)}^2 = \text{meas}(F)^2 \lesssim h_F^4$ ergeben mit (3.3.93) die Stabilitätsaussage

$$\|\mathbf{curl} \mathfrak{P}_h^1 \mathbf{q}\|_{\mathbf{L}^2(T)} \lesssim \|\mathbf{q}\|_{\mathbf{H}^1(D_T^1)}. \quad (3.3.94)$$

3. Diskretisierung

Um die \mathbf{H}^1 -Norm auf der rechten Seite durch die \mathbf{H}^1 -Seminorm zu ersetzen, verwenden wir wieder (3.3.86). Da die Konstante in dieser Abschätzung vom Gebiet D (in unserem Fall also von h) abhängt, müssen wir uns auf das Referenzelement begeben, bevor wir sie anwenden. Betrachte also (3.3.94) auf dem Referenzelement:

$$\|\widehat{\mathbf{curl}} \mathfrak{P}_h^1 \hat{\mathbf{q}}\|_{\mathbf{L}^2(\hat{T})} \lesssim \|\hat{\mathbf{q}}\|_{\mathbf{H}^1(D_{\hat{T}}^1)},$$

wobei $D_{\hat{T}}^1$ das zum Makroelement D_T^1 gehörende Referenzmakroelement ist. Ist \mathbf{p}_0 konstant auf D_T^1 , dann ist $\mathfrak{P}_h^1 \mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_0$ auf T , und damit $\mathbf{curl} \mathfrak{P}_h^1 \mathbf{p}_0 = 0$. Es gilt also

$$\|\widehat{\mathbf{curl}} \mathfrak{P}_h^1 \hat{\mathbf{q}}\|_{\mathbf{L}^2(\hat{T})} \lesssim \inf_{\hat{\mathbf{p}}_0 \in \mathbf{P}_0(D_{\hat{T}}^1)} \|\hat{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{p}}_0\|_{\mathbf{H}^1(D_{\hat{T}}^1)} \lesssim |\hat{\mathbf{q}}|_{\mathbf{H}^1(D_{\hat{T}}^1)}. \quad (3.3.95)$$

Da $\mathfrak{P}_h^1 \mathbf{q} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl})$ und damit $\mathbf{curl} \mathfrak{P}_h^1 \mathbf{q} \in \mathbf{H}(\mathbf{div})$, können wir (3.3.71) und (3.3.67) aus Lemma 3.3.1 zur Anwendung bringen und erhalten

$$\|\mathbf{curl} \mathfrak{P}_h^1 \mathbf{q}\|_{\mathbf{L}^2(T)} \lesssim h^{-1/2} \|\widehat{\mathbf{curl}} \mathfrak{P}_h^1 \hat{\mathbf{q}}\|_{\mathbf{L}^2(\hat{T})} \quad \text{und} \quad |\hat{\mathbf{q}}|_{\mathbf{H}^1(D_{\hat{T}}^1)} \lesssim h^{1/2} |\mathbf{q}|_{\mathbf{H}^1(D_T^1)}.$$

Also kommen insgesamt bei der Hin- und Zurücktransformation zwischen Element und Referenzelement keine h -Potenzen hinzu, und so liefert (3.3.95) die gewünschte Ungleichung (3.3.82).

Auch bei den Approximationsabschätzungen, die wir nun beweisen werden, gehen wir zum Referenzelement über und verwenden dabei die Ungleichungen aus Lemma 3.3.1,2., da wir $\mathbf{H}(\mathbf{curl})$ -konforme Elemente benutzen.

Die Dreiecksungleichung und (3.3.81) liefern

$$\begin{aligned} \|\hat{\mathbf{q}} - \mathfrak{P}_h^1 \hat{\mathbf{q}}\|_{\mathbf{L}^2(\hat{T})} &\leq \|\hat{\mathbf{q}}\|_{\mathbf{L}^2(\hat{T})} + \|\mathfrak{P}_h^1 \hat{\mathbf{q}}\|_{\mathbf{L}^2(\hat{T})} \\ &\lesssim \|\hat{\mathbf{q}}\|_{\mathbf{L}^2(\hat{T})} + \|\hat{\mathbf{q}}\|_{\mathbf{H}^1(D_{\hat{T}}^1)} \lesssim \|\hat{\mathbf{q}}\|_{\mathbf{H}^1(D_{\hat{T}}^1)}. \end{aligned}$$

Ist \mathbf{p}_0 konstant auf D_T^1 , dann ist $\mathfrak{P}_h^1 \mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_0$ auf T . Mit (3.3.86) gilt dann

$$\|\hat{\mathbf{q}} - \mathfrak{P}_h^1 \hat{\mathbf{q}}\|_{\mathbf{L}^2(\hat{T})} \lesssim \inf_{\hat{\mathbf{p}}_0 \in \mathbf{P}_0(D_{\hat{T}}^1)} \|\hat{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{p}}_0\|_{\mathbf{H}^1(D_{\hat{T}}^1)} \lesssim |\hat{\mathbf{q}}|_{\mathbf{H}^1(D_{\hat{T}}^1)}. \quad (3.3.96)$$

Die Ungleichungen (3.3.66), (3.3.67) und (3.3.96) zusammenfassend erhalten wir die Approximationsabschätzung (3.3.83).

Für den Nachweis von (3.3.84) gehen wir in gleicher Weise vor:

$$\begin{aligned} \|\hat{\mathbf{q}} - \mathfrak{P}_h^1 \hat{\mathbf{q}}\|_{\mathbf{L}^2(\hat{F})} &\leq \|\hat{\mathbf{q}}\|_{\mathbf{L}^2(\hat{F})} + \|\mathfrak{P}_h^1 \hat{\mathbf{q}}\|_{\mathbf{L}^2(\hat{F})} \\ &\lesssim \|\hat{\mathbf{q}}\|_{\mathbf{L}^2(\hat{F})} + \|\hat{\mathbf{q}}\|_{\mathbf{H}^1(D_{\hat{F}}^1)} \lesssim \|\hat{\mathbf{q}}\|_{\mathbf{H}^1(D_{\hat{F}}^1)}, \end{aligned}$$

wobei $D_{\hat{F}}^1$ das zum Makroelement D_F^1 gehörende Referenzmakroelement ist. Ist nun \mathbf{p}_0 konstant auf D_F^1 , dann ist $\mathfrak{P}_h^1 \mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_0$ auf F , also folgt mit (3.3.86)

$$\|\hat{\mathbf{q}} - \mathfrak{P}_h^1 \hat{\mathbf{q}}\|_{\mathbf{L}^2(\hat{F})} \lesssim \inf_{\hat{\mathbf{p}}_0 \in \mathbf{P}_0(D_{\hat{F}}^1)} \|\hat{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{p}}_0\|_{\mathbf{H}^1(D_{\hat{F}}^1)} \lesssim |\hat{\mathbf{q}}|_{\mathbf{H}^1(D_{\hat{F}}^1)}. \quad (3.3.97)$$

Mit (3.3.68), (3.3.67) und (3.3.97) erhalten wir die gesuchte Abschätzung (3.3.84).

zu 3: Sei $\phi \in H^{1/2}(\Gamma)$. Dann existiert eine stetige Fortsetzung $w \in H^1(\Omega)$ von ϕ . Wegen $\gamma_t^\times \mathbf{grad} w = \mathbf{curl}_\Gamma w|_\Gamma = \mathbf{curl}_\Gamma \phi$ ist damit insbesondere die Abbildung γ_t^\times von $\mathbf{grad} H^1(\Omega)$ nach $\mathbf{curl}_\Gamma H^{1/2}(\Gamma)$ surjektiv. Sie ist ebenfalls stetig, denn nach Lemma 2.1.2 ist γ_t^\times stetig von $\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$ nach $\mathbf{TH}_\parallel^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$, und wegen Γ einfach zusammenhängend gilt $\mathbf{grad} H^1(\Omega) = \mathbf{H}(\mathbf{curl} 0, \Omega)$ und $\mathbf{curl}_\Gamma H^{1/2}(\Gamma) = \mathbf{TH}_\parallel^{-1/2}(\text{div}_\Gamma 0, \Gamma)$. Zusammenfassend haben wir also, daß $\gamma_t^\times : \mathbf{grad} H^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{curl}_\Gamma H^{1/2}(\Gamma)$ stetig, linear und surjektiv ist. Nach dem Satz über offene Abbildungen existiert damit eine stetige Inverse zu γ_t^\times , d.h. zu jedem $\phi \in H^{1/2}(\Gamma)$ existiert ein $v_\phi \in H^1(\Omega)$ mit

$$\gamma_t^\times \mathbf{grad} v_\phi = \mathbf{curl}_\Gamma v_\phi = \mathbf{curl}_\Gamma \phi, \quad (3.3.98)$$

$$\|\mathbf{grad} v_\phi\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \|\mathbf{curl}_\Gamma \phi\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}. \quad (3.3.99)$$

Aus (3.3.98) folgt $\mathbf{grad}_\Gamma(\phi - v_\phi) = 0$, also $\phi - v_\phi = c_\phi$ auf Γ mit einer Konstanten $c_\phi \in \mathbb{C}$.

Definiere nun den Operator p_h^1 durch $p_h^1 \phi := \gamma P_h^1 v_\phi + c_\phi$ mit P_h^1 aus Teil 1 des Lemmas. Dann gilt (wir lassen jetzt die ϕ -Indizes weg) mit (3.3.79):

$$\|\phi - p_h^1 \phi\|_{L^2(F)} = \|v + c - P_h^1(v + c)\|_{L^2(F)} \lesssim h_F^{1/2} \|\mathbf{grad} v\|_{L^2(D_F)}.$$

zu 4: Sei $\zeta \in \mathbf{TH}_\perp^{1/2}(\Gamma)$. Dann existiert nach Lemma 2.1.2 (und mit dem Satz über offene Abbildungen) eine Funktion $\mathbf{q} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ mit $\mathbf{q} \times \mathbf{n} = \zeta$ auf Γ und $\|\mathbf{q}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \lesssim \|\zeta\|_{\mathbf{TH}_\perp^{1/2}(\Gamma)}$. Definiere $R_h^1 \zeta := \mathfrak{P}_h^1 \mathbf{q} \times \mathbf{n}$ mit \mathfrak{P}_h^1 aus Teil 2 des Lemmas. Somit gilt

$$\begin{aligned} \|\zeta - R_h^1 \zeta\|_{L^2(F)} &= \|(\mathbf{q} - \mathfrak{P}_h^1 \mathbf{q}) \times \mathbf{n}\|_{L^2(F)} \lesssim \|\mathbf{q} - \mathfrak{P}_h^1 \mathbf{q}\|_{L^2(F)} \\ &\lesssim h_F^{1/2} \|\mathbf{q}\|_{\mathbf{H}^1(D_F)} \lesssim h_F^{1/2} \|\zeta\|_{\mathbf{TH}_\perp^{1/2}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Genau analog dazu konstruiert man den Operator N_h^0 , indem man zu jedem $\xi \in \mathbf{TH}_\parallel^{1/2}(\Gamma)$ ein $\mathbf{q} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ mit $\mathbf{n} \times (\mathbf{q} \times \mathbf{n}) = \xi$ auf Γ und $\|\mathbf{q}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \lesssim \|\xi\|_{\mathbf{TH}_\parallel^{1/2}(\Gamma)}$ findet und dann $N_h^0 \xi := \mathbf{n} \times (\mathfrak{P}_h^1 \mathbf{q} \times \mathbf{n})$ setzt. \square

Zum Schluß dieses Abschnitts wollen wir noch zeigen, daß man mit den Interpolationsoperatoren P_h^1 und \mathfrak{P}_h^1 auch L^2 -Abschätzungen auf den Kanten eines Elements erhalten kann, analog zu denen in Lemma 3.3.3 für Volumenelemente und deren Flächen. Allerdings lassen sich die Ergebnisse aus dem Lemma nicht einfach so auf Kanten übertragen. Dies liegt vor allem an dem Fehlen geeigneter Spursätze, genauer genommen daran, daß die Einbettung $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R})$ nicht stetig ist. Wir setzen also im nächsten Satz eine stärkere Regularität an die Funktionen voraus.

Satz 3.3.4. *Es gelten die Bezeichnungen aus Lemma 3.3.3.*

3. Diskretisierung

1. Für den in (3.3.56) definierten linearen Projektionsoperator $P_h^1 : H^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{S}_1(\mathcal{T}_h)$ und für alle $\psi \in H^{3/2}(\Omega)$ gilt

$$|P_h^1 \psi|_{H^1(F)} \lesssim |\psi|_{H^1(F)}, \quad (3.3.100)$$

$$|P_h^1 \psi|_{H^1(F)} \lesssim h_F^{-1/2} |\psi|_{H^1(D_F)}, \quad (3.3.101)$$

$$|\psi - P_h^1 \psi|_{H^1(F)} \lesssim |\psi|_{H^1(F)}, \quad (3.3.102)$$

$$|\psi - P_h^1 \psi|_{H^1(F)} \lesssim h_F^{-1/2} |\psi|_{H^1(D_F)}, \quad (3.3.103)$$

$$\|\psi - P_h^1 \psi\|_{L^2(e)} \lesssim |\psi|_{H^1(D_e)}. \quad (3.3.104)$$

Die Konstanten in den Abschätzungen hängen nur von der Regularität des Gitters ab.

2. Für den in (3.3.56) definierten linearen Projektionsoperator $\mathfrak{P}_h^1 : \mathbf{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{ND}_1(\mathcal{T}_h)$ und für alle $\mathbf{q} \in \mathbf{H}^{3/2}(\Omega)$ gilt

$$\|\mathbf{curl} \mathfrak{P}_h^1 \mathbf{q}\|_{\mathbf{L}^2(F)} \lesssim |\mathbf{q}|_{H^1(F)}, \quad (3.3.105)$$

$$\|\mathbf{curl} \mathfrak{P}_h^1 \mathbf{q}\|_{\mathbf{L}^2(F)} \lesssim h_F^{-1/2} |\mathbf{q}|_{H^1(D_F^1)}, \quad (3.3.106)$$

$$\|\mathbf{curl}(\mathbf{q} - \mathfrak{P}_h^1 \mathbf{q})\|_{\mathbf{L}^2(F)} \lesssim |\mathbf{q}|_{H^1(F)}, \quad (3.3.107)$$

$$\|\mathbf{curl}(\mathbf{q} - \mathfrak{P}_h^1 \mathbf{q})\|_{\mathbf{L}^2(F)} \lesssim h_F^{-1/2} |\mathbf{q}|_{H^1(D_F^1)}, \quad (3.3.108)$$

$$\|\mathbf{q} - \mathfrak{P}_h^1 \mathbf{q}\|_{L^2(e)} \lesssim |\mathbf{q}|_{H^1(D_e^1)}. \quad (3.3.109)$$

Die Konstanten in den Abschätzungen hängen nur von der Regularität des Gitters ab.

Beweis. zu 1.: Es ist

$$\mathbf{grad} P_h^1 \psi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{N}_h} \left(\int_{F_{\mathbf{y}}} \psi(\boldsymbol{\xi}) \rho_{\mathbf{y}}^F(\boldsymbol{\xi}) d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} \right) \mathbf{grad} \varphi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$$

und damit $\mathbf{grad} P_h^1 \psi \in \mathcal{ND}_1(\mathcal{T}_h)$, da $\mathbf{grad} \psi_h \in \mathcal{ND}_1$ für $\psi_h \in \mathcal{S}_1$ (siehe Abschnitt B.3 im Anhang). Mit dem Pendant zu (3.3.91) für Flächen und mit Cauchy-Schwarz gilt dann

$$\|\mathbf{grad} P_h^1 \psi\|_{\mathbf{L}^2(F)}^2 \lesssim \sum_{e \in \mathcal{E}_h(F)} \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{N}_h(F)} \left| \int_{F_{\mathbf{y}}} \psi(\boldsymbol{\xi}) \rho_{\mathbf{y}}^F(\boldsymbol{\xi}) d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} \right|^2 \left| \int_e \mathbf{grad} \varphi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{t}_e ds_{\mathbf{x}} \right|^2.$$

Man rechnet leicht nach, daß für eine Hutfunktion $\varphi_{\mathbf{y}}$ auf T (T Tetra- oder Hexaeder) gilt: $\mathbf{grad} \varphi_{\mathbf{y}}$ ist bis auf das Vorzeichen die Summe der drei Nédélec-Basisfunktion der drei zum Punkt \mathbf{y} gehörenden Kanten. Damit ist $|\int_e \mathbf{grad} \varphi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{t}_e ds_{\mathbf{x}}| = 1$ falls $\mathbf{y} \in$

e (was für genau zwei Kanten $e \in \mathcal{E}_h(F)$ gilt) und Null sonst. Wir erhalten folglich $\sum_{e \in \mathcal{E}_h(F)} \left| \int_e \mathbf{grad} \varphi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{t}_e ds_{\mathbf{x}} \right|^2 = 2$ und somit

$$\|\mathbf{grad} P_h^1 \psi\|_{\mathbf{L}^2(F)}^2 \lesssim \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{N}_h(F)} \left| \int_{F_{\mathbf{y}}} \psi(\boldsymbol{\xi}) \rho_{\mathbf{y}}^F(\boldsymbol{\xi}) d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} \right|^2 \lesssim \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{N}_h(F)} \|\psi\|_{H^1(F)}^2 \|\rho_{\mathbf{y}}^F\|_{H^{-1}(F)}^2. \quad (3.3.110)$$

Wegen $\sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{N}_h(F)} \varphi_{\mathbf{x}} \equiv 1$ auf F und der Definition der $\rho_{\mathbf{y}}^F$ als duale Basis zu den $\varphi_{\mathbf{x}}$ gilt

$$\int_{F_{\mathbf{y}}} \rho_{\mathbf{y}}^F(\mathbf{x}) ds_{\mathbf{x}} = \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{N}_h(F_{\mathbf{y}})} \int_{F_{\mathbf{y}}} \varphi_{\mathbf{x}}(\xi) \rho_{\mathbf{y}}^F(\xi) ds_{\xi} = 1.$$

Aus diesem Grund dürfen wir auf $\rho_{\mathbf{y}}^F$ die Abschätzung

$$\|u\|_{H^{-1}(F)} \lesssim h_F \|u\|_{L^2(F)} \quad \forall u \in L^2(F) \text{ mit } \int_F u ds = 1$$

aus [80, Theorem 2.1] anwenden² und erhalten mit (3.3.110) und Lemma 3.3.2 insgesamt

$$\|\mathbf{grad} P_h^1 \psi\|_{\mathbf{L}^2(F)}^2 \lesssim \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{N}_h(F)} \|\psi\|_{H^1(F)}^2 h_F^2 \|\rho_{\mathbf{y}}^F\|_{L^2(F)}^2 \lesssim \|\psi\|_{H^1(F)}^2.$$

Da $\mathbf{grad} P_h^1 p_0 = \mathbf{grad} p_0 \equiv 0$ für $p_0 \in \mathbb{P}_0$ können wir wie gehabt mittels (3.3.86) die H_1 -Norm auf der rechten Seite durch die H^1 -Seminorm ersetzen und haben damit (3.3.100) bewiesen. An Stelle von (3.3.110) können wir auch

$$\|\mathbf{grad} P_h^1 \psi\|_{\mathbf{L}^2(F)}^2 \lesssim \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{N}_h(F)} \|\psi\|_{H^{1/2}(F)}^2 \|\rho_{\mathbf{y}}^F\|_{H^{-1/2}(F)}^2 \lesssim h_F^{-1/2} \|\psi\|_{H^{1/2}(F)}^2 \lesssim h_F^{-1/2} \|\psi\|_{H^1(D_F)}^2$$

rechnen und erhalten (3.3.101). Die Approximationsabschätzungen (3.3.102), (3.3.103) folgen direkt aus den gerade gezeigten Stabilitätsabschätzungen.

²In [80] wird die Aussage für u mit $\int_F u ds = 0$ betrachtet und bewiesen, aber letztlich ist die Art der Regularisierung von u unerheblich: Im Beweis zu [80, Theorem 2.1] wird das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta z &= u \quad \text{in } R, \\ \frac{\partial z}{\partial \mathbf{n}} &= 0 \quad \text{auf } \partial S \end{aligned}$$

betrachtet, das wegen $\int_F u ds = 0$ eine eindeutige Lösung $z \in H^2(F)/\mathbb{R}$ besitzt. Für den Fall $\int_F u ds = 1$ muß man bloß die zweite Gleichung des Randwertproblems durch

$$\frac{\partial z}{\partial \mathbf{n}} = c \quad \text{auf } \partial S$$

mit $c^{-1} = -\int_{\partial F} ds$ ersetzen. Dann nämlich gilt $\int_F \mathbf{u} ds = -\int_F \Delta z ds = -\int_{\partial F} \frac{\partial z}{\partial \mathbf{n}} ds = 1$, und wieder besitzt das Randwertproblem eine eindeutige Lösung $z \in H^2(F)/\mathbb{R}$.

3. Diskretisierung

Nun zur Abschätzung (3.3.104): Setze oBdA die Kante $e = (t, 0, 0)$, $t \in [0, h]$. Definiere dann den Interpolationsoperator $Q_e : H^1(F) \rightarrow L^2(F)$ durch $Q_e v(t, y, z) = v(t, 0, 0)$ für alle $v \in H^1(F)$ und $(x, y, z) \in F$. Dann ist

$$\|\psi - P_h^1 \psi\|_{L^2(e)} = \|Q_e \psi - Q_e(P_h^1 \psi)\|_{L^2(e)} \lesssim h^{-1/2} \|Q_e \psi - Q_e(P_h^1 \psi)\|_{L^2(F)}$$

wegen der Regularität des Gitters. Mittels der Dreiecksungleichung erhalten wir somit

$$\|\psi - P_h^1 \psi\|_{L^2(e)} \lesssim h^{-1/2} \left\{ \|\psi - P_h^1 \psi\|_{L^2(F)} + \|(\psi - P_h^1 \psi) - Q_e(\psi - P_h^1 \psi)\|_{L^2(F)} \right\}.$$

Den ersten Term innerhalb der geschweiften Klammer schätzen wir mittels (3.3.80) durch $h_F^{1/2} |\psi|_{H^1(D_F)}$ ab. Da $Q_e p_0 = p_0$ für konstante Funktionen p_0 , erfüllt Q_e die Approximationseigenschaft $\|v - Q_e v\|_{L^2(F)} \lesssim h |v|_{H^1(F)}$ für $v \in H^1(F)$ (vgl. [38, Theorem 3.1.4]), also können wir den zweiten Term in den geschweiften Klammern durch $h |\psi - P_h^1 \psi|_{H^1(F)}$ abschätzen. Wir erhalten

$$\|\psi - P_h^1 \psi\|_{L^2(e)} \lesssim |\psi|_{H^1(D_F)} + h^{1/2} |\psi - P_h^1 \psi|_{H^1(F)}.$$

Hierauf die Ungleichung (3.3.103) angewendet ergibt dann die gesuchte Abschätzung.

zu 2: So wie in Lemma 3.3.3 verläuft hier der Beweis für den Operator \mathfrak{P}_h^1 analog zu dem in 1 für den Operator P_h^1 . Dabei beachte man, daß $\mathbf{curl} \mathbf{q}_h \in \mathcal{S}_0$ für $\mathbf{q}_h \in \mathcal{ND}_1$. (siehe Abschnitt B.3 im Anhang). \square

3.4. Hexaedrische Gitter im \mathbb{R}^3 mit hängenden Knoten

Bisher sind wir von einem Gitter \mathcal{T}_h ohne hängende Knoten ausgegangen, d.h. war ein Punkt \mathbf{x} Eckpunkt eines Gitterelements, so war \mathbf{x} auch Eckpunkt aller Elemente $T \in \mathcal{T}_h$ mit $\mathbf{x} \in T$. Leider sind solche Gitter für unseren Zweck, nämlich den der adaptiven Verfeinerung, nicht immer optimal. Betrachte dazu ein reguläres Gitter \mathcal{T}_0 , das sogenannte Ursprungsgitter (zum Begriff der Regularität eines Gitters siehe Seite 39). Ein Gitter $\tilde{\mathcal{T}}_j$ gehe aus dem vorhergehenden Gitter \mathcal{T}_{j-1} durch die Verfeinerung beliebiger Elemente (die z.B. mittels eines lokalen Fehlerschätzers ausgewählt worden sind) vor. Ein Element werde *verfeinert*, indem man es in jede Richtung halbiert (und damit insgesamt in acht kleinere Elemente teilt). Das Gitter \mathcal{T}_j gehe aus $\tilde{\mathcal{T}}_j$ durch Nachverfeinerung nach gewissen Kriterien vor, die man festzulegen hat.

Ein übliches Kriterium ist es, sämtliche hängenden Knoten zu beseitigen. Ist ein Element T wie oben beschrieben in allen drei Ebenen (hier x -, y - und z -Ebene genannt) verfeinert worden, so müssen dann auch alle Elemente in der gleichen y - und z -Ebene wie T in x -Richtung verfeinert werden, alle Elemente in der gleichen x - und z -Ebene wie T in y -Richtung und alle Elemente in der gleichen x - und y -Ebene wie T in z -Richtung

3.4. Hexaedrische Gitter im \mathbb{R}^3 mit hängenden Knoten

verfeinert werden. Dies führt vor allem bei Lösungen mit Punktsingularitäten zu einer starken Überverfeinerung des Gitters, außerdem zieht diese Verfahren den Verlust der Form-Regularität nach sich (da durch die Verfeinerungen in nur eine Richtung beliebig schmale Elemente entstehen können). Aus diesem Grund ist bei hexaedrischen Gittern die Verwendung von hängenden Knoten vorzuziehen. Allerdings wollen wir dabei nicht beliebige Konstellationen von hängenden Knoten zulassen, sondern auch hierbei gewisse Kriterien (Verfeinerungsgesetze) an das Gitter stellen, die wir gleich vorstellen werden. Wir orientieren uns dabei an den Arbeiten von Becker, Braack und Moore [16, 77]. Grundsätzlich haben die Symbole $x, e, F, T, \mathcal{N}, \mathcal{F}, \mathcal{E}, \mathcal{T}$ folgende Bedeutungen:

x : ein Knoten,	\mathcal{N} : eine Menge von Knoten,
e : eine Kante,	\mathcal{E} : eine Menge von Kanten,
F : eine Fläche,	\mathcal{F} : eine Menge von Flächen,
T : ein (3D-)Element,	\mathcal{T} : eine Menge von Elementen.

Weiter seien $\mathcal{N}(e), \mathcal{N}(F)$ bzw. $\mathcal{N}(T)$ die Mengen der Eckpunkte von e, F bzw. T ; $\mathcal{E}(F)$ bzw. $\mathcal{E}(T)$ die Mengen der Kanten von F bzw. T ; $\mathcal{F}(T)$ die Menge der Flächen von T . Umgekehrt seien $\mathcal{E}(x)$ die Menge aller Kanten mit $x \in \mathcal{N}(e)$; $\mathcal{F}(x)$ bzw. $\mathcal{F}(e)$ die Mengen aller Flächen mit $x \in \mathcal{N}(F)$ bzw. $e \in \mathcal{E}(F)$; $\mathcal{T}(x), \mathcal{T}(e)$ bzw. $\mathcal{T}(F)$ die Mengen aller Elemente mit $x \in \mathcal{N}(T), e \in \mathcal{E}(T)$ bzw. $F \in \mathcal{F}(T)$. Mit \mathcal{F}_j bzw. $\tilde{\mathcal{F}}_j$ bezeichnen wir die Menge der Flächen zum Gitter \mathcal{T}_j bzw. $\tilde{\mathcal{T}}_j$.

Ein Element sei von der *Ordnung* k , wenn es bei angenommener uniformer Verfeinerung im Verfeinerungsschritt vom Gitter \mathcal{T}_{k-1} nach \mathcal{T}_k entstanden wäre.

Ein *Makroelement* S des Gitters \mathcal{T}_j sei ein Element des Gitters oder eines früheren Gitters, d.h. die Vereinigung von 8^p ($p \in \mathbb{N}$) Elementen $T \in \mathcal{T}_j$, so daß $S \in \mathcal{T}_l$ für irgendein $l \leq j$.

Eine Fläche F eines Elements $T \in \tilde{\mathcal{T}}_j$ heißt *verfeinert*, falls es 4^p ($p \in \mathbb{N}$) Flächen $F_1, \dots, F_{4^p} \in \tilde{\mathcal{F}}_j$ gibt mit $F = \bigcup_{i=1}^{4^p} F_i$. Dies ist äquivalent dazu, daß das Flächennachbarelement S zu T bezüglich F (das ist das Makroelement S gleicher Ordnung wie T mit $S \cap T = F$) existiert und zur Verfeinerungsstufe j schon verfeinert worden ist.

Eine Kante e eines Elements $T \in \tilde{\mathcal{T}}_j$ heißt *fast-regulär*, falls beide Flächen $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(T)$ mit $e \in \mathcal{E}(F_1) \cap \mathcal{E}(F_2)$ verfeinert sind und das Kantennachbarelement S zu T bezüglich e (das ist das Makroelement S gleicher Ordnung wie T mit $S \cap T = e$) existiert und zur Verfeinerungsstufe j schon verfeinert worden ist. Dies ist äquivalent dazu, daß beide Flächennachbarelemente S_1, S_2 zu T bezüglich F_1 bzw. F_2 und das Kantennachbarelement S zu T bezüglich e existieren und zur Verfeinerungsstufe j schon verfeinert worden sind.

3.4.1. Verfeinerungsgesetze

Wir kommen nun zu den Verfeinerungsgesetzen, die ein aus hexaedrischen Elementen bestehendes Gitter \mathcal{T} im \mathbb{R}^3 , das hängende Knoten enthalten darf, erfüllen soll, um eine gewisse Regularität sicherzustellen.

Das erste Verfeinerungsgesetz soll dafür sorgen, daß keine zu starken Sprünge von einem Element zum nächsten auftreten:

- Gegeben sei ein Element T der Ordnung k . Dann dürfen sämtliche Elemente, die T in mehr als einem Punkt schneiden, höchstens der Ordnung $k + 1$ sein.

Dies ist gleichbedeutend damit, daß sich nicht mehr als ein hängender Knoten auf einer Kante eines Elements $T \in \mathcal{T}_j$ befinden darf. Besitzt also eine Kante eines Elements $T \in \tilde{\mathcal{T}}_j$ drei hängende Knoten (mehr können es nach dem Verfeinerungsschema nicht sein), so muß dieses Element ebenfalls verfeinert werden. Dieses Gesetz vereinfacht die Beschreibung des Gitters und der dazugehörigen Splineräume ungemein, denn hierdurch werden obere Schranken gesetzt, z.B. für die Anzahl der Elemente, die der Träger einer Basisfunktion umfassen kann, oder für die Anzahl der Basisfunktionen, deren Träger ein bestimmtes Element umfaßt.

Die nächsten zwei Gesetze sollen zur Homogenität des Gitters beitragen. Im Groben bedeuten sie, daß ein Element der Stufe j nicht von zuvielen Elementen der Stufe $j + 1$ umgeben sein darf. Das erste Gesetz lautet:

- Höchstens vier Flächen eines Elements dürfen verfeinert sein.

Sind also mindestens fünf der insgesamt sechs Flächen eines Elements $T \in \tilde{\mathcal{T}}_j$ schon verfeinert, so muß auch T verfeinert werden. Liegt eine Fläche F von T auf dem Rand des Gebietes, so hat T bezüglich F natürlich keine Nachbarn, doch zählen wir F als verfeinerte Fläche. Eine naheliegende Sprechweise ist: Nicht vorhandene Flächennachbarn gelten als verfeinert. Das nächste und letzte Gesetz lautet

- Höchstens eine Kante eines Elements darf fast-regulär sein.

Sind also mindestens zwei der insgesamt zwölf Kanten eines Elements $T \in \tilde{\mathcal{T}}_j$ fast-regulär, so muß T verfeinert werden. Auch hier gilt: Nicht vorhandene Flächen- und Kantennachbarn gelten als verfeinert.

Es stellt sich die Frage, wie diese Regeln zu implementieren sind, schließlich können die Gesetze sich gegenseitig beeinflussen. Ein in [12] vorgeschlagener Algorithmus (dort allerdings für ein zwei-dimensionales Gitter) behandelt das Problem, in dem es die vom Fehlerschätzer diktierten und die nach den drei Verfeinerungsgesetzen aufgezwungenen Verfeinerungen gleichzeitig behandelt und von der Tatsache Gebrauch macht,

daß die Verfeinerung eines Elements T nur die maximal 18 Kanten- und Flächennachbarn $T^{(1)}, \dots, T^{(18)} \in \mathcal{T}$ (die Elemente $T^{(i)} \in \mathcal{T}$ höchstens gleicher Ordnung wie T mit $T^{(i)} \cap T = \sigma$ mit σ Kante oder Fläche von T) beeinflusst. Es sei \mathcal{T} ein Gitter bestehend aus nt Elementen T_1, \dots, T_{nt} . Die Eigenschaft $FS(T)$ bedeute, daß das Element T aufgrund des Fehlerschätzers verfeinert werden muß, $G(T)$ bedeute, daß T zwecks Erhaltung der drei Gesetze im aktuellen Gitter verfeinert werden muß. Der Algorithmus, auf unseren Fall übertragen, lautet folgendermaßen:

Prozedur VERFEINERN

$i = 1$

Für $i \leq nt$:

 Für $j = 1$ bis 18:

 Gilt $G(T_i^{(j)})$, dann TEILE($T_i^{(j)}$)

 Gilt $FS(T_i)$, dann TEILE(T_i)

$i = i + 1$

Prozedur TEILE (T)

$nt = nt + 8$

Erstelle $T_{nt+1}, \dots, T_{nt+8}$

Streiche T aus dem Gitter

Der Algorithmus geht also die Elemente nach einer Liste einzeln durch und prüft jeweils, ob ein Element durch Vorgabe des Fehlerschätzers verfeinert werden muß. *Davor* allerdings wird geschaut, ob seine Nachbarelemente nach den drei Gesetzen verfeinert werden müssen, und diese werden dann gegebenenfalls verfeinert. Erst dann wird das Listenelement selbst, falls nötig, verfeinert. Alle durch Verfeinerung neu entstandenen Elemente werden zum Gitter hinzugefügt, indem sie hinten an die Liste gesetzt werden. Verfeinerte Elemente werden selbstverständlich von der Liste genommen. Nun wird zum nächsten Element auf der Liste übergegangen. Hat der Algorithmus alle ursprünglichen Elemente geprüft, so macht es mit den bisher neu entstandenen weiter (die ja stets am Ende der Liste angehängt wurden). Diese Elemente können natürlich nicht aufgrund des Fehlerschätzers verfeinert werden (da es sie noch nicht gab, als der Fehlerschätzer erstellt wurde), aber ihre Nachbarn könnten als Folge der drei Gesetze verfeinert werden. Da jedes neue Element auch sieben „neue“ Nachbarn hat, ist garantiert, daß jedes neu entstandene Element in Hinblick auf die Verfeinerungsgesetze geprüft wird.

3.4.2. Basisfunktionen

In Gittern mit hängenden Knoten/Kanten kann man die Basisfunktionen (sog. *Nichtstandard-Basisfunktionen*) als Linearkombinationen von Standard-Basisfunktionen (solche, die auf einem regulären Gitter definiert sind) darstellen. Bei der Implementation rechnet man gern mit lokal (elementweise) definierten Basisfunktionen und setzt diese dann zu globalen Basisfunktionen zusammen. Wie dies bei Standard-Basisfunktionen funktioniert, seien sie nun Knoten-, Kanten- oder sonstwie orientiert, ist hinlänglich bekannt und wurde z.B. hier in Abschnitt 3.1 für Kantenelemente (Nédélec- und Raviart-Thomas-Funktionen) ausführlich dargestellt. Bei Nichtstandard-Basisfunktionen gibt es zwei Vorgehensweisen:

Erste Möglichkeit ist, auf jedem Element die lokalen Standard-Basisfunktionen zu verwenden. Beim Zusammensetzen der Systemmatrix werden dann die Gleichungen in den hängenden Knoten/Kanten gestrichen und durch Gleichungen ersetzt, die die erforderlichen Stetigkeitsvoraussetzungen in den hängenden Knoten/Kanten erzwingen (so ist z.B. bei global stetigen, stückweise trilinearen Funktionen der Funktionswert in einem hängenden Knoten der Mittelwert der Funktionswerte in den zwei benachbarten Knoten). Dieses ist die zweifellos einfachere zu implementierende Methode, und sie wird wohl deswegen hauptsächlich verwendet [77, 16]. Ein unerwünschter Effekt hierbei ist aber, daß sich das Gleichungssystem wegen der zusätzlichen Interpolationsgleichungen nicht verkleinert. Dies kann verhindert werden, indem man die zusätzlichen Interpolationsgleichungen gleich als Matrixumformungen auffaßt (vgl. [33]). Dies ist allerdings bei einer dünnen (*sparse*, also bei einer elementweisen) Speicherform der Matrix nur schwer durchführbar und läuft letztlich auf Änderungen der lokalen Basisfunktionen hinaus.

Wir schlagen hier stattdessen vor, gleich schon lokal die Nichtstandard-Basisfunktionen zu verwenden. Wie diese im einzelnen aussehen, werden wir im folgenden genauer zu betrachten haben, und zwar sowohl im zwei- wie auch im dreidimensionalen Fall, da wir uns in dieser Arbeit mit einer Kopplungsformulierung beschäftigen. Dazu werden wir zuerst die Begriffe *regulär* und *hängend* präzisieren.

Hut- und Kantenfunktionen in zwei Dimensionen

Ein Knoten x heißt *regulär* (oder *nichthängend*), falls x ein Eckpunkt von F ist für alle Elemente F mit $x \cap F \neq \emptyset$. Die Menge der regulären Knoten bezeichnen wir mit \mathfrak{N}_0 .

Ein Knoten x heißt *hängend*, falls x nicht regulär ist, d.h. falls es ein Element F mit $x \cap F \neq \emptyset$ gibt, so daß e kein Eckpunkt von F darstellt. Die Menge der hängenden Knoten bezeichnen wir mit \mathfrak{N}_1 .

Die Mengen \mathfrak{N}_0 und \mathfrak{N}_1 bilden eine Partition von \mathcal{N} , d.h. jeder Knoten ist entweder regulär oder hängend.

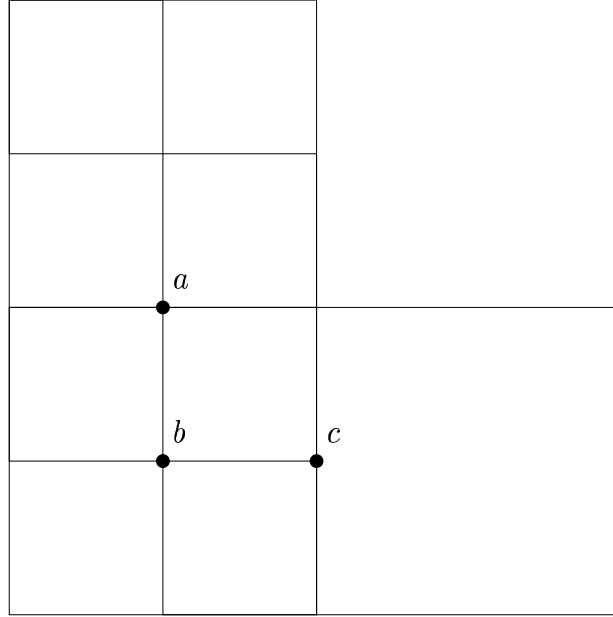


Abbildung 3.3.: Von drei Makroelementen sind zwei verfeinert worden. Knoten a und b sind regulär, Knoten c ist hängend.

Eine Kante e heißt *regulär* (oder *nichthängend*), falls e eine vollständige Kante von F ist für alle Elemente F mit $e \cap F \neq \emptyset$. Die Menge der regulären Kanten bezeichnen wir mit \mathfrak{E}_0 .

Eine Kante e heißt *hängend*, falls e nicht regulär ist, d.h. falls es ein Element F mit $e \cap F \neq \emptyset$ gibt, so daß e die Hälfte einer Kante von F darstellt. Die Menge der hängenden Kanten bezeichnen wir mit \mathfrak{E}_1 .

Die Mengen \mathfrak{E}_0 und \mathfrak{E}_1 bilden eine Partition von \mathcal{E} , d.h. jede Kante ist entweder regulär oder hängend.

Zu jedem hängenden Knoten x gehören zwei reguläre Knoten y_1, y_2 , so daß x den Mittelpunkt der Strecke $\overline{y_1 y_2}$ bildet (die Strecken $\overline{y_1 x}, \overline{x y_2}$ sind aus \mathfrak{E}_1 , stellen also hängende Kanten dar). Diese Knoten y_1, y_2 bilden die Menge $\mathfrak{N}_0(x)$. Umgekehrt kann es zu jedem regulären Knoten x bis zu vier hängende Knoten y_i geben, so daß $x \in \mathfrak{N}_0(y_i)$. Die Menge dieser y_i bezeichnen wir mit $\mathfrak{N}_1(x)$. Zu jeder hängenden Kante e_1 gehört eine benachbarte hängende Kante e_2 und ein Element F mit $e_1, e_2 \subset F$, so daß $e := e_1 \cup e_2$ Kante von F ist. Die Menge solcher zusammengesetzten Kanten e bezeichnen wir mit \mathfrak{E}_* .

Es ist $\mathcal{S}_1(\mathcal{F})$ der Raum der lokal bilinearen, global stetigen Funktionen bzgl. der Triangulierung \mathcal{F} . Eine Basis von $\mathcal{S}_1(\mathcal{F})$ ist durch die Menge der stückweisen trilinearen Funktionen $\varphi_{x_i}, x_i \in \mathfrak{N}_0$ mit

$$\varphi_{x_i}(x_j) = \delta_{ij} \quad \forall x_j \in \mathfrak{N}_0$$

3. Diskretisierung

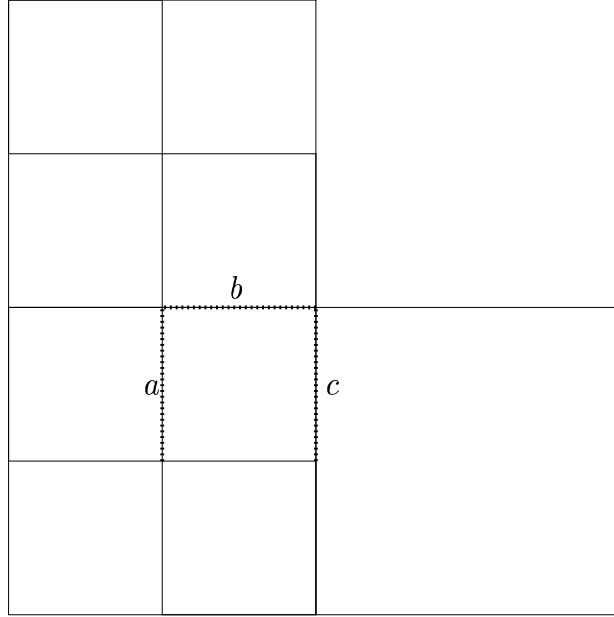


Abbildung 3.4.: Von drei Makroelementen sind zwei verfeinert worden. Kanten a und b sind regulär, Kante c ist hängend.

gegeben. Ein solches φ_x stellt eine Nichtstandard-Hutfunktionen dar, denn ihr Träger kann Elemente F mit $x \notin F$ beinhalten (vgl. Abbildung 3.5). Die lokale Definition einer Hutfunktion φ_x auf einem Element F sieht dann folgendermaßen aus: Für $x \in \mathfrak{N}_0$ gilt

$$\varphi_x^F(y) = \begin{cases} 1, & y = x \\ 1/2, & y \in \mathfrak{N}_1(x) , \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und für $x \in \mathfrak{N}_1$ haben wir

$$\varphi_x^F(y) = \begin{cases} 1/2, & y = x \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} .$$

Wir fassen dann in einem regulären Knoten x alle (maximal vier) lokalen Basisfunktionen φ_x^F mit $F \in \mathcal{F}(x)$ zuzüglich den (maximal vier) φ_y^F mit $y \in \mathfrak{N}_1(x)$, $F \in \mathcal{F}(y)$ und $x \notin F$ zu der globalen Basisfunktion φ_x zusammen.

Es sei nun $\mathcal{R}_1(\mathcal{F}) \in \{\mathcal{ND}_1(\mathcal{F}), \mathcal{RT}_1(\mathcal{F})\}$ entweder der Raum der Nédélec- oder der der Raviart-Thomas-Elemente niedrigsten Grades auf dem Gitter \mathcal{F} . Beide Räume bestehen aus vektorwertigen, lokal bilinearen Funktionen, die stetig bezüglich gewissen kantenorientierten Freiheitsgraden κ_{e_j} ($e_j \in \mathfrak{E}_0 \cup \mathfrak{E}_*$) sind (siehe hierzu Abschnitt 3.1 oder Anhang B). Eine Basis von $\mathcal{R}_1(\mathcal{F})$ ist durch gewisse bilinearen Funktionen $\mathbf{b}_{e_i}, e_i \in \mathfrak{E}_0 \cup \mathfrak{E}_*$

3.4. Hexaedrische Gitter im \mathbb{R}^3 mit hängenden Knoten

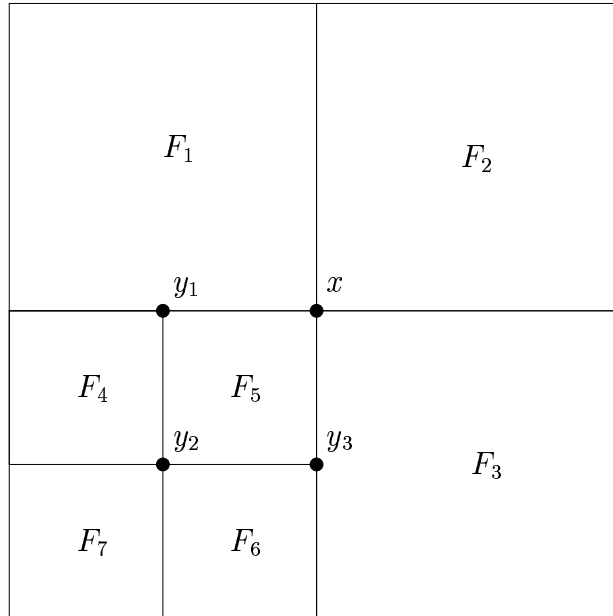


Abbildung 3.5.: Es ist $\varphi_x := \tilde{\varphi}_x - \frac{1}{4}\tilde{\varphi}_{y_2}$, wobei $\tilde{\varphi}_x$ bzw. $\tilde{\varphi}_{y_2}$ die Standard-Hutfunktionen in x (bzgl. dem groben Gitter) bzw. in y_2 (bzgl. dem feinen Gitter) bezeichnen. Als Summe von lokalen Basisfunktionen ausgedrückt ist $\varphi_x = \varphi_x^{F_1} + \varphi_x^{F_2} + \varphi_x^{F_3} + \varphi_x^{F_5} + \varphi_{y_1}^{F_4} + \varphi_{y_3}^{F_6}$.

