

Das Quantenlimit in der Interferometrie

Vom Fachbereich Physik
der Universität Hannover
zur Erlangung des Grades

Doktor der Naturwissenschaften
– Dr. rer. nat. –

genehmigte Dissertation von

Dipl.-Phys. Oliver Jennrich

geboren am 7. April 1967 in Hannover

1998

Referent: Prof. Dr. K. Danzmann
Korreferent: Prof. Dr. M. Kock
Tag der Prüfung: 21. Juli 1998

Schwebt ein Lied in allen Dingen,
Die da träumen fort und fort.
Und die Welt hebt an zu singen,
Triffst du nur das Zauberwort.

Joseph von Eichendorff

Für C.L.

Kurzzusammenfassung

Schlagworte

Strahlungsdruckrauschen, thermisches Rauschen, Standard Quanten Limit der Interferometrie

In modernen Experimenten zum interferometrischen Nachweis von Gravitationswellen ist die Frage nach den grundlegenden Grenzen einer interferometrischen Längenbestimmung von sehr großer Bedeutung.

Die Ursache dieser Begrenzung ist zum einen das thermische Rauschen der optischen Komponenten im Interferometer, welches für den Fall sehr kleiner Temperaturen gegen das durch die HEISENBERG'sche Unschärferelation gegebene Quantenrauschen geht.

Eine weitere Grenze wird durch die Effekte der Photonenstatistik gegeben. Diese erzeugt einerseits durch das Rauschen des Nachweisprozesses eine scheinbare Längenänderung des Interferometers, andererseits überträgt sich die Photonenstatistik des Lichts durch den Impulsübertrag auf das Positionsrauschen der Spiegel.

Da diese beiden Rauschprozesse in verschiedener Art von der Lichtleistung im Interferometer abhängen, existiert eine optimale Leistung für den Betrieb eines Interferometers. Dabei muß die Korrelation der beiden Rauschprozesse, die durch die Bewegung des Spiegels hervorgerufen wird, berücksichtigt werden.

Zur theoretischen Betrachtung des Problems wurde eine alternative Formulierung des Standard Quanten Limits verwendet, die es erlaubt, die Orts- und Impulsunschärfen der optischen Komponenten spektral aufgelöst darzustellen.

Im experimentellen Teil dieser Arbeit wurde ein Experiment zur Untersuchung des Strahlungsdruckrauschens und des thermischen Rauschens konzipiert und aufgebaut. Zentraler Bestandteil des Experimentes ist ein FABRY-PEROT-Resonator hoher Finesse, der aus zwei monolithisch aufgehängten Spiegeln besteht. Zur seismischen Isolation sind die Spiegel an einem System von Mehrfachpendeln und seismischen Vorisolatoren befestigt. Der Nachweis der Längenänderung des Resonators erfolgte über das POUND-DREVER-HALL-Verfahren.

Mit Hilfe eines Simulationsprogrammes wurden die Parameter des Resonators, der Spiegel und der Aufhängung bezüglich der Empfindlichkeit des Experimentes auf Strah-

lungsdruckrauschen und thermisches Rauschen optimiert. Die Resultate der Messungen bestätigen die Gültigkeit der Simulation innerhalb des realisierten Parameterbereiches.

Mit fortgeschrittenen Techniken sollte es daher möglich sein, mit dem Experiment sowohl das Strahlungsdruckrauschen als auch das thermische Rauschen außerhalb der mechanischen Resonanzen von Spiegel und Aufhängung zu messen, welches von großer praktischer Bedeutung bei der Konstruktion laserinterferometrischer Gravitationswellendetektoren wie GEO600 ist.

Abstract

Key words

radiation pressure noise, thermal noise, interferometric standard quantum limit

In modern experiments concerning the interferometrical detection of gravitational waves the problem of fundamental limits of a measurement is of great importance.

One of the reasons of the limitation of sensitivity is given by the thermal noise of the optical components in the interferometer. In the case of low temperatures the thermal noise can be understood as an effect of the HEISENBERG uncertainty relation.

Another limitation is given by the photons' statistic, which gives rise to an apparent change of length in the interferometer whereas the momentum transfer at the mirrors causes a real displacement noise.

As the two processes scale differently with the light power in the interferometer, an optimal power for running the interferometer at its maximum sensitivity does exist. The possible correlation of the two processes has to be taken into account.

The treatment of the standard quantum limit given in this work allows to represent the uncertainty of momentum and coordinate as a spectral density.

In this work, an experiment for the investigation of the radiation pressure noise and the thermal noise has been designed and constructed. An important part of the experiment is a high-finesse FABRY-PEROT resonator formed by two monolithically suspended mirrors. For purposes of the seismic isolation the mirrors are attached to a system of cascaded pendulum stages and seismic pre-isolators. The change of the resonator's length is detected by means of the POUND-DREVER-HALL-scheme.

The parameters of the resonator, the mirrors and the seismic isolation has been optimized using a computer aided simulation. The results of the measurements confirm the validity of the simulation for the parameters used.

In a further upgrade the experiment will be suitable to measure the radiation pressure noise as well as the off-resonant thermal noise of the mirrors and suspension. This would be of great importance for the design and the construction of laser-interferometric gravitational wave detectors like GEO600.

Inhaltsverzeichnis

Liste der verwendeten Symbole	xi
1. Einleitung	1
2. Theorie	3
2.1. Einführung	3
2.1.1. Transferfunktion	3
2.1.2. Spektrale Dichten	7
2.1.3. Das Fluktuations-Dissipations-Theorem	10
2.2. Das Standard Quanten Limit	12
2.2.1. Die Nachweisgrenze in der interferometrischen Längenmessung	13
2.3. Das quantenmechanische Interferometer	18
2.3.1. Quantisierung des Lichtfeldes	18
2.3.2. Zustände des Lichtfeldes	19
2.3.3. Quadraturoperatoren	21
2.3.4. Optische Elemente	22
3. Dämpfungsmechanismen eines harmonischen Oszillators	23
3.1. Viskose Dämpfung	23
3.2. Komplexe Federkonstante	24
3.3. Interne Dämpfung	26
3.4. Strukturelle Dämpfung	26
3.5. Vergleich der Dämpfungsmechanismen	27
3.6. Zusammenfassung der wichtigsten Formeln	28
4. Das thermische Rauschen eines idealen Pendels	31
4.1. Das Pendel	31
4.1.1. Rotation	32
4.1.2. Kippung	34
4.1.3. Violin-Moden	35
4.1.4. Interne Schwingungen	35
4.2. Dämpfungsmechanismen	36
4.2.1. Gasdämpfung	36
4.2.2. Thermoelastische Dämpfung	37

5. Simulation und Konzeption des Experimentes	39
6. Experimenteller Aufbau	49
6.1. Experimentelle Realisierung	49
6.2. Laser	49
6.2.1. Verstimmbarkeit	49
6.2.2. Intensitätsstabilität	49
6.3. Vorstabilisierung	50
6.4. Intensitätsstabilisierung	52
6.5. Seismische Isolation	54
6.5.1. Der Stack	55
6.5.2. Doppelpendel	59
6.5.3. Schattensensoren	60
6.6. Lokale Regelung	60
6.7. Design der Resonatoren	64
6.8. Experiment	67
6.8.1. Strahlführung	67
6.8.2. Vakuumsystem	70
6.8.3. Der aufgehängte Resonator	72
6.8.4. Datenaufnahme	72
7. Ergebnisse und Diskussion	77
7.1. Erste Ausbaustufe	77
7.2. Zweite Ausbaustufe	79
8. Zusammenfassung	85
A. FABRY-PEROT-Interferometer	87
B. POUND-DREVER-HALL-Verfahren	91
B.1. Rauschbetrachtungen	94
C. Fouriertransformationen	97
Danksagung	103
Lebenslauf	105
Publikationen	107

Abbildungsverzeichnis

2.1. Schematische Darstellung eines kohärenten Zustandes in der komplexen α -Ebene	20
3.1. Vergleich der spektralen Dichten von struktureller und interner Dämpfung	27
3.2. Vergleich der spektralen Dichten des thermischen Rauschens für viskose, strukturelle und interne Dämpfung für $Q = 100$	28
4.1. Violinmoden, Kippung und Rotation eines an einer Faser aufgehängten Spiegels	33
5.1. Spektren für verschiedene interne Leistungen des FABRY-PEROT-Interferometers.	40
5.2. Kontrast für das Strahlungsdruckrauschen und das thermische Rauschen thermische Rauschen.	41
5.3. Spektren und Kontrast für eine interne Leistung von 10 kW und einer Spiegelmasse von 0.8 mg	42
5.4. Variation der mechanischen Güte	43
5.5. Simulierte Spektren für die Parameter aus Tabelle 5.1. Aufgetragen ist die lineare spektrale Dichte der Längenänderung des Resonators gegen die Frequenz.	44
5.6. Kontrast für optimale Parameter	45
6.1. Relatives Intensitätsrauschen des Lichts nach der Faser bis 1 kHz.	50
6.2. Dispersionssignal des Vorstabilisierungsresonators	51
6.3. Skizze des Vorstabilisierungsresonators mit Vakuumgefäß.	52
6.4. Frequenzrauschen des freilaufenden und des stabilisierten Lasers	53
6.5. Schematische Darstellung der seismischen Isolation	56
6.6. Isolationseigenschaften des Stacks in horizontaler Richtung	57
6.7. Isolationseigenschaften des Stacks in vertikaler Richtung	58
6.8. Detailzeichnung des Mittelmassen-Käfigs	61
6.9. Detailzeichnung des Schattensensors	61
6.10. Prinzipskizze der lokalen Regelung.	63
6.11. Mögliche Resonatorlängen des Vorstabilisierungsresonators	66
6.12. Mögliche Resonatorlängen des aufgehängten Resonators	68
6.13. Skizze der Strahlführung	69

Abbildungsverzeichnis

6.14. Skizze des Vakuumtanks	71
6.15. Dispersionssignal des aufgehängten Resonators in der ersten Ausbaustufe	73
6.16. Skizze des aufgehängten Resonators in der zweiten Ausbaustufe	74
6.17. Dispersions- und Absorptionssignal des aufgehängten Resonators in der zweiten Ausbaustufe.	75
7.1. Spektrum der Längenänderung des aufgehängten Resonators in der ersten Version.	78
7.2. Verteilung der Meßzeiten in der ersten und zweiten Ausbaustufe.	80
7.3. Kontrast des Experimentes für reale Parameter	82
7.4. Messung und simulierte Spektren für reale Parameter	83
B.1. Absorption und Dispersion eines FABRY-PEROT-Resonators	93

Tabellenverzeichnis

5.1. Optimaler Parametersatz für die Simulation des Experimentes	46
5.2. Errechnete Parameter für Spiegel I und Spiegel II im optimalen Fall verschwindender Gasdämpfung	47
6.1. Abmessungen der Spiegel des aufgehängten Resonators	72
7.1. Realisierte Parameter für den aufgehängten Resonator	81
7.2. Frequenzen und effektive Güten für reale Parameter der zweiten Ausbaustufe	82

Tabellenverzeichnis

Liste der verwendeten Symbole

Symbol/Wert [13]	Einheit	Erläuterung
$\mathbf{1}$		Einheitsmatrix
$ \dots\rangle$		quantenmechanischer Zustand
a		Verhältnis von Radius zu Dicke (<i>aspect ratio</i>)
\hat{a}^\dagger, \hat{a}		Erzeugungs und Vernichtungsoperatoren
α		Parameter des kohärenten Zustandes
α_s		Sicherheitsfaktor für die internen Moden
α_T	[1/K]	thermischer Ausdehnungskoeffizient
$\vec{B}(\vec{r}, t)$	[A/m]	magnetisches Feld
C_p	[J/(K m ³)]	volumenspezifische Wärmekapazität
$\hat{B}(\vec{r}, t)$	[A/m]	Operator des magnetischen Feldes
$c = 299792458$	[m/s]	Lichtgeschwindigkeit
D	[Nm]	Winkelrichtgröße
E	[J]	Energie
E_m	[N/m ²]	Elastizitätsmodul
$\vec{E}(\vec{r}, t)$	[V/m]	elektrisches Feld
$\hat{E}(\vec{r}, t)$	[V/m]	Operator des elektrischen Feldes
$\epsilon_0 = 8.85422 \cdot 10^{-12}$	[F/m]	Dielektrizitätskonstante
f_0	[Hz]	Resonanzfrequenz
$f...$	[Hz]	Frequenz
F	[N]	Kraft
$\Phi(\omega)$		Imaginärteil der komplexen Federkonstante
γ	[1/s]	Dämpfung
$f(t); f(\omega)$		Funktion und ihre Fouriertransformierte
f_L	[Hz]	Laserfrequenz
G	[N/m]	Torsionsmodul
\hat{H}	[J]	Hamiltonoperator
$\hbar = 1.05457266(63) \cdot 10^{-34}$	[Js]	Plancksches Wirkungsquantum
I_f	[m ⁴]	Flächenträgheitsmoment
$I_{\text{rot,rock}}$	[kg m ²]	Trägheitsmomente
κ	[W/(mK)]	Wärmeleitfähigkeit
$k_B = 1.380658(12) \cdot 10^{-23}$	[J/K]	Boltzmann-Konstante

Liste der verwendeten Symbole

\vec{k}	$[\text{m}^{-1}]$	Wellenvektor
k	$[\text{m}^{-1}]$	Betrag des Wellenvektors
λ	$[\text{m}]$	Wellenlänge
m	$[\text{kg}]$	Masse
p	$[\text{kg m/s}]$	Impuls
P	$[\text{W}]$	Leistung
Q		Güte
r	$[\text{m}]$	Faserradius
τ		Amplitudenreflektivitäten
R	$[\text{m}]$	Spiegelradius
R_k	$[\text{m}]$	Krümmungsradius eines Spiegels
\mathfrak{R}		Intensitätsreflektivitäten
s		Signal
S_x	$[[x]^2/\text{Hz}]$	Spektrale Dichte der Größe x
\mathbf{S}_x	$[[x]^2/\text{Hz}]$	Matrix der spektralen Dichten
σ		Streumatrix eines optischen Elementes
t	$[\text{s}]$	Zeit
\mathfrak{t}		Amplitudentransmissivitäten
T	$[\text{K}]$	Temperatur
\mathfrak{T}		Intensitätstransmittivitäten
ω	$[\text{rad/s}]$	Fourierfrequenz
ω_0	$[\text{rad/s}]$	Resonanzfrequenz
ω_L	$[\text{rad/s}]$	Laserfrequenz
$\chi(\omega)$	$[\text{Hz}^{-2}]$	Transferfunktion
\mathbf{X}	Hz^{-2}	Transferfunktionsmatrix
$\tilde{x}(f)$	$[[x]/\sqrt{\text{Hz}}]$	lineare spektrale Dichte der Größe x
\hat{X}, \hat{Y}		Quadraturoperatoren

1. Einleitung

Im Zusammenhang mit dem Bau großer interferometrischer Gravitationswellendetektoren wie z. B. GEO600, LIGO, und VIRGO stellt sich zunehmend die Frage nach der fundamentalen Limitierung eines Längenmeßprozesses, insbesondere eines auf interferometrischer Basis. Speziell die Entwicklung von Techniken zur schmalbandigen Detektion von Gravitationswellen [2, 37, 51] haben dazu beigetragen, daß die Empfindlichkeitsgrenze der Interferometer in Bereiche vorgetrieben wurde, die in die Größenordnung der durch fundamentale Quanteneffekte vorgegebenen Begrenzungen gelangen.

Eine oft diskutierte [3, 4] Grenze der Empfindlichkeit jeder Messung ist das Standard Quanten Limit, welches eine direkte Konsequenz der HEISENBERG'schen Unschärferelation ist, jedoch in den großen Detektoren der ersten Generation aufgrund der Dimensionierung der Testmassen keine Rolle spielen wird.

Neben der allgemeinen Aussage der HEISENBERG'schen Unschärferelation tragen eine Vielzahl von Effekten zu der Empfindlichkeitsbegrenzung eines Interferometers bei. Vor allem die Tatsache, daß die Bauelemente eines Interferometers physikalische Objekte sind, die Bewegungsgleichungen und Störungen unterliegen, führt zu einer Begrenzung der Empfindlichkeit durch thermisches Rauschen [22, 36, 44, 52].

Zu dieser Thematik hat es in den letzten Jahren einige Untersuchungen systematischer Art gegeben [8, 22], die jedoch auf die Untersuchung des thermischen Rauschens nahe der Resonanz des Systems beschränkt blieben. Zudem sind bisherige Messungen durch viskose Dämpfung begrenzt.

Einen weiteren wichtigen Beitrag zur Empfindlichkeitsbegrenzung liefert das durch den Strahlungsdruck hervorgerufene Rauschen [12], d. h. die Wechselwirkung des Lichts im Interferometer mit dessen optischen Komponenten. Dieser Beitrag scheint sowohl aus theoretischer als auch aus experimenteller Sicht interessant. So erlaubt er einerseits einen Einblick in den Meßprozeß [29, 34], andererseits kann der Effekt gezielt genutzt werden, um z. B. die Photonenstatistik des Lichts im Interferometer günstig zu verändern [24, 26, 38]

Die Effekte des Strahlungsdrucks in Interferometern sind schon seit langem bekannt [16, 26]. Dabei wurden aber bisher die Auswirkungen des Rauschens und dessen Rückwirkungen auf die Photonenstatistik nicht beobachtet. Gleichwohl gibt es eine Vielzahl von theoretischen Arbeiten (u. a. [28, 34, 38]), die sich mit der Wechselwirkung des Lichts mit einem Spiegel beschäftigen und Vorhersagen über die Änderung der Photonenstatistik treffen.

Die Experimente zur Detektion von Gravitationswellen sind in ihrer Empfindlichkeit gegenüber unerwünschten Rauschquellen soweit als möglich minimiert, so daß Erkennt-

1. Einleitung

nisse über begrenzende Effekte mit diesen Experimenten nur sehr schwierig zu erlangen sind. Es galt daher, ein Experiment zu konzipieren und durchzuführen, daß auf die Analyse der empfindlichkeitsbegrenzenden Prozesse, d. h. in erster Linie thermisches Rauschen und Strahlungsdruckrauschen, optimiert ist, und in einem Frequenzbereich arbeitet, der mit dem der Gravitationswellendetektoren vergleichbar ist (50...500 Hz).

Für ein Experiment zur Untersuchung des thermischen Rauschens und des Strahlungsdruckes sind in weiten Bereichen sehr ähnliche Techniken notwendig. So ist z. B. die seismische Isolation für beide Experimente von entscheidender Bedeutung. Alle Konzepte zur seismischen Isolation erfordern, die Komponenten des Interferometers als Pendel aufzuhängen. Insbesondere für ein Experiment zum Strahlungsdruck ist man auf hohe mechanische Güten der Pendel und damit auf monolithische Befestigungen angewiesen [53], um das in diesem Fall störende thermische Rauschen gering zu halten. Da sich durch geeignete Variation der experimentellen Parameter auch thermisches Rauschen untersuchen läßt, indem man z. B. die Violinmoden der Aufhängung betrachtet, verhindern hohe mechanische Güten nicht die Analyse des thermischen Rauschens.

Das Ziel dieser Arbeit ist es daher, ein klassisches theoretisches Verständnis der beteiligten Rauschprozesse zu gewinnen, und darauf aufbauend ein Experiment zu entwickeln, daß eine hohe Empfindlichkeit gegenüber thermischen Rauschen und Strahlungsdruckrauschen aufweist. Gleichzeitig muß durch die experimentelle Realisierung sichergestellt sein, daß alle anderen Rauschquellen wie z. B. Seismik, Restgasfluktuationen und Störungen durch das Frequenzrauschen des Lasers so wenig wie möglich beitragen.

2. Theorie

2.1. Einführung

2.1.1. Transferfunktion

Die Transferfunktion eines linearen Systems beschreibt dessen Antwort auf eine äußere Anregung. Eine gewisse Uneinheitlichkeit liegt dabei jedoch bereits in dem Konzept begründet. Es ist nicht unmittelbar klar, in welcher Form die Anregung und in welcher Form die Antwort beschrieben wird. So kann ersteres z. B. eine Kraft, eine Beschleunigung oder eine Verrückung sein, letzteres eine Ortskoordinate, ein Impuls oder auch eine Beschleunigung. Letztlich ist dies das Problem der Uneindeutigkeit einer Bewegungsgleichung, die auch nur bis auf Faktoren eindeutig bestimmt ist.

Es soll daher in dieser Arbeit die Konvention gelten, die Transferfunktion für die Bewegungsgleichung zu formulieren, bei der der Koeffizient vor der höchsten Zeitableitung gleich eins ist.

Eine zusätzliche Komplikation erwächst aus der Tatsache, daß die Transferfunktion im allgemeinen ein matrixwertiges Objekt ist, da ein allgemeines System durchaus mehrere Ein- und Ausgänge besitzen kann. Der Übersichtlichkeit halber soll jedoch zunächst ein System diskutiert werden, das nur einen Eingang und einen Ausgang besitzt. Als Beispiel soll hier der gedämpfte harmonische Oszillator dienen.

Die Bewegungsgleichung des gedämpften harmonischen Oszillators mit Dämpfungskonstante γ lautet

$$\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{F(t)}{m} \quad (2.1)$$

wobei die Resonanzfrequenz ω_0 wie üblich mit der Federkonstante k und der Masse m zusammenhängt:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (2.2)$$

Wird nun die äußere Kraft $F(t) = F_\omega e^{-i\omega t}$ als harmonisch angenommen, so folgt $x(t)$ wegen der Linearität der Bewegungsgleichung mit der gleichen Frequenz, jedoch im allgemeinen mit einer Phasenverschiebung, so daß die Amplitude x_ω komplex ist:

$$x(t) = x_\omega e^{-i\omega t} \quad (2.3)$$

$$x_\omega = \frac{F_\omega}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad (2.4)$$

2. Theorie

Die Transferfunktion $\chi(\omega)$ ist nun als Quotient der Antwort x_ω und der Anregung F_ω/m definiert

$$\chi(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}, \quad (2.5)$$

und trägt die Einheit Hz^{-2} .

Die allgemeine Transferfunktion

Im allgemeinen läßt sich die Bewegungsgleichung eines linearen Systems als formales Polynom $P(\partial_t)$ von Ableitungen nach der Zeit schreiben,

$$P(\partial_t)x(t) = f(t) \quad \text{mit} \quad P(\partial_t) = \sum_{k=0}^N a^{(k)}\partial_t^k \quad (2.6)$$

mit der Vereinbarung, daß wie oben $a^{(0)} = 1$ sei. Bei der Funktion $f(t)$ handelt es sich um eine verallgemeinerte Beschleunigung. Besitzt das System mehrere Freiheitsgrade, d. h. handelt es sich um ein System von Bewegungsgleichungen, so wird $x(t)$ zu einem Vektor $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))$ und $P(\partial_t)$ muß durch eine symmetrische, mithin diagonalisierbare, Matrix $\mathbf{P}(\partial_t)$ ersetzt werden.

$$(\mathbf{P})_{ij}(\partial_t) = \sum_{k=0}^N a_{ij}^k \partial_t^k \quad \text{mit} \quad a_{ij}^{(0)} = 1 \quad (2.7)$$

Die Symmetrie von \mathbf{P} ist eine Konsequenz des dritten NEWTONschen Prinzips und liegt stets vor, wenn das vollständige System von Bewegungsgleichungen betrachtet wird.

Wenn die Matrix $\mathbf{P}(\partial_t)$ diagonal ist, so entkoppeln die Bewegungsgleichungen und die Koordinaten $\vec{x}^D(t) = (x_1^D(t), x_2^D(t), \dots, x_N^D(t))$ sind gerade die Normalkoordinaten. Die Transformation der Koordinaten in die Normalkoordinaten wird von einer Matrix \mathbf{D} vermittelt [21]

$$\vec{x}^D = \mathbf{D}\vec{x} \quad \text{mit} \quad \mathbf{D}^T\mathbf{D} = \mathbf{D}\mathbf{D}^T = \mathbf{1} \quad (2.8)$$

so daß sich die diagonalisierte Matrix \mathbf{P}_D als

$$\mathbf{P}_D = \mathbf{D}^T\mathbf{P}\mathbf{D} \quad (2.9)$$

schreiben läßt. Die Transferfunktion $\chi(\omega)$ bzw. die Transfermatrix $\mathbf{X}(\omega)$ ergibt sich dann zu

$$\chi(\omega) = \frac{1}{P(i\omega)} \quad \text{bzw.} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{X}(\omega) = \mathbf{P}^{-1}(i\omega) \quad (2.11)$$

$$\mathbf{X}_D(\omega) = \mathbf{P}_D^{-1}(i\omega). \quad (2.12)$$

Da \mathbf{P}_D diagonal ist, ist auch \mathbf{P}_D^{-1} diagonal. Durch einfaches Einsetzen läßt sich zeigen, daß

$$\mathbf{P}^{-1}_D = \mathbf{P}_D^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}_D^{-1} \quad (2.13)$$

gilt, daß also die Inverse der diagonalisierten Matrix gleich der diagonalisierten Inversen ist.

Bedingt durch ihre physikalische Bedeutung muß die Transferfunktion einige weitere Symmetrieeigenschaften erfüllen. Da eine reelle Anregung auch stets eine reelle Antwort zur Folge hat, muß

$$\chi(\omega) = \chi^*(-\omega) \quad (2.14)$$

gelten (Gl. (C.6)) und damit auch

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\chi(\omega) &= \operatorname{Re}\chi(-\omega) \\ \operatorname{Im}\chi(\omega) &= -\operatorname{Im}\chi(-\omega) . \end{aligned} \quad (2.15)$$

Eine direkte Folge der Kausalität, d. h. daß die Antwort stets der Ursache folgen muß, ist die Tatsache, daß die komplexwertige Funktion $\chi(\omega)$ keine Pole $\chi(\omega_p)$ in der oberen Halbebene besitzt, d. h. solche mit positivem Imaginärteil. Da $\chi(\omega)$ gleichzeitig die Fouriertransformierte der Lösung $\chi(t)$ der Bewegungsgleichung für eine Anregung in Form einer δ -Funktion ist,

$$P(\partial_t)\chi(t-t') = \delta(t-t') \Rightarrow \chi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{P(i\omega)} d\omega \quad (2.16)$$

würde ein positiver Imaginärteil von ω_p dazu führen, daß in der Lösung die Terme der Form $e^{\operatorname{Im}\omega_p t}$ für fortschreitende Zeit t über alle Grenzen wachsen würden. Eine etwas andere Formulierung des Kausalitätsprinzips sind die KRAMERS-KRONIG-Relationen

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\chi(\omega) &= \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}\chi(z)}{z-\omega} dz \\ \operatorname{Im}\chi(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}\chi(z)}{z-\omega} dz \end{aligned} \quad (2.17)$$

die einen Zusammenhang zwischen Real- und Imaginärteil der Transferfunktion herstellen. Dabei bezeichnet \mathcal{P} den Hauptwert des Integrals in der üblichen Weise

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{x_p-\varepsilon} f(x) dx + \int_{x_p+\varepsilon}^{\infty} f(x) dx \right) , \quad (2.18)$$

wobei x_p die Stelle bezeichnet, an der der Hauptwert genommen wird. Es läßt sich eine Operator Darstellung der Transferfunktion angeben (zur Herleitung siehe z. B. [35]), die vor

2. Theorie

allem bei der quantenmechanischen Formulierung von Problemen hilfreich ist. Dazu wird der Kommutator $[\hat{x}(t), \hat{x}(0)]$ des entsprechenden zeitabhängigen Operators $\hat{x}(t)$ verwendet.

$$\chi(\omega) = \frac{i}{\hbar} \int_0^{\infty} \langle [\hat{x}(t), \hat{x}(0)] \rangle e^{i\omega t} dt \quad (2.19)$$

Dabei bezeichnet $\langle \dots \rangle$ den quantenmechanischen Erwartungswert. Für den quantenmechanischen, ungedämpften harmonischen Oszillator mit Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren a^\dagger bzw. a mit $[a, a^\dagger] = 1$ ergibt sich für $\hat{x}(t)$ folgender Ausdruck

$$\hat{x}(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_0 m}} (ae^{-i\omega_0 t} + a^\dagger e^{i\omega_0 t}) \quad (2.20)$$

und für $\chi(t)$ bzw. $\chi(\omega)$

$$\begin{aligned} \chi(t) &= \frac{1}{m\omega_0} \sin \omega_0 t \\ \chi(\omega) &= i \frac{\pi}{m\omega_0} (\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)) , \end{aligned} \quad (2.21)$$

also die aus der klassischen Formulierung gewohnten Ergebnisse.

Dämpfung

Da die Transferfunktion eine direkte Folge der Bewegungsgleichung ist, können aus ihr auch wesentliche Eigenschaften des beschriebenen Systems abgeleitet werden. Eine davon ist die Dissipation. Dazu wird ein System betrachtet, daß sich in einem Gleichgewicht mit seiner Umgebung befindet. Alle Arbeit, die an dem System verrichtet wird, muß von diesem in der Regel in Form von Wärme wieder abgegeben, d. h. dissipiert werden. Die an einem solchen System verrichtete Arbeit E ist also gleich der dissipierten Energie E_{diss} .

$$E = E_{\text{diss}} = \int F(x) dx = \int F(t) \dot{x}(t) dt \quad (2.22)$$

Die pro Zeiteinheit verrichtete mittlere Arbeit, d. h. die mittlere dissipierte Leistung ist dann

$$\left\langle \frac{dE_{\text{diss}}}{dt} \right\rangle = P_{\text{diss}} = \langle F(t) \dot{x}(t) \rangle . \quad (2.23)$$

Betrachtet man zunächst eine harmonische, reelle Kraft $F(t) = \text{Re}(F_\omega e^{-i\omega t})$, so erhält man mittels der Transferfunktion ebenso reelle Antworten für $x(t)$ und $\dot{x}(t)$:

$$x(t) = \frac{F_\omega}{m} (\text{Re} \chi(\omega) \cos \omega t - \text{Im} \chi(\omega) \sin \omega t) \quad (2.24)$$

$$\dot{x}(t) = -\frac{\omega F_\omega}{m} (\text{Re} \chi(\omega) \sin \omega t - \text{Im} \chi(\omega) \cos \omega t) \quad (2.25)$$

Multiplikation mit der Kraft und Mittelung liefert die mittlere dissipierte Leistung:

$$P_{\text{diss}} = \frac{1}{2} \frac{F_{\omega}^2 \omega}{m} \text{Im} \chi(\omega) \quad (2.26)$$

Der Gesamtenergieinhalt des Systems kann mit Hilfe des Virialsatzes [33] abgeschätzt werden. Für Systeme, für die die potentielle Energie eine quadratische Funktion der Koordinaten ist, bedeutet dies, daß im Mittel der Anteil kinetischer Energie gleich dem potentieller Energie ist, so daß für die Gesamtenergie geschrieben werden kann:

$$E_{\text{gesamt}} = \langle m \dot{x}(t) \rangle = \frac{F_{\omega}^2 \omega^2}{2m} |\chi(\omega)|^2 \quad (2.27)$$

Die auf die Gesamtenergie bezogene dissipierte Leistung ist demnach:

$$\frac{P_{\text{diss}}}{E_{\text{gesamt}}} = \frac{1}{\omega} \frac{\text{Im} \chi(\omega)}{|\chi(\omega)|^2} \quad (2.28)$$

Betrachtet man die pro Schwingungsperiode der anregenden Kraft dissipierte Energie relativ zur Gesamtenergie, so erhält man einen dimensionslosen Ausdruck für die Verluste $V(\omega)$ des Systems.

$$V(\omega) = \frac{1}{\omega} \frac{P_{\text{diss}}}{E_{\text{gesamt}}} = \frac{1}{\omega^2} \frac{\text{Im} \chi(\omega)}{|\chi(\omega)|^2} \quad (2.29)$$

An dieser Stelle wird deutlich, daß der Imaginärteil der Transferfunktion entscheidend für das Zustandekommen von Dissipation verantwortlich ist. Insbesondere muß der Imaginärteil der Transferfunktion *positiv* sein, damit die in einem System vorhandene Energie nicht mit der Zeit anwächst.

2.1.2. Spektrale Dichten

Die spektrale Rauschdichte einer Variablen, kurz spektrale Dichte, ist mathematisch betrachtet die Verallgemeinerung des zweiten Momentes der Verteilung dieser Variablen [9]. Im physikalischen Sinne gibt die spektrale Dichte das Rauschen einer Größe in einem normierten Frequenzintervall an. Dies wird in (2.38) deutlich werden. Betrachtet man z. B. die Ortskoordinate $x(t)$ eines Teilchens, so kann stets ein Mittelwert \bar{x} und das zweite Moment $\Delta^2 x$ angegeben werden

$$\bar{x} = \langle x(t) \rangle_t \quad (2.30)$$

$$\Delta^2 x \stackrel{\text{def}}{=} \langle (x(t) - \bar{x})^2 \rangle_t = \langle x(t)^2 \rangle_t - \bar{x}^2, \quad (2.31)$$

wobei $\langle \dots \rangle_t$ das zeitliche Mittel über eine Größe darstellt:

$$\langle x(t) \rangle_t \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta} t x(t) dt \quad (2.32)$$

2. Theorie

Im folgenden soll davon ausgegangen werden, daß der Mittelwert \bar{x} verschwindet. Dies kann stets durch die Redefinition $x(t) \rightarrow x'(t) = x(t) - \bar{x}$ erreicht werden. Verwendet man ferner statt des Ausdruckes $\langle x(t)^2 \rangle_t$ dessen Verallgemeinerung, die Korrelationsfunktion $g_{jk}(\tau)$

$$g_{jk}(\tau) = \frac{1}{2} \langle x_j(t)x_k(t+\tau) + x_j(t+\tau)x_k(t) \rangle_t \quad (2.33)$$

mit den Symmetrien

$$g_{jk}(\tau) = g_{kj}(\tau) = g_{jk}(-\tau), \quad (2.34)$$

so erhält man eine zeitabhängige Größe die im Spezialfall $\tau = 0$ und $j = k$ der Größe $\Delta^2 x$ entspricht. Die Indizes beziehen sich dabei auf die Koordinaten $x_j(t)$, die im Falle eines Systems mit mehreren Freiheitsgraden zur Beschreibung erforderlich sind.

Die spektrale Dichte einer Variablen ist definiert als die Fouriertransformation der Korrelationsfunktion.

$$S_{jk}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} 2 \int_{-\infty}^{\infty} g_{jk}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \quad (2.35)$$

$$= 4 \int_0^{\infty} g_{jk}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \quad (2.36)$$

In der Umkehrung der Fouriertransformation ergibt sich für die Korrelationsfunktion der folgende Ausdruck:

$$g_{jk}(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_{jk}(\omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (2.37)$$

Im Spezialfall $t = 0$ und $j = k$ nimmt die Korrelationsfunktion der Wert des jeweiligen zweiten Momentes an:

$$\Delta^2 x_j = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_{x_j}(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} \quad (2.38)$$

$$= \int_0^{\infty} S_{x_j}(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} \quad (2.39)$$

$$= \int_0^{\infty} S_{x_j}(\omega(f)) df \quad \text{mit} \quad \omega = 2\pi f \quad (2.40)$$

Das in einem Frequenzintervall $[f, f + \delta f]$ vorhandene sogenannte „root-mean-square“-

Rauschen Δx_{rms} ergibt sich demnach zu

$$\Delta x_{\text{rms}} = \left(\int_f^{f+\delta f} S_x(2\pi f) df \right)^{1/2} \quad (2.41)$$

$$\approx \sqrt{S_x(2\pi f) \delta f} \quad (2.42)$$

$$= \tilde{x}(f) \sqrt{\delta f} \quad (2.43)$$

wobei $\tilde{x}(f)$ die *lineare* spektrale Dichte ist, die über Gleichung (2.43) definiert ist. Die Größe δf ist die Bandbreite.

Diese Definition der spektralen Dichte führt zu einem Objekt, das korrekterweise *einseitige* spektrale Dichte genannt werden sollte, weil nur über den positiven Frequenzgehalt integriert wird, um zu $\Delta^2 x$ zu gelangen. Andere Definitionen des spektralen Dichte in der Literatur [35] verwenden die volle spektrale Dichte zur Integration und unterscheiden sich in der Definition (Gl. (2.35)) um einen Faktor 2. Eine weitere mögliche Quelle von Mißverständnissen liegt in der Eigenschaft der spektralen Dichte eben eine *Dichte* zu sein, und somit auch wie eine solche zu transformieren.

$$S_x(f) = \alpha S_x(\alpha f) \quad (2.44)$$

Aus dieser Eigenschaft folgt die etwas unhandliche Definition in Gl. (2.43).

Durch Umstellen von (2.43) kann die spektrale Dichte $S_x(f)$ auch mit Hilfe der Fouriertransformierten $x(f) = 2\pi x(\omega)$ von $x(t)$ dargestellt werden.

$$\tilde{x}(f) = \frac{\Delta x_{\text{rms}}}{\sqrt{\delta f}} = \frac{|x(f)|}{\sqrt{\delta f}} \quad (2.45)$$

$$S_x(f) = \frac{\Delta^2 x_{\text{rms}}}{\delta f} = \frac{|x(f)|^2}{\delta f} \quad (2.46)$$

Dies hat eine gewisse meßtechnische Bedeutung, da auf diese Weise spektrale Dichten sehr einfach mittels eines FFT-Analysators oder eines Spektrumanalysators gemessen werden können.

Ist die Transferfunktion $\chi(\omega)$ eines Systems und die spektrale Dichte der Anregung $S_f(\omega)$ bekannt, so kann die spektrale Dichte der Ausgangsgröße x mit Hilfe des WIENER-KHINTCHINE-Theorems [54] berechnet werden.

$$S_x(\omega) = |\chi(\omega)|^2 S_f(\omega) \quad (2.47)$$

Bei der spektralen Dichte $S_f(\omega)$ der Anregung handelt es sich im einfachsten Fall um die spektrale Dichte der anregenden Kraft $S_F(\omega)$ skaliert mit der Masse m des Systems.

$$S_f(\omega) = \frac{S_F(\omega)}{m} \quad (2.48)$$

2. Theorie

Der Zusammenhang in Gleichung (2.47) gilt so nur für Systeme mit *einem* Freiheitsgrad, der durch die Variable x parametrisiert wird. Er läßt sich aber direkt auf den Fall vieler Freiheitsgrade verallgemeinern. Dazu betrachtet man zunächst das System in seinen Normalkoordinaten \vec{x}_D , so daß gilt:

$$S_{x_D}(\omega) = |\chi_D(\omega)|^2 S_{f_D}(\omega) \quad (2.49)$$

Dabei bezeichnen χ_D die Diagonaleinträge der Matrix \mathbf{X}_D . Betrachtet man die Funktionen $S_{x_D}(\omega)$ und $S_{f_D}(\omega)$ ebenso als Diagonaleinträge einer Matrix $\mathbf{S}_{x,D}$ bzw. $\mathbf{S}_{f,D}$, so läßt sich Gl. (2.49) auch mit Hilfe dieser Matrizen formulieren.

$$\mathbf{S}_{x,D}(\omega) = \mathbf{X}_D \mathbf{X}_D^\dagger \mathbf{S}_{f,D}(\omega) \quad (2.50)$$

Aus der Definition der spektralen Dichte (2.35) folgt nun

$$\mathbf{S}_{x,D} = \mathbf{D}^T \mathbf{S}_x \mathbf{D} \quad (2.51)$$

so daß sich (2.47) auch in Matrixform schreiben läßt und damit auf Systeme mit beliebig vielen Freiheitsgraden anwendbar ist.

$$\mathbf{S}_x(\omega) = \mathbf{X} \mathbf{X}^\dagger \mathbf{S}_f(\omega) \quad (2.52)$$

2.1.3. Das Fluktuations-Dissipations-Theorem

Eine wichtige Aussage über fundamentale Rauschprozesse eines Systems macht das Fluktuations-Dissipations-Theorem (FDT). Es wurde zuerst von CALLEN und WELTON [10, 11] formuliert und verknüpft die spektrale Dichte eines Parameters x mit den Verlusten des von ihm beschriebenen Systems und der damit zusammenhängenden Kopplung an ein Wärmebad mit der Temperatur T .

$$\begin{aligned} S_x^T(\omega) &= 2 \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im} \chi(\omega) \coth \frac{\hbar \omega}{2k_B T} \\ &= \frac{4k_B T}{m\omega} \operatorname{Im} \chi(\omega) \quad \text{für } k_B T \gg \hbar \omega \end{aligned} \quad (2.53)$$

Die Verluste des Systems werden hier durch den Imaginärteil der Transferfunktion beschrieben [35]. Wegen des Zusammenhanges zwischen spektraler Rauschdichte und Temperatur wird das Rauschen auch als *thermisches Rauschen* bezeichnet. Der Parameter m stellt eine verallgemeinerte Masse dar, die über den Zusammenhang von verallgemeinertem Impuls p und der Geschwindigkeit \dot{x} definiert ist:

$$m\dot{x}(t) = p(t) \quad (2.54)$$

Stellt x eine Ortskoordinate dar, so ist m die Masse des Systems.

