ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 37-3 (2019), 129-148
Investigaciones didácticas
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2506
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Desarrollo y cambios en las maneras de justificar matemáticamente de estudiantes cuando trabajan en un ambiente sociocultural

Development and changes in the students' ways of mathematical justification when working in a sociocultural environment

Álvaro Sebastián Bustos Rubilar
Universidad de Valparaíso, Chile
alvaro.bustos@uv.cl

Gonzalo Zubieta Badillo
Cinvestav-IPN, México
gzubieta@cinvestav.mx

RESUMEN • En este artículo reportamos cómo se promovió un acercamiento desde la fase preformal hacia la fase formal en la manera de justificar de estudiantes. Se implementó una actividad diseñada bajo los principios del método de enseñanza de aprendizaje colaborativo, debate científico y autorreflexión (ACODESA), con el fin de generar un ambiente sociocultural en la clase de matemáticas y así promover las interacciones sociales entre los estudiantes. Exponemos el caso de un alumno que cambió su manera de justificar tras intercambiar ideas y discutir con sus pares durante el análisis de las justificaciones construidas por cada uno de ellos.

PALABRAS CLAVE: Demostración; Justificación; Proceso de validación matemática; Niveles y tipos de prueba; ACODESA.

ABSTRACT • In this article we report how an approach was promoted from the pre-formal to the formal stage regarding the students' way of justifying mathematical reasoning. We implemented an activity based on the ACODESA teaching method to create a sociocultural environment in the mathematics class and to promote social interactions between the students. We present the case of a learner who changed his way of justifying after exchanging ideas and discussing with peers during the analysis of the justifications generated by each of them.

KEYWORDS: Proof; Justification; Mathematical validation process; Levels and type of proof; ACODESA.

Recepción: noviembre 2017 • Aceptación: abril 2019 • Publicación: noviembre 2019

Bustos Rubilar, Á. S. y Zubieta Badillo, G. (2019). Desarrollo y cambios en las maneras de justificar matemáticamente de estudiantes cuando trabajan en un ambiente sociocultural, *Enseñanza de las ciencias, 37*(3), 129-148.
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2506

INTRODUCCIÓN

La demostración es el tipo de justificación aceptada por los estudiosos de la matemática; sin embargo, en un contexto de enseñanza y aprendizaje los estudiantes no serán necesariamente expertos en la disciplina ni menos aún se convertirán en matemáticos profesionales (Legrand, 2001). Nuestro acercamiento a la demostración se realiza desde un ámbito educativo; asumimos a priori que en el salón de clases los estudiantes no construirán una demostración en estricto rigor, debido a las dificultades cognitivas propias al desarrollo de estrategias observadas en diferentes estudios (Alcock y Weber, 2005; Barwell, 2013; Ellis, 2007). Además, si los estudiantes presentan dificultades para entender los argumentos lógicos involucrados en una demostración (Camacho, Sánchez y Zubieta, 2014), lo más probable es que también evidencien dificultades en la creación de una demostración. Posiblemente, lo entendido o aceptado como una demostración para un estudiante será distinto de lo considerado como una demostración por el profesor, debido a las concepciones y creencias de los estudiantes hacia esta (Selden y Selden, 2003; Zazkis y Villanueva, 2016).

Bajo una perspectiva educativa, centramos nuestra atención en las producciones de los estudiantes, que por lo general y en sus primeras etapas las manifiestan de manera informal y por medio de un lenguaje natural (Duval, 1999b). Al comparar el producto confeccionado por un estudiante para validar una proposición con una demostración, se encontrará que no estará exento de errores y que probablemente sea un producto falible en el sentido de Lakatos (1986). Esto último brinda la oportunidad al estudiante de analizar sus producciones críticamente, con el fin de aceptar, refutar o –lo que perseguimos en este estudio– reformular para mejorar. En esta línea, se buscó propiciar en el salón de clases un ambiente de interacción social, donde se produjeran instancias en las cuales los propios estudiantes fueran quienes reformulasen sus justificaciones después de someterlas al juicio y análisis de sus compañeros, generando procesos de objetivación –en el sentido de Radford (2014)–. Entiéndase el término *justificar* como un proceso mediante el cual una proposición o enunciado matemático es validado en el sentido de Balacheff (2000, p. 13); como la actividad intelectual no completamente explícita que se ocupa de la manipulación de la información, dada o adquirida, para producir una nueva información, la cual tiene por fin asegurar la verdad de una proposición. Entonces, justificar o validar será el proceso y justificación o validación, la producción generada en dicho proceso, donde las producciones proporcionadas por los estudiantes en el proceso de justificar pueden ser manifestadas de diferentes formas: explicación, verificación, argumentación, prueba, etc.