3. Diskretisierung

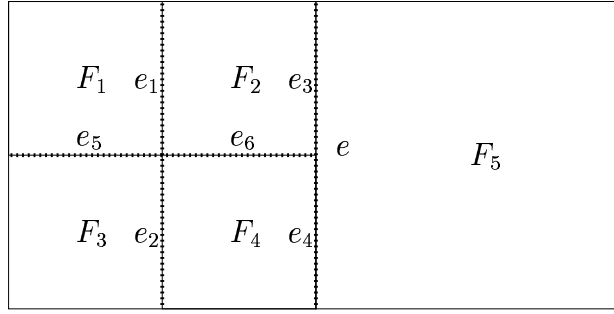


Abbildung 3.6.: Es ist $\mathbf{b}_e := \tilde{\mathbf{b}}_e - \frac{1}{4}\tilde{\mathbf{b}}_{e_1} - \frac{1}{4}\tilde{\mathbf{b}}_{e_2}$, wobei $\tilde{\mathbf{b}}_e$ bzw. $\tilde{\mathbf{b}}_{e_i}$ die Standard-Kantenfunktionen zu e (bzgl. dem groben Gitter) bzw. zu e_i (bzgl. dem feinen Gitter) bezeichnen. Als Summe von lokalen Basisfunktionen ausgedrückt ist $\mathbf{b}_e = \mathbf{b}_e^{F_5} + \mathbf{b}_{e_3}^{F_2} + \mathbf{b}_{e_4}^{F_4}$.

mit

$$\kappa_{e_j}(\mathbf{b}_{e_i}) = \delta_{ij}, \quad \forall e_j \in \mathfrak{E}_0 \cup \mathfrak{E}_*$$

gegeben, wobei

$$\kappa_e(\mathbf{b}) = \begin{cases} \int_e \mathbf{b} \cdot \mathbf{t}_e ds, & \mathcal{R}_1 = \mathcal{ND}_1 \\ \int_e \mathbf{b} \cdot \mathbf{n}_e ds, & \mathcal{R}_1 = \mathcal{RT}_1 \end{cases}$$

und \mathbf{t}_e bzw. \mathbf{n}_e die Tangente bzw. Normale zu e darstellen. Ein solches \mathbf{b}_{e_i} stellt eine Nichtstandard-Kantenfunktion dar, denn ihr Träger kann bis zu drei Elemente beinhalten (vgl. Abbildung 3.6). Es bezeichne $\tilde{\mathbf{b}}_e^F$ für $e \in \mathfrak{E}$, $F \in \mathcal{F}(e)$ die übliche lokale Basisfunktion zur Kante e auf einem Element F . Die lokale Definition einer Nichtstandard-Kantenfunktion \mathbf{b}_e sieht dann folgendermaßen aus: Für $e \in \mathfrak{E}_0 \cup \mathfrak{E}_*$ gilt $\mathbf{b}_e^F = \tilde{\mathbf{b}}_e^F$, für $e \in \mathfrak{E}_1$ gilt $\mathbf{b}_e^F = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{b}}_e^F$. Ist $e \in \mathfrak{E}_0$, so faßt man die (maximal zwei) lokalen Basisfunktionen \mathbf{b}_e^F mit $F \in \mathcal{F}(e)$ zu der globalen Basisfunktion \mathbf{b}_e zusammen. Ist dagegen $e \in \mathfrak{E}_*$ mit $e = e_1 \cup e_2$, so faßt man die lokalen Basisfunktion \mathbf{b}_e^F mit $F \in \mathcal{F}(e)$ und die zwei lokalen Basisfunktionen $\mathbf{b}_{e_i}^{F_i}$ mit $F_i \in \mathcal{F}(e_i)$ ($i = 1, 2$) zu der globalen Basisfunktion \mathbf{b}_e zusammen.

Hut- und Kantenfunktionen in drei Dimensionen

Ein Knoten x heißt *regulär* (oder *nichthängend*), falls x ein Eckpunkt von T ist für alle Elemente T mit $x \cap T \neq \emptyset$. Die Menge der regulären Knoten bezeichnen wir mit \mathfrak{N}_0 .

Ein Knoten x heißt *halbhängend*, falls es ein Element T gibt, so daß x auf der Mitte einer Kante von T liegt. Dies ist äquivalent zu: x ist nicht regulär, und für alle Elemente T mit $x \cap T \neq \emptyset$ gilt $x \in e$ für eine Kante e von T . Die Menge der halbhängenden Knoten bezeichnen wir mit $\mathfrak{N}_{1/2}$.

3.4. Hexaedrische Gitter im \mathbb{R}^3 mit hängenden Knoten

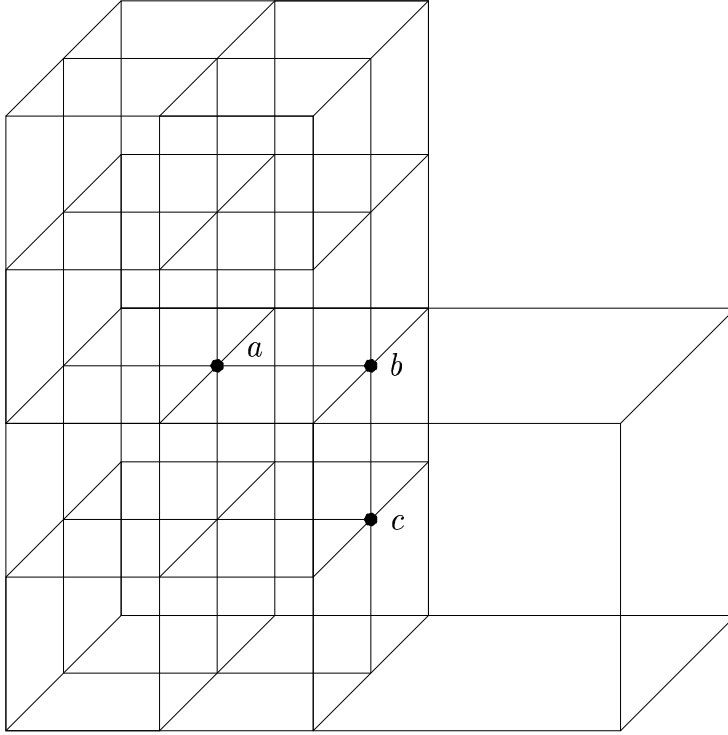


Abbildung 3.7.: Von drei Makroelementen sind zwei verfeinert worden. Knoten a ist regulär, b ist halbhängend und c ist total hängend.

Ein Knoten x heißt *total hängend*, falls x weder regulär noch halbhängend ist, d.h. falls es ein Element T mit $x \cap T \neq \emptyset$ gibt, so daß x nicht Element einer Kante von T ist. Die Menge der total hängenden Knoten bezeichnen wir mit \mathfrak{N}_1 .

Die Mengen \mathfrak{N}_0 , $\mathfrak{N}_{1/2}$, \mathfrak{N}_1 bilden eine Partition von \mathcal{N} , d.h. jeder Knoten ist entweder regulär, halbhängend oder total hängend.

Eine Kante e heißt *regulär* (oder *nichthängend*), falls e eine vollständige Kante von T ist für alle Elemente T mit $e \cap T \neq \emptyset$. Die Menge der regulären Kanten bezeichnen wir mit \mathfrak{E}_0 .

Eine Kante e heißt *halbhängend*, falls es ein Element T gibt, so daß e die Hälfte einer Kante von T darstellt. Die Menge der halbhängenden Kanten bezeichnen wir mit $\mathfrak{E}_{1/2}$.

Eine Kante e heißt *total hängend*, falls e weder regulär noch halbhängend ist, d.h. falls es ein Element T mit $e \cap T \neq \emptyset$ gibt, so daß e nicht Teilmenge einer Kante von T ist. Die Menge der total hängenden Kanten bezeichnen wir mit \mathfrak{E}_1 .

Die Mengen \mathfrak{E}_0 , $\mathfrak{E}_{1/2}$, \mathfrak{E}_1 bilden eine Partition von \mathcal{E} , d.h. jede Kante ist entweder regulär, halbhängend oder total hängend.

Zu jedem halbhängenden Knoten x gehören zwei reguläre Knoten y_1, y_2 , so daß x

3. Diskretisierung

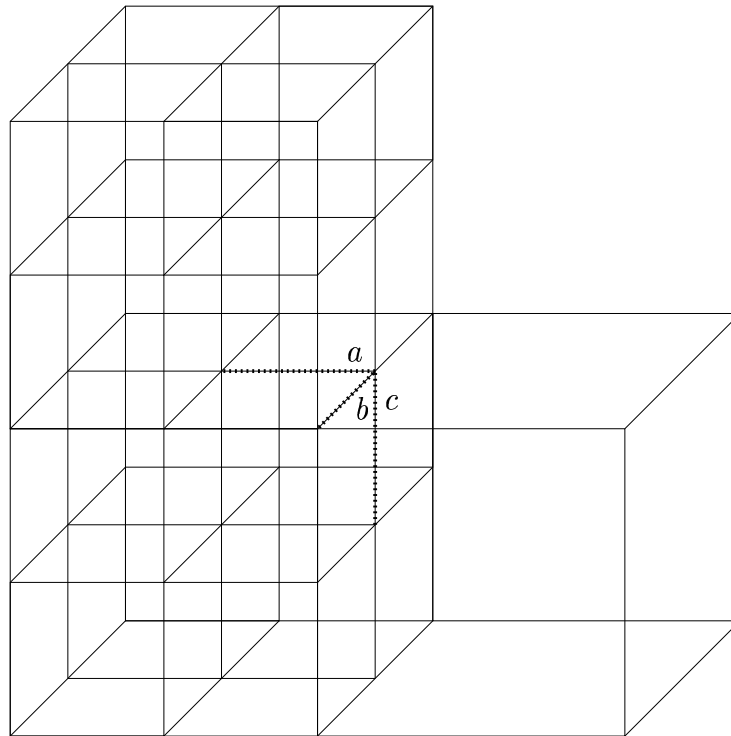


Abbildung 3.8.: Von drei Makroelementen sind zwei verfeinert worden. Kante a ist regulär, b ist halbhängend und c ist total hängend.

3.4. Hexaedrische Gitter im \mathbb{R}^3 mit hängenden Knoten

den Mittelpunkt der Strecke $\overline{y_1 y_2}$ bildet und die Strecken $\overline{y_1 x}, \overline{x y_2}$ aus $\mathfrak{E}_{1/2}$ sind, also halbhängende Kanten darstellen. Diese Knoten y_1, y_2 bilden die Menge $\mathfrak{N}_0(x)$. Umgekehrt kann es zu jedem regulären Knoten x bis zu sechs halbhängende Knoten y_i geben, so daß $x \in \mathfrak{N}_0(y_i)$. Die Menge dieser y_i bezeichnen wir mit $\mathfrak{N}_{1/2}(x)$. Zu jedem total hängenden Knoten x gehören vier halbhängende Knoten y_1, y_2, y_3, y_4 , so daß x den gemeinsamen Mittelpunkt der Strecken $\overline{y_1 y_2}, \overline{y_3 y_4}$ bildet (die Strecken $\overline{y_2 x}, \overline{x y_3}, \overline{y_3 x}, \overline{x y_4}$ sind aus \mathfrak{E}_1 , stellen also total hängende Kanten dar). Diese Knoten y_1, y_2, y_3, y_4 bilden die Menge $\mathfrak{N}_{1/2}(x)$. Weiter gibt es zu dem total hängenden Knoten x vier reguläre Knoten z_1, z_2, z_3, z_4 , so daß x den Mittelpunkt des Vierecks $\overline{z_1 z_2 z_3 z_4}$ bildet. Diese Knoten z_1, z_2, z_3, z_4 bilden die Menge $\mathfrak{N}_0(x)$. Für einen total hängenden Knoten x gilt $\mathfrak{N}_0(x) = \bigcup_{y \in \mathfrak{N}_{1/2}(x)} \mathfrak{N}_0(y)$. Umgekehrt kann es zu jedem halbhängenden Knoten x bis zu vier total hängende Knoten y_i geben, so daß $x \in \mathfrak{N}_{1/2}(y_i)$. Die Menge dieser y_i bezeichnen wir mit $\mathfrak{N}_1(x)$. Weiter kann es zu jedem regulären Knoten x bis zu acht total hängende Knoten y_i geben, so daß $x \in \mathfrak{N}_0(y_i)$. Die Menge dieser y_i bezeichnen wir ebenfalls mit $\mathfrak{N}_1(x)$.

Zu jeder halbhängenden Kante e_1 gehört eine benachbarte halbhängende Kante e_2 und ein Element T mit $e_1, e_2 \subset T$, so daß $e := e_1 \cup e_2$ Kante von T ist. Die Menge solcher zusammengesetzter Kanten e bezeichnen wir mit \mathfrak{E}_* .

Es ist $\mathcal{S}_1(\mathcal{T})$ der Raum der lokal trilinearen, global stetigen Funktionen bzgl. der Triangulierung \mathcal{T} . Eine Basis von $\mathcal{S}_1(\mathcal{T})$ ist durch die Menge der stückweisen trilinearen Funktionen $\varphi_{x_i}, x_i \in \mathfrak{N}_0$ mit

$$\varphi_{x_i}(x_j) = \delta_{ij} \quad \forall x_j \in \mathfrak{N}_0$$

gegeben. Ein solches φ_x stellt eine Nichtstandard-Hutfunktionen dar, denn ihr Träger kann Elemente T mit $x \notin T$ beinhalten.

Die lokale Definition einer Hutfunktion φ_x auf einem Element T sieht dann folgendermaßen aus: Für $x \in \mathfrak{N}_0$ gilt

$$\varphi_x^T(y) = \begin{cases} 1, & y = x \\ 1/2, & y \in \mathfrak{N}_{1/2}(x) \\ 1/4, & y \in \mathfrak{N}_1(x) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases},$$

für $x \in \mathfrak{N}_{1/2}$ ist

$$\varphi_x^T(y) = \begin{cases} 1/2, & y = x \\ 1/4, & y \in \mathfrak{N}_1(x) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases},$$

3. Diskretisierung

und für $x \in \mathfrak{N}_1$ haben wir

$$\varphi_x^T(y) = \begin{cases} 1/4, & y = x \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Wir fassen dann in einem regulären Knoten x alle (maximal acht) lokalen Basisfunktionen φ_x^T mit $T \in \mathcal{T}(x)$ zuzüglich den (maximal achtzehn) φ_y^T mit $y \in \mathfrak{N}_{1/2}(x)$, $T \in \mathcal{T}(y)$ und $x \notin T$ und den (maximal vierundzwanzig) φ_y^T mit $y \in \mathfrak{N}_1(x)$, $T \in \mathcal{T}(y)$ und $x \notin T$ zu der globalen Basisfunktion φ_x zusammen.

Wir betrachten nun $\mathcal{ND}_1(\mathcal{T})$, den Raum der Nédélec-Elemente niedrigsten Grades auf dem Gitter \mathcal{T} . Dieser Raum besteht aus vektorwertigen, lokal trilinearen Funktionen, die stetig bezüglich gewissen kantenorientierten Freiheitsgraden κ_{e_j} ($e_j \in \mathfrak{E}_0 \cup \mathfrak{E}_*$) sind (siehe hierzu Abschnitt 3.1 oder Kapitel B im Anhang). Eine Basis von $\mathcal{ND}_1(\mathcal{T})$ ist durch gewisse trilineare Funktionen $\mathbf{b}_{e_i}, e_i \in \mathfrak{E}_0 \cup \mathfrak{E}_*$ mit

$$\kappa_{e_j}(\mathbf{b}_{e_i}) = \delta_{ij} \quad \forall e_j \in \mathfrak{E}_0 \cup \mathfrak{E}_*$$

gegeben, wobei

$$\kappa_e(\mathbf{b}) = \int_e \mathbf{b} \cdot \mathbf{t}_e ds.$$

Ein solches \mathbf{b}_{e_i} stellt eine Nichtstandard-Kantenfunktion dar, denn ihr Träger kann bis zu sieben Elemente beinhalten.

Es bezeichne $\tilde{\mathbf{b}}_e^T$ für $e \in \mathfrak{E}$, $T \in \mathcal{T}(e)$ die übliche lokale Basisfunktion zur Kante e auf einem Element T . Die lokale Definition einer Nichtstandard-Kantenfunktion \mathbf{b}_e sieht dann folgendermaßen aus: Für $e \in \mathfrak{E}_0 \cup \mathfrak{E}_*$ gilt $\mathbf{b}_e^T = \tilde{\mathbf{b}}_e^T$, für $e \in \mathfrak{E}_1$ gilt $\mathbf{b}_e^T = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{b}}_e^T$. Ist $e \in \mathfrak{E}_0$, so faßt man die (maximal vier) lokalen Basisfunktionen \mathbf{b}_e^T mit $T \in \mathcal{T}(e)$ zu der globalen Basisfunktion \mathbf{b}_e zusammen. Ist dagegen $e \in \mathfrak{E}_*$ mit $e = e_1 \cup e_2$, so faßt man die (maximal drei) lokale Basisfunktion \mathbf{b}_e^T mit $T \in \mathcal{T}(e)$ und die (maximal sechs) lokalen Basisfunktionen $\mathbf{b}_{e_i}^{T_i}$ mit $T_i \in \mathcal{T}(e_i)$ ($i = 1, 2$) zu der globalen Basisfunktion \mathbf{b}_e zusammen.

4. Das Eddy-Current-Problem

4.1. Problemstellung

Setzen wir zusätzlich einen Quell- bzw. Induktionsstrom \mathcal{J}_0 voraus, der die elektromagnetischen Felder erzeugt, so gilt für den Gesamtstrom \mathcal{J}

$$\mathcal{J} = \sigma \mathcal{E} + \mathcal{J}_0$$

an Stelle des Ohmschen Gesetzes (2.2.12), und man erhält die Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{curl} \mathcal{E}_G &= \mathbf{curl} \mathcal{E} = -\mu \frac{d}{dt} \mathcal{H}, \\ \mathbf{curl} \mathcal{H} &= \epsilon \frac{d}{dt} \mathcal{E}_G + \sigma \mathcal{E} + \mathcal{J}_0 \end{aligned}$$

für das dann sogenannte Wirbelstromproblem (*eddy-current Problem*). Wir bleiben weiterhin beim zeitharmonischen Fall, ersetzen also das zeitperiodische \mathcal{J}_0 durch die Fouriertransformierte \mathbf{J}_0 zur Frequenz $\omega \in \mathbb{R}$ und können so zum Frequenzbereich übergehen und erhalten

$$\mathbf{curl} \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H}, \quad (4.1.1)$$

$$\mathbf{curl} \mathbf{H} = i\omega\epsilon\mathbf{E}_G + \sigma\mathbf{E} + \mathbf{J}_0. \quad (4.1.2)$$

Hierbei haben wir den Ansatz aus Bemerkung 1 auf Seite 28 gewählt, um mit der Schreibweise von Hiptmair [58] konsistent zu bleiben.

Desweiteren soll die Silver-Müller-Abklingbedingung

$$\sqrt{\mu} \mathbf{H}(\mathbf{x}) \times \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} - \sqrt{\epsilon^*} \mathbf{E}(\mathbf{x}) = o\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right) \quad \text{gleichmäßig für } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (4.1.3)$$

gelten (vgl. (2.2.30)). Ist nun das Medium von hoher Leitfähigkeit (wie bei Metallen meist der Fall) und betrachten wir nur niedrige Frequenzen, d.h. gilt

$$\omega\epsilon \ll \sigma,$$

4. Das Eddy-Current-Problem

so können wir den Term $i\omega\epsilon\mathbf{E}_G$ (den sogenannten Verschiebungsstrom) vernachlässigen [48, 87] und erhalten so die vereinfachte Formulierung

$$\mathbf{curl} \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H}, \quad (4.1.4)$$

$$\mathbf{curl} \mathbf{H} = \sigma\mathbf{E} + \mathbf{J}_0. \quad (4.1.5)$$

Aus der Abklingbedingung (4.1.3) können wir

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right) \quad \text{gleichmäßig für } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad (4.1.6)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right) \quad \text{gleichmäßig für } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (4.1.7)$$

folgern (vgl. [40, Gleichung (6.19)]). Gleichungen (4.1.4) bis (4.1.7) beschreiben unser mathematisches Modell des Wirbelstromproblems. Die Autoren Ammari, Buffa und Nédélec beschäftigen sich in dem Artikel [3] (aus dem wir noch einige Ergebnisse zitieren werden) ausführlich mit diesem Modell des Wirbelstromproblems.

Wir wollen jetzt etwas spezifischer werden: Dazu seien Ω_C , Γ und Ω_E wie in Abschnitt 2.1 definiert; es ist also Ω_C ein beschränktes, konvexes Lipschitz-reguläres Gebiet und $\Omega_E = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}_C$. Ω_C repräsentiere hierbei einen möglicherweise inhomogenen Leiter mit Konduktivität $\sigma \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\sigma_1 \geq \sigma(\mathbf{x}) \geq \sigma_0 > 0$ und magnetischer Permeabilität $\mu \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\mu_1 \geq \mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0 > 0$ mit positiven Konstanten σ_0 , σ_1 , μ_0 , μ_1 . Die Außenregion Ω_E repräsentiere Luft, und es gelte dort (als Näherung) $\sigma \equiv 0$ und durch Normierung $\mu \equiv 1$. Der Quellstrom \mathbf{J}_0 sei in $\mathbf{H}(\text{div}, \mathbb{R}^3)$ mit $\text{supp}(\mathbf{J}_0) \subset \bar{\Omega}_C$. Es gilt also $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0$ auf Γ (\mathbf{J} fließt nicht durch Γ). Wegen $\sigma \equiv 0$ im Außenraum ist \mathbf{E} dort nicht eindeutig definiert. Eine erste Einschränkung an \mathbf{E} besteht darin, eine Funktion ρ in Ω_E vorzugeben und $\text{div} \mathbf{E} = \rho$ zu verlangen. Im einfachsten Fall bedeutet dies:

$$\text{div} \mathbf{E} = 0 \quad \text{in } \Omega_E. \quad (4.1.8)$$

Diese Bedingung an \mathbf{E} bezeichnet man als **Coulomb-Eichung**.

Ein abklingendes Vektorfeld \mathbf{E} (das somit (4.1.7) genügt), und für das $\Delta \mathbf{E} = 0$ und $\text{div} \mathbf{E} = 0$ in einer Umgebung von Unendlich gelten, verhält sich im Unendlichen sogar gleichmäßig wie $\mathcal{O}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}\right)$ (siehe [76, Abschnitt 6] oder [3, Proposition 3.1]). Damit genügen die Lösungsfelder \mathbf{E}, \mathbf{H} sogar den Abklingbedingungen

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}\right) \quad \text{gleichmäßig für } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad (4.1.9)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}\right) \quad \text{gleichmäßig für } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (4.1.10)$$

Hieraus folgt, daß die Felder \mathbf{E} und \mathbf{H} aus $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)$ sind, was folgende variationelle Formulierung des Wirbelstromproblems rechtfertigt:

Finde $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \mathbb{R}^3) \cap \mathbf{H}(\operatorname{div} 0, \Omega_E)$, so daß

$$(\mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{E}, \mathbf{curl} \mathbf{v})_{\mathbb{R}^3} + i\omega(\sigma \mathbf{E}, \mathbf{v})_{\Omega_C} = -i\omega(\mathbf{J}_0, \mathbf{v})_{\Omega_C} \quad (4.1.11)$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \mathbb{R}^3) \cap \mathbf{H}(\operatorname{div} 0, \Omega_E)$.

Trotz der Coulomb-Eichung (4.1.8) ist das \mathbf{E} immer noch nicht eindeutig bestimmt [3, Theorem 3.2]. Genauer: Für jede Lösung (\mathbf{E}, \mathbf{H}) von (4.1.4)–(4.1.8) ist auch $(\mathbf{E} + \mathbf{E}_0, \mathbf{H})$ für alle $\mathbf{E}_0 \in D_E$ eine Lösung. Hierbei ist D_E der Raum der harmonischen Dirichletfelder im Außenraum, also der Raum der $\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega_E)$ mit $\mathbf{curl} \mathbf{v} = \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ (womit auch $\Delta \mathbf{v} = 0$ gilt) und $\mathbf{v} \times \mathbf{n} = 0$ auf Γ . Auch die schwache Formulierung (4.1.11) besitzt eine nur bis auf harmonische Dirichletfelder im Außenraum eindeutige Lösung $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \mathbb{R}^3) \cap \mathbf{H}(\operatorname{div} 0, \Omega_E)$. Weiter gilt: Ist \mathbf{E} eine Lösung von (4.1.11), so sind die Felder \mathbf{E} und $\mathbf{H} := \frac{1}{i\omega\mu} \mathbf{curl} \mathbf{E}$ Lösungen von (4.1.4)–(4.1.8). Man beachte, daß das so gewonnene magnetische Feld \mathbf{H} eindeutig bestimmt ist (da $\mathbf{curl} \mathbf{E}_0 = 0$). Interessiert man sich also in erster Linie für das magnetische Feld, so ist die Eindeutigkeit von \mathbf{E} nicht nötig.

Es stellt sich nun als erste Frage, wann eine Lösung \mathbf{E} denn eindeutig ist. Die Antwort findet man in [3, Theorem 3.2]: Verlangen wir zusätzlich zu (4.1.4)–(4.1.8) die Bedingung

$$\int_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (4.1.12)$$

so existiert hierzu eine eindeutige Lösung \mathbf{E} .

Als zweite Frage stellt sich, wie denn (4.1.11) zu lösen ist, wenn die Unbekannte \mathbf{E} nicht eindeutig ist. Eine mögliche Lösung ist die folgende: Man definiere den Raum \mathcal{V} durch

$$\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \mathbb{R}^3) \cap \mathbf{H}(\operatorname{div} 0, \Omega_E) = \mathcal{V} \oplus D_E$$

und löse anstelle von (4.1.11) das Problem

Finde $\mathbf{E} \in \mathcal{V}$, so daß

$$(\mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{E}, \mathbf{curl} \mathbf{v})_{\mathbb{R}^3} + i\omega(\sigma \mathbf{E}, \mathbf{v})_{\Omega_C} = -i\omega(\mathbf{J}_0, \mathbf{v})_{\Omega_C} \quad (4.1.13)$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$.

Hierzu braucht man natürlich Kenntnisse über den Raum \mathcal{V} . Wir werden sehen, daß die nachfolgende Kopplungsformulierung dieses Problem umgeht, indem sie sich auf die eindeutigen Anteile von \mathbf{E} beschränkt (nämlich $\mathbf{E}|_{\Omega_C}$, $\gamma_t \mathbf{E}$ und $\gamma_N \mathbf{E}$). Doch dazu gleich mehr.

Zuerst wollen wir der Vollständigkeit halber noch ein wichtiges Ergebnis aus [3] angeben, das über die Güte des mathematischen Modells Auskunft gibt:

4. Das Eddy-Current-Problem

Satz 4.1.1. *Das ursprüngliche Problem (4.1.1)–(4.1.3) besitzt genau eine Lösung $(\mathbf{E}^*, \mathbf{H}^*)$, und für (\mathbf{E}, \mathbf{H}) eindeutige Lösung des Problems (4.1.4)–(4.1.8), (4.1.12) gilt*

$$\|\mathbf{E}^* - \mathbf{E}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_E \cap B_R)} \leq C\omega^p, \quad (4.1.14)$$

$$\|\mathbf{H}^* - \mathbf{H}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_E \cap B_R)} \leq C\omega^p, \quad (4.1.15)$$

mit $p = 2$ falls $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$ in Ω_C und $p = 1$ sonst, wobei B_R eine Kugel mit Radius R darstellt, so daß $\Omega_C \subset B_R$. Weiter gilt: \mathbf{E} ist auch eindeutige Lösung der variationellen Formulierung (4.1.13).

Beweis. Siehe [3, Abschnitt 7]. □

Wir sehen also, daß unser Modell für niedrige Frequenzen ω (und insbesondere für einen divergenzfreien Induktionsstrom) eine brauchbare Näherung für die Lösung des „unverfälschten“ Modells liefert.

Hiptmair leitet in [58] die von uns verwendete Kopplungsformulierung zu dem Problem (4.1.11) her; wir werden die wesentlichen Schritte hier im folgenden nachvollziehen:

Als erstes möchten wir die Bedingung $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ in Ω_E in der variationellen Formulierung im schwachen Sinne als Gleichung einbauen, anstatt sie als Bedingung an den Lösungsraum zu stellen, was uns zu folgender (symmetrischen) Formulierung bringt:

Finde $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \mathbb{R}^3)$, $p \in H^1(\Omega_E)/\mathbb{C}$, so daß

$$\begin{aligned} (\mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{E}, \mathbf{curl} \mathbf{v})_{\mathbb{R}^3} + i\omega(\sigma \mathbf{E}, \mathbf{v})_{\Omega_C} + (\mathbf{grad} p, \mathbf{v})_{\Omega_E} &= -i\omega(\mathbf{J}_0, \mathbf{v})_{\Omega_C}, \\ (\mathbf{E}, \mathbf{grad} q)_{\Omega_E} &= 0 \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \mathbb{R}^3)$, $q \in H^1(\Omega_E)/\mathbb{C}$.

Da wir \mathbf{E} und \mathbf{H} in $\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \mathbb{R}^3)$ suchen, müssen wir fordern, daß sowohl die Tangentialspur von \mathbf{E} wie die von $\mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{E}$ stetig über Γ sind, d.h. es gelten die Transmissionsbedingungen

$$[\gamma_t \mathbf{E}]_\Gamma = 0, \quad [\mu^{-1} \gamma_N \mathbf{E}]_\Gamma = 0. \quad (4.1.17)$$

Nach den Ausführungen auf Seite 97 wissen wir, daß \mathbf{E} in Ω_C eindeutig gegeben ist. Aufgrund der Stetigkeitsbedingungen (4.1.17) wissen wir somit, daß auch $\gamma_t^+ \mathbf{E} = \gamma_t^- \mathbf{E}$ und $\gamma_N^+ \mathbf{E} = \mu^{-1} \gamma_N^- \mathbf{E}$ (da $\mu \equiv 1$ in Ω_E) eindeutig bestimmt sind.

Obwohl also \mathbf{E} im Außenraum nicht eindeutig ist – die Tangentialspur $\gamma_t^+ \mathbf{E}$ und die Neumannspur $\gamma_N^+ \mathbf{E}$ sind es schon. Wir werden uns nun, was Ω_E angeht, auf diese Spuren beschränken. Wir schreiben ab jetzt \mathbf{u} statt \mathbf{E} , um anzudeuten, daß uns nur die eindeutigen Größen $\mathbf{u}|_{\Omega_C} = \mathbf{E}|_{\Omega_C}$, $\gamma_t \mathbf{u} = \gamma_t \mathbf{E}$ und $\mu^{-1} \gamma_N \mathbf{u} = \mu^{-1} \gamma_N \mathbf{E}$ interessieren. Für \mathbf{u} gelten natürlich die gleichen Transmissionsbedingungen wie für \mathbf{E} :

$$[\gamma_t \mathbf{u}]_\Gamma = 0, \quad [\mu^{-1} \gamma_N \mathbf{u}]_\Gamma = 0. \quad (4.1.18)$$

Nun wollen wir das Problem wegen den unterschiedlichen Eigenschaften von Ω_C und Ω_E in Innen- und Außenraumproblem trennen. Dafür werden wir Randdaten auf Γ benötigen. Definiere

$$\begin{aligned}\mathbf{g} &:= \gamma_t \mathbf{u} \in \mathbf{TH}_{\perp}^{-1/2}(\text{curl}_{\Gamma}, \Gamma), \\ \boldsymbol{\lambda} &:= \mu^{-1} \gamma_N \mathbf{u} \in \mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma).\end{aligned}$$

Somit erhalten wir das innere Dirichlet-Problem

Finde $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega_C)$, $\gamma_t \mathbf{u} = \mathbf{g}$, so daß

$$(\mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{u}, \mathbf{curl} \mathbf{v})_{\Omega_C} + i\omega(\sigma \mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega_C} = -i\omega(\mathbf{J}_0, \mathbf{v})_{\Omega_C} \quad (4.1.19)$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{curl}, \Omega_C)$

oder das innere Neumann-Problem

Finde $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega_C)$, so daß

$$(\mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{u}, \mathbf{curl} \mathbf{v})_{\Omega_C} + i\omega(\sigma \mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega_C} = -i\omega(\mathbf{J}_0, \mathbf{v})_{\Omega_C} + \langle \boldsymbol{\lambda}, \gamma_t \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} \quad (4.1.20)$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega_C)$,

deren starke Formulierung

$$\mathbf{curl}(\mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{u}) + i\omega \sigma \mathbf{u} = -i\omega \mathbf{J}_0 \text{ in } \Omega_C, \quad \gamma_t \mathbf{u} = g \text{ auf } \Gamma, \quad (4.1.21)$$

bzw.

$$\mathbf{curl}(\mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{u}) + i\omega \sigma \mathbf{u} = -i\omega \mathbf{J}_0 \text{ in } \Omega_C, \quad \mu^{-1} \gamma_N \mathbf{u} = \lambda \text{ auf } \Gamma \quad (4.1.22)$$

lauten. Das äußere Dirichlet-Problem hat die Form:

Finde $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega_E)$, $\gamma_t \mathbf{u} = \mathbf{g}$ und $p \in H^1(\Omega_E)/\mathbb{C}$, so daß

$$\begin{aligned}(\mathbf{curl} \mathbf{u}, \mathbf{curl} \mathbf{v})_{\Omega_E} + (\mathbf{grad} p, \mathbf{v})_{\Omega_E} &= 0, \\ (\mathbf{u}, \mathbf{grad} q)_{\Omega_E} &= 0\end{aligned} \quad (4.1.23)$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{curl}, \Omega_E)$, $q \in H^1(\Omega_E)/\mathbb{C}$

mit der dazugehörigen starken Formulierung

$$\mathbf{curl} \mathbf{curl} \mathbf{u} = 0, \quad \text{div} \mathbf{u} = 0 \text{ in } \Omega_E, \quad \gamma_t \mathbf{u} = g \text{ auf } \Gamma. \quad (4.1.24)$$

4. Das Eddy-Current-Problem

Das äußere Neumann-Problem hat die Form:

Finde $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega_E), p \in H^1(\Omega_E)/\mathbb{C}$, so daß

$$\begin{aligned} (\mathbf{curl} \mathbf{u}, \mathbf{curl} \mathbf{v})_{\Omega_E} + (\mathbf{grad} p, \mathbf{v})_{\Omega_E} &= \langle \boldsymbol{\lambda}, \gamma_t \mathbf{v} \rangle_{\Gamma}, \\ (\mathbf{u}, \mathbf{grad} q)_{\Omega_E} &= 0 \end{aligned} \quad (4.1.25)$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega_E), q \in H^1(\Omega_E)/\mathbb{C}$.

Die starke Formulierung dazu lautet:

$$\begin{aligned} \mathbf{curl} \mathbf{curl} \mathbf{u} + \mathbf{grad} p &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ in } \Omega_E, \\ \gamma_n \mathbf{u} &= 0, \quad \gamma_N \mathbf{u} = \boldsymbol{\lambda} \text{ auf } \Gamma. \end{aligned} \quad (4.1.26)$$

In (4.1.24) finden wir $\mathbf{curl} \mathbf{curl} \mathbf{u} = 0$ in Ω_E , während wir aus (4.1.26) die Beziehung $\mathbf{curl} \mathbf{curl} \mathbf{u} + \mathbf{grad} p = 0$ in Ω_E erhalten. Es muß also $\mathbf{grad} p = 0$ gelten. Wählt man als Testfunktion $\mathbf{v} = \mathbf{grad} \phi, \phi \in H^1(\Omega_E)$ in (4.1.25), so erhält man

$$(\mathbf{grad} p, \mathbf{grad} \phi)_{\Omega_E} = \langle \boldsymbol{\lambda}, \gamma_t \mathbf{grad} \phi \rangle_{\Gamma} = \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{grad}_{\Gamma} \phi \rangle_{\Gamma} = -\langle \operatorname{div}_{\Gamma} \boldsymbol{\lambda}, \phi \rangle_{\Gamma}.$$

Es gilt also $\mathbf{grad} p = 0$ genau dann wenn $\operatorname{div}_{\Gamma} \boldsymbol{\lambda} = 0$. Wir haben also festgestellt, daß die Randvariable $\gamma_N^+ \mathbf{u} = \boldsymbol{\lambda}$ aus $\mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\operatorname{div}_{\Gamma} 0, \Gamma)$ sein muß. Dieses Ergebnis folgt auch aus folgender Überlegung: Wegen $\mathbf{curl} \mathbf{curl} \mathbf{u} = 0$ in Ω_E gilt $\operatorname{div}_{\Gamma}(\mathbf{curl} \mathbf{u} \times \mathbf{n}) = \operatorname{curl}_{\Gamma}(\mathbf{curl} \mathbf{u}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{curl} \mathbf{curl} \mathbf{u} = 0$ auf Γ , also $\gamma_N^+ \mathbf{u} \in \mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\operatorname{div}_{\Gamma} 0, \Gamma)$.

Nun wollen wir Innen- und Außenraumproblem koppeln. Dazu wählen wir im Innenraum die Neumann-Formulierung

$$(\mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{u}, \mathbf{curl} \mathbf{v})_{\Omega_C} + i\omega(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega_C} - \langle \gamma_N^+ \mathbf{u}, \gamma_t \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} = -i\omega(\mathbf{J}_0, \mathbf{v})_{\Omega_C}, \quad (4.1.27)$$

wobei wir $\mu^{-1} \gamma_N^-$ durch γ_N^+ ersetzt haben. Für den Außenraum suchen wir eine geeignete Randintegralgleichung. Dazu verwenden wir Lemma 2.2.14, die Darstellungsformel für abklingende Lösungen der Maxwell-Gleichungen (bzw. der dazu äquivalenten Vektor-Helmholtz-Gleichung). Es sind $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ und $\mathbf{curl} \mathbf{curl} \mathbf{u} = 0$ und somit $\Delta \mathbf{u} = 0$ in Ω_E , so daß wir Lemma 2.2.14 mit $k = 0$ anwenden können und

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}_0(\gamma_t^+ \mathbf{u}) - \mathbf{V}_0(\gamma_N^+ \mathbf{u}) - \mathbf{grad} V_0(\gamma_n^+ \mathbf{u}) \quad (4.1.28)$$

erhalten. Wir erinnern daran, daß der Index 0 auf die Verwendung des Laplace-Kerns (also auf Wellenzahl $k = 0$) hinweist. Hierauf wenden wir nun die Spurooperatoren γ_N^+, γ_t^+ an und erhalten somit

$$\gamma_t^+ \mathbf{u} = \mathcal{K}_0(\gamma_t^+ \mathbf{u}) - \mathcal{V}_0(\gamma_N^+ \mathbf{u}) - \mathcal{S}_0(\gamma_n^+ \mathbf{u}), \quad (4.1.29)$$

$$\gamma_N^+ \mathbf{u} = \mathcal{W}_0(\gamma_t^+ \mathbf{u}) - \tilde{\mathcal{K}}_0(\gamma_N^+ \mathbf{u}). \quad (4.1.30)$$

Es ist $\gamma_t^+ \mathbf{u} \in \mathbf{TH}_\perp^{-1/2}(\text{curl}_\Gamma, \Gamma)$ nach Lemma 2.1.2, wir können also (4.1.29) nach Lemma 2.1.7 gegen $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbf{TH}_\parallel^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ testen. Wir testen sogar nur gegen $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbf{TH}^{-1/2}(\text{div}_\Gamma 0, \Gamma)$ – das hat den Vorteil, daß der Term $\mathcal{S}_0(\gamma_n^+ \mathbf{u})$ verschwindet, da

$$\langle \mathcal{S}\phi, \boldsymbol{\zeta} \rangle_\Gamma = \langle \mathbf{grad}_\Gamma V\phi, \boldsymbol{\zeta} \rangle_\Gamma = \langle V\phi, \text{div}_\Gamma \boldsymbol{\zeta} \rangle_\Gamma = 0.$$

Damit fällt der einzige Ausdruck weg, in dem die Normalenspur $\gamma_n^+ \mathbf{u}$ vorkommt. Dies ist tatsächlich notwendig, wenn wir mit der Kopplung fortfahren wollen, denn gerade die Normalenspur wird durch unsere Transmissionsbedingungen (4.1.18) nicht erfaßt. Sie ist, im Gegensatz zu der Neumannspur γ_N , zu gegebenen Dirichletdaten nicht eindeutig (vgl. Ausführungen ab Seite 97). Würde sie am Ende noch in unserer Kopplungsformulierung stehen, so müssten wir die Zusatzbedingung $\gamma_n^+ = 0$ (die man aus der starken Formulierung (4.1.26) des äußeren Neumann-Problems erhält) in unsere Formulierung aufnehmen (dies entspräche der Bedingung (4.1.12)). Dies bleibt uns also erspart.

Damit haben wir

$$\langle \gamma_t^+ \mathbf{u}, \boldsymbol{\zeta} \rangle_\Gamma = \langle \mathcal{K}_0(\gamma_t^+ \mathbf{u}), \boldsymbol{\zeta} \rangle_\Gamma - \langle \mathcal{V}_0(\gamma_N^+ \mathbf{u}), \boldsymbol{\zeta} \rangle_\Gamma \quad \forall \boldsymbol{\zeta} \in \mathbf{TH}^{-1/2}(\text{div}_\Gamma 0, \Gamma). \quad (4.1.31)$$

Wir erhalten nun folgendermaßen unsere Kopplungsformulierung: Als erste Gleichung nehmen wir (4.1.27), und ersetzen darin den Ausdruck $\gamma_N^+ \mathbf{u}$ durch (4.1.30). Als zweite Gleichung nehmen wir (4.1.31). Zum Schluß ersetzen wir alle $\gamma_N^+ \mathbf{u}$ durch die neue Randvariable $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{TH}_\parallel^{-1/2}(\text{div}_\Gamma 0, \Gamma)$. Insgesamt erhalten wir (wobei wir nun \mathbf{u}_Γ anstelle von $\gamma_t \mathbf{u}$ schreiben):

Finde $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega_C)$, $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{TH}_\parallel^{-1/2}(\text{div}_\Gamma 0, \Gamma)$, so daß

$$\begin{aligned} (\mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{u}, \mathbf{curl} \mathbf{v})_{\Omega_C} + i\omega(\sigma \mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega_C} - \langle \mathcal{W}_0 \mathbf{u}_\Gamma, \mathbf{v}_\Gamma \rangle_\Gamma + \langle \tilde{\mathcal{K}}_0 \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}_\Gamma \rangle_\Gamma &= -i\omega(\mathbf{J}_0, \mathbf{v})_{\Omega_C}, \\ \langle (I - \mathcal{K}_0) \mathbf{u}_\Gamma, \boldsymbol{\zeta} \rangle_\Gamma + \langle \mathcal{V}_0 \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\zeta} \rangle_\Gamma &= 0 \end{aligned} \quad (4.1.32)$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega_C)$, $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbf{TH}_\parallel^{-1/2}(\text{div}_\Gamma 0, \Gamma)$.

Man beachte, daß die Formulierung (4.1.32) block-schiefsymmetrisch ist.

Es gilt

Satz 4.1.2 (Theorem 7.1 aus [58]). Die durch (4.1.32) implizierte Bilinearform \mathcal{A} ist stetig und koerzitiv auf $(\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega_C) \times \mathbf{TH}_\parallel^{-1/2}(\text{div}_\Gamma 0, \Gamma))^2$.

Beweis. Die Stetigkeit folgt sofort aus der Stetigkeit der einzelnen Randintegraloperatoren (Lemma 2.2.5) und der gleichmäßigen Beschränktheit von σ und μ . Für die Koerzitivität benötigen wir zusätzlich die Koerzitivität von \mathcal{V}_0 und \mathcal{W}_0 (Lemma 2.2.7,1,4)

4. Das Eddy-Current-Problem

und die Adjungiertheit von $\tilde{\mathcal{K}}_0$ zu $\mathcal{K}_0 - I$ (Lemma 2.2.7,2), denn:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}; \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})| &= |(\mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{u}, \mathbf{curl} \mathbf{u})_{\Omega_C} + i\omega(\sigma \mathbf{u}, \mathbf{u})_{\Omega_C} - \langle \mathcal{W}_0 \mathbf{u}_\Gamma, \mathbf{u}_\Gamma \rangle_\Gamma \\
&\quad + \langle \tilde{\mathcal{K}}_0 \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}_\Gamma \rangle_\Gamma + \langle (I - \mathcal{K}_0) \mathbf{u}_\Gamma, \boldsymbol{\lambda} \rangle_\Gamma + \langle \mathcal{V}_0 \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda} \rangle_\Gamma| \\
&= |(\mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{u}, \mathbf{curl} \mathbf{u})_{\Omega_C} + i\omega(\sigma \mathbf{u}, \mathbf{u})_{\Omega_C} - \langle \mathcal{W}_0 \mathbf{u}_\Gamma, \mathbf{u}_\Gamma \rangle_\Gamma + \langle \mathcal{V}_0 \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda} \rangle_\Gamma| \\
&\geq (\mathbf{curl} \mathbf{u}, \mathbf{curl} \mathbf{u})_{\Omega_C} + (\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\Omega_C} + \|\mathbf{curl}_\Gamma \gamma_t \mathbf{u}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{TH}_\parallel^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma 0, \Gamma)}^2 \\
&\geq \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega_C)}^2 + \|\boldsymbol{\lambda}\|_{\mathbf{TH}_\parallel^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)}^2.
\end{aligned}$$

□

Damit besitzt die variationelle Formulierung (4.1.32) genau eine Lösung. Da (4.1.32) aus der variationellen Formulierung (4.1.16) hervorgegangen ist, gilt für jede Lösung $(\mathbf{E}, p) \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \mathbb{R}^3) \times H_0^1(\Omega_E)$ von (4.1.16), daß $(\mathbf{E}|_{\Omega_C}, \gamma_N^+ \mathbf{u}) \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega_C) \times \mathbf{TH}_\parallel^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma 0, \Gamma)$ Lösung von (4.1.32) ist. Nun sind die Komponenten $\mathbf{E}|_{\Omega_C}$ und $\gamma_N^+ \mathbf{E}$ eindeutig, so daß diese die eindeutige Lösung von (4.1.32) sein müssen. Es gilt also folgendes:

Satz 4.1.3. *Es sei $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega_C) \times \mathbf{TH}_\parallel^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma 0, \Gamma)$ die eindeutige Lösung der Kopplungsformulierung (4.1.32) und $(\mathbf{E}, p) \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \mathbb{R}^3) \times H_0^1(\Omega_E)$ eine Lösung der variationellen Formulierung (4.1.16). Dann gilt $\mathbf{E}|_{\Omega_C} = \mathbf{u}$, $\gamma_t \mathbf{E} = \gamma_t \mathbf{u}$ und $\gamma_N^+ \mathbf{E} = \boldsymbol{\lambda}$.*

Die Neumann-Spur $\gamma_n^+ \mathbf{u}$ ist unbekannt und entspricht nicht unbedingt $\gamma_n^+ \mathbf{E}$, da diese Größe nicht eindeutig ist (wie bereits häufig erwähnt). Dennoch können wir aus der Lösung $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega_C) \times \mathbf{TH}_\parallel^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma 0, \Gamma)$ der Kopplungsformulierung (4.1.32) eine Lösung \mathbf{E} von (4.1.16) konstruieren, indem wir $\gamma_n^+ \mathbf{E} = 0$ fordern (entsprechend (4.1.12) und wie schon in (4.1.26) geschehen). Dann ist nämlich $\mathbf{E}|_{\Omega_C} = \mathbf{u}$ wie gehabt und $\mathbf{E}|_{\Omega_E} = \mathbf{K}_0(\gamma_t \mathbf{E}) - \mathbf{V}_0(\boldsymbol{\lambda})$ nach (4.1.28).

4.1.1. Das Galerkin-Verfahren

Es sei \mathcal{T}_h eine reguläre Triangulierung (mit tetraedrischen oder hexaedrischen Elementen) von Ω_C und $\mathcal{K}_h = \{T \cap \Gamma : T \in \mathcal{T}_h\}$ die induzierte Triangulierung auf Γ . Wir benutzen den in Abschnitt 3.1 vorgestellten $\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$ -konformen Finite-Element-Raum $\mathcal{ND}_1(\mathcal{T}_h)$ zur Diskretisierung der Variablen $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega_C)$. Es stellt sich die Frage, wie der Raum der Randvariable $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{TH}_\parallel^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma 0, \Gamma)$ zu diskretisieren ist. Der naheliegendste konforme Unterraum ist $\mathcal{RT}_1^0(\mathcal{K}_h) := \{\boldsymbol{\lambda}_h \in \mathcal{RT}_1(\mathcal{K}_h), \operatorname{div}_\Gamma \boldsymbol{\lambda}_h = 0\}$, mit dem in Abschnitt 3.1 vorgestellten $\mathbf{TH}_\parallel^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$ -konformen Finite-Element-Raum $\mathcal{RT}_1(\mathcal{K}_h)$. Ist Γ einfach zusammenhängend (so wie wir es vorausgesetzt haben), so gilt $\mathcal{RT}_k^0(\mathcal{K}_h) = \mathbf{curl}_\Gamma \tilde{\mathcal{S}}_k(\mathcal{K}_h)$ (vergl. Lemma 2.1.6 und Satz B.3.1). Für Γ nicht einfach zusammenhängend wird die Situation etwas schwieriger, siehe dazu [58, 54]. Also suchen wir anstelle eines

$\boldsymbol{\lambda}_h \in \mathcal{RT}_1(\mathcal{K}_h)$ eine Funktion $\varphi_h \in \mathcal{S}_1(\mathcal{K}_h)/\mathbb{C}$ (und setzen danach $\boldsymbol{\lambda}_h := \mathbf{curl}_\Gamma \varphi_h$). Die Regularisierung von φ_h geschieht, indem wir $\int_\Gamma \varphi_h(\mathbf{x}) dS_{\mathbf{x}} = 0$ fordern. Dies erreichen wir durch Hinzunahme der Gleichungen $\mathcal{P}(\varphi_h, \tau_h) := (\int_\Gamma \varphi_h(\mathbf{x}) dS_{\mathbf{x}})(\int_\Gamma \tau_h(\mathbf{x}) dS_{\mathbf{x}}) = 0$. Man beachte, daß die Bilinearform $\mathcal{P}(\varphi, \tau)$ positiv semi-definit ist ($\mathcal{P}(\varphi, \varphi) = |\int_\Gamma \varphi(\mathbf{x}) dS_{\mathbf{x}}|^2$), und daß die dazu gehörende Matrix im Gleichungssystem Rang 1 hat. Unser Galerkin-Verfahren lautet also:

Finde $\mathbf{u}_h \in \mathcal{ND}_1(\mathcal{T}_h)$, $\varphi_h \in \mathcal{S}_1(\mathcal{K}_h)/\mathbb{C}$, so daß

$$\begin{aligned} & (\mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{u}_h, \mathbf{curl} \mathbf{v}_h)_{\Omega_C} + i\omega(\sigma \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)_{\Omega_C} \\ & - \langle \mathcal{W}_0 \gamma_t \mathbf{u}_h, \gamma_t \mathbf{v}_h \rangle_\Gamma + \langle \tilde{\mathcal{K}}_0 \mathbf{curl}_\Gamma \varphi_h, \gamma_t \mathbf{v}_h \rangle_\Gamma = -i\omega(\mathbf{J}_0, \mathbf{v}_h)_{\Omega_C}, \\ & \langle (I - \mathcal{K}_0) \gamma_t \mathbf{u}_h, \mathbf{curl}_\Gamma \tau_h \rangle_\Gamma + \langle \mathcal{V}_0 \mathbf{curl}_\Gamma \varphi_h, \mathbf{curl}_\Gamma \tau_h \rangle_\Gamma + \mathcal{P}(\varphi_h, \tau_h) = 0 \end{aligned} \quad (4.1.33)$$

für alle $\mathbf{v}_h \in \mathcal{ND}_1(\mathcal{T}_h)$, $\tau_h \in \mathcal{S}_1(\mathcal{K}_h)/\mathbb{C}$.