Auch Gleichung (2.53) gilt zunächst nur für ein System mit einem Freiheitsgrad, kann aber auf ähnlichem Wege wie bei (2.47) demonstriert umformuliert werden.

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_x^T(\omega) &= 2 \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im} \mathbf{X}(\omega) \coth \frac{\hbar \omega}{2k_B T} \\ &= \frac{4k_B T}{m\omega} \operatorname{Im} \mathbf{X}(\omega) \quad \text{für } k_B T \gg \hbar \omega \end{aligned} \quad (2.55)$$

Betrachtet man den Zusammenhang zwischen spektraler Dichte und Transferfunktion in Gleichung (2.47), so läßt sich die spektrale Rauschdichte $\mathbf{S}_f^T(\omega)_{jk}$ einer thermischen Anregung definieren:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_f^T(\omega)_{jk} &= 2 \frac{\hbar}{m} \frac{\text{Im} \mathbf{X}(\omega)_{jk}}{|\mathbf{X}(\omega)_{jk}|^2} \coth \frac{\hbar\omega}{2k_B T} \\ &= \frac{4k_B T}{m\omega} \frac{\text{Im} \mathbf{X}(\omega)_{jk}}{|\mathbf{X}(\omega)_{jk}|^2} \quad \text{für } k_B T \gg \hbar\omega \end{aligned} \quad (2.56)$$

Es sei ausdrücklich daraufhingewiesen, daß diese Gleichung eine Gleichung für die *Komponenten* einer Matrix ist, keinesfalls eine für die Matrix selbst. Insbesondere ist $1/\mathbf{X}_{jk} \neq \mathbf{X}^{-1}_{jk}$. Die Formulierung einer thermischen Anregung bietet gewisse Vorteile in der Behandlung von komplexen Systemen, da auf diese Weise formal zwischen Anregung und Transferfunktion unterschieden werden kann. Damit kann das thermische Rauschen, ebenso wie später das Standard Quanten Limit, als Wirkung einer Anregung auf ein System beschrieben werden.

Illustriert wird der in Gleichung (2.56) beschriebene Zusammenhang durch einen gedämpften harmonischen Oszillator (oder eine entsprechende Normalkoordinate) mit Dämpfungskonstante γ . Hier vereinfacht sich (2.56) zu

$$\begin{aligned} S_f^T &= \gamma \frac{2\hbar}{m} \coth \frac{\hbar\omega}{2k_B T} \\ S_f^T &= \gamma \frac{4k_B T}{m} \quad k_B T \gg \hbar\omega \quad . \end{aligned} \quad (2.57)$$

Das FDT hat einige wichtige Konsequenzen. Zum einen beschreibt es mögliche Wege zu Systemen mit geringem thermischen Rauschen. Hierzu gilt es entweder die Verluste des Systems gering zu halten, also seine Kopplung an das Wärmebad zu minimieren, oder aber die Temperatur des angekoppelten Wärmebades möglichst niedrig zu halten.

Zum anderen folgt aus dem FDT, daß selbst im Grenzübergang $T \rightarrow 0$ die spektralen Dichten nicht verschwinden, sondern den Wert

$$S_x^{T=0}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow 0} S_x(\omega) = \frac{\hbar}{m} \text{Im} \chi(\omega) \quad (2.58)$$

$$S_f^{T=0}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow 0} S_x(\omega) = \frac{\hbar}{m} \frac{\text{Im} \chi(\omega)}{|\chi(\omega)|^2} \quad (2.58a)$$

annehmen. Im Falle des gedämpften harmonischen Oszillator wird (2.58) zu

$$S_x^{T=0}(\omega) = 2 \frac{\hbar}{m} \frac{\gamma\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \quad (2.59)$$

$$= \frac{\pi\hbar}{m\omega_0} (\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)) \quad \text{für } \gamma \rightarrow 0 \quad (2.60)$$

$$\Delta^2 x = \frac{\hbar}{2m\omega_0} \quad (2.61)$$

2. Theorie

und entspricht somit der aus der Quantenmechanik [48] bekannten Ortsunschärfe des harmonischen Oszillators. Ebenso kann in diesem Grenzfall die spektrale Dichte $S_f^{T=0}(\omega)$ der thermischen Anregung

$$S_f^{T=0}(\omega) = \gamma \frac{\hbar \omega}{m} \quad (2.62)$$

angegeben werden, die in diesem Falle natürlich nicht mehr von der Temperatur T abhängt.

2.2. Das Standard Quanten Limit

Das Standard Quanten Limit (SQL) ist ein Begriff, der vor allem von BRAGINSKY [3] geprägt wurde und der in dieser Form eng mit der HEISENBERG'schen Unschärferelation zusammenhängt. Es beschreibt die fundamentale Grenze der Meßgenauigkeit aufgrund der Rückwirkung des Meßprozesses auf die zu messende Größe. Die übliche Formulierung des Standard Quanten Limit für ein freies Teilchen der Masse m , das einer Messung der Dauer τ unterliegt, ist

$$\begin{aligned} \Delta x_{\text{SQL}} &= \sqrt{\frac{\hbar \tau}{2m}} \\ \Delta p_{\text{SQL}} &= \sqrt{\frac{\hbar m}{2\tau}}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Interpretiert man die Meßzeit τ als Bandbreite einer Messung, so kann man z. B. das Standard Quanten Limit eines harmonischen Oszillators erhalten, wenn die Meßzeit τ als Kehrwert seiner Resonanzfrequenz ω_0 gewählt wird.

$$\Delta x_{\text{SQL}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}} \quad (2.64)$$

Obwohl dieses Ergebnis der Ortsunschärfe des harmonischen Oszillators entspricht, ist Gleichung (2.64) doch mit Vorsicht zu verwenden. So hängt z. B. die Ortsunschärfe eines harmonischen Oszillators *nicht* von der Integrationszeit ab wie Gleichung (2.63) impliziert.

Es soll daher im folgenden ein etwas allgemeinerer Zugang zum Standard Quanten Limit aufgezeigt werden. Wie in Abschnitt 2.1.3 gezeigt, liefert das Fluktuations-Dissipations-Theorem die spektrale Dichte eines Systems in Abhängigkeit von dessen Transferfunktion. Eine mögliche Definition des Standard Quanten Limit besteht nun darin, die Aussage des Fluktuations-Dissipations-Theorem für $T \rightarrow 0$ zu verwenden, so daß der Anteil des rein *thermischen* Rauschens abgetrennt wird.

$$\begin{aligned} \Delta^2 x_{\text{SQL}} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\hbar}{m} \int_0^\infty \text{Im} \chi(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} \\ \Delta^2 p_{\text{SQL}} &\stackrel{\text{def}}{=} 2\hbar m \int_0^\infty \omega^2 \text{Im} \chi(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} \end{aligned} \quad (2.65)$$

Diese Definition führt für den wichtigen Fall des harmonischen Oszillators zur gewohnten Lösung (Gl. (2.61)), ohne allerdings Gebrauch von der Definition einer Meßzeit machen zu müssen. Mit der so erfolgten Definition des Standard Quanten Limits liegt es nahe, auch spektrale Dichten für das Standard Quanten Limit und der dazugehörigen Anregung zu definieren. Die Definition folgt zwanglos aus Gleichung (2.65):

$$S_x^{\text{SQL}}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\hbar}{m} \text{Im}\chi(\omega) \quad (2.66)$$

$$S_f^{\text{SQL}}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\hbar \text{Im}\chi(\omega)}{m |\chi(\omega)|^2}. \quad (2.67)$$

Ein entscheidender Vorteil der Formulierung des Standard Quanten Limit in Form spektraler Dichten besteht darin, daß es sich auf diese Weise in eine allgemeine Betrachtung zur Meßgenauigkeit in interferometrischen Systemen einpassen läßt, da nun eine frequenzabhängige Information über das Rauschen vorliegt. Zudem ermöglicht es insbesondere Gleichung (2.67), das Standard Quanten Limit mit Hilfe der spektralen Dichte einer Anregung zu beschreiben.

Da das Standard Quanten Limit hier über das Fluktuations-Dissipations-Theorem bei $T = 0$ definiert ist, trägt es bei endlichen Temperaturen in der Regel nicht wesentlich zum Rauschen bei.

2.2.1. Die Nachweisgrenze in der interferometrischen Längenmessung

Der Begriff der Nachweisgrenze in der interferometrischen Längenmessung bezieht sich hier auf die kleinste nachweisbare Änderung der optischen Länge eines Interferometers, letztlich also auf die kleinste nachweisbare Phasenänderung.

Das eine kleinste nachweisbare Phasenänderung existiert, liegt im wesentlichen an zwei zunächst unabhängigen Rauschprozessen. Zum einen ist dies das Positionsrauschen der längenbestimmenden Komponenten des Interferometers, zum anderen das Rauschen des Nachweisprozesses.

Positionsrauschen

Für die weiteren Betrachtungen soll zunächst nur das Positionsrauschen *einer* längenbestimmenden Komponente des Interferometers betrachtet werden, die nur einen Freiheitsgrad besitze. Alle anderen längenbestimmenden Komponenten sollen als fixiert angenommen werden. Diese Einschränkung kann späterhin leicht wieder fallengelassen werden. Das Konzept des Positionsrauschens leitet sich aus der Annahme her, daß die betreffende Komponente letztendlich von Rückstellkräften in ihrer Gleichgewichtslage gehalten wird, und somit kleine Bewegungen um diese Lage herum ausführen kann.

Die spektrale Dichte des Positionsrauschens eines Spiegels setzt sich aus mehreren unkorrelierten Beiträgen zusammen.

$$S_x(\omega) = S_x^{\text{ext}}(\omega) + S_x^{\text{int}}(\omega) + S_x^T(\omega) \quad (2.68)$$

2. Theorie

$S_x^{\text{ext}}(\omega)$ beschreibt den Einfluß äußerer Störungen wie Seismik, Gasdruck oder akustische Effekte und kann in der Diskussion um eine fundamentale Meßgrenze als rein *technische* Rauschquelle vernachlässigt werden. Da es prinzipiell vorstellbar ist, die Temperatur T des ankoppelnden Wärmebades beliebig klein zu machen, reduziert sich die spektrale Dichte des thermischen Rauschens $S_x^T(\omega)$ in dieser Diskussion zu der des Standard Quanten Limits $S_x^T(\omega) \rightarrow S_x^{\text{SQL}}(\omega)$. Der Beitrag $S_x^{\text{int}}(\omega)$ beschreibt die durch die Wechselwirkung des Lichts mit dem Spiegel hervorgerufene spektrale Dichte des Positionsrauschens.

Die folgende Diskussion beruht zum Teil auf dem Photonenbild für Licht [12]. Dieses ist in einem Interferometer sicherlich nur teilweise gerechtfertigt, da die Beschreibung eines Interferometers nur im Wellenbild gelingt. Zentraler Punkt der Diskussion ist jedoch die Impulserhaltung, die auch im Wellenbild gelten muß. Es wird ausdrücklich nicht die Annahme gemacht, der Spiegel absorbiere und reemittiere die Photonen.

Jedes Photon der Wellenlänge λ erleidet bei der Reflexion an einem Spiegel den Impulsübertrag δp

$$\delta p = 2\hbar k_L \sin \varphi \quad k_L = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{c}{\omega_L} \quad (2.69)$$

wobei φ der Einfallswinkel des Lichts ist, d. h. der Winkel zwischen Licht und Spiegelebene. Hat der Spiegel ein Reflexionsvermögen $\mathfrak{R} \leq 1$, so erfährt der Spiegel durch den Impulsübertrag der Photonen eine Kraft F_L

$$F_L = 2\mathfrak{R} \sin \varphi \frac{P}{c} \stackrel{\text{def}}{=} 2 \frac{P_{\text{eff}}}{c}, \quad (2.70)$$

die durch den Strahlungsdruck der Leistung P bzw. der „effektiven“ Leistung

$$P_{\text{eff}} = \mathfrak{R} \sin \varphi \quad (2.71)$$

gekennzeichnet ist.

Die spektrale Dichte S_F^{RP} dieser Kraft beträgt

$$S_F^{\text{RP}}(\omega) = \frac{4}{c^2} S_{P_{\text{eff}}} \cdot \quad (2.72)$$

Die spektrale Dichte der effektiven Leistung hängt entscheidend davon ab, ob sich das Licht in einem klassischen kohärenten Zustand (*coherent state*) oder einem gequetschten Zustand (*squeezed state*) befindet.

Damit ergibt sich also mit Hilfe des WIENER-KHINTCHINE-Theorems für die spektrale Dichte des Positionsrauschens des Spiegels

$$S_x(\omega) = S_x^{\text{RP}}(\omega) + S_x^{\text{SQL}}(\omega) \quad (2.73)$$

$$= |\chi(\omega)|^2 \left(\frac{4}{c^2} S_{P_{\text{eff}}} + S_f^{\text{SQL}}(\omega) \right) \quad (2.74)$$

$$= |\chi(\omega)|^2 \left(\frac{4}{m^2 c^2} \hbar \omega_L P_0 + S_f^{\text{SQL}}(\omega) \right) \quad (2.75)$$

Rauschen des Nachweisprozesses

Das Rauschen des Nachweisprozesses ist ebenso fundamentaler Natur, da er unabhängig von der gewählten Nachweistechnik zum selben Ergebnis führt, solange der Nachweisprozeß optimal in dem Sinne ist, daß alles verfügbare Licht auch zur Detektion verwendet wird.

Um dies zu illustrieren, soll zunächst ein einfaches MICHELSON-Interferometer so betrieben werden, daß am Arbeitspunkt beide Ausgänge gleich hell sind, d. h. auf der Flanke des Ausgangssignals. Das Ausgangssignal s kann dann z. B. aus der Differenz der Leistungen in den beiden Ausgängen des Interferometers gebildet werden

$$s = P_1 - P_2 = P_0 \sin 2k_L x \quad \text{mit} \quad P_1 + P_2 = P_0, \quad (2.76)$$

wobei P_0 die in das Interferometer eingestrahlte Leistung ist sowie P_1 und P_2 die Leistungen an den jeweiligen Ausgängen. Der Arbeitspunkt x_{AP} des Interferometers, d. h. der Punkt größter Empfindlichkeit gegenüber Längenänderungen in den Armen, ist in diesem Falle bei

$$x_{\text{AP}} = \frac{n\lambda}{4} \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.77)$$

Kleine Änderungen δx um diesen Arbeitspunkt bedingen eine Änderung des Signal um δs

$$\delta s = \delta x \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right) \Big|_{x_{\text{AP}}}. \quad (2.78)$$

Aus dieser Signaländerung kann man nun auf die erfolgte Positionsänderung des Spiegels, bzw. auf ihre spektrale Dichte $S_x^N(\omega)$ schließen:

$$\delta x = \delta s \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right) \Big|_{x_{\text{AP}}}^{-1} = \delta s \frac{1}{2P_0 k_L} \quad (2.79)$$

$$S_x^N(\omega) = S_s(\omega) \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right) \Big|_{x_{\text{AP}}}^{-2} = S_s(\omega) \frac{1}{(2P_0 k_L)^2} \quad (2.80)$$

Beschränkt man sich nun auf klassische Lichtfelder, so ist die spektrale Dichte des Signals durch das Schrotrauschen des detektierten Lichts bestimmt

$$S_s(\omega) = \hbar \omega_L P_0, \quad (2.81)$$

so daß sich für die spektrale Dichte des Nachweisrauschens

$$S_x^N(\omega) = \frac{\hbar c^2}{4P_0 \omega_L} \quad (2.82)$$

$$= \frac{1}{\eta^2} \frac{\hbar c^2}{4P_0 \omega_L} \quad \text{mit} \quad \eta = 1 \quad (2.83)$$

ergibt. Die Einführung des Parameters η ist zunächst etwas künstlich, erweist sich jedoch als durchaus nützlich.

2. Theorie

Ein anderer wichtiger Fall ist das FABRY-PEROT-Interferometer, bei dem das Signal mit Hilfe des bekannten POUND-DREVER-HALL-Verfahrens (siehe Anhang B) [17, 42] gewonnen wird. Bei einer Finesse \mathcal{F} ergibt sich die spektrale Dichte des Rauschens des Nachweisprozesses nach Gleichung (B.20)

$$S_x^N(\omega) = \frac{\hbar c^2 \pi^2}{2 \mathcal{F}^2 P_0 \omega_L} \quad (2.84)$$

$$= \frac{1}{\eta^2} \frac{\hbar c^2}{4 P_0 \omega_L} \quad \text{mit} \quad \eta = \frac{\mathcal{F}}{\pi \sqrt{2}} \quad (2.85)$$

Hier ist der Faktor η , bis auf einen Faktor $\sqrt{2}$, die Leistungsüberhöhung im Resonator. Für die *interne* Leistung P_{int} im Resonator gilt daher (Gl. (A.12)):

$$P_{\text{int}} = \sqrt{2} \eta P_0 \quad (2.86)$$

Der Faktor $\sqrt{2}$ ist durchaus typisch für Nachweisverfahren, die die Information aus nur einem von zwei möglichen Ausgängen eines Interferometers entnehmen. So wird in Gleichung (2.83) ebenso $\eta = 1/\sqrt{2}$, wenn statt des beschriebenen Nachweisschemas z. B. SCHNUPP-Modulation [47], also Seitenbanddetektion am dunklen Ausgang, verwendet wird. Daher bietet sich eine allgemeine Formulierung für $S_x^N(\omega)$ an:

$$S_x^N(\omega) = \frac{1}{\eta} \frac{\hbar c^2}{4 P_{\text{int}} \omega_L} \quad (2.87)$$

Definiert man eine Meßzeit τ und damit eine Bandbreite $\Delta f = 1/\tau$, so kann aus (2.87) die Schwankung Δx_{rms} der charakteristischen Interferometerlänge abgeleitet werden

$$\Delta x_{\text{rms}} = \frac{1}{\eta} \frac{\lambda}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\eta k_L} \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (2.88)$$

wobei N die Anzahl der Photonen im Interferometer im Zeitintervall der Länge τ ist. Deutet man $\phi = \eta k_L x$ als die Phasenverschiebung, die das Laserfeld bei einer Verrückung des Spiegels um x erfährt, so ergibt sich der Zusammenhang

$$\Delta \phi_{\text{rms}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (2.89)$$

bzw. aufgrund der POISSON-Statistik des Lichts mit $\Delta N = \sqrt{N}$

$$\Delta \phi_{\text{rms}} \Delta N = 1 . \quad (2.90)$$

Diese Beziehung kann als Definition eines optimalen Meßgerätes verwendet werden.

Aufgrund der Ähnlichkeit von Gleichung (2.90) mit der HEISENBERG'schen Unschärferelation sei ausdrücklich daraufhin gewiesen, daß ϕ kein Operator ist. Ein Formalismus zur quantenmechanischen Ableitung einer ähnlichen Relation soll in Abschnitt 2.3 dargestellt werden.

Die Nachweisgrenze

Betrachtet man die beiden Rauschbeiträge aus Gleichung (2.73) und Gleichung (2.82) bzw. (2.84), so können die spektralen Dichten, einschließlich möglicher entstehender Korrelationen, zum Gesamtrauschen S_x^g addiert werden

$$S_x^g(\omega) = S_x^{RP}(\omega) + S_x^{SQL}(\omega) + S_x^N(\omega) + S_x^{\{RP,N\}}(\omega). \quad (2.91)$$

Vernachlässigt man zunächst den Korrelationsterm $S_x^{\{RP,N\}}(\omega)$ und fordert, daß das Licht POISSON-Statistik habe, so kann in Gleichung (2.91) die spektrale Dichte $S_x^g(\omega)$ nach der Leistung P_0 minimiert werden, was zu einer optimalen Leistung P_{opt} führt, die von der Frequenz ω abhängt.

$$P_{opt} = \frac{mc^2}{4\eta\omega_L |\chi(\omega)|} \quad (2.92)$$

Dies ist scheinbar ein gewisser Widerspruch zu der Forderung, es möge sich um Licht handeln, das sich durch kohärente Zustände beschreiben läßt, da dies impliziert, daß die Leistung nicht frequenzabhängig sein sollte. Jedoch ist Gl. (2.92) so zu verstehen, daß für eine gegebene feste Frequenz $\omega = \omega_P$ eine optimale Leistung gefunden werden kann, so daß für diese Frequenz die spektrale Dichte $S_x^g(\omega_P)$ minimal ist.

$$S_x^{\min}(\omega_P) = \frac{\hbar}{m\eta} |\chi(\omega_P)| + S_x^{SQL}(\omega_P) \quad (2.93)$$

$$= \frac{\hbar}{m\eta} |\chi(\omega_P)| + \frac{2\hbar}{m} \text{Im}\chi(\omega_P) \quad (2.94)$$

Korrelationen

Der Korrelationsterm in Gleichung (2.91) läßt sich unter der Annahme auswerten, daß das Lichtfeld am Spiegel und beim Nachweis der POISSON-Statistik folgt. Letzteres erzwingt, daß der Korrelationsterm stets klein bleibt, verglichen mit den Haupttermen, da eine zu starke Korrelation die Photonstatistik beim Nachweis zu sehr verändern würde. Verwendet man die Definition von $S_x^{\{RP,N\}}(\omega)$ (Abschnitt 2.1.2)

$$S_x^{\{RP,N\}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle x^{RP}(t)x^N(t+\tau) + x^{RP}(t+\tau)x^N(t) \rangle_t e^{i\omega\tau} d\tau \quad (2.95)$$

wobei x^{RP} und x^N die jeweiligen äquivalenten Längenänderungen sind, die durch Strahlungsdruck bzw. den Nachweisprozeß hervorgerufen werden, so kann unter der Voraussetzung, daß die Kraftstöße auf den Spiegel ebenfalls der POISSON-Statistik folgen, folgender Ausdruck für die Korrelation abgeleitet werden:

$$S_x^{\{RP,N\}}(\omega) = \frac{4P_0}{mc} \text{Re}\left(\frac{1}{\alpha}\chi(\omega)\right) \quad (2.96)$$

2. Theorie

Dabei bezeichnet α die Empfindlichkeit des jeweiligen Interferometers auf Längenänderungen, d. h. α bezeichnet die Verstimmung des Interferometers pro Längenänderung. Die Tatsache, daß α komplex ist, drückt den Umstand aus, daß nicht ohne Wahl eines speziellen Interferometers die Phasenlage des Korrelationsterms zum Rest der Gleichung (2.91) festgelegt werden kann. Dies wird z. B. beim FABRY-PEROT-Interferometer, das mit Hilfe des POUND-DREVER-HALL-Verfahrens zur Längenbestimmung verwendet werden kann, deutlich. Das Vorzeichen von α kann durch Wahl der Phasenlage des Lokaloszillators bestimmt werden, so daß sich für eine feste Frequenz sowohl eine Korrelation als auch eine Antikorrelation der beiden Rauschterme erreichen läßt.

2.3. Das quantenmechanische Interferometer

2.3.1. Quantisierung des Lichtfeldes

Die Quantisierung des Lichtfeldes soll in der üblichen Weise [39, 49] mit Hilfe der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\hat{a}_{\vec{k},\sigma}^\dagger$ bzw. $\hat{a}_{\vec{k},\sigma}$ für die Mode mit Wellenvektor \vec{k} und Polarisation σ durchgeführt werden. Der Polarisationsindex σ numeriert die beiden möglichen Polarisationszustände des Lichts. Die Quantisierung wurde für ein festes würfelförmiges Volumen der Kantenlänge L durchgeführt, so daß die Verteilung der möglichen Wellenvektoren nicht kontinuierlich ist, da die Beträge $k = |\vec{k}|$ nur ganzzahlige Vielfache der „Grundschwingung“ $2\pi/L$ annehmen können. Die ist jedoch keine Einschränkung, da zum einen das Volumen L^3 beliebig groß gewählt werden kann, zum anderen da für die folgenden Diskussionen der Betrag k , d. h. die Laserfrequenz $\omega_L = kc$ fest gewählt wird.

Für die Erzeuger und Vernichter gelten folgende Kommutatorrelationen

$$\begin{aligned} [\hat{a}_{\vec{k},\sigma}(t), \hat{a}_{\vec{k}',\sigma'}^\dagger(t)] &= \delta_{\vec{k}\vec{k}'}^3 \delta_{\sigma\sigma'} \\ [\hat{a}_{\vec{k},\sigma}(t), \hat{a}_{\vec{k}',\sigma'}(t)] &= 0 \\ [\hat{a}_{\vec{k},\sigma}^\dagger(t), \hat{a}_{\vec{k}',\sigma'}^\dagger(t)] &= 0 \end{aligned} \quad (2.97)$$

sowie die Zeitabhängigkeit

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\vec{k},\sigma}(t) &= \hat{a}_{\vec{k},\sigma}(t_0) e^{-i\omega_L t} \\ \hat{a}_{\vec{k},\sigma}^\dagger(t) &= \hat{a}_{\vec{k},\sigma}^\dagger(t_0) e^{i\omega_L t} . \end{aligned} \quad (2.98)$$

Der Energieinhalt der quantisierten Felder $\hat{E}(\vec{r}, t)$ und $\hat{B}(\vec{r}, t)$ wird durch den Hamilton-

operator \hat{H} beschrieben.

$$\hat{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\vec{k}, \sigma} \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2 \epsilon_0}} \left(i \hat{a}_{\vec{k}, \sigma}(0) \vec{\epsilon}_{\vec{k}, \sigma} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} + \text{h.c.} \right) \quad (2.99)$$

$$\hat{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\vec{k}, \sigma} \sqrt{\frac{\hbar}{2 \omega \epsilon_0}} \left(i \hat{a}_{\vec{k}, \sigma}(0) (\vec{k} \times \vec{\epsilon}_{\vec{k}, \sigma}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} + \text{h.c.} \right) \quad (2.100)$$

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}, \sigma} \hbar \omega \left(\hat{a}_{\vec{k}, \sigma}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}, \sigma} + \frac{1}{2} \right) \quad (2.101)$$

Dabei bezeichnet $\vec{\epsilon}$ den Polarisationsvektor, sowie die Abkürzung „h.c.“ das hermitesche Konjugierte des vorhergehenden Ausdrucks. Da im folgenden die Polarisation des Lichts keine Rolle mehr spielen wird, soll der Index s fallen gelassen werden. Ebenso werden die Wellenvektoren \vec{k} , die sich nur in der Richtung unterscheiden, einfach durchnummeriert werden, falls eine Unterscheidung notwendig ist. Der in Gleichung (2.101) angedeutete Beitrag von $\hbar \omega / 2$ je Mode ist der sogenannte Vakuumbeitrag, der jedoch nicht auftaucht, wenn man die Operatoren, insbesondere den Hamiltonoperator der Normalordnung unterwirft. In der folgenden Diskussion wird der Term keine Rolle spielen.

2.3.2. Zustände des Lichtfeldes

Die Eigenzustände des Hamiltonoperators aus Gl. (2.101) sind die üblichen FOCK-Zustände $|n_{\vec{k}, s}\rangle$. Die Wirkung der Erzeuger und Vernichter auf diese Zustände besteht darin, die Teilchenzahl $n_{\vec{k}, s}$ zu erhöhen oder zu verringern. Zur Vereinfachung der Notation wird im folgenden auf den expliziten Hinweis, daß sich die Operatoren und Variablen auf eine Mode beziehen, verzichtet.

$$\begin{aligned} \hat{a}|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle \\ \hat{a}^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle \end{aligned} \quad (2.102)$$

Die FOCK-Zustände eignen sich wenig zur Beschreibung klassischer Lichtfelder, da aus Gleichung (2.102) und der Orthogonalität der Zustände folgt, daß der Erwartungswert jeder Linearkombination von Erzeugern und Vernichtern in diesen Zuständen verschwinden muß. Dies bedeutet aber auch, daß sowohl das elektrische als auch das magnetische Feld in Gleichung (2.99) und (2.100) verschwindet.

Daher ist es nützlich, sich der sogenannten kohärenten Zustände $|\alpha\rangle$ zu bedienen. Die kohärenten Zustände sind definiert als Eigenzustände des Vernichters

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad (2.103)$$

wobei α im allgemeinen komplex ist, und können durch Anwendung des Operators $\hat{D}(\alpha)$ auf das Vakuum erzeugt werden.

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle = e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}} |0\rangle \quad (2.104)$$

2. Theorie

Eine für manche Anwendung praktischere Schreibweise von $\hat{D}(\alpha)$ ist

$$\hat{D}(\alpha) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{a}} \quad (2.105)$$

Die Zeiteentwicklung des kohärenten Zustandes ist

$$|\alpha(t)\rangle = |\alpha(0)\rangle e^{-i\omega t} \quad (2.106)$$

Der Teilchenzahlgehalt des kohärenten Zustands ist

$$\langle \alpha | \hat{N} | \alpha \rangle = \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle = |\alpha|^2 . \quad (2.107)$$

Die kohärenten Zustände erfüllen zudem die POISSON-Statistik, d. h.

$$|\langle n | \alpha \rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} . \quad (2.108)$$

Aufgrund der Transformation der Erzeuger und Vernichter unter $\hat{D}(\alpha)$

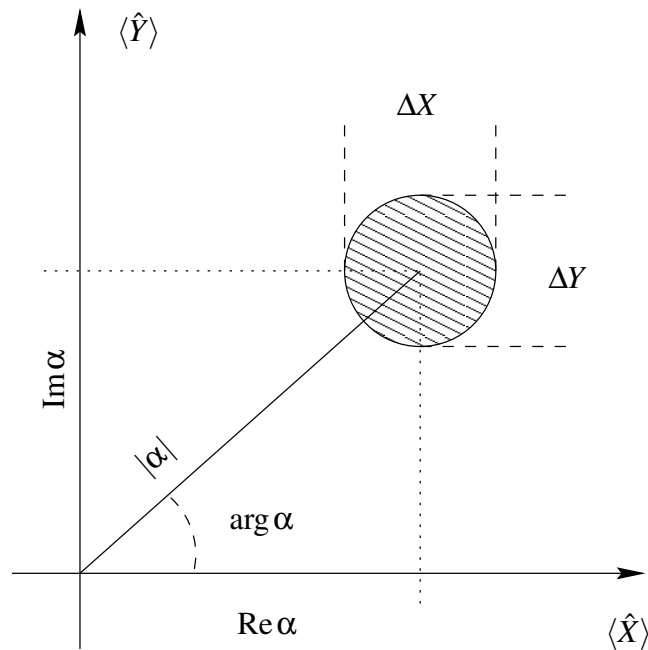


Abbildung 2.1.: Schematische Darstellung eines kohärenten Zustandes in der komplexen α -Ebene

$$\begin{aligned} \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{a} \hat{D}(\alpha) &= \hat{a} + \alpha \\ \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{a}^\dagger \hat{D}(\alpha) &= \hat{a}^\dagger + \alpha^* , \end{aligned} \quad (2.109)$$

wird $\hat{D}(\alpha)$ auch als Verschiebeoperator (*displacement operator*) bezeichnet.

2.3.3. Quadraturoperatoren

Da die Erzeuger und Vernichter keine hermiteschen Operatoren sind, entsprechen ihren Erwartungswerten keine reellen Meßgrößen, so daß es zum Zwecke der Beschreibung einer Messung sinnvoll ist, das Operatorpaar $(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$ durch eine Paar von hermiteschen Linearkombinationen (\hat{X}, \hat{Y}) , den sogenannten Quadraturen, zu ersetzen.

$$\begin{aligned}\hat{X} &= \hat{a}^\dagger + \hat{a} & \hat{a} &= \frac{1}{2}(\hat{X} + i\hat{Y}) \\ \hat{Y} &= i(\hat{a}^\dagger - \hat{a}) & \hat{a}^\dagger &= \frac{1}{2}(\hat{X} - i\hat{Y})\end{aligned}\quad (2.110)$$

Die Quadraturen erfüllen die folgende Kommutatorrelation

$$[\hat{X}, \hat{Y}] = 2i \quad (2.111)$$

und unterliegen damit auch einer Unschärferelation.

$$\Delta X \Delta Y \geq 1 \quad (2.112)$$

Die Bezeichnung von \hat{X} und \hat{Y} als Quadraturen geschieht in Anlehnung an die klassischen Quadraturen eines elektrischen Feldes X_{klass} und Y_{klass} (Anhang B),

$$\vec{E}_{\text{klass}} = E_0 (X_{\text{klass}} \sin \omega t + Y_{\text{klass}} \cos \omega t) \quad (2.113)$$

indem die Beziehungen aus Gleichung (2.110) in Gleichung (2.99) eingesetzt werden, und eine Mode einer Polarisation ausgewählt wird. Man erhält dann

$$\hat{E}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{L^{3/2}} \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0}} \left(\hat{X} \sin(\omega t - \vec{k}\vec{r}) + \hat{Y} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}) \right). \quad (2.114)$$

Der Erwartungswert der Quadraturoperatoren in kohärenten Zuständen gibt gerade den doppelten Real- bzw. Imaginärteil des kohärenten Parameters α .

$$\begin{aligned}\langle \alpha | \hat{X} | \alpha \rangle &= 2 \operatorname{Re} \alpha \\ \langle \alpha | \hat{Y} | \alpha \rangle &= 2 \operatorname{Im} \alpha\end{aligned}\quad (2.115)$$

Damit besitzt man nun eine Möglichkeit, einen Operator zu definieren, der in erster Näherung die Phase φ eines kohärenten Zustandes beschreibt [15]. Schreibt man $\alpha = |\alpha| e^{i\varphi}$, so ist

$$\tan \varphi = \frac{\operatorname{Im} \alpha}{\operatorname{Re} \alpha} \quad (2.116)$$

$$\varphi \approx \frac{\operatorname{Im} \alpha}{\operatorname{Re} \alpha} \quad \text{für } \varphi \ll 1. \quad (2.117)$$

Die Bedingung kleiner Winkel in Gleichung (2.117) kann immer leicht erfüllt werden, da die absolute Phasenlage von α nicht bestimmt ist. Man kann also mit Hilfe der Quadraturoperatoren einen (quasi-)Phasenoperator $\hat{\phi}$ definieren

$$\hat{\phi} = \frac{\hat{Y}}{\langle \hat{X} \rangle}, \quad (2.118)$$

2. Theorie

der zusammen mit dem „konjugierten“ Operator \hat{N}

$$\hat{N} = \langle \hat{X} \rangle \hat{X} \quad (2.119)$$

eine Unschärferelation erfüllt.

$$\Delta\tilde{\phi}\Delta\tilde{N} \geq 1 \quad (2.120)$$

Diese Ungleichung ist unter den erwähnten Einschränkungen die quantenmechanische Verallgemeinerung von Gleichung (2.90).

2.3.4. Optische Elemente

Der Effekt eines verlustfreien optischen Elementes, wie z. B. eines Strahlteilers oder eines Spiegels kann stets in Form einer unitären Streumatrix σ dargestellt werden [29, 39], ebensolches gilt für eine Kombination solcher Elemente. Numeriert man die auslaufenden Moden \hat{b} und einlaufenden Moden \hat{a} entsprechend, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \hat{b}_i &= \sigma_{ij} \hat{a}_j \\ \hat{b}_i^\dagger &= \sigma_{ij}^* \hat{a}_j^\dagger \end{aligned} \quad (2.121)$$

Insbesondere ergibt sich für ein MICHELSON-Interferometer mit einem 50%:50% Strahlteiler, einer Gesamtarmlänge $L = L_1 + L_2$ und einer Differenzarmlänge $\Delta L = L_1 - L_2$ für σ

$$\sigma = e^{i\omega\frac{L}{2c}} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\omega\Delta L}{2c}) & i \sin(\frac{\omega\Delta L}{2c}) \\ -i \sin(\frac{\omega\Delta L}{2c}) & \cos(\frac{\omega\Delta L}{2c}) \end{pmatrix}. \quad (2.122)$$

Der Kommutator der Quadraturen der Ausgangsmoden ist

$$[\hat{X}_{b,i}, \hat{Y}_{b,j}] = 2i(\sigma^\dagger \sigma)_{ij}. \quad (2.123)$$

Damit ist die Summe Varianzen der Quadraturen der Ausgangsmoden \hat{b} gleich der Summe der Varianzen der Quadraturen der Eingangsmoden \hat{a} .

$$\sum_i \Delta^2 \hat{X}_{b,i} = \sum_i \Delta^2 \hat{X}_{a,i} = 2\langle \hat{N}_a \rangle + 1 \quad (2.124)$$

Dabei ist $\langle \hat{N}_a \rangle$ die Teilchenzahl in den Eingangsmoden Verlustfreie optische Elemente, d. h. solche, an denen sich die Gesamtphotonenzahl nicht ändern, lassen somit das Gesamttrauschen konstant.

Die bestmögliche Bestimmung der Phase eines kohärenten Zustandes ist also unabhängig von der tatsächlichen Realisierung des Interferometers, solange alle Ausgangsmoden in der Signalauswertung berücksichtigt werden.

3. Dämpfungsmechanismen eines harmonischen Oszillators

3.1. Viskose Dämpfung

Die übliche Formulierung des Problems des gedämpften harmonischen Oszillators besteht darin, eine Dämpfungskonstante γ in der Bewegungsgleichung einzuführen:

$$\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{F(t)}{m} \quad (3.1)$$

Die dazugehörige Transferfunktion ist die schon aus (2.5) bekannte.

$$\chi(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad (3.2)$$

In der Literatur [33, 36, 45] findet sich eine solche Vielzahl von Benennungen für die Dämpfungskonstante γ , daß eine Standardnotation in diesem Bereich nicht existiert. Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung (3.1) kann mit Hilfe von Impuls p_0 und Ort x_0 zum Zeitpunkt $t = 0$ ausgedrückt werden.

$$x(t) = \frac{1}{\omega_D} \left(\frac{p_0}{m} + \frac{\gamma}{2} x_0 \right) e^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin \omega_D t + x_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos \omega_D t \quad \text{mit} \quad \omega_D^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4} \quad (3.3)$$

Für eine getroffene Wahl der Anfangsbedingungen, z. B. $x_0 = 0$ kann die mittlere Energie des Oszillators $\langle E(t) \rangle$ berechnet werden, wobei über die Dauer einer Periode gemittelt wird.

$$\langle E \rangle = \frac{p_0^2}{2m^2\omega_0^2} e^{-\gamma t} \quad \text{falls} \quad \gamma \ll \omega \quad (3.4)$$

Die relative Abnahme der Energie $\delta E / \langle E \rangle$ während einer Schwingungsperiode T definiert die Güte Q des Oszillators,

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} 2\pi \frac{\delta E}{\langle E \rangle} \quad (3.5)$$

$$= \omega_0 \tau_E \quad \text{mit} \quad \tau_E = 1/\gamma \quad (3.6)$$

$$= \frac{\omega_0}{\gamma} \quad (3.7)$$

$$= \pi f_0 \tau_A \quad \text{mit} \quad \tau_A = \frac{1}{2} \tau_E \quad (3.8)$$

3. Dämpfungsmechanismen eines harmonischen Oszillators

wobei τ_E und τ_A die Zerfallszeiten der Energie bzw. der Amplitude sind. Im Gegensatz zu der Dämpfung γ ist die Definition der Güte allgemein anerkannt, so daß die Transferfunktion als

$$\chi(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\frac{\omega_0\omega}{Q}} \quad (3.9)$$

geschrieben werden kann.