El objeto de estudio en la investigación fue la fase de validación de una conjetura geométrica, con el propósito de analizar el proceso de construcción y reformulación de justificaciones elaboradas por estudiantes al trabajar en un entorno sociocultural propiciado por el método de enseñanza de ACODESA: aprendizaje colaborativo, debate científico y autorreflexión (Hitt y González-Martín, 2015; Hitt, Saboya y Cortés, 2017)in progress since 2005, related to modelling mathematical situations in Qu\u00e9bec secondary schools (grades 8 and 9. Por lo tanto, nuestro objetivo fue analizar las formas de justificar de los estudiantes y determinar cómo evolucionan durante el desarrollo de una actividad organizada con ACODESA, en la cual se les solicita justificar matemáticamente.

Justificación matemática en el salón de clases

Aprender a demostrar conlleva el aprendizaje y dominio del razonamiento deductivo (Duval y Egret, 1993), por lo que se sugiere (Duval, 1999b) enseñar a los estudiantes a razonar deductivamente si esperamos que adquieran la habilidad para demostrar un enunciado matemático. De acuerdo con lo anterior, el tratamiento de la demostración en un contexto educativo debería hacerse con una formalidad y rigurosidad similar a la observada en *Los elementos* de Euclides. Es decir, exigir a los estudiantes de forma inmediata el uso de una matemática donde lo que debe primar son las representaciones institucionales (Duval, 1999b). Desde nuestra perspectiva, con este enfoque omitiríamos toda etapa preformal involucrada en el proceso de elaboración de una demostración.

En esta investigación no estamos en contra de la formalidad y el simbolismo implicados en una demostración; coincidimos con aquellos que fomentan que los estudiantes adquieran la habilidad de demostrar una proposición según las reglas de validación propias de la disciplina. Sin embargo, no debemos ser indiferentes a la realidad del aula, lugar en el cual los argumentos proporcionados por los estudiantes para justificar sus aserciones son, por lo general, insuficientes y se alejan de lo esperado por el profesor. En esta investigación consideramos que la demostración es el producto final de un proceso de construcción. En este proceso hay dos etapas: preformal y formal. En la primera, el ensayo-error y la discusión entre pares son quehaceres fundamentales. En la segunda es cuando se construye una demostración infalible con la formalidad y rigurosidad en el sentido de Duval y Egret (1993).

Consecuencia de lo descrito es que nuestra atención se pone en la etapa en la cual los estudiantes justifican a su manera una proposición, y nos centramos en mejorar dicha manera de justificar. En este estudio nos distanciamos de un tratamiento institucional de la demostración, optamos por un enfoque no institucional al reconocer la informalidad en la manera de justificar de los estudiantes en el salón de clases. En esta línea, Stylianides (2007) propone una definición para demostración en un contexto de aula. El autor señala que en el salón de clases la demostración es una secuencia de afirmaciones conectadas con las siguientes características:

- Se utilizan declaraciones aceptadas por la comunidad, las cuales son verdaderas y están disponibles sin mayor justificación.
- Se emplean formas de razonamiento válidas y conocidas.
- Se comunican con formas de expresión apropiadas y conocidas.

Para Stylianides (2007) son los estudiantes quienes integran la comunidad, y quienes dentro de su alcance conceptual aceptan o rechazan la validez de una justificación. Stylianides diferencia entre una demostración en un contexto de salón de clases y la demostración de un experto. Aquí rescatamos los elementos y características de la definición proporcionada por el autor en el contexto del aula, pero nos distanciamos de su acepción de demostración, debido a la carga social que tiene dicha palabra en la disciplina. Para nosotros, la demostración es la justificación aceptada en la disciplina de las matemáticas para validar una proposición, la cual «se fundamentada sobre un cuerpo de conocimientos fuertemente institucionalizados, sobre un conjunto de definiciones, de teoremas y de reglas de deducción, cuya validez es aceptada socialmente» (Balacheff, 2000, p. 23) por la comunidad de profesionales de la disciplina. De esta manera, evitamos atribuir un significado de demostración diferente al conocido y aceptado por investigadores de educación matemática (Balacheff, 1987; Fischbein, 1982; Hanna y Barbeau, 2002).

Tomamos como elemento teórico las características de demostración en el aula propuestas por Stylianides debido a que reflejan la realidad cuando se solicita a los estudiantes justificar matemáticamente un enunciado. Desde nuestro enfoque, esa realidad no tiene por qué ser estática, estamos convencidos de que puede cambiar si se genera un ambiente propicio para ello, donde sean consideradas las reglas y/o normas de validación propias de los estudiantes. Así, podríamos generar instancias por medio de situaciones didácticas que permitan a los estudiantes de una clase mejorar sus maneras y normas para validar un enunciado matemático, promover una validación interna (evocada por un individuo o en equipo) y no externa (evocada por el profesor), y causar que sus justificaciones evolucionen en el sentido de Brousseau (2002, p. 17).