Wegen der Konformität der diskreten Räume gilt nach Satz 4.1.2, daß (4.1.33) eine eindeutige Lösung $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h) \in \mathcal{ND}_1(\mathcal{T}_h) \times \mathbf{curl}_\Gamma \mathcal{S}_1(\mathcal{K}_h)$ besitzt, und für diese ergibt sich folgende Konvergenzaussage:

Satz 4.1.4 (vgl. Theorem 8.1 aus [58]). Für die Lösung \mathbf{u} des Eddy-Current-Problems (4.1.32) gelte $\mathbf{u}, \mathbf{curl} \mathbf{u} \in \mathbf{H}^2(\Omega_C)$. Dann gilt

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega_C)} + \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_{\mathbf{TH}_\parallel^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)} \lesssim h \left(\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^2(\Omega_C)} + \|\mathbf{curl} \mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^2(\Omega_C)} \right).$$

Die Konstante der Abschätzung hängt nur von der Geometrie Ω , der Regularität des Gitters \mathcal{T}_h und den Materialparametern σ, μ ab.

Beweis. Nach dem Lemma von Céa gilt

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega_C)} + \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_{\mathbf{TH}_\parallel^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)} \\ & \lesssim \inf_{(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\zeta}_h) \in \mathcal{ND}_1(\mathcal{T}_h) \times \mathcal{RT}_1^0(\mathcal{K}_h)} \left\{ \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega_C)} + \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\zeta}_h\|_{\mathbf{TH}_\parallel^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)} \right\}, \end{aligned}$$

wobei die Konstante der Abschätzung nur von der Geometrie Ω und den Materialparametern σ, μ abhängt. Wir wählen $\mathbf{v}_h = \Pi^{\mathcal{ND}_1} \mathbf{u}$ und $\boldsymbol{\zeta}_h = \gamma_t^\times \Pi^{\mathcal{ND}_1} \mathbf{curl} \mathbf{u}$ (es ist $\mathbf{curl} \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega_C)$ und damit $\gamma_t^\times \Pi^{\mathcal{ND}_1} \mathbf{curl} \mathbf{u} \in \mathcal{RT}_1^0(\mathcal{K}_h)$). Außerdem bedenke man, daß $\boldsymbol{\lambda} = \gamma_N \mathbf{u} = \gamma_t^\times \mathbf{curl} \mathbf{u}$. So gilt mit der Approximationseigenschaft aus Lemma 3.1.1 und der Stetigkeit von γ_t^\times (Lemma 2.1.2)

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u} - \Pi^{\mathcal{ND}_1} \mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega_C)} \lesssim h \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^2(\Omega_C)}, \\ & \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\zeta}_h\|_{\mathbf{TH}_\parallel^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)} \lesssim \|\mathbf{curl} \mathbf{u} - \Pi^{\mathcal{ND}_1} \mathbf{curl} \mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega_C)} \lesssim h \|\mathbf{curl} \mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^2(\Omega_C)}. \end{aligned}$$

4. Das Eddy-Current-Problem

Eine etwas allgemeinere Aussage für weniger reguläre Funktionen, nämlich solche \mathbf{u} mit $\mathbf{u}, \mathbf{curl} \mathbf{u}, \mathbf{curl} \mathbf{curl} \mathbf{u} \in \mathbf{H}^s(\Omega_C)$ für $s > \frac{1}{2}$ findet sich bei Hiptmair [58]. In diesem Fall gilt die Konvergenzrate $\min\{s, 1\}$. \square

4.2. Ein p -hierarchischer Fehlerschätzer

Wir wollen nun die Theorie aus Abschnitt 3.2 zur Herleitung eines p -hierarchischen Fehlerschätzers für das Eddy-Current-Problem verwenden. Dazu sei

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}; \mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}) := & (\mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{u}, \mathbf{curl} \mathbf{v})_{\Omega_C} + i\omega(\sigma \mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega_C} - \langle \mathcal{W}_0 \mathbf{u}_\Gamma, \mathbf{v}_\Gamma \rangle_\Gamma \\ & + \langle \tilde{\mathcal{K}}_0 \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}_\Gamma \rangle_\Gamma + \langle (I - \mathcal{K}_0) \mathbf{u}_\Gamma, \boldsymbol{\zeta} \rangle_\Gamma + \langle \mathcal{V}_0 \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\zeta} \rangle_\Gamma \end{aligned} \quad (4.2.34)$$

die Bilinearform aus (4.1.32), $\mathcal{X} := \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega_C) \times \mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_\Gamma 0, \Gamma)$ und $\mathcal{L}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}) \in \mathcal{X}'$ die durch (4.1.32) gegebene rechte Seite; es ist $\mathcal{L}(0, \boldsymbol{\zeta}) = 0$. Nach Satz 4.1.2 induziert \mathcal{A} eine zur natürlichen Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ auf \mathcal{X} äquivalente Norm. Wir definieren auf $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ die Bilinearform

$$\mathcal{Q}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}; \mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}) := \underbrace{(\mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{u}, \mathbf{curl} \mathbf{v})_{\Omega_C} + i\omega(\sigma \mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega_C}}_{:=a(\mathbf{u}, \mathbf{v})} + \underbrace{\langle \mathcal{V}_0 \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\zeta} \rangle_\Gamma}_{:=b(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\zeta})}$$

und auf $\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega_C)$ bzw. $\mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_\Gamma 0, \Gamma)$ die Energienormen

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_{\mathfrak{E}}^2 &:= |a(\mathbf{v}, \mathbf{v})|, \\ \|\boldsymbol{\zeta}\|_{\mathfrak{E}}^2 &:= |b(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta})|. \end{aligned}$$

Man beachte, daß die Bilinearform a dem a aus (3.2.25) mit $\alpha = \mu^{-1}$ und $\beta = i\omega\sigma$, die Bilinearform b dem b aus (3.2.44) mit $\beta = 1$ entspricht. Der $\alpha \langle V_0 \text{div}_\Gamma \boldsymbol{\lambda}, \text{div}_\Gamma \boldsymbol{\zeta} \rangle_\Gamma$ -Anteil aus (3.2.44) kommt hier nicht vor, da wir es ja mit divergenzfreien Funktionen auf Γ zu tun haben. Weiter definieren man die „entkoppelnde“ Bilinearform

$$\tilde{\mathcal{Q}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}; \mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}) = \tilde{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \tilde{b}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\zeta})$$

mit \tilde{a} aus (3.2.34) bzw. (3.2.35) und \tilde{b} aus (3.2.51) bzw. (3.2.52).

Seien jetzt $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ aus \mathcal{X} die Lösung von (4.1.32), $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h)$ die Galerkinlösung zu (4.1.33) auf $\mathcal{X}_h := \mathcal{ND}_1(\mathcal{T}_h) \times \mathbf{curl}_\Gamma \tilde{\mathcal{S}}_1(\mathcal{K}_h)$ und $(\mathbf{u}_2, \boldsymbol{\lambda}_2)$ die Lösung der entsprechenden Formulierung auf dem „feineren“ Raum $\mathcal{X}_2 := \mathcal{ND}_2(\mathcal{T}_h) \times \mathbf{curl}_\Gamma \tilde{\mathcal{S}}_2(\mathcal{K}_h)$. Wir bezeichnen mit M die Anzahl der Kanten in \mathcal{T}_h , mit $m < M$ die Anzahl der Kanten in \mathcal{K}_h (also die auf Γ), mit N die Anzahl der Flächen in \mathcal{T}_h , mit $n < N$ die Anzahl der Flächen in \mathcal{K}_h (also die auf Γ) und mit L die Anzahl der Elemente in \mathcal{T}_h . Wir verfahren nun analog zu Mund & Stephan [79]:

Definiere die Fehlerfunktionen $(\mathbf{e}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2) \in \mathcal{X}_2$ durch

$$\mathcal{Q}(\mathbf{e}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2; \mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}) = \mathcal{L}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}) - \mathcal{A}(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h; \mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}) \quad \forall (\mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}) \in \mathcal{X}_2$$

und $(\tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_2) \in \mathcal{X}_2$ durch

$$\tilde{\mathcal{Q}}(\tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_2; \mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}) = \mathcal{Q}(\mathbf{e}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2; \mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}) \quad \forall (\mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}) \in \mathcal{X}_2.$$

Mit den Bezeichnungen aus Kapitel 3.2 definiere für tetraedrische Gitter

$$\Theta^{(e_i)} := \|P^{(e_i)} \tilde{\mathbf{e}}_2\|_{\mathfrak{E}}, \quad i = 1, \dots, M,$$

$$\Theta^{(F_j)} := \|R^{(F_j)} \tilde{\mathbf{e}}_2\|_{\mathfrak{E}} \quad j = 1, \dots, N,$$

$$\vartheta^{(e_i)} := \|r^{(e_i)} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_2\|_{\mathfrak{E}} \quad i = 1, \dots, m.$$

Es gilt dann (weiterhin mit den Bezeichnungen aus Kapitel 3.2)

$$\Theta^{(e)} = \frac{|\mathcal{L}(\mathbf{grad} \phi^{(e)}, 0) - \mathcal{A}(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h; \mathbf{grad} \phi^{(e)}, 0)|}{\|\mathbf{grad} \phi^{(e)}\|_{\mathfrak{E}}},$$

$$\Theta^{(F)} = \|\kappa_1 \mathbf{b}_1^{(F)} + \kappa_2 \mathbf{b}_3^{(F)}\|_{\mathfrak{E}},$$

wobei $(\kappa_1, \kappa_2)^T$ Lösung des LGS

$$\begin{pmatrix} a(\mathbf{b}_1^{(F)}, \mathbf{b}_1^{(F)}) & a(\mathbf{b}_2^{(F)}, \mathbf{b}_1^{(F)}) \\ a(\mathbf{b}_1^{(F)}, \mathbf{b}_2^{(F)}) & a(\mathbf{b}_2^{(F)}, \mathbf{b}_2^{(F)}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}(\mathbf{b}_1^{(F)}, 0) - \mathcal{A}(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h; \mathbf{b}_1^{(F)}, 0) \\ \mathcal{L}(\mathbf{b}_2^{(F)}, 0) - \mathcal{A}(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h; \mathbf{b}_2^{(F)}, 0) \end{pmatrix}$$

ist, und

$$\vartheta^{(e)} = \frac{|\mathcal{A}(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h; 0, \mathbf{curl}_{\Gamma} \lambda^{(e)})|}{\|\mathbf{curl}_{\Gamma} \lambda^{(e)}\|_{\mathfrak{E}}}.$$

Die Größen $\vartheta^{(F_j)} := \|p^{(F_j)} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_2\|_{\mathfrak{E}}$ kommen hier nicht vor. Sie fallen weg, da wegen $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 \in \mathbf{curl}_{\Gamma} \tilde{\mathcal{S}}_2$ (und da (3.2.26) bzw. (3.2.27) eine direkte Summe ist) $p^{(F_j)} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 = 0$ gilt.

Wie gehabt setzen wir die Saturationsannahme voraus: Es gelte

$$\|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_2, \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_2)\|_{\mathcal{X}} \leq \delta_h \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h)\|_{\mathcal{X}} \quad (4.2.35)$$

mit einem $\delta_h \leq \delta < 1$. Dann gilt der

Satz 4.2.1. *Es gelte die Saturationsannahme (4.2.35). Dann gilt mit den obigen Bezeichnungen auf einem Gitter mit tetraedrischen Elementen*

$$\eta \lesssim \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h)\|_{\mathcal{X}} \lesssim \frac{1}{1 - \delta} \eta$$

mit dem Fehlerschätzer

$$\eta^2 := \sum_{i=1}^M (\Theta^{(e_i)})^2 + \sum_{j=1}^N (\Theta^{(F_j)})^2 + \sum_{i=1}^m (\vartheta^{(e_i)})^2.$$

4. Das Eddy-Current-Problem

Beweis. Mit der Stetigkeit und Koerzitivität von \mathcal{A} (Satz 4.1.2) haben wir

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_2 - \boldsymbol{\lambda}_h)\|_{\mathcal{X}}^2 &\lesssim \mathcal{A}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_2 - \boldsymbol{\lambda}_h; \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_2 - \boldsymbol{\lambda}_h) \\ &= \mathcal{L}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_2 - \boldsymbol{\lambda}_h) - \mathcal{A}(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h; \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_2 - \boldsymbol{\lambda}_h) \\ &= \mathcal{Q}(\mathbf{e}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2; \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_2 - \boldsymbol{\lambda}_h) \\ &\lesssim \|(\mathbf{e}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\|_{\mathcal{X}} \|(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_2 - \boldsymbol{\lambda}_h)\|_{\mathcal{X}}. \end{aligned}$$

Damit gilt $\|(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_2 - \boldsymbol{\lambda}_h)\|_{\mathcal{X}} \lesssim \|(\mathbf{e}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\|_{\mathcal{X}}$. Die umgekehrte Ungleichung erhalten wir wie folgt:

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{e}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\|_{\mathcal{X}}^2 &= \mathcal{Q}(\mathbf{e}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2; \mathbf{e}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2) \\ &= \mathcal{L}(\mathbf{e}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2) - \mathcal{A}(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h; \mathbf{e}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2) \\ &= \mathcal{A}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_2 - \boldsymbol{\lambda}_h; \mathbf{e}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2) \\ &\lesssim \|(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_2 - \boldsymbol{\lambda}_h)\|_{\mathcal{X}} \|(\mathbf{e}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\|_{\mathcal{X}}, \end{aligned}$$

also $\|(\mathbf{e}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\|_{\mathcal{X}} \lesssim \|(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_2 - \boldsymbol{\lambda}_h)\|_{\mathcal{X}}$, und damit haben wir insgesamt die Äquivalenz

$$\|(\mathbf{e}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\|_{\mathcal{X}} \sim \|(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_2 - \boldsymbol{\lambda}_h)\|_{\mathcal{X}}.$$

Nach den Lemmata 3.2.3 und 3.2.8 gilt weiter $\eta := \|(\tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_2)\|_{\mathcal{X}} \sim \|(\mathbf{e}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\|_{\mathcal{X}}$, so daß die Behauptung bewiesen ist. \square

Wir verfahren genauso für hexaedrische Gitter und erhalten die Größen

$$\begin{aligned} \Theta^{(e)} &:= \frac{|\mathcal{L}(\mathbf{grad} \phi^{(e)}, 0) - \mathcal{A}(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h; \mathbf{grad} \phi^{(e)}, 0)|}{\|\mathbf{grad} \phi^{(e)}\|_{\mathfrak{E}}}, \\ \Theta_1^{(F)} &:= \frac{|\mathcal{L}(\mathbf{grad} \phi^{(F)}, 0) - \mathcal{A}(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h; \mathbf{grad} \phi^{(F)}, 0)|}{\|\mathbf{grad} \phi^{(F)}\|_{\mathfrak{E}}}, \\ \Theta_2^{(F)} &:= \|\kappa_1 \mathbf{b}_1^{(F)} + \kappa_2 \tilde{\mathbf{b}}_2^{(F)} + \kappa_3 \mathbf{b}_3^{(F)}\|_{\mathfrak{E}}, \end{aligned}$$

wobei $\tilde{\mathbf{b}}_2^{(F)} := \mathbf{b}_2^{(F)} - \mathbf{b}_4^{(F)}$ und $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)^T$ Lösung des LGS

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a(\mathbf{b}_1^{(F)}, \mathbf{b}_1^{(F)}) & a(\tilde{\mathbf{b}}_2^{(F)}, \mathbf{b}_1^{(F)}) & a(\mathbf{b}_3^{(F)}, \mathbf{b}_1^{(F)}) \\ a(\mathbf{b}_1^{(F)}, \tilde{\mathbf{b}}_2^{(F)}) & a(\tilde{\mathbf{b}}_2^{(F)}, \tilde{\mathbf{b}}_2^{(F)}) & a(\mathbf{b}_3^{(F)}, \tilde{\mathbf{b}}_2^{(F)}) \\ a(\mathbf{b}_1^{(F)}, \mathbf{b}_3^{(F)}) & a(\tilde{\mathbf{b}}_2^{(F)}, \mathbf{b}_3^{(F)}) & a(\mathbf{b}_3^{(F)}, \mathbf{b}_3^{(F)}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \mathcal{L}(\mathbf{b}_1^{(F)}, 0) - a(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h; \mathbf{b}_1^{(F)}, 0) \\ \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{b}}_2^{(F)}, 0) - a(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h; \tilde{\mathbf{b}}_2^{(F)}, 0) \\ \mathcal{L}(\mathbf{b}_3^{(F)}, 0) - a(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h; \mathbf{b}_3^{(F)}, 0) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ist, und

$$\Theta^{(T)} := \left\| \sum_{\ell=1}^6 \kappa_\ell \mathbf{b}_\ell^{(T)} \right\|_{\mathfrak{e}},$$

wobei $(\kappa_1, \dots, \kappa_6)^\top$ Lösung des LGS

$$(a(\mathbf{b}_k^{(T)}, \mathbf{b}_\ell^{(T)}))_{k,\ell=1,\dots,6} (\kappa_\ell)_{\ell=1,\dots,6} = (\mathcal{L}(\mathbf{b}_k^{(T)}, 0) - \mathcal{A}(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h; \mathbf{b}_k^{(T)}, 0))_{k=1,\dots,6},$$

ist, und

$$\vartheta^{(e)} := \frac{|\mathcal{A}(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h; 0, \mathbf{curl}_\Gamma \lambda^{(e)})|}{\|\mathbf{curl}_\Gamma \lambda^{(e)}\|_{\mathfrak{e}}},$$

$$\vartheta^{(F)} := \frac{|\mathcal{A}(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h; 0, \mathbf{curl}_\Gamma \lambda^{(F)})|}{\|\mathbf{curl}_\Gamma \lambda^{(F)}\|_{\mathfrak{e}}}.$$

Satz 4.2.2. *Es gelte die Saturationsannahme (4.2.35). Dann gilt mit den obigen Bezeichnungen auf einem Gitter mit hexaedrischen Elementen*

$$\eta \lesssim \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h)\|_{\mathcal{X}} \lesssim \frac{1}{1 - \delta} \eta$$

mit dem Fehlerschätzer

$$\eta^2 := \sum_{i=1}^M (\Theta^{(e_i)})^2 + \sum_{j=1}^N \left((\Theta_1^{(F_j)})^2 + (\Theta_2^{(F_j)})^2 \right) + \sum_{k=1}^L (\Theta^{(T_k)})^2 + \sum_{i=1}^m (\vartheta^{(e_i)})^2 + \sum_{j=1}^n (\vartheta^{(F_j)})^2.$$

4.3. Ein residualer Fehlerschätzer

Als nächstes nehmen wir uns einen residualen Fehlerschätzer für das Eddy-Current-Problem (4.1.32) vor.

Es sei \mathcal{A} die in (4.2.34) definierte Bilinearform zur Beschreibung der Kopplungsformulierung, \mathcal{L} die rechte Seite. Wir übernehmen ebenfalls die Definitionen der Räume \mathcal{X} und \mathcal{X}_h aus dem letzten Abschnitt. Es seien $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathcal{X}$ bzw. $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h) \in \mathcal{X}_h$ die Lösungen der kontinuierlichen bzw. diskreten (Galerkin-) variationellen Formulierungen, und es seien $\mathbf{e} := \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$ und $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h$. Wir entscheiden uns dafür, den Fehler in der Energienorm zu betrachten; definiere dazu

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathfrak{e}}^2 := (\mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{v}, \mathbf{curl} \mathbf{v})_{\Omega_C} + \omega(\sigma \mathbf{v}, \mathbf{v})_{\Omega_C} \sim \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega_C)}^2$$

$$\|\boldsymbol{\zeta}\|_{\mathfrak{e}}^2 := \langle \mathcal{V}_0 \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta} \rangle_\Gamma \sim \|\boldsymbol{\zeta}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2.$$

Mit der Koerzitivität von \mathcal{A} (Satz 4.1.2) gilt die Abschätzung

$$\|\mathbf{e}\|_{\mathfrak{e}}^2 + \|\boldsymbol{\varepsilon}\|_{\mathfrak{e}}^2 \lesssim |\mathcal{A}(\mathbf{e}, \boldsymbol{\varepsilon}; \mathbf{e}, \boldsymbol{\varepsilon})| = |\mathcal{L}(\mathbf{e}, \boldsymbol{\varepsilon}) - \mathcal{A}(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h; \mathbf{e}, \boldsymbol{\varepsilon})|.$$

4. Das Eddy-Current-Problem

Für beliebiges $(\mathbf{e}_h, \boldsymbol{\varepsilon}_h) \in \mathcal{X}_h$ gilt aber die Gleichung

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h; \mathbf{e}_h, \boldsymbol{\varepsilon}_h) = \mathcal{L}(\mathbf{e}_h, \boldsymbol{\varepsilon}_h),$$

so daß wir dies oben einsetzen können und

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}\|_{\mathfrak{E}}^2 + \|\boldsymbol{\varepsilon}\|_{\mathfrak{E}}^2 &\lesssim |\mathcal{L}(\mathbf{e} - \mathbf{e}_h, \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_h) - \mathcal{A}(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h; \mathbf{e} - \mathbf{e}_h, \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_h)| \\ &= \left| -i\omega(\mathbf{J}_0 + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{u}_h, \mathbf{e} - \mathbf{e}_h)_\Omega - (\mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{u}_h, \mathbf{curl}(\mathbf{e} - \mathbf{e}_h))_\Omega \right. \\ &\quad \left. + \langle \mathcal{W}_0 \gamma_t \mathbf{u}_h - \tilde{\mathcal{K}}_0 \boldsymbol{\lambda}_h, \gamma_t \mathbf{e} - \gamma_t \mathbf{e}_h \rangle_\Gamma + \langle (\mathcal{K}_0 - I) \gamma_t \mathbf{u}_h - \mathcal{V}_0 \boldsymbol{\lambda}_h, \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_h \rangle_\Gamma \right| \end{aligned} \quad (4.3.36)$$

erhalten. Im weiteren Vorgehen werden wir zum Teil auf [14] zurückgreifen, das einen lokalen residualen Fehlerschätzer für das einfache (FEM-)Eddy-Current-Problem mit Nullrandbedingung liefert. Nun haben wir es mit einer Kopplungsformulierung zu tun, d.h. wir haben keine Nullrandbedingung, dafür aber zusätzlich einen BEM-Anteil.

Bevor wir mit den Abschätzungen beginnen, treffen wir noch ein paar Vorbereitungen. Um der Realität etwas näher zu kommen, verlangen wir für die Konduktivität und die Permeabilität in Ω_C nicht mehr nur $\sigma, \mu \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, sondern zusätzlich $\mathbf{grad} \sigma \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^3)$ und σ stückweise H^1 in Ω_C , d.h. es gebe eine endliche Partition $\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}$ von Ω_C mit $\sigma \in H^1(\Omega_k)$ für alle $k = 1, \dots, N$. Natürlich gilt weiterhin $\sigma_1 \geq \sigma \geq \sigma_0 > 0$, $\mu_1 \geq \mu \geq \mu_0 > 0$ in Ω_C und $\sigma \equiv 0$, $\mu \equiv 1$ in Ω_E . Dies entspricht der Tatsache, daß Ω_C aus verschiedenen leitenden Materialien bestehen kann, die Konduktivität und die Permeabilität also beim Übergang von einem Material zu einem anderen springen können. Befinden wir uns auf der gemeinsamen Fläche zweier Elemente, so bezeichnen wir mit σ_A bzw. μ_A den Mittelwert der σ bzw. μ .

Wie gehabt stellt \mathcal{T}_h die Menge der Elemente unseres Gitters dar. Wir verlangen von unserem Gitter, daß es die obige Partitionierung von Ω_C berücksichtigt, es sollen also σ, μ elementweise H^1 sein. Wir benötigen zusätzlich \mathcal{F}_h , die Menge der Flächen, $\mathcal{F}_h^\Gamma = \{F \in \mathcal{F}_h : F \subset \Gamma\}$, die Menge der äußeren Flächen, und $\mathcal{F}_h^C = \mathcal{F}_h \setminus \mathcal{F}_h^\Gamma$, die Menge der inneren Flächen. Weiter bezeichnen wir mit h_T den maximalen Durchmesser eines Elements $T \in \mathcal{T}_h$ und mit h_F den maximalen Durchmesser einer Fläche $F \in \mathcal{F}_h$. Die von uns vorausgesetzte Regularität des Gitters bedeutet insbesondere, daß

$$\begin{aligned} h_{T'} &\lesssim h_T \quad \forall T, T' \in \mathcal{T}_h, T \cap T' \neq \emptyset, \\ h_F &\lesssim h_T \quad \forall F \in \mathcal{F}_h(T) \end{aligned}$$

gilt (vgl. Seite 39). Hier ist $\mathcal{F}_h(T)$ die Menge der Flächen des Elements $T \in \mathcal{T}_h$. Ist $F \in \mathcal{F}_h^C$ die gemeinsame Fläche zweier Elemente T_1, T_2 , und ist $\mathbf{n}(\mathbf{x})$, die Normale auf F , so gerichtet, daß sie in T_2 hinein zeigt, so definieren wir den Sprung

$$[\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}]_F := \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}|_{F \subset T_1} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}|_{F \subset T_2}.$$

Ist $F \in \mathcal{F}_h^\Gamma$, so ist einfach

$$[\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}]_F := \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}|_F.$$

Analog definiert man den Sprung

$$\begin{aligned} [\mathbf{n} \times \mathbf{q}]_F &:= \mathbf{n} \times \mathbf{q}|_{F \subset T_1} - \mathbf{n} \times \mathbf{q}|_{F \subset T_2}, & F \in \mathcal{F}_h^C, \\ [\mathbf{n} \times \mathbf{q}]_F &:= \mathbf{n} \times \mathbf{q}|_F, & F \in \mathcal{F}_h^\Gamma. \end{aligned}$$

Um den Fehler \mathbf{e} analysieren zu können, zerlegen wir ihn in einen rotationsfreien und einen schwach solenoidalen Anteil. Dazu könnten wir die $\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega_C)$ -orthogonale Zerlegung $\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega_C) = \mathbf{M}(\Omega_C) \oplus \mathbf{grad} H^1(\Omega_C)$ nach Lemma 2.1.6 verwenden. Diese Zerlegung ist wegen $\sigma_1 \geq \sigma \geq \sigma_0 > 0$ in Ω_C stabil bzgl. der Energienorm, d.h. zerlegen wir $\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega_C)$ in $\mathbf{v}^\perp \in \mathbf{M}$ und $\mathbf{grad} \psi \in \mathbf{grad} H^1(\Omega_C)$, so gilt

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{e}}^2 \sim \|\mathbf{v}^\perp\|_{\mathbf{e}}^2 + \|\mathbf{grad} \psi\|_{\mathbf{e}}^2.$$

Dieses Ergebnis würde uns reichen, doch wollen wir hier mit etwas mehr Aufwand eine bezüglich der Energienorm sogar orthogonale Zerlegung beweisen:

Lemma 4.3.1. *Es sei Ω ein zusammenhängendes, konvexes Lipschitz-Gebiet im \mathbb{R}^3 und σ, μ erfüllen die Voraussetzungen von Seite 108. Dann gilt die zur Energienorm orthogonale Zerlegung*

$$\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega) = \mathbf{M}_\sigma(\Omega) \oplus \mathbf{grad} H^1(\Omega), \quad (4.3.37)$$

d.h. zu jedem $\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$ existieren eindeutige Funktionen $\mathbf{v}_\sigma^\perp \in \mathbf{M}_\sigma(\Omega) := \mathbf{H}_0(\operatorname{div}(\sigma \cdot), 0, \Omega) \cap \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$ und $\psi_\sigma \in H^1(\Omega)/\mathbb{C}$ mit $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\sigma^\perp + \mathbf{grad} \psi_\sigma$, so daß die Abschätzungen

$$\|\mathbf{v}_\sigma^\perp\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \lesssim \|\mathbf{curl} \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \quad \omega \|\sqrt{\sigma} \mathbf{grad} \psi_\sigma\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \lesssim \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{e}} \quad (4.3.38)$$

gelten. Hierbei ist der Operator $\operatorname{div}(\sigma \cdot)$ lokal zu betrachten.

Beweis. Es ist zu beachten, daß σ nur stückweise H^1 und global L^∞ ist. Es sei Ω disjunkt zerlegt in $\Omega = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_N$, wobei $\sigma \in H^1(\Omega_k)$ für alle $k = 1, \dots, N$ sei. Wir betrachten oBdA den Fall $N = 2$. Es sei $S := \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ die Grenzfläche (das Interface) der Partition. Nach Lemma 2.1.6 erhalten wir für $\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$ eine Zerlegung $\mathbf{v} = \mathbf{v}^\perp + \mathbf{grad} \psi$ mit $\mathbf{v}^\perp \in \mathbf{M}(\Omega) = \mathbf{H}_0(\operatorname{div} 0, \Omega) \cap \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$, $\psi \in H^1(\Omega)/\mathbb{C}$, so daß

$$\|\mathbf{v}^\perp\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \lesssim \|\mathbf{curl} \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \quad \|\mathbf{grad} \psi\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \lesssim \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)}. \quad (4.3.39)$$

4. Das Eddy-Current-Problem

Definiere dann $p \in H^1(\Omega)/\mathbb{C}$ durch das folgende Neumann-Transmissionsproblem:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\sigma \mathbf{grad} p) &= -\operatorname{div}(\sigma \mathbf{v}^\perp) && \text{in } \Omega_1, \\ \operatorname{div}(\sigma \mathbf{grad} p) &= -\operatorname{div}(\sigma \mathbf{v}^\perp) && \text{in } \Omega_2, \\ \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, \\ [\sigma \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}] &= -[\sigma \mathbf{v}^\perp \cdot \mathbf{n}] && \text{auf } S, \\ [p] &= 0 && \text{auf } S. \end{aligned} \quad (4.3.40)$$

Definieren wir $f \in L^2(\Omega)$ stückweise durch $f := \operatorname{div}(\sigma \mathbf{v}^\perp)$, so lautet die zu (4.3.40) äquivalente variationelle Formulierung: Finde $p \in H^1(\Omega)/\mathbb{C}$, so daß

$$\int_{\Omega_1} \sigma \mathbf{grad} p \cdot \mathbf{grad} q \, dx + \int_{\Omega_2} \sigma \mathbf{grad} p \cdot \mathbf{grad} q \, dx = \int_{\Omega} f q \, dx - \int_S [\sigma \mathbf{v}^\perp \cdot \mathbf{n}] q \, ds \quad (4.3.41)$$

für alle $q \in H^1(\Omega)/\mathbb{C}$. Diese besitzt nach dem Lax-Milgram-Lemma eine eindeutige Lösung (vgl. [25, §I.4, Example 4.1] und [24, Kapitel II, §3]).

Wir wollen als nächstes zeigen, daß die Funktion $\mathbf{g} := \sigma \mathbf{grad} p$ aus $\mathbf{H}^1(\Omega)$ ist: Gemäß (4.3.40) und den Voraussetzungen an σ gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{g} &= -\operatorname{div}(\sigma \mathbf{v}^\perp) = -\mathbf{grad} \sigma \cdot \mathbf{v}^\perp - \sigma \operatorname{div} \mathbf{v}^\perp \in \mathbf{L}^2(\Omega), \\ \mathbf{curl} \mathbf{g} &= \mathbf{curl}(\sigma \mathbf{grad} p) = \mathbf{grad} \sigma \times \mathbf{grad} p \in \mathbf{L}^2(\Omega), \\ \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} &= \sigma \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = 0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (4.3.42)$$

Daher gilt (vgl. Beweis zu Lemma 2.1.6, 1) $\mathbf{g} \in \mathbf{H}_0(\operatorname{div}, \Omega) \cap \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega) \subset \mathbf{H}^1(\Omega)$ und $\|\mathbf{g}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \lesssim \|\mathbf{curl} \mathbf{g}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\operatorname{div} \mathbf{g}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$. Hieraus folgt dann mit den Umformungen aus (4.3.42) und durch das Abschätzen von σ nach oben und nach unten und $\mathbf{grad} \sigma$ nach oben

$$\|\mathbf{grad} p\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \lesssim \|\mathbf{grad} p\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\mathbf{v}^\perp\|_{\mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega)}.$$

Es ist $\|\mathbf{grad} p\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \lesssim \|\operatorname{div}(\sigma \mathbf{v}^\perp)\|_{H^{-1}(\Omega)} \lesssim \|\mathbf{v}^\perp\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$ nach (4.3.41), so daß wir schließlich

$$\|\mathbf{grad} p\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \lesssim \|\mathbf{v}^\perp\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \quad (4.3.43)$$

erhalten. Diese Ungleichung werden wir gleich noch gebrauchen.

Wir definieren nun die Funktion $\mathbf{v}_\sigma^\perp := \mathbf{v}^\perp + \mathbf{grad} p$. Sie ist Lösung des Transmissionsproblems

$$\begin{aligned} \mathbf{curl} \mathbf{v}_\sigma^\perp &= \mathbf{curl} \mathbf{v}^\perp && \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div}(\sigma \mathbf{v}_\sigma^\perp) &= 0 && \text{in } \Omega_1, \\ \operatorname{div}(\sigma \mathbf{v}_\sigma^\perp) &= 0 && \text{in } \Omega_2, \\ \mathbf{v}_\sigma^\perp \cdot \mathbf{n} &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, \\ [\sigma \mathbf{v}_\sigma^\perp \cdot \mathbf{n}] &= 0 && \text{auf } S, \end{aligned} \quad (4.3.44)$$

insbesondere gilt $\mathbf{v}_\sigma^\perp \in \mathbf{M}_\sigma(\Omega)$. Mit $\psi_\sigma := \psi - p$ ist die Zerlegung $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\sigma^\perp + \mathbf{grad} \psi_\sigma$, also (4.3.37), gezeigt.

Für die erste Abschätzung aus (4.3.38) reicht es nach (4.3.39), $\|\mathbf{v}_\sigma^\perp\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$ durch $\|\mathbf{v}^\perp\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$ abzuschätzen. Dies gilt aber sofort nach der Definition von \mathbf{v}_σ^\perp und (4.3.43). Für die zweite Abschätzung aus (4.3.38) reicht es nach (4.3.39), $\|\mathbf{grad} p\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$ durch $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)}$ abzuschätzen (wieder werden σ und $\mathbf{grad} \sigma$ durch Konstanten abgeschätzt). Es ist aber (siehe oben)

$$\|\mathbf{grad} p\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \lesssim \|\mathbf{v}^\perp\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \lesssim \|\mathbf{v}^\perp\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \lesssim \|\mathbf{curl} \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \lesssim \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)}.$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen. \square

Wir kehren nun zum Anfang des Abschnitts und zur Ungleichung (4.3.36) zurück: Zuerst zerlegen wir den Fehler \mathbf{e} in

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^\perp + \mathbf{e}^0, \quad \mathbf{e}^0 = \mathbf{grad} \psi, \quad \mathbf{e}^\perp \in \mathbf{M}_\sigma(\Omega_C), \quad \psi \in H^1(\Omega_C)/\mathbb{C} \quad (4.3.45)$$

mittels (4.3.37). Als nächstes müssen wir uns die diskreten Funktionen $(\mathbf{e}_h, \boldsymbol{\varepsilon}_h) \in \mathcal{X}_h$ aussuchen. Mit Hilfe der Projektionsoperatoren P_h^1 und \mathfrak{P}_h^1 aus Satz 3.3.3 wählen wir

$$\mathbf{e}_h = \mathfrak{P}_h^1 \mathbf{e}^\perp + \mathbf{grad} P_h^1 \psi \in \mathcal{ND}_1(\mathcal{T}_h)$$

mit \mathbf{e}^\perp, ψ aus (4.3.45).

Betrachten wir nun den Randfehlerterm $\boldsymbol{\varepsilon}$. Da $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_\Gamma 0, \Gamma)$, existiert ein $\phi \in H^{1/2}(\Gamma)$ mit $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{curl}_\Gamma \phi$ (siehe Lemma 2.1.6,2). Wähle dann $\phi_h = p_h^1 \phi$ mit p_h^1 aus Satz 3.3.3 und $\boldsymbol{\varepsilon}_h = \mathbf{curl}_\Gamma \phi_h$.

Hiermit knüpfen wir nun an (4.3.36) an:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}\|_{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 + \|\boldsymbol{\varepsilon}\|_{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 &= \|\mathbf{e}^\perp\|_{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 + \|\mathbf{e}^0\|_{\boldsymbol{\varepsilon}} + \|\boldsymbol{\varepsilon}\|_{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 \\ &\lesssim \left| -i\omega(\mathbf{J}_0 + \sigma \mathbf{u}_h, \mathbf{e}^\perp - \mathfrak{P}_h^1 \mathbf{e}^\perp)_{\Omega_C} - (\mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{u}_h, \mathbf{curl}(\mathbf{e}^\perp - \mathfrak{P}_h^1 \mathbf{e}^\perp))_{\Omega_C} \right. \\ &\quad \left. + \langle \mathcal{W}_0 \gamma_t \mathbf{u}_h - \tilde{\mathcal{K}}_0 \boldsymbol{\lambda}_h, \gamma_t \mathbf{e}^\perp - \gamma_t \mathfrak{P}_h^1 \mathbf{e}^\perp \rangle_\Gamma \right| \\ &\quad + \left| -i\omega(\mathbf{J}_0 + \sigma \mathbf{u}_h, \mathbf{grad} \psi - \mathbf{grad} P_h^1 \psi)_{\Omega_C} \right. \\ &\quad \left. + \langle \mathcal{W}_0 \gamma_t \mathbf{u}_h - \tilde{\mathcal{K}}_0 \boldsymbol{\lambda}_h, \mathbf{grad}_\Gamma \psi - \mathbf{grad}_\Gamma P_h^1 \psi \rangle_\Gamma \right| \\ &\quad + \left| \langle (\mathcal{K}_0 - I) \gamma_t \mathbf{u}_h - \mathcal{V}_0 \boldsymbol{\lambda}_h, \mathbf{curl}_\Gamma \phi - \mathbf{curl}_\Gamma p_h^1 \phi \rangle_\Gamma \right|. \end{aligned} \quad (4.3.46)$$

Der nächste Schritt besteht darin, die Differentialoperatoren auf den rechten Seiten der Dualitätspaarungen mittels partieller Integration zu beseitigen. Dazu schauen wir uns die Terme nacheinander genau an:

4. Das Eddy-Current-Problem

Auf den Ausdruck $(\mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{u}_h, \mathbf{curl}(\mathbf{e}^\perp - \mathfrak{P}_h^1 \mathbf{e}^\perp))_{\Omega_C}$ möchten wir die Greensche Formel (2.1.1) zur Anwendung bringen. Da aber \mathbf{u}_h nur elementweise aus $\mathbf{H}(\mathbf{curl} \mathbf{curl})$ ist, dürfen wir (2.1.1) nur elementweise anwenden und erhalten (eckige Klammern bezeichnen Sprünge über Flächen, siehe Seite 108):

$$\begin{aligned}
(\mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{u}_h, \mathbf{curl}(\mathbf{e}^\perp - \mathfrak{P}_h^1 \mathbf{e}^\perp))_{\Omega_C} &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{u}_h, \mathbf{curl}(\mathbf{e}^\perp - \mathfrak{P}_h^1 \mathbf{e}^\perp))_T \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} ((\mathbf{curl}(\mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{u}_h), \mathbf{e}^\perp - \mathfrak{P}_h^1 \mathbf{e}^\perp)_T + \langle \mu^{-1} \gamma_N \mathbf{u}_h, \gamma_t \mathbf{e}^\perp - \gamma_t \mathfrak{P}_h^1 \mathbf{e}^\perp \rangle_{\partial T}) \\
&= (\mathbf{curl}(\mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{u}_h), \mathbf{e}^\perp - \mathfrak{P}_h^1 \mathbf{e}^\perp)_{\Omega_C} + \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \langle [\mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{u}_h \times \mathbf{n}]_F, \gamma_t \mathbf{e}^\perp - \gamma_t \mathfrak{P}_h^1 \mathbf{e}^\perp \rangle_F.
\end{aligned} \tag{4.3.47}$$

Hierbei haben wir ausgenutzt, daß die Ausdrücke $\mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{u}_h \times \mathbf{n}$ und $\gamma_t \mathbf{e}^\perp - \gamma_t \mathfrak{P}_h^1 \mathbf{e}^\perp$ in $\mathbf{L}^2(\partial T)$ liegen (da $\mathbf{u}_h|_T$ ein Polynom und $\mathbf{e}^\perp, \mathfrak{P}_h^1 \mathbf{e}^\perp \in \mathbf{H}^1(T)$), so daß wir die $\mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \partial T) - \mathbf{TH}_{\perp}^{-1/2}(\text{curl}_\Gamma, \partial T)$ -Dualität $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial T}$ als $\mathbf{L}^2(\partial T)$ -Dualität auffassen und flächenweise betrachten können. Außerdem dürfen wir wegen der Regularität von \mathbf{u}_h den Ausdruck $\gamma_N \mathbf{u}_h$ als $\mathbf{curl} \mathbf{u}_h \times \mathbf{n}$ schreiben.

Wir gehen in gleicher Weise mit dem Term $(\mathbf{J}_0 + \sigma \mathbf{u}_h, \mathbf{grad} \psi - \mathbf{grad} P_h^1 \psi)_{\Omega_C}$ um. Diesmal verwenden wir die Greensche Formel (2.1.2) und müssen dabei beachten, daß \mathbf{u}_h nur elementweise aus $\mathbf{H}(\text{div})$ ist. Man erhält

$$\begin{aligned}
(\mathbf{J}_0 + \sigma \mathbf{u}_h, \mathbf{grad} \psi - \mathbf{grad} P_h^1 \psi)_{\Omega_C} \\
= -(\text{div} \mathbf{J}_0 + \text{div} \sigma \mathbf{u}_h, \psi - P_h^1 \psi)_{\Omega_C} + \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \langle [\sigma \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}]_F, \psi - P_h^1 \psi \rangle_F.
\end{aligned} \tag{4.3.48}$$

Auch hier haben wir wegen der Regularität von \mathbf{u}_h die $H^{-1/2}(\partial T) - H^{1/2}(\partial T)$ -Dualität als $\mathbf{L}^2(\partial T)$ -Dualität auffassen und somit elementweise betrachten können und außerdem den Ausdruck $\gamma_n \mathbf{u}_h$ als $\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}$ geschrieben. Es tauchen keine Sprünge von $\mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{n}$ über Γ auf nach den Voraussetzungen an \mathbf{J}_0 auf Seite 96.