3.2. Komplexe Federkonstante

Eine alternative Formulierung [36, 45] des Problems des gedämpften harmonischen Oszillators besteht darin, in der Bewegungsgleichung des ungedämpften Oszillators eine komplexe Federkonstante einzuführen, deren Imaginärteil den Verlust des Systems beschreibt.

$$m\ddot{x}(t) + k(1 - i\phi)x(t) = F(t) \quad \phi \in \mathbb{R} \quad (3.10)$$

Die Transferfunktion für dieses System lautet:

$$\chi(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega_0^2\phi} \quad (3.11)$$

Die Motivation für diesen Ansatz kann aus dem HOOKschen Gesetz erfolgen, das zunächst nur die Proportionalität zwischen Auslenkung und Rückstellkraft fordert.

$$F(t) = kx(t) \quad (3.12)$$

Dies führt für eine periodische Anregung $x(t) = x_0 e^{-i\omega t}$ zu einer periodischen Antwort gleicher Frequenz, die im allgemeinen um eine Phase $\phi(\omega)$ der Anregung nacheilen kann.

$$F_0 e^{-i(\omega t - \phi(\omega))} = kx_0 e^{-i\omega t} \quad (3.13)$$

Entwickelt man (3.13) für kleine $\phi(\omega)$, so folgt

$$F_0 = k(1 - i\phi(\omega))x_0 \quad (3.14)$$

Ein direkter Vergleich der Transferfunktionen aus (3.11) und (3.2) bzw. (3.9) liefert für $\phi(\omega)$ im Falle der viskosen Dämpfung:

$$\phi_V(\omega) = \frac{\gamma\omega}{\omega_0^2} = \frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0} \quad (3.15)$$

Ein wesentlicher Vorteil der Einführung von $\phi(\omega)$ ist, daß es als *frequenzabhängiger* Dämpfungsmechanismus verstanden werden kann. Setzt man die Transferfunktion (3.11) in den Ausdruck für die Verluste (2.29) ein und wählt $\omega = \omega_0$ so erhält man

$$V(\omega_0) = \phi(\omega_0), \quad (3.16)$$

d. h. die Phase $\phi(\omega)$ beschreibt direkt die Verluste des Systems.

Es ist nützlich, einige Konsequenzen aus der Einführung einer frequenzabhängigen Dämpfung herzuleiten. Schreibt man $\chi(\omega)$ als Betrag $|\chi(\omega)|$ und Phase $\varphi = \arg\chi(\omega)$, so ergibt sich:

$$|\chi(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega_0^4 \phi(\omega)^2}} \quad (3.17)$$

$$\tan \varphi = \phi(\omega) \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (3.18)$$

Hieraus ergeben sich einige Einschränkungen an $\phi(\omega)$. Da auf der Resonanz ($\omega = \omega_0$) $\varphi = \pi/2$ sein muß, darf $\phi(\omega)$ dort keine Nullstelle besitzen, genauer:

$$\phi(\omega_0) > 0 \quad (3.19)$$

Des weiteren muß für eine adiabatische Anregung $\omega \ll \omega_0$ die Phasenverschiebung φ verschwinden, so daß gelten muß:

$$\phi(0) = 0 \quad (3.20)$$

Eine starke Einschränkung, ähnlich (2.14), erlaubt die Tatsache, daß anregende Kraft und Antwort des Systems reelle Größen sind. Aus (2.14) und aus der Reellwertigkeit von $\phi(\omega)$ folgt, daß $\phi(\omega)$ eine *ungerade* Funktion von ω sein muß.

$$\chi(\omega) = \chi^*(-\omega) \quad (3.21)$$

$$\phi(\omega) = -\phi(-\omega) \quad (3.22)$$

Aus Gleichung (3.2) lassen sich einige weitere Zusammenhänge ableiten. Wird der Oszillator durch eine frequenzunabhängige Kraft angeregt, so ist seine spektrale Dichte proportional zum Betragsquadrat der Transferfunktion (siehe Gleichung (2.47)). In der Nähe der Resonanz ω_0 läßt sich die spektrale Dichte durch eine LORENTZkurve mit der vollen Halbwertsbreite $\Delta\omega = \omega_0\phi(\omega_0)$ beschreiben.

$$S_x(\omega) \sim \frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega_0^4 \phi^2(\omega)} \quad (3.23)$$

$$\approx \frac{1}{4\omega_0^2} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\omega_0\phi(\omega_0)}{2}\right)^2} \quad (3.24)$$

$$\Rightarrow \Delta\omega = \omega_0\phi(\omega_0) \quad (3.25)$$

$$\Rightarrow Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \quad (3.26)$$

Der Wert der spektralen Dichte im Maximum ist für $\phi(\omega) \ll 1$

$$S_{x,\max} \approx S_x(\omega_0) \sim \frac{1}{\omega_0^4 \phi^2(\omega_0)} = \frac{Q^2}{\omega_0^4} \quad (3.27)$$

3.3. Interne Dämpfung

Ein Beispiel für eine frequenzabhängige Verlustphase $\phi(\omega)$ ist das Modell der internen Dämpfung [18, 41]. Diese Modell beruht darauf, daß die Federkonstante $k = k(t)$ zeitabhängig wird, und zwar so, daß sie aus einem zeitunabhängigen Teil k_1 und einem Anteil $k_2(t)$, der eine Relaxation mit Zeitkonstante τ beschreibt, zusammengesetzt ist.

$$k(t) = k_1 + k_2(t) \quad \text{mit} \quad k_2(t) = -\tau \dot{k}_2(t) \quad (3.28)$$

Damit kann dann (3.12) als

$$F + \tau \dot{F} = k_1 x + \tau k \dot{x} \quad (3.29)$$

geschrieben werden. Einsetzen der periodischen Kraft $F(t) = F_0 e^{-i\omega t}$ liefert

$$k(\omega) = k_1 + k_2 \frac{(\omega\tau)^2}{1 + (\omega\tau)^2} - ik_2 \frac{\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \quad (3.30)$$

und damit für $\phi(\omega)$

$$\phi(\omega) = \Delta_r \frac{\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \quad (3.31)$$

den DEBYE-Peak, eine ungerade Funktion in ω . Dabei ist Δ_r die Relaxationsstärke.

Für Frequenzen ω klein gegen die Relaxationszeit τ , d. h. $\omega\tau \ll 1$ wird Gleichung (3.31) zu

$$\phi(\omega) = \Delta_r \omega\tau = \gamma_D \frac{\omega}{\omega_0^2} \quad \text{mit} \quad \gamma_D = \Delta_r \tau \omega_0^2, \quad (3.32)$$

so daß in diesem Falle die interne Dämpfung wie viskose Dämpfung betrachtet werden kann. Ist $\omega\tau \gg 1$, so ist $\phi(\omega)$

$$\phi(\omega) = \frac{\Delta_r}{\omega\tau} \quad (3.33)$$

und die Dämpfung verschwindet bei hohen Frequenzen.

3.4. Strukturelle Dämpfung

Der Einfachheit der Formulierung der internen Dämpfung steht entgegen, daß sie nach experimentellem Befund in normalen Festkörpern selten in ihrer reinen Form realisiert ist [4, 18, 41]. Messungen lassen darauf schließen, daß die Relaxationszeit τ einer Verteilung unterliegt, die dafür sorgt, daß $\phi(\omega)$ über den Bereich der interessierenden Frequenzen als konstant angenommen werden kann .

$$\phi_S(\omega) = \phi_S \quad (3.34)$$

Dies führt zu einem Dämpfungsmechanismus, der als strukturelle Dämpfung bezeichnet wird. Der Name rührt von der Vorstellung her, daß dieser Dämpfungsmechanismus durch strukturelle Umlagerungen im Material hervorgerufen wird.

3.5. Vergleich der Dämpfungsmechanismen

Vergleicht man die verschiedenen Dämpfungsmechanismen (Abb. 3.1), so stellt man fest daß bei hinreichend hoher Güte $Q = 1/\phi(\omega_0)$ die Unterschiede im reinen Frequenzspektrum sehr gering sind.

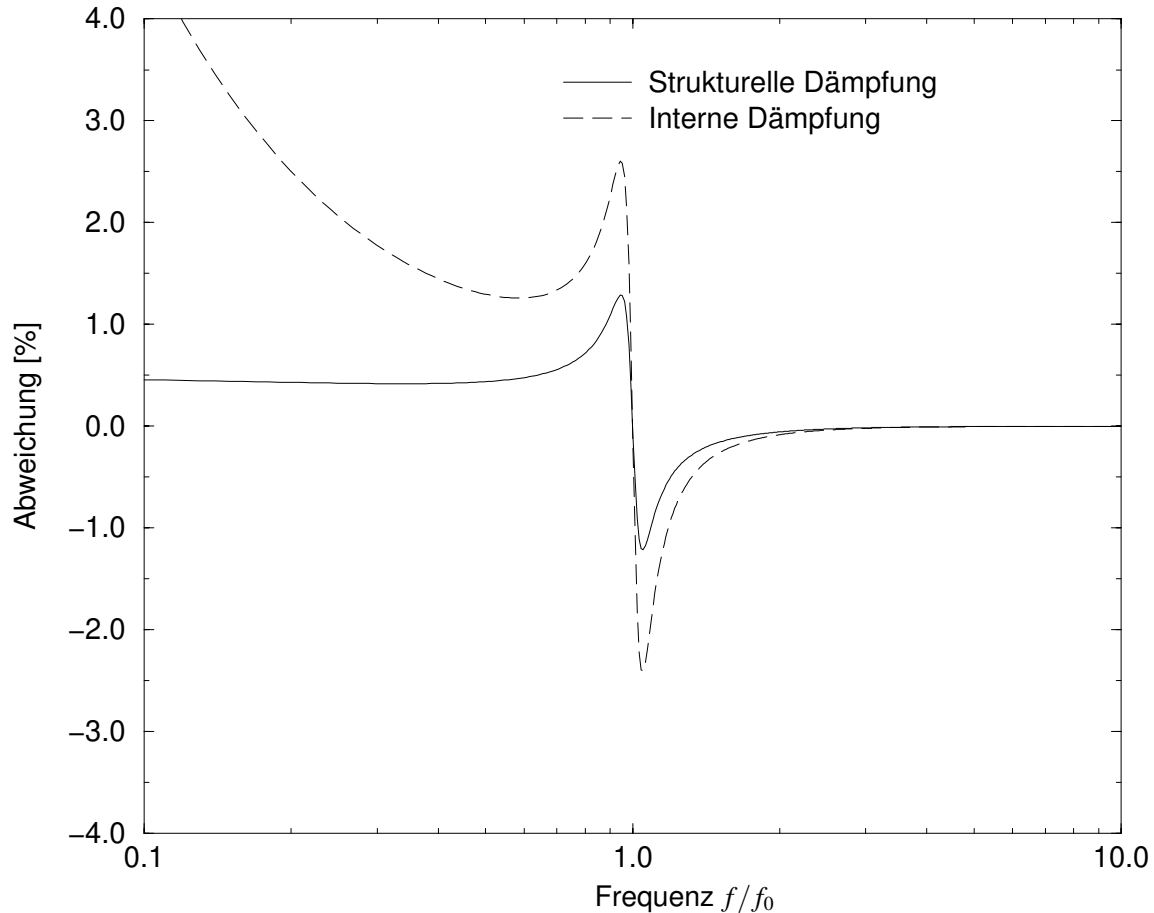


Abbildung 3.1.: Vergleich der spektralen Dichten von struktureller und interner Dämpfung mit viskoser Dämpfung für eine Güte von $Q = 100$

Dies hat vor allem seinen Grund darin, daß für kleine $\phi(\omega)$ der explizit frequenzabhängige Dämpfungsterm zum Gesamtspektrum nur im Bereich der Resonanz nennenswert beiträgt. Auf der Resonanz ist aber $\phi(\omega_0) = 1/Q$ für alle Dämpfungsmechanismen, so daß sich die Spektren nicht sehr stark unterscheiden.

Betrachtet man dagegen die spektrale Dichte des thermischen Rauschens (Abb. 3.2), die durch das entsprechende Dämpfungsmodell erzeugt wird, so erhält man ein unterschiedliches Frequenzverhalten der spektralen Dichten in den Bereichen unter- und oberhalb der Resonanzfrequenz. Während die spektrale Dichte des viskos gedämpften harmonischen Oszillators unterhalb der Resonanzfrequenz, d. h. für $f < f_0$ konstant ist, fällt sie oberhalb der Resonanzfrequenz ($f > f_0$) mit $1/f^2$ ab. Die spektrale Dichte des strukturell gedämpf-

3. Dämpfungsmechanismen eines harmonischen Oszillators

ten harmonischen Oszillators fällt unterhalb der Resonanzfrequenz wie $1/f$ und fällt oberhalb der Resonanzfrequenz wie $1/f^3$. Die spektrale Dichte des intern gedämpften harmonischen Oszillators fällt sogar wie $1/f^2$ unterhalb der Resonanzfrequenz ab und wie $1/f^4$ für $f > f_0$.

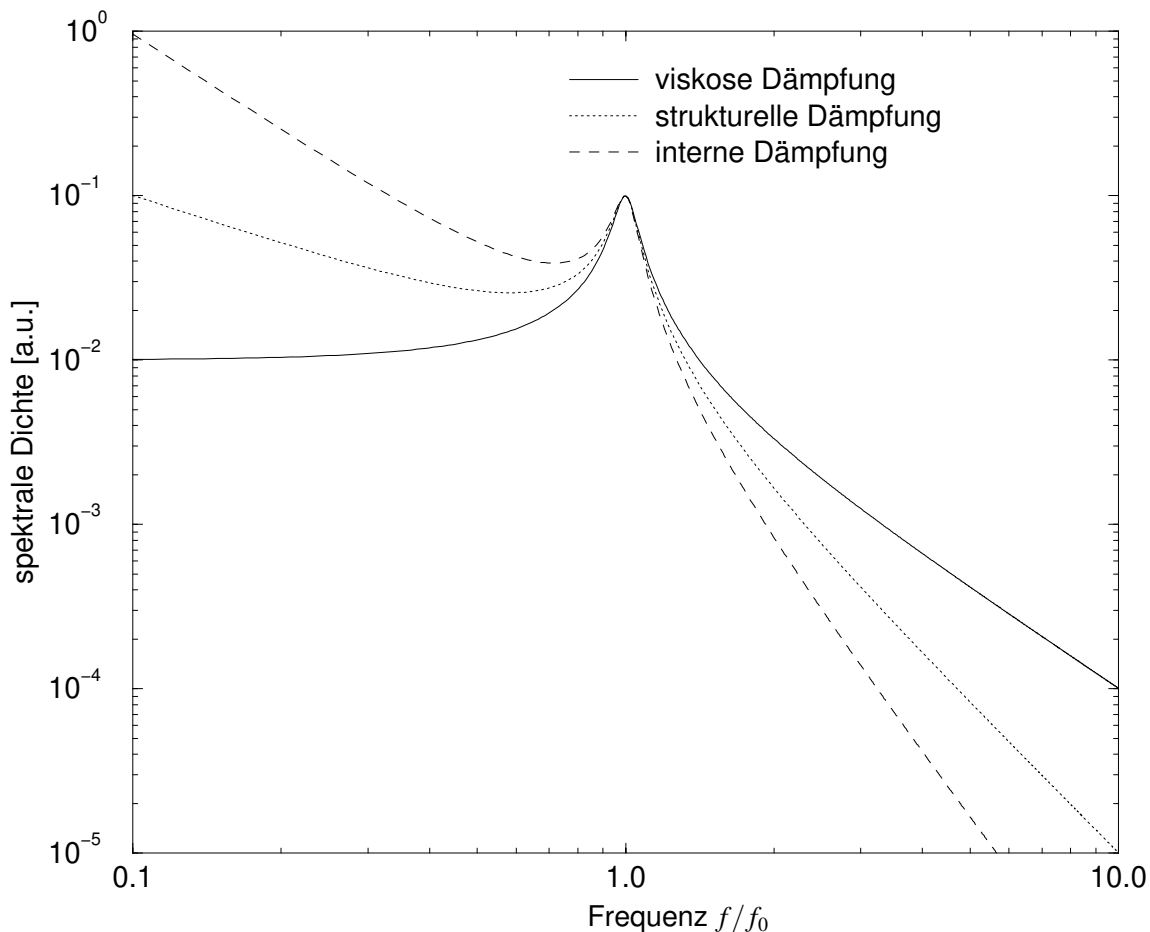


Abbildung 3.2.: Vergleich der spektralen Dichten des thermischen Rauschens für viskose, strukturelle und interne Dämpfung für $Q = 100$.

Die hier gegenüber den reinen Spektren so auffälligen Unterschiede resultieren aus der Abhängigkeit des thermischen Rauschens von dem Imaginärteil der Transferfunktion. Damit ist ihre direkte Abhängigkeit von $\phi(\omega)$ über den gesamten Frequenzbereich gegeben.

3.6. Zusammenfassung der wichtigsten Formeln

Zusammenfassend ist es nützlich, die gefundenen Formeln für den praktischen Gebrauch statt in den Kreisfrequenzen ω auch in Frequenzen $f = \omega/2\pi$ zu formulieren. So ergibt sich

für die Transferfunktion $\chi(f)$

$$\chi(f) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{f_0^2 - f^2 - i\phi(f)f_0^2} \quad (3.35)$$

und für das Spektrum

$$|\chi(f)| = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{\sqrt{(f_0^2 - f^2)^2 + \phi(f)^2 f_0^4}} \quad (3.36)$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{\sqrt{(f^2 - f_0^2)^2 + \frac{4\pi^2}{Q^2} f^2 f_0^2}} \quad \text{viskos} \quad (3.37)$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{\sqrt{(f^2 - f_0^2)^2 + \frac{f_0^4}{Q^2}}} \quad \text{strukturell,} \quad (3.38)$$

sowie für die spektralen Dichten des thermischen Rauschens

$$S_x^T = \frac{4k_B T}{8\pi^3 m f} \frac{\phi(f) f_0^2}{(f^2 - f_0^2)^2 + \phi(f)^2 f_0^4} \quad (3.39)$$

$$= \frac{4k_B T}{4\pi^2 m f_0 Q} \frac{1}{(f^2 - f_0^2)^2 + \frac{4\pi^2}{Q^2} f^2 f_0^2} \quad \text{viskos} \quad (3.40)$$

$$= \frac{4k_B T}{8\pi^3 m f Q} \frac{f_0^2}{(f^2 - f_0^2)^2 + \frac{f_0^4}{Q^2}} \quad \text{strukturell.} \quad (3.41)$$

3. *Dämpfungsmechanismen eines harmonischen Oszillators*

4. Das thermische Rauschen eines idealen Pendels

Zur Beschreibung eines komplexen Systems sind in der Regel Normalkoordinaten sehr gut geeignet. Im Zusammenhang mit dem Rauschen wirft dies jedoch das Problem auf, daß die Normalkoordinaten nicht notwendigerweise derselben Dämpfung, und damit demselben thermischen Rauschen unterliegen, wie die tatsächlich gedämpften Koordinaten.

Bei den hier betrachteten Systemen sind jedoch die Normalmoden nahezu mit den Moden der ungekoppelten Systeme identisch, da die Wechselwirkung der einzelnen Schwingungen untereinander für die Betrachtung des Rauschens vernachlässigbar sind.

Soll die spektrale Dichte der Positionsänderung des Spiegels berechnet werden, so müssen also die Rauschbeiträge der einzelnen Moden quadratisch addiert werden, d. h. die gesamte spektrale Dichte ergibt sich aus der Summe der einzelnen spektralen Dichten der Normalmoden. Die zusätzliche Komplikation, daß das Rauschen der einzelnen Moden nicht gleichermaßen zum Rauschen des Spiegels, genauer zum Rauschen der Resonatorlänge, beiträgt, wird durch das Konzept der effektiven Massen berücksichtigt.

Im folgenden werden für ein idealisiertes Pendel die wesentlichen Rauschbeiträge vorgestellt.

4.1. Das Pendel

Das Pendel zeichnet sich zunächst durch seine Eigenfrequenz f_p aus. Da die Masse der Aufhängung vernachlässigbar klein gegenüber der Masse des Pendelkörpers, also des Spiegels ist, gilt hier der bekannte Zusammenhang für das mathematische Pendel [23]

$$f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (4.1)$$

mit der Erdbeschleunigung g und der Pendellänge l . Vernachlässigt man zunächst einmal Dämpfungsmechanismen, die direkt auf den Spiegel wirken, so werden alle Verluste die das Pendel erleidet, durch Dissipation in der Aufhängung bestimmt werden. Berücksichtigt man, daß die Funktion $\phi(\omega)$ das Verhältnis von dissipierter Energie zu Gesamtenergie ist (siehe Gleichung (3.16)), so erhält man für die Verluste des Pendels folgenden Ausdruck [45]:

$$\phi_P(\omega) = \phi_F(\omega) \frac{k_{el}}{k_{el} + k_{Grav}} \quad (4.2)$$

4. Das thermische Rauschen eines idealen Pendels

Dabei bezeichnet $\phi_F(\omega)$ die Verluste in der Faser, die zunächst nicht weiter spezifiziert werden sollen. Die „effektiven“ Federkonstanten k_{Grav} und k_{el} für die Gravitation bzw. die elastischen Verformung der Faser sind ein Maß für die Rückstellkräfte, die auf das Pendel wirken, und betragen:

$$k_{\text{Grav}} = \frac{mg}{l} = 4\pi^2 f_p^2 \quad (4.3)$$

$$k_{\text{el}} = \frac{\sqrt{mgE_m I_f}}{2l^2} \quad (4.4)$$

Die Größen E_m und $I_f = \frac{\pi}{4}r^4$ bezeichnen das Elastizitätsmodul bzw. das Flächenträgheitsmoment der Faser mit Durchmesser r [32, 45], m ist die Masse des Spiegels. Da für typische Massen und Faserdurchmesser, wie sie in diesem Versuch Verwendung finden

$$k_{\text{el}} \ll k_{\text{Grav}} \quad (4.5)$$

gilt, folgt für die Verluste des Pendels $\phi_P(\omega)$

$$\phi_P(\omega) = \phi_F(\omega) \frac{r^2}{4l} \sqrt{\frac{\pi E_m}{mg}} \quad (4.6)$$

Da aus Gleichung (4.5) auch $\frac{r^2}{4l} \sqrt{\frac{\pi E_m}{mg}} \ll 1$ folgt, können die Verluste des Pendels sehr viel geringer als die der Faser sein. Für typische im Experiment verwendete Parameter ist

$$\phi_P(\omega) = \phi_F(\omega) \times 0.0338 \left(\frac{r}{50\mu\text{m}} \right)^2 \left(\frac{0.2\text{ m}}{1} \right) \left(\frac{200\text{ mg}}{\text{m}} \right)^{1/2}. \quad (4.7)$$

Dieser Effekt wird als „Verdünnungseffekt“ (*dilution effect*) bezeichnet, weil die Verluste der Faser in der gravitationellen Energie des Pendels „verdünnt“ werden.

Wird für die Verluste der Faser strukturelle Dämpfung vorausgesetzt, so ist der Wert von $\phi_F(\omega)$ eine materialabhängige Konstante $\phi_0 = 1/Q_0$. Somit ist auch $\phi_P(\omega) = \phi_P$ frequenzunabhängig. Die spektrale Dichte der Pendelbewegung ergibt sich dann zu:

$$S_{x,P} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{4k_B T}{m} \frac{f_p^2 \phi_P}{f} \frac{1}{(f^2 - f_0^2)^2 + f_0^4 \phi_P^2} \quad (4.8)$$

4.1.1. Rotation

Für die Rotation (*torsion*) des Spiegels (Abb. 4.1 rechts), wie sie vor allem bei Spiegeln auftritt, die nur an einem Faden aufgehängt sind, gilt für die Rotationsfrequenz f_t

$$f_t = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{I_t}} \quad (4.9)$$

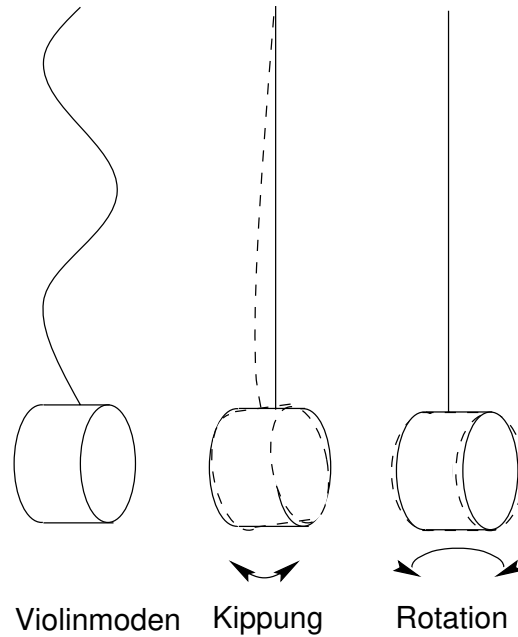


Abbildung 4.1.: Violinmoden, Kippung und Rotation eines an einer Faser aufgehängten Spiegels

wobei D die sogenannte Winkelrichtgröße des Aufhängefadens ist und I_t für Trägheitsmoment des Spiegels um die Drehachse steht. Bezeichnet man den Radius des Spiegels als R , sowie seine Dicke mit h so ergibt sich für I_t :

$$I_t = m \left(\frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{12}h^2 \right) = \frac{1}{4}mR^2 \left(1 + \frac{1}{3}a^2 \right) \quad (4.10)$$

Dabei bezeichnet a das sogenannte *aspect ratio*, also das Verhältnis von Dicke zu Radius des Spiegels $a = h/R$. Die Winkelrichtgröße D kann aus der Kenntnis des Faserradius r sowie des Torsionsmoduls G_m des verwendeten Fasermaterials bestimmt werden

$$D = \frac{\pi G_m r^4}{2 l}, \quad (4.11)$$

so daß sich für die Rotationsfrequenz f_t folgender Ausdruck ergibt:

$$f_t = \sqrt{\frac{G_m r^4}{2\pi l m R^2 (1 + \frac{1}{3}a^2)}} \quad (4.12)$$

Die Verluste dieser Mode werden nur von den Verlusten der Faser bestimmt, da in diesem Falle der verlustfreie gravitationelle Energiespeicher wegfällt.

$$\phi_t = \phi_0 \quad (4.13)$$

4. Das thermische Rauschen eines idealen Pendels

Die spektrale Dichte des thermischen Rauschens der Rotation lautet also:

$$S_{\phi} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{4k_B T}{I_t} \frac{f_t^2 \phi_0}{f} \frac{1}{(f^2 - f_t^2)^2 + \phi_0^2 f_t^4} \quad (4.14)$$

Der Effekt der Rotation des Spiegels auf die Länge des Resonators hängt für kleine Rotationen nur von der Lage des Ortes der Positionsmessung relativ zur Drehachse ab. Bezeichnet man diesen Abstand mit d_t , so erhält man für die spektrale Dichte

$$S_{x,t} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{4k_B T}{m_{\text{eff},t}} \frac{f_t^2 \phi_0}{f} \frac{1}{(f^2 - f_t^2)^2 + \phi_0^2 f_t^4}. \quad (4.15)$$

Dabei beträgt die effektive Masse der Rotation

$$m_{\text{eff},t} = m \frac{1}{4} \frac{R^2}{d_t^2} \left(1 + \frac{1}{3} a^2\right). \quad (4.16)$$

4.1.2. Kippung

Die Kippung des Spiegels (*rocking*) ist eine Schwingungsform, bei der durch das Kippen des Spiegels dessen Schwerpunkt angehoben wird (Abb. 4.1 mitte). Ist der Spiegel an einer oder mehreren Fasern aufgehängt, deren Masse gegenüber der Spiegelmasse vernachlässigbar ist, so ergibt sich für die Frequenz der Kippung f_r

$$f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mgR}{I_r}} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{g}{R(1 + \frac{1}{3}a^2)}}. \quad (4.17)$$

Die Verluste für diese Mode berechnen sich ähnlich wie in Abschnitt 4.1 aus den Verlusten der Faser, der Rückstellkraft durch die elastische Verformung der Faser sowie der Rückstellkraft der Gravitation, die hier aufgrund des Trägheitsmomentes die Form

$$k_r = \frac{mg}{R} \frac{12}{3 + 4a^2} \quad (4.18)$$

hat. Für die Verluste der Kipp-Mode ergibt sich also analog zu Gl. (4.6)

$$\phi_R(\omega) = \phi_0(\omega) \frac{r^2}{4R} \frac{12}{3 + 4a^2} \sqrt{\frac{\pi E_m}{mg}}. \quad (4.19)$$

Ähnlich der Rotation trägt auch die Kippmode nur mit einer effektiven Masse $m_{\text{eff,rock}}$ bei, die aufgrund der im wesentlichen gleichen Rotationsbewegung des Spiegels näherungsweise gleich der der Rotation ist. Entsprechend dem dort eingeführten Parameter d_t bezeichnet hier d_r den Abstand des Strahls in vertikaler Richtung von dem Drehpunkt der Kippmode.

$$m_{\text{eff},r} = m \frac{1}{4} \frac{R^2}{d_r^2} \left(1 + \frac{1}{3} a^2\right) \quad (4.20)$$

Die spektrale Dichte für die durch die Kippung induzierte Längenänderung des Resonators ist also

$$S_{x,r} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{4k_B T}{m_{\text{eff},r}} \frac{f_r^2 \phi_r}{f} \frac{1}{(f_r^2 - f^2)^2 + \phi_r^2 f_r^4}. \quad (4.21)$$

4.1.3. Violin-Moden

Die Violinmoden der Aufhängung sind Transversalschwingungen der unter Spannung stehenden Fasern (Abb. 4.1 links). Ihre Frequenz ist ein ganzzahliges Vielfaches der Grundfrequenz f_V [32, 45]

$$f_V = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{mg}{n_F m_F l}}, \quad (4.22)$$

die von der Masse m_F und der Anzahl n_F der verwendeten Fasern abhängt. Die Verluste ϕ_V der Violinmoden entsprechen bis auf den Faktor n_F und einen Korrekturterm für die Violinmoden höherer Ordnung n den Verlusten der Pendelmode [22]

$$\phi_V = n_F \phi_0 \phi_P \left(1 + n^2 \pi^2 \frac{\phi_P}{\phi_0} \right). \quad (4.23)$$

Die effektive Masse der Violinmoden wird durch das Verhältnis von Spiegelmasse zu Fasermasse sowie von der Ordnung n der Violinmode bestimmt.

$$m_{\text{eff},V} = \frac{m^2}{m_F} \frac{n^2}{8} \quad n \in \mathbb{N} \quad (4.24)$$

Die spektrale Dichte lautet dann:

$$S_{x,V} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{4k_B T}{m_{\text{eff},V}} \frac{f_V^2 \phi_V}{f} \frac{1}{(f^2 - f_V^2)^2 + f_V^4 \phi_V^2} \quad (4.25)$$

4.1.4. Interne Schwingungen

Als interne Schwingungen des Spiegels werden die Festkörperschwingungen des Substrates bezeichnet. Die Form dieser Schwingungen hängt stark von dem *aspect ratio* a , d. h. dem Verhältnis von Dicke zu Radius ab. Spiegelsubstrate mit $a \ll 1$ werden Membranschwingungen ausführen, Spiegel mit $a \gg 1$ hingegen Longitudinalschwingungen eines Stabes. Für Spiegel mit einem $a \approx 1$ sind die Modenstrukturen komplizierter [27]. Die Frequenzen für die ersten Longitudinal- bzw. Biegeschwingungen können mit Hilfe der Schallgeschwindigkeit v_s näherungsweise als

$$\begin{aligned} f_{\text{Long}} &= \frac{1}{4} \frac{v_s}{R} \\ f_{\text{Bieg}} &= \frac{1}{5} \frac{v_s}{R} \end{aligned} \quad (4.26)$$

4. Das thermische Rauschen eines idealen Pendels

angegeben werden. Prinzipiell lassen sich bei bekannter Geometrie des Spiegelsubstrates alle Frequenzen und Formen der Schwingungsmoden berechnen. In der Praxis erweist sich dies jedoch nicht als notwendig. Gillespie und Raab [20] haben gezeigt, daß nur solche Moden zum Rauschen der Resonatorlänge beitragen, deren Raumwellenlänge der Oberflächenstruktur größer als der Strahldurchmesser des Lasers ist. Dies kann so verstanden werden, daß der Laser über Strukturen kleinerer Raumwellenlänge mittelt und die Oberflächenstruktur somit nicht zum Rauschen beiträgt. Für die beitragenden Moden ist es sinnvoll, ähnlich den Violinmoden eine effektive Masse zu definieren, die ein Maß für den Beitrag jeder Mode mit Frequenz f_n und Verlust ϕ_n zum Rauschen darstellt.

$$S_x^{\text{int}} = \frac{k_B T}{\pi^2 f} \sum_n^N \frac{f_n^2 \phi_n}{m_{\text{eff}}} \frac{1}{(f^2 - f_n^2)^2 + f_n^4 \phi_n} \quad (4.27)$$

In dem Frequenzbereich von Interesse ist $f \ll f_n$ so daß sich Gleichung (4.27) zu

$$S_x^{\text{int}} = \frac{k_B T}{\pi^2 f} \sum_n^N \frac{\phi_n}{f_n^2} \quad (4.28)$$

$$\approx \frac{k_B T \alpha_s \phi_0}{\pi^2 f} \sum_n^N \frac{1}{f_n^2} \quad (4.29)$$

vereinfacht. Obwohl im allgemeinen nicht davon ausgegangen werden kann, daß die Verluste ϕ_n für alle internen Moden gleich sind, so kann doch mit Hilfe eines Sicherheitsfaktors α_s der im Bereich 1—10 liegt, Gleichung (4.29) erreicht werden.

4.2. Dämpfungsmechanismen

4.2.1. Gasdämpfung

Die Vorhersage der Güten bzw. der Verluste der einzelnen Pendelmoden mit Hilfe der Materialgüten gilt nur für den Fall, daß keine weiteren Dämpfungsverluste vorhanden sind. Liegt molekulare Strömung vor, so läßt sich die Gasdämpfung einfach berechnen. Die dämpfende Kraft wird von den Gasteilchen aufgebracht, die ihren Impuls am Spiegel umkehren, so daß sie folgenden Wert annimmt:

$$F_{\text{damp}} = 3pA \sqrt{\frac{2m_{\text{mol}}}{\pi k_B T}} \dot{x} \quad (4.30)$$

Da die Kraft geschwindigkeitsabhängig ist, hängen die Verlust $\phi_{\text{Gas}}(\omega)$ von der Frequenz ω ab.

$$\phi_{\text{viskos}}(\omega) = \frac{4\pi p A f}{m f_0^2} \sqrt{\frac{2m_{\text{mol}}}{\pi k_B T}} \quad (4.31)$$

Liegt keine molekulare Strömung mehr vor ($pd > 10^{-2}$ mbar cm) [55], so sind die von Gleichung (4.31) für die Verluste vorhergesagten Werte in der Regel deutlich zu groß.

4.2.2. Thermoelastische Dämpfung

Unter thermoelastischer Dämpfung versteht man das Umsetzen von Schwingungsenergie in Wärme durch Verformung des Materials. Durch Wärmeleitung werden die Temperaturunterschiede zwischen komprimierten und gestreckten Zonen des Materials zum thermischen Gleichgewicht streben, so daß der Schwingung Energie entzogen wird. Für die Violinmoden findet man [32]

$$\phi_{\text{thermo}}(\omega) = \frac{2 \kappa T \alpha_T^2 E_m}{9 r^2 C_p^2} \frac{\omega}{\omega_0^2} \quad (4.32)$$

wobei κ die Wärmeleitfähigkeit des Materials ist, α_T der thermische Ausdehnungskoeffizient und C_p die volumenspezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck. Bei der thermoelastischen Dämpfung handelt es sich um eine viskose Dämpfung.

4. *Das thermische Rauschen eines idealen Pendels*

5. Simulation und Konzeption des Experimentes

Bei der Konzeption dieses Experimentes mußte zunächst einmal ermittelt werden, welche Parameter des Experimentes für den Nachweis des Strahlungsdruckrauschens geeignet sind.

Um die Abhängigkeit des Experimentes von den wesentlichen Parametern zu studieren, wurde auf Grundlage der in Abschnitt 4 und Abschnitt 2.2.1 gezeigten Beziehungen eine Simulation entwickelt, die es erlaubt, die Auswirkung verschiedener Parameter zu testen. Gegenstand der Simulation ist ein FABRY-PEROT-Interferometer, das aus zwei Spiegeln besteht, welche jeweils an Quarzfasern aufgehängt sind. Durch die Aufhängung ist zum einen gewährleistet, daß die Spiegel soweit wie möglich frei beweglich sind, um der Anregung durch den Strahlungsdruck folgen zu können, zum anderen dient die Aufhängung der, später zu diskutierenden, seismischen Isolation.

Der Einsatz eines FABRY-PEROT-Interferometers als Kernstück des Experimentes wird durch dessen Leistungsüberhöhung und dessen Empfindlichkeit gegenüber Längenänderungen nahegelegt.

Wie in den Abbildungen 5.1 und 5.2 ersichtlich, steigt sowohl die spektrale Dichte der Längenänderung als auch der Kontrast des Strahlungsdruckrauschens gegenüber den anderen Rauschquellen, d. h. im wesentlichen das thermische Rauschen des Pendels sowie der Violinmoden deutlich an. Der Kontrast $K(s_0, s_g)$ eines Signals s_0 bezüglich des quadratisch aufsummierten Gesamtsignals

$$s_g = \sqrt{\sum_{i \neq 0} s_i^2}, \quad (5.1)$$

d. h. die Summe der Quadrate aller anderen Signale ist hier definiert als

$$K(s_0, s_g) = \frac{s_0}{s_g + s_0}. \quad (5.2)$$

Der Kontrast beschreibt hier also den Anteil des entsprechenden Rauschens am Gesamttrauschens.

Da das Strahlungsdruckrauschen proportional zur Leistung an den Spiegeln ist (Gleichung (2.72)), war diese Verhalten zu erwarten. Eine weitere Möglichkeit zur Erhöhung des Strahlungsdruckrauschens ist die Verringerung der Spiegelmasse. Dabei gibt es allerdings mehrere Einschränkungen zu bedenken.