> La situación didáctica debe conducirlos a evolucionar, a revisar sus opiniones, para reemplazar su teoría falsa con una verdadera. Esta evolución tiene un carácter dialéctico, así una hipótesis debe ser lo suficientemente aceptada, al menos provisionalmente, incluso para mostrar que es falsa.

Al entender la construcción de una demostración en el aula como un proceso dinámico, en un acercamiento sociocultural del aprendizaje, esperamos que una justificación construida por un estudiante sea discutida y promueva en él su evolución para su reformulación. La discusión entre pares permitirá esa evolución, y en la medida de lo posible y dentro del alcance conceptual del estudiante, la justificación se aproximará a una demostración matemática. En la figura 1 representamos nuestro propósito de trabajar con los estudiantes la etapa preformal para provocar, por medio de una actividad, un acercamiento a la etapa formal.

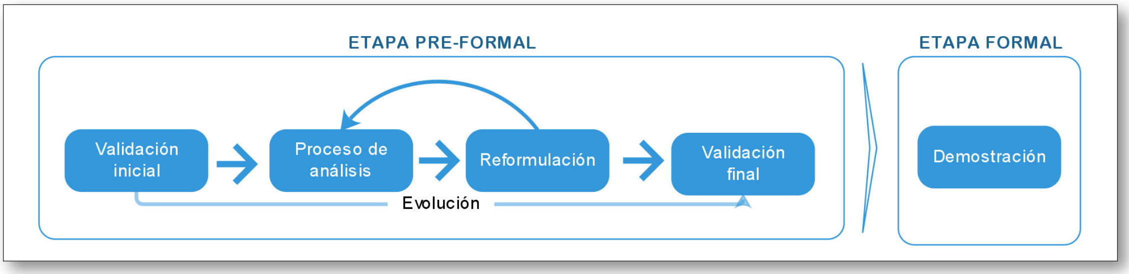


Fig. 1. Proceso de construcción de una demostración

En este estudio no obviamos los trabajos en los cuales se habla de discontinuidad cognitiva en el paso de la etapa preformal a la etapa formal (Duval, 1999a, por ejemplo), debido a la forma de razonamiento inherente a cada una de las fases. Nuestro enfoque no es centrarnos en lo estrictamente cognitivo de dicho pasaje, ni tampoco esperar que un estudiante supere de forma inmediata dicha discontinuidad, en caso de haberla. Más bien optamos por una transición la cual estamos convencidos de que puede ser facilitada cuando un estudiante trabaja en un medio sociocultural, donde los argumentos proporcionados en la fase preformal pueden ser mejorados, y a la vez el propio estudiante se percata de la necesidad de mejorar la calidad y estructura de sus argumentos.

Niveles y tipos de prueba

Como nuestra atención está en la fase preformal y buscamos determinar los cambios y cómo evolucionan las formas de justificar de los estudiantes en dicha fase, utilizamos la clasificación de niveles y tipos de prueba de Balacheff (2000). El autor diferencia entre explicación, argumentación y prueba, palabras que frecuentemente son utilizadas como sinónimos, pero consideramos que en un contexto educativo y de investigación es importante su distinción.

- Explicación: discurso con el cual se pretende aclarar la verdad de una posición o resultado adquirido previamente por el locutor.
- Argumentación: discurso destinado a obtener el consentimiento del interlocutor.
- Prueba: explicación aceptada por una comunidad la cual puede ser rechazada por otra. La prueba puede evolucionar simultáneamente con el avance de los saberes en los cuales se apoya.

Puede extrañar que en esta distinción no se mencione la demostración, pero de acuerdo con Balacheff, la demostración es un tipo de prueba con características específicas, tal como se mencionó en la sección anterior.

A partir de los procedimientos desarrollados por estudiantes para validar conjeturas, Balacheff (2000, pp. 26-28) propone dos niveles de pruebas: pragmáticas e intelectuales. Las primeras son aquellas que recurren a la acción y a ejemplos concretos.

– *Empirismo ingenuo*. Se verifica el enunciado en uno o más casos particulares. Este tipo de prueba es básica y rudimentaria, además de constituir una resistencia a la generalización, porque el estudiante solo valida mediante verificaciones básicas y aleatorias. El estudiante no generaliza, solo verifica.
– *Experiencia crucial*. El enunciado es verificado con un ejemplo lo menos particular posible y elegido cuidadosamente. El estudiante asume que, si la conjetura es válida para ese ejemplo, siempre será verdadera. En este tipo de prueba el alumno plantea la generalización de manera explícita a partir de la verificación de un ejemplo determinado.
– *Ejemplo genérico*. El enunciado es validado por medio de un ejemplo el cual representa una determinada clase de casos. Las razones son dadas mediante operaciones y transformaciones contextualizadas en dicho representante. La prueba es confeccionada con la intención de generalidad, pero resulta ser una prueba válida solo para la clase de casos a la cual pertenece el ejemplo.