Als nächsten Term in (4.3.46) betrachten wir $\langle \mathcal{W}_0 \gamma_t \mathbf{u}_h - \tilde{\mathcal{K}}_0 \boldsymbol{\lambda}_h, \mathbf{grad}_\Gamma \psi - \mathbf{grad}_\Gamma P_h^1 \psi \rangle_\Gamma$, der eine $\mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) - \mathbf{TH}_{\perp}^{-1/2}(\text{curl}_\Gamma, \Gamma)$ -Dualitätspaarung darstellt (die linke Seite ist nach Lemma 2.2.5 aus $\mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$, die rechte Seite ist als Tangentialspur einer $\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega_C)$ -Funktion aus $\mathbf{TH}_{\perp}^{-1/2}(\text{curl}_\Gamma, \Gamma)$). Nach (2.1.5) gilt für Funktionen $\Phi \in \mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ und $\Psi \in \mathbf{TH}_{\perp}^{-1/2}(\text{curl}_\Gamma, \Gamma)$:

$$\begin{aligned}
\langle \Phi, \Psi \rangle_\Gamma &= -\langle \varphi_1, \Delta_\Gamma \psi_2 \rangle_\Gamma - \langle \Delta_\Gamma \varphi_2, \psi_1 \rangle_\Gamma \\
&= \langle \varphi_1, \text{curl}_\Gamma \Psi \rangle_\Gamma - \langle \text{div}_\Gamma \Phi, \psi_1 \rangle_\Gamma
\end{aligned} \tag{4.3.49}$$

mit $\Phi = \mathbf{curl}_\Gamma \varphi_1 + \mathbf{grad}_\Gamma \varphi_2$ und $\Psi = \mathbf{grad}_\Gamma \psi_1 + \mathbf{curl}_\Gamma \psi_2$. Dies angewendet ergibt

$$\langle \mathcal{W}_0 \gamma_t \mathbf{u}_h - \tilde{\mathcal{K}}_0 \boldsymbol{\lambda}_h, \mathbf{grad}_\Gamma \psi - \mathbf{grad}_\Gamma P_h^1 \psi \rangle_\Gamma = -\langle \text{div}_\Gamma \mathcal{W}_0 \gamma_t \mathbf{u}_h - \text{div}_\Gamma \tilde{\mathcal{K}}_0 \boldsymbol{\lambda}_h, \psi - P_h^1 \psi \rangle_\Gamma. \tag{4.3.50}$$

Nun kommt uns das folgende Lemma zur Hilfe:

Lemma 4.3.2. Für $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega_E)$, $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_{\Gamma} 0, \Gamma)$ gelten

1. $\text{div}_{\Gamma} \tilde{\mathcal{K}}_0 \boldsymbol{\lambda} = 0$ in $H^{-1/2}(\Gamma)$,
2. $\text{div}_{\Gamma} \mathcal{W}_0 \gamma_t \mathbf{u} = 0$ in $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Beweis. Für $\eta \in H^{1/2}(\Gamma)$ gilt mit den Definitionen von div_{Γ} , $\tilde{\mathcal{K}}$ und γ_N

$$\begin{aligned} \langle \text{div}_{\Gamma} \tilde{\mathcal{K}}_0 \boldsymbol{\lambda}, \eta \rangle_{\Gamma} &= -\langle \tilde{\mathcal{K}}_0 \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{grad}_{\Gamma} \eta \rangle_{\Gamma} = -\langle \gamma_N^+ \mathbf{V}_0 \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{grad}_{\Gamma} \eta \rangle_{\Gamma} \\ &= \int_{\Omega_E} \mathbf{curl} \mathbf{V}_0 \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{curl} \mathbf{grad} \eta - \mathbf{curl} \mathbf{curl} \mathbf{V}_0 \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{grad} \eta \, dx. \end{aligned}$$

Nun ist $\mathbf{curl} \mathbf{grad} \eta = 0$, außerdem ist $\mathbf{curl} \mathbf{curl} \mathbf{V}_0 \boldsymbol{\lambda} = (\mathbf{grad} \text{div} - \Delta) \mathbf{V}_0 \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{grad} \text{div} \mathbf{V}_0 \boldsymbol{\lambda}$, da $\Delta \mathbf{V}_0 = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$. Nach Lemma 2.2.3 gilt $\mathbf{grad} \text{div} \mathbf{V}_0 \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{grad} \mathbf{V}_0(\text{div}_{\Gamma} \boldsymbol{\lambda}) = 0$ wegen $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_{\Gamma} 0, \Gamma)$. Damit ist auch $\mathbf{curl} \mathbf{curl} \mathbf{V}_0 \boldsymbol{\lambda} = 0$, also insgesamt $\langle \text{div}_{\Gamma} \tilde{\mathcal{K}}_0 \boldsymbol{\lambda}, \eta \rangle_{\Gamma} = 0$, womit die erste Aussage bewiesen wäre. Der Beweis der zweiten Behauptung vollzieht sich nach demselben Schema:

$$\begin{aligned} \langle \text{div}_{\Gamma} \mathcal{W}_0 \gamma_t \mathbf{u}, \mu \rangle_{\Gamma} &= -\langle \mathcal{W}_0 \gamma_t \mathbf{u}, \mathbf{grad}_{\Gamma} \mu \rangle_{\Gamma} = -\langle \gamma_N \mathbf{curl} \mathbf{V}_0(\mathbf{n} \times \mathbf{u}), \mathbf{grad}_{\Gamma} \mu \rangle_{\Gamma} \\ &= \int_{\Omega_E} \mathbf{curl} \mathbf{curl} \mathbf{V}_0(\mathbf{n} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{curl} \mathbf{grad} \mu - \mathbf{curl} \mathbf{curl} \mathbf{curl} \mathbf{V}_0(\mathbf{n} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{grad} \mu \, dx. \end{aligned}$$

Wieder ist $\mathbf{curl} \mathbf{grad} \mu = 0$, außerdem ist $\mathbf{curl} \mathbf{curl} \mathbf{curl} \mathbf{V}_0 = -\mathbf{curl} \Delta \mathbf{V}_0 = 0$, wieder wegen $\Delta \mathbf{V}_0 = 0$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$. Also folgt $\langle \text{div}_{\Gamma} \mathcal{W}_0 \gamma_t \mathbf{u}, \mu \rangle_{\Gamma} = 0$. \square

Somit folgt aus (4.3.50)

$$\langle \mathcal{W}_0 \gamma_t \mathbf{u}_h - \tilde{\mathcal{K}}_0 \boldsymbol{\lambda}_h, \mathbf{grad}_{\Gamma} \psi - \mathbf{grad}_{\Gamma} P_h^1 \psi \rangle_{\Gamma} = 0. \quad (4.3.51)$$

Als letzten partiell zu integrierenden Term aus (4.3.46) haben wir $\langle (\mathcal{K}_0 - I) \gamma_t \mathbf{u}_h - \mathcal{V}_0 \boldsymbol{\lambda}_h, \mathbf{curl}_{\Gamma} \phi - \mathbf{curl}_{\Gamma} p_h^1 \phi \rangle_{\Gamma}$ als Dualitätspaarung zwischen $\mathbf{TH}_{\perp}^{-1/2}(\text{curl}_{\Gamma}, \Gamma)$ und $\mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ (die linke Seite ist nach Lemma 2.2.5 aus $\mathbf{TH}_{\perp}^{-1/2}(\text{curl}_{\Gamma}, \Gamma)$, die rechte Seite ist als vektorieller Flächencurl einer $H^{1/2}(\Gamma)$ -Funktion aus $\mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$, siehe Lemma 2.1.6, 2). Mit (4.3.49) erhalten wir

$$\langle (\mathcal{K}_0 - I) \gamma_t \mathbf{u}_h - \mathcal{V}_0 \boldsymbol{\lambda}_h, \mathbf{curl}_{\Gamma} \phi - \mathbf{curl}_{\Gamma} p_h^1 \phi \rangle_{\Gamma} = \langle \text{curl}_{\Gamma} (\mathcal{K}_0 - I) \gamma_t \mathbf{u}_h - \text{curl}_{\Gamma} \mathcal{V}_0 \boldsymbol{\lambda}_h, \phi - p_h^1 \phi \rangle_{\Gamma}. \quad (4.3.52)$$

4. Das Eddy-Current-Problem

Mit den Gleichungen (4.3.47), (4.3.48), (4.3.51) und (4.3.52) können wir also die Abschätzung (4.3.46) weiter umformen und erhalten

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{e}\|_{\mathfrak{E}}^2 + \|\boldsymbol{\varepsilon}\|_{\mathfrak{E}}^2 &\lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |(-i\omega \mathbf{J}_0 - i\omega \sigma \mathbf{u}_h - \mathbf{curl}(\mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{u}_h), \mathbf{e}^\perp - \mathfrak{P}_h^1 \mathbf{e}^\perp)_T| \\
&+ \sum_{F \in \mathcal{F}_h^C} | \langle [\mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{u}_h \times \mathbf{n}]_F, \gamma_t \mathbf{e}^\perp - \gamma_t \mathfrak{P}_h^1 \mathbf{e}^\perp \rangle_F | \\
&+ \sum_{F \in \mathcal{F}_h^\Gamma} | \langle \mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{u}_h \times \mathbf{n} - \mathcal{W}_0 \gamma_t \mathbf{u}_h + \tilde{\mathcal{K}}_0 \boldsymbol{\lambda}_h, \gamma_t \mathbf{e}^\perp - \gamma_t \mathfrak{P}_h^1 \mathbf{e}^\perp \rangle_F | \\
&+ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} | \omega \operatorname{div} \mathbf{J}_0 + \omega \operatorname{div} \sigma \mathbf{u}_h, \psi - P_h^1 \psi \rangle_T | \\
&+ \sum_{F \in \mathcal{F}_h^C} | \omega \langle [\sigma \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}]_F, \psi - P_h^1 \psi \rangle_F | + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^\Gamma} | \omega \langle \sigma \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}, \psi - P_h^1 \psi \rangle_F | \\
&+ \sum_{F \in \mathcal{F}_h^\Gamma} | \langle \operatorname{curl}_\Gamma \gamma_t \mathbf{u}_h - \operatorname{curl}_\Gamma \mathcal{K}_0(\gamma_t \mathbf{u}_h) + \operatorname{curl}_\Gamma \mathcal{V}_0 \boldsymbol{\lambda}_h, \phi - p_h^1 \phi \rangle_F |.
\end{aligned} \tag{4.3.53}$$

Wir fahren fort, indem wir die restlichen Skalarprodukte mittels Cauchy-Schwarz-Ungleichungen abschätzen. Dabei wollen wir L^2 -Normen verwenden, da wir schließlich an einem berechenbaren Fehlerschätzer interessiert sind. Dazu müssen wir zeigen, daß die Randintegralterme in $L^2(\Gamma)$ sind.

Lemma 4.3.3. *Die Abbildungen*

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_0 &: \mathcal{TN}\mathcal{D}_0(\mathcal{K}_h) \rightarrow \mathbf{TL}^2(\Gamma), \\
\operatorname{curl}_\Gamma \mathcal{K}_0 &: \mathcal{TN}\mathcal{D}_0(\mathcal{K}_h) \rightarrow L^2(\Gamma), \\
\tilde{\mathcal{K}}_0 &: \mathbf{TL}^2(\Gamma) \rightarrow \mathbf{TL}^2(\Gamma), \\
\operatorname{curl}_\Gamma \mathcal{V}_0 &: \mathbf{TL}^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma)
\end{aligned}$$

sind stetig.

Beweis. Es sei $\mathbf{u} \in \mathbf{TH}_\perp^{-1/2}(\operatorname{curl}_\Gamma, \Gamma)$. Für $\mathbf{x} \notin \Gamma$ gilt nach Definition von \mathbf{K}_0 , mit $\mathbf{curl} \mathbf{curl} \equiv \mathbf{grad} \operatorname{div} - \Delta$ und mit Lemma 2.2.3

$$\begin{aligned}
\mathbf{curl} \mathbf{K}_0(\mathbf{u}) &= \mathbf{curl} \mathbf{curl} \mathbf{V}_0(\mathbf{n} \times \mathbf{u}) \\
&= \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{V}_0(\mathbf{n} \times \mathbf{u}) \\
&= \mathbf{grad} V_0(\operatorname{div}_\Gamma(\mathbf{n} \times \mathbf{u})) = -\mathbf{grad} V_0(\operatorname{curl}_\Gamma \mathbf{u})
\end{aligned}$$

in $\mathbf{H}^{-1}(\Omega_E)$. Da die Terme $\mathbf{curl} \mathbf{K}_0(\mathbf{u})$ und $\mathbf{grad} V_0(\operatorname{curl}_\Gamma \mathbf{u})$ in $\mathbf{L}^2(\Omega_E)$ sind, gilt per Dichtigkeit die Gleichung

$$\mathbf{curl} \mathbf{K}_0(\mathbf{u}) = -\mathbf{grad} V_0(\operatorname{curl}_\Gamma \mathbf{u}) \quad \text{in } \mathbf{L}^2(\Omega_E). \tag{4.3.54}$$

Also haben wir

$$\mathcal{W}_0 \mathbf{u} = \gamma_N \mathbf{K}_0 \mathbf{u} = \gamma_t^\times \mathbf{curl} \mathbf{K}_0 \mathbf{u} = -\gamma_t^\times \mathbf{grad}_\Gamma V_0(\mathbf{curl}_\Gamma \mathbf{u}).$$

Sei nun $\mathbf{u}_h \in \mathcal{TN}\mathcal{D}_0(\mathcal{K}_h)$. Dann gilt $\mathbf{curl}_\Gamma \mathbf{u}_h \in \mathcal{P}_0(\Gamma) \subset L^2(\Gamma)$. Da nun der Operator $\mathbf{grad}_\Gamma V_0$ von $L^2(\Gamma)$ nach $\mathbf{TL}^2(\Gamma)$ abbildet [76], ist

$$\mathcal{W}_0 \mathbf{u}_h = \mathbf{n} \times \mathbf{grad}_\Gamma V_0(\mathbf{curl}_\Gamma \mathbf{u}_h) \in \mathbf{TL}^2(\Gamma)$$

und die erste Behauptung damit bewiesen. Genauso gilt mit (4.3.54) für den zweiten Term:

$$\mathbf{curl}_\Gamma \mathcal{K}_0 \mathbf{u} = \gamma_n \mathbf{curl} \mathbf{K}_0 \mathbf{u} = -\gamma_n \mathbf{grad} V_0(\mathbf{curl}_\Gamma \mathbf{u}). \quad (4.3.55)$$

Nun ist $\gamma_n \mathbf{grad} V_0$ gerade das adjungierte Doppelschichtpotential (vgl. Lemma 2.2.9, 2) für das Laplace-Problem, das ebenfalls von $L^2(\Gamma)$ nach $L^2(\Gamma)$ abbildet [93], so daß $\mathbf{curl}_\Gamma \mathcal{K}_0 \mathbf{u}_h \in L^2(\Gamma)$ für $\mathbf{u}_h \in \mathcal{TN}\mathcal{D}_0(\mathcal{K}_h)$ ist. Damit ist die zweite Behauptung bewiesen. Die letzten zwei Behauptungen findet man wieder bei Mitrea et al [76, Seite 16 und Theorem 5.1]. \square

Somit folgt mit Cauchy-Schwarz und den Approximationseigenschaften aus Satz 3.3.3:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}\|_{\mathfrak{E}}^2 + \|\boldsymbol{\varepsilon}\|_{\mathfrak{E}}^2 &\lesssim \left\{ \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|\sqrt{\mu} (i\omega \mathbf{J}_0 + i\omega \sigma \mathbf{u}_h + \mathbf{curl}(\mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{u}_h))\|_{0,T}^2 \right)^{1/2} \right. \\ &\quad + \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^C} h_F \|\sqrt{\mu_A} [\mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{u}_h \times \mathbf{n}]_F\|_{0,F}^2 \right)^{1/2} \\ &\quad + \left. \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^\Gamma} h_F \|\sqrt{\mu}^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{u}_h \times \mathbf{n} - \sqrt{\mu} \mathcal{W}_0 \gamma_t \mathbf{u}_h + \sqrt{\mu} \tilde{\mathcal{K}}_0 \boldsymbol{\lambda}_h\|_{0,F}^2 \right)^{1/2} \right\} \left| \frac{1}{\sqrt{\mu}} \mathbf{e}^\perp \right|_{\mathbf{H}^1(\Omega_C)} \\ &\quad + \left\{ \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \omega \|\sqrt{\sigma}^{-1} (\operatorname{div} \mathbf{J}_0 + \operatorname{div} \sigma \mathbf{u}_h)\|_{0,T}^2 \right)^{1/2} \right. \\ &\quad + \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^C} h_F \omega \|\sqrt{\sigma_A}^{-1} [\sigma \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}]_F\|_{0,F}^2 \right)^{1/2} \\ &\quad + \left. \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^\Gamma} h_F \omega \|\sqrt{\sigma} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}\|_{0,F}^2 \right)^{1/2} \right\} \sqrt{\omega} \|\sqrt{\sigma} \mathbf{grad} \psi\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_C)} \\ &\quad + \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^\Gamma} h_F \|\mathbf{curl}_\Gamma \gamma_t \mathbf{u}_h - \mathbf{curl}_\Gamma \mathcal{K}_0(\gamma_t \mathbf{u}_h) + \mathbf{curl}_\Gamma \mathcal{V}_0 \boldsymbol{\lambda}_h\|_{0,F}^2 \right)^{1/2} \|\mathbf{curl}_\Gamma \phi\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}. \end{aligned} \quad (4.3.56)$$

Mit σ, μ auf Γ ist stets das innere σ, μ , also die Spur von Ω_C kommend, gemeint. Es ist $\sqrt{\omega} \|\sqrt{\sigma} \mathbf{grad} \psi\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_C)} = \|\mathbf{e}^0\|_{\mathfrak{E}}$ und $\|\mathbf{curl}_\Gamma \phi\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} \sim \|\boldsymbol{\varepsilon}\|_{\mathfrak{E}}$, außerdem können wir

4. Das Eddy-Current-Problem

mit Lemma 4.3.1 den Term $|\frac{1}{\sqrt{\mu}}\mathbf{e}^\perp|_{\mathbf{H}^1(\Omega_C)}$ durch $\|\mathbf{e}\|_{\boldsymbol{\epsilon}}$ abschätzen, so daß wir letztendlich folgenden Satz bewiesen haben:

Satz 4.3.4. *Es gilt*

$$\|(\mathbf{e}, \boldsymbol{\epsilon})\|_{\mathcal{X}} \lesssim \left((\eta_0^T)^2 + (\eta_1^T)^2 + (\eta_0^{F,C})^2 + (\eta_1^{F,C})^2 + (\eta_0^{F,\Gamma})^2 + (\eta_1^{F,\Gamma})^2 + (\eta_2^{F,\Gamma})^2 \right)^{1/2}$$

mit

$$\begin{aligned} \eta_j^T &:= \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\eta_j^T)^2 \right)^{1/2} \quad (j = 0, 1), & \eta_j^{F,C} &:= \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^C} (\eta_j^{F,C})^2 \right)^{1/2} \quad (j = 0, 1), \\ \eta_j^{F,\Gamma} &:= \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^\Gamma} (\eta_j^{F,\Gamma})^2 \right)^{1/2} \quad (j = 0, 1, 2) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \eta_0^T &:= h_T \sqrt{\omega} \|\sqrt{\sigma}^{-1} (\operatorname{div} \mathbf{J}_0 + \operatorname{div} \sigma \mathbf{u}_h)\|_{0,T}, \\ \eta_1^T &:= h_T \|i\sqrt{\mu} \omega \mathbf{J}_0 + i\sqrt{\mu} \omega \sigma \mathbf{u}_h + \sqrt{\mu} \operatorname{curl}(\mu^{-1} \operatorname{curl} \mathbf{u}_h)\|_{0,T}, \\ \eta_0^{F,C} &:= \sqrt{h_F \omega} \|\sqrt{\sigma_A}^{-1} [\sigma \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}]_F\|_{0,F}, \\ \eta_1^{F,C} &:= \sqrt{h_F} \|\sqrt{\mu_A} [\mu^{-1} \operatorname{curl} \mathbf{u}_h \times \mathbf{n}]_F\|_{0,F}, \\ \eta_0^{F,\Gamma} &:= \sqrt{h_F \omega} \|\sqrt{\sigma} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}\|_{0,F}, \\ \eta_1^{F,\Gamma} &:= \sqrt{h_F} \|\sqrt{\mu}^{-1} \operatorname{curl} \mathbf{u}_h \times \mathbf{n} - \sqrt{\mu} \mathcal{W}_0 \mathbf{u}_h + \sqrt{\mu} \tilde{\mathcal{K}}_0 \boldsymbol{\lambda}_h\|_{0,F}, \\ \eta_2^{F,\Gamma} &:= \sqrt{h_F} \|\operatorname{curl}_\Gamma \mathbf{u}_h - \operatorname{curl}_\Gamma \mathcal{K}_0 \mathbf{u}_h + \operatorname{curl}_\Gamma \mathcal{V}_0 \boldsymbol{\lambda}_h\|_{0,F}. \end{aligned}$$

Bemerkung 5. Wir wollen ein paar Vereinfachungen betrachten:

Verwenden wir Nédélec-Elemente niedrigster Ordnung, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \eta_0^T &= h_T \sqrt{\omega} \|\sqrt{\sigma}^{-1} (\operatorname{div} \mathbf{J}_0 + \operatorname{grad} \sigma \cdot \mathbf{u}_h)\|_{0,T}, \\ \eta_1^T &= h_T \|i\sqrt{\mu} \omega \mathbf{J}_0 + i\sqrt{\mu} \omega \sigma \mathbf{u}_h - \sqrt{\mu}^{-3} \operatorname{grad} \mu \times \operatorname{curl} \mathbf{u}_h\|_{0,T}, \end{aligned}$$

da dann $\operatorname{div} \mathbf{u}_h = 0$ und $\operatorname{curl} \mathbf{u}_h$ elementweise konstant, also $\operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathbf{u}_h = 0$ gilt (es sind $\operatorname{div}(\sigma \mathbf{u}_h) = \operatorname{grad} \sigma \cdot \mathbf{u}_h + \sigma \operatorname{div} \mathbf{u}_h$, $\operatorname{curl}(\mu^{-1} \operatorname{curl} \mathbf{u}_h) = \mu^{-1} \operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathbf{u}_h + \operatorname{grad}(\mu^{-1}) \times \operatorname{curl} \mathbf{u}_h$ und $\operatorname{grad}(\mu^{-1}) = -\mu^{-2} \operatorname{grad} \mu$.)

Sind σ, μ stetig über eine Fläche F , so können wir zwei der Fehlerindikatoren etwas einfacher formulieren:

$$\begin{aligned} \eta_0^{F,C} &= \sqrt{\omega h_F} \|\sqrt{\sigma} [\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}]_F\|_{0,F}, \\ \eta_1^{F,C} &= \sqrt{h_F} \|\sqrt{\mu}^{-1} [\operatorname{curl} \mathbf{u}_h \times \mathbf{n}]_F\|_{0,F}. \end{aligned}$$

Etwas interessanter ist ein anderer Fall: Sind σ, μ konstant auf einem Element T (oder auf jeweils zwei Elementen mit gemeinsamer Fläche F), so vereinfachen sich die Fehlerindikatoren folgendermaßen:

$$\begin{aligned}\eta_0^T &= h_T \sqrt{\omega \sigma^{-1}} \|\operatorname{div} \mathbf{J}_0 + \sigma \operatorname{div} \mathbf{u}_h\|_{0,T}, \\ \eta_1^T &= h_T \sqrt{\mu} \|i\omega \mathbf{J}_0 + i\omega \sigma \mathbf{u}_h + \mu^{-1} \operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathbf{u}_h\|_{0,T}, \\ \eta_0^{F,C} &= \sqrt{h_F \omega \sigma_A^{-1}} \|[\sigma \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}]_F\|_{0,F}, \\ \eta_1^{F,C} &= \sqrt{h_F \mu_A} \|[\mu^{-1} \operatorname{curl} \mathbf{u}_h \times \mathbf{n}]_F\|_{0,F}, \\ \eta_0^{F,\Gamma} &= \sqrt{h_F \omega \sigma^{-1}} \|\sigma \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}\|_{0,F}, \\ \eta_1^{F,\Gamma} &= \sqrt{h_F \mu} \|\mu^{-1} \operatorname{curl} \mathbf{u}_h \times \mathbf{n} - \mathcal{W}_0 \mathbf{u}_h + \tilde{\mathcal{K}}_0 \boldsymbol{\lambda}_h\|_{0,F}, \\ \eta_2^{F,\Gamma} &= \sqrt{h_F} \|\operatorname{curl}_\Gamma \mathbf{u}_h - \operatorname{curl}_\Gamma \mathcal{K}_0 \mathbf{u}_h + \operatorname{curl}_\Gamma \mathcal{V}_0 \boldsymbol{\lambda}_h\|_{0,F}.\end{aligned}$$

Verwenden wir Nédélec-Elemente niedrigster Ordnung, so ergibt sich sogar (siehe oben)

$$\begin{aligned}\eta_0^T &= h_T \sqrt{\omega \sigma^{-1}} \|\operatorname{div} \mathbf{J}_0\|_{0,T}, \\ \eta_1^T &= h_T \omega \sqrt{\mu} \|\mathbf{J}_0 + \sigma \mathbf{u}_h\|_{0,T}.\end{aligned}$$

Bemerkung 6. Die Potentiale, die in $\eta_1^{F,\Gamma}$ und $\eta_2^{F,\Gamma}$ vorkommen, können wir mit den in (2.2.27) aufgestellten Identitäten für $\mathbf{L}^2(\Gamma)$ -Dichten berechnen: Für $\mathcal{W}_0 \mathbf{u}$ erhalten wir mit (2.2.27), (2.2.24) und $k = 0$ die Darstellung

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_0 \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) &= -\mathbf{n}(\mathbf{x}) \times \operatorname{grad}_\Gamma V_0(\underbrace{\operatorname{div}_\Gamma(\mathbf{n} \times \mathbf{u}_h)}_{=-\operatorname{curl}_\Gamma \mathbf{u}_h})(\mathbf{x}) \\ &= \int_\Gamma (\mathbf{n}(\mathbf{x}) \times \operatorname{grad}_\mathbf{x} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \operatorname{curl}_\Gamma \mathbf{u}_h(\mathbf{y}) dS_\mathbf{y},\end{aligned}\tag{4.3.57}$$

während wir $\tilde{\mathcal{K}}_0$ nach (2.2.27) und (2.2.25) als

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{K}}_0 \boldsymbol{\lambda}_h(\mathbf{x}) &= -\mathbf{n}(\mathbf{x}) \times \operatorname{curl}_\mathbf{x} \int_\Gamma \Phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\boldsymbol{\lambda}_h(\mathbf{y})) dS_\mathbf{y} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\lambda}_h(\mathbf{x}) \\ &= \int_\Gamma \frac{\partial \Phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} \boldsymbol{\lambda}_h(\mathbf{y}) dS_\mathbf{y} - \int_\Gamma \operatorname{grad}_\mathbf{x} \Phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\boldsymbol{\lambda}_h(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})) dS_\mathbf{y} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\lambda}_h(\mathbf{x})\end{aligned}\tag{4.3.58}$$

schreiben können. Aus (4.3.55) und mit Lemma 2.2.9, 2 folgt

$$\begin{aligned}\operatorname{curl}_\Gamma \mathcal{K}_0 \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) &= -\gamma_n \operatorname{grad} V_0(\operatorname{curl}_\Gamma \mathbf{u}_h)(\mathbf{x}) \\ &= - \int_\Gamma \frac{\partial \Phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} \operatorname{curl}_\Gamma \mathbf{u}_h(\mathbf{y}) dS_\mathbf{y} + \frac{1}{2} \operatorname{curl}_\Gamma \mathbf{u}_h(\mathbf{x}),\end{aligned}\tag{4.3.59}$$

und mit Lemma 2.2.9, 3 und (2.2.26) erhalten wir schließlich

$$\operatorname{curl}_\Gamma \mathcal{V}_0 \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \gamma_n \cdot \operatorname{curl} \mathbf{V}_0 \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \int_\Gamma (\mathbf{n}(\mathbf{x}) \times \operatorname{grad}_\mathbf{x} \Phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \cdot \mathbf{u}_h(\mathbf{y}) dS_\mathbf{y}.\tag{4.3.60}$$

Damit sind sämtliche Terme in Integrale mit Kern Φ_0 oder $\operatorname{grad} \Phi_0$ umgewandelt worden.

4. *Das Eddy-Current-Problem*

5. Das Streuproblem

5.1. Problemstellung

Nehmen wir an, ein einfallendes Feld $(\mathcal{E}^{in}, \mathcal{H}^{in})$ treffe auf ein Hindernis Ω_C und werde von diesem gestreut. Das einfallende Feld stelle dabei eine Lösung der Maxwell-Gleichungen (2.2.6), (2.2.7) im \mathbb{R}^3 dar. Das gestreute, abklingende Feld bezeichnen wir mit $(\mathcal{E}^{sc}, \mathcal{H}^{sc})$. Die Aufgabe lautet nun, das resultierende Feld $\mathcal{E} = \mathcal{E}^{in} + \mathcal{E}^{sc}$, $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{in} + \mathcal{H}^{sc}$, welches die Maxwell-Gleichungen (2.2.6), (2.2.7) in Ω_E erfüllt, zu bestimmen. Wie bisher beschränken wir uns auch jetzt auf den zeitharmonischen Fall und betrachten daher wieder die Fourier-Transformierten $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{in} + \mathbf{E}^{sc}$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}^{in} + \mathbf{H}^{sc}$ zur Frequenz ω .

Die Streuung am Hindernis können wir unter gewissen Voraussetzungen durch Randbedingungen an $\Gamma_C := \partial\Omega_C$ näherungsweise beschreiben. Ist Ω_C von hoher Konduktivität, so können wir die *Leontovich-Randbedingung* [4, 5, 7]

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} + \sqrt{\mu_C}(1 - i)\delta \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) = \mathcal{O}(\delta^2) \quad \text{auf } \Gamma$$

annehmen, wobei $\delta = \sqrt{\frac{\omega}{\sigma_C}}$ ist und μ_C bzw. σ_C die Permeabilität bzw. die Konduktivität innerhalb von Ω_C darstellen. Ist σ_C sehr groß, so können wir sogar zur *perfect-conductor-* bzw. *perfekter-Leiter-Randbedingung*

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$$

übergehen.

Nehmen wir also an, daß das beschränkte Gebiet Ω_C einen perfekten Leiter darstellt, daß der Außenraum Ω_E dielektrisch ist und daß das gestreute Feld die Silver-Müller-Abklingbedingung (2.2.30) erfüllt, so lauten die Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \mathbf{E} &= i\omega\mu\mathbf{H} \quad \text{in } \Omega_E, \\ \operatorname{curl} \mathbf{H} &= -i\omega\epsilon\mathbf{E} \quad \text{in } \Omega_E, \\ \mathbf{E} \times \mathbf{n} &= 0 \quad \text{auf } \Gamma_C, \end{aligned}$$

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \sqrt{\mu}\mathbf{H}^{sc} \times \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} - \sqrt{\epsilon}\mathbf{E}^{sc} = 0.$$

5. Das Streuproblem

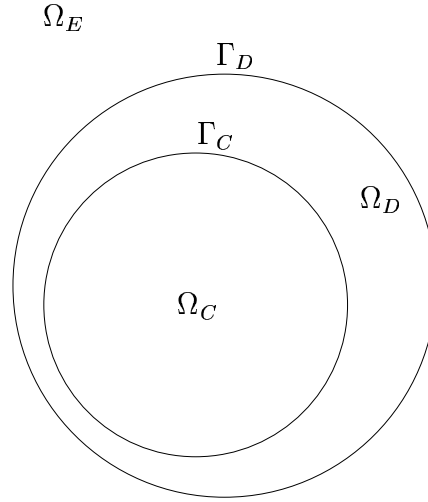


Abbildung 5.1.: Der verlustbehaftete Körper Ω_C mit dielektrischer Schicht Ω_D (im Querschnitt).

Wir wollen eine Verallgemeinerung des obigen Problems betrachten, indem wir zwischen dem Hindernis Ω_C und dem Außenraum Ω_E ein weiteres Gebiet Ω_D legen. Sei also Ω ein beschränktes, konvexes Lipschitz-reguläres Gebiet und $\Omega_C \subset \Omega$ ein Lipschitzgebiet, so daß $\Omega_D := \Omega \setminus \bar{\Omega}_C$ zusammenhängend ist. Weiter seien $\Gamma_C := \partial\Omega_C$, $\Gamma_D := \partial\Omega$ und $\Omega_E := \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ (siehe Abb. 5.1). Das gesamte Außengebiet $\Omega_D \cup \bar{\Omega}_E$ sei dielektrisch und isotrop, wobei Ω_E zusätzlich homogen sei. Dies entspricht dem Fall eines stark verlustbehafteten Körpers (also ein Körper von sehr hoher Leitfähigkeit) umgeben von einer dielektrischen (also nicht-leitenden) Schicht, um das herum sich Luft befindet. Die Parameter σ, ϵ, μ erfüllen $\sigma \equiv 0$ in $\Omega_D \cup \bar{\Omega}_E$, $\epsilon, \mu \in L^\infty(\mathbb{R}^3) \cap H^1(\Omega_D)$, außerdem gelte $\epsilon_1 \geq \epsilon(\mathbf{x}) \geq \epsilon_0 > 0$, $\mu_1 \geq \mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0 > 0$ in Ω_D mit positiven Konstanten $\epsilon_0, \epsilon_1, \mu_0, \mu_1$ und durch geeignete Skalierung $\epsilon \equiv \mu \equiv 1$ in Ω_E . Die Maxwell-Gleichungen lauten nun

$$\begin{aligned}
 \mathbf{curl} \mathbf{E} &= i\omega\mu\mathbf{H} && \text{in } \Omega_D \cup \Gamma_D \cup \Omega_E, \\
 \mathbf{curl} \mathbf{H} &= -i\omega\epsilon\mathbf{E} && \text{in } \Omega_D \cup \Gamma_D \cup \Omega_E, \\
 \mathbf{E} \times \mathbf{n} &= 0 && \text{auf } \Gamma_C,
 \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \sqrt{\mu}\mathbf{H}^{sc} \times \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} - \sqrt{\epsilon}\mathbf{E}^{sc} = 0.$$

Dabei sind $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{in} + \mathbf{E}^{sc}$ und $\mathbf{H} = \mathbf{H}^{in} + \mathbf{H}^{sc}$ mit

$$\mathbf{curl} \mathbf{E}^{in} = i\omega\mu\mathbf{H}^{in}, \quad \mathbf{curl} \mathbf{H}^{in} = -i\omega\epsilon\mathbf{E}^{in} \quad \text{in } \mathbb{R}^3$$

und

$$\begin{aligned}\mathbf{curl} \mathbf{E}^{sc} &= i\omega\mu\mathbf{H}^{sc} && \text{in } \Omega_D \cup \Gamma_D \cup \Omega_E, \\ \mathbf{curl} \mathbf{H}^{sc} &= -i\omega\epsilon\mathbf{E}^{sc} && \text{in } \Omega_D \cup \Gamma_D \cup \Omega_E, \\ \mathbf{E}^{sc} \times \mathbf{n} &= -\mathbf{E}^{in} \times \mathbf{n} && \text{auf } \Gamma_C, \\ \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \sqrt{\mu}\mathbf{H}^{sc} \times \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} - \sqrt{\epsilon}\mathbf{E}^{sc} &= 0.\end{aligned}$$

Da wir die Nullrandbedingung nur auf Γ_C , nicht aber auf Γ_D haben, werden wir es nun mit \mathbf{E} auf Γ_D zu tun haben. Hierfür führen wir auf Γ_D die gleiche Randvariable wie beim Eddy-Current-Problem ein, nämlich

$$\boldsymbol{\lambda} := \gamma_N^+ \mathbf{E} = i\omega(\gamma_t^\times)^+ \mathbf{H}. \quad (5.1.2)$$

Wie bisher bezeichnet γ^+ die Spur aus Ω_E kommend. Wir fordern auf Γ_D die natürlichen Transmissionsbedingungen

$$[\gamma_t \mathbf{E}] = 0, \quad [\mu^{-1} \gamma_N \mathbf{E}] = [i\omega \gamma_t^\times \mathbf{H}] = 0$$

(vgl. [58] und (4.1.18)). Wir fordern sogar, daß diese Transmissionsbedingungen für das einfallende und für das gestreute Feld, also für \mathbf{E}^{in} und für \mathbf{E}^{sc} gelten.

Wir wollen nun ein gekoppeltes, symmetrisches System in \mathbf{E} und $\boldsymbol{\lambda}$ herleiten. Dieses System findet sich bei Levillain [64] (dort *formulation (S)* genannt) und später bei Ammari & Nédélec [6, 8], in beiden Fällen allerdings für glatte Ränder Γ . Wir werden die Formulierung hier mit den Ergebnissen aus Kapitel 2 für Lipschitz-reguläre Ränder herleiten. Außerdem werden in [6, 8] die Variablen \mathbf{E} und $\boldsymbol{\lambda}$ anhand ihrer Helmholtz-Zerlegungen zerlegt, so daß die Autoren dort eine Formulierung in vier Variablen erhalten. Dieses Vorgehen übernehmen wir nicht, allerdings gehen wir zum Schluß dieses Abschnitts ein wenig darauf ein, da wir die inf-sup-Bedingung aus der Arbeit benötigen werden. Zuvor allerdings wollen wir die eben angesprochene Helmholtz-Zerlegung beweisen. Wir können nämlich nicht ohne weiteres die Zerlegung aus Satz 2.1.6, 1 verwenden, da Ω_D nicht konvex ist. Allerdings kommt uns hier die Bedingung $\mathbf{v} \times \mathbf{n} = 0$ auf Γ_C zu Gute, die es uns erlaubt, Satz 2.1.6, 1 ohne große Schwierigkeiten zu erweitern:

Lemma 5.1.1. *Die Gebiete Ω , Ω_C und Ω_D erfüllen die Voraussetzungen auf Seite 120, dann gilt die $\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$ -orthogonale Zerlegung*

$$\mathbf{H}_{0,\Gamma_C}(\mathbf{curl}, \Omega_D) = \mathbf{M}_{0,\Gamma_C}(\Omega_D) \oplus \mathbf{grad} H_{0,\Gamma_C}^1(\Omega_D),$$

d.h. zu jedem $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_{0,\Gamma_C}(\mathbf{curl}, \Omega_D)$ existieren eindeutige Funktionen $\mathbf{v}^\perp \in \mathbf{M}_{0,\Gamma_C}(\Omega_D) := \mathbf{H}_{0,\Gamma_D}(\text{div } 0, \Omega_D) \cap \mathbf{H}_{0,\Gamma_C}(\mathbf{curl}, \Omega_D)$ und $\psi \in H_{0,\Gamma_C}^1(\Omega)$ mit $\mathbf{v} = \mathbf{v}^\perp + \mathbf{grad} \psi$, so daß die Abschätzungen

$$\|\mathbf{v}^\perp\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_D)} \lesssim \|\mathbf{curl} \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_D)}, \quad \|\mathbf{grad} \psi\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_D)} \lesssim \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega_D)}$$

5. Das Streuproblem

gelten.

Der Index Γ_C bedeutet dabei, daß die entsprechende Nullrandbedingung nur auf dem Teilrand Γ_C gilt. So ist $H_{0,\Gamma_C}^1(\Omega) := \{\psi \in H^1(\Omega) : \psi = 0 \text{ auf } \Gamma_C\}$ und $\mathbf{H}_{0,\Gamma_C}(\mathbf{curl}, \Omega_D) := \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega_D) : \mathbf{v} \times \mathbf{n} = 0 \text{ auf } \Gamma_C\}$. Genauso ist $\mathbf{H}_{0,\Gamma_D}(\text{div } 0, \Omega_D) := \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{div } 0, \Omega_D) : \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ auf } \Gamma_D\}$.

Beweis. Diese Zerlegung wird in Ammari & Nédélec [6] (dort für glatt berandete Gebiete) angegeben und verwendet, allerdings nicht bewiesen. Den einfachen Beweis holen wir hier nach:

Man erweitere die Funktion $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_{0,\Gamma_C}(\mathbf{curl}, \Omega_D)$ durch $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}$ in Ω_D , $\tilde{\mathbf{v}} = 0$ in Ω_C zu einer auf ganz Ω definierten Funktion $\tilde{\mathbf{v}}$. Wegen $\mathbf{v} \times \mathbf{n} = 0$ auf Γ_C gilt $\tilde{\mathbf{v}} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$. Nun existiert gemäß Lemma 2.1.6, 1 (man beachte, daß Ω konvex ist!) eine eindeutige Zerlegung $\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{v}}^\perp + \mathbf{grad} \tilde{\psi}$ mit $\tilde{\mathbf{v}}^\perp \in \mathbf{M}(\Omega) := \mathbf{H}_0(\text{div } 0, \Omega) \cap \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$ und $\tilde{\psi} \in H^1(\Omega)/\mathbb{C}$, deren Einschränkung $\mathbf{v} = \mathbf{v}^\perp + \mathbf{grad} \psi$ auf Ω_D die gesuchten Eigenschaften erfüllt. Man beachte, daß aufgrund der Eindeutigkeit $\tilde{\mathbf{v}}^\perp = \mathbf{grad} \tilde{\psi} = 0$ in Ω_C gilt. \square

Eine erste Gleichung in Ω_D erhalten wir wie gehabt: Für $\mathbf{E} \in \mathbf{H}_{0,\Gamma_C}(\mathbf{curl}, \Omega_D)$, $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma_D)$ gilt

$$(\mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{E}, \mathbf{curl} \mathbf{v})_{\Omega_D} - \omega^2 (\epsilon \mathbf{E}, \mathbf{v})_{\Omega_D} - \langle \boldsymbol{\lambda}, \gamma_t \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_D} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_{0,\Gamma_C}(\mathbf{curl}, \Omega_D). \quad (5.1.3)$$

Hierbei ist $\mathbf{H}_{0,\Gamma_C}(\mathbf{curl}, \Omega_D) := \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega_D) : \mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0 \text{ auf } \Gamma_C\}$. Eine zweite Gleichung erhalten wir folgendermaßen: Wir betrachten zuerst das gestreute, abklingende Feld \mathbf{E}^{sc} und $\boldsymbol{\lambda}^{sc} = \gamma_N^+ \mathbf{E}^{sc} = i\omega(\gamma_t^\times)^+ \mathbf{H}^{sc}$. Indem wir auf die Darstellungsformel aus Lemma 2.2.14 für \mathbf{E}^{sc} im Außenraum den Spuroperator γ_t^+ auf Γ_D anwenden (und dabei die Definitionen der Randintegraloperatoren aus (2.2.23) und die Stetigkeit des Tangentialanteils von \mathbf{E}^{sc} beachten), erhalten wir:

$$\gamma_t \mathbf{E}^{sc} = \mathcal{K}(\gamma_t \mathbf{E}^{sc}) - \frac{1}{\omega^2} \mathbf{grad}_\Gamma V(\text{div}_\Gamma \boldsymbol{\lambda}^{sc}) - \mathcal{V} \boldsymbol{\lambda}^{sc}.$$

Da das einfallende Felderpaar $(\mathbf{E}^{in}, \mathbf{H}^{in})$ Lösung der Maxwell-Gleichungen in $\Omega_C \cup \Gamma_C \cup \Omega_D$ ist, können wir für \mathbf{E}^{in} im Außenraum Ω_E die Darstellungsformel aus Lemma 2.2.13 verwenden und dann wie oben den Spuroperator γ_t^+ auf Γ_D anwenden. Mit $\boldsymbol{\lambda}^{in} = \gamma_N^+ \mathbf{E}^{in} = i\omega(\gamma_t^\times)^+ \mathbf{H}^{in}$ erhalten wir:

$$0 = \mathcal{K}(\gamma_t \mathbf{E}^{in}) - \frac{1}{\omega^2} \mathbf{grad}_\Gamma V(\text{div}_\Gamma \boldsymbol{\lambda}^{in}) - \mathcal{V} \boldsymbol{\lambda}^{in}.$$

Addition dieser beiden Gleichungen liefert

$$\mathcal{K}(\gamma_t \mathbf{E}) - \frac{1}{\omega^2} \mathbf{grad}_\Gamma V(\text{div}_\Gamma \boldsymbol{\lambda}) - \mathcal{V} \boldsymbol{\lambda} = \gamma_t \mathbf{E}^{sc} = \gamma_t \mathbf{E} - \gamma_t \mathbf{E}^{in},$$

so daß für alle $\zeta \in \mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma_D)$ gilt:

$$\langle (\mathcal{K} - I)\gamma_t \mathbf{E}, \zeta \rangle_{\Gamma_D} + \frac{1}{\omega^2} \langle V(\text{div}_{\Gamma} \boldsymbol{\lambda}), \text{div}_{\Gamma} \zeta \rangle_{\Gamma_D} - \langle \mathcal{V} \boldsymbol{\lambda}, \zeta \rangle_{\Gamma_D} = -\langle \gamma_t \mathbf{E}^{in}, \zeta \rangle_{\Gamma_D}. \quad (5.1.4)$$

Die Gleichungen (5.1.3) und (5.1.4) ergeben zusammen eine Kopplungsformulierung des Streuproblems, die offenbar noch nicht von symmetrischer Struktur ist. Wir verwenden die gedrehten Tangentialspuren $(\gamma_t^{\times})^+$ auf Γ_D der Darstellungsformeln aus Lemma 2.2.14 für \mathbf{H}^{sc} und Lemma 2.2.13 für \mathbf{H}^{in} und erhalten analog zu (5.1.4) die Darstellung

$$\boldsymbol{\lambda} = i\omega \mathbf{H} \times \mathbf{n} = -\tilde{\mathcal{K}} \boldsymbol{\lambda} - \text{curl}_{\Gamma} V(\text{curl}_{\Gamma} \mathbf{E}) - \omega^2 \mathcal{V}(\mathbf{E} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} + i\omega \mathbf{H}^{in} \times \mathbf{n}.$$

Hiermit ersetzen wir nun das $\boldsymbol{\lambda}$ im Ausdruck $\langle \boldsymbol{\lambda}, \gamma_t \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_D}$ in der Gleichung (5.1.3). Zusammen mit der zweiten Gleichung (5.1.4), die wir mit -1 multiplizieren, ergibt sich dann die variationelle Formulierung (in der wir nun \mathbf{v}_{Γ} statt $\gamma_t \mathbf{v}$ schreiben):

Finde $\mathbf{E} \in \mathbf{H}_{0,\Gamma_C}(\text{curl}, \Omega_D)$, $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma_D)$, so daß

$$\begin{aligned} (\mu^{-1} \text{curl } \mathbf{E}, \text{curl } \mathbf{v})_{\Omega_D} - \omega^2 (\epsilon \mathbf{E}, \mathbf{v})_{\Omega_D} + \langle V(\text{curl}_{\Gamma} \mathbf{E}_{\Gamma}), \text{curl}_{\Gamma} \mathbf{v}_{\Gamma} \rangle_{\Gamma_D} \\ - \omega^2 \langle \mathcal{V}(\mathbf{E} \times \mathbf{n}), \mathbf{v} \times \mathbf{n} \rangle_{\Gamma_D} + \langle \tilde{\mathcal{K}} \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}_{\Gamma} \rangle_{\Gamma_D} = \langle \mathbf{H}^{in} \times \mathbf{n}, \mathbf{v}_{\Gamma} \rangle_{\Gamma_D}, \\ \langle (I - \mathcal{K}) \mathbf{E}_{\Gamma}, \zeta \rangle_{\Gamma_D} - \omega^{-2} \langle V(\text{div}_{\Gamma} \boldsymbol{\lambda}), \text{div}_{\Gamma} \zeta \rangle_{\Gamma_D} + \langle \mathcal{V} \boldsymbol{\lambda}, \zeta \rangle_{\Gamma_D} = \langle \mathbf{E}_{\Gamma}^{in}, \zeta \rangle_{\Gamma_D}. \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_{0,\Gamma_C}(\text{curl}, \Omega_D)$, $\zeta \in \mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma_D)$.

Für jede Lösung (\mathbf{E}, \mathbf{H}) der Maxwell-Gleichungen (5.1.1) gilt, daß $(\mathbf{E}, \gamma_N \mathbf{E})$ Lösung von (5.1.5) ist.

Es gibt wichtige Unterschiede zwischen der obigen Formulierung (5.1.5) des Streuproblems und der Formulierung (4.1.32) des Eddy-Current-Problems von Seite 101. So findet beim Eddy-Current-Problem der Finite-Elemente-Anteil im konvexen Gebiet Ω_C statt, beim Streuproblem in einem nicht-konvexen Gebiet Ω_D . Wir können allerdings das Eddy-Current-Problem auch für dieselbe geometrische Konfiguration wie beim Streuproblem betrachten, denn solange wir $\mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0$ auf Γ_C fordern, steht uns die Helmholtz-Zerlegung aus Lemma 5.1.1 zur Verfügung.

Ein viel wesentlicherer Unterschied ist der folgende: In beiden Formulierungen ist $\sigma \equiv 0$ im Außenraum Ω_E , doch wurde beim Eddy-Current-Problem zusätzlich der Term $i\omega \epsilon \mathbf{E}$ weggelassen. Hiermit war das \mathbf{E} im Außenraum nicht eindeutig, was zur Coulomb-Eichung $\text{div } \mathbf{E} = 0$ führte. Dies hatte wiederum zur Konsequenz, daß $\Delta \mathbf{E} = 0$ in Ω_E , so daß wir Randintegraloperatoren mit Laplace-Kern verwenden konnten. Beim Streuproblem dagegen findet keine zusätzliche Eichung statt und es sind Randintegraloperatoren mit Wellenzahl ungleich Null zu verwenden. Weiter hatte die Weglassung von

5. Das Streuproblem

$i\omega\epsilon\mathbf{E}$ beim Eddy-Current-Problem zur Folge, daß dort $\operatorname{div}_\Gamma \boldsymbol{\lambda} = 0$ galt (siehe Seite 4.1). Aus diesem Grund konnte dort $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{curl}_\Gamma \varphi$, $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$ gesetzt werden, und beim Galerkin-Verfahren (4.1.33) wurde dementsprechend $\varphi_h \in \mathcal{S}_1(\mathcal{K}_h)/\mathbb{C}$ gesucht. Für das Streuproblem gilt dies nicht, und im Galerkin-Verfahren, das auf Seite 127 vorgestellt wird, muß tatsächlich $\boldsymbol{\lambda}_h \in \mathcal{RT}_1(\mathcal{K}_h)$ gesucht werden. Auch bei dem p -hierarchischen und dem residualen Fehlerschätzer zum Streuproblem werden aus diesem Grund zusätzliche Terme gegenüber den Fehlerschätzern zum Eddy-Current-Problem auftreten.

Weitere Unterschiede zwischen den beiden Problemen, wie das Auftreten eines Induktionsstroms beim Eddy-Current-Problem gegenüber dem von einfallenden Feldern beim Streuproblem, oder die Tatsache, daß beim Streuproblem $\sigma \equiv 0$ in Ω_D vorausgesetzt wird, haben keine grundsätzlichen Unterschiede zur Folge.

Wir kommen nun zur Eindeutigkeit der Lösung von (5.1.5). Es sei $\mathcal{X} := \mathbf{H}_{0,\Gamma_C}(\mathbf{curl}, \Omega_D) \times \mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma_D)$. Wir treffen die folgende

Annahme 5.1.2. *Die durch (5.1.5) implizierte Bilinearform \mathcal{A} ist stetig auf $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ und erfüllt die inf-sup-Bedingung*

$$\sup_{(\mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}) \in \mathcal{X}} \frac{\mathcal{A}((\mathbf{E}, \boldsymbol{\lambda}), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}))}{\|(\mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta})\|_{\mathcal{X}}} \gtrsim \|(\mathbf{E}, \boldsymbol{\lambda})\|_{\mathcal{X}} \quad \forall (\mathbf{E}, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathcal{X}.$$

Ist Γ glatt, so können wir dieses Ergebnis aus dem Artikel [8] von Ammari & Nédélec folgern, wie wir im folgenden darlegen werden. Für stückweise glattes Γ muß diese Behauptung als Annahme stehen bleiben.

In [8] wird also das System (5.1.5) für glattes Γ hergeleitet, wobei allerdings die Variablen \mathbf{E} und $\boldsymbol{\lambda}$ gemäß

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^\perp + \mathbf{grad} \psi, \quad \mathbf{E}^\perp \in \mathbf{M}_{0,\Gamma_C}(\Omega_D), \quad \psi \in H_{0,\Gamma_C}^1(\Omega_D)/\mathbb{C}, \quad (5.1.6)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{curl}_\Gamma \phi + \mathbf{grad}_\Gamma \sigma, \quad \phi \in H^{1/2}(\Gamma_D), \quad \sigma \in H^{3/2}(\Gamma_D)/\mathbb{C} \quad (5.1.7)$$

zerlegt werden. Die Zerlegung (5.1.6) wurde in Lemma 5.1.1 gezeigt. Die Zerlegung (5.1.7) entspricht der ersten Zerlegung aus Lemma 2.1.6, 2 für glatte Ränder (siehe auch [22]).