Bei Verringerung der Spiegelmasse ohne gleichzeitige Verringerung des Faserdurchmessers wird die Frequenz der Violinmoden stark herabgesetzt. Dies hat zur Folge, daß

5. Simulation und Konzeption des Experimentes

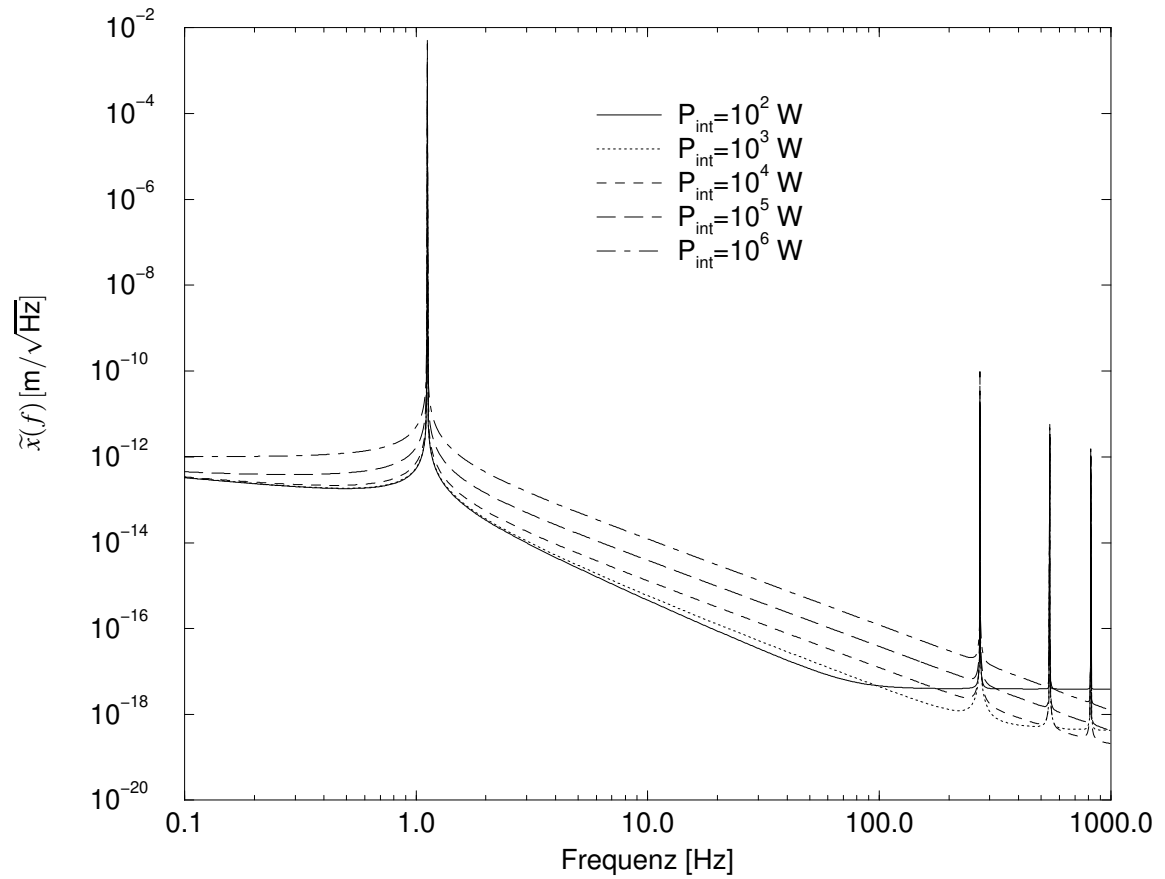


Abbildung 5.1.: Spektren für verschiedene interne Leistungen des FABRY-PEROT-Interferometers. Aufgetragen ist die lineare spektrale Dichte der Längenänderung. Bei 1.1 Hz ist die Resonanz des Pendels zu erkennen, bei 272 Hz und Vielfachen befinden sich die Resonanzfrequenzen der Violinmoden

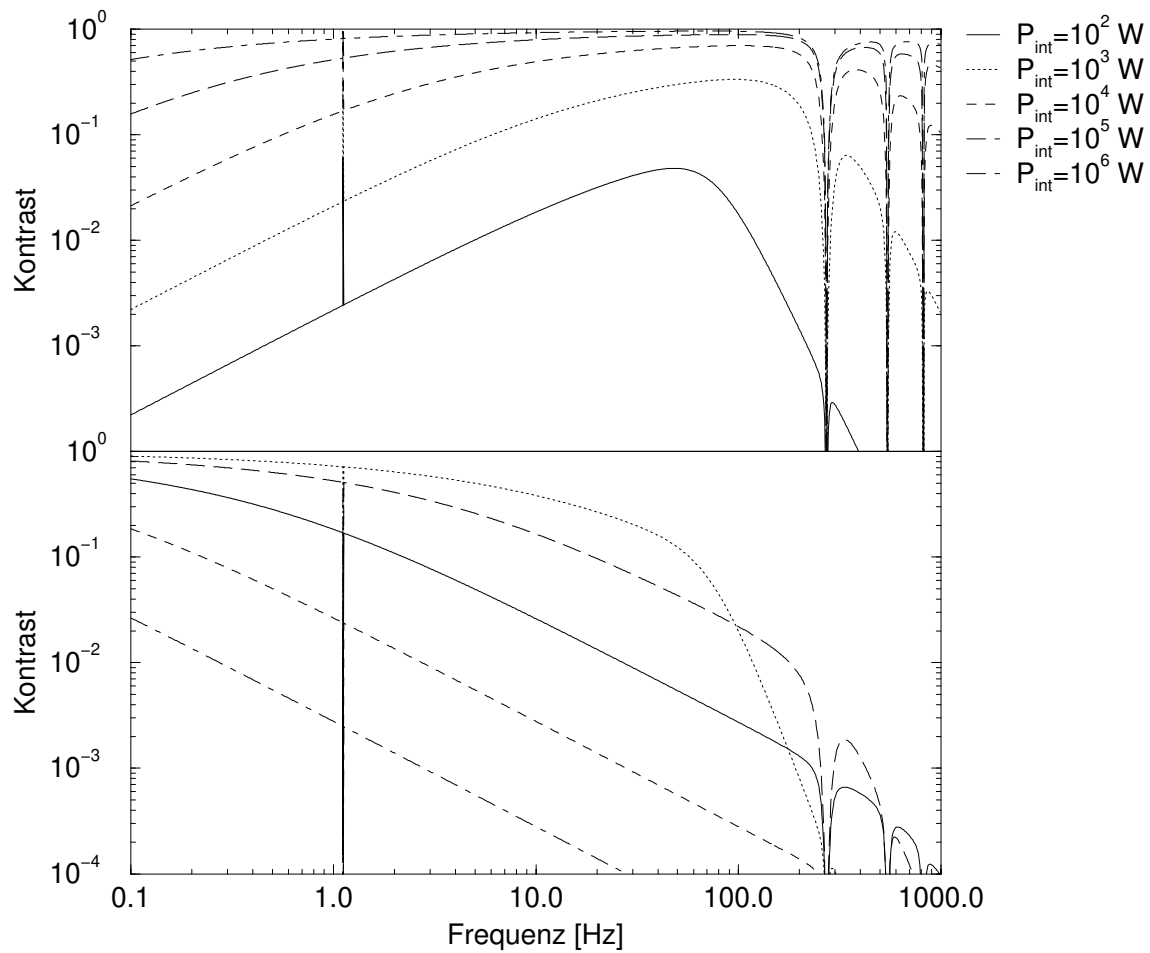


Abbildung 5.2.: Kontrast für das Strahlungsdruckrauschen (oben) und das thermische Rauschen thermische Rauschen (unten) für verschiedene interne Leistungen des FABRY-PEROT-Interferometers. Die Masse des verwendeten Spiegels beträgt 210 mg, der Durchmesser der Faser $10\ \mu\text{m}$. Zur Definition des Kontrastes siehe Text.

5. Simulation und Konzeption des Experimentes

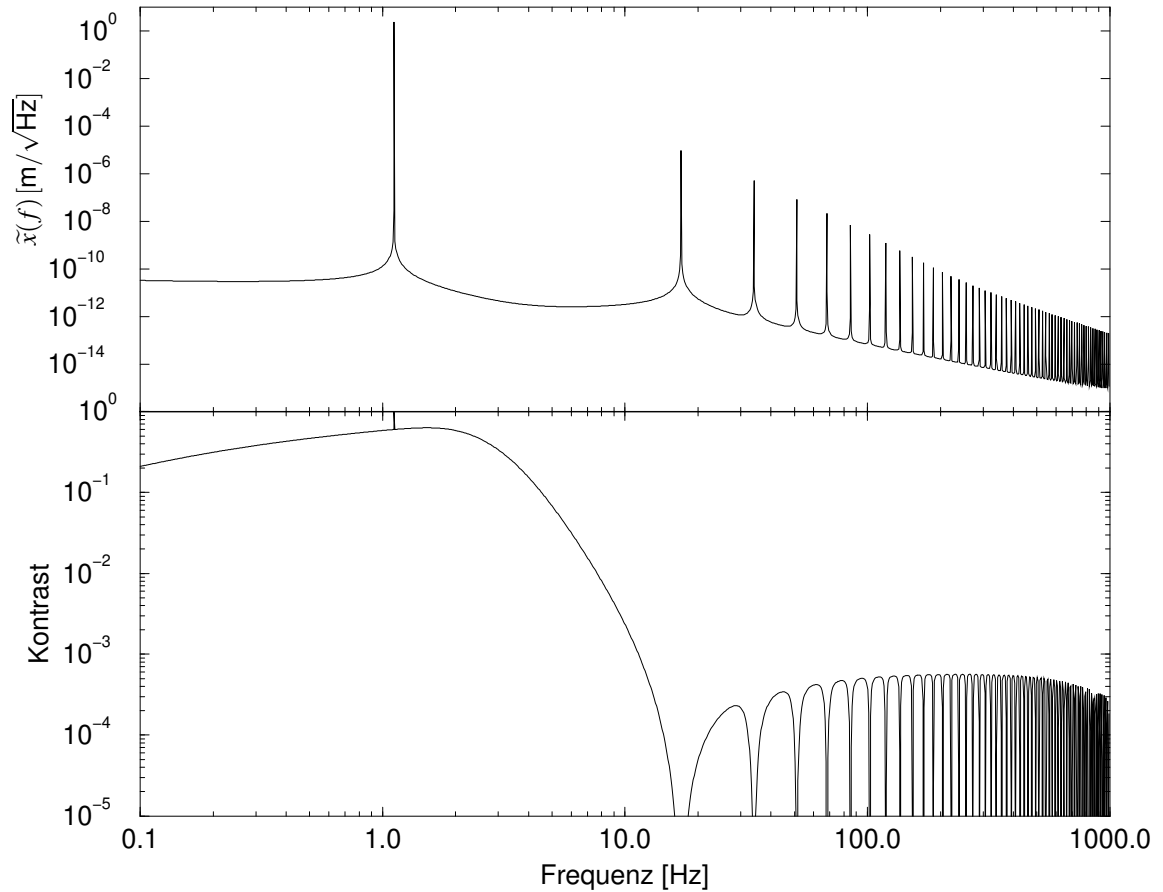


Abbildung 5.3.: Spektren (oben) und Kontrast (unten) für eine interne Leistung von 10 kW und einer Spiegelmasse von 0.8 mg. Deutlich zu erkennen sind die niederfrequenten Violinmoden bei 17 Hz und Vielfachen sowie die dadurch resultierende Unterdrückung des Signalkontrastes für das Strahlungsdruckrauschen. Der Faserdurchmesser ist 10 μm

der Anteil des Strahlungsrauschen am Gesamtrauschen stark verringert wird, da im Frequenzbereich oberhalb der ersten Violinresonanz das Spektrum nahezu vollständig durch das thermische Rauschen der Violinmoden bestimmt ist.

Eine Möglichkeit, niederfrequente Violinmoden zu verhindern, wäre es, dünnere Fasern einzusetzen. Ein Faserdurchmesser von $10\ \mu\text{m}$, wie für diese Simulation angenommen, ist jedoch bereits an der Grenze des technologisch beherrschbaren, wenn man bedenkt, daß die Spiegel noch monolithisch mit diesen Fasern verbunden werden müssen.

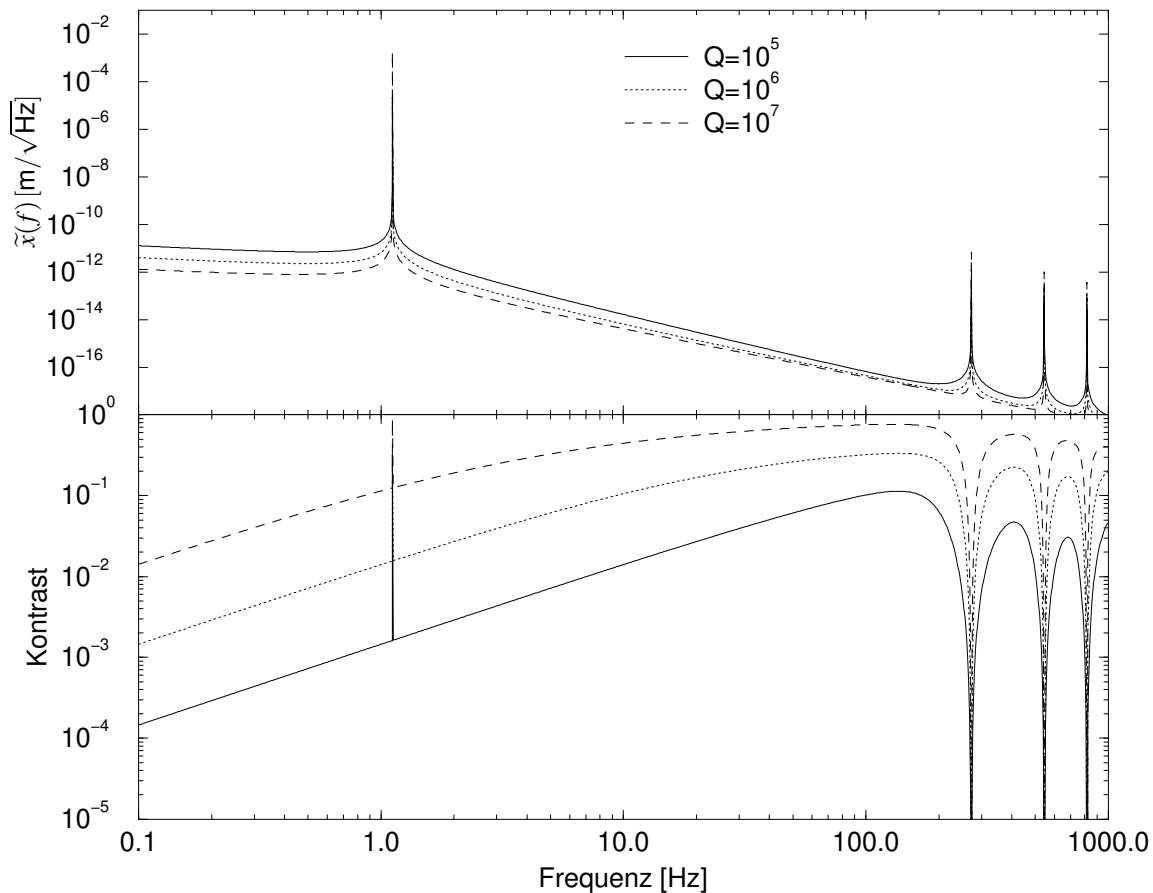


Abbildung 5.4.: Variation der mechanischen Güte für die Annahme struktureller Dämpfung. Aufgetragen ist in der oberen Grafik die lineare spektrale Dichte der Längenänderung, in der unteren Grafik der Kontrast. Angenommen wird eine Spiegelmasse von 210 mg und ein Faserdurchmesser von $10\ \mu\text{m}$.

Ein weiteres Argument, welches gegen den Einsatz leichter, und damit kleinerer Spiegel spricht, ist, daß die Pendelgüte stark abnimmt, da die in der Pendelbewegung gespeicherte Energie von der Masse des Pendelkörpers abhängt, so ist, ausgehend von der Materialgüte von $Q_{\text{int}} = 10^5$ die theoretisch erreichbare Güte eines Pendels mit der Masse von 210 mg bei $Q = 1.1 \cdot 10^8$, während sie für eine Masse von 0.8 mg nur noch $Q = 9.1 \cdot 10^6$

5. Simulation und Konzeption des Experimentes

beträgt.

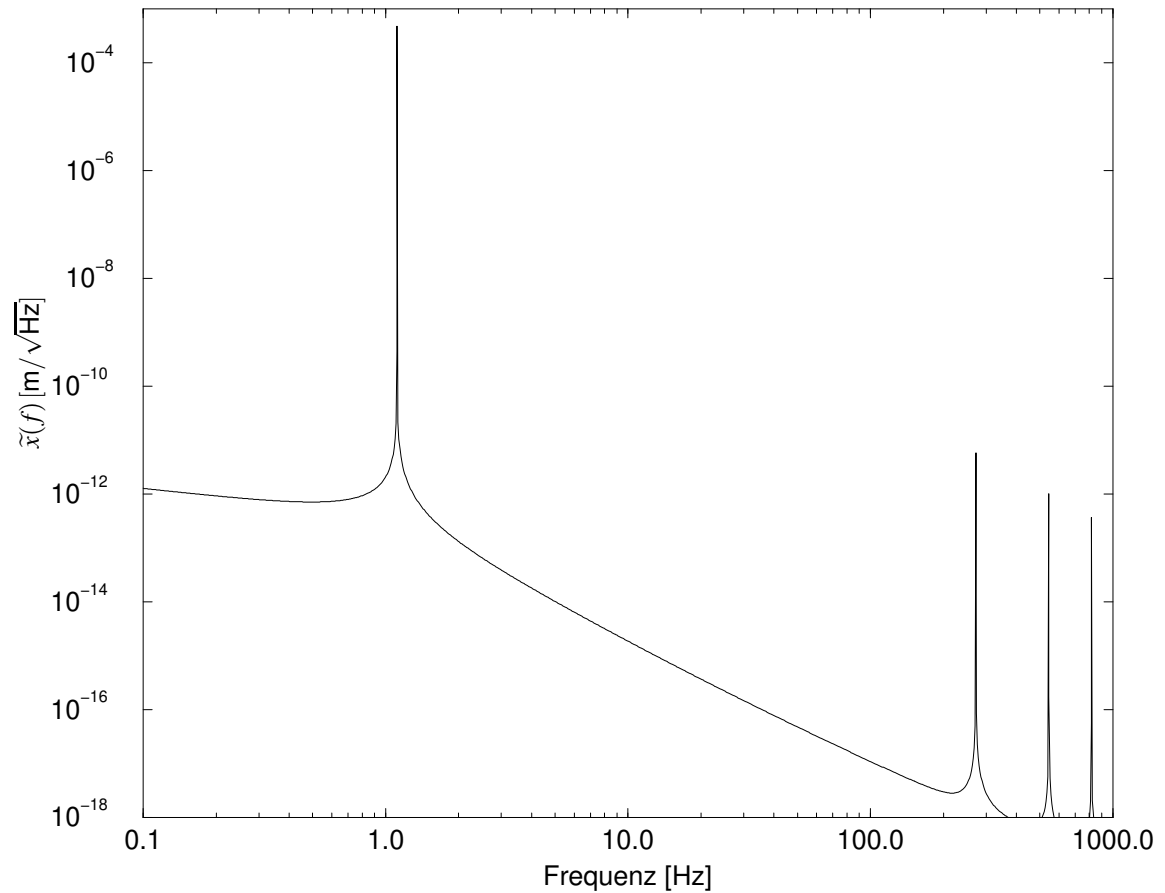


Abbildung 5.5.: Simulierte Spektren für die Parameter aus Tabelle 5.1. Aufgetragen ist die lineare spektrale Dichte der Längenänderung des Resonators gegen die Frequenz.

Die Ergebnisse der Simulation ergaben einen für das Experiment optimalen Parametersatz (Tabelle 5.1), für den die Spektren in Abbildung 5.5 und der Kontrast in Abbildung 5.6 gezeigt sind. Die Parameter sind optimal nur in dem Sinne, als daß sie einen Kompromiß zwischen angestrebten Ergebnis und technischen Möglichkeiten darstellen. So ist z. B. eine möglichst hohe Lichtleistung wünschenswert. Da jedoch weder die Leistung des Lasers noch die Finesse des Resonators beliebig zu steigern sind, wurde sich in diesem Falle auf eine Finesse von 10^5 und eine Eingangsleistung von 0.2 W beschränkt.

Ähnlich verhält es sich mit dem Durchmesser der Fasern und der Masse des Spiegels. Auch hier wurden gerade noch handhabbare Faserdurchmesser und Spiegelmassen gewählt, obwohl das Experiment in seiner Empfindlichkeit gegenüber dem Strahlungsdruckrauschen durch die Wahl sehr viel kleinerer Massen und dünnerer Fasern gesteigert werden könnte.

Für diese Simulationen wurde stets angenommen, daß Gasdämpfung keine Rolle spielt,

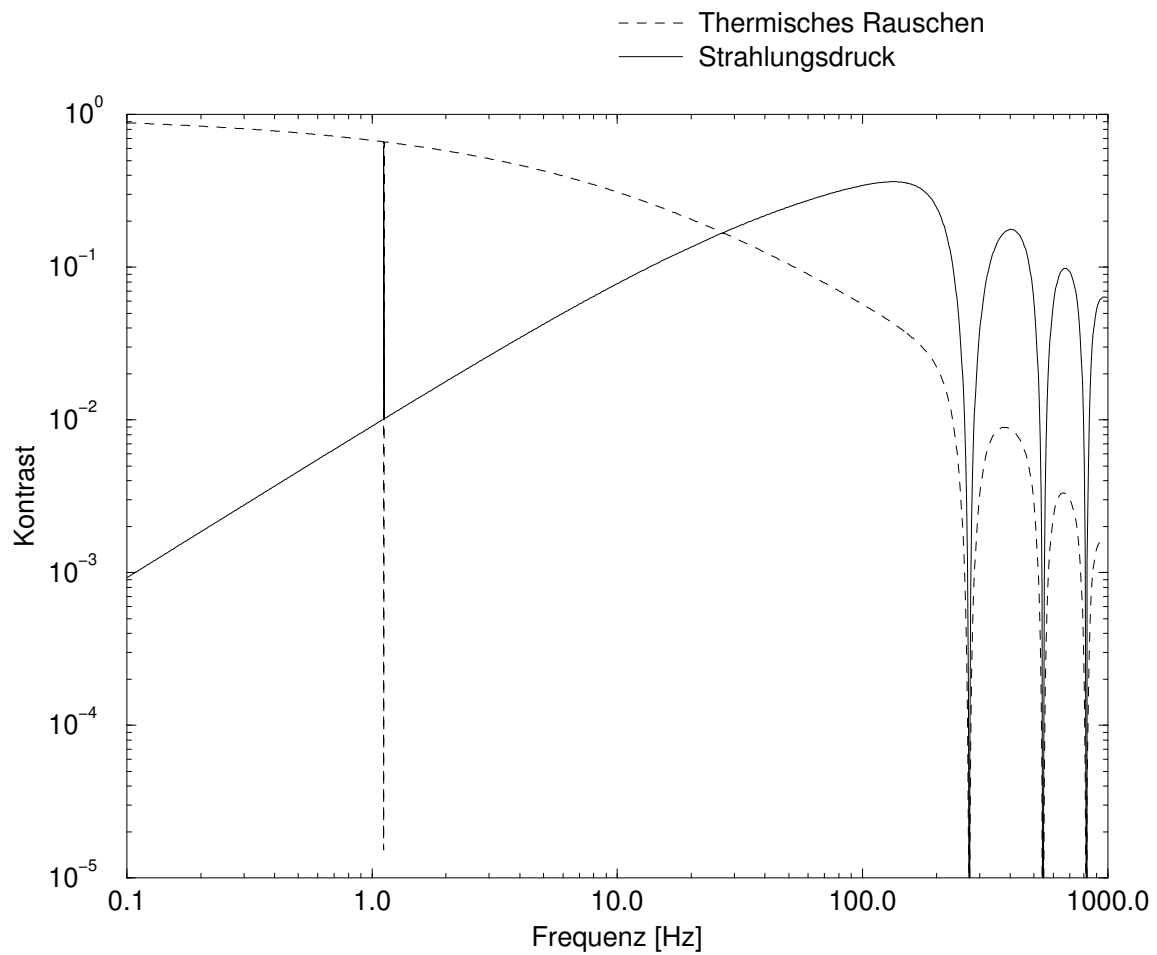


Abbildung 5.6.: Kontrast für das thermische Rauschen des Pendels und den Strahlungsdruck unter Vernachlässigung der seismischen Störungen. Zugrundegelegt wurden die Parameter aus Tabelle 5.1. Zur Definition des Kontrastes siehe Text

5. Simulation und Konzeption des Experimentes

was bei einem angenommenen Restgasdruck von 10^{-8} mbar der Fall ist. Bei einer Pendellänge von 20 cm ergibt sich eine Pendelfrequenz von 1.1 Hz. Im Frequenzbereich ab 270 Hz werden die Violinmoden der Aufhängung sichtbar. Da die Frequenzen der Violinmoden des großen Spiegels (Spiegel I) deutlich oberhalb 1 kHz liegen, werden sie in dem gewählten Frequenzausschnitt nicht sichtbar. Der Beitrag der Rotations- bzw. Kippmode wurde durch die Wahl der Parameter $d_t = 0$ und $d_r = 0$ unterdrückt. Der zweite, ebenfalls aufgehängte Spiegel kann in seiner Masse deutlich größer gewählt werden, so daß er keinen nennenswerten Beitrag zu den Spektren liefert.

Für die optimalen Parameter ergibt sich die Möglichkeit, thermisches Rauschen des Pendels unterhalb 20 Hz sowie Strahlungsdruckrauschen oberhalb dieser Frequenz bis zu etwa 200 Hz, dem Einsetzen der Violinmoden, zu beobachten. Allerdings erfordert letzteres Empfindlichkeiten des gesamten Experimentes von 10^{-18} m/ $\sqrt{\text{Hz}}$, ersteres eine sehr gute Entkopplung von seismischen Störungen, die in diesem Frequenzbereich noch ungefähr 10^{-8} m/ $\sqrt{\text{Hz}}$ betragen, so daß um wenigstens den Faktor 10^7 unterdrückt werden müssen, um bei einer anzustrebenden Empfindlichkeit von 10^{-15} m/ $\sqrt{\text{Hz}}$ nicht die dominierende Rauschquelle darzustellen.

Auf der Resonanz des Pendels bei 1.1 Hz ist das Experiment bei diesen Parametern nahezu vollständig durch Strahlungsdruck dominiert, so daß auf der Resonanz eine Messung des Strahlungsdruckrauschens möglich wäre. Allerdings ist aufgrund der hohen Güten die Resonanz sehr schmal, so daß sich eine solche Messung nur über einen sehr geringen Frequenzbereich erstrecken würde.

Parameter	Wert
Finesse des Resonators	10^5
Faserdurchmesser	10 μm
Druck	10^{-8} mbar
Pendellänge	20 cm
Spiegelmasse	210 mg
eingekoppelte Leistung	0.2 W
interne Leistung	6 kW

Tabelle 5.1.: Optimaler Parametersatz für die Simulation des Experimentes

Die in Tabelle 5.2 aufgeführten errechneten Werte für die Frequenzen und Güten lassen erkennen, daß die Güten für die gewählten Parameter sehr hoch werden. Dies liegt daran, daß unter Vernachlässigung aller externen Verluste wie z. B. der Gasdämpfung nur noch die internen Verluste des Materials berücksichtigt werden. Bei Abklingzeiten der Schwingungen, die, wie hier für die Pendelmode der Fall, in der Größenordnung von 10 Jahren liegt, spielen aber Dämpfungsmechanismen eine Rolle, die in der Simulation nicht berücksichtigt sind. Daher liegen die tatsächlich erreichbaren mechanischen Güten in der Regel niedriger. So wurden bisher Güten im Bereich 10^7 erreicht [52], unter speziellen Bedingungen auch 10^8 [5–7]. Güten die deutlich größer sind als 10^8 sind bisher nicht beobachtet, entziehen sich auch aufgrund der sehr großen Abklingzeiten dem experimentellen Zugang.

	Spiegel I	Spiegel II
Güte Pendelmode	$1.1 \cdot 10^9$	$1.5 \cdot 10^8$
Güte Violinmode	$5.6 \cdot 10^8$	$7.6 \cdot 10^7$
Frequenz der niedrigsten Violinmode	1142 Hz	272 Hz
Frequenz der Kippmode	15.8 Hz	31.6 Hz
Frequenz der Rotation	—	33 mHz

Tabelle 5.2.: Errechnete Parameter für Spiegel I und Spiegel II im optimalen Fall verschwindender Gasdämpfung

5. *Simulation und Konzeption des Experimentes*

6. Experimenteller Aufbau

6.1. Experimentelle Realisierung

6.2. Laser

Für das Experiment wurde ein im LASER ZENTRUM HANNOVER entwickelter diodengepumpter monolithischer Nd:YAG Ringlaser verwendet. Dieser zeichnet sich durch seine relativ hohe Intensitäts- und Frequenzstabilität [19, 31], sowie durch seine kompakte Bauweise, hohe Effizienz und Zuverlässigkeit aus. Die Wellenlänge des Lasers beträgt 1064 nm, die Ausgangsleistung von 850 mW.

Trotz der Linienbreiten von 1 . . . 5 kHz für den freilaufenden Laser für Fourierfrequenzen $\omega \gtrsim 1$ kHz ist es aufgrund der Frequenzdrift des Lasers notwendig, diesen zu stabilisieren, wenn die Stabilität im niedrigen Frequenzbereich gefordert wird. Dies geschieht in der Regel durch das Stabilisieren des Lasers auf einen Referenzresonator mittels eines elektronischen Regelkreises (Abschnitt 6.3).

6.2.1. Verstimmbarkeit

Der Laser läßt sich mit Hilfe der Temperatur des Laserkristalles um etwa 3 GHz pro Kelvin in der Frequenz verstimmen, die Bandbreite dieses Stellelementes ist allerdings nur wenige Hertz. Zudem ergibt sich bei einer Verstimmung mit Hilfe der Temperatur das Problem, daß der Laser dann zu Modensprüngen neigt, d. h. daß sich die Frequenz nicht mehr linear mit der Temperatur verstimmen läßt.

Als schnelleres Stellelement dient ein auf dem Laserkristall angebrachtes piezokeramisches Element. Die in einer Regelschleife zu erreichende Bandbreite wird durch das Auftreten von mechanischen Resonanzen des Laserkristalles und der Piezokeramik bei etwa 200 kHz begrenzt. Die maximal zulässige Ansteuerspannung für die Piezokeramik beträgt 400 V, so daß bei einem Koeffizienten von 2.1 MHz/V mit Hilfe der Piezokeramik eine Verstimmung von etwa 0.8 GHz erreicht werden kann.

6.2.2. Intensitätsstabilität

Die Intensitätsstabilität des Lasers wird im wesentlichen durch die Stabilität der Pumpquelle sowie durch die Relaxationsoszillationen bestimmt. Da in diesem Experiment nicht so sehr

6. Experimenteller Aufbau

die Stabilität der Ausgangsintensität an sich, sondern vielmehr die Stabilität der Lichtintensität, die unmittelbar vor dem aufgehängten Resonator auftrat, von Interesse war, muß das Intensitätsrauschen nach der Faserstrecke beurteilt werden. Dort zeigte sich daß der Laser im Frequenzbereich bis zu 1 kHz ein ausgeprägtes f^{-1} Rauschen (Abb. 6.1) mit einigen zusätzlichen Störungen bei der Netzfrequenz und ihren Vielfachen sowie bei 75 Hz und 220 Hz zeigt. Letztere sind vermutlich auf mechanische Resonanzen in der Einkoppelstrecke der Faser zurückzuführen.

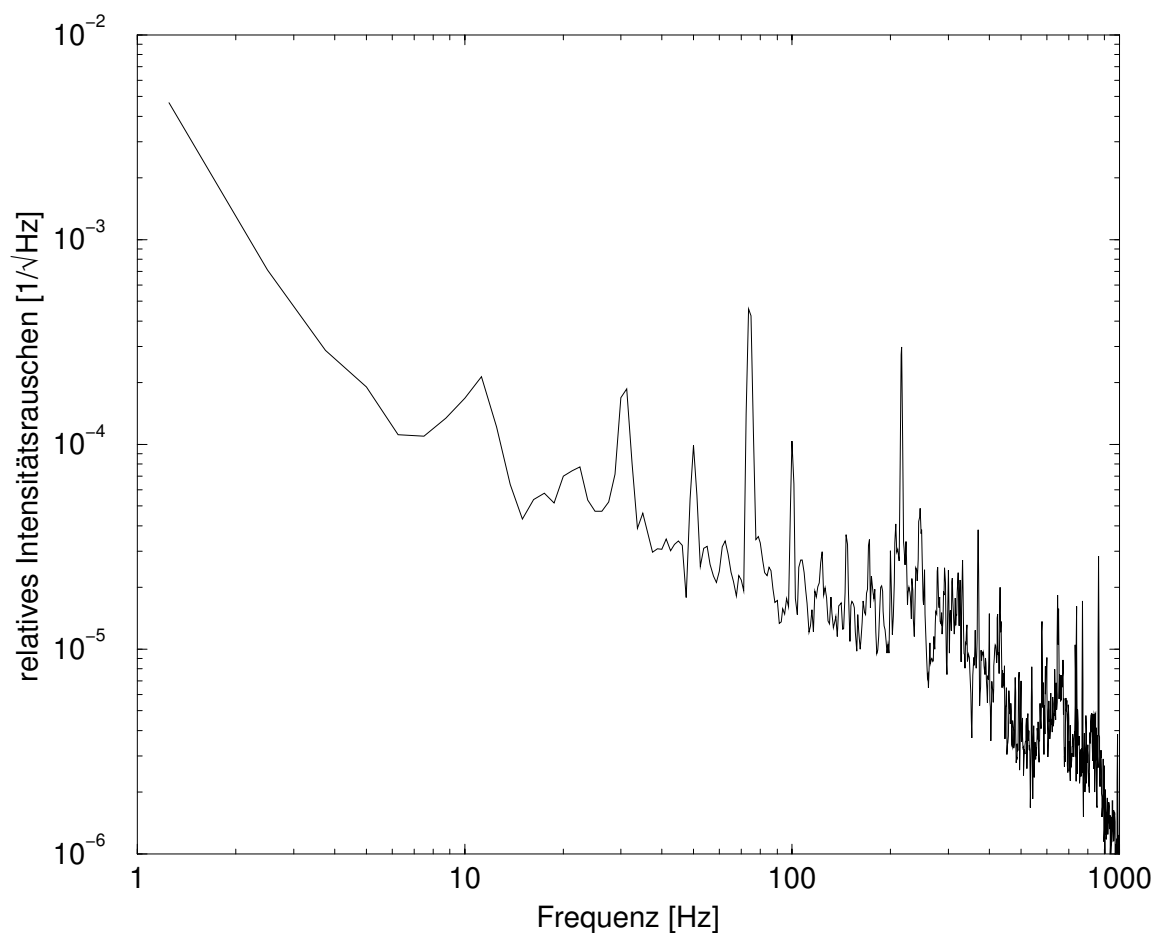


Abbildung 6.1.: Relatives Intensitätsrauschen des Lichts nach der Faser bis 1 kHz.

6.3. Vorstabilisierung

Da der Laser aufgrund thermischer Effekte eine Frequenzdrift aufweist, die trotz einer aktiven Temperaturstabilisierung des Laserkristalls nicht vollständig zu unterdrücken ist, erweist es sich für den niederfrequenten Bereich als notwendig, die Laserfrequenz mit Hilfe

eines Referenzresonators zu stabilisieren, um die konzipierte Empfindlichkeit des Versuchs zu erreichen. Dies ermöglicht es, die Längenänderung des aufgehängten Resonators relativ zu dem Referenzresonator zu messen. Dies ist vor allem für Messungen von Bedeutung, deren Empfindlichkeit über die durch das Rauschen des freilaufenden Lasers vorgegebene Begrenzung hinausgehen.

Für die Stabilisierung wird das POUND-DREVER-HALL-Verfahren verwendet. Dazu wird mittels eines Polarisationsstrahlteilers ein kleiner Anteil des Lichts (~ 1 mW) aus dem Strahlengang ausgekoppelt, auf das dann mit Hilfe eines elektrooptischen Modulators Phasenmodulationsseitenbänder bei 9.665 MHz aufgeprägt werden (siehe auch Anhang B).

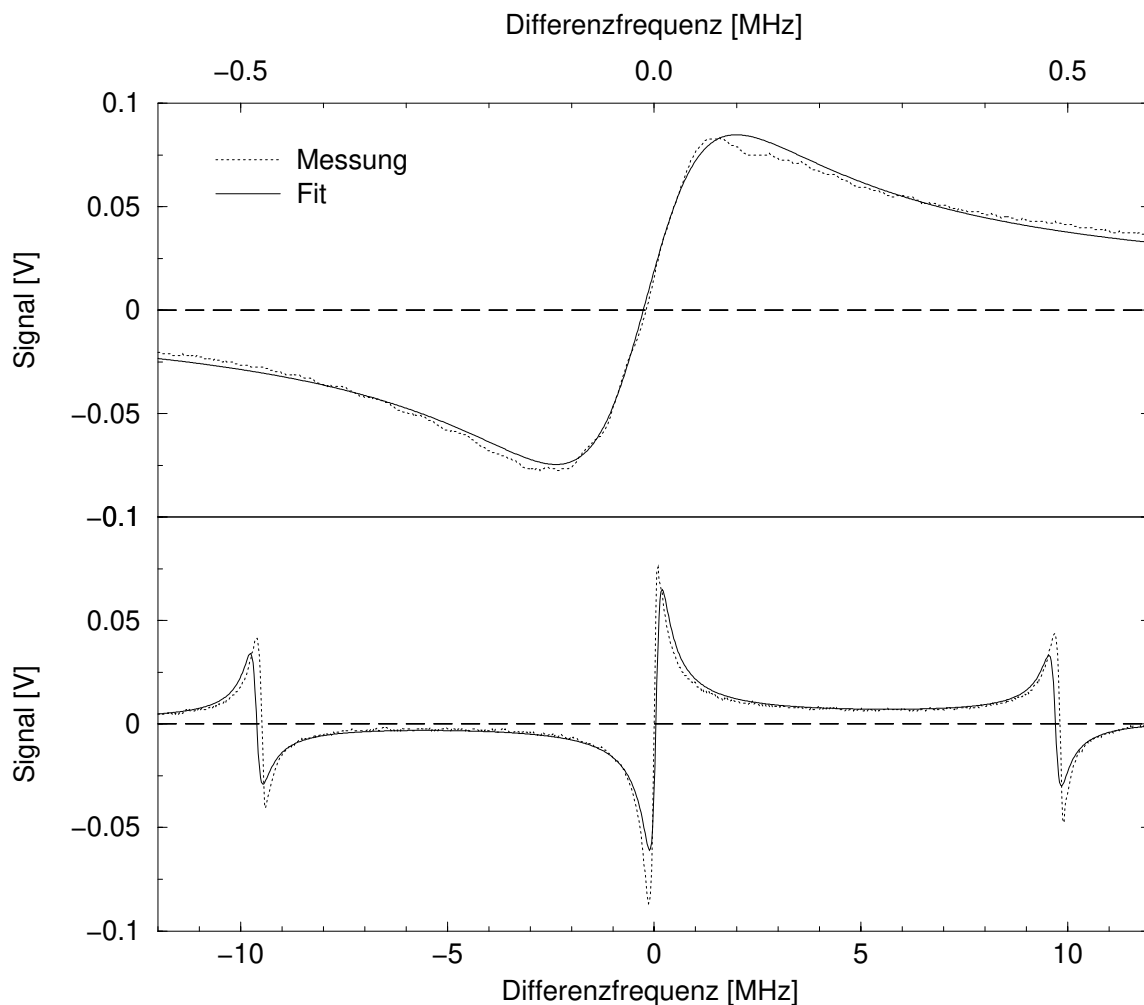


Abbildung 6.2.: Dispersionssignal des Vorstabilisierungsresonators. Der Seitenbandabstand beträgt 9.665 MHz (untere Grafik), die volle Linienbreite 218 kHz (obere Grafik).

Der Vorstabilisierungsresonator hat eine Linienbreite von 218kHz, entsprechend einer

6. Experimenteller Aufbau

Finesse von $\mathcal{F} = 3275$ und besteht aus zwei Spiegeln, die auf einen Abstandhalter aus Zerodur[®] der Länge 21 cm entsprechend einem freien Spektralbereich von 714 MHz, aufgepreßt sind. Der Abstandhalter hat einen Durchmesser von 12 cm und befindet sich zur Verringerung von akustischen und thermischen Störungen in einer Vakuumkammer mit einem Druck von $p \approx 10^{-6}$ mbar. Zusätzlich ist der Abstandhalter zur Verringerung der seismischen Störungen an zwei Drahtschlaufen aufgehängt (Abb. 6.3).

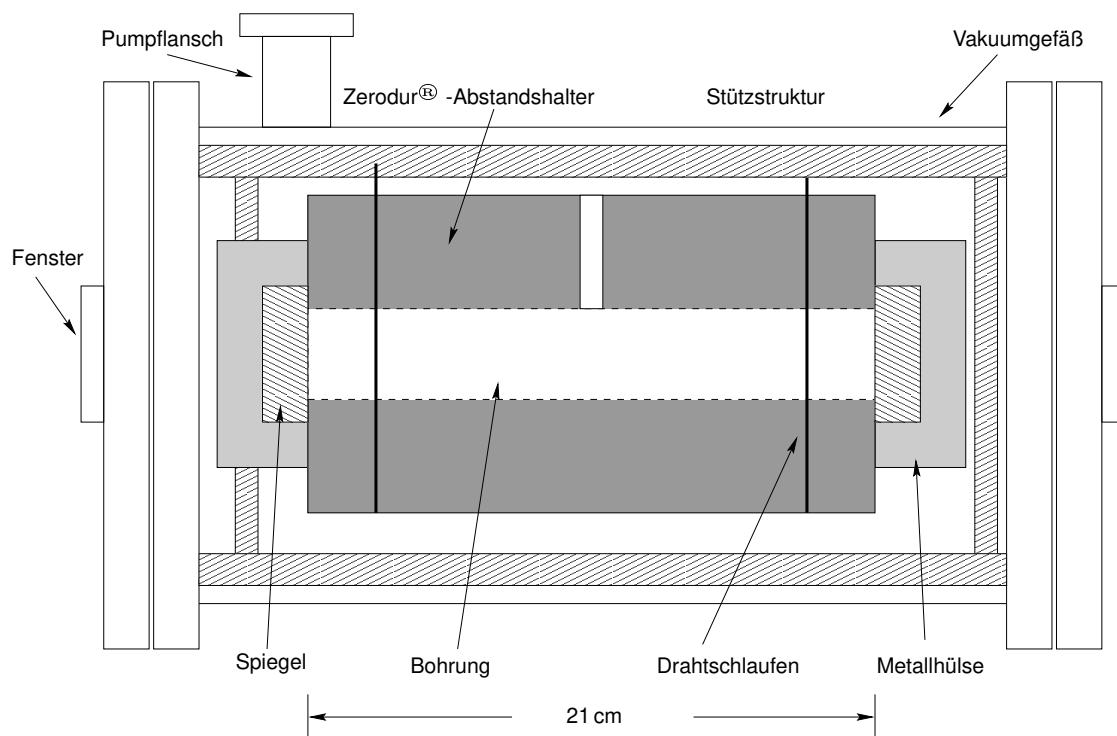


Abbildung 6.3.: Skizze des Vorstabilisierungsresonators mit Vakuumgefäß.

Mit einer einfachen elektronischen Regelung ist es möglich den Laser über lange Zeiten auf einer Resonanzfrequenz des Resonators zu halten. Das Frequenzrauschen des freilaufenden Lasers hat in einem weiten Frequenzbereich einen f^{-1} Verlauf [1], und beträgt bei 100 Hz in etwa $100 \frac{\text{Hz}}{\sqrt{\text{Hz}}}$ (Abb. 6.4). Durch den Einsatz der Regelung ist es möglich das Frequenzrauschen des Lasers auf etwa $10 \frac{\text{Hz}}{\sqrt{\text{Hz}}}$ zu verringern. Begrenzt wurde die Laserstabilisierung durch das elektronische Rauschen des Detektors.

6.4. Intensitätsstabilisierung

Die Intensitätsstabilisierung des Lasers dient in diesem Experiment zum einen dazu, das technische Rauschen des Lasers zu verringern, zum anderen aber auch um die Intensitätsschwankungen, die durch die frequenzabhängige Transmission der Faser dem Licht aufgeprägt werden, sowie die Effekte möglicher mechanischer Resonanzen von Faserkoppler und Einkoppeloptik zu zu vermindern.

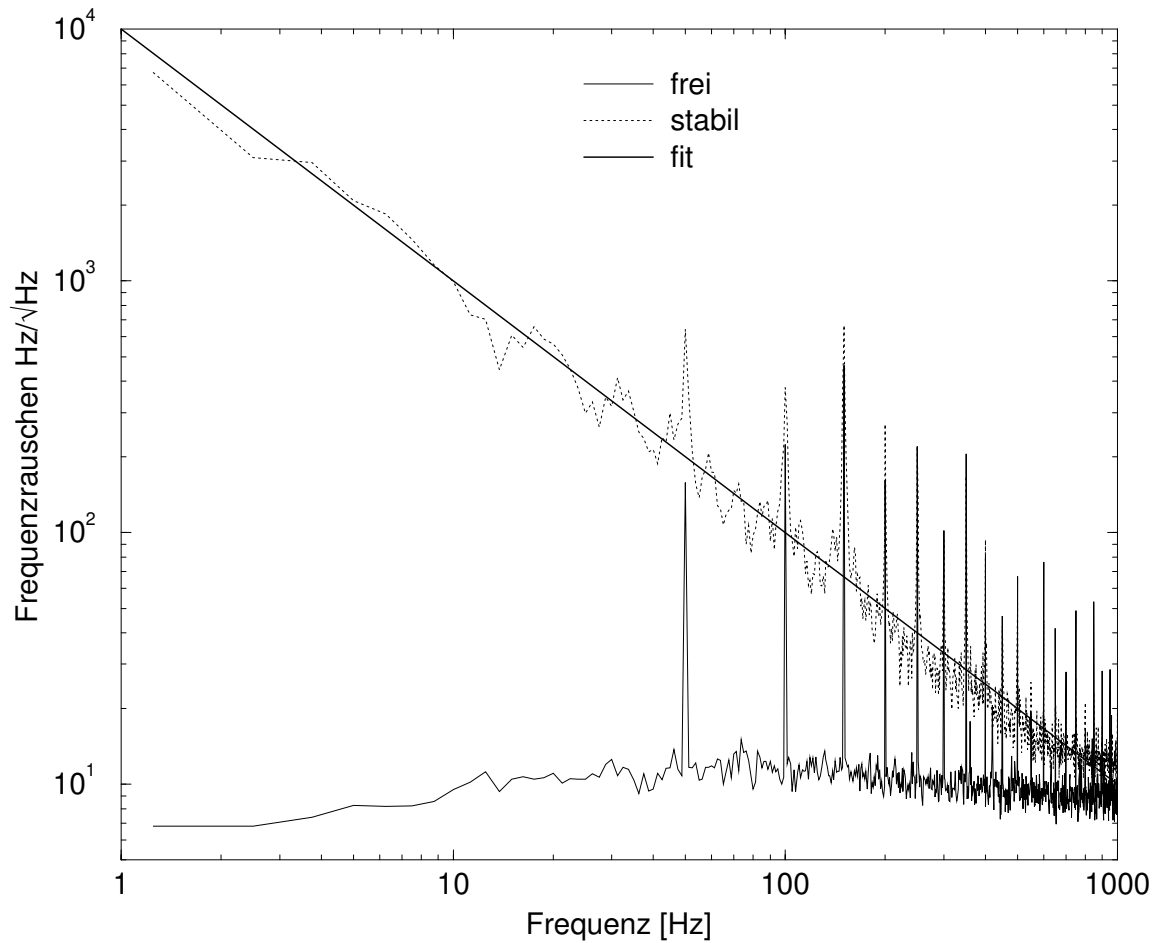


Abbildung 6.4.: Frequenzrauschen des freilaufenden und des stabilisierten Lasers. Mit eingezeichnet ist ein $1/f$ -Verlauf. Die scharfen Resonanzen bei 50 Hz und Vielfachen sind ein Artefakt der Datenaufnahme.

6. Experimenteller Aufbau

Zu diesem Zwecke wird hinter der Faser ein kleiner Teil des Lichtes (~ 1 mW) auf eine Photodiode gegeben. Eine einfache Regelschleife steuert dann die Amplitude der Treiberfrequenz des akustooptischen Modulators, so daß entsprechend dem Regelsignal mehr oder weniger Licht aus der nullten Ordnung herausgebeugt wird. Um die Einflüsse des akustooptischen Modulators in Bezug auf die Verzerrung des Strahlprofils oder Strahlversatz zu minimieren, befindet sich dieser vor der Faser, so daß die modenreinigende Wirkung der Faser voll zum Tragen kommt. Mit Hilfe des akustooptischen Modulators ist es auch möglich, gezielte Intensitätsmodulationen auf das Licht aufzuprägen, um so eventuelle Intensitätsabhängigkeiten der Messungen zu betrachten.

6.5. Seismische Isolation

Die Seismik, also die Bewegung der Erdoberfläche, ist im Frequenzbereich unter 100 Hz die Hauptquelle für das Rauschen im Interferometer. Hauptgrund dafür sind horizontale Bewegungen des Untergrundes, die sich auf die Aufhängepunkte der Spiegel fortpflanzen. Bei den so aufgeprägten Störungen wird es sich zunächst um einen *common mode* Effekt handeln, da die obersten Aufhängepunkte fest miteinander verbunden sind und ihren relativen Abstand nicht ändern können. Bedingt durch Kopplungen zwischen den einzelnen Moden, sowie durch leicht verschiedene Resonanzfrequenzen baut sich aber schnell eine Relativbewegung der Spiegelmassen auf, deren Größenordnung der seismischen Bewegung nahekommt.

Eine gute Abschätzung der spektralen Dichte der durch die Seismik hervorgerufenen Horizontalbewegung ist durch folgenden empirisch gefundenen Zusammenhang gegeben:

$$S_x(f) = 10^{-7} \frac{\text{m}}{\sqrt{\text{Hz}}} \begin{cases} 1 & \text{für } f < 1 \text{ Hz} \\ \frac{1}{f^2} & \text{für } f \geq 1 \text{ Hz} \end{cases} \quad (6.1)$$

Damit ist im Frequenzbereich um $f = 100$ Hz die Empfindlichkeit des Interferometers ohne seismische Isolation auf etwa $10^{-11} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$ begrenzt. Tatsächlich zeigen die Messungen in Abbildung 6.6, daß die Horizontalbewegungen sogar noch etwas stärker ausfielen.

Vertikale Störungen durch die Seismik tragen geringer zum Rauschen bei, da diese nur über Kopplung zwischen horizontalen und vertikalen Schwingungsmoden zu einer Relativbewegung der Spiegelmassen führen kann.

Das Grundprinzip einer seismischen Isolation besteht nun darin, möglichst viel von der störenden seismischen Bewegung zu filtern, sei es aktiv oder passiv. Als passive Filter bieten sich hier harmonische Oszillatoren an, da diese aufgrund ihrer Transferfunktion (Gleichung (3.9)) Störungen oberhalb ihrer Resonanzfrequenz mit $1/f^2$ unterdrücken. Dies legt den Einsatz harmonischer Oszillatoren niedriger Resonanzfrequenz nahe. Ein Problem mit harmonischen Oszillatoren ist allerdings, daß sie in der Nähe ihrer Resonanzfrequenz, abhängig von ihrer Güte, sehr hohe Amplituden erreichen können. Diesem Problem kann auf zweierlei Art entgegengewirkt werden: Zum einen können Oszillatoren niedriger Güte verwendet werden, zum anderen können die Amplituden auf der Resonanz elektronisch gedämpft werden. Im vorliegenden Experiment wurden beide Konzepte verwirklicht. Oszil-

latoren sehr geringer Güte wurden als Vorisolatoren im sogenannten *Stack* verwendet, während das Doppelpendelsystem als Hauptisolator eine vergleichsweise hohe Güte aufweist. Dies wird im folgenden ausführlich diskutiert.

6.5.1. Der Stack

Der Stack dient in diesem Experiment sowohl als tragende Struktur für das Doppelpendel als auch als seismische Vorisolation. Der untere Teil des Stacks besteht daher aus drei 96.7 cm langen Aluminiumsäulen, in Abbildung 6.5 durch die schraffierten Bereiche markiert, die dazu dienen, eine ausreichende Höhe des Stacks zu gewährleisten. Auf den Aluminiumsäulen befinden sich jeweils zwei seismische Vorisolatoren, den oberen Teil des Stacks bildet die Abschlußplatte.

Bei der Konstruktion des Stacks muß ein Kompromiß zwischen der Leistungsfähigkeit des Stacks und seiner Stabilität gefunden werden. Eine hohe Isolationswirkung des Stacks bei einer gegebenen Frequenz f kann zum einen durch niedrige Resonanzfrequenzen f_i der Vorisolatoren und zum anderen durch die Kaskadierung möglichst vieler Vorisolatoren erreicht werden. Eine Resonanzfrequenz $f_i \ll f$ bedeutet, daß der entsprechende Vorisolator seismische Störungen bereits mit $(f_i/f)^2$ unterdrückt. Die Kaskadierung sorgt dafür, daß sich die Transferfunktionen der einzelnen Systeme multiplizieren, so daß n Vorisolatoren seismische Störungen bereits mit $(f_i/f)^{2n}$ unterdrücken.

Niedrige Resonanzfrequenzen können durch durch Gummilagen hoher Kompressibilität und Metallagen hoher Masse erreicht werden, die Kaskadierung der Vorisolatoren bedeutet, daß die Vorisolatoren übereinander aufgebaut werden, d. h. das Gesamtsystem besteht aus einer mehrfachen Abfolge von Gummi- und Metallagen.

Allerdings steht diesem Konzept die Stabilität des Gesamtsystems entgegen. Da niedrige Resonanzfrequenzen auch geringe Rückstellkräfte bedeuten, neigt ein Stack um so mehr zum Umkippen, je niedriger die Resonanzfrequenzen gewählt werden. Mit steigender Anzahl der Vorisolatoren wächst auch die Höhe des Stacks was die Stabilität des Stacks entscheidend schwächt.

In diesem Experiment hat sich ein Stack mit zwei Lagen Vorisolatoren und einer oberen Abschlußplatte, die ihrerseits auf insgesamt neun Zylindern aus ultrahochvakuumfesten Zwei-Komponenten-Gummi (RTV) ruht, als optimaler Kompromiß zwischen Stabilität und Isolationswirkung erwiesen [46].

Die Vorisolatoren bestehen jeweils aus einem 8 kg schweren Kupferzylinder sowie drei Zylindern aus RTV (Durchmesser 20 mm, Höhe 25 mm), auf denen der Kupferzylinder mit seiner Grundfläche ruht. Durch diese Anordnung wurde es auf einfache Weise möglich, die Kompressibilität der Gummilage durch Verwendung anderer Zylindergeometrien zu verändern. Die Masse der Metallagen sollte mit der Gesamtlast, die der Stack zu tragen hat, vergleichbar sein.

In den Abbildungen 6.6 und 6.7 ist die lineare spektrale Dichte $\tilde{x}_{\text{seism}}(f)$ der seismischen Bodenbewegung in horizontaler und vertikaler Richtung jeweils auf der Bodenplatte und der Abschlußplatte dargestellt. Die Messung der seismischen Bewegung wurden mit zwei Beschleunigungsaufnehmern, von denen der eine auf der Bodenplatte des Stacks, der andere an der oberen Abschlußplatte montiert war, durchgeführt. Der Verlauf der linea-

6. Experimenteller Aufbau

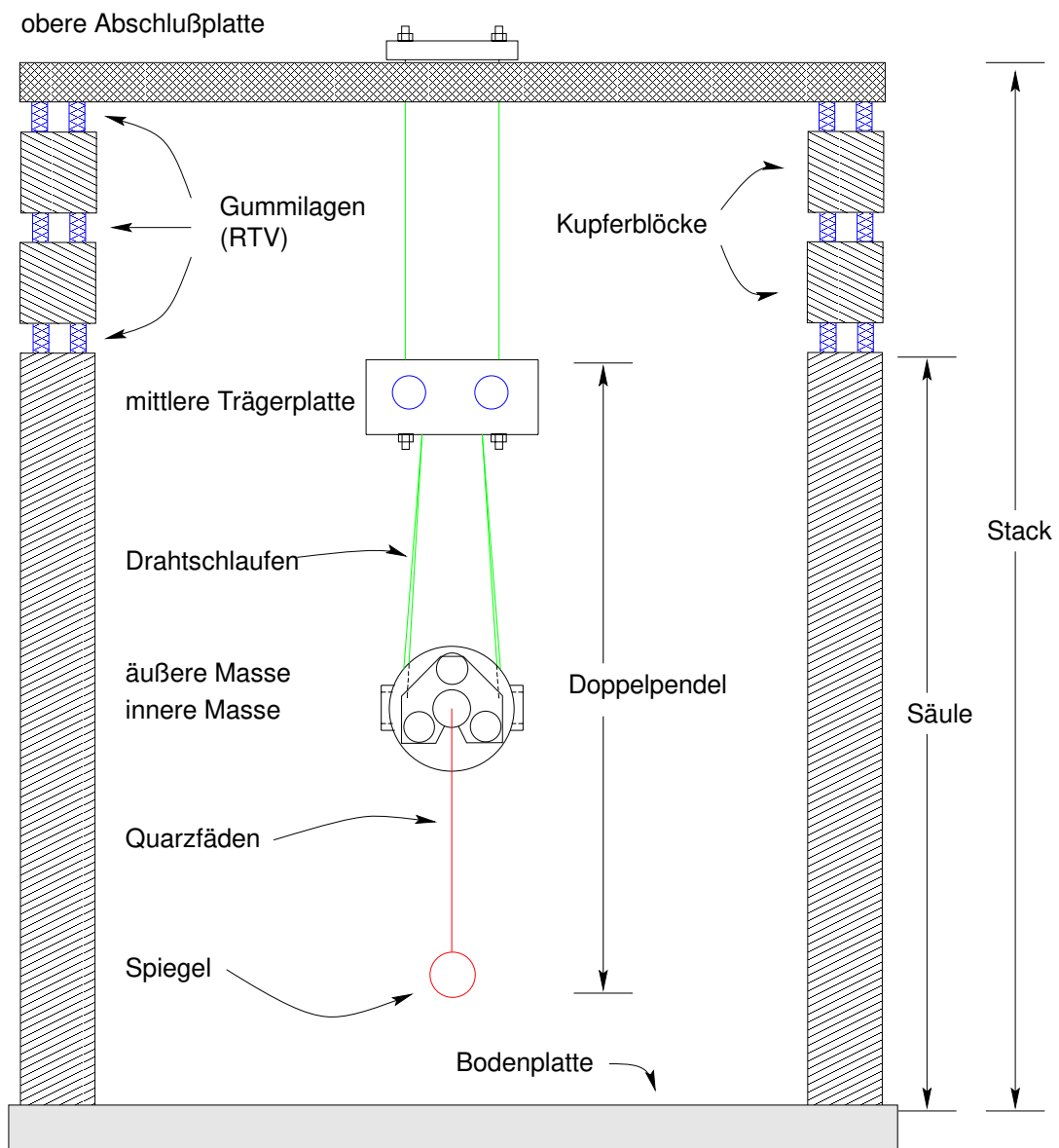


Abbildung 6.5.: Schematische Darstellung der seismischen Isolation. Die dritte Säule ist aus Gründen der Übersichtlichkeit ebenso wie der zweite aufgehängte Spiegel nicht dargestellt.

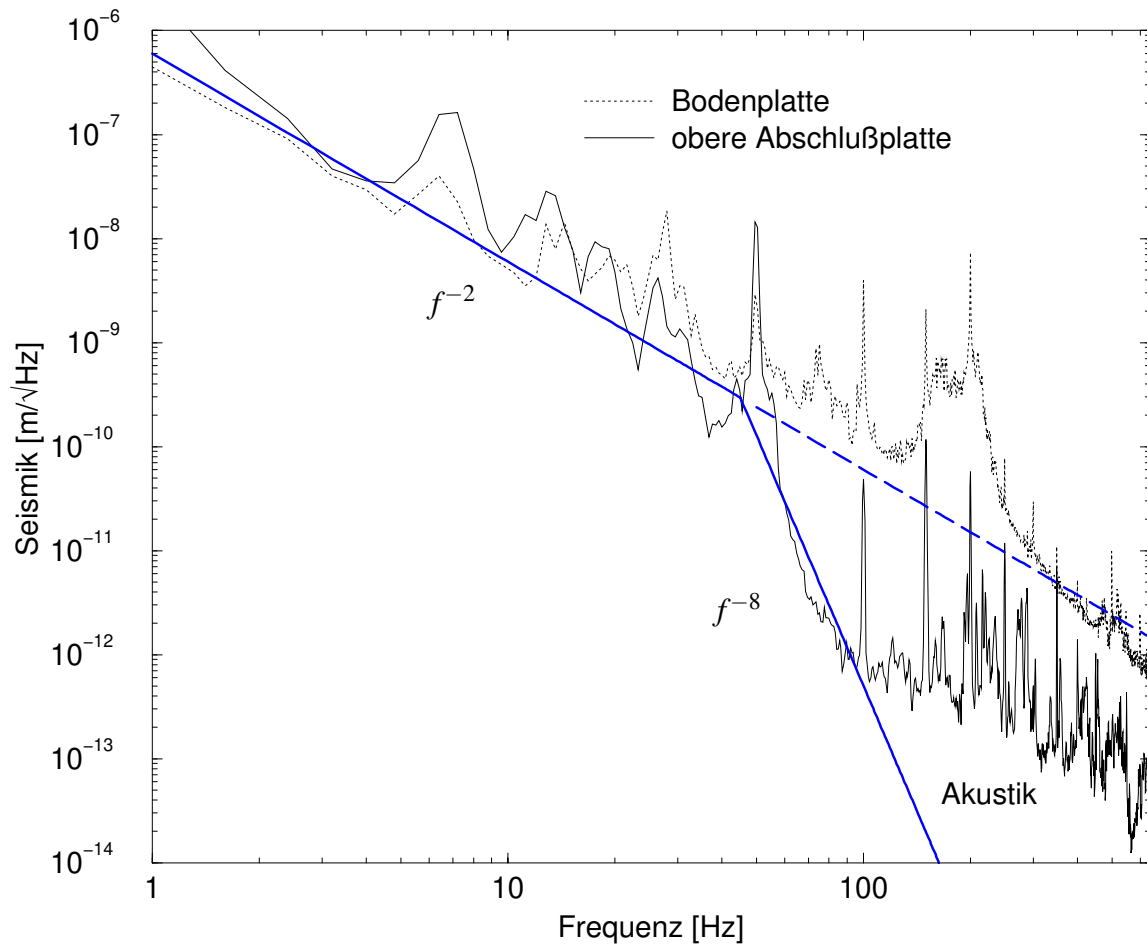


Abbildung 6.6.: Isolationseigenschaften des Stacks in horizontaler Richtung. Aufgetragen ist die lineare spektrale Dichte der bewegung der Bodenplatte bzw. der oberen Abschlußplatte. Mit eingezeichnet ist der $1/f^2$ -Verlauf der Seismik sowie der $1/f^8$ -Verlauf der verbleibenden Bewegung der oberen Abschlußplatte.

6. Experimenteller Aufbau

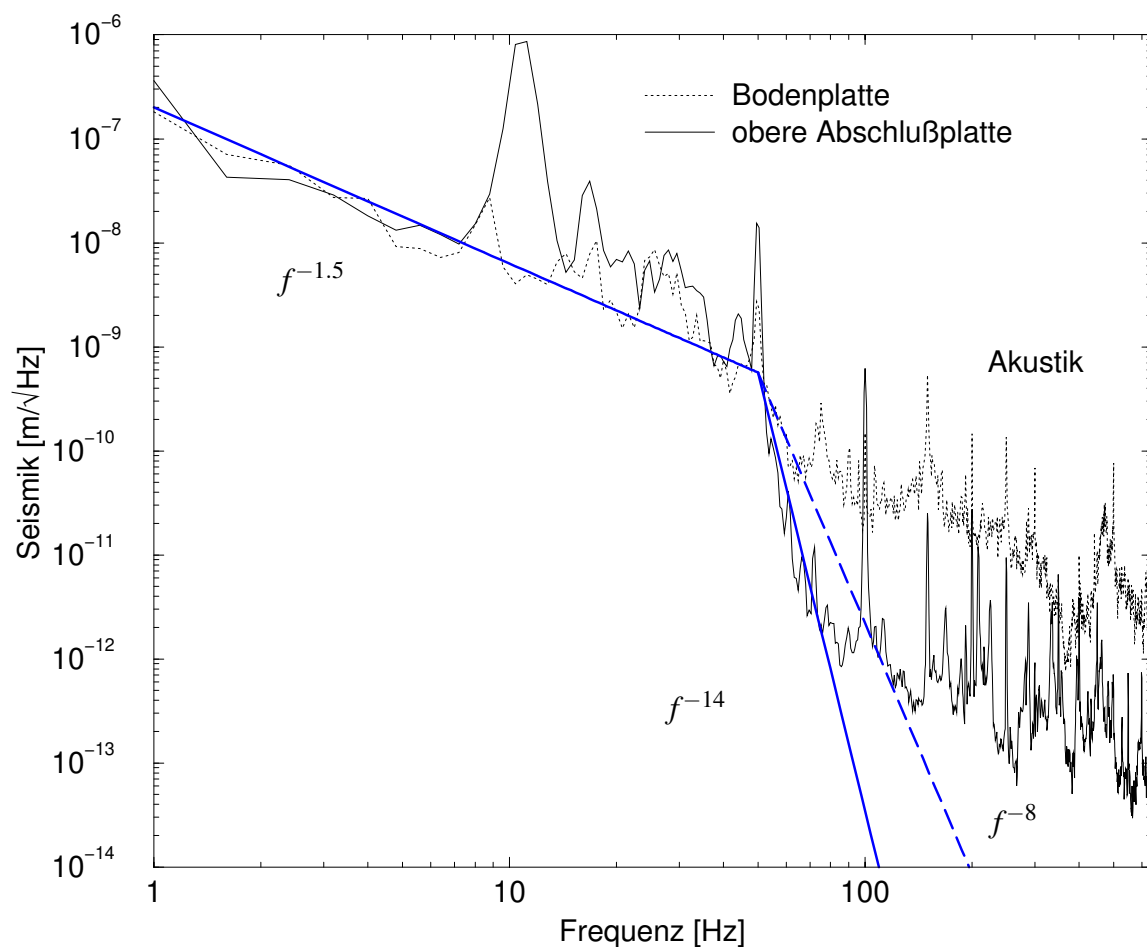


Abbildung 6.7.: Isolationseigenschaften des Stacks in vertikaler Richtung. Die Messung erfolgte mit eingeschalteter Vorvakuumpumpe, um den seismischen Untergrund zu erhöhen. Aufgetragen ist die lineare spektrale Dichte der Bewegung der Bodenplatte bzw. der oberen Abschlußplatte. Mit eingezeichnet ist der $1/f^2$ -Verlauf (unterhalb etwa 50 Hz) und der $1/f^8$ -Verlauf oberhalb 50 Hz der seismischen Anregung in der Vertikalen sowie der durch die Isolationswirkung des Stacks hervorgerufenen Veränderung zu einem $1/f^{14}$ -Abfall.

ren spektralen Dichte der horizontalen Bewegung $\tilde{x}_{\text{seism}}^h(f)$ folgt gut der Regel aus Gleichung (6.1). Oberhalb von etwa 50 Hz setzt zusätzlich zum $1/f^2$ Abfall der seismischen Bewegung eine Unterdrückung der Bewegung proportional zu $1/f^6$ ein. Diese wird durch drei Resonanzen der Vorisolatoren bei etwa 6.5 Hz, 13 Hz und 20 Hz hervorgerufen. Ab etwa 100 Hz ist das Spektrum durch akustische Kopplung dominiert, da die Messungen aufgrund der Meßelektronik nicht im Vakuum durchgeführt werden konnten. Im Meßfenster um 100 Hz beträgt die Unterdrückung der horizontalen seismischen Bewegung nahezu drei Größenordnungen, so daß eine horizontale Restbewegung auf der Abschlußplatte von $5 \cdot 10^{-13} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$ abgeschätzt werden kann.

Die Isolationseigenschaften des Stacks in vertikaler Richtung ähnelt der in horizontaler Richtung. Die Isolation bei 100 Hz beträgt ca. 500, so daß eine restliche Vertikalbewegung von ebenfalls $5 \cdot 10^{-13} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$ verbleibt. Im Bereich über 50 Hz bewirkt der Stack einen Abfall der Bewegungsamplitude proportional zu $1/f^6$, hervorgerufen durch drei Vertikalresonanzen bei 10 Hz, 17 Hz und 20 Hz, der sich mit dem natürlichen Verlauf der Seismik, der in diesem Frequenzbereich proportional zu $1/f^8$ ist, zu einem sehr steilen $1/f^{14}$ Verhalten führt.

6.5.2. Doppelpendel

Zur weiteren Unterdrückung des seismischen Rauschens kommen erneut harmonische Oszillatoren, in diesem Fall Pendel, zum Einsatz (Abb. 6.5). Da diese Pendel konstruktiv bedingt relativ hohe Güten besitzen ($Q \approx 100$) ist es notwendig, diese Pendel auf ihrer Resonanzfrequenz elektronisch zu dämpfen, damit die durch die seismische Anregung resultierenden Amplituden klein bleiben.

Die Verwendung eines passiven Dämpfungssystems wie z. B. einer Wirbelstrombremse hat den Nachteil, daß ein solche Dämpfung stets an der, durch das Fluktuations-Dissipations-Theorem (Abschnitt 2.1.3) beschriebenen, Einkopplung thermischen Rauschens leidet.

Abhilfe leistet hier eine *aktive* Dämpfung, die zwar im weiteren Sinne auch dissipativ ist, da es ihre Aufgabe ist, dem Pendel Energie zu entziehen, deren äquivalente Rauschtemperatur jedoch durch den Einsatz von Verstärkern sehr niedrig gehalten werden kann.

Ein Problem bei jeder Art aktiver Dämpfung besteht darin, daß durch die Regelstrecke, speziell durch die Sensoren und die Aktuatoren, möglichst wenig zusätzliches Rauschen eingekoppelt werden soll. Im Falle der Pendel wird dies einsichtig, wenn man den Fall betrachtet, daß das Pendel auf seiner Resonanzfrequenz f_0 idealerweise keine Bewegung relativ zu dem Sensor ausführen soll. Dies heißt, anders formuliert, daß das Pendel jeder Bewegung des Sensors innerhalb der Regelbandbreite folgen wird. Es gilt also eine Bewegung des Sensors zu verringern oder zu vermeiden. Eine Möglichkeit dieses zu verwirklichen, besteht in dem von NELSON [40] vorgeschlagenen Konzept des Doppelpendels.

Die hier verwendete Konstruktion des Doppelpendels besteht zunächst aus einer mittleren Trägerplatte, die an drei Stahlfäden von der oberen Abschlußplatte aufgehängt ist. Die mittlere Trägerplatte wird mit Hilfe von drei Schattensensoren, die mechanisch mit der oberen Abschlußplatte verbunden sind, gegen die obere Abschlußplatte gedämpft. Zur Funktionsweise der Schattensensoren siehe Abschnitt 6.5.3. Da die Schattensensoren fest mit der oberen Abschlußplatte verbunden sind, kann die Restbewegung der mittleren Träger-

6. Experimenteller Aufbau

platte auf der Resonanzfrequenz nur bis auf die Restbewegung der oberen Abschlußplatte reduziert werden. Außerhalb der Regelbandbreite profitiert man aber bereits von dem $1/f^2$ Abfall der Transferfunktion, so daß für Frequenzen oberhalb von ca. 10 Hz das Einfügen der mittleren Trägerplatte eine zusätzliche Isolation ermöglicht.

Von der mittleren Trägerplatte herab ist nun das eigentliche Doppelpendel gehängt. Die Mittelmasse des Doppelpendels besteht aus einer äußeren Masse, dem Käfig, und einer inneren Masse (Abb. 6.8). Durch die Wahl der Anbringungspunkte der Aufhängedrähte an Käfig und innerer Masse kann es erreicht werden, daß die Resonanzfrequenzen des „Käfigpendels“ von der des „inneren Pendels“ verschieden sind. Da die Resonanzfrequenzen konstruktionsbedingt in der Nähe von 1 Hz liegen, und die Güten dieser Pendel hoch genug sind ($Q = 10 \dots 100$), genügt es, die Resonanzfrequenzen um einige Zehntel Hertz verschieben zu wählen, um die beiden Pendel insofern voneinander zu entkoppeln, daß der relative Abstand keine Normalmode des Gesamtsystems mehr darstellt, also auch bei geeigneter Wahl der Anfangsbedingungen zeitlich nicht konstant bleibt.

Damit ergibt sich die Möglichkeit, die Relativbewegung von innerer Masse und Käfig mittels Schattensensoren elektronisch zu dämpfen und auf diese Weise, da die Relativbewegung keine Normalkoordinate darstellt, ein Ausdämpfen der gesamten Bewegung des Doppelpendels zu erreichen. Der Vorteil dieser gegenüber dem Einfachpendel erheblich aufwendigeren Methode besteht darin, daß auch der Sensor nicht mehr fest mit dem Aufhängepunkt verbunden ist, sondern ebenfalls auf einem Pendel sitzt, so daß die Restbewegung des Aufhängepunktes noch einmal durch die Transferfunktion dieses Pendels gefiltert wird.

6.5.3. Schattensensoren

Der Schattensensor (Abb. 6.9) ist eine äußerst kompakte Kombination aus Sensor und Aktuator. Der Sensor besteht aus einer kleinen Fahne aus nicht transparentem Material, welche in eine Strecke zwischen einer Leuchtdiode und einer Photodiode hineinragt. Bewegt sich nun die Fahne in die Strecke hinein oder aus ihr heraus, so wird der Strahlengang zwischen Leuchtdiode und Photodiode mehr oder weniger abgeschattet und die Photodiode liefert mehr oder weniger Signal. Diese Information kann nun mit Hilfe eines Regelkreises auf den Aktuator gegeben werden, der aus einer Spule und einem Permanentmagneten besteht, so daß je nach Richtung des Spulenstroms eine anziehende bzw. abstoßende Kraft erreicht werden kann. Da der Permanentmagnet als Basis für den Sensor dient und die Kombination Leuchtdiode und Photodiode im Spulengehäuse integriert ist, ist eine sehr kompakte Bauform möglich.

6.6. Lokale Regelung

Die in Abschnitt 6.5 beschriebene seismische Isolation ist in dem Experiment um eine lokale Regelung, d. h. eine Regelung die direkt auf die Spiegelmassen einwirkt, ergänzt. Der Grund hierfür ist, daß die seismische Isolation Störungen, die direkt auf die Spiegel einwirken, nur mit sehr geringer Effizienz herausdämpfen kann. Dies liegt daran, daß die Kopp-

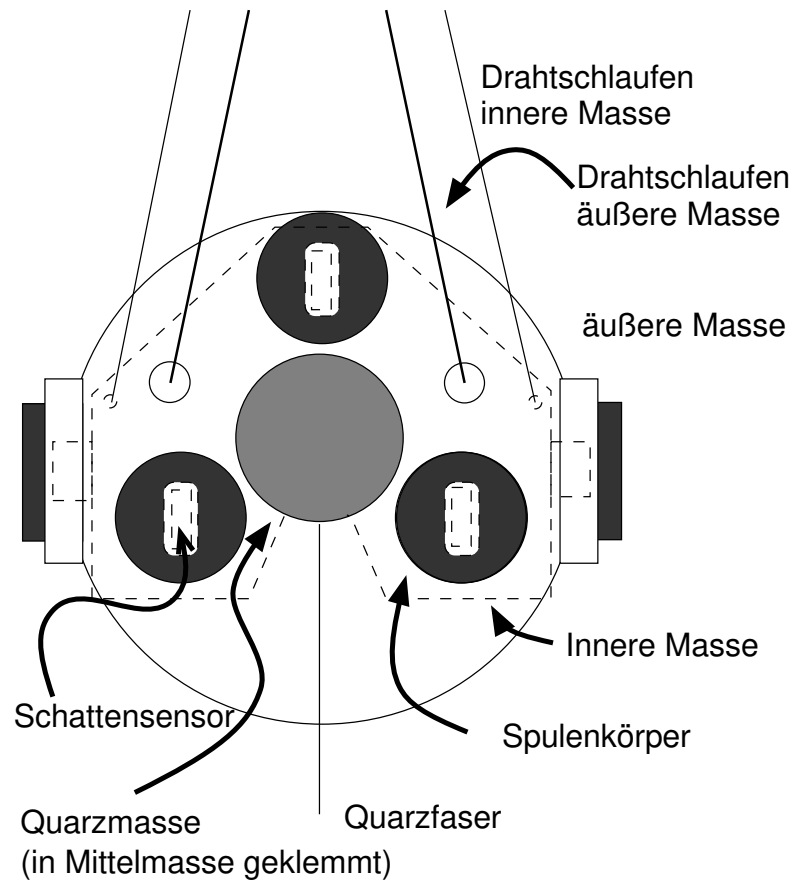


Abbildung 6.8.: Detailzeichnung des Mittelmassenkäfigs. Die zweite Quarzmasse, an der äußeren Masse befestigt ist und von der der zweite Spiegel herabgehängt ist, ist aus Gründen der Übersichtlichkeit weggelassen.

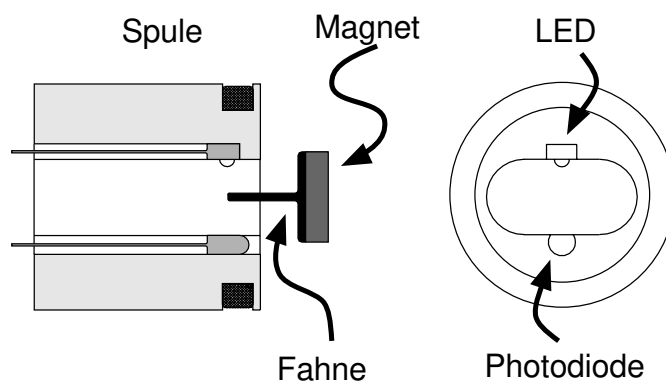


Abbildung 6.9.: Detailzeichnung des im Experiment verwendeten Schattensensors.

6. Experimenteller Aufbau

lung zwischen einer Bewegung der Spiegel und z. B. einer Bewegung der inneren Masse des Doppelpendels aufgrund der Massenverhältnisse sehr gering ist. Da die seismische Isolation in erster Linie dafür entworfen ist, Störungen durch die Aufhängung vom Spiegel fernzuhalten, ist dies durchaus erwünscht. Für den Betrieb des Experimentes erwies es sich allerdings als notwendig, eine Möglichkeit zur direkten Manipulation der Spiegel zu schaffen, da Störungen, die direkt auf die Spiegel einwirkten, nicht immer vermieden werden konnten. Dies betrifft vor allem Anregungen durch Trittschall, die aufgrund ihrer großen Amplituden nur unzureichend durch das seismische Isolationssystem gefiltert wurden wie auch die beim Evakuieren des Gefäßes unvermeidlichen Luftströmungen.

Die übliche Methode, Magneten auf den Spiegeln zu befestigen und mittels Schattensensoren eine direkte Lagekontrolle der Spiegel zu ermöglichen, wie z. B. bei GEO600 verwendet [14], kann in diesem Experiment alleine aufgrund der Abmessungen der Spiegel nicht angewendet werden. Ein weiterer wichtiger Grund ist, daß das Experiment darauf ausgelegt ist, Systeme sehr hoher Güten zu verwenden, was das Befestigen von Zusatzmassen auf den Spiegelsubstraten sehr schwierig macht. Stattdessen wurde hier auf eine Methode zurückgegriffen, die u. a. schon von LOGAN und TRAEGER [36, 52] verwendet wurde. Diese Methode verwendet statt magnetischer Felder elektrische und nutzt dabei aus, daß nahezu alle Materialien dielektrisch sind.

An der Grenzfläche zweier Dielektrika wirkt bei Vorhandensein eines elektrischen Feldes eine Kraft in Richtung des Mediums kleinerer Dielektrizitätskonstante ϵ_r , Grund hierfür sind Polarisationserscheinungen. Die Kraft F_{el} ist dem Quadrat der elektrischen Feldstärke E proportional.

$$F_{el} \sim \vec{E}^2 \quad (6.2)$$

Ist das anliegende Feld inhomogen, so wird demnach ein Körper mit einer Dielektrizitätskonstante größer als seine Umgebung eine Kraft erfahren, die in Richtung steigender Feldstärke gerichtet ist. Da die Dielektrizitätskonstante für Quarz $\epsilon_r^{\text{Quarz}} = 3.7$, die für Luft in guter Näherung $\epsilon_r^{\text{Luft}} = 1$ ist, kann durch Anlegen geeigneter Felder eine Dämpfung der Spiegelbewegung erreicht werden.

Das Spiegelsubstrat ist dabei von sechs Elektroden umgeben, drei auf jeder Seite, um auf diese Weise durch Anlegen einer Spannung an die Elektroden das Substrat sowohl in der longitudinalen Bewegung wie auch in Rotation als auch Kippung zu kontrollieren (Abbildung 6.10). Da auf diese Weise nur attraktive Kräfte ausgeübt werden können, muß das Substrat von beiden Seiten angesteuert werden. Das Fehlersignal wird aus einem an der Rückseite des Spiegels reflektierten HeNe-Lasers gewonnen, der auf einen ortsempfindlichen Detektor, hier eine Quadrantendiode, gegeben wird.