Mit diesen Zerlegungen erhält man nun aus (5.1.5) an Stelle der Bilinearform \mathcal{A} die Bilinearform $\tilde{\mathcal{A}}$ auf dem Raum $\tilde{\mathcal{X}} \times \tilde{\mathcal{X}}$ mit

$$\tilde{\mathcal{X}} := \mathbf{M}_{0,\Gamma_C}(\Omega_D) \times \mathbf{H}_{0,\Gamma_C}^1(\Omega_D) \times H^{1/2}(\Gamma_D)/\mathbb{C} \times H^{3/2}(\Gamma_D)/\mathbb{C},$$

definiert durch

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathcal{A}}((\mathbf{E}_1^\perp, \psi_1, \phi_1, \sigma_1), (\mathbf{E}_2^\perp, \psi_2, \phi_2, \sigma_2)) \\ &= \mathcal{A}((\mathbf{E}_1^\perp + \mathbf{grad} \psi_1, \mathbf{curl}_\Gamma \phi_1 + \mathbf{grad}_\Gamma \sigma_1), (\mathbf{E}_2^\perp + \mathbf{grad} \psi_2, \mathbf{curl}_\Gamma \phi_2 + \mathbf{grad}_\Gamma \sigma_2)). \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

In [8] weisen die Autoren nach, daß $\tilde{\mathcal{A}}$ aus einem koerzitativen und einem kompakten Anteil besteht und das System somit fredholmsch ist. Wegen der Äquivalenz der Formulierung zu den eindeutig lösbaren Maxwell-Gleichungen (5.1.1) hat somit auch die variationelle Formulierung genau eine Lösung in $\tilde{\mathcal{X}}$. Dies ist äquivalent zu einer inf-sup-Bedingung auf $\tilde{\mathcal{X}}$. Man hat also [8, Lemma 3.7]

$$\sup_{(\mathbf{E}_2^\perp, \psi_2, \phi_2, \sigma_2) \in \tilde{\mathcal{X}} \setminus \{0\}} \frac{\tilde{\mathcal{A}}((\mathbf{E}_1^\perp, \psi_1, \phi_1, \sigma_1), (\mathbf{E}_2^\perp, \psi_2, \phi_2, \sigma_2))}{\|(\mathbf{E}_2^\perp, \psi_2, \phi_2, \sigma_2)\|_{\tilde{\mathcal{X}}}} \geq \|(\mathbf{E}_1^\perp, \psi_1, \phi_1, \sigma_1)\|_{\tilde{\mathcal{X}}} \quad (5.1.9)$$

für alle $(\mathbf{E}_1^\perp, \psi_1, \phi_1, \sigma_1) \in \tilde{\mathcal{X}}$, wobei

$$\|(\mathbf{E}^\perp, \psi, \phi, \sigma)\|_{\tilde{\mathcal{X}}}^2 := \|\mathbf{E}^\perp\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega_D)}^2 + \|\psi\|_{H^1(\Omega_D)}^2 + \|\phi\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)/\mathbb{C}}^2 + \|\sigma\|_{H^{3/2}(\Gamma_D)/\mathbb{C}}^2.$$

Um also Annahme 5.1.2 zu beweisen, müssen wir bloß die Normäquivalenz

$$\|(\mathbf{E}^\perp, \psi, \phi, \sigma)\|_{\tilde{\mathcal{X}}} \sim \|(\mathbf{E}^\perp + \mathbf{grad} \psi, \mathbf{curl}_\Gamma \phi + \mathbf{grad}_\Gamma \sigma)\|_{\mathcal{X}}$$

zeigen, dann folgt die Behauptung direkt aus (5.1.9). Diese Normäquivalenz beweisen wir im folgenden Lemma:

Lemma 5.1.3. *Es sei $(\mathbf{E}^\perp, \psi, \phi, \sigma) \in \tilde{\mathcal{X}}$. Dann gilt*

$$\|(\mathbf{E}^\perp, \psi, \phi, \sigma)\|_{\tilde{\mathcal{X}}} \sim \|(\mathbf{E}^\perp + \mathbf{grad} \psi, \mathbf{curl}_\Gamma \phi + \mathbf{grad}_\Gamma \sigma)\|_{\mathcal{X}}.$$

Beweis. Es sei $\mathbf{E} := \mathbf{E}^\perp + \mathbf{grad} \psi$ und $\boldsymbol{\lambda} := \mathbf{curl}_\Gamma \phi + \mathbf{grad}_\Gamma \sigma$. Zuerst haben wir die Äquivalenz

$$\|\mathbf{E}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega_D)} \sim \|\mathbf{E}^\perp\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega_D)} + \|\psi\|_{H^1(\Omega_D)} \quad (5.1.10)$$

zu beweisen. Die eine Richtung folgt sofort aus der Dreiecksungleichung:

$$\|\mathbf{E}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega_D)} \leq \|\mathbf{E}^\perp\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega_D)} + \|\mathbf{grad} \psi\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega_D)}$$

und $\|\mathbf{grad} \psi\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega_D)} = \|\mathbf{grad} \psi\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_D)} \leq \|\psi\|_{H^1(\Omega_D)}$. Umgekehrt gilt wegen $\psi = 0$ auf Γ_C mit Poincaré-Friedrichs, daß $\|\psi\|_{H^1(\Omega_D)} \lesssim \|\mathbf{grad} \psi\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_D)}$, so daß die Abschätzungen aus Lemma 5.1.1

$$\begin{aligned} \|\mathbf{E}^\perp\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega_D)} + \|\psi\|_{H^1(\Omega_D)} &\lesssim \|\mathbf{E}^\perp\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega_D)} + \|\mathbf{grad} \psi\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_D)} \\ &\lesssim \|\mathbf{curl} \mathbf{E}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_D)} + \|\mathbf{E}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega_D)} \lesssim \|\mathbf{E}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega_D)} \end{aligned}$$

ergeben. Als nächstes müssen wir die Äquivalenz

$$\|\boldsymbol{\lambda}\|_{\mathbf{TH}^{-1/2}(\text{div}, \Gamma_D)} \sim \|\phi\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)/\mathbb{C}} + \|\sigma\|_{H^{3/2}(\Gamma_D)/\mathbb{C}} \quad (5.1.11)$$

5. Das Streuproblem

zeigen. Die eine Richtung folgt wieder mit der Dreiecksungleichung und der Stetigkeit der Differentialoperatoren:

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{\lambda}\|_{\mathbf{TH}^{-1/2}(\operatorname{div}, \Gamma_D)} &\leq \|\mathbf{curl}_\Gamma \phi\|_{\mathbf{TH}^{-1/2}(\operatorname{div}, \Gamma_D)} + \|\mathbf{grad}_\Gamma \sigma\|_{\mathbf{TH}^{-1/2}(\operatorname{div}, \Gamma_D)} \\
&\lesssim \|\mathbf{curl}_\Gamma \phi\|_{\mathbf{TH}^{-1/2}(\Gamma_D)} + \|\mathbf{grad}_\Gamma \sigma\|_{\mathbf{TH}^{-1/2}(\Gamma_D)} + \|\Delta_\Gamma \sigma\|_{H^{-1/2}(\Gamma_D)} \\
&\lesssim \|\phi\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)} + \|\sigma\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)} + \|\sigma\|_{H^{3/2}(\Gamma_D)} \\
&\lesssim \|\phi\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)} + \|\sigma\|_{H^{3/2}(\Gamma_D)}.
\end{aligned} \tag{5.1.12}$$

Nun zur umgekehrten Richtung: Nach dem Shift-Theorem für den Laplace-Beltrami-Operator Δ_Γ gilt

$$\|\sigma\|_{H^{3/2}(\Gamma_D)/\mathbb{C}} \lesssim \|\Delta_\Gamma \sigma\|_{H^{-1/2}(\Gamma_D)} = \|\operatorname{div}_\Gamma \boldsymbol{\lambda}\|_{H^{-1/2}(\Gamma_D)}. \tag{5.1.13}$$

Vom Einfachschichtpotential V_0 auf einer geschlossenen Fläche Γ wissen wir, daß $\langle V_0 \mathbf{curl}_\Gamma \phi, \mathbf{curl}_\Gamma \phi \rangle_\Gamma \sim \|\mathbf{curl}_\Gamma \phi\|_{\mathbf{TH}^{-1/2}(\Gamma)}^2$ gilt. Andererseits gilt $\langle V_0 \mathbf{curl}_\Gamma \phi, \mathbf{curl}_\Gamma \phi \rangle_\Gamma \sim \|\phi\|_{H^{1/2}(\Gamma)/\mathbb{C}}^2$ (siehe [83, Abschnitt 1]). Zusammen ergibt dies auf Γ_D die Äquivalenz

$$\|\mathbf{curl}_\Gamma \phi\|_{\mathbf{TH}^{-1/2}(\Gamma_D)} \sim \|\phi\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)/\mathbb{C}}.$$

Hiermit und mit (5.1.13) haben wir

$$\begin{aligned}
\|\phi\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)/\mathbb{C}} &\lesssim \|\mathbf{curl}_\Gamma \phi\|_{\mathbf{TH}^{-1/2}(\Gamma_D)} \\
&\leq \|\boldsymbol{\lambda}\|_{\mathbf{TH}^{-1/2}(\Gamma_D)} + \|\mathbf{grad}_\Gamma \sigma\|_{\mathbf{TH}^{-1/2}(\Gamma_D)} \\
&\lesssim \|\boldsymbol{\lambda}\|_{\mathbf{TH}^{-1/2}(\Gamma_D)} + \|\sigma\|_{H^{3/2}(\Gamma_D)} \\
&\lesssim \|\boldsymbol{\lambda}\|_{\mathbf{TH}^{-1/2}(\operatorname{div}, \Gamma_D)}.
\end{aligned} \tag{5.1.14}$$

Die Gleichungen (5.1.13), (5.1.14) und (5.1.12) ergeben zusammen die Äquivalenz (5.1.11), und (5.1.11) und (5.1.10) ergeben zusammen die Aussage des Lemmas. \square

Mit diesem Lemma ist also die inf-sup-Bedingung aus Annahme 5.1.2 für glatte Γ gezeigt. Leider können wir den Beweis nicht auf Lipschitz-reguläre Γ erweitern. Dies hat hauptsächlich zwei Gründe:

1. Die Analysis von Ammari & Nédélec aus [8] gilt nur für glatte Ränder. Das Haupthindernis in der Übertragung auf Lipschitz-Ränder ist die Tatsache, daß die Randintegraloperatoren $\mathcal{K} - \frac{1}{2}I : \mathbf{TH}_\perp^{-1/2}(\operatorname{curl}_\Gamma, \Gamma) \rightarrow \mathbf{TH}_\perp^{-1/2}(\operatorname{curl}_\Gamma, \Gamma)$ und $\tilde{\mathcal{K}} + \frac{1}{2}I : \mathbf{TH}_\parallel^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma) \rightarrow \mathbf{TH}_\parallel^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$ für Lipschitz-Ränder *nicht kompakt* sind.

2. Das von uns in (5.1.13) verwendete Shift-Theorem existiert für Lipschitz-Ränder nur in abgeschwächter Form [30, Theorem 5.3]: Ist $\Delta_\Gamma \sigma \in H^{-1/2}(\Gamma)$, so gilt $\sigma \in H^{1+t}(\Gamma)$ für $0 \leq t \leq s^* \leq 1/2$, wobei die Konstante s^* von der Geometrie von Γ in der Umgebung der Ecken abhängt. Bei ungünstigen Geometrien kann also $\sigma \notin H^{3/2}(\Gamma)$ gelten.

Bemerkung 7. Wie schon eingangs auf Seite 121 erwähnt, hat auch Levillain [64] die Formulierung (5.1.5) für glattes Γ hergeleitet und eine inf-sup-Bedingung gezeigt, und zwar wie hier in zwei Variablen (entsprechend \mathbf{E} und $\boldsymbol{\lambda}$ bei uns), und nicht in vier Variablen, wie Ammari & Nédélec in [8]. Allerdings verwendet er strengere Voraussetzungen an die Materialparameter ϵ und μ , und so haben wir uns dafür entschieden, das allgemeinere Ergebnis aus [8] zu verwenden. Außerdem beweisen Ammari & Nédélec auch eine diskrete inf-sup-Bedingung, die wir mit Lemma 5.1.3 wieder auf unseren Fall übertragen können. Bei Levillain dagegen findet sich keine diskrete inf-sup-Bedingung.

Bemerkung 8. Nach Beendigung dieser Arbeit erschien der Preprint [57], in welchem Hiptmair für die hier verwendete variationelle Formulierung tatsächlich die gesuchte inf-sup-Bedingung nachweist, auch für den diskreten Fall unter Verwendung von Nédélec- und Raviart-Thomas-Elementen. Allerdings betrachtet er eine vereinfachte Geometrie: Ω_D ist einfach zusammenhängend, ein zusätzlicher perfekt leitender Körper Ω_C wie in unserem Beispiel existiert nicht. Eine Verallgemeinerung auf die hier betrachtete Geometrie dürfte aber kaum Schwierigkeiten bereiten.

5.1.1. Das Galerkin-Verfahren

Es seien \mathcal{T}_h eine Triangulierung (mit tetraedrischen oder hexaedrischen Elementen) von Ω_D und $\mathcal{K}_h = \{T \cap \Gamma : T \in \mathcal{T}_h\}$ die induzierte Triangulierung auf Γ_D . Wir verwenden die naheliegenden Finite-Element-Räume $\mathcal{ND}_{1,0,\Gamma_C}(\mathcal{T}_h) := \mathcal{ND}_1(\mathcal{T}_h) \cap \mathbf{H}_{0,\Gamma_C}(\mathbf{curl}, \Omega_D)$ zur Diskretisierung der Variablen $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{0,\Gamma_C}(\mathbf{curl}, \Omega_D)$ und $\mathcal{RT}_1(\mathcal{K}_h)$ zur Diskretisierung von $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma_D)$. Das Galerkin-Verfahren lautet

Finde $\mathbf{E}_h \in \mathcal{ND}_{1,0,\Gamma_C}(\mathcal{T}_h)$, $\boldsymbol{\lambda}_h \in \mathcal{RT}_1(\mathcal{K}_h)$, so daß

$$\begin{aligned} & (\mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{E}_h, \mathbf{curl} \mathbf{v}_h)_{\Omega_D} - \omega^2 (\epsilon \mathbf{E}_h, \mathbf{v}_h)_{\Omega_D} + \langle V(\mathbf{curl}_\Gamma \gamma_t \mathbf{E}_h), \mathbf{curl}_\Gamma \gamma_t \mathbf{v}_h \rangle_{\Gamma_D} \\ & \quad - \omega^2 \langle \mathcal{V}(\mathbf{E}_h \times \mathbf{n}), \mathbf{v}_h \times \mathbf{n} \rangle_{\Gamma_D} + \langle \tilde{\mathcal{K}} \boldsymbol{\lambda}_h, \gamma_t \mathbf{v}_h \rangle_{\Gamma_D} = \langle \mathbf{H}^{in} \times \mathbf{n}, \gamma_t \mathbf{v}_h \rangle_{\Gamma_D}, \\ & \langle (I - \mathcal{K}) \gamma_t \mathbf{E}_h, \boldsymbol{\zeta}_h \rangle_{\Gamma_D} - \frac{1}{\omega^2} \langle V(\text{div}_\Gamma \boldsymbol{\lambda}_h), \text{div}_\Gamma \boldsymbol{\zeta}_h \rangle_{\Gamma_D} + \langle \mathcal{V} \boldsymbol{\lambda}_h, \boldsymbol{\zeta}_h \rangle_{\Gamma_D} = \langle \mathbf{E}_\Gamma^{in}, \boldsymbol{\zeta}_h \rangle_{\Gamma_D} \end{aligned} \tag{5.1.15}$$

für alle $\mathbf{v}_h \in \mathcal{ND}_{1,0,\Gamma_C}(\mathcal{T}_h)$, $\boldsymbol{\zeta}_h \in \mathcal{RT}_1(\mathcal{K}_h)$.

Es sei nun $\mathcal{X}_h := \mathcal{ND}_{1,0,\Gamma_C}(\mathcal{T}_h) \times \mathcal{RT}_1(\mathcal{K}_h)$.

5. Das Streuproblem

Annahme 5.1.4. Die durch (5.1.5) implizierte Bilinearform erfüllt die diskrete inf-sup-Bedingung:

$$\sup_{(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\zeta}_h) \in \mathcal{X}_h} \frac{\mathcal{A}((\mathbf{E}_h, \boldsymbol{\lambda}_h), (\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\zeta}_h))}{\|(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\zeta}_h)\|_{\mathcal{X}_h}} \gtrsim \|(\mathbf{E}_h, \boldsymbol{\lambda}_h)\|_{\mathcal{X}_h} \quad \forall (\mathbf{E}_h, \boldsymbol{\lambda}_h) \in \mathcal{X}_h.$$

Wie schon in Bemerkung 7 auf Seite 127 erwähnt, findet sich in [8] eine diskrete inf-sup-Bedingung für die „zerlegte“ Formulierung $\tilde{\mathcal{A}}$ in vier Variablen und für glattes Γ , so daß wir mit Lemma 5.1.3 die Annahme 5.1.4 für glattes Γ beweisen können. Für Lipschitz-stetiges Γ bleibt die Annahme unbewiesen. Unter dieser Annahme zeigt man wie im letzten Kapitel:

Satz 5.1.5. Für die Lösung \mathbf{E} des Streuproblems (5.1.5) gelte $\mathbf{E} \in \mathbf{H}^2(\Omega_D)$. Dann gilt

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}(\text{curl}, \Omega_D)} + \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_{\mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma_D)} \lesssim h (\|\mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^2(\Omega_D)} + \|\mathbf{curl} \mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^2(\Omega_D)}).$$

Die Konstante der Abschätzung hängt nur von der Geometrie Ω , der Regularität des Gitters \mathcal{T}_h und den Materialparametern ϵ, μ ab.

5.2. Ein p -hierarchischer Fehlerschätzer

Wie für das Eddy-Current-Problem in Abschnitt 4.2 wollen wir auch hier einen p -hierarchischen Fehlerschätzer herleiten. Im Vergleich zu Abschnitt 4.2 haben wir nur wenige neue Sachverhalte: so ist jetzt die Randvariable $\boldsymbol{\lambda}$ nicht mehr divergenzfrei, außerdem hat die Gebietsvariable \mathbf{E} Nullrandwerte auf dem Teilrand Γ_C . Diese Neuerungen stellen aber keine Schwierigkeiten dar, denn die Divergenzfreiheit von $\boldsymbol{\lambda}$ war nur ein Spezialfall der Theorie zu den p -hierarchischen Fehlerschätzern aus Abschnitt 3.2, und Nullrandwerte auf Γ_C bedeuten schlicht, daß man die auf Γ_C befindlichen Freiheitsgrade (Kanten oder Flächen der Triangulierung \mathcal{T}_h) wegzulassen hat. So werden wir uns kurz fassen und nur das Wesentliche angeben. Dazu sei

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{E}, \boldsymbol{\lambda}; \mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}) &:= (\mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{E}, \mathbf{curl} \mathbf{v})_{\Omega_D} - \omega^2 (\epsilon \mathbf{E}, \mathbf{v})_{\Omega_D} + \langle V(\mathbf{curl}_{\Gamma} \mathbf{E}_{\Gamma}), \mathbf{curl}_{\Gamma} \mathbf{v}_{\Gamma} \rangle_{\Gamma_D} \\ &\quad - \omega^2 \langle \mathcal{V}(\mathbf{E} \times \mathbf{n}), \mathbf{v} \times \mathbf{n} \rangle_{\Gamma_D} + \langle \tilde{\mathcal{K}} \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}_{\Gamma} \rangle_{\Gamma_D} \\ &\quad + \langle (I - \mathcal{K}) \mathbf{E}_{\Gamma}, \boldsymbol{\zeta} \rangle_{\Gamma_D} - \omega^{-2} \langle V(\text{div}_{\Gamma} \boldsymbol{\lambda}), \text{div}_{\Gamma} \boldsymbol{\zeta} \rangle_{\Gamma_D} + \langle \mathcal{V} \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\zeta} \rangle_{\Gamma_D} \end{aligned} \tag{5.2.16}$$

die Bilinearform aus (5.1.5) und

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}) = \langle \mathbf{H}^{in} \times \mathbf{n}, \mathbf{v}_{\Gamma} \rangle_{\Gamma_D} + \langle \mathbf{E}_{\Gamma}^{in}, \boldsymbol{\zeta} \rangle_{\Gamma_D}$$

die dazu gehörende rechte Seite. Definiere die Bilinearformen

$$\begin{aligned} a(\mathbf{E}, \mathbf{v}) &:= (\mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{E}, \mathbf{curl} \mathbf{v})_{\Omega_D} + \omega^2 (\epsilon \mathbf{E}, \mathbf{v})_{\Omega_D}, \\ b(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\zeta}) &:= \langle \mathcal{V} \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\zeta} \rangle_{\Gamma} + \omega^{-2} \langle V(\operatorname{div}_{\Gamma} \boldsymbol{\lambda}), \operatorname{div}_{\Gamma} \boldsymbol{\zeta} \rangle_{\Gamma}, \\ \mathcal{Q}(\mathbf{E}, \boldsymbol{\lambda}; \mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}) &:= a(\mathbf{E}, \mathbf{v}) + b(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\zeta}) \end{aligned}$$

und die Energienormen

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_{\mathfrak{E}}^2 &:= |a(\mathbf{v}, \mathbf{v})|, \\ \|\boldsymbol{\zeta}\|_{\mathfrak{E}}^2 &:= |b(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta})|. \end{aligned}$$

Definiere zum Schluß die Bilinearform

$$\tilde{\mathcal{Q}}(\mathbf{E}, \boldsymbol{\lambda}; \mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}) = \tilde{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \tilde{b}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\zeta})$$

mit den „entkoppelnden“ Bilinearformen \tilde{a} und \tilde{b} aus (3.2.34) bzw. (3.2.35) und (3.2.51) bzw. (3.2.52).

Seien jetzt $(\mathbf{E}, \boldsymbol{\lambda})$ aus $\mathcal{X} = \mathbf{H}_{0,\Gamma_C}(\mathbf{curl}, \Omega_D) \times \boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma_D)$ die Lösung von (5.1.5), $(\mathbf{E}_h, \boldsymbol{\lambda}_h)$ die Galerkinlösung zu (5.1.15) auf $\mathcal{X}_h := \mathcal{ND}_{1;0,\Gamma_C}(\mathcal{T}_h) \times \mathcal{RT}_1(\mathcal{K}_h)$ und $(\mathbf{E}_2, \boldsymbol{\lambda}_2)$ die Lösung der entsprechenden Formulierungen auf dem „feineren“ Raum $\mathcal{X}_2 := \mathcal{ND}_{2;0,\Gamma_C}(\mathcal{T}_h) \times \mathcal{RT}_2(\mathcal{K}_h)$. Wir bezeichnen mit M die Anzahl der Kanten in \mathcal{T}_h , die nicht in Γ_C liegen, mit $m < M$ die Anzahl der Kanten in \mathcal{K}_h (also die auf Γ_D), mit N die Anzahl der Flächen in \mathcal{T}_h , die nicht in Γ_C liegen, mit $n < N$ die Anzahl der Flächen in \mathcal{K}_h (also die auf Γ_D) und mit L die Anzahl der Elemente in \mathcal{T}_h . Wir definieren die Fehlerfunktionen $(\mathbf{e}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2) \in \mathcal{X}_2$ durch

$$\mathcal{Q}(\mathbf{e}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2; \mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}) = \mathcal{L}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}) - \mathcal{A}(\mathbf{E}_h, \boldsymbol{\lambda}_h; \mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}) \quad \forall (\mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}) \in \mathcal{X}_2$$

und $(\tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_2) \in \mathcal{X}_2$ durch

$$\tilde{\mathcal{Q}}(\tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_2; \mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}) = \mathcal{Q}(\mathbf{e}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2; \mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}) \quad \forall (\mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}) \in \mathcal{X}_2.$$

Weiter setzen wir die Saturationsannahme

$$\|(\mathbf{E} - \mathbf{E}_2, \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_2)\|_{\mathcal{X}} \leq \delta_h \|(\mathbf{E} - \mathbf{E}_h, \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h)\|_{\mathcal{X}} \quad (5.2.17)$$

mit einem $\delta_h \leq \delta < 1$ voraus. Mit den Bezeichnungen aus Kapitel 3.2 definiere für tetraedrische Gitter

$$\begin{aligned} \Theta^{(e)} &= \frac{|\mathcal{L}(\mathbf{grad} \phi^{(e)}, 0) - \mathcal{A}(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h; \mathbf{grad} \phi^{(e)}, 0)|}{\|\mathbf{grad} \phi^{(e)}\|_{\mathfrak{E}}}, \\ \Theta^{(F)} &= \|\kappa_1 \mathbf{b}_1^{(F)} + \kappa_2 \mathbf{b}_3^{(F)}\|_{\mathfrak{E}}, \end{aligned}$$

5. Das Streuproblem

wobei $(\kappa_1, \kappa_2)^\top$ Lösung des LGS

$$\begin{pmatrix} a(\mathbf{b}_1^{(F)}, \mathbf{b}_1^{(F)}) & a(\mathbf{b}_2^{(F)}, \mathbf{b}_1^{(F)}) \\ a(\mathbf{b}_1^{(F)}, \mathbf{b}_2^{(F)}) & a(\mathbf{b}_2^{(F)}, \mathbf{b}_2^{(F)}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}(\mathbf{b}_1^{(F)}, 0) - \mathcal{A}(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h; \mathbf{b}_1^{(F)}, 0) \\ \mathcal{L}(\mathbf{b}_2^{(F)}, 0) - \mathcal{A}(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h; \mathbf{b}_2^{(F)}, 0) \end{pmatrix}$$

ist,

$$\vartheta^{(e)} = \frac{|\mathcal{A}(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h; 0, \mathbf{curl}_\Gamma \lambda^{(e)})|}{\|\mathbf{curl}_\Gamma \lambda^{(e)}\|_\epsilon}$$

und

$$\vartheta^{(F)} = \|\kappa_1 \boldsymbol{\varphi}_1^{(F)} + \kappa_2 \boldsymbol{\varphi}_2^{(F)}\|_\epsilon,$$

wobei $(\kappa_1, \kappa_2)^\top$ Lösung des LGS

$$\begin{pmatrix} b(\boldsymbol{\varphi}_1^{(F)}, \boldsymbol{\varphi}_1^{(F)}) & b(\boldsymbol{\varphi}_2^{(F)}, \boldsymbol{\varphi}_1^{(F)}) \\ b(\boldsymbol{\varphi}_1^{(F)}, \boldsymbol{\varphi}_2^{(F)}) & b(\boldsymbol{\varphi}_2^{(F)}, \boldsymbol{\varphi}_2^{(F)}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}(0, \boldsymbol{\varphi}_1^{(F)}) - \mathcal{A}(\mathbf{E}_h, \boldsymbol{\lambda}_h; 0, \boldsymbol{\varphi}_1^{(F)}) \\ \mathcal{L}(0, \boldsymbol{\varphi}_2^{(F)}) - \mathcal{A}(\mathbf{E}_h, \boldsymbol{\lambda}_h; 0, \boldsymbol{\varphi}_2^{(F)}) \end{pmatrix}$$

ist. Dann gilt der

Satz 5.2.1. *Es gelte die Saturationsannahme (5.2.17). Dann gilt mit den obigen Bezeichnungen auf einem Gitter mit tetraedrischen Elementen*

$$\eta \lesssim \|(\mathbf{E} - \mathbf{E}_h, \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h)\|_{\mathcal{X}} \lesssim \frac{1}{1 - \delta} \eta$$

mit dem Fehlerschätzer

$$\eta^2 := \sum_{i=1}^M (\Theta^{(e_i)})^2 + \sum_{j=1}^N (\Theta^{(F_j)})^2 + \sum_{i=1}^m (\vartheta^{(e_i)})^2 + \sum_{j=1}^n (\vartheta^{(F_j)})^2.$$

Beweis. Mit Satz 5.1.2 haben wir

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_h, \boldsymbol{\lambda}_2 - \boldsymbol{\lambda}_h)\|_{\mathcal{X}} &\lesssim \sup_{\substack{(\mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}) \in \mathcal{X} \\ \|(\mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta})\|_\epsilon = 1}} |\mathcal{A}(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_h, \boldsymbol{\lambda}_2 - \boldsymbol{\lambda}_h; \mathbf{v}_h, \boldsymbol{\zeta}_h)| \\ &= \sup |\mathcal{L}(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\zeta}_h) - \mathcal{A}(\mathbf{E}_h, \boldsymbol{\lambda}_h; \mathbf{v}_h, \boldsymbol{\zeta}_h)| \\ &\quad \dots \\ &= \sup |\mathcal{Q}(\mathbf{e}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2; \mathbf{v}_h, \boldsymbol{\zeta}_h)| \\ &\quad \dots \\ &\lesssim \|(\mathbf{e}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\|_{\mathcal{X}}. \end{aligned}$$

Damit gilt $\|(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_h, \boldsymbol{\lambda}_2 - \boldsymbol{\lambda}_h)\|_{\mathcal{X}} \leq \|(\mathbf{e}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\|_{\mathcal{X}}$. Die umgekehrte Ungleichung erhalten wir wie folgt:

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{e}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\|_{\mathcal{X}}^2 &\lesssim |\mathcal{Q}(\mathbf{e}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2; \mathbf{e}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2)| \\ &= |\mathcal{L}(\mathbf{e}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2) - \mathcal{A}(\mathbf{E}_h, \boldsymbol{\lambda}_h; \mathbf{e}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2)| \\ &= |\mathcal{Q}(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_h, \boldsymbol{\lambda}_2 - \boldsymbol{\lambda}_h; \mathbf{e}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2)| \\ &\lesssim \|(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_h, \boldsymbol{\lambda}_2 - \boldsymbol{\lambda}_h)\|_{\mathcal{X}} \|(\mathbf{e}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\|_{\mathcal{X}}, \end{aligned}$$

also $\|(\mathbf{e}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\|_{\mathcal{X}} \lesssim \|(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_h, \boldsymbol{\lambda}_2 - \boldsymbol{\lambda}_h)\|_{\mathcal{X}}$, und damit haben wir insgesamt die Äquivalenz

$$\|(\mathbf{e}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\|_{\mathcal{X}} \sim \|(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_h, \boldsymbol{\lambda}_2 - \boldsymbol{\lambda}_h)\|_{\mathcal{X}}.$$

Nach den Lemmata 3.2.3 und 3.2.8 gilt weiter $\eta := \|(\tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_2)\|_{\mathcal{X}} \sim \|(\mathbf{e}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\|_{\mathcal{X}}$, so daß die Behauptung bewiesen ist. \square

Auf einem Gitter mit hexaedrischen Elementen definiere

$$\begin{aligned} \Theta^{(e)} &:= \frac{|\mathcal{L}(\mathbf{grad} \phi^{(e)}, 0) - \mathcal{A}(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h; \mathbf{grad} \phi^{(e)}, 0)|}{\|\mathbf{grad} \phi^{(e)}\|_{\mathfrak{E}}}, \\ \Theta_1^{(F)} &:= \frac{|\mathcal{L}(\mathbf{grad} \phi^{(F)}, 0) - \mathcal{A}(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h; \mathbf{grad} \phi^{(F)}, 0)|}{\|\mathbf{grad} \phi^{(F)}\|_{\mathfrak{E}}}, \\ \Theta_2^{(F)} &:= \|\kappa_1 \mathbf{b}_1^{(F)} + \kappa_2 \tilde{\mathbf{b}}_2^{(F)} + \kappa_3 \mathbf{b}_3^{(F)}\|_{\mathfrak{E}}, \end{aligned}$$

wobei $\tilde{\mathbf{b}}_2^{(F)} := \mathbf{b}_2^{(F)} - \mathbf{b}_4^{(F)}$ und $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)^\top$ Lösung des LGS

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a(\mathbf{b}_1^{(F)}, \mathbf{b}_1^{(F)}) & a(\tilde{\mathbf{b}}_2^{(F)}, \mathbf{b}_1^{(F)}) & a(\mathbf{b}_3^{(F)}, \mathbf{b}_1^{(F)}) \\ a(\mathbf{b}_1^{(F)}, \tilde{\mathbf{b}}_2^{(F)}) & a(\tilde{\mathbf{b}}_2^{(F)}, \tilde{\mathbf{b}}_2^{(F)}) & a(\mathbf{b}_3^{(F)}, \tilde{\mathbf{b}}_2^{(F)}) \\ a(\mathbf{b}_1^{(F)}, \mathbf{b}_3^{(F)}) & a(\tilde{\mathbf{b}}_2^{(F)}, \tilde{\mathbf{b}}_3^{(F)}) & a(\mathbf{b}_3^{(F)}, \mathbf{b}_3^{(F)}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \mathcal{L}(\mathbf{b}_1^{(F)}, 0) - \mathcal{A}(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h; \mathbf{b}_1^{(F)}, 0) \\ \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{b}}_2^{(F)}, 0) - \mathcal{A}(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h; \tilde{\mathbf{b}}_2^{(F)}, 0) \\ \mathcal{L}(\mathbf{b}_3^{(F)}, 0) - \mathcal{A}(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h; \mathbf{b}_3^{(F)}, 0) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

und

$$\Theta^{(T)} := \left\| \sum_{\ell=1}^6 \kappa_\ell \mathbf{b}_\ell^{(T)} \right\|_{\mathfrak{E}},$$

wobei $(\kappa_1, \dots, \kappa_6)^\top$ Lösung des LGS

$$(a(\mathbf{b}_k^{(T)}, \mathbf{b}_\ell^{(T)}))_{k,\ell=1,\dots,6} (\kappa_\ell)_{\ell=1,\dots,6} = (\mathcal{L}(\mathbf{b}_k^{(T)}, 0) - \mathcal{A}(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h; \mathbf{b}_k^{(T)}, 0))_{k=1,\dots,6},$$

außerdem

$$\begin{aligned} \vartheta^{(e)} &:= \frac{|\mathcal{A}(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h; 0, \mathbf{curl}_\Gamma \lambda^{(e)})|}{\|\mathbf{curl}_\Gamma \lambda^{(e)}\|_{\mathfrak{E}}}, \\ \vartheta^{(F)} &:= \frac{|\mathcal{A}(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h; 0, \mathbf{curl}_\Gamma \lambda^{(F)})|}{\|\mathbf{curl}_\Gamma \lambda^{(F)}\|_{\mathfrak{E}}} \end{aligned}$$

und

$$\vartheta_2^{(F)} := \|\kappa_1 \boldsymbol{\varphi}_1^{(F)} + \kappa_2 \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_2^{(F)} + \kappa_3 \boldsymbol{\varphi}_3^{(F)}\|_{\mathfrak{E}},$$

5. Das Streuproblem

wobei $\tilde{\varphi}_2^{(F)} := \varphi_2^{(F)} - \varphi_4^{(F)}$ und $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)^\top$ Lösung des LGS

$$\begin{pmatrix} b(\varphi_1^{(F)}, \varphi_1^{(F)}) & b(\tilde{\varphi}_2^{(F)}, \varphi_1^{(F)}) & b(\varphi_3^{(F)}, \varphi_1^{(F)}) \\ b(\varphi_1^{(F)}, \tilde{\varphi}_2^{(F)}) & b(\tilde{\varphi}_2^{(F)}, \tilde{\varphi}_2^{(F)}) & b(\varphi_3^{(F)}, \tilde{\varphi}_2^{(F)}) \\ b(\varphi_1^{(F)}, \varphi_1^{(F)}) & b(\tilde{\varphi}_2^{(F)}, \varphi_1^{(F)}) & b(\varphi_3^{(F)}, \varphi_1^{(F)}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}(0, \varphi_1^{(F)}) - \mathcal{A}(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h; 0, \varphi_1^{(F)}) \\ \mathcal{L}(0, \tilde{\varphi}_2^{(F)}) - \mathcal{A}(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h; 0, \tilde{\varphi}_2^{(F)}) \\ \mathcal{L}(0, \varphi_3^{(F)}) - \mathcal{A}(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h; 0, \varphi_3^{(F)}) \end{pmatrix}.$$

Satz 5.2.2. *Es gelte die Saturationsannahme (5.2.17). Dann gilt mit den obigen Bezeichnungen auf einem Gitter mit hexaedrischen Elementen*

$$\eta \lesssim \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h)\|_{\mathcal{X}} \lesssim \frac{1}{1 - \delta} \eta$$

mit dem Fehlerschätzer

$$\begin{aligned} \eta^2 := & \sum_{i=1}^M (\Theta^{(e_i)})^2 + \sum_{j=1}^N \left((\Theta_1^{(F_j)})^2 + (\Theta_2^{(F_j)})^2 \right) + \sum_{k=1}^L (\Theta^{(T_k)})^2 \\ & + \sum_{i=1}^m (\vartheta^{(e_i)})^2 + \sum_{j=1}^n \left((\vartheta_1^{(F_j)})^2 + (\vartheta_2^{(F_j)})^2 \right). \end{aligned}$$

Für tetraedrische Gitter sind es die Terme $\vartheta^{(F_j)}$, für hexaedrische Gitter die Terme $\vartheta_2^{(F_j)}$ (also die, in denen die Basisfunktionen φ_i auf Γ vorkommen), die neu gegenüber den Fehlerschätzern für das Eddy-Current-Problem hinzukommen.

5.3. Ein residualer Fehlerschätzer

Es sei weiterhin \mathcal{A} die in (5.2.16) definierte Bilinearform zur Beschreibung der Kopplungsformulierung, \mathcal{L} die rechte Seite, $(\mathbf{E}, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathcal{X}$ bzw. $(\mathbf{E}_h, \boldsymbol{\lambda}_h) \in \mathcal{X}_h$ die Lösungen der stetigen bzw. diskreten variationellen Formulierungen und $\mathbf{e} := \mathbf{E} - \mathbf{E}_h$ und $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h$ die Galerkinfehler. Wir entscheiden uns dafür, den Fehler in der Energienorm zu betrachten; definiere dazu für $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_{0,\Gamma_C}(\mathbf{curl}, \Omega_D)$, $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma_D)$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 &:= (\mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{v}, \mathbf{curl} \mathbf{v})_{\Omega_D} + \omega^2 (\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{v}, \mathbf{v})_{\Omega_D} \sim \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega_D)}^2, \\ \|\boldsymbol{\zeta}\|_{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 &:= \langle \mathcal{V}_0 \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta} \rangle_{\Gamma_D} + \omega^{-2} \langle V_0 (\text{div}_{\Gamma} \boldsymbol{\zeta}), \text{div}_{\Gamma} \boldsymbol{\zeta} \rangle_{\Gamma_D}. \end{aligned}$$

Mit Satz 5.1.2 gilt nun für beliebige $(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\zeta}_h) \in \mathcal{X}_h$

$$\|\mathbf{e}\|_{\boldsymbol{\varepsilon}} + \|\boldsymbol{\varepsilon}\|_{\boldsymbol{\varepsilon}} \lesssim \sup_{\substack{(\mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}) \in \mathcal{X} \\ \|\mathbf{v}\|_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \|\boldsymbol{\zeta}\|_{\boldsymbol{\varepsilon}} = 1}} |\mathcal{A}(\mathbf{e}, \boldsymbol{\varepsilon}; \mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta})| = \sup_{\dots} |\mathcal{L}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}) - \mathcal{A}(\mathbf{E}_h, \boldsymbol{\lambda}_h; \mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta})|,$$

und somit gilt wegen der Galerkinorthogonalität für beliebige $(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\zeta}_h) \in \mathcal{X}_h$

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{e}\|_{\boldsymbol{\epsilon}} + \|\boldsymbol{\epsilon}\|_{\boldsymbol{\epsilon}} &\lesssim \sup \left| \mathcal{L}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}) - \mathcal{A}(\mathbf{E}_h, \boldsymbol{\lambda}_h; \mathbf{v} - \mathbf{v}_h, \boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{\zeta}_h) \right| \\
 &= \sup \left| \omega^2 (\boldsymbol{\epsilon} \mathbf{E}_h, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h)_{\Omega_D} - (\mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{E}_h, \mathbf{curl}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h))_{\Omega_D} \right. \\
 &\quad + \langle V(\mathbf{curl}_{\Gamma} \gamma_t \mathbf{E}_h), \mathbf{curl}_{\Gamma} \gamma_t(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \rangle_{\Gamma_D} + \omega^2 \langle \mathcal{V}(\mathbf{E}_h \times \mathbf{n}), (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \times \mathbf{n} \rangle_{\Gamma_D} \\
 &\quad + \left. \langle -\tilde{\mathcal{K}} \boldsymbol{\lambda}_h + \mathbf{H}^{in} \times \mathbf{n}, \gamma_t \mathbf{v} - \gamma_t \mathbf{v}_h \rangle_{\Gamma_D} \right| \\
 &+ \left| \langle \gamma_t \mathbf{E}_h - \mathcal{K}(\gamma_t \mathbf{E}_h) + \mathcal{V} \boldsymbol{\lambda}_h - \mathbf{E}_{\Gamma}^{in}, \boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{\zeta}_h \rangle_{\Gamma_D} - \omega^{-2} \langle V(\operatorname{div}_{\Gamma} \boldsymbol{\lambda}_h), \operatorname{div}_{\Gamma}(\boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{\zeta}_h) \rangle_{\Gamma_D} \right|.
 \end{aligned} \tag{5.3.18}$$

Getreu unserer bisherigen Vorgehensweise lautet der nächste Schritt, die Funktionen \mathbf{v} und $\boldsymbol{\zeta}$ zu zerlegen. Wir wenden also die Helmholtz-Zerlegung aus Lemma 5.1.1 an und erhalten

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{\perp} + \mathbf{v}^0, \quad \mathbf{v}^0 = \mathbf{grad} \psi, \quad \mathbf{v}^{\perp} \in \mathbf{M}_{0, \Gamma_C}(\Omega_D), \quad \psi \in H_{0, \Gamma_C}^1(\Omega_D).$$

Danach setzen wir

$$\mathbf{v}_h = \mathfrak{P}_h^1 \mathbf{v}^{\perp} + \mathbf{grad} P_h^1 \psi \in \mathcal{ND}_{1,0, \Gamma_C}(\mathcal{T}_h).$$

Daß \mathbf{v}_h die Nullrandbedingung auf dem Rand Γ_C erfüllt, liegt daran, daß die Operatoren \mathfrak{P}_h^1 und P_h^1 homogene Randbedingungen erhalten (vgl. Seite 69). Wir zerlegen nun $\boldsymbol{\zeta}$ mittels Lemma 2.1.6, 3 in

$$\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{curl}_{\Gamma} \phi + \boldsymbol{\varrho}, \quad \phi \in H^{1/2}(\Gamma_D)/\mathbb{C}, \quad \boldsymbol{\varrho} \in \mathbf{TH}_{\perp}^{1/2}(\Gamma_D)$$

und setzen

$$\boldsymbol{\zeta}_h = \mathbf{curl}_{\Gamma} p_h^1 \phi^{\perp} + R_h^1 \boldsymbol{\varrho} \in \mathcal{RT}_1(\mathcal{K}_h)$$

mit den Projektionsoperatoren p_h^1 und R_h^1 aus Satz 3.3.3. Diese Darstellungen von \mathbf{v} und $\boldsymbol{\zeta}$ in (5.3.18) eingesetzt ergeben, nach elementweiser Anwendung der Greenschen Formeln (2.1.1), (2.1.2) (vgl. die Vorgehensweise für das Eddy-Current-Problem ab Seite 112) und der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{e}\|_{\boldsymbol{\epsilon}} + \|\boldsymbol{\epsilon}\|_{\boldsymbol{\epsilon}} &\lesssim \sup \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |(\omega^2 \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{E}_h - \mathbf{curl} \mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{E}_h, \mathbf{v}^{\perp} - P_h^1 \mathbf{v}^{\perp})_T| \right. \\
 &+ \sum_{F \in \mathcal{F}_h^C} | \langle [\mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{E}_h \times \mathbf{n}]_F, \gamma_t \mathbf{v}^{\perp} - \gamma_t \mathfrak{P}_h^1 \mathbf{v}^{\perp} \rangle_F | \\
 &+ \sum_{F \in \mathcal{F}_h^{\Gamma}} | \langle [\mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{E}_h \times \mathbf{n} - \mathbf{curl}_{\Gamma} V(\mathbf{curl}_{\Gamma} \gamma_t \mathbf{E}_h) - \omega^2 \mathcal{V}(\mathbf{E}_h \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} - \tilde{\mathcal{K}} \boldsymbol{\lambda}_h \\
 &\quad + \mathbf{H}^{in} \times \mathbf{n}, \gamma_t \mathbf{v}^{\perp} - \gamma_t P_h^1 \mathbf{v}^{\perp} \rangle_F | \\
 &+ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \omega^2 |(\operatorname{div}_{\Gamma} \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{E}_h, \psi - P_h^1 \psi)_T|
 \end{aligned}$$

5. Das Streuproblem

$$\begin{aligned}
& + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^C} \omega^2 |\langle [\mathbf{n} \cdot \epsilon \mathbf{E}_h]_F, \psi - P_h^1 \psi \rangle_F| \\
& + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^\Gamma} |\langle \omega^2 \mathbf{n} \cdot \epsilon \mathbf{E}_h + \omega^2 \operatorname{curl}_\Gamma \mathcal{V}(\mathbf{E}_h \times \mathbf{n}) - \operatorname{div}_\Gamma \tilde{\mathcal{K}} \boldsymbol{\lambda}_h - \operatorname{curl}_\Gamma \mathbf{H}_\Gamma^{in}, \psi - P_h^1 \psi \rangle_F| \\
& + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^\Gamma} |\langle \operatorname{curl}_\Gamma \mathcal{K}(\gamma_t \mathbf{E}_h) - \operatorname{curl}_\Gamma \gamma_t \mathbf{E}_h + \operatorname{curl}_\Gamma \mathcal{V} \boldsymbol{\lambda}_h - \operatorname{curl}_\Gamma \mathbf{E}_\Gamma^{in}, \phi - p_h^1 \phi \rangle_F| \\
& + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^\Gamma} |\langle \mathcal{K}(\gamma_t \mathbf{E}_h) - \gamma_t \mathbf{E}_h + \mathcal{V} \boldsymbol{\lambda}_h + \mathbf{E}_\Gamma^{in} + \omega^{-2} \mathbf{grad}_\Gamma V(\operatorname{div}_\Gamma \boldsymbol{\lambda}_h), \boldsymbol{\varrho} - R_h^1 \boldsymbol{\varrho} \rangle_F| \Big\}.
\end{aligned}$$

Hierbei sind wieder $\mathcal{F}_h^\Gamma = \{F \in \mathcal{F}_h : F \subset \Gamma_D\}$ die Menge der äußeren Flächen und $\mathcal{F}_h^C = \mathcal{F}_h \setminus \mathcal{F}_h^\Gamma$ die Menge der inneren Flächen. Durch Abschätzen der Skalarprodukte mit Cauchy-Schwarz und den Approximationseigenschaften aus Satz 3.3.3 erhält man dann

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{e}\|_\epsilon + \|\boldsymbol{\varepsilon}\|_\epsilon & \lesssim \sup \left\{ \left\{ \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|\sqrt{\mu} \omega^2 \epsilon \mathbf{E}_h - \sqrt{\mu} \operatorname{curl} \mu^{-1} \operatorname{curl} \mathbf{E}_h\|_T^2 \right)^{1/2} \right. \right. \\
& + \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^C} h_F \|\sqrt{\mu_A} [\mu^{-1} \operatorname{curl} \mathbf{E}_h \times \mathbf{n}]_F\|_F^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^\Gamma} h_F \|\sqrt{\mu} (\mu^{-1} \operatorname{curl} \mathbf{E}_h \times \mathbf{n} \right. \\
& \left. \left. - \operatorname{curl}_\Gamma V(\operatorname{curl}_\Gamma \gamma_t \mathbf{E}_h) - \omega^2 \mathcal{V}(\mathbf{E}_h \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} - \tilde{\mathcal{K}} \boldsymbol{\lambda}_h + \mathbf{H}^{in} \times \mathbf{n})\|_F^2 \right)^{1/2} \right\} \left\| \frac{1}{\sqrt{\mu}} \mathbf{v}^\perp \right\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_D)} \\
& + \left\{ \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \omega^3 \|\sqrt{\epsilon}^{-1} \operatorname{div} \epsilon \mathbf{E}_h\|_T^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^C} h_F \omega^3 \|\sqrt{\epsilon_A}^{-1} [\mathbf{n} \cdot \epsilon \mathbf{E}_h]_F\|_F^2 \right)^{1/2} \right. \\
& + \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^\Gamma} h_F \sqrt{\omega}^{-1} \|\sqrt{\epsilon}^{-1} (\omega^2 \mathbf{n} \cdot \epsilon \mathbf{E}_h + \omega^2 \operatorname{curl}_\Gamma \mathcal{V}(\mathbf{E}_h \times \mathbf{n}) \right. \\
& \left. \left. + \operatorname{div}_\Gamma \tilde{\mathcal{K}} \boldsymbol{\lambda}_h - \operatorname{curl}_\Gamma \mathbf{H}_\Gamma^{in})\|_F^2 \right)^{1/2} \right\} \sqrt{\omega} \|\sqrt{\epsilon} \mathbf{grad} \psi\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_D)} \\
& + \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^\Gamma} h_F \|\operatorname{curl}_\Gamma \mathcal{K}(\gamma_t \mathbf{E}_h) - \operatorname{curl}_\Gamma \gamma_t \mathbf{E}_h + \operatorname{curl}_\Gamma \mathcal{V} \boldsymbol{\lambda}_h - \operatorname{curl}_\Gamma \mathbf{E}_\Gamma^{in}\|_F^2 \right)^{1/2} \|\operatorname{curl}_\Gamma \phi\|_{\mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\Gamma_D)} \\
& + \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^\Gamma} h_F \|\mathcal{K}(\gamma_t \mathbf{E}_h) - \gamma_t \mathbf{E}_h + \mathcal{V} \boldsymbol{\lambda}_h + \gamma_t \mathbf{E}_h^{in} + \omega^{-2} \mathbf{grad}_\Gamma V(\operatorname{div}_\Gamma \boldsymbol{\lambda}_h)\|_F^2 \right)^{1/2} \|\boldsymbol{\varrho}\|_{\mathbf{TH}_{\perp}^{1/2}(\Gamma_D)} \Big\}.
\end{aligned}$$

Mit ϵ, μ auf Γ ist stets das innere ϵ, μ , also die Spur von Ω_D kommend gemeint, und ϵ_A bzw. μ_A auf einer gemeinsamen Fläche zweier Elemente bezeichnen den Mittelwert der ϵ bzw. μ . Es ist $\sqrt{\omega} \|\sqrt{\epsilon} \mathbf{grad} \psi\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_D)} = \|\mathbf{v}^0\|_\epsilon$, außerdem können wir mit Lemma 4.3.1 den Term $\|\frac{1}{\sqrt{\mu}} \mathbf{v}^\perp\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_D)}$ durch $\|\mathbf{e}\|_\epsilon$ und mit Lemma 2.1.6, 3 den Term $\|\operatorname{curl}_\Gamma \phi\|_{\mathbf{TH}_{\parallel}^{-1/2}(\Gamma_D)} + \|\boldsymbol{\varrho}\|_{\mathbf{TH}_{\perp}^{1/2}(\Gamma_D)}$ durch $\|\boldsymbol{\varepsilon}\|_{-1/2, \operatorname{div}_\Gamma}$ abschätzen, so daß wir letztendlich folgenden Satz bewiesen haben:

Satz 5.3.1. *Es gilt*

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{e}, \boldsymbol{\varepsilon})\|_{\mathcal{X}} \lesssim & \left((\eta_0^T)^2 + (\eta_1^T)^2 + (\eta_0^{F,C})^2 + (\eta_1^{F,C})^2 \right. \\ & \left. + (\eta_0^{F,\Gamma})^2 + (\eta_1^{F,\Gamma})^2 + (\eta_2^{F,\Gamma})^2 + (\eta_3^{F,\Gamma})^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \eta_j^T &:= \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\eta_j^T)^2 \right)^{1/2} \quad (j = 0, 1), & \eta_j^{F,C} &:= \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^C} (\eta_j^{F,C})^2 \right)^{1/2} \quad (j = 0, 1), \\ \eta_j^{F,\Gamma} &:= \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^\Gamma} (\eta_j^{F,\Gamma})^2 \right)^{1/2} \quad (j = 0, \dots, 3) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \eta_0^T &:= h_T \omega^{3/2} \|\sqrt{\epsilon}^{-1} \operatorname{div} \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{E}_h\|_{0,T}, \\ \eta_1^T &:= h_T \|\sqrt{\mu} \omega^2 \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{E}_h - \sqrt{\mu} \operatorname{curl} \mu^{-1} \operatorname{curl} \mathbf{E}_h\|_{0,T}, \\ \eta_0^{F,C} &:= \sqrt{h_F} \omega^3 \|\sqrt{\epsilon_A}^{-1} [\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{E}_h]_F\|_{0,F}, \\ \eta_1^{F,C} &:= \sqrt{h_F} \|\sqrt{\mu_A} [\mu^{-1} \operatorname{curl} \mathbf{E}_h \times \mathbf{n}]\|_{0,F}, \\ \eta_0^{F,\Gamma} &:= \sqrt{h_F} \sqrt{\omega^{-1}} \|\omega^2 \mathbf{n} \cdot \sqrt{\epsilon} \mathbf{E}_h + \sqrt{\epsilon}^{-1} (\omega^2 \operatorname{curl}_\Gamma \mathcal{V}(\mathbf{E}_h \times \mathbf{n}) + \operatorname{div}_\Gamma \tilde{\mathcal{K}} \boldsymbol{\lambda}_h - \operatorname{curl}_\Gamma \mathbf{H}_\Gamma^{in})\|_{0,F}, \\ \eta_1^{F,\Gamma} &:= \sqrt{h_F} \|\sqrt{\mu}^{-1} \operatorname{curl} \mathbf{E}_h \times \mathbf{n} - \sqrt{\mu} (\operatorname{curl}_\Gamma V(\operatorname{curl}_\Gamma \gamma_t \mathbf{E}_h) - \omega^2 \mathcal{V}(\mathbf{E}_h \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} - \tilde{\mathcal{K}} \boldsymbol{\lambda}_h, \\ &\quad + \mathbf{H}^{in} \times \mathbf{n})\|_{0,F}, \\ \eta_2^{F,\Gamma} &:= \sqrt{h_F} \|\operatorname{curl}_\Gamma \mathcal{K}(\gamma_t \mathbf{E}_h) - \operatorname{curl}_\Gamma \gamma_t \mathbf{E}_h + \operatorname{curl}_\Gamma \mathcal{V} \boldsymbol{\lambda}_h - \operatorname{curl}_\Gamma \mathbf{E}_\Gamma^{in}\|_{0,F}, \\ \eta_3^{F,\Gamma} &:= \sqrt{h_F} \|\mathcal{K}(\gamma_t \mathbf{E}_h) + \mathcal{V} \boldsymbol{\lambda}_h - \gamma_t \mathbf{E}_h - \mathbf{E}_\Gamma^{in} + \omega^{-2} \mathbf{grad}_\Gamma V(\operatorname{div}_\Gamma \boldsymbol{\lambda}_h)\|_{0,F}. \end{aligned}$$

Genau wie in Bemerkung 5 auf Seite 116 können auch hier vereinfachte Fehlerindikatoren für stetige ϵ, μ , für konstante ϵ, μ und bei Verwendung von Nédélec-Elementen niedrigster Ordnung angegeben werden. Wir verzichten darauf, diese Vereinfachungen explizit hinzuschreiben.