Ein elektronischer Regelkreis, der die Elektroden ansteuert, dient zur Lagestabilisierung der Spiegelsubstrate. Zusätzlich wird über einen Strahlteiler Licht auf einen weiteren ortsempfindlichen Detektor gegeben, der außerhalb der Regelschleife steht und somit die Möglichkeit bietet, die verbleibende Bewegung des Spiegels zu erfassen. Als Detektor wird in diesem Fall eine Tetralateraldiode eingesetzt, die so beschaltet ist, daß das Ausgangssignal zum einen unabhängig von der eingestrahlten Intensität ist und zum anderen in V/mm kalibriert ist. Da sowohl die Quadrantendiode als auch der HeNe-Laser fest mit dem optischen Tisch verbunden sind, wird die Restbewegung des Spiegelsubstrates durch die seis-

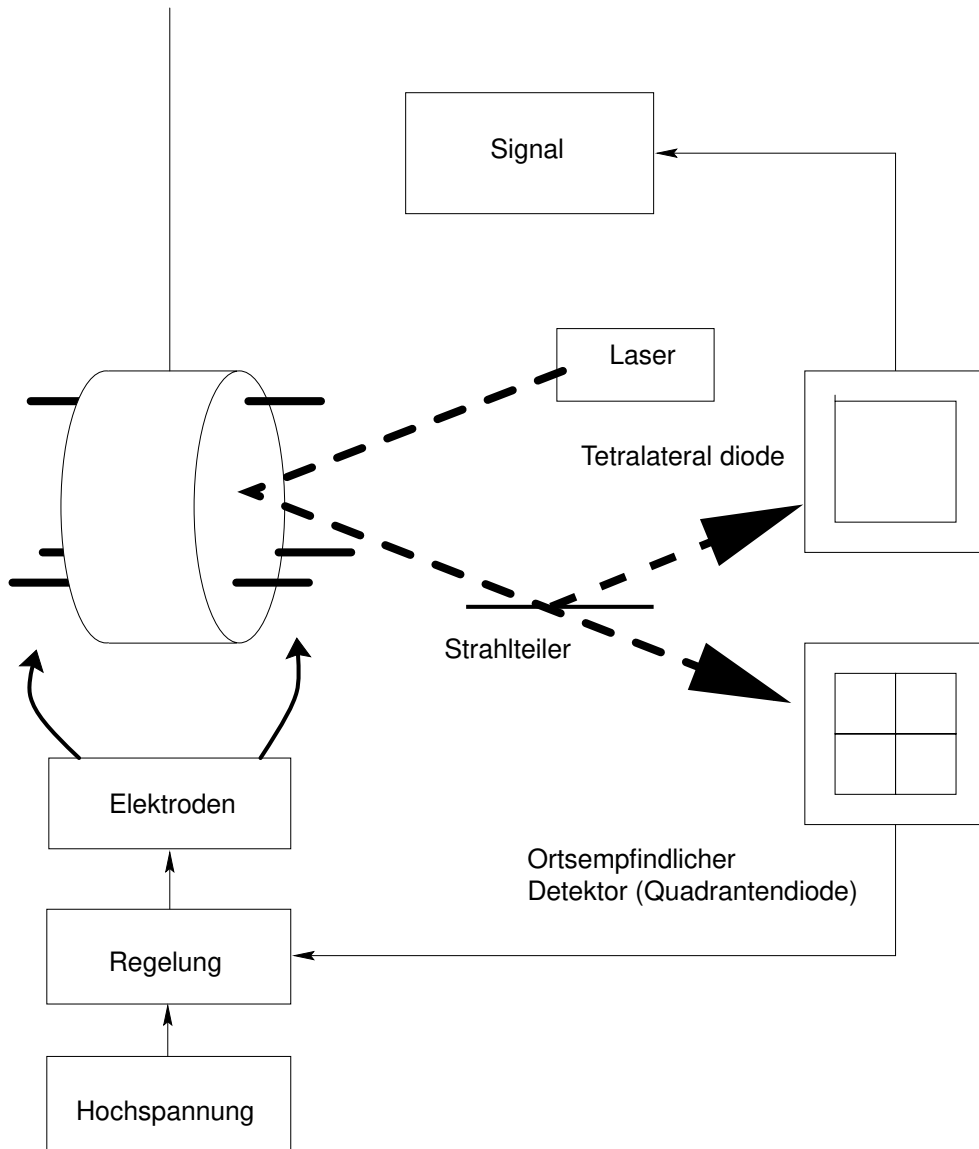


Abbildung 6.10.: Prinzipskizze der lokalen Regelung.

6. Experimenteller Aufbau

misch induzierte Bewegung des Sensors, also der Quadrantendiode relativ zum Spiegelsubstrat bestimmt, hier allerdings modifiziert durch ein „Übersetzungsverhältnis“, das den Einfluß des Abstands des Detektors bzw. des Lasers zum Spiegel und die daraus resultierende Winkelempfindlichkeit widerspiegelt.

Da die Quadrantendiode nur die Bewegungen des Lichtzeigers aufnehmen kann, ist sie also in erster Ordnung nur empfindlich gegen Verkippungen des Spiegels. Befindet sich die Quadrantendiode im (optischen) Abstand D von dem Spiegel und hängt der Spiegel an einer Faser der Länge l so ist die Restbewegung des Spiegels in der Pendelschwingung δx_{Sp}

$$\delta x_{\text{Sp}} = \frac{l}{D} \delta x_{\text{Sensor}} . \quad (6.3)$$

Für die Rotation und die Kippung ist vor allem die Größe des Verkippungswinkels interessant, die durch

$$\delta \alpha_{\text{Sp}} = \frac{\delta \alpha_{\text{Sensor}}}{D} \quad (6.4)$$

gegeben ist.

Auf die Elektroden wurde Hochspannung im Bereich von 0 . . . 400 V gegeben, die dabei entstehenden Kräfte reichten aus, um die Spiegel in ihrer Bewegung zu dämpfen.

Um den Einfluß des Rauschens der Hochspannung zu verringern sowie die Möglichkeit zu belassen, die lokale Regelung jederzeit abschalten zu können, ohne durch das Ausschalten der Hochspannung einen Kraftstoß auf den Spiegel zu übertragen, wurde die Regelung so beschaltet, daß die Elektroden im Falle verschwindenden Fehlersignals spannungsfrei sind, so daß dann auch keine Kraft wirkt.

6.7. Design der Resonatoren

Eines der Probleme bei der Konstruktion von Resonatoren hoher Güte und damit kleiner Linienbreiten ist, daß sichergestellt werden muß, daß innerhalb der Linienbreite des Resonators nicht mehrere transversale Moden anschwingen, da dies zu einer Verzerrung und Verbreiterung der Linien führen würde.

Betrachtet man einen idealisierten Resonator, in dem nur eine transversale Mode, z. B. die TEM_{00} Mode anschwingt, so ist die Linienbreite Δf des Resonators durch die Finesse \mathcal{F} und den freien Spektralbereich des Resonators vollständig bestimmt (Gl. (A.10)). Im allgemeinen schwingen in einem Resonator, je nach Qualität der Modenanpassung, einige bis viele höhere transversale Moden TEM_{mn} an. Die Resonanzfrequenz f_{qnm} eines Resonators ist durch folgenden Ausdruck gegeben [50]:

$$f_{qnm} = f_{\text{FSR}} \left(q + (n + m + 1) \frac{\arccos(\pm \sqrt{g_1 g_2})}{\pi} \right) \quad q, n, m \in \mathbb{N} \quad (6.5)$$

Dabei ist bezeichnen die Indizes n, m die Ordnung der transversalen Mode TEM_{mn} , die Ordnung der longitudinalen Mode wird durch q bezeichnet und die g_i sind die sogenannten g -

Parameter, die sich durch die Baulänge L des Resonators und die Krümmungsradien $R_{k,i}$ der Spiegel ergeben. Der freie Spektralbereich wird wie üblich durch $f_{\text{FSR}} = \frac{c}{2L}$ gekennzeichnet.

$$g_i = 1 - \frac{L}{R_{k,i}} \quad (6.6)$$

Für stabile Resonatoren, d. h. solche in denen ein Feld anschwingen kann, muß das Produkt $g_1 g_2$ größer als Null sein, so daß entweder beide g -Parameter positiv oder beide negativ sein müssen. Im ersteren Fall gilt in Gleichung (6.5) das obere Vorzeichen („+“), im letzteren das untere („-“).

Da in einem Resonator die Frequenzen zweier Lichtfelder nur bis auf ganzzahlige Vielfache des freien Spektralbereichs unterschieden werden können, läßt sich aus Gl. (6.5) der „effektive“ Modenabstand Δf_M zweier Moden $\text{TEM}_{q_1 m_1 n_1}$ und $\text{TEM}_{q_2 m_2 n_2}$ bestimmen,

$$\Delta f_M = f_{\text{FSR}} \text{frac}((n_1 - n_2 + m_1 - m_2)f_g) \quad \text{mit} \quad f_g = \frac{\arccos(\pm \sqrt{g_1 g_2})}{\pi} \quad (6.7)$$

und insbesondere für $n_2 = m_2 = 0$

$$\Delta f_M = f_{\text{FSR}} \text{frac}((n_1 + m_1)f_g) \quad (6.8)$$

$$= f_{\text{FSR}} \text{frac}(j f_g) \quad j = n_1 + m_1 \quad (6.9)$$

wobei die Funktion $\text{frac}(x)$ den nicht ganzzahligen Teil von x bezeichnet, d. h. die Nachkommastellen. Das Verschwinden der longitudinalen Modenparameter q_i liegt gerade an der beschriebenen Vieldeutigkeit in Bezug auf den freien Spektralbereich.

Soll der Modenabstand Δf_M möglichst groß gehalten werden, so stößt man auf ein Problem. Im allgemeinen ist der Ausdruck f_g/f_{FSR} irrational, so daß es für jede vorzugebende untere Schranke $\Delta f_{M,\min}$ ein j gibt, so daß gilt:

$$\Delta f_{M,\min} > f_{\text{FSR}} \text{frac}(j f_g) \quad (6.10)$$

Dies bedeutet anschaulich, daß es Moden gibt, die beliebig dicht an der TEM_{00} Mode liegen, wenn man nur ausreichend hohe Modenindizes n und m zuläßt. Die drei ausgezeichneten Spezialfälle in denen das Verhältnis von f_g und f_{FSR} rational wird, d. h.

$$\frac{f_g}{f_{\text{FSR}}} = \begin{cases} 0 & \text{planarer Resonator, } g_1 = g_2 = 1 \\ \frac{1}{2} & \text{konfokaler Resonator, } g_1 = g_2 = 0 \\ 1 & \text{konzentrischer Resonator, } g_1 = g_2 = -1 \end{cases} \quad (6.11)$$

sind ebenso isolierte Punkte im Parameterraum wie alle anderen „Rationalitätspunkte“, und sind wegen der unvermeidlichen Toleranzen im Spiegelabstand kaum zu erreichen. Es ist also nicht möglich, zu *allen* höheren transversalen Moden einen Mindestabstand einzuhalten. In der Praxis reicht es jedoch aus, sich auf kleine j zu beschränken, da bereits durch

6. Experimenteller Aufbau

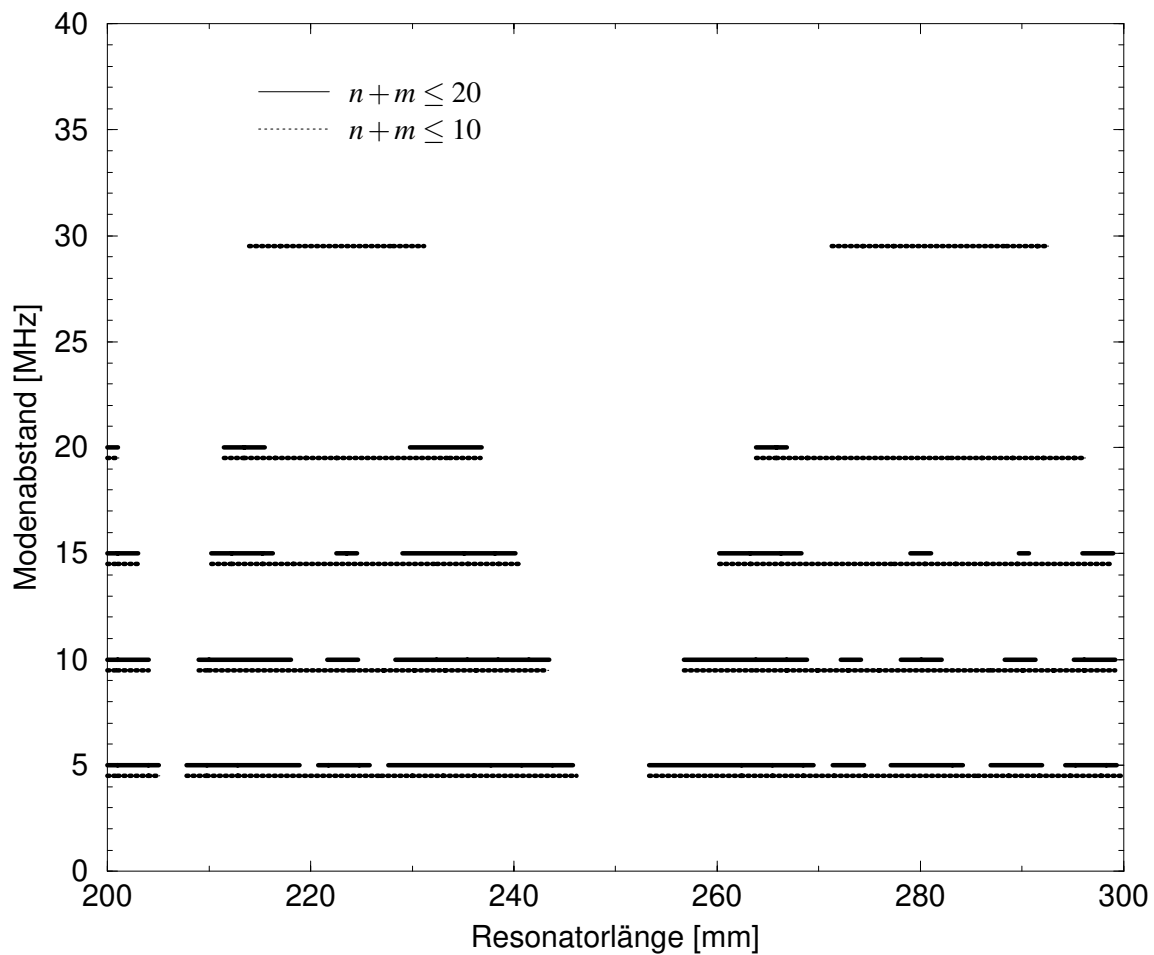


Abbildung 6.11.: Resonatorlängen für minimale Modenabstände von 5, 10, 15, 20 und 30 MHz. Der Resonator wird durch einen planen Spiegel sowie einen Spiegel mit Krümmungsradius $R_k = 500$ mm gebildet

eine nur wenig optimierte Modenanpassung Moden mit großem $n + m$ in ihrer Intensität bereits soweit unterdrückt sind, daß sie sich nicht mehr störend auswirken.

In Abbildung 6.11 sind die möglichen Baulängen eines Resonators angegeben, die einen minimalen Modenabstand, der auf der y -Achse aufgetragen ist, erlauben, vorausgesetzt man beschränkt sich auf Moden deren Index $m + n$ kleiner als 10 bzw. 20 ist. Deutlich zu erkennen ist der Einfluß sowohl des gewählten minimalen Modenabstands $\Delta f_{M,\min}$ als auch der maximalen Ordnung der Moden $m + n$. Zusätzlich sind in der Abbildung nur solche Längen gekennzeichnet, die keine isolierten Punkte darstellen d. h. solche, bei denen Abweichungen innerhalb der Fertigungstoleranzen bereits zum Unterschreiten des Modenabstands geführt hätten. Als Toleranz wurde 1 mm angenommen. So läßt sich für einen minimalen Modenabstand von $\Delta f_{M,\min} = 30$ MHz keine Baulänge des Resonators mehr bestimmen, für die alle TEM_{mn} mit $n + m \leq 20$ den Modenabstand einhalten. Für die Resonatorlänge des Vorstabilisierungsresonators wurde 215 mm gewählt. Ähnliche Rechnungen für einen Resonator mit einer Baulänge zwischen 10 mm und 30 mm wie sie für den aufgehängten Resonator gewählt wurde (Abb. 6.12) zeigen, daß für in diesem Längenbereich ein Modenabstand von 10 MHz ausreichend häufig erreicht werden kann.

6.8. Experiment

Zum Zwecke der seismischen Isolation befindet sich der Hauptteil des Experimentes auf einem gesonderten optischen Tisch, auf dem sich neben dem aufgehängten Resonator und dem umgebenden Vakuumgefäß auch die gesamte Einkoppeloptik sowie die Detektoren für die lokale Regelung, das POUND-DREVER-HALL-Verfahren und das Transmissionsignal befinden.

Auf dem Lasertisch befindet sich neben der Strahlquelle der Aufbau zur Vorstabilisierung sowie ein Justierlaser (HeNe, 543 nm, 0.4 mW) der dem Nd:YAG-Laser überlagert wird, um den aufgehängten Resonator einfacher justieren zu können.

6.8.1. Strahlführung

Für das eigentliche Experiment (Abb. 6.13) wird das Laserlicht nach seiner Erzeugung durch einen FARADAY-Isolator und eine Kollimationslinse auf einen einstellbaren Strahlteiler gegeben. Dieser ist durch eine Kombination eines $\lambda/2$ -Plättchens mit einem Polarisationsstrahlteiler (PBS) realisiert. Mit dem $\lambda/2$ -Plättchen kann die Polarisationssebene des Lasers eingestellt werden, so daß die am Polarisationsstrahlteiler reflektierte Intensität eingestellt werden kann. Das durch den Polarisationsstrahlteiler transmittierte Licht (~ 10 mW) wird in den Aufbau zur Vorstabilisierung geleitet.

Nach der Reflexion am Polarisationsstrahlteiler durchläuft das Licht einen akustooptischen Modulator (AOM), der als schneller Intensitätsmodulator dient. Über eine Justagestrecke und eine Anpassungsoptik wird das Licht in eine *single-mode*-Faser hoher numerischer Apertur $n_A = 0.24$ eingekoppelt. Die Faser dient zum einen dem reinen Transport des Lichts vom Lasertisch auf den Experimentiertisch, zum anderen definiert die Faser Größe und Position der Strahltaile der austretenden Mode, und wirkt so als *mode cleaner*. Hin-

6. Experimenteller Aufbau

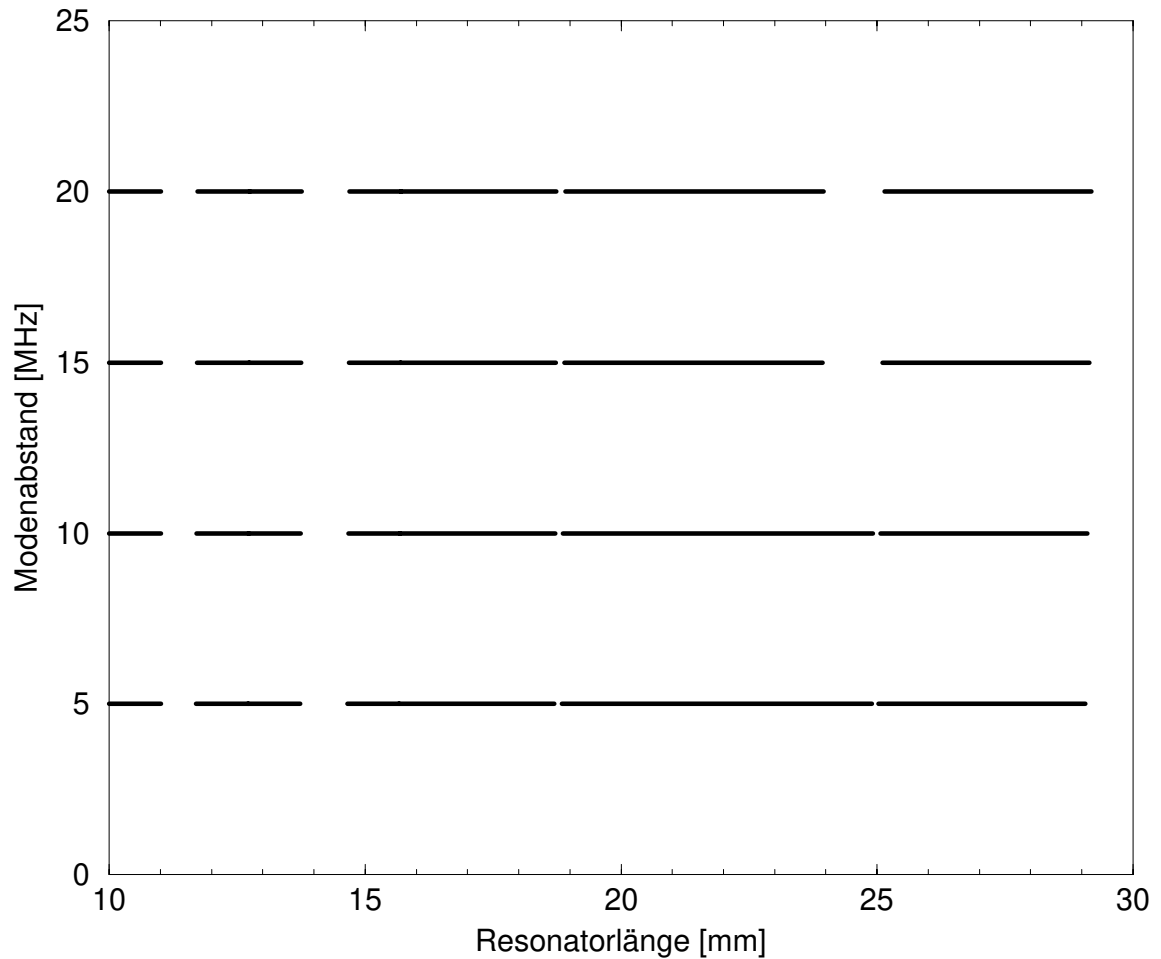


Abbildung 6.12.: Resonatorlängen für minimale Modenabstände von 5, 10, 15 und 20 MHz. Die maximale Ordnung der Mode beträgt $n + m = 10$. Der Resonator wird durch einen planen Spiegel sowie einen Spiegel mit Krümmungsradius $R_k = 100$ mm gebildet.

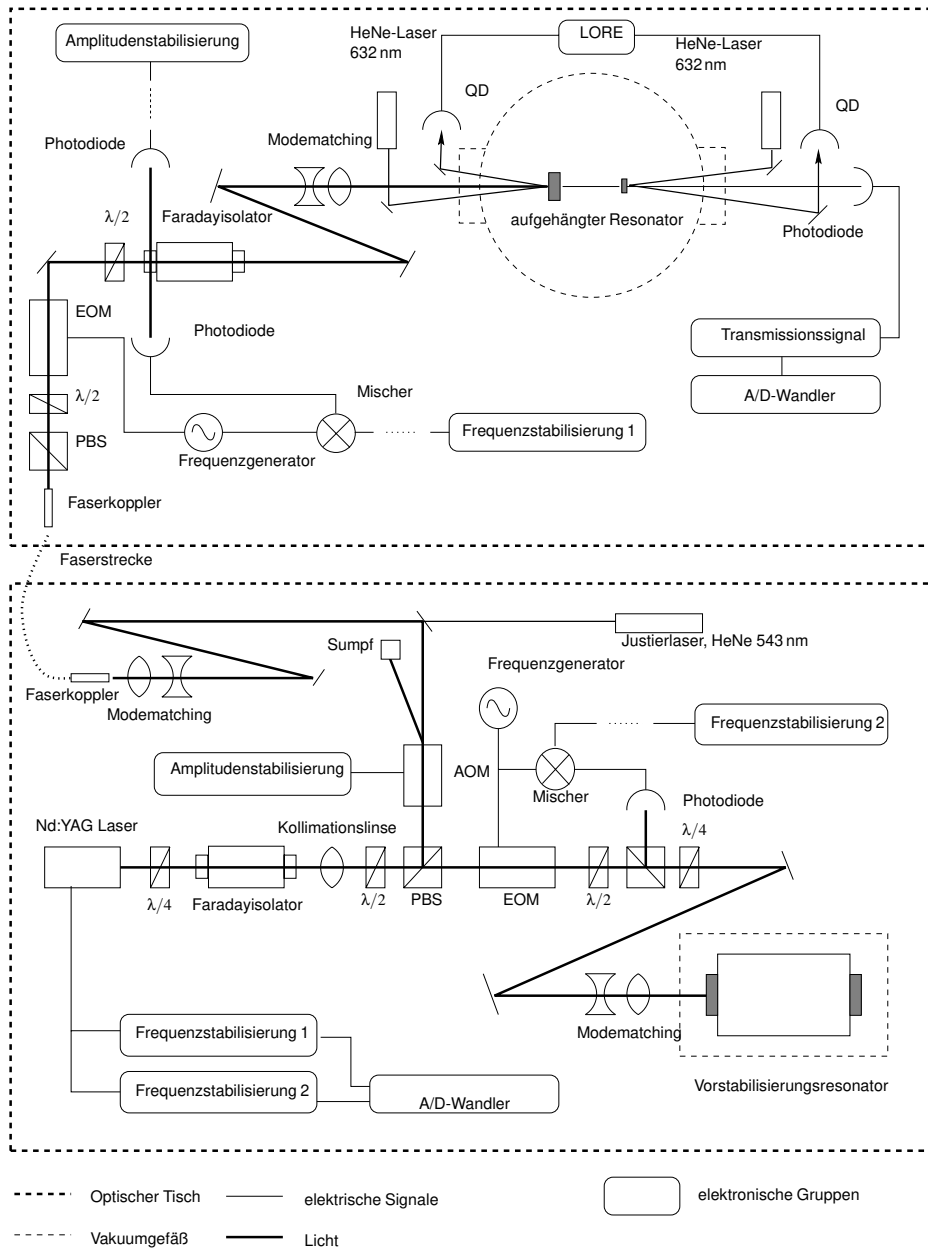


Abbildung 6.13.: Skizze der Strahlführung. Die Abkürzungen stehen für: elektrooptischer Modulator (EOM), akoustooptischer Modulator (AOM), Verzögerungsplatten ($\lambda/2, \lambda/4$), Quadrantendioden (QD). Die Abstände sind nicht maßstabgetreu.

6. Experimenteller Aufbau

ter der Faser befindet sich ein Polarisator, der zusammen mit einem weiteren $\lambda/2$ -Plättchen die Polarisationssebene des aus der Faser austretenden Lichts festlegt. Dies ist notwendig, da der nachfolgende elektrooptische Modulator (EOM) eine Vorzugsrichtung der Polarisation besitzt. Mittels des elektrooptischen Modulators werden die Modulationsseitenbänder für das POUND-DREVER-HALL-Verfahren (Anhang B) bei 8.1—8.3 MHz aufgeprägt. Um einen möglichst hohen Modulationsindex zu erreichen, wurde der elektrooptische Modulator mit Hilfe einer Kombination aus Hochfrequenztransformatoren für die gegebene Modulationsfrequenz auf $50\ \Omega$ Impedanzangepaßt [25]. Durch Feinabstimmung der Modulationsfrequenz konnte, bedingt durch die Verwendung eines resonanten Detektors, die Phasenverschiebung zwischen Lokaloszillator und Signal optimiert werden.

Durch ein weiteres $\lambda/2$ -Plättchen wird die Polarisationssebene des Lichts an den folgenden FARADAY-Isolator angepaßt. Am Eingangspolarisator des FARADAY-Isolators wird ein kleiner Anteil des Lichts (1—2 mW) für die Intensitätsstabilisierung abgezweigt. Das transmittierte Licht wird über Koppelspiegel und eine Linse zur Modenanpassung auf den aufgehängten Resonator gegeben. Das vom Einkoppelspiegel des Resonators reflektierte Licht durchläuft den optischen Weg zurück bis zum FARADAY-Isolator, an dessen Eintrittspolarisator es zur Nachweisphotodiode herausreflektiert wird. Die Nachweisphotodiode ist resonant für die Modulationsfrequenz mit einer Bandbreite von etwa 500 kHz. Dazu ist die Photodiode in Reihe mit einer Spule geschaltet, die zusammen mit der Kapazität der Photodiode eine Schwingkreis bildet.

Das durch den Resonator transmittierte Licht wird zur Diagnose auf eine schnelle Photodiode (Anstiegszeit ~ 10 ns) gegeben, so daß gleichzeitig zum Dispersionssignal, welches durch Demodulation des reflektierten Signales gewonnen wird, auch die Transmission des Resonators beobachtet werden kann.

Da in die Faser zu Justagezwecken ein Laser im sichtbaren Frequenzbereich eingekoppelt wird (HeNe-Laser bei 543 nm), müssen alle Umlenkspiegel nach der Faser eine nennenswerte Reflektivität für beide verwendeten Wellenlängen besitzen, so daß in diesem Bereich Silberspiegel verwendet wurden.

Der Sensor für die Intensitätsstabilisierung befindet sich in diesem Falle hinter der Faser, da diese wegen der nicht verschwindenden Reflektivität der Endflächen eine nicht unerhebliche Frequenzabhängigkeit der Transmission zeigt. Das durch die Faser gebildete FABRY-PEROT-Interferometer sehr geringer Finesse hat, gegeben durch die Länge und den Brechungsindex der Faser, einen freien Spektralbereich von etwa 10 MHz und einen Kontrast von etwa 10 %.

6.8.2. Vakuumsystem

Das Vakuumsystem (Abb. 6.14) besteht aus einem dreigeteilten Tank mit 50 cm Durchmesser und 1.50 m Höhe, der in der Lage ist den kompletten Stack aufzunehmen. Im unteren Segment des Tankes befinden sich die Ein- und Austrittsfenster für den Laser, der Flansch für eine Turbomolekularpumpe, sowie ein zusätzliches Ventil zum Belüften und gezielten Verändern des Gasdruckes. Im mittleren Segment befinden sich neben einem zusätzlichen Beobachtungsfenster auf Höhe der Doppelpendelmassen zwei Flansche für die elektrischen Durchführungen der Signale und der Energieversorgung für die lokalen Regelungen und die

Schattensensoren. Das obere Segment besitzt keine Flansche und wird durch einen Deckel

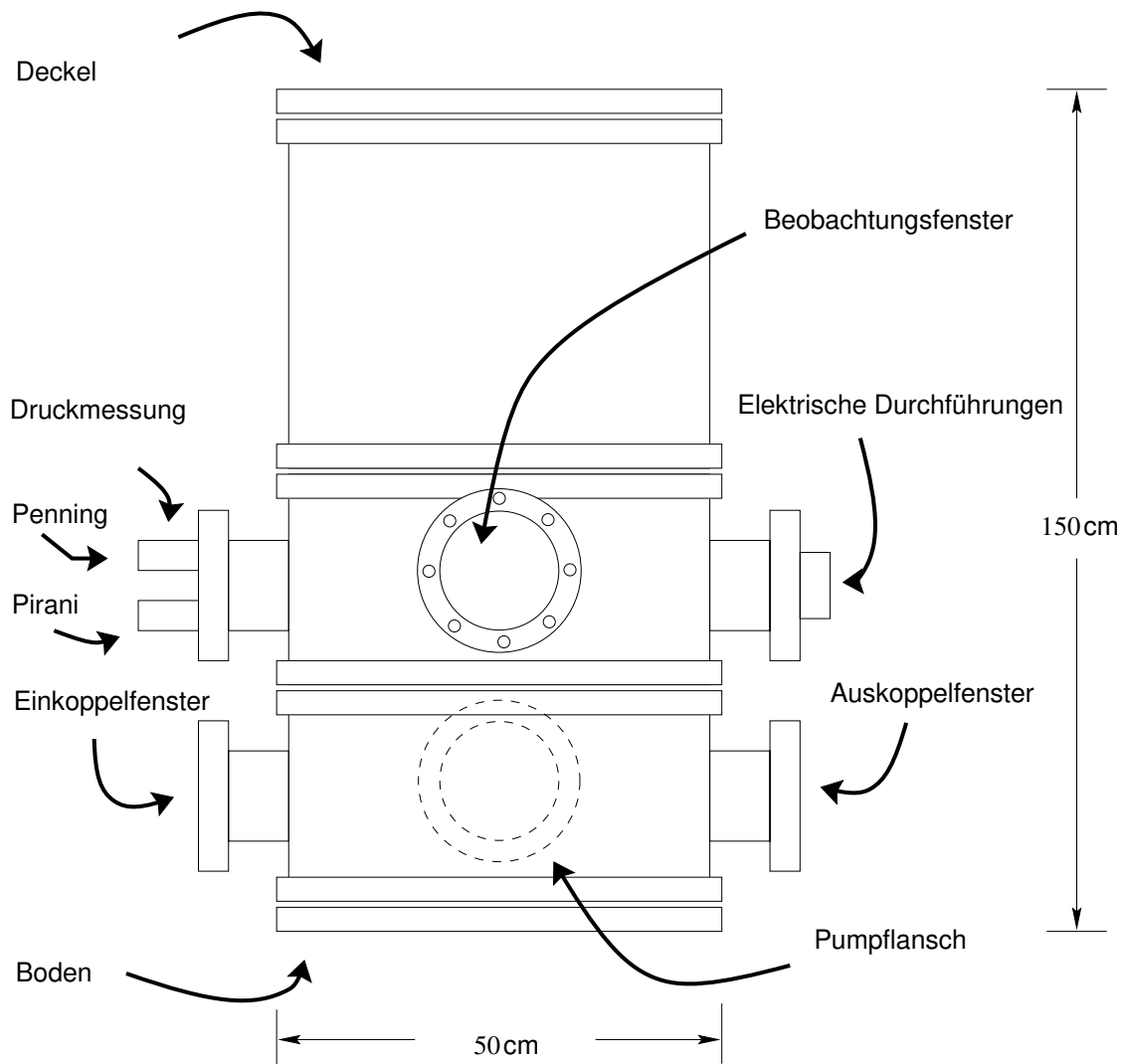


Abbildung 6.14.: Skizze des Vakuumtanks mit Beobachtungsflanschen und Einkoppelfenstern

abgeschlossen. Auf dem Boden des Vakuumtanks ist eine Lochrasterplatte zur Montage optischer Komponenten angebracht.

Zur Druckmessung standen eine PIRANI-Meßröhre sowie ein PENNING-Druckmeßgerät zur Verfügung. Eine zusätzliche Diagnose war über ein Quadrupolmassenspektrometer möglich. Der erreichbare Enddruck liegt bei 10^{-6} mbar.

6. Experimenteller Aufbau

	Spiegel I	Spiegel II
Durchmesser	25.4 mm	6.35 mm
Dicke	12.1 mm	3 mm
Masse	13.5 g	210 mg
Krümmungsradius Version 1	100 mm	plan
Krümmungsradius Version 2	plan	100 mm

Tabelle 6.1.: Abmessungen der Spiegel des aufgehängten Resonators

6.8.3. Der aufgehängte Resonator

Der aufgehängte Resonator wurde im wesentlichen in zwei Versionen realisiert, die sich in der Anordnung und den Krümmungsradien der Spiegel unterscheiden. Die Abmessungen und Massen der Spiegel sind in Tabelle 6.1 zusammengefaßt.

Um die Leistungsfähigkeit des Aufbaus zu testen wurde der Resonator zunächst mit einem aufgehängten Spiegel realisiert. Dazu wurde der kleinere Spiegel (Spiegel II), der in diesem Fall plan war, monolithisch mit einer Quarzfaser mit 120 μm Durchmesser verbunden und diese dann an der inneren Masse des Doppelpendels befestigt [53]. Die monolithische Verbindung wurde mit Hilfe einer eigens entwickelten Anschmelztechnik vorgenommen. Der große Spiegel (Spiegel I) mit einem Krümmungsradius $R_k = 100$ mm wurde mit Hilfe eines Spiegelhalters fest mit dem Boden des Vakuumgefäßes verbunden und diente als Einkoppelspiegel des Resonators.

Mit diesem Aufbau wurde eine volle Linienbreite des Resonators von 1.7 MHz realisiert (Abb. 6.15).

In einer weiteren Ausbaustufe (Abb. 6.16) wurde auch der zweite Spiegel aufgehängt. Dabei war geplant, die Spiegel gegen solche mit geringeren Verlusten auszutauschen, um eine geringere Linienbreite zu erhalten. Die zur Verfügung stehenden Spiegel erwiesen sich jedoch als stark verlustbehaftet. In dem zweiten Aufbau wurde der größere Spiegel mit drei Fasern monolithisch mit dem Käfig verbunden, während der kleinere Spiegel mit wiederum nur einer Faser mit der inneren Masse verbunden wurde. Die Befestigung mit drei Fasern wie in Abbildung 6.16 skizziert ermöglicht über die Dreipunkthalterung („Marionetta“) eine Vorjustage des Spiegels während die monolithischen Verbindungen erstellt werden, sowie eine Feinjustage im fertiggestellten Zustand. In diesem Aufbau diente der größere Spiegel wiederum als Einkoppelspiegel, war allerdings ein Planspiegel. Die Stabilität des Resonators wurde in diesem Fall durch den Krümmungsradius von $R_k = 100$ mm des hinteren Spiegels erreicht. Allerdings konnte, wie aus Abbildung 6.17 ersichtlich, nur eine deutlich größere Linienbreite von 6.6 MHz erreicht werden.

6.8.4. Datenaufnahme

Die Datenaufnahme erfolgte zum einen mit Hilfe eines Rechners, der mittels einer Analog-Digital-Wandlerkarte die Signale umwandelte und abspeicherte. Dies betraf vor allem die Signale, die aus der Stabilisierung des Lasers auf den aufgehängten Resonator gewonnen

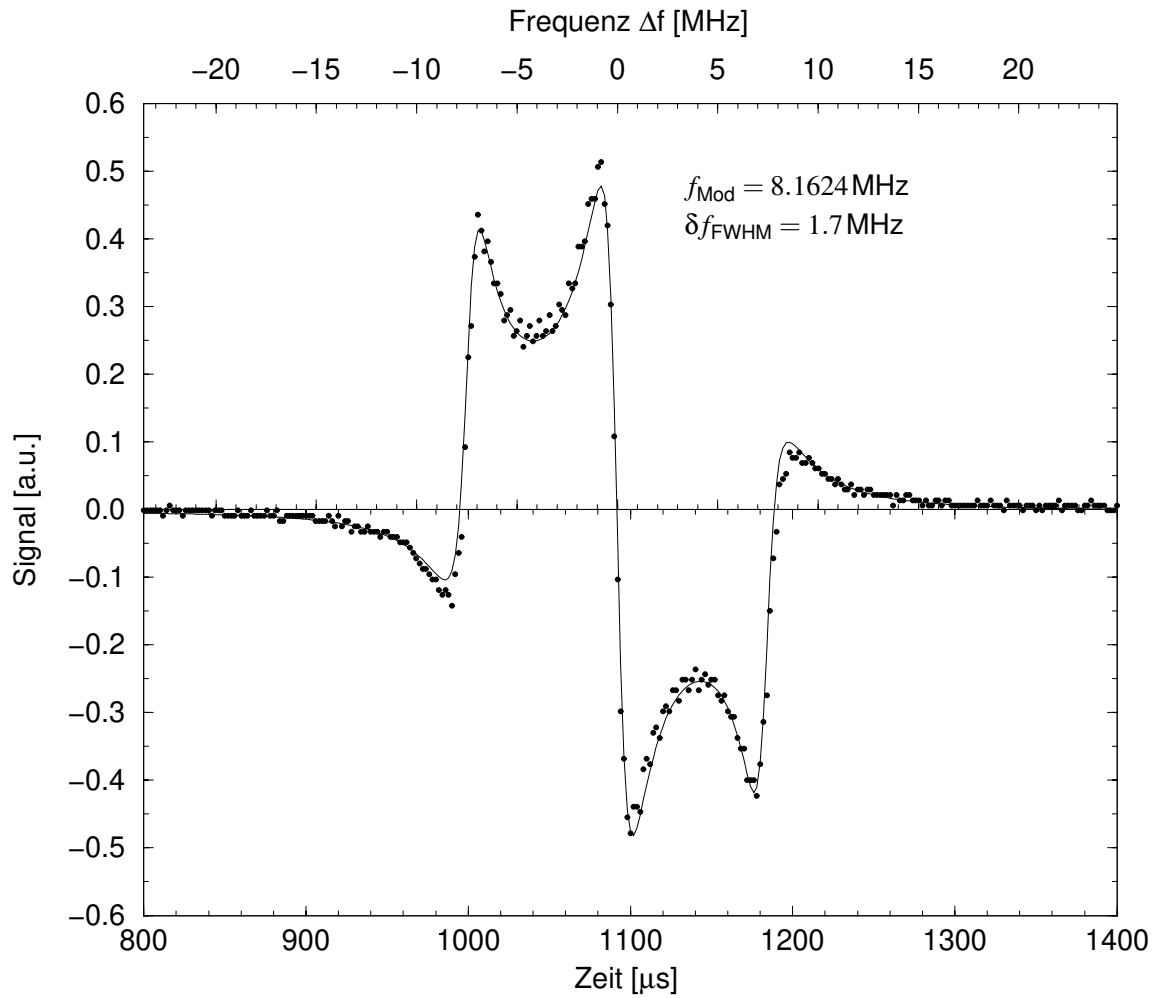


Abbildung 6.15.: Dispersionssignal des aufgehängten Resonators, der Einkoppelspiegel ist fest mit dem Boden verbunden. Meßdaten mit angepaßtem Signalverlauf, die Linienbreite $\delta f_{\text{FWHM}} = 1.7 \text{ MHz}$ ist der Anpassungsrechnung entnommen.

6. Experimenteller Aufbau

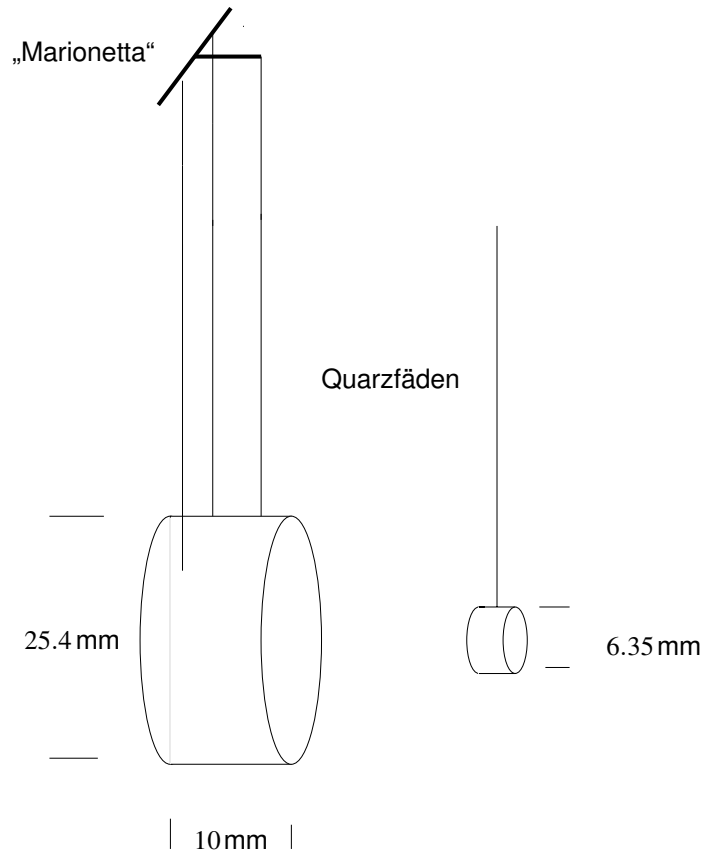


Abbildung 6.16.: Skizze des aufgehängten Resonators in der zweiten Ausbaustufe. Der plane Einkoppler (rechts) ist an drei Fäden befestigt, was eine Justage des Resonators über die im oberen Bildteil erkennbare „Marionetta“ ermöglicht.

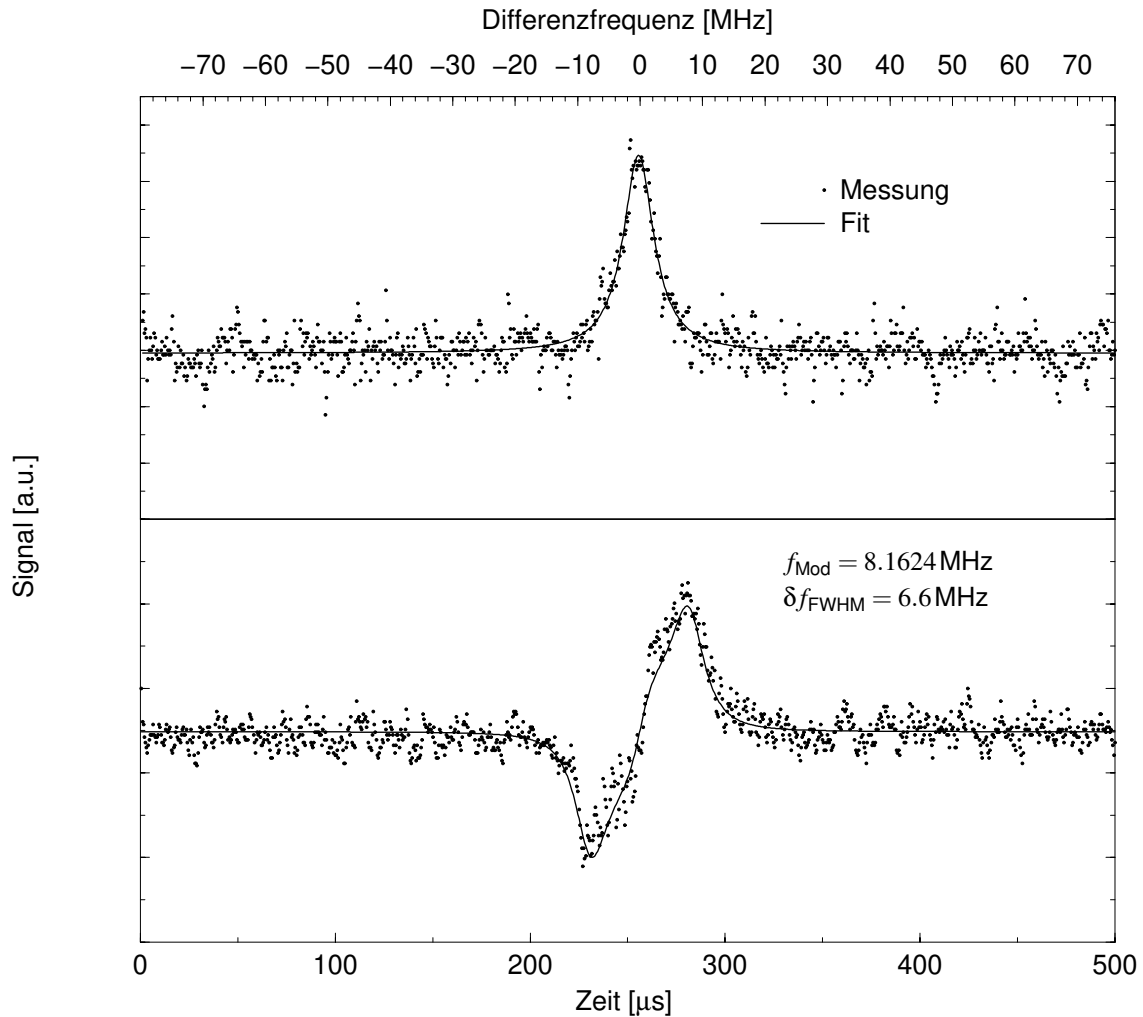


Abbildung 6.17.: Dispersions- und Absorptionssignal des aufgehängten Resonators in der zweiten Ausbaustufe. Dargestellt sind die Meßdaten mit dem angepaßtem Signalverlauf. Die Linienbreite $\delta f_{\text{FWHM}} = 6.6 \text{ MHz}$ wurde der Anpassungsrechnung entnommen

6. Experimenteller Aufbau

wurden. Dazu wurde das Signal des Resonators in Transmission als Triggersignal verwendet, so daß der Rechner nur während der Zeiten Daten aufgenommen hat, in denen der Laser in Resonanz mit dem Resonator war. Die Daten wurden später auf numerischem Wege so verarbeitet, daß die Signale selektiert werden konnten, die eine gewisse Dauer überschritten.

Diese Daten wurden dann einer Fouriertransformation unterzogen [43], um daraus die linearen spektralen Dichten der Längenänderung des Resonators zu errechnen.

Da die maximale Abtastrate des A/D-Wandlers bei 100 kHz lag, wurden die Daten, die eine schnellere Aufnahme verlangten, als mit dem A/D-Wandler möglich war entweder mittels eines schnellen Speicheroszilloskops oder eines FFT-Analysators aufgenommen.

7. Ergebnisse und Diskussion

7.1. Erste Ausbaustufe

Zunächst sollen die Ergebnisse zu der ersten Version des aufgehängten Resonators beschrieben und diskutiert werden. In diesem Stadium des Experimentes ging es vor allem darum, die Qualität der Simulation zu testen und nachzuweisen, daß der Aufbau prinzipiell dazu geeignet ist, die an ihn gestellten Anforderungen zu erfüllen

Dazu wurde die Frequenz des Lasers auf eine Resonanzlinie des aufgehängten Resonators geregelt. Der freie Spektralbereich des Resonators beträgt bei einer Baulänge von 2 cm 7.5 GHz.

Läuft der Resonator durch die Bewegung eines Spiegels in Resonanz mit dem Laser, so sorgt die Frequenzregelung dafür, daß die Frequenz des Lasers so weit wie möglich der sich mit der Spiegelbewegung ändernden Resonanzfrequenz des FABRY-PEROT-Resonators folgt. Die Frequenzkontrolle des Lasers über die Temperatur des Kristalls hat zwar einen relativ großen Stellbereich (3 GHz/K), kann aber aufgrund der geringen Regelbandbreiten von etwa 1 Hz hier nicht zum Nachführen der Frequenz eingesetzt werden. Das Regelsignal für die Frequenznachführung wurde daher ausschließlich an den Hochspannungsverstärker der Piezokeramik gegeben. Mit einem Durchstimmkoeffizienten von 2 MHz/V erreicht man auf diese Weise eine maximale Verstimmung des Lasers um 0.8 GHz.

Daher kann die Frequenz nur für Relativbewegungen der Spiegel von etwa $\lambda/20$ folgen. Nimmt man eine seismisch induzierte Restbewegung des Spiegel von etwa 0.5 μm , entsprechend einem freien Spektralbereich, an, so bedeutet dies typische Meßzeiten von etwa 100 ms.

Die transmittierte Leistung wurde als Start- und Stoppsignal für die Datenaufnahme verwendet, welche mit Hilfe eines rechnergestützten Meßprogramms über eine Analog-Digital-Wandlerkarte durchgeführt wurde. Als Meßsignal für die Resonatorlänge diente das Stellsignal der Laserfrequenz, da die Schleifenverstärkung der Frequenzregelung im Frequenzbereich bis 1 kHz groß gegen Eins war.

Um ausreichend viele Spektren zu erhalten, wurde das Experiment über Zeiträume von 24 — 48 Stunden, vorzugsweise zu „seismisch ruhigen“ Zeiten betrieben.

In Abbildung 7.1 ist ein solches Spektrum gezeigt. Zum Vergleich ist in die gleiche Grafik das Ergebnis der Simulationsrechnung, für Fasern mit 120 μm Durchmesser gerechnet, eingetragen. Angenommen wurde für die Simulation zudem eine Pendelgüte, die nur durch die interne Dämpfung begrenzt wurde und daher mit $1.1 \cdot 10^7$ sehr hoch ist. Dies erlaubt prinzipiell den Zugang zum thermischen Rauschen abseits der Resonanzen im Be-

7. Ergebnisse und Diskussion

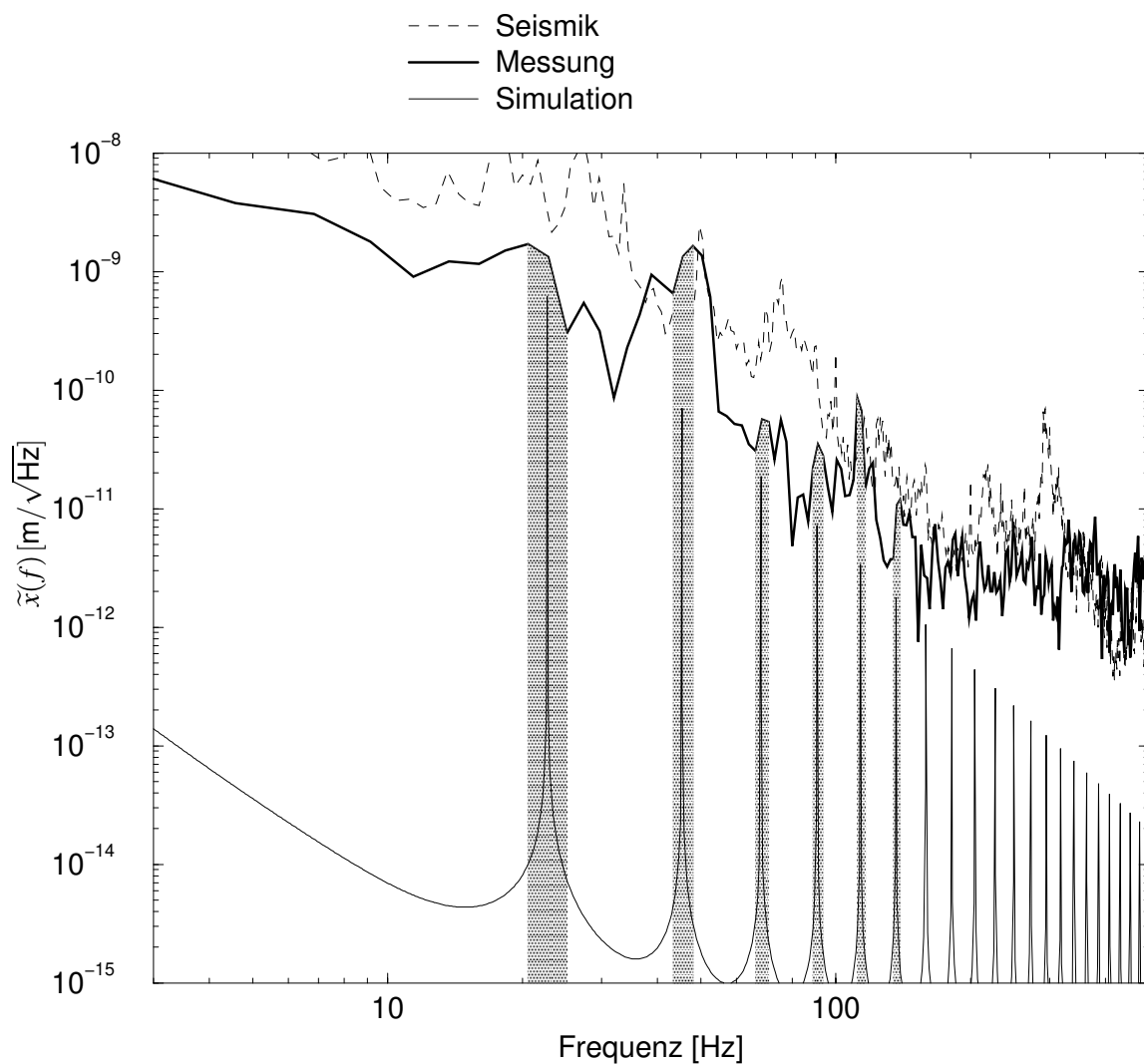


Abbildung 7.1.: Spektrum der Längenänderung des aufgehängten Resonators in der ersten Version. Zum Vergleich sind das simulierte Spektrum der Violinmoden und das Spektrum der seismischen Bewegung eingetragen. Die Bandbreite, angedeutet durch die grau hinterlegten Bereiche, betrug entsprechend der Meßzeit von 432 ms 2.3 Hz.

reich $10^{14} \dots 10^{15} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$.

Der Faserdurchmesser ergibt sich aus der Tatsache, daß zur Befestigung dieses Substrates eine konventionelle optische Fasern verwendet wurde. Dieser Faserdurchmesser legt zusammen mit der Masse des Spiegels die Frequenz der Violinmoden zu 22.7 Hz fest. Dieser Wert stimmt, wie in der Abb. 7.1 zu sehen ist, gut mit der Messung überein.

Vorgegeben durch die kurze Meßzeit von hier 423 ms ergab sich bei den Messungen stets eine recht große Auflösungsbandbreite, die in Abbildung 7.1 durch graue Balken dargestellt ist.

Die Auflösungsbandbreite führt zu einer Verbreiterung der Strukturen, so daß z. B. bei dieser Messung die zweite und fünfte Violinmode nicht von den 50 Hz der Netzfrequenz bzw. deren Harmonischen getrennt werden können.

Die Begrenzung der Meßempfindlichkeit ab etwa 200 Hz auf etwa $3 \cdot 10^{-12} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$ ist auf das Digitalisierungsrauschen des Analog-Digital-Wandlers zurückzuführen, der bei einer Samplingfrequenz von 1 kHz etwa 10 effektive Bits besitzt, so daß der dynamische Bereich der Meßwertaufnahme auf drei Größenordnungen beschränkt war. Damit begrenzen die großen Signalamplituden bei niedrigen Frequenzen die Empfindlichkeit.

Die durchbrochene Linie in Abbildung 7.1 gibt stellt die seismische Bewegung des fest auf der Bodenplatte montierten zweiten Spiegels an (vgl. Abbildung 6.6), die mit einem Beschleunigungsaufnehmer gemessen wurde. Vergleicht man den Verlauf dieser Kurve im Bereich von 10 Hz bis 100 Hz mit den interferometrischen Messungen, so stimmen diese, abgesehen von den Violinresonanzen, sehr gut überein. Eine Abweichung der absoluten Werte um etwa einen Faktor 2—3 liegt innerhalb der Meßgenauigkeit der verschiedenen Meßmethoden zueinander.

Es ist daher für diesen Aufbau nicht zu erwarten, daß bereits thermisches Rauschen der Violinmoden gemessen werden kann.

7.2. Zweite Ausbaustufe

In der zweiten Ausbaustufe des Experimentes wurden, wie in Abschnitt 6.8.3 beschrieben, beide Spiegel des FABRY-PEROT-Resonators monolithisch aufgehängt.

Da die wesentliche Rauschprozeß in der ersten Ausbaustufe die seismisch angeregte Bewegung des fest auf der Bodenplatte montierten Spiegels war, ermöglicht das Aufhängen auch des zweiten Spiegels eine deutliche Reduktion des Rauschens im Frequenzbereich von 10—100 Hz.

Jedoch erhöht das Aufhängen des zweiten Spiegels die Komplexität des Versuches, vor allem in Bezug auf die Justage des Resonators, erheblich. Zudem wird dadurch die relative mittlere Bewegungsamplitude der beiden Spiegel auf ihren Resonanzfrequenzen vergrößert, da aufgrund der leicht unterschiedlichen Pendelfrequenzen eine reine *common-mode*-Bewegung nicht möglich ist.

Dies führt dazu, daß sich die Resonanzfrequenzen des FABRY-PEROT-Resonators schneller ändern als in der ersten Ausbaustufe und daher die Meßzeiten weiter verkürzt werden. In Abbildung 7.2 sind die Verteilungen der Meßdauern in der ersten und zweiten Ausbaustufe aufgetragen. Ausgewertet wurden dabei für die erste Ausbaustufe ca. 90 000

7. Ergebnisse und Diskussion

Messungen, für die zweite Ausbaustufe 570 000 Messungen.

Dabei erkennt man, daß für die zweite Ausbaustufe im Mittel kürzere Meßzeiten erreicht werden können. Beide Verteilungen folgen einem $e^{-t/\tau}$ -Gesetz, in der ersten Ausbaustufe wurden mittlere Meßzeiten von 26 ms, in der zweiten Ausbaustufe 10 ms erreicht.

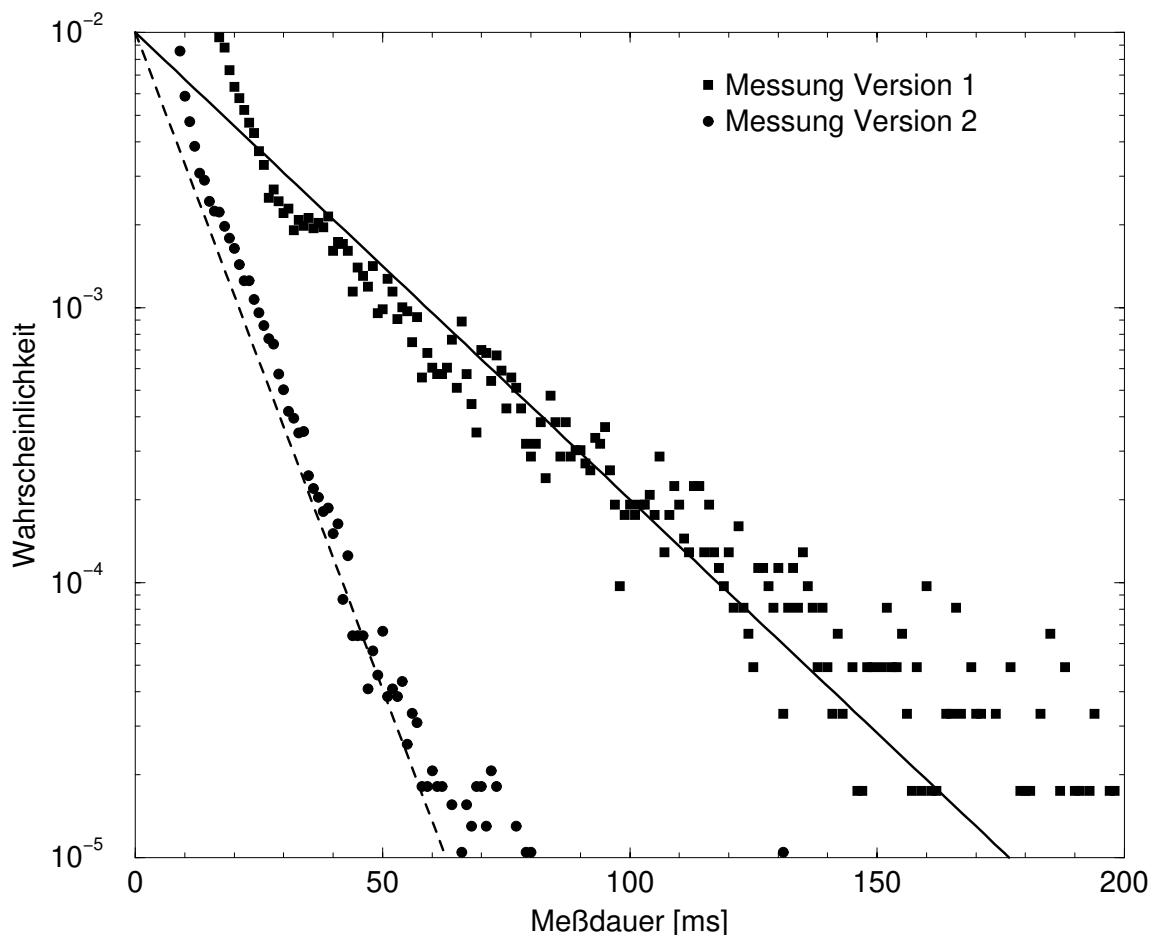


Abbildung 7.2.: Verteilung der Meßzeiten in der ersten und zweiten Ausbaustufe.

Für die Aufhängung der Spiegel wurden in der zweiten Ausbaustufe selbstgefertigte Fasern verwendet, die einen über die Länge variierenden Durchmesser hatten. Typische Durchmesser liegen zwischen 100 μm und 150 μm .

Verwendet man die in Tabelle 7.1 angegebenen Parameter für die Simulationsrechnung, so erhält man für die Pendelgüten und Resonanzfrequenzen die in Tabelle 7.2 angegebenen Werte.

In Abbildung 7.3 ist der Kontrast für das thermische Rauschen der Pendelmode, das Strahlungsdruckrauschen und das thermische Rauschen der Violinmoden aufgetragen. Unterhalb von 10 Hz ist das Rauschen durch das thermische Rauschen des Pendels dominiert. Oberhalb der 10 Hz bestimmt das thermische Rauschen der Violinmoden den Gesamttrausch-

pegel.

Das Strahlungsdruckrauschen spielt, bedingt durch die geringe Finesse des Resonators und den großen Durchmesser der Fasern keine Rolle.

In Abbildung 7.4 ist neben einem gemessenen Rauschspektrum der zweiten Ausbaustufe das Ergebnis der Simulation dargestellt. Bedingt durch die wesentlich größere Auflösungsbandbreite (6.8 Hz), die wie in Abbildung 7.1 als grauer Balken dargestellt ist, ist die Identifikation der Violinmoden schwieriger. Dennoch kann die Reihe der Violinfrequenzen bei 20.6 Hz und Vielfachem davon zugeordnet werden.

Bis auf die Resonanzen, die in der unmittelbaren Nähe der Netzfrequenz und deren Harmonischer liegen, stimmt, das durch die Simulation ermittelte Spektrum, mit dem gemessenen in Position und Stärke der Resonanzen gut überein. Die große Diskrepanz zwischen den simulierten und gemessenen Werten bei 40 Hz und 100 Hz kann den Grund haben, daß die Violinmoden durch ein nicht verschwindendes Rauschen der lokalen Regelungen bei diesen Frequenzen angeregt werden.

Der Einfluß der Seismik, in der ersten Ausbaustufe noch dominierend, ist nun deutlich verringert. Während das Spektrum für den Fall, daß nur ein Spiegel aufgehängt ist, erst ab Frequenzen oberhalb 200 Hz vollständig durch das Digitalisierungsrauschen dominiert ist, kann durch den Einsatz des zweiten aufgehängten Spiegels die Seismik soweit unterdrückt werden, daß bereits ab Frequenzen von etwa 70 Hz das Rauschen der Nachweiselektronik vorherrscht.

Entsprechend dem in Abbildung 7.3 dargestellten Kontrast dominiert oberhalb von 10 Hz das thermische Rauschen der Violinmoden das Spektrum.

Bedingt durch die geringe spektrale Auflösung der Messungen lassen sich aus dieser Messung keine Aussagen über das thermische Rauschen außerhalb der Resonanzen treffen, da das Spektrum zwischen den Resonanzen vollständig durch die Rauschintensitäten auf den Resonanzen bestimmt wird.

Parameter	Wert
Finesse des Resonators	1200
Faserdurchmesser	130 μm
Druck	10^{-6} mbar
Pendellänge	20 cm
Spiegelmasse	210 mg

Tabelle 7.1.: Realisierte Parameter für den aufgehängten Resonator

7. Ergebnisse und Diskussion

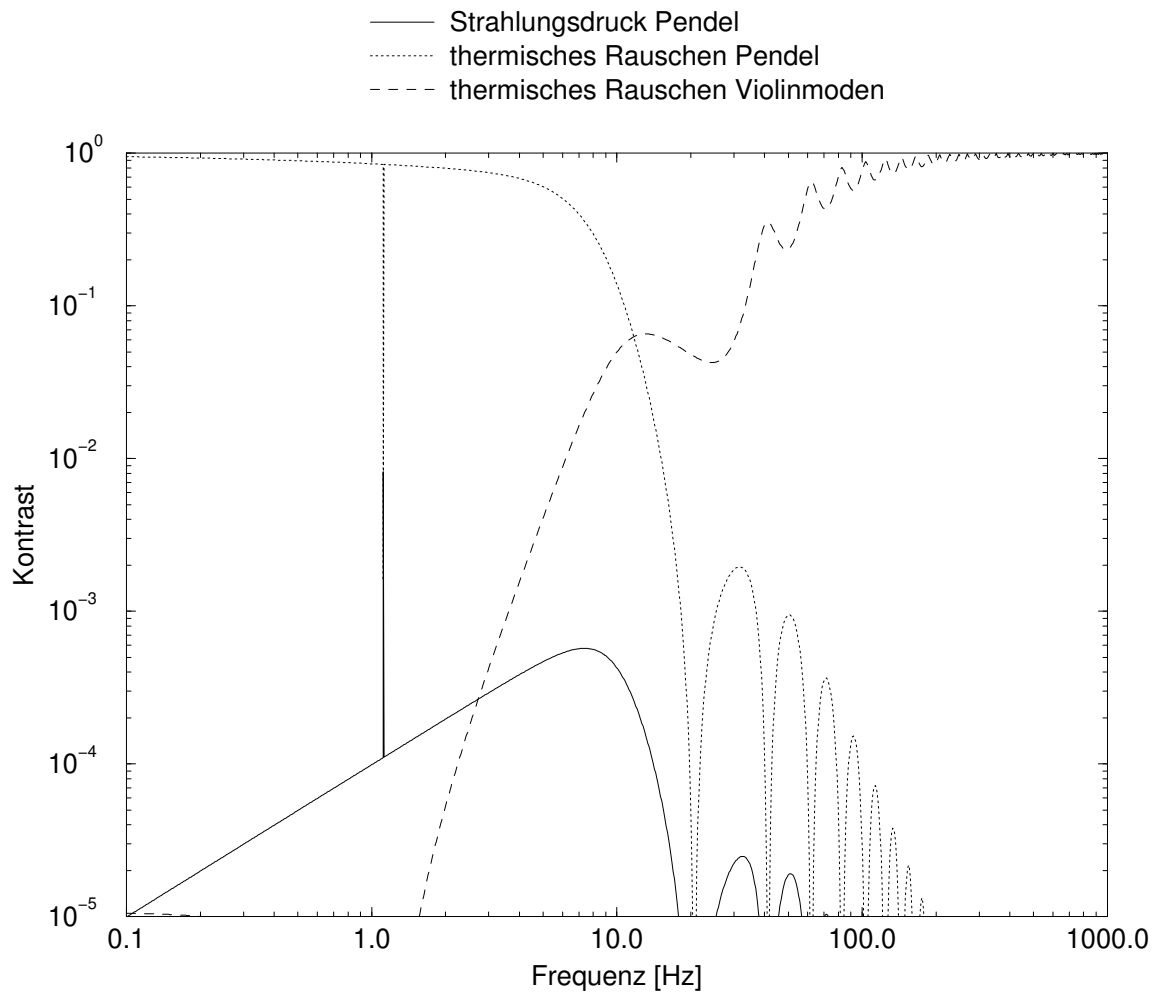


Abbildung 7.3.: Kontrast des Experimentes für reale Parameter für das thermische Rauschen und den Strahlungsdruck des Pendels, sowie das thermische Rauschen der Violinmoden. Die seismischen Störungen wurden vernachlässigt.

	Spiegel I	Spiegel II
Güte Pendelmode	$5 \cdot 10^5$	$1.1 \cdot 10^6$
Güte Violinmode	$2.8 \cdot 10^5$	$7.5 \cdot 10^5$
Frequenz der niedrigsten Violinmode	86.8 Hz	20.6 Hz
Frequenz der Kippmode	4.4 Hz	8.8 Hz
Frequenz der Rotation	—	8.8 Hz

Tabelle 7.2.: Frequenzen und effektive Güten für reale Parameter der zweiten Ausbaustufe

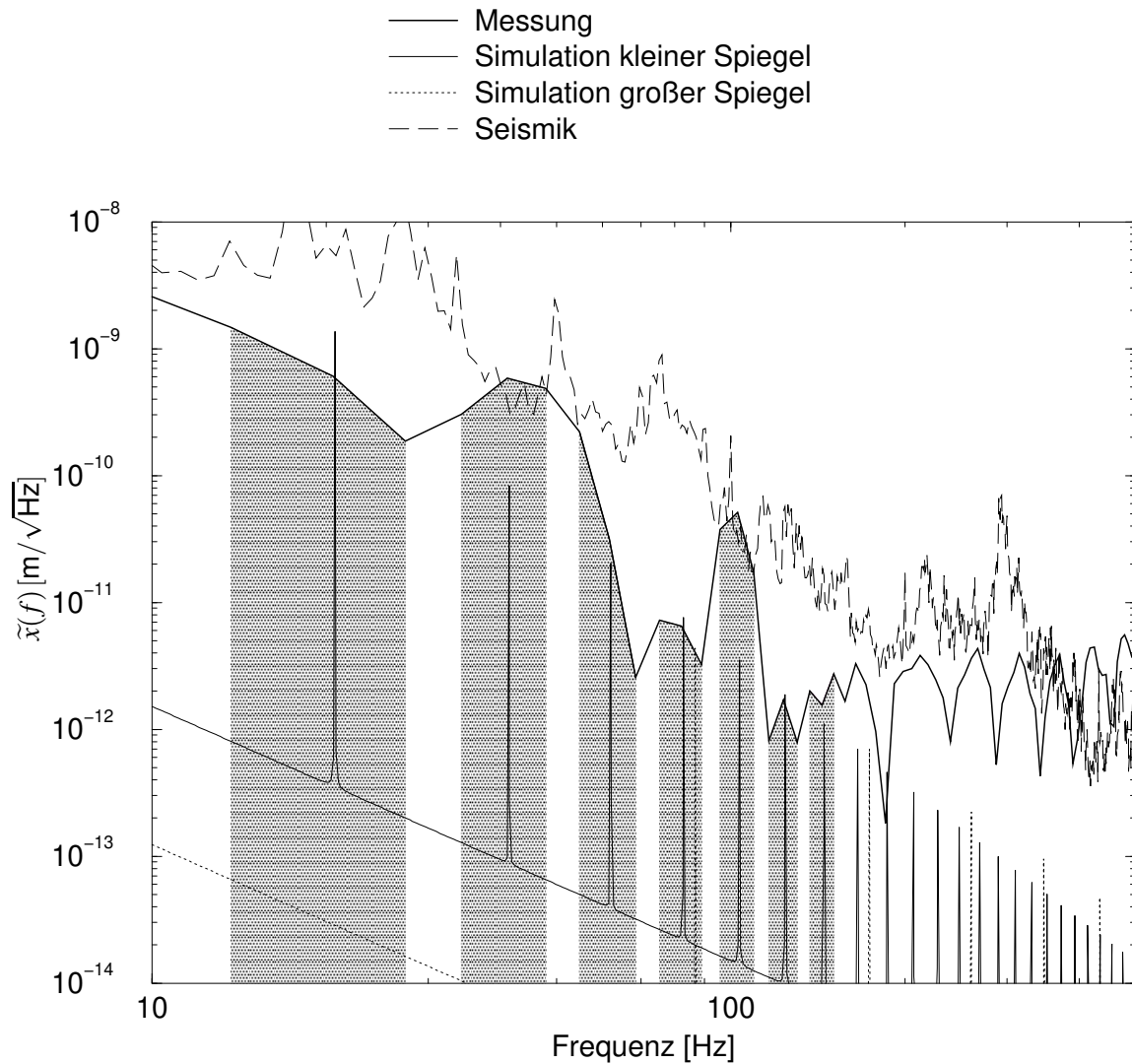


Abbildung 7.4.: Messung und simulierte Spektren für reale Parameter. Aufgetragen ist die lineare spektrale Dichte der Längenänderung des Resonators. Mit eingetragen sind die Violinmoden des größten Spiegels bei 87 Hz

7. *Ergebnisse und Diskussion*

8. Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit war es, ein Experiment zu entwickeln, mit dessen Hilfe es möglich sein sollte, fundamentale Rauschprozesse wie das Strahlungsdruckrauschen und das thermische Rauschen als Begrenzung der Empfindlichkeit interferometrischer Längenmessungen zu analysieren.

Dazu wurden zunächst die aus der Literatur bekannten Rauschquellen in einer Simulation zusammengefaßt, um auf diese Weise in der Planungsphase des Experimentes die optimalen Parameter für die Maximierung der Empfindlichkeit gegenüber den interessierenden Prozessen zu finden.

Im Rahmen dieser theoretischen Betrachtungen wurde für den Aspekt des Standard Quanten Limit eine Formulierung angegeben, mit deren Hilfe es einfach möglich ist, die Auswirkungen der HEISENBERG'schen Unschärferelation im Bild der spektralen Dichten zu beschreiben.

Die durchgeführten Simulationen ergaben, daß zum Nachweis des Strahlungsdruckrauschens zunächst einmal die Verminderung des thermischen Rauschens notwendig ist. Hierzu ist eine hohe mechanische Güte der optischen Komponenten erforderlich. Des weiteren lieferte die Simulation die für das Experiment optimalen Parameter für die Massen der Spiegel sowie den Durchmesser der Aufhängungsfäden, deren Relation die Frequenz der Violinmoden bestimmt. Es können daher bei Vorgabe eines kleinsten Faserdurchmessers die beteiligten Massen nicht beliebig klein gewählt werden, ohne daß das thermische Rauschen der Violinmoden die Strahlungsdruckeffekte vollständig überdeckt.

Da das Strahlungsdruckrauschen mit der Leistung an den Spiegeln wächst, ist es erforderlich, eine möglichst hohe Lichtleistung zu verwenden. Zugleich muß die Empfindlichkeit des Interferometers groß genug sein, um die durch den Strahlungsdruck induzierten Phasenänderungen der interferierenden Lichtfelder gegenüber dem Schrotrauschen des Nachweisprozesses zu detektieren. Hierfür bietet ein FABRY-PEROT-Resonator hoher Finesse die optimale Lösung, da in ihm nicht nur die Leistung mit der Finesse überhöht wird, sondern auch die Empfindlichkeit mit der Finesse steigt.

Mit einer Finesse von $\mathcal{F} = 10^5$, einer Spiegelmasse von 210 mg und einem Durchmesser der Fasern von 10 μm zeigt die Simulation, daß es möglich ist, Strahlungsdruckrauschen im Frequenzbereich von 20—200 Hz zu messen.

Der Aufbau des Experimentes erforderte neben der Konzeption des eigentlichen Meßinstrumentes, eine Analyse des seismischen Rauschens und den Aufbau eines Systems zur seismischen Vorisolierung, da im Bereich der Meßfrequenzen die Seismik zunächst der dominierende Rauschprozeß ist.

8. Zusammenfassung

Dieses wurde mit Hilfe unterschiedlicher Techniken wie den Einsatz seismischer Vorisolatoren und mehrfacher, elektronisch gedämpfter, Pendelstufen, realisiert. Das dabei aufgebaute System zur seismischen Vorisolation ist dazu geeignet, seismische Störungen in dem für das Experiment vorgesehenen Frequenzbereich bis zu drei Größenordnungen zu unterdrücken. Um die verbleibenden seismischen Störungen weiter zu verringern wurden Mehrfachpendel eingesetzt.

Kernstück des Experimentes ist ein FABRY-PEROT-Resonator hoher Finesse, der aus zwei aufgehängten Spiegeln besteht, die als Testmassen für den Strahlungsdruck und das thermische Rauschen dienen. Damit die für die Messung des Strahlungsdruckrauschens erforderlichen hohen mechanischen Güten der Spiegel erhalten blieben, erwies es sich als notwendig, Techniken zur monolithische Verbindung der Spiegel mit den Fasern, die der Aufhängung dienten, einzusetzen.

Die zusätzlich erforderliche Lagekontrolle und Dämpfung der Spiegelbewegung auf ihren Resonanzfrequenzen wurde mit einem, zu diesem Zweck weiterentwickelten, elektrostatischem Stellelement durchgeführt.

In der ersten Ausbaustufe des Experimentes konnte gezeigt werden, daß die Vorhersagen der Simulation bezüglich der Resonanzfrequenzen der Violinmoden zutreffen. Das zugrundeliegende Meßprinzip konnte anhand der Messungen mit nur einem aufgehängten Spiegel demonstriert werden.

Aufgrund der in dieser Ausbaustufe noch bestehenden Beschränkungen durch die Seismik, wurde in einer zweiten Ausbaustufe der Resonator aus zwei aufgehängten Spiegeln realisiert. Hierbei wurde die Empfindlichkeit des Aufbaus, wie durch die Simulation für die verwendeten Parameter vorhergesagt, durch das thermische Rauschen der Violinmoden auf den Resonanzen sowie im hohen Frequenzbereich durch das Rauschen der Nachweiselektronik begrenzt.