Wir merken noch an, daß die Terme des Fehlerschätzers sehr ähnlich denen des Fehlerschätzers für das Eddy-Current-Problem aus Satz 4.3.4 sind (darauf wird in der folgenden Bemerkung noch ein wenig eingegangen). Daß es dort einen Term weniger gibt als hier beim Streuproblem (hier kommt nämlich der Term $\eta_3^{F,\Gamma}$ neu hinzu), liegt wieder an der Divergenzfreiheit der Randvariablen beim Eddy-Current-Problem: dort ist $\boldsymbol{\lambda} = \operatorname{curl}_\Gamma \phi$, hier ist $\boldsymbol{\lambda} = \operatorname{curl}_\Gamma \phi + \boldsymbol{g}$.

Bemerkung 9. Wie in Bemerkung 6 zum Eddy-Current-Problem auf Seite 117 wollen wir hier angeben, wie man die im Fehlerschätzer vorkommenden Potentiale berechnen

5. Das Streuproblem

kann. Es ist zu zeigen, daß sie sämtlich in Integrale mit Kern Φ oder $\mathbf{grad} \Phi$ umgewandelt werden können. Die Potentiale $\mathcal{V}(\mathbf{E}_h \times \mathbf{n})(\mathbf{x})$, $\tilde{\mathcal{K}}\boldsymbol{\lambda}_h(\mathbf{x})$, $\mathcal{K}(\gamma_t \mathbf{E}_h)(\mathbf{x})$ und $\mathcal{V}\boldsymbol{\lambda}_h(\mathbf{x})$ brauchen nicht weiter umgeformt zu werden. Die restlichen Potentiale kamen fast alle schon beim Eddy-Current-Problem vor: Die Potentiale $\mathbf{curl}_\Gamma \mathcal{V}(\mathbf{E}_h \times \mathbf{n})$, $\mathbf{curl}_\Gamma \mathcal{V}\boldsymbol{\lambda}_h(\mathbf{x})$ und $\mathbf{curl}_\Gamma \mathcal{K}(\gamma_t \mathbf{E}_h)(\mathbf{x})$ werden wie in Bemerkung 6 (Gleichungen (4.3.59) und (4.3.60)) angegeben umgeformt. Die beiden Potentiale $\mathbf{curl}_\Gamma V(\mathbf{curl}_\Gamma \gamma_t \mathbf{E}_h)(\mathbf{x})$ und $\mathbf{grad}_\Gamma V(\mathbf{div}_\Gamma \boldsymbol{\lambda}_h)(\mathbf{x})$ entsprechen dem \mathcal{W} aus (4.3.57), denn nach den Definitionen der Flächendifferentialoperatoren auf Seite 20 und mit den gleichen Umformungen, wie in (4.3.57) verwendet, gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{curl}_\Gamma V(\mathbf{curl}_\Gamma \gamma_t \mathbf{E}_h)(\mathbf{x}) &= -\mathbf{n} \times \mathbf{grad}_\Gamma V(\mathbf{div}_\Gamma(\mathbf{E}_h \times \mathbf{n}))(\mathbf{x}) = -\mathcal{W}(\gamma_t \mathbf{E}_h)(\mathbf{x}), \\ \mathbf{grad}_\Gamma V(\mathbf{div}_\Gamma \boldsymbol{\lambda}_h)(\mathbf{x}) &= \mathbf{n} \times \mathcal{W}(\boldsymbol{\lambda}_h \times \mathbf{n})(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Der einzige wirklich neue Term gegenüber dem Eddy-Current-Problem ist $\mathbf{div}_\Gamma \tilde{\mathcal{K}}\boldsymbol{\lambda}_h$. Hierfür benötigen wir die folgende Gleichheit nach (2.2.21):

$$\mathbf{curl} \mathbf{K}(\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{n}) = k^2 \mathbf{V}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{grad} \mathbf{V}(\mathbf{div}_\Gamma \boldsymbol{\lambda}).$$

Damit, und mit der Definition (2.2.23) von $\tilde{\mathcal{K}}$, Lemma 2.1.5 und Lemma 2.2.9, 2 gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{div}_\Gamma \tilde{\mathcal{K}}\boldsymbol{\lambda}_h &= \mathbf{div}_\Gamma \gamma_t^\times \mathbf{K}(\boldsymbol{\lambda}_h \times \mathbf{n})(\mathbf{x}) = \gamma_n \mathbf{curl} \mathbf{K}(\boldsymbol{\lambda}_h \times \mathbf{n})(\mathbf{x}) \\ &= \gamma_n (k^2 \mathbf{V}\boldsymbol{\lambda}_h + \mathbf{grad} \mathbf{V}(\mathbf{div}_\Gamma \boldsymbol{\lambda}_h))(\mathbf{x}) \\ &= k^2 \int_{\Gamma_D} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \boldsymbol{\lambda}_h(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS_{\mathbf{y}} + \int_{\Gamma_D} \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} \mathbf{div}_\Gamma \boldsymbol{\lambda}_h(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \frac{1}{2} \mathbf{div}_\Gamma \boldsymbol{\lambda}_h(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

6. Numerische Experimente

Wir möchten den residualen Fehlerschätzer aus Abschnitt 4.3 in der Praxis testen. Dafür müssen wir zuerst das Galerkin-Verfahren (4.1.33) implementieren. Dazu verwenden wir das in *Fortran 95* geschriebene Software-Paket `maiprogs`¹ [72, 73, 74]. Folgende Punkte sollen den Aufbau des Programms und die Überlegungen, die dabei eine Rolle spielten, im Groben erleuchten:

Aufbau des Gitters Es wird ein 3D-Gitter eingelesen, aus einer Grundkonfiguration erstellt oder aus einem vorhergehenden Gitter durch Verfeinerung gewonnen. Es wird sowohl mit einer Liste der aktuellen Elemente wie auch mit einer Baumstruktur (Information über Elemente sämtlicher Levels) gearbeitet. Auf die Eigenschaften des Gitters sind wir ausführlich in Abschnitt 3.4 eingegangen. Die wesentlichen Informationen über das Gitter sind: Liste der durch xyz -Koordinaten gegebenen Knotenpunkte, Liste der durch Knoten gegebenen Elemente, Liste der Flächen-nachbarn eines Elementes.

Aufbau der Splines Der durch Finite-Element-Art (z.B. stetig, Raviart-Thomas, Nédélec) und lokalem Polynomgrad gegebene Splineraum wird auf dem Gitter erstellt. Dazu werden die Freiheitsgrade lokal durchgezählt und anschließend eine Abbildung *lokale Basisfunktionen* \mapsto *globale Basisfunktionen* erstellt.

Aufbau der Matrix Der Finite-Element-Anteil der Matrix wird in einer *sparse*-Struktur gespeichert, die diversen Randelement-Anteile in einer *dense*-Struktur. Es müssen nun Integrale bzw. Doppelintegrale auf einem bzw. zwei Elementen über das Produkt zweier Basisfunktionen (mit Kern) berechnet werden. Dazu werden die Integrale auf das Referenzelement transformiert und dort als Linearkombinationen von Monomen dargestellt, indem man die auf das Referenzelement transformierten Basisfunktionen als (möglicherweise vektorielle) Linearkombinationen von Monomen darstellt [71]. Aus diesem Grund haben wir uns in Abschnitt 3.1 sehr ausführlich mit den Transformationsgesetzen der entsprechenden Finite-Element-Räume

¹`maiprogs` wurde von M. Maischak, Institut für Angewandte Mathematik, Universität Hannover, entwickelt.

6. Numerische Experimente

beschäftigt. Wir schreiben also für das Teilintegral

$$\int_K \varphi_1(\mathbf{x}) \cdot \varphi_2(\mathbf{x}) ds_{\mathbf{x}} ds_{\mathbf{y}} = \sum_{\substack{k,\ell,m, \\ n,p,q}} \sum_{r=1,2} \sum_{s=1,2,3} c_{k,\ell,m,r}^{(s)} c_{n,p,q,r}^{(s)} \mathbf{e}^{(s)} \int_{\hat{K}} x_1^{k+n} x_2^{\ell+p} x_3^{m+q} d\mathbf{x} d\mathbf{y}$$

mit gewissen Koeffizienten $c_{\dots,r}^{(s)}$ und für das Rand-Teilintegral

$$\begin{aligned} \int_{K_1} \int_{K_2} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi_1(\mathbf{x}) \cdot \varphi_2(\mathbf{y}) ds_{\mathbf{x}} ds_{\mathbf{y}} \\ = \sum_{k,\ell,m,n} \sum_{r=1,2} \sum_{s=1,2,3} c_{k,\ell,r}^{(s)} c_{m,n,r}^{(s)} \mathbf{e}^{(s)} \int_{\hat{K}} \int_{\hat{K}} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) x_1^k x_2^\ell y_1^m y_2^n d\mathbf{x} d\mathbf{y} \end{aligned}$$

mit gewissen Koeffizienten $c_{\dots,r}^{(s)}$. Hierbei ist $\mathbf{e}^{(s)}$ der s -te Einheitsvektor. Die FEM-Integrale werden dann analytisch berechnet, und auch die BEM-Integrale können, zumindest auf Rechtecken, analytisch durch rekursiv definierte Stammfunktionen gewonnen werden [69, 70]. Auf Dreiecken müssen die BEM-Integrale noch per Quadratur berechnet werden, dazu nimmt man die Gauß-Quadratur mit Duffy-Trick mit z.B. 16 Punkten für das innere und 14 für das äußere Integral. Der hyper-singuläre Term $\langle \mathcal{W}_0 \mathbf{u}_\Gamma, \mathbf{v}_\Gamma \rangle_\Gamma$ wird in beiden Fällen zuerst mittels Lemma 2.2.7, 3 umgeformt.

Aufstellen der rechten Seite Auch das Integral auf der rechten Seite wird wie oben in eine Linearkombination von Integralen über Monomen auf dem Referenzelement verwandelt, also

$$\int_K \varphi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{J}_0(\mathbf{x}) ds_{\mathbf{x}} ds_{\mathbf{y}} = \sum_{k,\ell,m} \sum_{s=1,2,3} c_{k,\ell,m}^{(s)} \mathbf{e}^{(s)} \int_{\hat{K}} x_1^k x_2^\ell x_3^m \mathbf{J}_0^{(s)}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} d\mathbf{y}$$

mit gewissen Koeffizienten $c_{k,\ell,m}^{(s)}$. Diese Integrale werden per Gauß-Quadratur mit z.B. 16 Punkten berechnet.

Lösen des Gleichungssystems Für große Gleichungssysteme, wie sie hier entstehen, bieten sich iterative Löser an, wie z.B. das GMRES-Verfahren. Dieses Verfahren, wie auch viele andere, sind in `maiprogs` implementiert. Obwohl die Kondition der Systemmatrix gar nicht so schlecht ist (siehe Tabelle 6.1 unten), funktioniert das GMRES-Verfahren hier nur sehr unzureichend: Um einen Iterationsfehler kleiner als 10^{-8} zu erreichen, rechnet der GMRES-Löser länger als der Gauß-Löser. Auch das Variieren des *restart*-Wertes (die Anzahl der pro Iterationsschritt zu orthogonalisierenden Vektoren) bringt keine entscheidende Verbesserung. In [58] schlägt Hiptmair für das Kopplungssystem (4.1.33) eine Kombination von Präkonditionierung durch eine „vereinfachte“ Systemgleichung und Multigridverfahren vor.

Leider ist es aus Zeitgründen nicht möglich gewesen, diese Verfahren zu implementieren (insbesondere das Multigridverfahren für Randelemente), so daß wir das Gleichungssystem tatsächlich mit dem Gauß-Algorithmus direkt lösen. Anhand der Tabelle 6.1 sieht man, daß dieses Vorgehen bis $n = 7$ keinen entscheidenden Nachteil birgt, da bis dahin die Erstellung der Matrix aufgrund der Randintegralterme immer noch zeitaufwendiger als das Lösen mit Gauß ist. Danach allerdings nimmt die Rechenzeit des Löser überhand, und auch die Anzahl der Freiheitsgrade N wird so groß, daß die Grenze der Speicherkapazität (der Gauß-Algorithmus braucht immerhin $N \cdot (N + 1)$ Speicherplätze) erreicht wird.

Berechnung des Fehlerschätzers Wir haben die vereinfachten Fehlerschätzerterme implementiert, die sich bei Verwendung von Nédélec-Elementen niedrigster Ordnung ergeben (vgl. Bemerkung 5 auf Seite 116). Die Berechnung der L^2 -Normen geschieht durch Gauß-Quadratur mit wenigen Knoten, z.B. vier. Die Berechnung der Potentiale, die in $\eta_1^{F,\Gamma}$ und $\eta_2^{F,\Gamma}$ vorkommen, wurde schon in Bemerkung 6 auf Seite 117 besprochen.

Bestimmung der zu verfeinernden Elemente Dies geschieht mit der Verfeinerungsprozedur von Seite 85. Die dort auftretende Eigenschaft $FS(T)$ kann z.B. genau dann wahr sein, wenn $\eta^T \geq \nu \eta_{max}$ ist, wobei $\eta_{max} := \max_{T \in \mathcal{T}_h} \eta^T$ (hier bezeichnet η^T die Summe der zu einem Element T gehörenden Fehleranteile, so daß $\eta = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta^T$) und $0 < \nu < 1$ ein vorgegebener Wert ist. Eine weitere Möglichkeit ist: $FS(T)$ ist genau dann wahr, wenn $\eta^T \geq \nu \eta^*$, wobei η^* so gewählt wird, daß ungefähr $(1 - \nu) \cdot 100\%$ der Elemente verfeinert werden.

Gitterverfeinerung \longrightarrow Aufbau des Gitters

Es wird das Galerkin-Verfahren (4.1.33) zum Eddy-Current-Problem gerechnet, daß wir hier noch einmal angeben: *Finde $\mathbf{u}_h \in \mathcal{N}\mathcal{D}_1(\mathcal{T}_h)$, $\varphi_h \in \mathcal{S}_1(\mathcal{K}_h)/\mathbb{C}$, so daß*

$$\begin{aligned} & (\mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{u}_h, \mathbf{curl} \mathbf{v}_h)_{\Omega_C} + i\omega(\sigma \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)_{\Omega_C} \\ & - \langle \mathcal{W}_0 \gamma_t \mathbf{u}_h, \gamma_t \mathbf{v}_h \rangle_{\Gamma} + \langle \tilde{\mathcal{K}}_0 \mathbf{curl}_{\Gamma} \varphi_h, \gamma_t \mathbf{v}_h \rangle_{\Gamma} = -i\omega(\mathbf{J}_0, \mathbf{v}_h)_{\Omega_C}, \\ & \langle (I - \mathcal{K}_0) \gamma_t \mathbf{u}_h, \mathbf{curl}_{\Gamma} \tau_h \rangle_{\Gamma} + \langle \mathcal{V}_0 \mathbf{curl}_{\Gamma} \varphi_h, \mathbf{curl}_{\Gamma} \tau_h \rangle_{\Gamma} + \mathcal{P}(\varphi_h, \tau_h) = 0 \end{aligned}$$

für alle $\mathbf{v}_h \in \mathcal{N}\mathcal{D}_1(\mathcal{T}_h)$, $\tau_h \in \mathcal{S}_1(\mathcal{K}_h)/\mathbb{C}$

(siehe Kapitel 4 für die Herleitung des Systems, Kapitel 3 für die Finiten-Elemente-Räume und Kapitel 2 für die Randintegraloperatoren). Wir verwenden also Nédélec-Elemente niedrigster Ordnung für die Gebietsvariable \mathbf{u}_h und stückweise lineare, global stetige Ansatzfunktionen für die Randvariable φ_h . Es ist $\boldsymbol{\lambda}_h := \mathbf{grad} \varphi_h \times \mathbf{n}$. In den

6. Numerische Experimente

n	h	$N = N_{\mathbf{u}_h} + N_{\boldsymbol{\lambda}_h}$	t_{mat}	$t_{\text{Gauß}}$	κ
1	2.0000	20 = 12 + 8	0.104	0.004	139
2	1.0000	80 = 54 + 26	1.424	0.039	347
3	0.6667	200 = 144 + 56	7.399	0.415	521
4	0.5000	398 = 300 + 98	23.784	2.587	572
5	0.4000	692 = 540 + 152	60.087	14.536	589
6	0.3333	1100 = 882 + 218	124.068	56.343	685
7	0.2857	1640 = 1344 + 296	230.454	179.829	928
8	0.2500	2330 = 1944 + 386	395.088	529.698	1210
9	0.2222	3188 = 2700 + 488	633.783	1265.103	1527
10	0.2000	4232 = 3630 + 602	972.745	2767.032	
11	0.1818	5480 = 4752 + 728	1427.673	5657.951	
12	0.1667	6950 = 6084 + 866	2021.746	10690.926	
13	0.1538	8660 = 7644 + 1016	2793.004	19479.602	

Tabelle 6.1.: Daten zum Gleichungssystem aus 4.1.32

meisten Beispielen werden wir hexaedrische Elemente verwenden, nur in Beispiel 2 benutzen wir zum Vergleich mal tetraedrische Elemente. In allen durchgeführten Tests ist $\Omega_C = (-1, 1)^3$, $\Gamma = \partial\Omega_C$.

Alle Experimente bis auf das letzte bestehen darin, das System (4.1.33) auf einer Folge uniform verfeinerter Gitter auf $(-1, 1)^3$ zu rechnen, und dazu jeweils die Energienorm $\sqrt{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{e}}^2 + \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_{\mathbf{e}}^2}$ des Galerkinfehlers (vgl. Seite 107) und den Wert des residualen Fehlerschätzers $\eta := \left((\eta_0^{\mathcal{T}})^2 + (\eta_1^{\mathcal{T}})^2 + (\eta_0^{\mathcal{F},C})^2 + (\eta_1^{\mathcal{F},C})^2 + (\eta_0^{\mathcal{F},\Gamma})^2 + (\eta_1^{\mathcal{F},\Gamma})^2 + (\eta_2^{\mathcal{F},\Gamma})^2 \right)^{1/2}$ (wie oben unter **Berechnung des Fehlerschätzers**) zu bestimmen, um diese dann schließlich graphisch und tabellarisch zu vergleichen. Im letzten Beispiel wird dann mittels des Fehlerschätzers eine adaptive Gitterverfeinerung durchgeführt.

In Tabelle 6.1 geben wir für die uniforme Gitterfolge \mathcal{T}_h , $h = \frac{1}{n}$, $n = 1, \dots, 13$ mit hexaedrischen (sogar Würfel-)Elementen auf Ω_C die Anzahl $N = N_{\mathbf{u}_h} + N_{\boldsymbol{\lambda}_h}$ der Freiheitsgrade, die Rechenzeit t_{mat} in Sekunden zur Aufstellung der Matrix, die Rechenzeit $t_{\text{Gauß}}$ zum Lösen des Gleichungssystems und die Konditionszahl κ der Systemmatrix an. Die Konditionszahlen werden nur bis $n = 9$ ausgegeben, da deren Berechnung sehr zeitaufwendig wird. Alle Rechnungen wurden auf einer *SUN E450* mit 480 MHz und 4 GB Arbeitsspeicher durchgeführt.

Beispiel 1. In unserem ersten Beispiel testen wir das Galerkinverfahren (4.1.33) und den

residualen Fehlerschätzer für die exakte Lösung

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{grad}(G\rho)(\mathbf{x}) := \mathbf{grad} \int_{\Omega_C} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

mit der Dichtefunktion

$$\rho(\mathbf{x}) = ((1 - x_1^2)(1 - x_2^2)(1 - x_3^2))^2 x_1 x_2 x_3.$$

Da $\rho = \mathbf{grad} \rho = 0$ auf dem Rand Γ des Gebietes $\Omega_C = (-1, 1)^3$ ist, erhält man durch partielle Integration die Darstellung

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (G \mathbf{grad} \rho)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega_C} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \mathbf{grad} \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Die Funktion $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ entspricht gerade dem elektrischen Potential in einem Punkt \mathbf{x} als Folge einer stationären Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{x})$. Wegen $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ und $\mathbf{curl} \mathbf{u} = 0$ im Außenraum Ω_E gilt $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \mathbf{curl} \mathbf{curl} \mathbf{u} = 0$ in Ω_E , so daß \mathbf{u} tatsächlich harmonisch im Außenraum ist. Im Innenraum Ω_C gilt ebenfalls $\mathbf{curl} \mathbf{u} = 0$ und außerdem $\operatorname{div} \mathbf{u} = -4\pi\rho(\mathbf{x})$. Die rechte Seite hat dann nach (4.1.21) die Form

$$\mathbf{J}_0 = -\sigma \mathbf{u} + i\omega^{-1} \mathbf{curl}(\mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{u}) = -\sigma \mathbf{u} \quad \text{in } \Omega_C,$$

$\mathbf{J}_0 = 0$ in Ω_E . Es gilt also auch $\mathbf{curl} \mathbf{J}_0 = 0$ in \mathbb{R}^3 und $\operatorname{div} \mathbf{J}_0 = 0$ in Ω_E , $\operatorname{div} \mathbf{J}_0(\mathbf{x}) = 4\sigma\pi\rho(\mathbf{x})$ in Ω_C . Wegen $\rho = 0$ auf Γ ist $\operatorname{div} \mathbf{J}_0$ stetig in \mathbb{R}^3 , und somit gilt insbesondere $\mathbf{J}_0 \in \mathbf{H}(\operatorname{div}, \mathbb{R}^3)$ (wie auf Seite 96 verlangt). Für dieses Beispiel verschwindet die Randvariable $\boldsymbol{\lambda} = \mu^{-1} \gamma_N \mathbf{u} = \mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{u} \times \mathbf{n}$, da $\mathbf{curl} \mathbf{u} = 0$. Wir setzen $\mu = \sigma = \omega = 1$ und rechnen das Galerkin-Verfahren für $n = 1, \dots, 13$ mit hexaedrischen Elementen. Die Abbildung 6.1 gibt den Fehler $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h)$ in der Energienorm wieder, und im Vergleich dazu den Wert des Fehlerschätzers η . Aufgrund der Rotationsfreiheit von \mathbf{u} ist der Energiefehler im Wesentlichen die \mathbf{L}^2 -Norm von $\mathbf{u} - \mathbf{u}_h$; so erhält man z.B. für $n = 13$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_C)} &= 7.14846420991702e - 3, \\ \|\mathbf{curl} \mathbf{u} - \mathbf{curl} \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_C)} &= \|\mathbf{curl} \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_C)} = 5.287219946553041e - 5, \\ \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)} &= \|\boldsymbol{\lambda}_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)} = 9.549764727140405e - 6. \end{aligned}$$

Man sieht, daß die Werte $\|\mathbf{curl} \mathbf{u} - \mathbf{curl} \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_C)}$ und $\|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$ klein sind im Vergleich zu $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_C)}$. Tabelle 6.2 gibt die Werte und die Konvergenzraten (mit α bezeichnet) des Galerkinfehlers und des Fehlerschätzers wieder. Die Konvergenzordnungen α des Galerkinfehlers und des residualen Fehlerschätzers liegen sehr nahe an eins, genauer: sie steigen monoton gegen eins. Das Verfahren konvergiert also wie erwartet mit der Ordnung 1, und dies spiegelt sich im residualen Fehlerschätzer wieder.

6. Numerische Experimente

n	e_n	α	η_n	α
5	1.815e-2		1.134e-1	
		0.9257		0.9302
6	1.533e-2		9.575e-2	
		0.9683		0.9420
7	1.320e-2		8.281e-2	
		0.9836		0.9523
8	1.158e-2		7.292e-2	
		0.9898		0.9604
9	1.031e-2		6.512e-2	
		0.9932		0.9668
10	9.382e-3		5.881e-2	
		0.9944		0.9717
11	8.442e-3		5.361e-2	
		0.9950		0.9757
12	7.742e-3		4.925e-2	
		0.9961		0.9788
13	7.149e-3		4.554e-2	

Tabelle 6.2.: Werte und Konvergenzraten α des Energiefehlers e_n und des residualen Fehlerschätzers η_n zu Beispiel 1

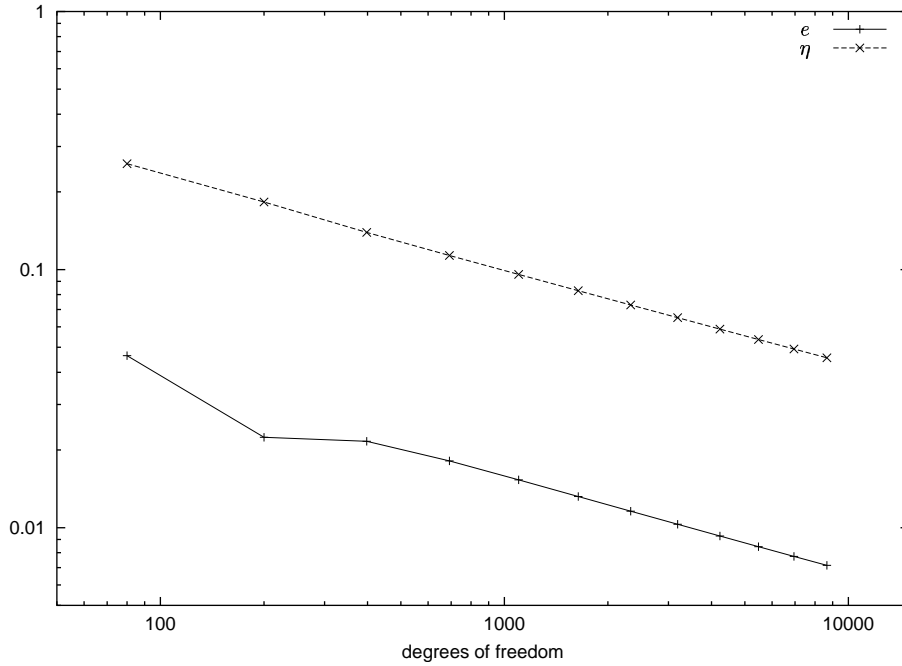


Abbildung 6.1.: Energienorm e des Galerkinfehlers $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h)$ und residualer Fehlerschätzer η zu Beispiel 1

Beispiel 2. Dieses Beispiel soll das Galerkin-Verfahren und den residualen Fehlerschätzer an einem nicht rotationsfreien Beispiel testen und zugleich einen Vergleich zwischen hexaedrischen und tetraedrischen Elementen liefern. In diesem und dem nächsten Beispiel wählen wir als exakte Lösung

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{curl}(\mathbf{G}\boldsymbol{\rho})(\mathbf{x}) := \mathbf{curl} \int_{\Omega_C} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \boldsymbol{\rho}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

mit der Dichtefunktion

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit der skalaren Funktion ρ aus Beispiel 1. Da $\boldsymbol{\rho} = 0$ und $\partial_{x_j} \boldsymbol{\rho} = 0$ ($j = 1, 2, 3$) auf dem Rand Γ des Gebietes $\Omega_C = (-1, 1)^3$ ist, erhält man durch partielle Integration die Darstellung

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (\mathbf{G} \mathbf{curl} \boldsymbol{\rho})(\mathbf{x}) = \int_{\Omega_C} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \mathbf{curl} \boldsymbol{\rho}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Es ist

$$\mathbf{curl} \mathbf{u} = \mathbf{curl} \mathbf{curl} \mathbf{G}\boldsymbol{\rho} = (\mathbf{grad} \operatorname{div} - \Delta) \mathbf{G}\boldsymbol{\rho} = \begin{cases} \mathbf{grad} G \operatorname{div} \boldsymbol{\rho} + 4\pi \boldsymbol{\rho} & \text{in } \Omega_C \\ \mathbf{grad} G \operatorname{div} \boldsymbol{\rho} & \text{in } \Omega_E \end{cases}.$$

6. Numerische Experimente

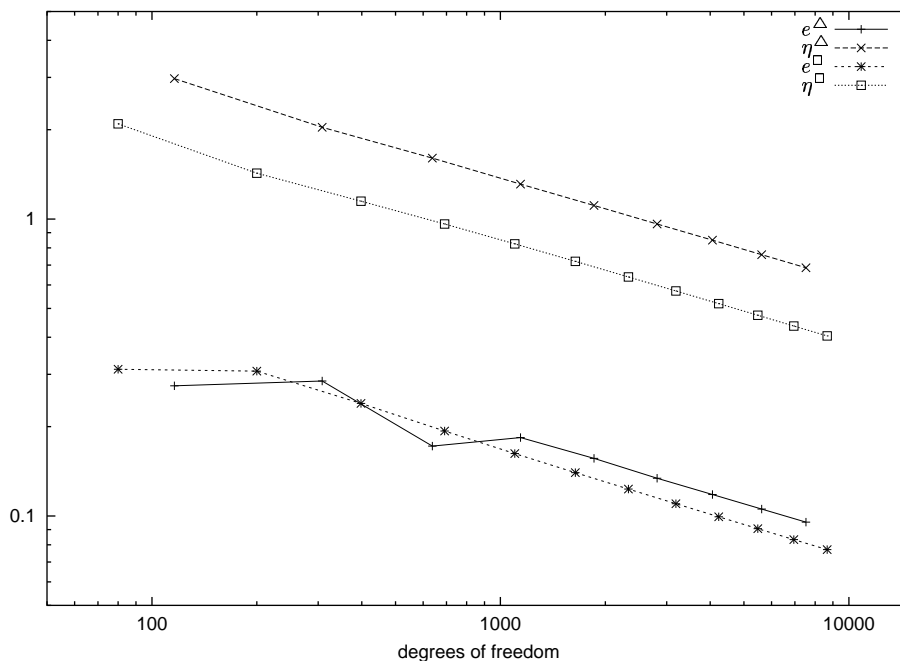


Abbildung 6.2.: Energienorm e des Galerkinfehlers $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h)$ und residualer Fehlerschätzer η zu Beispiel 2. Der Exponent Δ bezieht sich auf das hexaedrische Gitter, \square auf das tetraedrische.

Wegen $\boldsymbol{\rho} = 0$ auf Γ ist $\mathbf{curl} \mathbf{u}$ stetig über Γ , und wir erhalten als Randvariable

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{curl} \mathbf{u} \times \mathbf{n} = \mathbf{grad} G(\mathbf{div} \boldsymbol{\rho}) \times \mathbf{n}.$$

Weiter ist $\mathbf{div} \mathbf{u} = 0$ in \mathbb{R}^3 und $\mathbf{curl} \mathbf{curl} \mathbf{u} = 0$ in Ω_E , so daß \mathbf{u} tatsächlich harmonisch im Außenraum Ω_E ist. Als rechte Seite erhalten wir für konstante μ

$$\mathbf{J}_0 = -\sigma \mathbf{u} + i\omega^{-1} \mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{curl} \mathbf{u} = -\sigma \mathbf{u} + 4\pi i \omega^{-1} \mu^{-1} \mathbf{curl} \boldsymbol{\rho} \quad \text{in } \Omega_C,$$

$\mathbf{J}_0 = 0$ in Ω_E . Es ist $\mathbf{div} \mathbf{J}_0 = 0$ in \mathbb{R}^3 , und somit gilt insbesondere $\mathbf{J}_0 \in \mathbf{H}(\mathbf{div}, \mathbb{R}^3)$. Wir setzen wieder $\mu = \sigma = \omega = 1$ und rechnen das Galerkin-Verfahren für $n = 1, \dots, 13$ mit hexaedrischen Elementen und für $n = 1, \dots, 10$ mit tetraedrischen Elementen. Die Abbildung 6.2 gibt für hexaedrische wie tetraedrische Gitter den Fehler $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h)$ in der Energienorm wieder, und im Vergleich dazu jeweils den Wert des Fehlerschätzers η . Man sieht, daß die Kurven für tetraedrische Elemente (ab 1000 Freiheitsgrade) ein wenig über denen für hexaedrische Elemente liegen. Dies ist zu erwarten, da hexaedrische Finite Elemente einen etwas „reicheren“ Ansatzraum liefern (es kommen dort gemischte Polynomterme vor, im Gegensatz zum tetraedrischen Fall). Tabelle 6.3 gibt die Werte und die Konvergenzraten (mit α bezeichnet) des Galerkinfehlers und des Fehlerschätzers für hexaedrische und tetraedrische Gitter wieder, und zum Vergleich nochmal die jeweilige

Hexaeder					
n	DOF	e_n	α	η_n	α
5	692	1.933e-1		9.621e-1	
			0.9593		0.8438
6	1100	1.622e-1		8.249e-1	
			0.9567		0.8797
7	1640	1.400e-1		7.203e-1	
			0.9577		0.9046
8	2330	1.232e-1		6.383e-1	
			0.9606		0.9225
9	3188	1.100e-1		5.726e-1	
			0.9641		0.9358
10	4232	9.939e-2		5.188e-1	
			0.9675		0.9459
11	5480	9.063e-2		4.741e-1	
			0.9705		0.9538
12	6950	8.330e-2		4.363e-1	
			0.9731		0.9600
13	8660	7.705e-2		4.041e-1	

Tetraeder					
n	DOF	e_n	α	η_n	α
5	1142	1.836e-1		1.311	
			0.8834		0.9070
6	1856	1.563e-1		1.112	
			0.9972		0.9352
7	2816	1.340e-1		9.624e-1	
			0.9481		0.9403
8	4058	1.181e-1		8.488e-1	
			0.9592		0.9576
9	5618	1.055e-1		7.583e-1	
			0.9626		0.9555
10	7532	9.530e-2		6.857e-1	

Tabelle 6.3.: Anzahl der Freiheitsgrade DOF, Werte und Konvergenzraten α des Energiefehlers e_n und des residualen Fehlerschätzers η_n zu Beispiel 2

	hexa	tetra
n	q_n	q_n
5	4.978	7.143
6	5.084	7.112
7	5.145	7.180
8	5.181	7.188
9	5.205	7.189
10	5.220	7.195
11	5.231	
12	5.239	
13	5.244	

Tabelle 6.4.: Die Quotienten $q_n := \frac{\eta_n}{\epsilon_n}$ zu Beispiel 2

Anzahl der Freiheitsgrade. Für hexaedrische Elemente verhalten sich der Galerkinfehler und der residuale Fehlerschätzer wie im letzten Beispiel, ihrer Konvergenzordnungen steigen monoton gegen eins. Allerdings liegen die Konvergenzraten ein wenig unter denen im letzten Beispiel. Die Werte der Konvergenzraten des Galerkinfehlers und des residualen Fehlerschätzers bei Verwendung tetraedrischer Elemente sind vergleichbar mit denen auf dem hexaedrischen Gitter, sie verhalten sich allerdings nicht ganz so stabil – sie steigen nicht monoton, sondern schwanken ein wenig.

In Tabelle 6.4 betrachten wir nun zusätzlich die Quotienten

$$q_n := \frac{\eta_n}{\epsilon_n}.$$

Wir beobachten, daß diese stabil bleiben. Insgesamt haben wir in diesem Beispiel gesehen, daß das Galerkin-Verfahren sowohl für hexaedrische wie für tetraedrische Elemente wie erwartet konvergiert, und daß der residuale Fehlerschätzer nicht nur zuverlässig, sondern auch effizient ist.

Für dieses Beispiel möchten wir nun noch die einzelnen Terme des residualen Fehlerschätzers betrachten. Abbildung 6.3 zeigt die Terme η_1^T , $\eta_0^{F,C}$, $\eta_1^{F,C}$, $\eta_0^{F,\Gamma}$, $\eta_1^{F,\Gamma}$, $\eta_2^{F,\Gamma}$ und den Gesamtterm η für $n = 5, \dots, 13$ auf dem Gitter mit hexaedrischen Elementen. Der Term η_0^T verschwindet, da in diesem Beispiel gilt

$$\eta_0^T = h_T \|\operatorname{div} \mathbf{J}_0\|_{0,T} = 0.$$

In Tabelle 6.5 haben wir für jeden Term die Konvergenzrate von $n = 6$ auf $n = 12$ angegeben. Es sind hauptsächlich die Fehlerschätzerterme

$$\begin{aligned} \eta_0^{F,C} &= \sqrt{h_F \omega \sigma} \|\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}\|_{0,F}, \\ \eta_0^{F,\Gamma} &= \sqrt{h_F \omega \sigma} \|\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}\|_{0,F} \end{aligned}$$

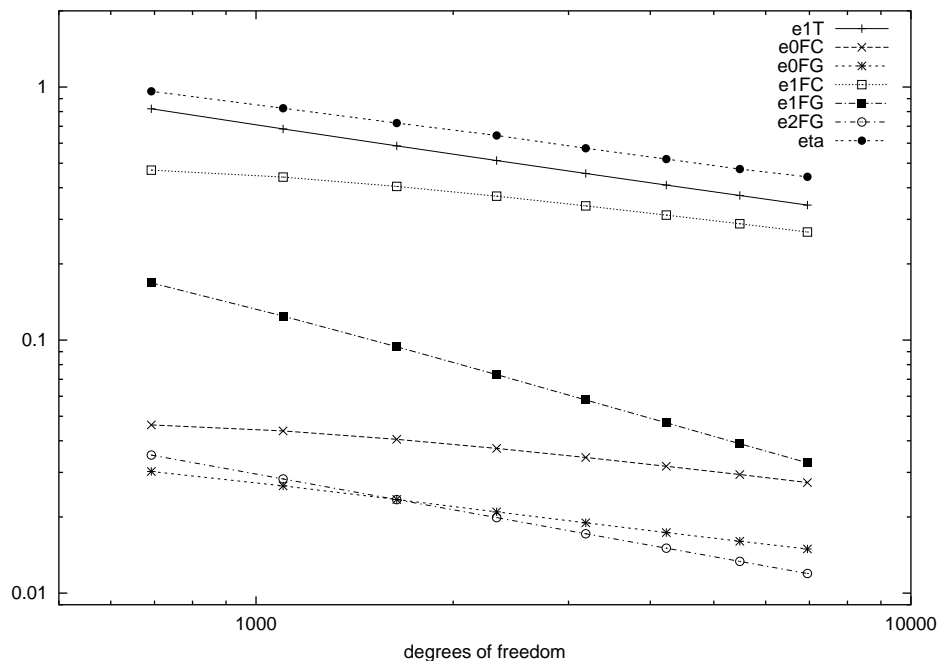


Abbildung 6.3.: Die einzelnen Fehlerschätzerterme $e1T := \eta_1^T$, $e0FC := \eta_0^{\mathcal{F},C}$, $e1FC := \eta_1^{\mathcal{F},C}$, $e0FG := \eta_0^{\mathcal{F},\Gamma}$, $e1FG := \eta_1^{\mathcal{F},\Gamma}$, $e2FG := \eta_2^{\mathcal{F},\Gamma}$ und der Gesamtterm $eta := \eta$ zu Beispiel 2 auf dem hexaedrischen Gitter.

$\alpha(\eta_1^T)$	$\alpha(\eta_0^{\mathcal{F},C})$	$\alpha(\eta_0^{\mathcal{F},\Gamma})$	$\alpha(\eta_1^{\mathcal{F},C})$	$\alpha(\eta_1^{\mathcal{F},\Gamma})$	$\alpha(\eta_2^{\mathcal{F},\Gamma})$	$\alpha(\eta)$
1.0001	0.6784	0.8294	0.7220	1.9249	1.2403	0.9187

Tabelle 6.5.: Konvergenzraten α der einzelnen Terme und des gesamten Fehlerschätzers η von $n = 6$ auf $n = 12$ (von 6950 Freiheitsgrade auf 8660 Freiheitsgrade) zu Beispiel 2.

6. Numerische Experimente

n	$\sigma = 0.0001$		$\sigma = 1$		$\sigma = 100$		$\sigma = 10000$	
	$\alpha(e_n)$	$\alpha(\eta_n)$	$\alpha(e_n)$	$\alpha(\eta_n)$	$\alpha(e_n)$	$\alpha(\eta_n)$	$\alpha(e_n)$	$\alpha(\eta_n)$
6	0.9515	0.8450	0.9593	0.8438	1.0921	1.2654	1.1286	2.1191
7	0.9491	0.8805	0.9567	0.8797	1.0395	1.1836	1.0704	2.0562
8	0.9495	0.9052	0.9577	0.9046	1.0212	1.1478	1.0439	2.0242
9	0.9513	0.9230	0.9606	0.9225	1.0121	1.0822	1.0301	2.0044
10	0.9533	0.9360	0.9641	0.9358	1.0072	1.0742	1.0222	1.9896
11	0.9550	0.9459	0.9675	0.9459	1.0043	1.0570	1.0172	1.9769
12	0.9561	0.9536	0.9705	0.9538	1.0024	1.0432	1.0137	1.9650
13	0.9565	0.9597	0.9731	0.9600	1.0012	1.0325	1.0112	1.9534

Tabelle 6.6.: Konvergenzraten α des Energiefehlers e_n und des residualen Fehlerschätzers η_n zu Beispiel 3

und

$$\eta_1^{F,C} = \sqrt{h_F \mu^{-1}} \|[\mathbf{curl} \mathbf{u}_h \times \mathbf{n}]_F\|_{0,F},$$

deren geringe Konvergenzraten die Gesamtkonvergenzrate „bremsen“. Diese Terme beschreiben gerade die Stetigkeit der Normalenkomponente der Finiten-Element-Lösung $\mathbf{u}_h \in \mathcal{ND}_1$ bzw. die Stetigkeit der gedrehten Tangentialkomponente von $\mathbf{curl} \mathbf{u}_h$. Es ist verständlich, daß diese Terme etwas Schwierigkeiten bereiten, denn der Raum der Nédélec-Elemente liefert nur stetige Tangentialkomponenten; die Normalenkomponenten und die Tangentialkomponente der Rotation dagegen werden nicht berücksichtigt. Es ist also nicht auf Anhieb klar, daß die Ausdrücke $[\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}]_F$, $\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}$ oder $\mathbf{curl} \mathbf{u}_h \times \mathbf{n}$ bei zunehmender Verfeinerung klein werden. Da außerdem $\eta_0^{F,C}$, $\eta_0^{F,\Gamma}$ und $\eta_1^{F,C}$ nur einen Faktor von $\sqrt{h_F}$ beinhalten, ist es zumindest verständlich, daß diese Terme eine kleinere Konvergenzrate aufweisen.

Beispiel 3. Wir wollen hier die Auswirkungen verschiedener Parameter σ testen. Dazu wählen wir die gleiche Lösung \mathbf{u} wie in Beispiel 2. Wir setzen $\mu = \omega = 1$ und wählen nacheinander $\sigma = 0.0001$, $\sigma = 1$, $\sigma = 100$ und $\sigma = 10000$. Zu diesen Werte rechnen wir das Galerkin-Verfahren für $n = 5, \dots, 13$ mit hexaedrischen Elementen. Die Abbildung 6.4 gibt die Fehler $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h)$ in der Energienorm wieder, und im Vergleich dazu die Werte der Fehlerschätzer η , Tabelle 6.6 gibt deren Konvergenzraten an.

Den Fall $\sigma = 1$ haben wir schon im letzten Beispiel betrachtet. Anhand der Konvergenzraten erkennen wir, daß das Galerkinverfahren in allen Fällen gut konvergiert, dabei noch am besten für $\sigma = 100$ und dann in absteigender Reihenfolge für $\sigma = 10000$, $\sigma = 1$ und $\sigma = 0.0001$. Die guten Konvergenzraten für große σ liegen an der Definition der Bilinearform $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{u}, \mathbf{curl} \mathbf{v})_{\Omega_C} + i\omega(\sigma \mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega_C}$, denn durch große σ ge-

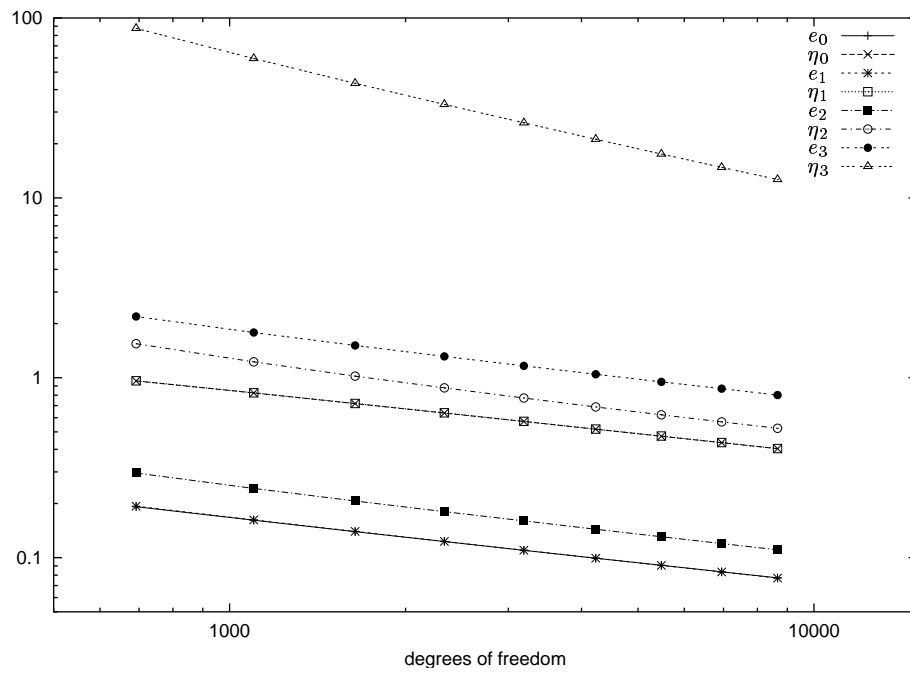


Abbildung 6.4.: Energienorm e des Galerkinfehlers $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h)$ und residualer Fehlerschätzer η zu Beispiel 3. Der Index 0 bedeutet $\sigma = 0.0001$, 1 bedeutet $\sigma = 1$, 2 bedeutet $\sigma = 100$ und 3 bedeutet $\sigma = 10000$.

6. Numerische Experimente

n	η_1^T	$\eta_0^{\mathcal{F},C}$	$\eta_0^{\mathcal{F},\Gamma}$	$\eta_1^{\mathcal{F},C}$	$\eta_1^{\mathcal{F},\Gamma}$	$\eta_2^{\mathcal{F},\Gamma}$
3	289.997	5.020	5.020	0.4519	0.4874	0.0937
6	59.206	4.968	2.891	0.4992	0.1491	0.0301
12	14.427	2.831	1.507	0.2781	0.0337	0.0117

Tabelle 6.7.: Die einzelnen Terme des Fehlerschätzers η für zu $n = 3, 6, 12$ zu Beispiel 3 mit $\sigma = 10000$.

winnt der Massenanteil an Einfluß. Warum nun $\sigma = 10000$ etwas schlechter als $\sigma = 100$ konvergiert, wissen wir nicht. Vielleicht ist dieses σ in gewisser Hinsicht „zu“ groß.

Die Wahl $\sigma = 0.0001$ hat offenbar wenig Einfluß auf die Konvergenzrate des Fehlerschätzers. Für $\sigma = 10000$ beobachten wir eine zu große Konvergenzrate (um die 2), die nur allmählich fällt. Die Gitterfolge reicht hier nicht aus, um numerisch zu bestätigen, daß auch hier die Konvergenzrate gegen eins konvergiert. Woran dies liegt, erkennt man anhand der Tabelle 6.7, in der wir die einzelnen Fehlerschätzerterme für $\sigma = 10000$ und den Gittern $n = 3, 6, 12$ aufgelistet haben. Man erkennt, daß es der η_1^T -Anteil ist, der an dieser großen Konvergenzrate Schuld ist. Zur Erinnerung:

$$\eta_1^T = h_T \|i\sqrt{\mu}\omega \mathbf{J}_0 + i\sqrt{\mu}\omega \sigma \mathbf{u}_h + \sqrt{\mu} \mathbf{curl}(\mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{u}_h)\|_{0,T}.$$

An der Tabelle 6.7 sieht man, daß dieser Term gegenüber den anderen Termen überwiegt und so die Konvergenzrate bestimmt. Bei zunehmender Verfeinerung wird dieser Term aber schnell kleiner (eben wegen seiner großen Konvergenzrate, und man stellt im übrigen fest, daß auch die Konvergenzrate allmählich abnimmt), so daß sich bei genügend feinem Gitter auch hier eine Gesamtrate um die eins einstellen sollte. Leider können wir dies mit unseren Rechenmöglichkeiten nicht mehr überprüfen. Zum Vergleich betrachte man aber den Fall $\sigma = 100$. Hier sieht man, wie sich auch die zu große Konvergenzrate des Fehlerschätzers rasch der eins nähert.

Wie wollen hier zusätzlich die Quotienten

$$q_n := \frac{\eta_n}{e_n}$$

untersuchen, um zu sehen, wie stabil diese sind. Diese stehen in Tabelle 6.8. Man sieht, daß für $\sigma = 0.0001$, $\sigma = 1$ und $\sigma = 100$ die Quotienten tatsächlich stabil bleiben, so daß der Fehlerschätzer hier effizient und zuverlässig ist. Für $\sigma = 10000$ sind nach der obigen Betrachtung der Konvergenzraten noch keine stabilen Werte zu erwarten. Erst bei viel feineren Gittern (die leider außerhalb unserer Rechenmöglichkeiten liegen) sollten wir hier einen stabilen Quotienten erhalten.

Zusammenfassend kann man also sagen, daß das Galerkin-Verfahren für alle hier betrachteten σ -Werte gut konvergiert, wobei größere σ in der Regel bessere Konvergenzraten

	$\sigma = 0.0001$	$\sigma = 1$	$\sigma = 100$	$\sigma = 10000$
n	q_n	q_n	q_n	q_n
6	5.098	5.084	5.054	33.350
7	5.152	5.145	4.943	28.649
8	5.182	5.181	4.860	25.133
9	5.200	5.205	4.820	22.409
10	5.209	5.220	4.786	20.237
11	5.214	5.231	4.762	18.468
12	5.215	5.239	4.745	17.001
13	5.214	5.244	4.733	15.766

Tabelle 6.8.: Die Quotienten $q_n := \frac{\eta_n}{e_n}$ zu Beispiel 3

liefern. Auch der Fehlerschätzer ist stets zuverlässig und effizient, nur benötigt man bei sehr großen σ -Werten ein entsprechend feines Gitter.

Beispiel 4. In diesem Beispiel betrachten wir eine rechte Seite, für die wir keine exakte Lösung kennen: Wir wählen

$$\mathbf{J}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{curl} \mathbf{v}(\mathbf{x})$$

mit

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \cos(\frac{\pi}{2}x_1) \cos(\frac{\pi}{2}x_2) \cos(\frac{\pi}{2}x_3)(1, 1, 1)^\top & \text{in } \Omega_C \\ 0 & \text{in } \bar{\Omega}_E. \end{cases}$$

Da $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^3)$ mit $\text{supp}(\mathbf{v}) \subset \bar{\Omega}_C$, erfüllt \mathbf{J}_0 die Voraussetzungen von Seite 96 (es gilt sogar $\text{div} \mathbf{J}_0 = 0$ in \mathbb{R}^3). Wir setzen $\omega = 1$, $\sigma \equiv 1$, und $\mu \equiv 1$, und es ist weiterhin $\Omega_C = (-1, 1)^3$. Da wir keine exakte Lösung $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ kennen, berechnen wir eine Näherung e des Energiefehlers durch

$$\|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h)\|_{\mathcal{X}} \sim \sqrt{\hat{\nu}^2 - \|(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h)\|_{\mathcal{X}}^2} =: e,$$

wobei $\hat{\nu}$ eine Näherung der exakten Energienorm $\|(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})\|_{\mathcal{X}}$ der Lösung ist, die durch Extrapolation aus der Konvergenzeigenschaft

$$\|(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})\|_{\mathcal{X}}^2 - \|(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h)\|_{\mathcal{X}}^2 \approx ch^{2\alpha}$$

für Konstanten c und α gewonnen wird. Wir rechnen das Galerkinverfahren für die Gitter $n = 1, \dots, 13$ mit hexaedrischen Elementen und erhalten aus den letzten drei Werten per Extrapolation $\hat{\nu} = 0.931262$.

Die Abbildung 6.5 gibt den angenäherten Fehler e in der Energienorm wieder, und im Vergleich dazu den Wert des Fehlerschätzers η . Tabelle 6.9 gibt die Werte und Konvergenzraten (mit α bezeichnet) des Galerkinfehlers und des Fehlerschätzers wieder.

6. Numerische Experimente

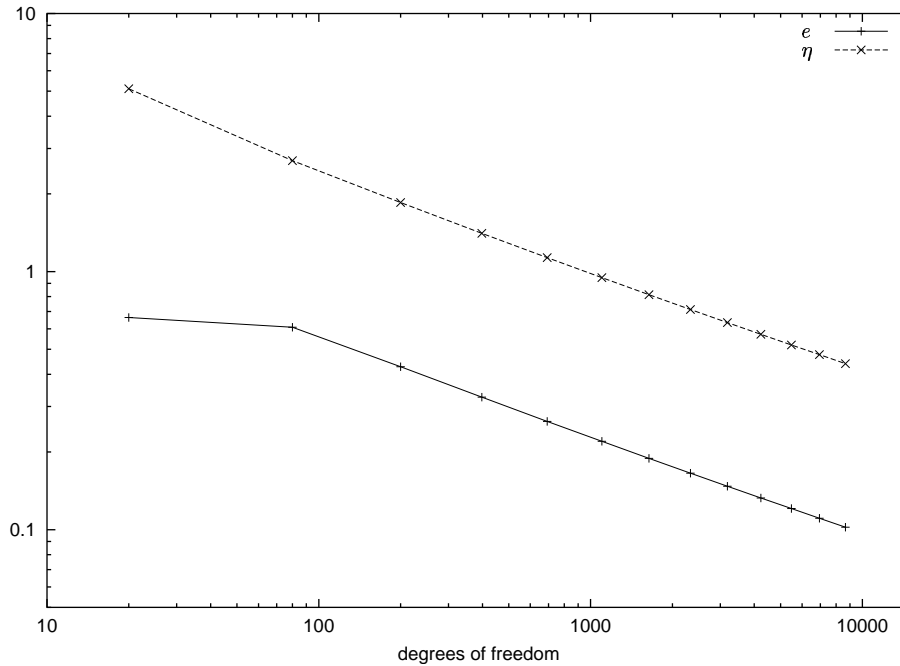


Abbildung 6.5.: Energienorm e des Galerkinfehlers $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h)$ und residualer Fehlerschätzer η zu Beispiel 4.

Das Verfahren konvergiert wie erwartet mit der Ordnung 1, der residuale Fehlerschätzer ebenfalls.

Beispiel 5. In diesem letzten Beispiel wollen wir mit Hilfe des residualen Fehlerschätzers ein adaptives Gitter erzeugen. Dabei verwenden wir weiterhin hexaedrische Elemente *ohne* hängende Knoten. Zur Erhaltung der Regularität arbeiten wir mit Schichtverfeinerung – wir erhalten also ein Gitter, das nicht mehr form-regulär ist. Daß wir nicht mit hängenden Knoten arbeiten, liegt schlicht daran, daß diese noch nicht implementiert wurden (siehe Ausblick, Kapitel 7). Als Geometrie dient uns weiterhin der Würfel $\Omega_C = (-1, 1)^3$. Wir setzen $\mu = 1$ in Ω und wählen ein nicht-stetiges σ , nämlich

$$\sigma = \begin{cases} 0.1, & \frac{1}{3} < x, y, z < 1 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Als rechte Seite wählen wir die Funktion

$$\mathbf{J}_0 = (1, 1, 1) \quad \text{in } \Omega_C$$

und $\mathbf{J} = 0$ in Ω_E . Hiermit verletzen wir allerdings die Voraussetzungen von Seite 96, es ist nämlich $\mathbf{J}_0 \notin \mathbf{H}(\text{div}, \mathbb{R}^3)$, da $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \neq 0$ auf $\Gamma = \partial\Omega_C$. Doch stellt dies kein großes Problem dar, denn es gilt weiterhin $\mathbf{J}_0 \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega_C)$, und wir müssen bloß den Fehlerschätzerterm

n	ν_n	α	η_n	α
4	0.827230		1.4939	
		0.9031		0.9121
5	0.893397		1.2188	
		0.9418		0.9321
6	0.904930		1.0283	
		0.9627		0.9453
7	0.911901		0.8889	
		0.9740		0.9545
8	0.916430		0.7825	
		0.9812		0.9613
9	0.919538		0.6987	
		0.9858		0.9664
10	0.921761		0.6311	
		0.9891		0.9703
11	0.923406		0.5753	
		0.9914		0.9735
12	0.924658		0.5286	
ν	0.931262			

Tabelle 6.9.: Energienorm ν_n der Galerkinlösung und Konvergenzraten α des Energiefehlers und Werte und Konvergenzraten des residualen Fehlerschätzers η_n zu Beispiel 4. In der untersten Zeile ist die aus den letzten drei Werten extrapolierte Energienorm ν angegeben.

6. Numerische Experimente

$\eta_0^{F,\Gamma} = \sqrt{h_F \omega} \|\sqrt{\sigma} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}\|_{0,F}$ durch $\sqrt{h_F \omega} \|(\sqrt{\sigma} \mathbf{u}_h + \sqrt{\sigma}^{-1} \mathbf{J}_0) \cdot \mathbf{n}\|_{0,F}$ ersetzen. Wir erwarten, daß das Gitter in der Nähe des σ -Unstetigkeits-Interfaces zwischen $\Omega_C^{(1)} = (\frac{1}{3}, 1)^3$ und $\Omega_C^{(0)} = \Omega_C \setminus \Omega_C^{(1)}$ verfeinert wird, insbesondere nahe der „einspringenden Ecke“ $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Abbildung 6.6 zeigt die Folge von adaptiv erstellten Gittern. Anhand des farbigen Oberflächenplots (Abbildung 6.7) des Betrages von φ_h (es ist $\boldsymbol{\lambda}_h = \mathbf{curl}_\Gamma \varphi_h$) auf dem vorletzten Gitter sieht man, daß die Lösung sich dort tatsächlich auffällig verhält.

Für das Ursprungsgitter haben wir jede Kante von Ω_C dreigeteilt. Die nachfolgenden Gitter sind entstanden, indem zuerst die 10% der Elemente verfeinert worden sind, auf denen die lokalen Anteile des residualen Fehlerschätzers am größten waren, und dann per Schichtverfeinerung die hängenden Knoten beseitigt wurden. Dies entspricht einer Wahl von $\nu = 0.90$ in der Terminologie des Punktes **Bestimmung der zu verfeinernden Elemente** auf Seite 139. Wir haben das ν groß wählen müssen, da sonst auf Grund der Schichtverfeinerung die Anzahl der letztendlich verfeinerten Elemente viel zu groß gewesen wäre. Beim Gebrauch von hängenden Knoten würde man sicherlich Werte bis $\nu = 0.5$ nehmen können. Man erkennt anhand der Abbildung 6.6, daß das Gitter auf dem schlecht leitenden Teilwürfel $\Omega_C^{(1)}$ und in seiner direkten Umgebung verfeinert wird.

Zum Vergleich haben wir dasselbe Problem mit uniformer Verfeinerung gerechnet, also zu den Werten $n = 3, 6, 12, 15$, und haben daraus wie in Beispiel 4 die Energienorm der Lösung und den Energiefehler extrapoliert. In Abbildung 6.8 geben wir die Graphen der approximierten Energiefehler und der residualen Fehlerschätzer für uniforme und für adaptive Verfeinerung wieder. Man erkennt deutlich, daß das adaptiv verfeinerte Gitter eine bessere Approximation liefert.

In einem letzten Test beschäftigen wir uns mit dem p -hierarchischen Fehlerschätzer. Von diesem Fehlerschätzer haben wir nur die „Bubble“-Anteile $\Theta^{(T_k)}$ und $\vartheta^{(F_j)}$ (siehe Satz 4.2.2) implementiert. Wir wollen sehen, ob dieser reduzierter Fehlerschätzer sich als Fehlerindikator eignet. Dazu verwenden wir dieselbe Problemstellung und Verfeinerungsstrategie wie eben für den residualen Fehlerschätzer. Abbildung 6.9 zeigt die Folge von adaptiv erstellten Gittern für den reduzierten p -hierarchischen Fehlerschätzer. Man sieht, daß das adaptive Verfahren für dieses Beispiel uniform in $(-\frac{1}{3}, 1)^3$ verfeinert. Anhand des Vergleichs zwischen den zwei Fehlerschätzern in Abbildung 6.10 sieht man, daß dieser Fehlerindikator nicht so optimal funktioniert wie der residuale. Dies könnte daran liegen, daß hier nur mit den Bubble-Termen gearbeitet wurde. Andererseits muß festgestellt werden, daß wir hier schon nach zwei Verfeinerungen an den Grenzen unserer Rechenmöglichkeiten gelangt sind (das Galerkinverfahren auf dem vierten Gitter in Abbildung 6.9 konnte nicht mehr gerechnet werden, es handelt sich dabei um 18260 Freiheitsgrade), so daß man über die Güte des p -hierarchischen Fehlerschätzers eigentlich noch keine signifikanten Aussagen treffen kann.

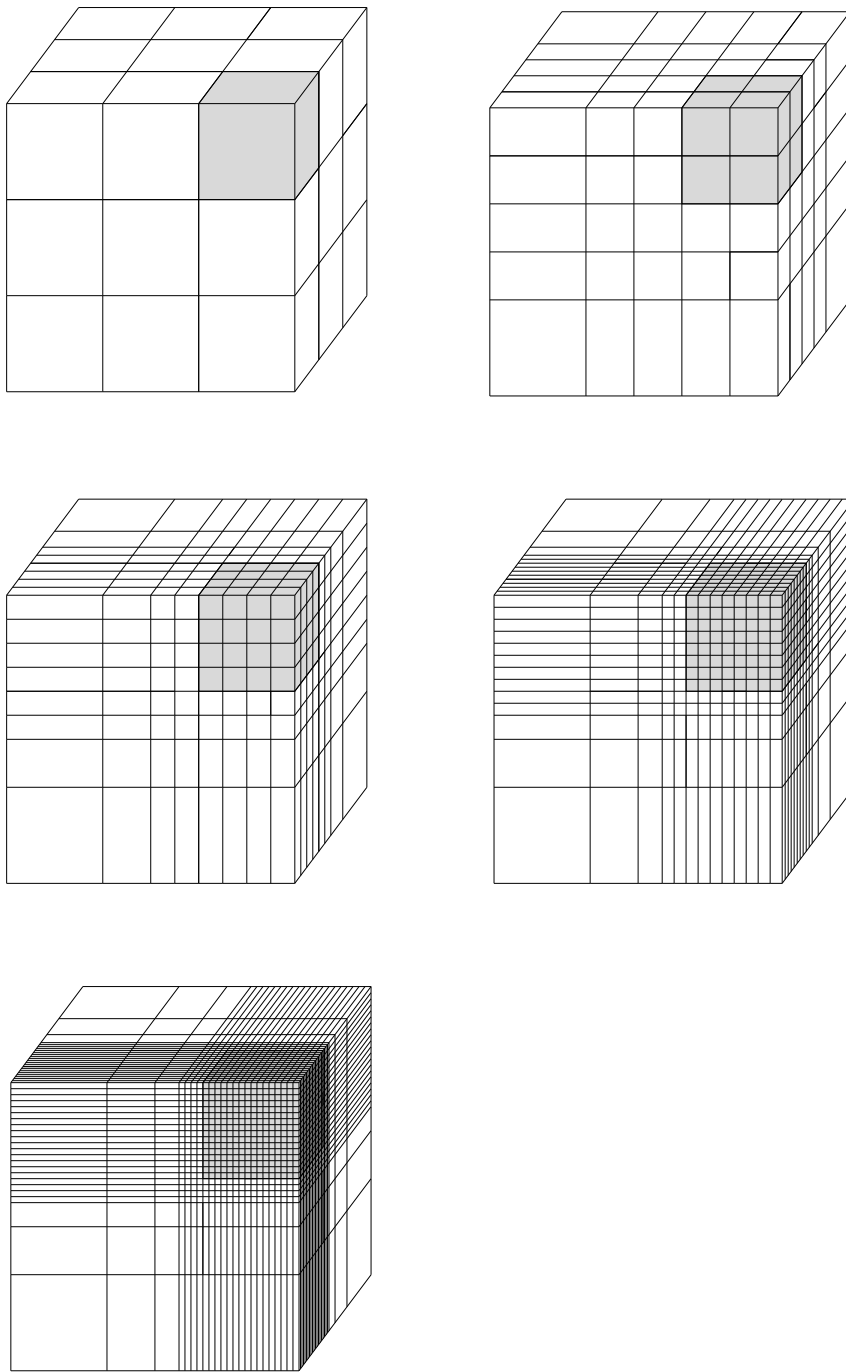


Abbildung 6.6.: Das adaptive Gitter zu Beispiel 5 mit dem residualen Fehlerschätzer. Auf dem schattierten Teilwürfel ist $\sigma = 0.1$, auf dem restlichen Gebiet ist $\sigma = 1$.

6. Numerische Experimente

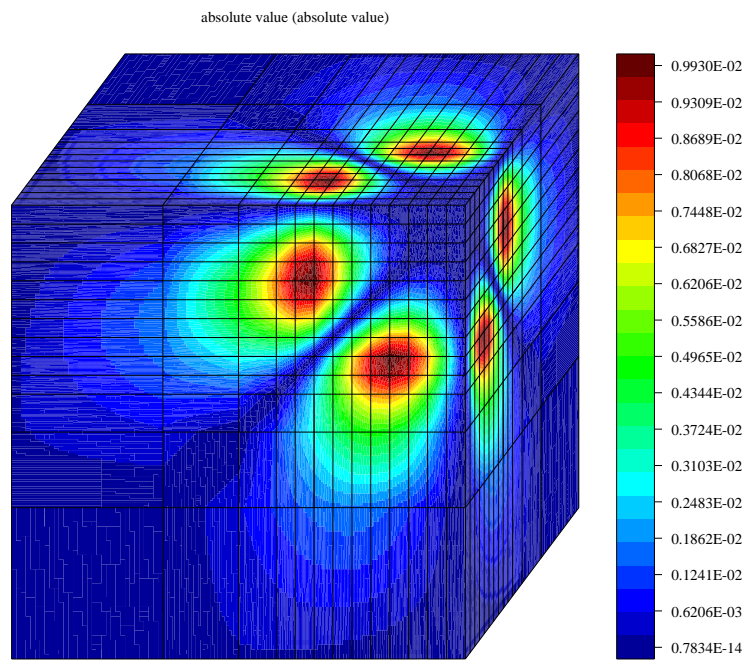


Abbildung 6.7.: Oberflächenplot des Betrages der Galerkinlösung φ_h auf dem vorletzten Gitter aus 6.6.

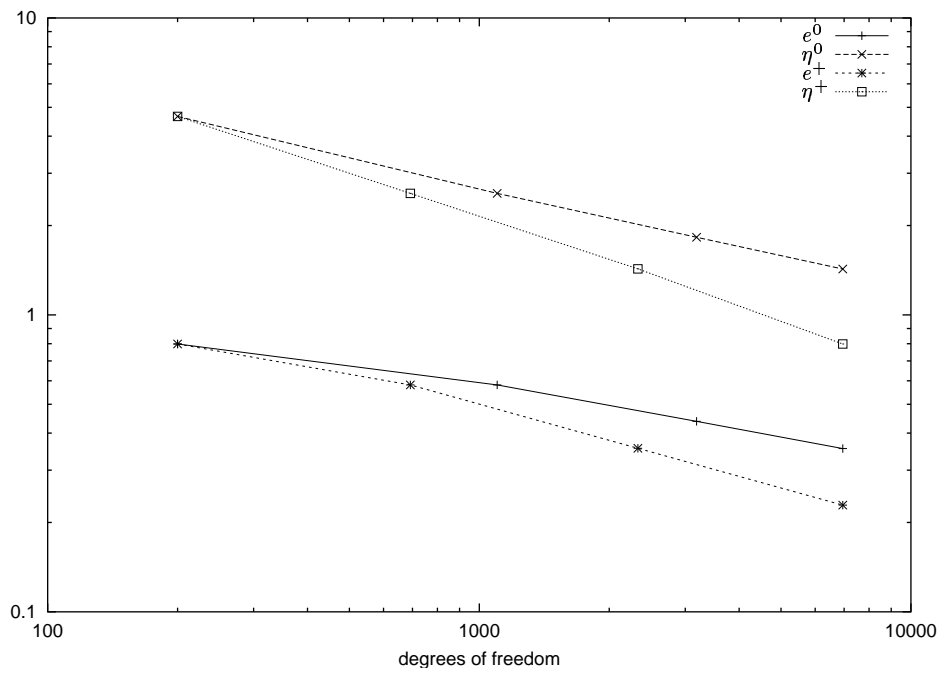


Abbildung 6.8.: Energienorm e des Galerkinfehlers und residualer Fehlerschätzer η zu Beispiel 5. Der Exponent 0 bezieht sich auf das uniforme Gitter, + auf das adaptive.

6. Numerische Experimente

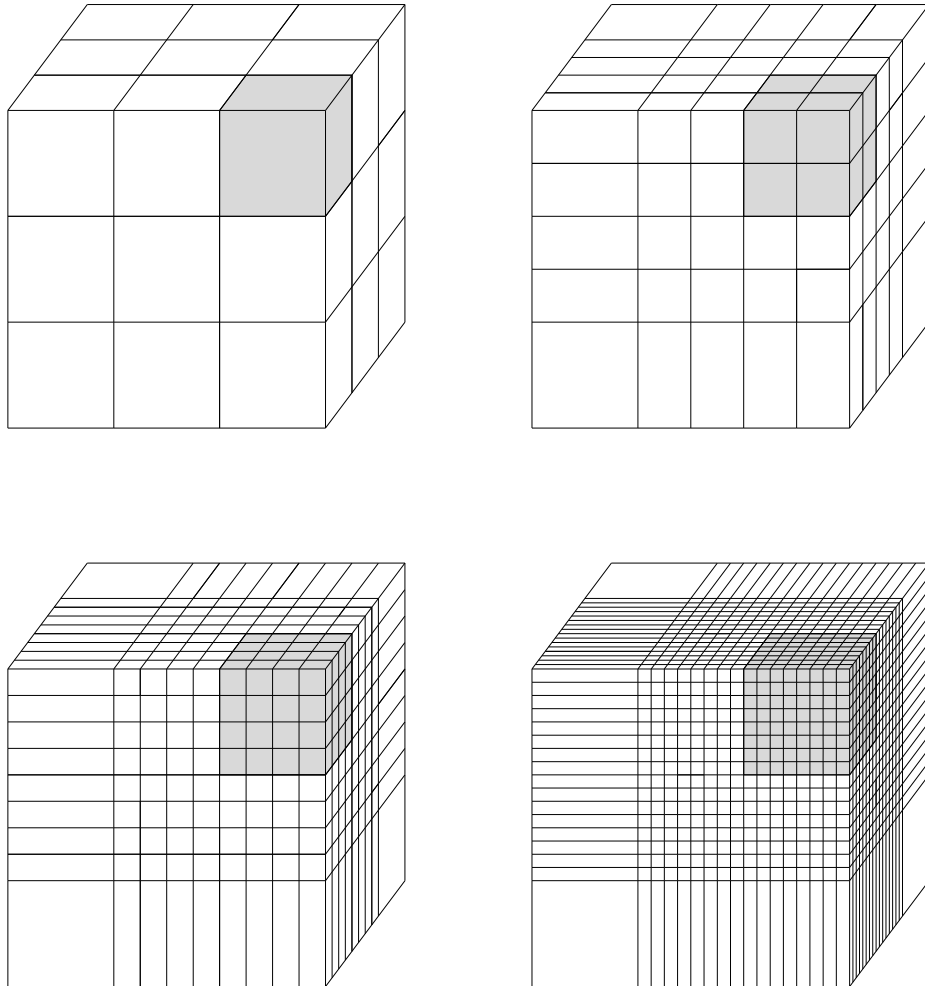


Abbildung 6.9.: Das adaptive Gitter zu Beispiel 5 mit dem reduzierten p -hierarchischen Fehlerschätzer. Auf dem schattierten Teilwürfel ist $\sigma = 0.1$, auf dem restlichen Gebiet ist $\sigma = 1$.

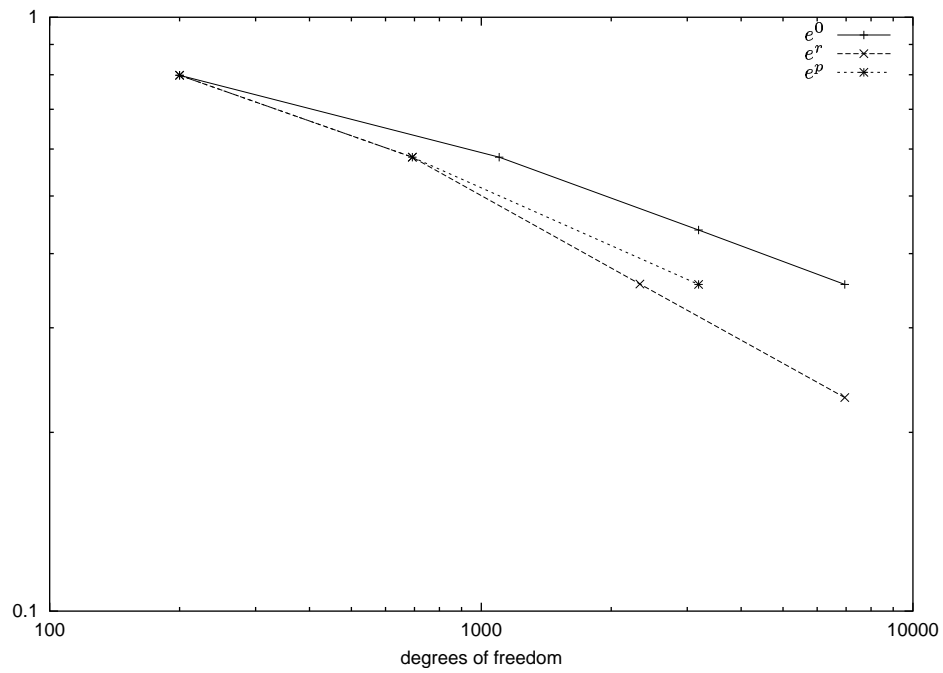


Abbildung 6.10.: Energienorm e des Galerkinfehlers zu Beispiel 5. Der Exponent 0 bezieht sich auf das uniforme Gitter, r auf das adaptive mit dem residualen Fehlerschätzer, p auf das adaptive mit dem reduzierten p -hierarchischen Fehlerschätzer.

6. *Numerische Experimente*

7. Ausblick

Wir haben für zwei elektromagnetische FEM-BEM-Kopplungsformulierungen, für ein Wirbelstrom- und für ein Streuproblem, jeweils einen p -hierarchischen und einen residualen Fehlerschätzer erstellt. Für den residualen Fehlerschätzer zum Wirbelstromproblem haben wir diverse numerische Tests durchgeführt, welche die Zuverlässigkeit des Fehlerschätzers untermauert haben. Mögliche theoretischen Erweiterungen sind:

Echte Lipschitz-Gebiete In dieser Arbeit haben wir polyhedrale (oder Lipschitz-reguläre, d.h. stückweise glatte) Gebiete betrachtet. Dabei sind die Ergebnisse aus Abschnitt 2.1 auch auf echte Lipschitz-Gebiete übertragbar [31]. Allerdings ist dann die Normale nicht mehr stückweise stetig, die Flächen-Differentialoperatoren müssen über lokale Koordinaten definiert werden (wir können sie nicht stückweise definieren), und die Räume $\mathbf{TH}_{\parallel}^{1/2}(\Gamma)$ und $\mathbf{TH}_{\perp}^{1/2}(\Gamma)$ können nicht explizit angegeben werden. Dies führt zu zusätzlichen Definitionen und Formalisierungen, die keinen Einfluß auf die Ergebnisse dieser Arbeit haben. Da wir außerdem mit nicht gekrümmten Finiten-Elementen rechnen, das Galerkin-Verfahren also auf einem Polyeder-Gebiet definiert ist, haben wir die eher formale Erweiterung auf allgemeine Lipschitz-Gebiete nicht verfolgt.

Weitere Problemstellungen Natürlich können die Fehlerschätzer für weitere Kopplungsprobleme adaptiert werden (wie z.B. [63]), doch solange die gleichen Räume und Operatoren dabei vorkommen, sind keine neuen Schwierigkeiten zu erwarten. Genauso können die hier gezeigten Methoden auf reine BEM-Probleme wie in [30, 32, 59] angewendet werden. Interessanter wäre es, zu sehen, in wie weit sie sich für Schirmprobleme wie in [27] eignen.

Im Bereich der numerischen Berechnungen ist noch viel zu tun. Im Laufe dieser Doktorarbeit wurde das Programmpaket `maiprogs` für elektromagnetische Problemstellungen erweitert. Es mußten die Finiten-Element-Räume $\mathcal{N}\mathcal{D}_1(\mathcal{T}_h)$ der Nédélec-Elemente erster Ordnung in drei Dimensionen eingebaut werden. Dazu mußten insbesondere kantenorientierte Freiheitsgrade (dies beinhaltet auch die Zusammensetzung der Splines) und die dadurch auf dem Rand des Gebiets induzierten Freiheitsgrade implementiert werden. Diese Erweiterungen, wie auch die Implementierung der FEM-Integrale, wurden

7. Ausblick

hauptsächlich vom Entwickler von `maiprogs` übernommen. Uns oblag es, aus den von `maiprogs` gelieferten Integralen $\int_K \int_K \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) x_1^k x_2^\ell y_1^m y_2^n dS_x dS_y$ mit Hilfe der Transformationsgesetze aus den Lemmata 3.1.4, 3.1.5, 3.1.9 und 3.1.10 die Galerkin-Elemente auf dem Rand Γ zusammenzustellen, das Gesamtsystem mit der zugehörigen rechten Seite zu erstellen und den residualen Fehlerschätzer, bestehend aus lokalen L^2 -Normen über Funktions- und Potentialauswertungen (und Sprünge), zu programmieren. Schließlich haben wir die in Kapitel 6 beschriebenen numerischen Experimente durchgeführt.

Dabei gibt es noch einige Erweiterungsmöglichkeiten – wir listen sie hier auf. Die ersten drei Punkte, die sich mit der Gitterstruktur und mit der Bestimmung der Freiheitsgrade beschäftigen, greifen tief in die Datenstruktur ein und sind so eine Aufgabe für den Entwickler von `maiprogs`.

Hängende Knoten In Abschnitt 3.4 sind wir ausführlich auf die Verfeinerungsgesetze für hängende Knoten und die Darstellung der modifizierten knoten- und kantenorientierten Basisfunktionen eingegangen. Dies geschah in der Absicht, eine theoretische Vorlage für die Implementierung von hängenden Knoten auf Hexaedern in die Gitterstruktur von `maiprogs` zu liefern. Inzwischen ist die nötige Datenstruktur mitsamt deren Verwaltung größtenteils eingebaut; dies beinhaltet auch eine Baumstruktur, die dann parallel zur bisherigen stationären Struktur „ohne Gedächtnis“ verwendet werden kann. Es fehlen noch vor allem die Verfeinerungsgesetze und die Implementation der Splines (der modifizierten Basisfunktionen). In Abschnitt 3.4 zeigten wir, daß die Verfeinerungsgesetze auch ohne Generations- (Vater-Sohn-)Beziehungen zwischen den Elementen erklärt werden können. Wenn beide Datenstrukturen vollständig implementiert sind, können sie parallel verwendet werden, je nachdem, welche gerade besser geeignet ist.

Tetraeder-Verfeinerung Obwohl wir fast nur auf Hexaedern gearbeitet haben, sind auch Berechnungen auf Tetraedern möglich. In Beispiel 2 haben wir auch solche Berechnungen durchgeführt. Es können tetraedrische Gitter erzeugt werden, allerdings ist es noch nicht möglich, diese zu verfeinern. Die Verfeinerung von Tetraedern ist nicht so einfach wie bei Dreiecken in zwei Dimensionen. Algorithmen hierzu findet man z.B. in [19, 20], sie müssen in `maiprogs` noch umgesetzt werden. Auch hierfür ist eine Baumstruktur nötig.

Höhere Polynomgrade Grundsätzlich ist `maiprogs` in der Lage, mit beliebigen Polynomgraden zu operieren. Splineräume vom Grade k , die lokal durch Stammfunktionen von Legendre-Polynome beschrieben werden können (wie z.B. Hutfunktionen für $k = 1$), sind in `maiprogs` auch in drei Dimensionen verfügbar. Hierarchische Basen dieser Räume können explizit angegeben werden [73]. Für die hier verwendeten Nédélec-Räumen erster Art hingegen ist eine solche hierarchische Struktur

nicht bekannt. Natürlich können die Basisfunktionen für jedes k aus den in Anhang B angegebenen Freiheitsgraden berechnet werden. Für Hexaeder und $k = 2$ haben wir dies getan und das Ergebnis in Abschnitt B.4 festgehalten. Somit kann die Basis von \mathcal{ND}_2 auf dem Referenzelement in `maiprogs` eingegeben werden, indem man die 54 Funktionen explizit eingibt. Was noch fehlt, ist die Zusammensetzung der Splines für diesen Fall, denn jetzt kommen noch flächenorientierte Freiheitsgrade hinzu. Von besonderem Interesse sind nun die Arbeiten von Demkowicz et al [44, 45, 46, 47]. Hier werden allgemeine $\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$ -konforme Finite-Element-Räume mit lokal variabler und sogar richtungsvariabler Polynomordnung vorgestellt, auch werden explizite Darstellungen möglicher Basisfunktionen angegeben. Es wird auch gezeigt, wie man aus dieser Konstruktion Nédélec-Elemente erster und zweiter Art erhalten kann. Obwohl Stabilitäts- und Approximationseigenschaften dieser Finite-Element-Räume noch nicht vollständig untersucht sind, stellen sie eine sehr interessante Verallgemeinerung der Nédélec-Elemente dar und ihre Implementation sollte in Betracht gezogen werden.

p -hierarchischer Fehlerschätzer Die Implementation des in Abschnitt 4.2 beschriebenen p -hierarchischen Fehlerschätzers erfordert den Einbau der Nédélec-Elemente zweiten Grades $\mathcal{ND}_2(\mathcal{T}_h)$. Siehe hierzu den letzten Punkt. Eine grobe Vereinfachung für Hexaederelemente besteht darin, nur die Volumen-Terme $\Theta^{(T)}$ und die Rand-Flächen-Terme $\vartheta^{(F)}$ zu berechnen. Dies haben wir getan, und in Beispiel 5 auf Seite 154 haben wir einen Vergleich zwischen den Fehlerschätzern durchgeführt. Diese „Bubble“-Terme zu implementieren, stellt sich als einfach heraus, da man hierzu keine Information über die Zusammensetzung der Freiheitsgrade von \mathcal{ND}_2 und \mathcal{RT}_1 braucht. Die anderen, noch nicht programmierten Terme beinhalten Funktionen, deren Träger mehr als ein Element umfaßt. Dazu benötigt man, wie schon erwähnt, eine vollständige Implementation von $\mathcal{ND}_2(\mathcal{T}_h)$.

Das Streuproblem Beim Streuproblem tun sich einige Unterschiede im Gegensatz zum Eddy-Current-Problem auf. So ist erstens die Geometrie etwas anders, so daß wir es hier mit zwei Rändern zu tun haben: der innere Rand, auf dem die Nullrandbedingung $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$ gilt, und der äußere Rand, auf dem die Randintegraloperatoren wirken. Desweiteren ist die Randvariable $\boldsymbol{\lambda}$ nicht divergenzfrei, so daß wir hier tatsächlich mit Raviart-Thomas-Funktionen (statt mit vektoriellen Flächenrotationen von Hutfunktionen) arbeiten müssen. Diese Punkte stellen keine großen Probleme dar, denn das Arbeiten mit zwei unterschiedlichen Rändern erfordert nur ein wenig Verwaltungsarbeit, und der Raum $\mathcal{RT}_0(\mathcal{K}_h)$ wird analog zum schon existierenden Raum $\mathcal{TND}_0(\mathcal{K}_h)$ behandelt (die Transformationsroutinen, die Galerkin-elemente oder Potentiale über Monomen in solche über \mathcal{TND} -Funktionen verwandeln, müssen nur leicht modifiziert werden). Weitere Modifikationen der bestehenden Routinen sind nötig, da wir nun mit Randintegralen zum Helmholtzkern

7. Ausblick

mit Wellenzahl ungleich Null arbeiten, so daß die Galerkinlemente und Potentiale echt komplexe Werte annehmen. Außerdem tauchen in der Galerkinformulierung zum Streuproblem skalare Flächenrotationen von $\mathcal{TN}\mathcal{D}$ -Elementen und Flächendivergenzen von \mathcal{RT} -Elementen auf, die auch neu gegenüber der Wirbelstromformulierung sind. Außerdem ist noch zu erwähnen, daß zur Berechnung der Energienorm der Randvariable die $\mathbf{TH}^{-1/2}(\text{div}, \Gamma)$ -Norm implementiert werden muß (beim Wirbelstromproblem genügt die $\mathbf{TH}^{-1/2}(\Gamma)$ -Norm).

Die größte Hürde auf dem Weg zur Implementation des Streuproblems war allerdings das Fehlen der Galerkinlemente und Potentiale (über Monome) für den Helmholtzkern auf einer Oberfläche im \mathbb{R}^3 . Diese trickreiche Programmierarbeit (vgl. [70]) ist erst neuerdings vom Entwickler von `maiprogs` fertiggestellt worden, so daß nun der Implementierung des Streuproblems keine grundsätzlichen Hindernisse mehr im Weg stehen. Wir machen allerdings darauf aufmerksam, daß sich aufgrund des Helmholtzkerns (der in der Praxis durch seine abgebrochene Reihenentwicklung ersetzt wird) die Rechenzeiten gegenüber denen für das Wirbelstromproblem vervielfachen werden.

Schnelle Löser Wie bereits auf Seite 138 erwähnt, lösen wir das Gleichungssystem noch direkt mit dem Gaußschen Algorithmus, da das nicht-präkonditionierte GMRES-Verfahren nur unzureichend funktioniert. Dies ist natürlich äußerst ungünstig (bezüglich Lösungszeit und Speicherplatz, siehe Tabelle 6.1 auf Seite 140), so daß die Implementierung eines Multilevel-Verfahrens für $\mathcal{ND}_1(\mathcal{T}_h)$ (siehe dazu [55, 56]) hier eine vordringliche Aufgabe darstellt. Dabei enthält das Softwarepaket `maiprogs` schon diverse Präkonditionierer und Multilevel-Verfahren, nur passen die Verfahren für Kantenelemente aufgrund der darin enthaltenen Helmholtz-Zerlegungen noch nicht in die Datenstruktur.

Literaturverzeichnis

- [1] R. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York–San Francisco–London, 1975.
- [2] A. Alonso und A. Valli, *Some remarks on the characterization of the space of tangential traces of $H(\text{curl}; \Omega)$ and the construction of an extension operator*, manuscripta math. **89** (1996), no. 2, 159–178.
- [3] H. Ammari, A. Buffa und J.-C. Nédélec, *A justification of eddy currents model for the Maxwell equations*, SIAM J. Appl. Math. **60** (2000), no. 5, 1805–1823.
- [4] H. Ammari, C. Latiri-Grouz und J.-C. Nédélec, *The Leontovich boundary value problem for the time-harmonic Maxwell equations*, Asymptot. Anal. **18** (1998), no. 1–2, 33–47.
- [5] H. Ammari, C. Latiri-Grouz und J.-C. Nédélec, *Scattering of Maxwell's equations with a Leontovich boundary condition in an inhomogenous medium: A singular perturbation problem*, SIAM J. Appl. Math. **59** (1999), No. 4, 1322–1334.
- [6] H. Ammari und J.-C. Nédélec, *Couplage éléments finis/équations intégrales pour la résolution des équations de Maxwell en milieu hétérogène*, Équations aux dérivées partielles et applications, 19–33, Gauthier-Villars, Éd. Sci. Méd. Elsevier, Paris, 1998.
- [7] H. Ammari und J.-C. Nédélec, *Coupling integral equations method and finite volume elements for the resolution of the Leontovich boundary value problem for the time-harmonic Maxwell equations in three dimensional heterogeneous media*, Chapman & Hall/CRC Res. Notes Math. **414**, (2000).
- [8] H. Ammari und J.-C. Nédélec, *Coupling of finite and boundary element methods for the time-harmonic Maxwell equations. Part II: a symmetric formulation*, Oper. Theory Adv. Appl. **110** (1999), Birkhäuser Verlag, 23–32.
- [9] C. Amrouche, C. Bernardi, M. Dauge und V. Girault, *Vector potentials in three-dimensional non-smooth domains*, Math. Methods Appl. Sci. **21** (1998), no. 9, 823–864.

- [10] D. N. Arnold, R. S. Falk und R. Winther, *Multigrid in $H(\text{div})$ and $H(\mathbf{curl})$* , Numer. Math. **85** (2000), 197 – 217.
- [11] R. Bank, *Hierarchical Bases and the Finite Element Method*, Acta Numer. **5** (1996), 1 – 43.
- [12] R. Bank, A. Sherman und A. Weiser, *Refinement algorithms and data structures for regular local mesh refinement*, Scientific Computing, IMACS Trans. Sci. Comput. 1 (1983), 3 – 17.
- [13] B. Beck, P. Deuffhard, R. Hiptmair, R. H. W. Hoppe und B. Wohlmuth, *Adaptive multilevel methods for edge element discretizations of Maxwell's equations*, Surveys Math. Indust. **8** (1999), no. 3–4, 271–312.
- [14] B. Beck, R. Hiptmair, R. H. W. Hoppe und B. Wohlmuth, *Residual based a posteriori error estimator for eddy current computation*, M2AN Math. Model. Numer. Anal. **34** (2000), no. 1, 159–182.
- [15] B. Beck, R. Hiptmair und B. Wohlmuth, *Hierarchical error estimator for eddy current computation*, to appear.
- [16] R. Becker und M. Braack, *Multigrid techniques for finite elements on locally refined meshes. Numerical linear algebra methods for computational fluid flow problems*, Numer. Linear Algebra Appl. **7** (2000), no. 6, 363–379.
- [17] A. Bendali, *Numerical analysis of the exterior boundary value problem for the time-harmonic Maxwell equations by a boundary finite element method. Part 1, the continuous problem*, Math. Comp. **43** (1984), 29–46.
- [18] A. Bendali, *Numerical analysis of the exterior boundary value problem for the time-harmonic Maxwell equations by a boundary finite element method. Part 2, the discrete problem*, Math. Comp. **43** (1984), 47–68.
- [19] J. Bey, *Simplicial grid refinement: on Freudenthal's algorithm and the optimal number of congruence classes*, Numer. Math. **85** (2000), no. 1, 1–29.
- [20] J. Bey, *Tetrahedral grid refinement*, Computing **55** (1995), no. 4, 355–378.
- [21] A. Bossavit, *Computational Electromagnetism*, Academic Press, 1998.
- [22] A. de La Bourdonnaye, *Décomposition de $H_{div}^{-1/2}(\Gamma)$ et nature de l'opérateur de Steklov-Poincaré du problème extérieur de l'électromagnétisme*, C. R. Acad. Sci. Paris **316** (1993), Série I, 369–372.