Durch diese Messungen wurde gezeigt, daß der Versuchsaufbau, seiner Konzeption entsprechend, in der Lage ist, für die erreichten Parameter das vorhergesagte thermische Rauschen der Violinmoden zu bestätigen.

Durch die Realisierung der Parameter, wie sie für eine Messung des Strahlungsdruckrauschens erforderlich sind, sollte das Experiment in einer weiteren Ausbaustufe in der Lage sein, Untersuchungen am Strahlungsdruck durchzuführen.

A. FABRY-PEROT-Interferometer

Ein FABRY-PEROT-Interferometer besteht aus zwei Spiegeln, die einen Resonator formen. Die Transferfunktionen für das transmittierte Feld $T_t(\omega)$ und das reflektierte Feld $T_r(\omega)$ sind

$$T_t(\omega) = \frac{t_1 t_2 e^{i\omega \frac{\tau}{2}}}{1 - r_1 r_2 e^{i\omega \tau}} \quad (\text{A.1})$$

$$T_r(\omega) = -r_1 + \frac{t_1^2 t_2 e^{i\omega \tau}}{1 - r_1 r_2 e^{i\omega \tau}} \quad (\text{A.2})$$

wobei $r_{1,2}$ die *Amplituden*-Reflektivitäten der Spiegel sind, sowie $t_{1,2} = \alpha_{1,2} t'_{1,2}$ die Produkte aus den Amplitudentransmissionen $t'_{1,2}$ sowie der sonstigen Verluste $\alpha_{1,2} \geq 1$ der Spiegel sind; die Energieerhaltung fordert $r^2 + t^2 = 1$. Die optische Länge L des Interferometers wird mittels $\tau = \frac{2L}{c}$ ausgedrückt.

Für die vom Interferometer reflektierte bzw. transmittierte Leistung P_r bzw. P_t gelten die üblichen AIRY-Funktionen:

$$\begin{aligned} P_r &= P_0 \frac{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \omega \tau}{1 - 2r_1 r_2 \cos \omega \tau + r_1^2 r_2^2} \\ &= P_0 \frac{\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 - 2\sqrt{\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2} \cos \omega \tau}{1 - 2\sqrt{\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2} \cos \omega \tau + \mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} P_t &= P_0 \frac{t_1^2 t_2^2}{1 - 2r_1 r_2 \cos \omega \tau + r_1^2 r_2^2} \\ &= P_0 \frac{\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2}{1 - 2\sqrt{\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2} \cos \omega \tau + \mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Die $\mathfrak{R}_i = r_i^2$ und $\mathfrak{T}_i = t_i^2$ sind die entsprechenden Intensitätskoeffizienten und gehorchen somit dem Zusammenhang $\mathfrak{R}_i + \mathfrak{T}_i = 1$. Als weitere Abkürzung sei das geometrische Mittel der Intensitätsreflektionen definiert.

$$\mathfrak{R} = \sqrt{\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2} = r_1 r_2 \quad (\text{A.5})$$

Die transmittierte Leistung wird maximal, und damit die reflektierte minimal, im Fall der sogenannten *Impedanzanpassung* $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2$.

$$P_{t,\max} = P_0 \frac{\mathfrak{T}^2}{(1 - \mathfrak{R})^2} = \frac{P_0}{\alpha^2} \quad (\text{A.6})$$

A. FABRY-PEROT-Interferometer

Für verlustfreie Spiegel ($\alpha = 1$) wird das FABRY-PEROT-Interferometer perfekt durchsichtig.

Die Linienbreite $\Delta\omega$ der AIRY-Funktionen beträgt

$$\delta\omega = \frac{2(1 - \mathfrak{R})}{\tau\mathfrak{R}} \quad (\text{A.7})$$

und hängt von den Verlusten und der „optischen Länge“ des Resonators ab. Führt man die Finesse \mathcal{F} als Quotient des freien Spektralbereichs ω_{FSR}

$$\omega_{\text{FSR}} = 2\pi\frac{c}{2L} \quad f_{\text{FSR}} = \frac{c}{2L} \quad (\text{A.8})$$

und der Linienbreite ein,

$$\mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{\mathfrak{R}}}{1 - \mathfrak{R}} \approx \frac{\pi}{1 - \mathfrak{R}} \quad \text{für } \mathfrak{R} \approx 1 \quad (\text{A.9})$$

so ist diese Größe unabhängig von den Abmessungen des Resonators und nur noch durch die Verluste bestimmt. Damit läßt sich die Linienbreite $\Delta\omega$ bzw. Δf auch durch die Finesse und den freien Spektralbereich ausdrücken.

$$\Delta\omega = \frac{\omega_{\text{FSR}}}{\mathcal{F}} \quad \Delta f = \frac{f_{\text{FSR}}}{\mathcal{F}} \quad (\text{A.10})$$

Die Leistungsüberhöhung in einem FABRY-PEROT-Interferometer, also das Verhältnis von P_{int} zu P_0 ist

$$\frac{P_{\text{int}}}{P_0} = \frac{\mathfrak{T}_1}{(1 - \mathfrak{R})^2} \quad (\text{A.11})$$

Im Fall der Impedanzanpassung kann die Überhöhung leicht durch die Finesse ausgedrückt werden und es ergibt sich ein Zusammenhang zwischen Finesse und Verlusten.

$$\frac{P_{\text{int}}}{P_0} = \frac{\mathcal{F}}{\pi\sqrt{\mathfrak{R}}} = \alpha^2 \quad (\text{A.12})$$

$$\approx \frac{\mathcal{F}}{\pi} \quad \text{für } \mathfrak{R} \approx 1 \quad (\text{A.13})$$

Ein nicht impedanzangepaßtes FABRY-PEROT-Interferometer kann als Kombination eines angepaßten mit geringerer Eingangsleistung und eines unabhängigen Strahlungsfeldes betrachtet werden, da eine Fehlanpassung bedeutet, daß das aus dem Resonator herauslaufende Licht eine geringere Intensität hat, als das direkt am Einkoppler reflektierte, und somit mit diesem nicht mehr vollständig zu Null interferieren kann. Dies kann durch einen geeignete Umformung von Gleichung (A.3) gezeigt werden:

$$P_r = P_0 \left(\frac{\tau_1 - \tau_2}{1 - \tau_1\tau_2} \right)^2 + P_0 \frac{t_1^2 t_2^2}{(1 - \mathfrak{R})^2} \frac{2\mathfrak{R}(1 - \cos\omega\tau)}{1 - 2\mathfrak{R}\cos\omega\tau + \mathfrak{R}^2} \quad (\text{A.14})$$

$$= P_1 + P_2 \frac{2\mathfrak{R}(1 - \cos\omega\tau)}{1 - 2\mathfrak{R}\cos\omega\tau + \mathfrak{R}^2} \quad (\text{A.15})$$

Dabei bezeichnet P_1 den Teil der Leistung, der nicht von der Frequenz ω des Lichts abhängt. Dieser Anteil der reflektierten Leistung ist konstant und kann wie ein unabhängiges Strahlungsfeld betrachtet werden. Der Term proportional zu P_2 beschreibt das Verhalten eines impedanzangepaßten Resonators mit einer Eingangsleistung P_2 , bei dem die Reflexion im Falle der Resonanz auf Null zurückgeht.

Dieser Zusammenhang erlaubt es, bei Rauschbetrachtungen stets vom impedanzangepaßten Fall auszugehen und das Rauschen des Zusatzterms getrennt zu betrachten.

A. FABRY-PEROT-*Interferometer*

B. POUND-DREVER-HALL-Verfahren

Das POUND-DREVER-HALL-Verfahren [17, 42] ist ein Verfahren zur Stabilisierung eines Lasers auf einen Resonator mittels Phasenmodulation des eingestrahnten Lichtfeldes und nachfolgender Demodulation des Photostroms der Photodiode, die das vom Resonator reflektierte Licht detektiert. Die wesentlichen Eigenschaften des Verfahrens sollen hier, mit der Einschränkung auf einen impedanzangepaßten Resonator, kurz erwähnt werden.

Das Eingangsfeld sei durch E_{in} gegeben:

$$E_{\text{in}} = \frac{1}{2} E_0 e^{i(\omega_L t + M \sin \Omega t)} + \text{c.c.} \quad (\text{B.1})$$

Dabei steht die Bezeichnung c.c. für das komplex konjugierte des vorstehenden Ausdrucks, so daß E_{in} reell wird. Wenn der Modulationsindex $M \ll 1$ ist, was in der Regel der Fall sein wird, so läßt sich (B.1) nach M entwickeln.

$$E_{\text{in}} = \frac{1}{2} E_0 e^{i\omega_L t} \left(1 + \frac{M}{2} e^{i\Omega t} - \frac{M}{2} e^{-i\Omega t} \right) \quad (\text{B.2})$$

Mit Hilfe der Transferfunktion (A.2) kann die reflektierte Leistung in Abhängigkeit von der Frequenz berechnet werden. Dabei ist es nützlich die Transferfunktion als Real- und Imaginärteil zu formulieren.

$$T_r(\omega_L) = r \frac{-(1+r^2)(1-\cos \omega_L \tau) + i(1-r^2) \sin \omega_L \tau}{1-2r^2 \cos \omega_L \tau + r^4} \quad (\text{B.3})$$

Die reflektierte Leistung ist dann:

$$P_{\text{out}} = P_0 \left| T_r(\omega_L) + \frac{M}{2} T_r(\omega_L + \Omega) - \frac{M}{2} T_r(\omega_L - \Omega) \right|^2 \quad (\text{B.4})$$

$$= P_0 \left(|T_r(\omega_L)|^2 + M \left(A(\omega_L, \Omega) \cos \Omega t - D(\omega_L, \Omega) \sin \Omega t \right) + \frac{M^2}{4} \left(|T_r(\omega_L - \Omega)|^2 + |T_r(\omega_L + \Omega)|^2 \right) \right) \quad (\text{B.5})$$

B. POUND-DREVER-HALL-Verfahren

Dabei sind die Funktionen („Quadraturen“) $A(\omega_L, \Omega)$ und $D(\omega_L, \Omega)$ gegeben durch

$$A(\omega_L, \Omega) = \frac{2\Re(1 - \Re^2)}{N(\omega_L)N(\omega_L + \Omega)N(\omega_L - \Omega)} \sin \omega_L \tau \sin \Omega \tau \times \left((1 + \Re)^2 + 2\Re(\cos \omega_L \tau - \cos \Omega \tau) \right) \quad (\text{B.6})$$

$$D(\omega_L, \Omega) = \frac{2\Re(1 - \Re^2)}{N(\omega_L)N(\omega_L + \Omega)N(\omega_L - \Omega)} \sin \Omega \tau \times \left((1 - \cos \omega_L \tau) \left((1 - \Re^2) + 2\Re(\cos \omega_L \tau - \cos \Omega \tau) \right) \right) \quad (\text{B.7})$$

sowie die Betragsquadrate der Transferfunktionen als

$$|T_r(\omega_L)|^2 = 2\Re \frac{1 - \cos \omega_L \tau}{N(\omega_L)} \quad (\text{B.8})$$

$$N(\omega_L) = 1 - 2\Re \cos \omega_L \tau + \Re^2 \quad . \quad (\text{B.9})$$

Demodulation mit einem Lokalszillator der Frequenz Ω und Phase φ liefert das Signal s

$$s = \frac{P_0 M}{2} (A(\omega_L, \Omega) \sin \varphi - D(\omega_L, \Omega) \cos \varphi) \quad (\text{B.10})$$

Betrachte man $A(\omega_L, \Omega)$ bzw. $D(\omega_L, \Omega)$ für Seitenbandabstände $\Omega \tau$ groß gegenüber der Linienbreite $\Delta \omega_L = \frac{c}{2L\mathcal{F}}$, so lassen sich die Dispersions- und Absorptionsstrukturen für den Träger und die Seitenbänder trennen, und man erhält aus dem Dispersionsprofil die Linienbreite des Resonators als Abstand von Maximum zu Minimum sowie aus dem Absorptionssignal den Seitenbandabstand. (Abb. B.1 für $\eta = 10$). In diesem Fall eignet sich das Dispersionssignal besonders als Frequenzdiskriminator und damit als Regelsignal für eine Stabilisierung, da es im Vergleich zum Absorptionssignal in der Nähe der Resonanz eine größere Steigung hat und somit ein größeres Signal erzeugt.

Für Seitenbandabstände, die in der Größenordnung der Linienbreite liegen ($\Omega \approx \Delta \omega$), liefert das POUND-DREVER-HALL-Verfahren zwar Regelsignale (Abb. B.1 für $\eta = 1$), der Unterschied zwischen Absorptions- und Dispersionssignalen ist jedoch nicht mehr so deutlich, zudem liefert in diesem Falle das Absorptionssignal das steilere Diskriminatorsignal. Da die Auswahl zwischen dem Absorptions- und dem Dispersionssignal über die Phase φ des Lokalszillators des elektrischen Demodulators getroffen werden kann, ist es leicht möglich, sowohl das eine wie auch das andere Signal bereitzustellen.

Die Linienbreite läßt sich für $\eta \approx 1$ nur noch eingeschränkt direkt an dem Signal ablesen. Hier liefert, soweit möglich, ein Anpassungsrechnung für die Parameter des theoretischen Signals aus Gleichung (B.5) an das gemessene Signal gute Ergebnisse. 6.8.3).

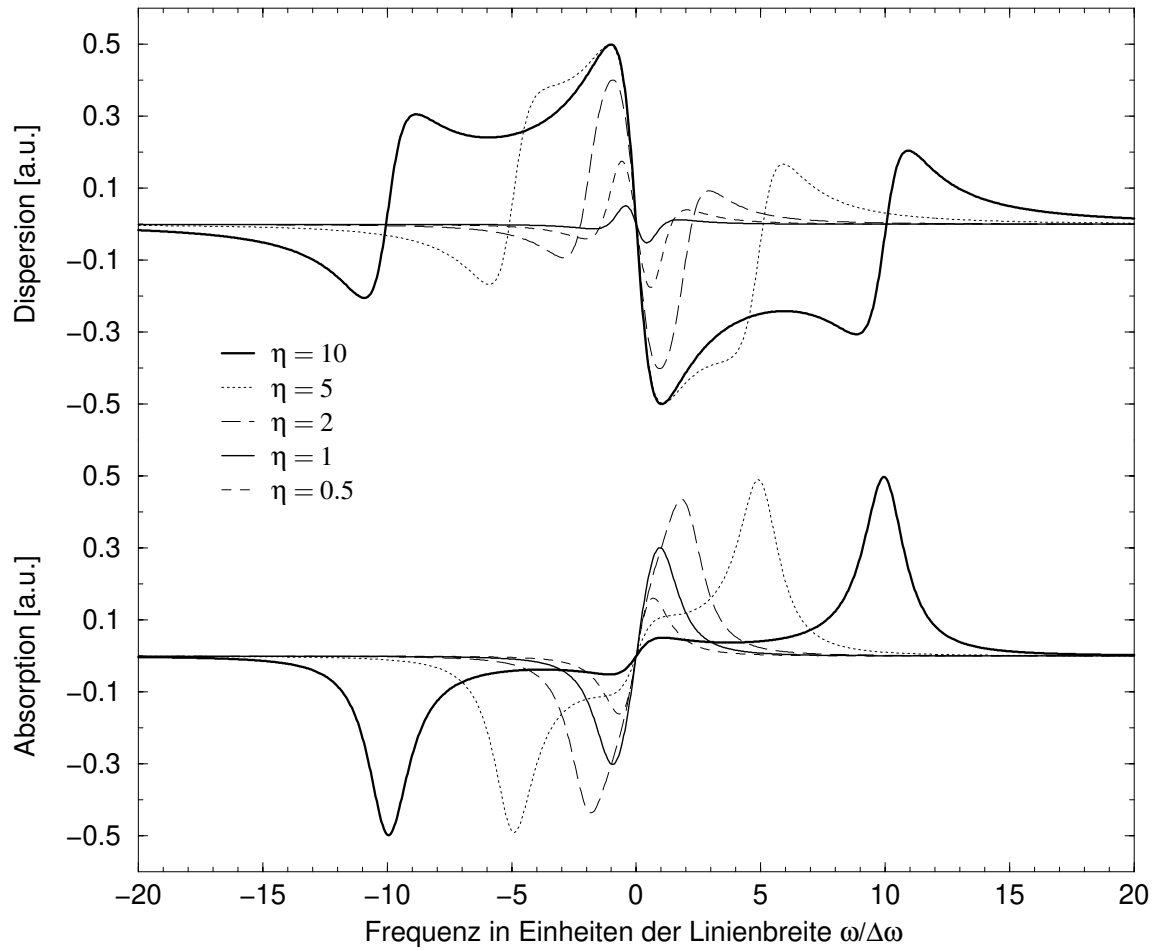


Abbildung B.1.: Absorptionssignal (untere Grafik) und Dispersionssignal (ober Grafik) für verschiedene $\eta = \frac{\Omega}{\delta\omega_L}$. Fett hervorgehoben sind die Kurven für $\eta = 10$, halbfett die Kurven für $\eta = 1$.

B.1. Rauschbetrachtungen

Die Steigungen der Signale bei der Resonanzfrequenz ω_{L0} geben die Signaländerung je Frequenzänderung an, und betragen:

$$\left. \frac{\partial A(\omega_L, \Omega)}{\partial \omega_L} \right|_{\omega_L = \omega_{L0}} = \tau M P_0 \frac{\mathfrak{R} \sin \Omega \tau}{N(\Omega)} \quad (\text{B.11})$$

$$\left. \frac{\partial D(\omega_L, \Omega)}{\partial \omega_L} \right|_{\omega_L = \omega_{L0}} = -\tau M P_0 \mathfrak{R} \frac{1 + \mathfrak{R}}{1 - \mathfrak{R}} \frac{1 - \cos \Omega \tau}{N(\Omega)} \quad (\text{B.12})$$

Damit ergibt sich die Steigung des Signals s bei ω_{L0} zu

$$s' \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{\partial s}{\partial \omega_L} \right|_{\omega_L = \omega_{L0}} = \tau \frac{M P_0}{N(\Omega)} \mathfrak{R} \left(\sin \Omega \tau \sin \varphi + \frac{1 + \mathfrak{R}}{1 - \mathfrak{R}} (1 - \cos \Omega \tau) \cos \varphi \right) \quad (\text{B.13})$$

Beschränkt man sich auf den Fall geringer Verluste des Resonators ($\mathfrak{R} \approx 1$) kann man den Term $\sim \sin \Omega \tau$ vernachlässigen. Dies entspricht der Feststellung, daß bei geringen Linienbreiten daß Absorptionssignal auf der Resonanz kein gutes Fehlersignal mehr liefert. Stellt man weiterhin $\varphi = 0$ ein (wonach dann der Term $\sim \sin \Omega \tau$ ohnehin verschwindet), dann vereinfacht sich Gl. (B.13) zu

$$s' = \tau \frac{M P_0}{N(\Omega)} \frac{2\mathfrak{R}}{1 - \mathfrak{R}} (1 - \cos \Omega \tau) \quad (\text{B.14})$$

Jedes Rauschen, das zusätzlich zum Signal vorhanden ist, so z. B. ein Rauschen des Nachweisdetektors oder das Schrotrauschen des detektierten Lichts, kann wie ein äquivalentes Frequenzrauschen betrachtet betrachtet werden. Bezeichnet man die spektrale Dichte eines solchen Rauschens als $S_s(\omega)$ und die spektrale Dichte des äquivalenten Frequenzrauschens als $S_{\omega_L}^{\text{äq}}(\omega)$ so schreibt sich diese mit Hilfe von s' als

$$S_{\omega_L}^{\text{äq}}(\omega) = \frac{1}{s'^2} S_s(\omega) \quad (\text{B.15})$$

Eine Quelle des Rauschens ist das Schrotrauschen des Lichts auf der detektierenden Photodiode. Dazu muß die Intensität des detektierten Lichts bei der Fourierfrequenz $\omega = 0$, d. h. bei „DC“ berücksichtigt werden. Aufgrund des frequenzunabhängigen Verlaufes des Schrotrauschens existieren „Rauschseitenbänder“ bei der Modulationsfrequenz. Diese führen zu einer Verschiebung des Quadratursignals und damit zu einem äquivalenten Frequenzrauschen.

Da der Resonator als impedanzangepaßt angenommen werden soll, muß zur Ermittlung der DC-Intensität nur die Intensität der Seitenbänder P_{SB} herangezogen werden. Diese ist in der Resonanz durch

$$P_{\text{SB}} = P_0 M^2 \mathfrak{R} \frac{1 - \cos \Omega \tau}{N(\Omega)} \quad (\text{B.16})$$

gegeben. Die spektrale Dichte des Schrotrauschens ist demnach

$$S_s^{\text{SN}}(\omega) = \hbar\omega_L P_{\text{SB}} = \hbar\omega_L P_0 M^2 \mathfrak{R} \frac{1 - \cos \Omega\tau}{N(\Omega)} \quad (\text{B.17})$$

und die spektrale Dichte des äquivalenten Frequenzrauschens wird *in dieser Näherung* unabhängig vom Modulationsindex, hängt aber stark von der erreichbaren Finesse \mathcal{F} ab.

$$S_{\omega_L}^{\text{äq}}(\omega) = \frac{\hbar\omega_L}{4\tau^2 P_0} \frac{(1 - \mathfrak{R})^2}{\mathfrak{R}} \frac{N(\Omega)}{1 - \cos \Omega\tau} \quad (\text{B.18})$$

$$\approx \frac{\hbar\omega_L}{2\tau P_0} \frac{\pi^2}{\mathcal{F}^2} \quad \text{für } \mathfrak{R} \approx 1 \quad (\text{B.19})$$

Umgerechnet in die spektrale Dichte der Längenänderung ergibt dies

$$S_x^{\text{äq}}(\omega) = \frac{\hbar c^2}{4P_0 \omega_L} \frac{2\pi^2}{\mathcal{F}^2}. \quad (\text{B.20})$$

Der Vollständigkeit halber sei der Ausdruck für das Schrotrauschen angegeben, falls nicht mehr $M \ll 1$ gelten sollte. Die Rechnung liefert dann unter Berücksichtigung der Tiefpaß-eigenschaft des Resonators für Fourierfrequenzen größer als die Linienbreite $\Delta\omega$:

$$S_{\omega_L}^{\text{äq}}(\omega) = \frac{\hbar\omega_L}{2P_0} \frac{\pi^2}{\mathcal{F}^2} \frac{1}{J_0^2(M)} \left(1 + \left(\frac{\omega}{\Delta\omega} \right)^2 \right) \quad (\text{B.21})$$

Die Funktion $J_0(M)$ ist die Besselfunktion nullter Ordnung [9] und berücksichtigt, daß für hohe Modulationsindizes M bereits ein relevanter Teil der Intensität P_0 in den Seitenbändern vorhanden ist.

B. POUND-DREVER-HALL-Verfahren

C. Fouriertransformationen

Im Rahmen dieser Arbeit gelten folgende Definitionen für die Fouriertransformierte $\mathfrak{F}\{h\} = h(\omega)$ einer Funktion $h(t)$ sowie für die Rücktransformierte $\mathfrak{F}^{-1}\{h\}$

$$\mathfrak{F}\{h\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{C.1})$$

$$\mathfrak{F}^{-1}\{h\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(\omega)e^{-i\omega t} dt \quad (\text{C.2})$$

Daraus folgen unmittelbar einige nützliche Formeln:

$$\mathfrak{F}\{h(t - \tau)\} = \mathfrak{F}\{h(t)\}e^{-i\omega\tau} \quad (\text{C.3})$$

$$\mathfrak{F}\{1\} = 2\pi\delta(t) \quad (\text{C.4})$$

$$\mathfrak{F}\{\delta(t)\} = 1 \quad (\text{C.5})$$

Ist die Funktion $h(t)$ reell, so gilt für ihre Fouriertransformierte

$$h(\omega) = h^*(-\omega) \quad (\text{C.6})$$

wie durch Einsetzen in Gl. (C.1) unmittelbar ersichtlich ist. Mit Hilfe der Fouriertransformation kann die Faltung zweier Funktionen im Zeitbereich als Multiplikation ihrer Fouriertransformierten dargestellt werden.

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)h(t - \tau)d(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)h(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega \quad (\text{C.7})$$

Die Fouriertransformierte $h(\omega)$ die ja zunächst von der Kreisfrequenz abhängt, wird auch häufig mit Hilfe der Frequenz f mit

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (\text{C.8})$$

ausgedrückt. Dann ergibt sich nach der Definition (C.1) für $h(f)$:

$$h(f) = 2\pi h(\omega = 2\pi f) \quad (\text{C.9})$$

C. *Fouriertransformationen*

Literaturverzeichnis

- [1] BARILLET, R., A. BRILLET, R. CHICHE, F. CLEVA, L. LATRACH und C.N. MAN: *An injection-locked Nd:YAG laser for the interferometric detection of gravitational waves*. Meas. Sci. Technol., 7, 1996.
- [2] BARTHEL, A.: *Abstimmbares Signal-Recycling mit externer Modulation*. Diplomarbeit, Universität Hannover, Institut für Atom- und Molekülphysik, 1997.
- [3] BRAGINSKY, V.B. und F.YA. KHALILLI: *Quantum Measurements*. Cambridge University Press, 1992.
- [4] BRAGINSKY, V.B., V.P. MITROFANOV und V.I. PANOV: *Systems with small Dissipation*. University of Chicago Press, 1985.
- [5] BRAGINSKY, V. B., V. P. MITROFANOV und K. V. TOKMAKOV: *On the thermal noise from the violin modes of the mass suspension in gravitational wave antennae*. Phys. Letters A, 186:18–20, 1993.
- [6] BRAGINSKY, V. B., V. P. MITROFANOV und K. V. TOKMAKOV: *Energy dissipation in violin modes of the test mass suspensions of gravitational-wave antennas*. Physics-Doclady, 40(11):564–566, 1995.
- [7] BRAGINSKY, V. B., V. P. MITROFANOV und K. V. TOKMAKOV: *Energy dissipation in the pendulum mode of the test mass suspension of a gravitational wave antenna*. Phys. Letters A, 218:164–66, 1996.
- [8] BREITENBACH, G., T. KALKBRENNER, I. TITTONEN, J. MLYNEK und S. SCHILLER: *Ein optomechanischer Sensor bei kryogenen Temperaturen*. In: *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft*, Band 33 der Reihe VI, Seite 176. Physikverlag, 1988.
- [9] BRONSTEIN, I.N. und K.A. SEMENDAJEW: *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Nauka, Moskau; BSB B.G.Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1987.
- [10] CALLEN, H.B. und R.F. GREEN. Phys. Rev., 86:702, 1952.
- [11] CALLEN, H.B. und T.A. WELLTON. Phys. Rev., 83:34, 1951.

- [12] CAVES, C.M.: *Quantum-mechanical noise in an interferometer*. Phys. Rev. D, 23:1693–1708, 1981.
- [13] COHEN, E.R. und B.N. TALOR: *1986 Adjustment of the Fundamental Physical Constant*. Rev. Mod. Phys., 59:1121, 1987.
- [14] DANZMANN, K., H. LÜCK, A. RÜDIGER, R. SCHILLING, M. SCHREMPEL, W. WINKLER, J. HOUGH, G. P. NEWTON, N. A. ROBERTSON, H. WARD, A. M. CAMPBELL, J. E. LOGAN, D. I. ROBERTSON, K. A. STRAIN, J. R. J. BENNETT, V. KOSE, M. KÜHNE, B. F. SCHUTZ, D. NICHOLSON, J. SHUTTLEWORTH, H. WELLING, P. AUFMUTH, R. RINKLEFF, A. TÜNNERMANN und B. WILLKE: *GEO 600 – Proposal for a 600m laser-interferometric gravitational wave antenna*, Band 190 der Reihe MPQ. MPQ Garching, 1994.
- [15] DAVIDOVICH, L.: *quantum fluctuations*, Band LXIII der Reihe *Les Houches*, Course 5, Seite 215. North Holland, 1997. Sub-Poisson Photon Statistics.
- [16] DORSEL, A.: *Strahlungsdruckinduzierte optische Bistabilität*. Doktorarbeit, Ludwig-Maximilians Universität München, 1985.
- [17] DREVER, R.W.P., J.L. HALL, F.V. KOWALSKI, J. HOUGH, G.M. FORD und A.J.MUNLEY: *Laser phase and frequency stabilisation using an optical resonator*. Appl. Phys. B, 31:97–105, 1983.
- [18] FERREIRINHO, J.: *Internal friction in high Q materials*. In: D.G.BLAIR (Herausgeber): *The detection of gravitational waves*. Cambridge University Press, 1991.
- [19] FREITAG, I.: *Entwicklung und Charakterisierung einer Laserstrahlquelle für den interferometrischen Nachweis von Gravitationsquellen*. Doktorarbeit, Universität Hannover, 1994.
- [20] GILLESPIE, A. und F. RAAB. Phys. Lett, A(178):357, 1993.
- [21] GOLDSTEIN, H.: *Klassische Mechanik*. AULA-Verlag Wiesbaden, 1963.
- [22] GONZÁLEZ, G.I. und P.R. SAULSON: *Brownian Motion of a mass suspended by an anelastic wire*. J. Acoust. Soc. Am., 96(1):207–212, Juli 1994.
- [23] GRIMSEHL: *Lehrbuch der Physik, Mechanik*, Band 1. BSB B.G.Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 26 Auflage, 1989.
- [24] HEIDMANN, A. und S. REYNAUD: *Photon noise reduction by reflection from a movable mirror*. Phys. Rev. A, 50:4237, 1994.
- [25] HEINZEL, G. private Mitteilung.
- [26] HOHLS, F.: *Strahlungsdruck in Laserinterferometern*. Diplomarbeit, Institut für Atom- und Molekülphysik der Universität Hannover, 1995.

- [27] HUTCHINSON, J.R. J. Appl.Mech., 47:901, 1980.
- [28] JACOBS, K., P. TOMBESI, M.J. COLLET und D.F. WALLS: *Quantum-nondemolition measurement of photon number using radiation pressure*. Phys. Rev. A, 49:1961, 1994.
- [29] JENNRICH, O.: *Quantenmechanik des Gravitationswellendetektors*. Diplomarbeit, Institut für theoretische Physik, Universität Hannover, 1993.
- [30] KANE, T.J. und R.L. BYER: *Monolithic, unidirectional single-mode Nd:YAG*. Opt. Lett., 10:65, 1985.
- [31] KRÖPKE, I.: *Frequenzstabile, diodengepumpte Nd:YAG Miniatur-Ringlaser*. Doktorarbeit, Universität Hannover, 1992.
- [32] LANDAU, L.D. und E.M. LIFSCHITZ: *Lehrbuch der theoretischen Physik, Elastizitätstheorie*, Band 7. Akademie Verlag Berlin, 5 Auflage, 1983.
- [33] LANDAU, L.D. und E.M. LIFSCHITZ: *Lehrbuch der theoretischen Physik, Mechanik*, Band 1. Akademie-Verlag Berlin, 12 Auflage, 1987.
- [34] LAW, C.K.: *Interaction between a moving mirror and radiation pressure: A hamilton formulation*. Phys. Rev. A, 51:2537, 1995.
- [35] LIFSCHITZ, E.M. und L.P. PITAJEWSKI: *Lehrbuch der theoretischen Physik, Statistik Teil I*, Band 5. Akademie-Verlag Berlin, 6 Auflage, 1984.
- [36] LOGAN, J.E.: *An Investigation of Some Mechanical and Optical Properties of Materials for Test Masses in Laser Interferometric Gravitational Wave Detectors*. Doktorarbeit, Department of Physics and Astronomy, University of Glasgow, 1993.
- [37] MAASS, D.: *Signal-Recycling mit Schnupp-Modulation*. Diplomarbeit, Universität Hannover, Institut für Atom- und Molekülphysik, 1995.
- [38] MANCINI, S. und P. TOMBESI: *Quantum noise reduction by radiation pressure*. Phys. Rev. A, 49:4055, 1994.
- [39] MANDEL, L. und E. WOLF: *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1995.
- [40] NELSON, P.: *An Intermediate-Mass Suspension System for Interferometric Gravitational Wave Detectors*. unveröffentlicht.
- [41] NOWICK, A.S. und B.S. BERRY: *Anelastic relaxation in crystalline solid*. Academic Press, New York and London, 1972.
- [42] POUND, R.V.: *Electronic frequency stabilization of microwave oscillators*. Rev. Sci. Instrum., 17:490–505, 1946.

- [43] PRESS, W.H., S.A. TEUKOLSKY, W.T. VETTERLING und B.P. FLANNERY: *Numerical Recipes in C, The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 2. Auflage, 1992.
- [44] SAULSON, P.R.: *Thermal noise in mechanical experiments*. Phys. Rev. A, 47:3173, 1993.
- [45] SAULSON, P.R.: *Fundamentals of Interferometric Gravitational Wave Detectors*. World Scientific, 1994.
- [46] SCHÄNZLER, M.: *Seismische Isolation für ein hängendes Interferometer*. Diplomarbeit, Institut für Atom- und Molekülphysik der Universität Hannover, 1997.
- [47] SCHNUPP, L. Vortrag beim European Collaboration Meeting on Interferometric Detection of Gravitational Waves, Sorent, 1988.
- [48] SCHWABL: *Quantenmechanik*. Springer, 2. Auflage, 1990.
- [49] SHAW, G. und J. MANDEL: *Quantum Field Theory*. John Wiley & Sons, 1984.
- [50] SIEGMAN, A.E.: *Lasers*. University Science Books, Mill Valley, California, 5. Auflage, 1986.
- [51] STRAIN, K. A. und B. J. MEERS: *Experimental Demonstration of Dual Recycling for Interferometric Gravitational-Wave Detectors*. Phys. Rev. Lett., 66(11):1391, 1991.
- [52] TRAEGER, S.: *Interferometrische Messungen an Systemen hoher Güte*. Diplomarbeit, Institut für Atom- und Molekülphysik, Universität Hannover, 1995.
- [53] TRAEGER, S.: *Thermisches Rauschen — Eine Empfindlichkeitsgrenze der Interferometrie*. Doktorarbeit, Institut für Atom- und Molekülphysik der Universität Hannover, 1998.
- [54] VAN DER ZIEL, A.: *Noise*. Prentice-Hall, 1970.
- [55] WILLKE, B. private Mitteilung.

Danksagung

Eine solche Arbeit entsteht nicht, ohne daß zahlreiche Personen daran beteiligt gewesen wären, denen Dank gebührt. Zu allererst möchte ich daher Herrn Prof. Dr. Karsten Danzmann dafür danken, daß er das Vertrauen aufbrachte, mich mit der Durchführung dieser Arbeit zu betrauen, für die Geduld und die stete Diskussionsbereitschaft im Verlaufe der Arbeit, und für den Optimismus, den er auch in schwierigen Situation ausstrahlt. Der Einblick in internationale Großprojekte gehört sicher zu den faszinierendsten Eindrücken der letzten Jahre.

Den Mitarbeitern dieses Instituts, sowie der Außenstelle des MAX-PLANCK-Instituts für Quantenoptik, mit denen ich die vergangenen Jahre verbringen durfte, gilt mein Dank für die herzliche und kreative Arbeitsatmosphäre. Hier seien Dr. Peter Aufmuth, Sascha Brozek, Dr. Guido Müller, Mario Müller, Volker Quetschke, Rolf Rinkleff und Andreas Wicht stellvertretend für alle anderen genannt. Es war stets ein Vergnügen, mit ihnen zu arbeiten.

Einen Dank auch an die Mitarbeiter der elektronischen und feinmechanischen Werkstätten sowie des Sekretariats. Ohne ihren Einsatz wären viele Dinge nicht möglich gewesen.

Den Herren Ralf Baehnisch, Frank Hohls, und Michael Schänzler sei an dieser Stelle für den außergewöhnlichen Einsatz gedankt, mit dem sie zu dem Projekt beitrugen, Herrn Michael Peterseim für die gemeinsame Arbeit, die eine schöne Abwechslung war.

Auch den Mitarbeitern des MAX-PLANCK-Instituts für Quantenoptik in München, besonders Gerhard Heinzl, Dr. Albrecht Rüdiger, Roland Schilling und Dr. Walter Winkler gilt mein Dank. Ihre Hilfe und ihr Rat war stets wertvoll.

Special thanks to all the other members of the GEO600 team. The discussions with you have always been joyful and inspiring. Participating at the meetings and being involved into an international collaboration was a fascinating experience. To Prof. Jim Hough and Prof. Bernhard Schutz: I owe you for the recommendations you gave.

Besonders den Herren Dr. Harald Lück sowie Mathias Schrempel, PhD., gebührt Dank für ihre fachliche Unterstützung, die stete Bereitschaft, auftretende Probleme zu diskutieren, und die freundschaftliche Atmosphäre, die sie stets zu vermitteln wußten. Ihnen verdanke ich vieles.

Ein spezieller Dank gilt den Herren Dr. Benno Willke und Stefan Traeger, ohne deren Mitarbeit dieses Projekt nicht möglich gewesen wäre und deren steter Antrieb viel zum Gelingen beigetragen hat. Ihre Hilfe ging weit über das normale Maß hinaus.

An dieser Stelle soll es nicht ohne Erwähnung bleiben, daß mir ohne die Unterstützung meiner Eltern weder das Studium noch diese Arbeit möglich gewesen wäre. Für diese Un-

Danksagung

terstützung gebührt ihnen ein großes Dankeschön. Ich hoffe, eines Tages alles das weitergeben zu können, was ich von euch gelernt habe.

Einen großen Dank auch an alle diejenigen, deren Freundschaft ich in den letzten Jahren erfahren durfte. Es ist schön zu wissen, daß es euch gibt.

Mein tiefempfundener Dank gilt Frau Dr. Christina Lemke. Ohne Dich wären die letzten Jahre mit sehr viel weniger Freude erfüllt gewesen.

Teile der Arbeit wurden mit Mitteln des SFB 407, Quantenlimitierte Meßprozesse, gefördert. Dafür sei der DFG gedankt.

Lebenslauf

Oliver Jennrich
Am Schatzkampe 28
30163 Hannover

Familienstand: ledig

7. April 1967	geboren in Hannover
August 1973	Einschulung Grundschule Neuwarmbüchen
Juli 1977	Einschulung Gymnasium Isernhagen
Juni 1986	Abitur
Oktober 1986 — Dezember 1987	Grundwehrdienst
Oktober 1987	Diplomstudiengang Physiks an der Universität Hannover
Februar 1993	Diplom im Fach Physik
seit Juli 1993	Promotionsstudiengang Physik an der Universität Hannover
	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Atom- und Molekülphysik
seit August 1993	Mitglied des Graduiertenkollegs <i>Photonen, Atomare Teilchen und deren Wechselwirkungen</i>

Publikationen

- 1993 Diplomarbeit über *Quantenmechanik des Gravitationswellendetektors* am Institut für theoretische Physik der Universität Hannover
- 1996 *Accuracy of parameter estimation of gravitational waves with LISA*, M. Peterseim, O. Jennrich, and K. Danzmann, *Class. Quantum Grav.* **13** (1996), A279-A284
- 1996 *Thermal noise in interferometric gravitational-wave detectors*, S. Traeger, O. Jennrich, B. Willke, and K. Danzmann, EQEC'96 Technical Digest; Hamburg September 8-13, 1996
- 1997 *Polarization resolution of LISA*, O. Jennrich, M. Peterseim, K. Danzmann and B.F. Schutz, *Class. Quantum Grav.* **14** (1997), 1525-1529
- 1997 *Angular resolution of LISA*, M. Peterseim, O. Jennrich, K. Danzmann and B.F. Schutz, *Class. Quantum Grav.* **14** (1997), 1507-1512
- 1997 *Galactic Halo Object Space Telescope*, ed. A. Golden, S. Traeger in *Fundamental Physics in Space*, ed. A. Wilson, ESA SP-420 (1997)
- 1997 *An experiment for the investigation of the SQL*, O. Jennrich, S. Traeger and K. Danzmann in Proceedings of the 2nd Edoardo Amaldi Conference on Gravitational Waves (to be published), CERN, Genf 1.-4. Juli 1997