- [23] A. de La Bourdonnaye, *Some formulations coupling finite element and integral equation methods for Helmholtz equation and electromagnetism*, Numer. Math. **69** (1995), No. 3, 257-268.
- [24] D. Braess, *Finite Elements*, Springer-Verlag, 1997.
- [25] F. Brezzi und M. Fortin, *Mixed And Hybrid Finite Element Methods*, Springer Series in Computational Mathematics, Band 15, Springer-Verlag, 1991.
- [26] U. Brink und E. P. Stephan, *Implicit residual error estimators for the coupling of finite elements and boundary elements*, Math. Meth. Appl. Sci. **22** (1999), 923–936.
- [27] A. Buffa und S. H. Christiansen, *The electric field integral equation on Lipschitz screens: definitions and numerical approximation*, Tech. Rep., Instituto di Analisi Numerica, CNR, Pavia, Italy, 2001.
- [28] A. Buffa und P. Ciarlet, *On traces for functional spaces related to Maxwell's equations. Part I: An integration by parts formula in Lipschitz polyhedra*, Math. Methods Appl. Sci. **24** (2001), no. 1, 9–31.
- [29] A. Buffa und P. Ciarlet, *On traces for functional spaces related to Maxwell's equations. Part II: Hodge decompositions on the boundary of Lipschitz polyhedra an applications*, Math. Methods Appl. Sci. **24** (2001), no. 1, 31–48.
- [30] A. Buffa, M. Costabel und C. Schwab, *Boundary element methods for Maxwell's equations on non-smooth domains*, Research Report No. 2001-01, 2001, Seminar für Angewandte Mathematik, Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich.
- [31] A. Buffa, M. Costabel und D. Sheen, *On traces for $\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$ in Lipschitz domains*, preprint, Instituto di Analisi Numerica, CNR, Pavia, Italy, 2001.
- [32] A. Buffa, R. Hiptmair, T. von Petersdorff und C. Schwab, *Boundary element methods for Maxwell equations in Lipschitz domains*, Research Report No. 2001-05, 2001, Seminar für Angewandte Mathematik, Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich.
- [33] G. F. Carey und J. T. Oden, *Finite Elements, Computational Aspects, Vol. III*, Prentice Hall, 1984.
- [34] C. Carstensen, *A posteriori error estimate for the symmetric coupling of finite elements and boundary elements*, Computing **57** (1996), no. 4, 301-322.
- [35] C. Carstensen, A. Funken, *Coupling of mixed finite elements and boundary elements*, IMA J. Numer. Anal. **20**, (2000), no. 3, 461–480.

- [36] C. Carstensen, S. A. Funken und E. P. Stephan, *On the adaptive coupling of FEM and BEM in 2-d-elasticity*, Numer. Math. **77** (1997), 187–221.
- [37] C. Carstensen und E. P. Stephan, *Adaptive coupling of boundary elements and finite elements*, RAIRO Modélisation Math. Anal. Numér. **29** (1995), 779–817.
- [38] P. Ciarlet *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, Studies in Mathematics and its Applications **4**, North Holland, Amsterdam, 1978.
- [39] P. Ciarlet, Jr. und J. Zou, *Fully discrete finite element method approaches for time-dependent Maxwell equations*, Numer. Math. **82**, (1999), 193–219.
- [40] D. Colton and R. Kress, *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, Applied Mathematical Sciences 93, Springer-Verlag, 2. Auflage 1998.
- [41] M. Costabel, *Boundary integral operators on Lipschitz domains: Elementary results*, SIAM J. Math. Anal. **19** (1988), no. 3, 613–626.
- [42] R. Dautrey und J.-L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, Springer-Verlag, 1990.
- [43] A. de La Bourdonnaye, *Décomposition de $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$ et nature de l'opérateur de Steklov-Poincaré du problème extérieur de l'électromagnétisme*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 316, Série I (1993), 369–372.
- [44] L. Demkowicz, *Edge finite elements of variable order for Maxwell's equations*, TICAM Report 00–20, University of Texas at Austin, 2000.
- [45] L. Demkowicz, P. Monk, W. Rachowicz und L. Vardapetyan, *De Rham Diagram for hp finite element spaces*, Comput. Math. Appl. **39** (2000), no. 7–8, 29–38.
- [46] L. Demkowicz und W. Rachowicz, *An hp-adaptive finite element method for electromagnetics – part 1: Data structure and constrained approximation*, Comput. Methods Appl. Engrg **187** (2000), 307–335.
- [47] L. Demkowicz und W. Rachowicz, *An hp-adaptive finite element method for electromagnetics – part 2: A 3D implementation*, Int. J. Numer. Meth. Engng **53** (2002), 147–180.
- [48] H. K. Dirks, *Quasi-stationary fields for microelectronic applications*, Electrical Engineering **79** (1996), no. 2, 145–155.
- [49] F. Dubois, *Discrete vector potential representation of a divergence-free vector field in three-dimensional domains: Numerical analysis of a model problem*, SIAM J. Numer. Anal. **27** (1990), no. 5, 1103–1141.

- [50] V. Girault und P.-A. Raviart, *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Theory and Algorithms*, Springer Series in Computational Mathematics 5., Springer-Verlag, 1986.
- [51] P. Grisvard, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Pitman Publishing, Boston–London, 1985.
- [52] C. Großmann und H.-G. Roos, *Numerik partieller Differentialgleichungen*, Teubner, Stuttgart, 1992.
- [53] F. B. Hildebrand, *Advanced Calculus for Applications*, Prentice-Hall, New Jersey, 2. Auflage 1963.
- [54] R. Hiptmair, *Canonical Construction of finite elements*, Math. Comp. **68** (1999), no. 228, 1325–1346.
- [55] R. Hiptmair, *Multigrid method for Maxwell’s equation*, SIAM J. Numer. Anal. **36** (1998), no. 1, 204–225.
- [56] R. Hiptmair, *Multilevel Preconditioning for Mixed Problems in Three Dimensions*, Ph.D. thesis, Mathematisches Institut, Universität Augsburg, Augsburg, 1996.
- [57] R. Hiptmair, *Coupling of finite elements and boundary elements in electromagnetic scattering*, Report #164 (2001), Sonderforschungsbereich 382, Universität Tübingen.
- [58] R. Hiptmair, *Symmetric Coupling for Eddy Current Problems*, Report #148 (2000), Sonderforschungsbereich 382, Universität Tübingen.
- [59] R. Hiptmair und C. Schwab, *Natural BEM for the electric field integral equation on polyhedra*, Research Report No. 2001-04, 2001, Seminar für Angewandte Mathematik, Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich.
- [60] R. H. W. Hoppe und B. I. Wohlmuth, *A comparison of a posteriori error estimators of mixed finite element discretizations by Raviart-Thomas elements*, Math. Comp. **68** (1999), no. 228, 1347–1378.
- [61] A. Kirsch und P. Monk, *A finite element/spectral method for approximating the time harmonic Maxwell system in \mathbb{R}^3* , SIAM J. Appl. Math. **55** (1995), no. 5, 1324–1344.
- [62] M. Kline und I. W. Kay, *Electromagnetic Theory and Geometrical Optics*, Pure and Applied Mathematics, Vol. XII, Interscience Publishers, 1965.
- [63] M. Kuhn und O. Steinbach, *Symmetric coupling of finite and boundary elements for exterior magnetic field problems*, Math. Methods Appl. Sci. **25** (2002), no. 5, 357–371.

- [64] V. Levillain, *Couplage éléments finis-equations intégrales pour la résolution des équations de Maxwell en milieu hétérogène*, Doktorarbeit, Ecole Polytechnique, 1991.
- [65] R. C. MacCamy und E. P. Stephan, *A boundary element method for an exterior problem for three-dimensional Maxwell's equations*, *Applicable Anal.* **16** (1983), no. 2, 141–163.
- [66] R. C. MacCamy und E. P. Stephan, *A skin effect approximation for eddy current problems*, *Arch. Rational Mech. Anal.* **90** (1985), no. 1, 87–98.
- [67] R. C. MacCamy und E. P. Stephan, *A simple layer potential method for three-dimensional eddy current problems*, *Ordinary and partial differential equations (Dundee, 1982)*, 477–484, *Lecture Notes in Math.*, 964, Springer-Verlag, 1982.
- [68] R. C. MacCamy und E. P. Stephan, *Solution procedures for three-dimensional eddy current problems*, *J. Math. Anal. Appl.* **101** (1984), no. 2, 348–379.
- [69] M. Maischak, *The analytical computation of the Galerkin elements for the Laplace, Lamé and Helmholtz equations in 2D-BEM*, Preprint 95-15, DFG-Schwerpunkt Randelementmethode.
- [70] M. Maischak, *The analytical computation of the Galerkin elements for the Laplace, Lamé and Helmholtz equations in 3D-BEM*, Preprint 95-16, DFG-Schwerpunkt Randelementmethode.
- [71] M. Maischak, *Galerkin elements of FEM in 2D and 3D*, Preprint, Institut für Angewandte Mathematik, Universität Hannover.
- [72] M. Maischak, *Manual of the software package maiprogs*, Preprint, Institut für Angewandte Mathematik, Universität Hannover.
- [73] M. Maischak, *Technical manual of the program system maiprogs*, Preprint, Institut für Angewandte Mathematik, Universität Hannover.
- [74] M. Maischak, *B.O.N.E. – Book of Numerical Experiments*, Preprint, Institut für Angewandte Mathematik, Universität Hannover.
- [75] M. Maischak, P. Mund und E. P. Stephan, *Adaptive multilevel BEM for acoustic scattering*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg* **150** (1997), no. 1–4, 351–367.
- [76] D. Mitrea, M. Mitrea und J. Pipher, *Vector potential theory on nonsmooth domains in \mathbb{R}^3 and applications to electromagnetic scattering*, *J. Fourier Anal. Appl.* **3** (1997), no. 2, 131–192.

- [77] P. K. Moore, *An adaptive finite element method for parabolic differential systems: some algorithmic considerations in solving in three space dimensions*, SIAM J. Sci. Comput. **21** (2000), no. 4, 1567–1586.
- [78] P. Mund, *Zwei-Level-Verfahren für Randintegralgleichungen mit Anwendungen auf die nichtlineare FEM-BEM-Kopplung*, Doktorarbeit, Institut für Angewandte Mathematik, Universität Hannover (1997).
- [79] P. Mund und E. P. Stephan, *An adaptive two-level method for the coupling of nonlinear FEM-BEM equations*, SIAM J. Numer. Anal. **36** (1999), no. 4, 1001–1021.
- [80] P. Mund, E. P. Stephan und J. Weiße, *Two-level methods for the single layer potential in \mathbb{R}^3* , Computing **60** (1998), no. 3, 243–266.
- [81] J.-C. Nédélec, *Acoustic and Electromagnetic Equations: Integral Representation for Harmonic problems*, Springer-Verlag, 2001.
- [82] J.-C. Nédélec, *Computation of eddy currents on a surface in \mathbb{R}^3 by finite element methods*, SIAM J. Numer. Anal. **15** (1978), no. 3, 580–594.
- [83] J.-C. Nédélec, *Integral equations with non-integrable kernels*, Integral Equations Operator Theory **5** (1982), 562 – 572.
- [84] J.-C. Nédélec, *Mixed finite elements in \mathbb{R}^3* , Numer. Math. **35** (1980), 315–341.
- [85] J.-C. Nédélec, *A new family of mixed finite elements in \mathbb{R}^3* , Numer. Math. **50** (1986), 57–81.
- [86] J.-C. Nédélec und J. Planchard, *Une méthode variationnelle d'éléments finis pour la résolution numérique d'un problème extérieur des \mathbb{R}^3* , RAIRO, Mo. Math. Anal. Numer. **7** (1973), 105–129.
- [87] A. Nethe, *Wirbelstromverluste bei der induktiven Erwärmung*, Electrical Engineering **79** (1996), no. 3, 157–164.
- [88] P. Oswald, *Multilevel preconditioners for discretizations of the biharmonic equation by rectangular finite elements*, Numer. Linear Algebra Appl. **2** (1995), no. 6, 487–505.
- [89] P. A. Raviart und J. M. Thomas, *A mixed finite element method for second order elliptic problems*, Mathematical Aspects of the Finite Element Method (Galligani, Magenes), Lecture Notes in Math., 606, Springer-Verlag, 1977.
- [90] L. R. Scott und Z. Zhang, *Finite element interpolation of nonsmooth functions satisfying boundary conditions*, Math. Comp. **54** (1990), 483–493.

- [91] A. Toselli, O. B. Widlund und B. I. Wohlmuth, *An iterative substructuring method for Maxwell's equations in two dimensions*, Math. Comp. to appear.
- [92] A. Toselli, O. B. Widlund und B. I. Wohlmuth, *An iterative substructuring method for Raviart-Thomas vector fields in three dimensions*, SIAM J. Numer. Anal. **37** (2000), no. 5, 1657–1676.
- [93] G. Verchota, *Layer potentials and regularity for the Dirichlet problem for Laplace's equation in Lipschitz domains*, J. Funct. Anal. **59** (1984), 572–611.
- [94] R. Verfürth, *A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh- Refinement Techniques*, Wiley-Teubner, 1996.

A. Vektoridentitäten

Als sehr nützlich erweisen sich die Vektoridentitäten aus dem folgenden

Lemma A.1. *Seien ϕ, ϕ_1, ϕ_2 skalare und \mathbf{u}, \mathbf{v} vektorwertige Funktionen für die die angegebenen Ableitungen existieren. Es gelten die Identitäten*

$$\operatorname{div}(\phi \mathbf{u}) = \phi \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} \phi, \quad (\text{A.1.1})$$

$$\operatorname{curl}(\phi \mathbf{u}) = \phi(\operatorname{curl} \mathbf{u}) + \operatorname{grad} \phi \times \mathbf{u}, \quad (\text{A.1.2})$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \operatorname{curl} \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \operatorname{curl} \mathbf{v}, \quad (\text{A.1.3})$$

$$\operatorname{curl}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = D\mathbf{u}^\top \cdot \mathbf{v} - D\mathbf{v}^\top \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} - \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad (\text{A.1.4})$$

$$\operatorname{grad}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = D\mathbf{v}^\top \cdot \mathbf{u} + D\mathbf{u}^\top \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \operatorname{curl} \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \operatorname{curl} \mathbf{u}, \quad (\text{A.1.5})$$

$$\operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathbf{u} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u}, \quad (\text{A.1.6})$$

$$\operatorname{curl} \operatorname{grad} \phi = 0, \quad (\text{A.1.7})$$

$$\operatorname{div} \operatorname{curl} \mathbf{u} = 0, \quad (\text{A.1.8})$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \phi_1 \times \operatorname{grad} \phi_2) = 0. \quad (\text{A.1.9})$$

Beweis. Siehe [53].

□

Auch benötigen wir ab und zu die folgenden Entwicklungssätze für das Kreuzprodukt:

Lemma A.2. *Für $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{C}^3$ gilt*

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}, \quad (\text{A.2.10})$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}, \quad (\text{A.2.11})$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}). \quad (\text{A.2.12})$$

A. *Vektoridentitäten*

B. Nédélec- und Raviart-Thomas-Räume

Wir wollen hier einmal die Definitionen der in dieser Arbeit verwendeten Finite-Element-Räume für allgemeine Polynomgrade definieren. Außerdem wollen wir noch einmal die wichtigsten Eigenschaften dieser Räume anführen.

Dafür seien \mathbb{P}_k und \mathcal{S}_k die bekannten Räume der Polynome bzw. stückweisen Polynome vom Grad k . Außerdem sei \mathbb{P}_k^0 der Raum der homogenen Polynome.

B.1. Nédélec Räume für $\mathbf{H}(\text{curl}, \Omega)$ in drei Dimensionen

auf Tetraedern:

Auf dem durch (3.1.1) gegebenen Referenzelement \hat{T} , definiere

$$\mathcal{ND}_k(\hat{T}) = (\mathbb{P}_{k-1}(\hat{T}))^3 \oplus \{\mathbf{p} \in (\mathbb{P}_k^0(\hat{T}))^3, \mathbf{p}(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \hat{\mathbf{x}} = 0 \forall \hat{\mathbf{x}} \in \hat{T}\}.$$

Die Dimension von $\mathcal{ND}_k(\hat{T})$ ist $\frac{1}{2}k(k+2)(k+3)$.

Die Freiheitsgrade definieren sich wie folgt:

1. $\int_e \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} q ds \quad \forall q \in \mathbb{P}_{k-1}, e \text{ Kante von } \hat{T},$
2. $\int_F (\mathbf{u} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{q} dS; \quad \forall \mathbf{q} \in (\mathbb{P}_{k-2})^2, F \text{ Seite von } \hat{T},$
3. $\int_{\hat{T}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{q} d\hat{\mathbf{x}} \quad \forall \mathbf{q} \in (\mathbb{P}_{k-3})^3.$

auf Hexaedern (Spaten):

Auf dem durch (3.1.6) gegebenen Referenzelement \hat{T} , definiere

$$\mathcal{ND}_k(\hat{T}) = \mathbb{P}_{k-1,k,k}(\hat{T}) \times \mathbb{P}_{k,k-1,k}(\hat{T}) \times \mathbb{P}_{k,k,k-1}(\hat{T}).$$

B. Nédélec- und Raviart-Thomas-Räume

Die Dimension von $\mathcal{N}\mathcal{D}_k(\widehat{T})$ ist $3k(k+1)^2$.

Die Freiheitsgrade definieren sich wie folgt:

1. $\int_e \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} q ds \quad \forall q \in \mathbb{P}_{k-1}, e \text{ Kante von } \widehat{T},$
2. $\int_F (\mathbf{u} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{q} dS \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{P}_{k-2, k-1} \times \mathbb{P}_{k-1, k-2}, F \text{ Seite von } \widehat{T},$
3. $\int_{\widehat{T}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{q} d\hat{\mathbf{x}} \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{P}_{k-1, k-2, k-2} \times \mathbb{P}_{k-2, k-1, k-2} \times \mathbb{P}_{k-2, k-2, k-1} = \mathcal{RT}_{k-1}.$

B.2. Raviart-Thomas-Räume für $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ in zwei oder drei Dimensionen

auf Dreiecken bzw. Tetraedern:

Auf dem durch (3.1.1) gegebenen Referenzelement \widehat{T} , definiere ($n=2,3$)

$$\begin{aligned} \mathcal{RT}_k(\widehat{T}) &:= (\mathbb{P}_{k-1}(\widehat{T}))^n \oplus \hat{\mathbf{x}}\mathbb{P}_{k-1}^0(\widehat{T}) \\ &= (\mathbb{P}_{k-1}(\widehat{T}))^n \oplus \{\mathbf{p} \in (\mathbb{P}_k^0(\widehat{T}))^n, \mathbf{p}(\hat{\mathbf{x}}) \times \hat{\mathbf{x}} = 0 \forall \hat{\mathbf{x}} \in \widehat{T}\}. \end{aligned}$$

Die Dimension von $\mathcal{RT}_k(\widehat{T})$ ist $\begin{cases} k(k+2), & n=2 \\ \frac{1}{2}k(k+1)(k+3), & n=3 \end{cases}$.

Die Freiheitsgrade definieren sich wie folgt:

1. $\int_F \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} q dS \quad \forall q \in (\mathbb{P}_{k-1})^{n-1}, F \text{ Seite von } \widehat{T},$
2. $\int_{\widehat{T}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{q} d\hat{\mathbf{x}} \quad \forall \mathbf{q} \in (\mathbb{P}_{k-2})^n.$

auf Vierecken bzw. Hexaedern (Parallelogrammen bzw. Spaten):

Auf dem dem durch (3.1.6) gegebenen Referenzelement \widehat{T} , definiere ($n=2,3$)

$$\mathcal{RT}_k(\widehat{T}) := \begin{cases} \mathbb{P}_{k, k-1} \times \mathbb{P}_{k-1, k}, & n=2 \\ \mathbb{P}_{k, k-1, k-1} \times \mathbb{P}_{k-1, k, k-1} \times \mathbb{P}_{k-1, k-1, k}, & n=3 \end{cases}.$$

Die Dimension von $\mathcal{RT}_k(\widehat{T})$ ist $\begin{cases} 2k(k+1), & n=2 \\ 3k^2(k+1), & n=3 \end{cases}$.

Die Freiheitsgrade definieren sich wie folgt:

1. $\int_F \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} q dS \quad \forall q \in (\mathbb{P}_{k-1})^{n-1}, F \text{ Seite von } \hat{T},$
2. $\int_{\hat{T}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{q} d\hat{\mathbf{x}} \quad \forall \mathbf{q} \in \mathcal{ND}_{k-1}.$

B.3. Eigenschaften

Wir haben oben den Raum der Nédélec-Elemente nur für den drei-dimensionalen Fall definiert. Der Vollständigkeit halber (und um im folgenden möglichst allgemein bleiben zu können) definieren wir hier: Für $n = 2$ ist $\mathcal{ND}_k(\mathcal{T}_h)$ die Drehung von $\mathcal{RT}_k(\mathcal{T}_h)$ um $\pi/2$, d.h.

$$(u_1, u_2) \in \mathcal{ND}_k(\mathcal{T}_h) \iff (u_2, -u_1) \in \mathcal{RT}_k(\mathcal{T}_h).$$

Es gelten nun folgende Inklusionen:

- $(\mathcal{S}_{k-1}(\mathcal{T}_h))^n \subset \mathcal{RT}_k(\mathcal{T}_h), \mathcal{ND}_k(\mathcal{T}_h) \subset (\mathcal{S}_k(\mathcal{T}_h))^n,$
- $\mathcal{N}(\text{div}) \cap \mathcal{RT}_k(\mathcal{T}_h) \subset (\mathcal{S}_{k-1}(\mathcal{T}_h))^n,$
- $\mathcal{N}(\text{curl}) \cap \mathcal{ND}_k(\mathcal{T}_h) \subset (\mathcal{S}_{k-1}(\mathcal{T}_h))^n,$
- $\text{div } \mathbf{u}_k \in \mathcal{S}_{k-1}(\mathcal{T}_h) \quad \forall \mathbf{u}_k \in \mathcal{RT}_k(\mathcal{T}_h),$
- $\text{curl } \mathbf{u}_k \in (\mathcal{S}_{k-1}(\mathcal{T}_h))^n \quad \forall \mathbf{u}_k \in \mathcal{ND}_k(\mathcal{T}_h).$

Seien $\Pi^{\mathcal{ND}_k}$ bzw. $\Pi^{\mathcal{RT}_k}$ die Interpolationsoperatoren von $\mathbf{H}(\text{curl}, \Omega)$ bzw. $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ in die entsprechenden diskreten Approximationsräume bzgl. den Freiheitsgraden. Dann kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{H}(\text{curl}, \Omega) & \xrightarrow{\text{curl}} & \mathbf{H}(\text{div}, \Omega)/\mathbb{C} \\ \Pi^{\mathcal{ND}_k(\mathcal{T}_h)} \downarrow & & \downarrow \Pi^{\mathcal{RT}_k} \\ \mathcal{ND}_k & \xrightarrow{\text{curl}} & \mathcal{RT}_k/\mathbb{C} \end{array}$$

In anderen Worten:

$$\text{curl } \Pi^{\mathcal{ND}_k} \mathbf{u} = \Pi^{\mathcal{RT}_k} \text{curl } \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\text{curl}, \Omega).$$

Die Kerne der Differentialoperatoren bleiben erhalten, d.h.

- $\text{div } \mathbf{u} = 0 \implies \text{div } \Pi^{\mathcal{RT}_k} \mathbf{u} = 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega),$
- $\text{curl } \mathbf{u} = 0 \implies \text{curl } \Pi^{\mathcal{ND}_k} \mathbf{u} = 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\text{curl}, \Omega).$

B. Nédélec- und Raviart-Thomas-Räume

Entsprechend den Eigenschaften der kontinuierlichen Räume gilt auch für die diskreten Räume der folgende

Satz B.3.1. *Sei Ω einfach zusammenhängend. Dann gilt*

- $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{ND}_k(\mathcal{T}_h)$, $\mathbf{curl} \boldsymbol{\xi} = 0 \iff \boldsymbol{\xi} = \mathbf{grad} \phi$, $\phi \in \mathcal{S}_k(\mathcal{T}_h)$,
- $\mathbf{u} \in \mathcal{RT}_k(\mathcal{T}_h)$, $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \iff \mathbf{u} = \mathbf{curl} \boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\xi} \in \begin{cases} \mathcal{S}_k(\mathcal{T}_h), & n = 2, \\ \mathcal{ND}_k(\mathcal{T}_h), & n = 3. \end{cases}$

Dies kann man auch folgendermaßen mit dem De-Rham-Diagramm ausdrücken:

$$\mathcal{S}_0(\mathcal{T}_h) \xrightarrow{Id} \mathcal{S}_k(\mathcal{T}_h) \xrightarrow{\mathbf{grad}} \mathcal{ND}_k(\mathcal{T}_h) \xrightarrow{\mathbf{curl}} \mathcal{RT}_k(\mathcal{T}_h) \xrightarrow{\operatorname{div}} \mathcal{S}_{k-1}(\mathcal{T}_h) \xrightarrow{0} \{0\}.$$

Dabei ist der Bildraum eines Differentialoperators stets der Kern des darauffolgenden Differentialoperators. Dieses Diagramm ist das diskrete Pendant zum stetigen De-Rham-Diagramm

$$\mathcal{S}_0(\Omega) \xrightarrow{Id} \mathbf{H}^1(\Omega) \xrightarrow{\mathbf{grad}} \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega) \xrightarrow{\mathbf{curl}} \mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega) \xrightarrow{\operatorname{div}} \mathbf{L}^2(\Omega) \xrightarrow{0} \{0\}.$$

Es gelten die Approximationseigenschaften:

- $\|\mathbf{u} - \boldsymbol{\Pi}^{\mathcal{ND}_k} \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2(K)} \leq ch^k |\mathbf{u}|_{(H^{k+1}(K))^3}$,
- $\|\mathbf{curl}(\mathbf{u} - \boldsymbol{\Pi}^{\mathcal{ND}_k} \mathbf{u})\|_{\mathbf{L}_2(K)} \leq ch^k |\mathbf{u}|_{(H^{k+1}(K))^3}$,
- $\|\mathbf{u} - \boldsymbol{\Pi}^{\mathcal{RT}_k} \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2(K)} \leq ch^k |\mathbf{u}|_{(H^k(K))^3}$,
- $\|\operatorname{div}(\mathbf{u} - \boldsymbol{\Pi}^{\mathcal{RT}_k} \mathbf{u})\|_{L_2(K)} \leq ch^k |\mathbf{u}|_{(H^{k+1}(K))^3}$.

Die Abbildungen

- $\gamma_n : \mathcal{RT}_k^{(3)}(\mathcal{T}_h) \rightarrow Q_{k-1}^{(2)}(\mathcal{K}_h)$, $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$,
- $\gamma_t^\times : \mathcal{ND}_k^{(3)}(\mathcal{T}_h) \rightarrow \mathcal{RT}_k^{(2)}(\mathcal{K}_h)$, $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u} \times \mathbf{n}$

sind stetig und surjektiv.

Außerdem übertragen sich die Freiheitsgrade, d.h.

$$\gamma_t^\times \boldsymbol{\Pi}^{\mathcal{ND}_k^{(3)}} \mathbf{u} = \boldsymbol{\Pi}^{\mathcal{RT}_k^{(2)}} \gamma_t^\times \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega).$$

B.4. Basisfunktionen von \mathcal{ND}_2

Wir wollen die Basisfunktionen von $\mathcal{ND}_2(\widehat{T})$ auf dem in (3.1.6) definierten hexaedrischen Referenzelement $\widehat{T} = [-1, 1]^3$ entsprechend den in Abschnitt B.1 aufgeführten Freiheitsgraden berechnen. Dazu berechnen wir die Koeffizienten c_j ($j = 1, \dots, 54$) zur Monombasis $\{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{54}\}$ von $\mathcal{ND}_2(\widehat{T}) = \mathbb{P}_{1,2,2}(\widehat{T}) \times \mathbb{P}_{2,1,2}(\widehat{T}) \times \mathbb{P}_{2,2,1}(\widehat{T})$. Die Basisfunktionen \mathbf{p}_j sind am Ende dieses Abschnittes aufgeführt. Zur Berechnung der Koeffizienten stellen wir die Matrix N auf, die folgendes Aussehen hat:

Die ersten 24 Zeilen von N haben die Form $(\int_{e_\ell} \mathbf{p}_j \cdot \mathbf{t}_\ell q_k ds)_{j=1, \dots, 54}$, mit $\ell = 1, \dots, 12$ und $k = 1, 2$. Es sind e_ℓ die Kanten des Referenzelements und \mathbf{t}_ℓ die entsprechenden Tangentenvektoren. Weiter ist $\{q_1, q_2\}$ mit $q_1(x) = 1$, $q_2(x) = x$ eine Basis von $\mathbb{P}_1(\widehat{e})$, $\widehat{e} = [-1, 1]$.

Die nächsten 24 Zeilen von N haben die Form $(\int_{F_\ell} (\mathbf{p}_j \times \mathbf{n}_\ell) \cdot \mathbf{q}_k dS)_{j=1, \dots, 54}$, mit $\ell = 1, \dots, 6$ und $k = 1, \dots, 4$. Es sind F_ℓ die Seitenflächen des Referenzelements und \mathbf{n}_ℓ die entsprechenden Normalenvektoren. Weiter ist $\{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_4\}$ mit $\mathbf{q}_1(x, y) = (1, 0)^\top$, $\mathbf{q}_2(x, y) = (y, 0)^\top$, $\mathbf{q}_3(x, y) = (0, 1)^\top$, $\mathbf{q}_4(x, y) = (0, x)^\top$ eine Basis von $\mathbb{P}_{0,1}(\widehat{F}) \times \mathbb{P}_{1,0}(\widehat{F})$, $\widehat{F} = [-1, 1]^2$.

Die letzten 6 Zeilen von N haben die Form $(\int_{\widehat{T}} \mathbf{p}_j \cdot \mathbf{q}_k dx)_{j=1, \dots, 54}$, wobei $\{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_6\}$ mit $\mathbf{q}_1(x, y, z) = (1, 0, 0)^\top$, $\mathbf{q}_2(x, y, z) = (x, 0, 0)^\top$, $\mathbf{q}_3(x, y, z) = (0, 1, 0)^\top$, $\mathbf{q}_4(x, y, z) = (0, y, 0)^\top$, $\mathbf{q}_5(x, y, z) = (0, 0, 1)^\top$, $\mathbf{q}_6(x, y, z) = (0, 0, z)^\top$ eine Basis von $\mathbb{P}_{1,0,0}(\widehat{T}) \times \mathbb{P}_{0,1,0}(\widehat{T}) \times \mathbb{P}_{0,0,1}(\widehat{T})$ ist.

Zum Schluß definiert man 54 rechte Seiten $\mathbf{l}_r = (\delta_{jr})_{j=1, \dots, 54}$ ($r = 1, \dots, 54$) und löst die Systeme $N\mathbf{c}_r = \mathbf{l}_r$. Man erhält so die Koeffizientenvektoren \mathbf{c}_r der Basisfunktionen \mathbf{b}_r zu der Monombasis $\{\mathbf{p}_j\}$. Wir geben hier die so errechneten Basisfunktionen an, allerdings nicht in der Zählung \mathbf{b}_r ($r = 1, \dots, 54$), sondern in der etwas übersichtlicheren Form $\mathbf{b}_1^{(e_1)}, \mathbf{b}_2^{(e_1)}, \dots, \mathbf{b}_1^{(e_{12})}, \mathbf{b}_2^{(e_{12})}, \mathbf{b}_1^{(F_1)}, \dots, \mathbf{b}_4^{(F_1)}, \dots, \mathbf{b}_1^{(F_6)}, \dots, \mathbf{b}_4^{(F_6)}, \mathbf{b}_1^{(T)}, \dots, \mathbf{b}_6^{(T)}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1^{(e_1)} &= \frac{1}{32}\mathbf{p}_0 + \frac{1}{16}\mathbf{p}_2 + \frac{1}{16}\mathbf{p}_3 - \frac{3}{32}\mathbf{p}_6 + \frac{1}{8}\mathbf{p}_7 - \frac{3}{32}\mathbf{p}_8 - \frac{3}{16}\mathbf{p}_{12} - \frac{3}{16}\mathbf{p}_{13} + \frac{9}{32}\mathbf{p}_{16}, \\ \mathbf{b}_2^{(e_1)} &= \frac{3}{32}\mathbf{p}_1 + \frac{3}{16}\mathbf{p}_4 + \frac{3}{16}\mathbf{p}_5 - \frac{9}{32}\mathbf{p}_9 + \frac{3}{8}\mathbf{p}_{10} - \frac{9}{32}\mathbf{p}_{11} - \frac{9}{16}\mathbf{p}_{14} - \frac{9}{16}\mathbf{p}_{15} + \frac{27}{32}\mathbf{p}_{17}, \\ \mathbf{b}_1^{(e_2)} &= \frac{1}{32}\mathbf{p}_0 - \frac{1}{16}\mathbf{p}_2 + \frac{1}{16}\mathbf{p}_3 - \frac{3}{32}\mathbf{p}_6 - \frac{1}{8}\mathbf{p}_7 - \frac{3}{32}\mathbf{p}_8 - \frac{3}{16}\mathbf{p}_{12} + \frac{3}{16}\mathbf{p}_{13} + \frac{9}{32}\mathbf{p}_{16}, \\ \mathbf{b}_2^{(e_2)} &= \frac{3}{32}\mathbf{p}_1 - \frac{3}{16}\mathbf{p}_4 + \frac{3}{16}\mathbf{p}_5 - \frac{9}{32}\mathbf{p}_9 - \frac{3}{8}\mathbf{p}_{10} - \frac{9}{32}\mathbf{p}_{11} - \frac{9}{16}\mathbf{p}_{14} + \frac{9}{16}\mathbf{p}_{15} + \frac{27}{32}\mathbf{p}_{17}, \\ \mathbf{b}_1^{(e_3)} &= \frac{1}{32}\mathbf{p}_0 + \frac{1}{16}\mathbf{p}_2 - \frac{1}{16}\mathbf{p}_3 - \frac{3}{32}\mathbf{p}_6 - \frac{1}{8}\mathbf{p}_7 - \frac{3}{32}\mathbf{p}_8 + \frac{3}{16}\mathbf{p}_{12} - \frac{3}{16}\mathbf{p}_{13} + \frac{9}{32}\mathbf{p}_{16}, \\ \mathbf{b}_2^{(e_3)} &= \frac{3}{32}\mathbf{p}_1 + \frac{3}{16}\mathbf{p}_4 - \frac{3}{16}\mathbf{p}_5 - \frac{9}{32}\mathbf{p}_9 - \frac{3}{8}\mathbf{p}_{10} - \frac{9}{32}\mathbf{p}_{11} + \frac{9}{16}\mathbf{p}_{14} - \frac{9}{16}\mathbf{p}_{15} + \frac{27}{32}\mathbf{p}_{17}, \\ \mathbf{b}_1^{(e_4)} &= \frac{1}{32}\mathbf{p}_0 - \frac{1}{16}\mathbf{p}_2 - \frac{1}{16}\mathbf{p}_3 - \frac{3}{32}\mathbf{p}_6 + \frac{1}{8}\mathbf{p}_7 - \frac{3}{32}\mathbf{p}_8 + \frac{3}{16}\mathbf{p}_{12} + \frac{3}{16}\mathbf{p}_{13} + \frac{9}{32}\mathbf{p}_{16}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{b}_2^{(F_2)} = -\frac{9}{32}\mathbf{p}_{39} + \frac{9}{16}\mathbf{p}_{44} + \frac{9}{32}\mathbf{p}_{46} + \frac{27}{32}\mathbf{p}_{49} - \frac{9}{16}\mathbf{p}_{51} - \frac{27}{32}\mathbf{p}_{53},$$

$$\mathbf{b}_3^{(F_2)} = \frac{3}{32}\mathbf{p}_0 - \frac{3}{16}\mathbf{p}_2 - \frac{9}{32}\mathbf{p}_6 - \frac{3}{32}\mathbf{p}_8 + \frac{3}{16}\mathbf{p}_{13} + \frac{9}{32}\mathbf{p}_{16},$$

$$\mathbf{b}_4^{(F_2)} = \frac{9}{32}\mathbf{p}_1 - \frac{9}{16}\mathbf{p}_4 - \frac{27}{32}\mathbf{p}_9 - \frac{9}{32}\mathbf{p}_{11} + \frac{9}{16}\mathbf{p}_{15} + \frac{27}{32}\mathbf{p}_{17},$$

$$\mathbf{b}_1^{(F_3)} = \frac{3}{32}\mathbf{p}_{36} + \frac{3}{16}\mathbf{p}_{37} - \frac{9}{32}\mathbf{p}_{40} - \frac{3}{32}\mathbf{p}_{43} - \frac{3}{16}\mathbf{p}_{47} + \frac{9}{32}\mathbf{p}_{50},$$

$$\mathbf{b}_2^{(F_3)} = \frac{9}{32}\mathbf{p}_{39} + \frac{9}{16}\mathbf{p}_{42} - \frac{27}{32}\mathbf{p}_{46} - \frac{9}{32}\mathbf{p}_{49} - \frac{9}{16}\mathbf{p}_{52} + \frac{27}{32}\mathbf{p}_{53},$$

$$\mathbf{b}_3^{(F_3)} = -\frac{3}{32}\mathbf{p}_{18} - \frac{3}{16}\mathbf{p}_{19} + \frac{9}{32}\mathbf{p}_{22} + \frac{3}{32}\mathbf{p}_{26} + \frac{3}{16}\mathbf{p}_{30} - \frac{9}{32}\mathbf{p}_{33},$$

$$\mathbf{b}_4^{(F_3)} = -\frac{9}{32}\mathbf{p}_{20} - \frac{9}{16}\mathbf{p}_{23} + \frac{27}{32}\mathbf{p}_{27} + \frac{9}{32}\mathbf{p}_{31} + \frac{9}{16}\mathbf{p}_{34} - \frac{27}{32}\mathbf{p}_{35},$$

$$\mathbf{b}_1^{(F_4)} = \frac{3}{32}\mathbf{p}_{36} - \frac{3}{16}\mathbf{p}_{37} - \frac{9}{32}\mathbf{p}_{40} - \frac{3}{32}\mathbf{p}_{43} + \frac{3}{16}\mathbf{p}_{47} + \frac{9}{32}\mathbf{p}_{50},$$

$$\mathbf{b}_2^{(F_4)} = \frac{9}{32}\mathbf{p}_{39} - \frac{9}{16}\mathbf{p}_{42} - \frac{27}{32}\mathbf{p}_{46} - \frac{9}{32}\mathbf{p}_{49} + \frac{9}{16}\mathbf{p}_{52} + \frac{27}{32}\mathbf{p}_{53},$$

$$\mathbf{b}_3^{(F_4)} = -\frac{3}{32}\mathbf{p}_{18} + \frac{3}{16}\mathbf{p}_{19} + \frac{9}{32}\mathbf{p}_{22} + \frac{3}{32}\mathbf{p}_{26} - \frac{3}{16}\mathbf{p}_{30} - \frac{9}{32}\mathbf{p}_{33},$$

$$\mathbf{b}_4^{(F_4)} = -\frac{9}{32}\mathbf{p}_{20} + \frac{9}{16}\mathbf{p}_{23} + \frac{27}{32}\mathbf{p}_{27} + \frac{9}{32}\mathbf{p}_{31} - \frac{9}{16}\mathbf{p}_{34} - \frac{27}{32}\mathbf{p}_{35},$$

$$\mathbf{b}_1^{(F_5)} = \frac{3}{32}\mathbf{p}_{18} + \frac{3}{16}\mathbf{p}_{21} - \frac{3}{32}\mathbf{p}_{22} - \frac{9}{32}\mathbf{p}_{26} - \frac{3}{16}\mathbf{p}_{28} + \frac{9}{32}\mathbf{p}_{33},$$

$$\mathbf{b}_2^{(F_5)} = \frac{9}{32}\mathbf{p}_{20} + \frac{9}{16}\mathbf{p}_{25} - \frac{9}{32}\mathbf{p}_{27} - \frac{27}{32}\mathbf{p}_{31} - \frac{9}{16}\mathbf{p}_{32} + \frac{27}{32}\mathbf{p}_{35},$$

$$\mathbf{b}_3^{(F_5)} = -\frac{3}{32}\mathbf{p}_0 - \frac{3}{16}\mathbf{p}_3 + \frac{3}{32}\mathbf{p}_6 + \frac{9}{32}\mathbf{p}_8 + \frac{3}{16}\mathbf{p}_{12} - \frac{9}{32}\mathbf{p}_{16},$$

$$\mathbf{b}_4^{(F_5)} = -\frac{9}{32}\mathbf{p}_1 - \frac{9}{16}\mathbf{p}_5 + \frac{9}{32}\mathbf{p}_9 + \frac{27}{32}\mathbf{p}_{11} + \frac{9}{16}\mathbf{p}_{14} - \frac{27}{32}\mathbf{p}_{17},$$

$$\mathbf{b}_1^{(F_6)} = \frac{3}{32}\mathbf{p}_{18} - \frac{3}{16}\mathbf{p}_{21} - \frac{3}{32}\mathbf{p}_{22} - \frac{9}{32}\mathbf{p}_{26} + \frac{3}{16}\mathbf{p}_{28} + \frac{9}{32}\mathbf{p}_{33},$$

$$\mathbf{b}_2^{(F_6)} = \frac{9}{32}\mathbf{p}_{20} - \frac{9}{16}\mathbf{p}_{25} - \frac{9}{32}\mathbf{p}_{27} - \frac{27}{32}\mathbf{p}_{31} + \frac{9}{16}\mathbf{p}_{32} + \frac{27}{32}\mathbf{p}_{35},$$

$$\mathbf{b}_3^{(F_6)} = -\frac{3}{32}\mathbf{p}_0 + \frac{3}{16}\mathbf{p}_3 + \frac{3}{32}\mathbf{p}_6 + \frac{9}{32}\mathbf{p}_8 - \frac{3}{16}\mathbf{p}_{12} - \frac{9}{32}\mathbf{p}_{16},$$

$$\mathbf{b}_4^{(F_6)} = -\frac{9}{32}\mathbf{p}_1 + \frac{9}{16}\mathbf{p}_5 + \frac{9}{32}\mathbf{p}_9 + \frac{27}{32}\mathbf{p}_{11} - \frac{9}{16}\mathbf{p}_{14} - \frac{27}{32}\mathbf{p}_{17},$$

$$\mathbf{b}_1^{(T)} = \frac{9}{32}\mathbf{p}_0 - \frac{9}{32}\mathbf{p}_6 - \frac{9}{32}\mathbf{p}_8 + \frac{9}{32}\mathbf{p}_{16},$$

$$\mathbf{b}_2^{(T)} = \frac{27}{32}\mathbf{p}_1 - \frac{27}{32}\mathbf{p}_9 - \frac{27}{32}\mathbf{p}_{11} + \frac{27}{32}\mathbf{p}_{17},$$

$$\mathbf{b}_3^{(T)} = \frac{9}{32}\mathbf{p}_{18} - \frac{9}{32}\mathbf{p}_{22} - \frac{9}{32}\mathbf{p}_{26} + \frac{9}{32}\mathbf{p}_{33},$$

B. Nédélec- und Raviart-Thomas-Räume

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_4^{(T)} &= \frac{27}{32}\mathbf{p}_{20} - \frac{27}{32}\mathbf{p}_{27} - \frac{27}{32}\mathbf{p}_{31} + \frac{27}{32}\mathbf{p}_{35}, \\ \mathbf{b}_5^{(T)} &= \frac{9}{32}\mathbf{p}_{36} - \frac{9}{32}\mathbf{p}_{40} - \frac{9}{32}\mathbf{p}_{43} + \frac{9}{32}\mathbf{p}_{50}, \\ \mathbf{b}_6^{(T)} &= \frac{27}{32}\mathbf{p}_{39} - \frac{27}{32}\mathbf{p}_{46} - \frac{27}{32}\mathbf{p}_{49} + \frac{27}{32}\mathbf{p}_{53}\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_0 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{p}_1 &= \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{p}_2 &= \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{p}_3 &= \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{p}_4 &= \begin{pmatrix} xy \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{p}_5 &= \begin{pmatrix} xz \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{p}_6 &= \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{p}_7 &= \begin{pmatrix} yz \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{p}_8 &= \begin{pmatrix} z^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{p}_9 &= \begin{pmatrix} xy^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{p}_{10} &= \begin{pmatrix} xyz \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{p}_{11} &= \begin{pmatrix} xz^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{p}_{12} &= \begin{pmatrix} y^2z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{p}_{13} &= \begin{pmatrix} yz^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{p}_{14} &= \begin{pmatrix} xy^2z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{p}_{15} &= \begin{pmatrix} xyz^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{p}_{16} &= \begin{pmatrix} y^2z^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{p}_{17} &= \begin{pmatrix} xy^2z^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{p}_{18} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{p}_{19} &= \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{p}_{20} &= \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{p}_{21} &= \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{p}_{22} &= \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{p}_{23} &= \begin{pmatrix} 0 \\ xy \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{p}_{24} &= \begin{pmatrix} 0 \\ xz \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{p}_{25} &= \begin{pmatrix} 0 \\ yz \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{p}_{26} &= \begin{pmatrix} 0 \\ z^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{p}_{27} &= \begin{pmatrix} 0 \\ x^2y \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{p}_{28} &= \begin{pmatrix} 0 \\ x^2z \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{p}_{29} &= \begin{pmatrix} 0 \\ xyz \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{p}_{30} &= \begin{pmatrix} 0 \\ xz^2 \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{p}_{31} &= \begin{pmatrix} 0 \\ yz^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{p}_{32} &= \begin{pmatrix} 0 \\ x^2yz \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{p}_{33} &= \begin{pmatrix} 0 \\ x^2z^2 \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{p}_{34} &= \begin{pmatrix} 0 \\ xyz^2 \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{p}_{35} &= \begin{pmatrix} 0 \\ x^2yz^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{p}_{36} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \mathbf{p}_{37} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix}, & \mathbf{p}_{38} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix}, & \mathbf{p}_{39} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \\ \mathbf{p}_{40} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x^2 \end{pmatrix}, & \mathbf{p}_{41} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xy \end{pmatrix}, & \mathbf{p}_{42} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xz \end{pmatrix}, & \mathbf{p}_{43} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y^2 \end{pmatrix}, & \mathbf{p}_{44} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ yz \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\mathbf{p}_{45} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x^2y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_{46} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x^2z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_{47} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xy^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_{48} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xyz \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_{49} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y^2z \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{p}_{50} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x^2y^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_{51} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x^2yz \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_{52} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xy^2z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_{53} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x^2y^2z \end{pmatrix}.$$

Lebenslauf

17.09.72	in Langen/Hessen geboren
Mai '92	Abitur am GTG Barsinghausen
Juli '92 – Sep. '93	Zivildienst
Okt. '93	Immatrikulation an der Universität Hannover für Mathematik auf Diplom mit Nebenfach Wirtschaftswissenschaften
Okt. '95	Diplomvorprüfung im Studiengang Mathematik
Okt. '95 – Feb. '97	Tätigkeit als Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Mathematik
Nov. '97 – Juli '98	Tätigkeit als Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Angewandte Mathematik
22.09.98	Diplomprüfung im Studiengang Mathematik, Thema der Diplomarbeit: „Kollokation mit trigonometrischen Funktionen für Integralgleichungen zum gemischten Randwertproblem“, Betreuer: Prof. Stephan
seit 15.10.98	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Angewandte Mathematik der Universität Hannover