En el otro nivel se encuentran las pruebas que se separan de la acción (a diferencia de las pruebas pragmáticas) y se apoyan en formulaciones de las propiedades en juego y de sus relaciones.

– *Experiencia mental*. La validez de la conjetura se realiza por medio del análisis de las propiedades implicadas en el enunciado, descontextualizándolo y sacándolo de una representación particular. En este tipo de pruebas el ejemplo se convierte en un medio para expresar la prueba, caso contrario al de las pruebas pragmáticas, donde la prueba se apoya en el ejemplo.
– *Cálculo sobre los enunciados*. El estudiante la construye a partir de teorías más o menos formalizadas o explícitas, originadas en una definición o propiedad y basadas en la transformación de expresiones simbólicas. Estas pruebas aparecen como resultado del cálculo inferencial sobre enunciados y se fundamentan en definiciones o en propiedades características explícitas. El cálculo sobre los enunciados oscila entre la experiencia mental y una demostración (Balacheff, 2000, p. 22), lo cual la convierte en la prueba más próxima a una demostración.

Por razones de espacio, en este escrito nos hemos limitado a ilustrar de manera teórica cada uno de los tipos de prueba –para una ilustración detallada véase Balacheff (1988)–. Esta tipología nos ayudará, por una parte, a reconocer e identificar las formas de validar de los estudiantes en cada una de las etapas de ACODESA; por otra parte, podremos determinar los cambios entre la primera y cualquiera de las siguientes fases.

El tratamiento de los procesos de validación en el aula a través del método de enseñanza de ACODESA

El método de enseñanza de ACODESA promueve el aprendizaje en colaboración mediante la interacción social y posibilita generar en el aula procesos de conjetura, argumentación y validación (Hitt, 2011; Hitt et al., 2017). Con ACODESA las actividades son organizadas en cinco etapas.

– *Etapa 1. Trabajo individual*. El estudiante desarrolla la actividad de forma individual y en un entorno de papel y lápiz. De acuerdo con Hitt y Quiroz (2017, p. 162), esta modalidad «permite al estudiante representarse la situación problema o el problema a fin de prepararse para una discusión en la cual sus ideas tengan mayor impacto»

- *Etapa 2. Trabajo en equipo*. Los estudiantes trabajan en equipos, idealmente de tres integrantes (Prusak, Hershkowitz y Schwarz, 2013). Las respuestas proporcionadas por cada estudiante en la etapa anterior son contrastadas en esta fase. Es probable que la discusión lleve a los estudiantes a seguir la propuesta de un miembro de su equipo; esto iniciará un proceso de refinamiento de sus respuestas y procesos individuales. Además, en esta etapa surge la distribución de roles (Hitt, 2013), de modo que cada alumno aportará a la construcción de la solución del equipo.
- *Etapa 3. Discusión en grupo*. Los estudiantes debaten en el sentido de Legrand (2001) en torno a las propuestas de solución expuestas por cada equipo. El objetivo en esta etapa es «integrar a los estudiantes en un proceso activo de cuestionamientos de los conceptos y de la construcción crítica de sus propios conocimientos» (Hitt, 2007, p. 66). En esta fase es importante que el grupo logre un consenso con respecto a una solución (Hitt y Quiroz, 2017).
- *Etapa 4. Autorreflexión*. Los estudiantes realizan un proceso de reconstrucción de la actividad. El consenso logrado en la etapa anterior puede resultar efímero para algunos estudiantes (Hitt y González-Martín, 2015; Hitt et al., 2017)in progress since 2005, related to modelling mathematical situations in Qu\u00e9bec secondary schools (grades 8 and 9, por ello es necesario que cada alumno reconstruya de manera individual su respuesta e incorpore los aportes de las etapas anteriores.
- *Etapa 5. Institucionalización*. El docente expone la solución institucional del problema –en el sentido de Brousseau (2002)–. Para ello, resume e incorpora los aportes de los estudiantes en las fases anteriores que ayudaron en el proceso de obtención de una solución.

METODOLOGÍA

La investigación es un estudio instrumental de casos en el sentido de Stake (1999). Exponemos un caso a través de una descripción e interpretación de los procedimientos llevados a cabo por uno de los estudiantes en la implementación de la actividad. Los estudiantes participantes cursaban el segundo semestre de una maestría en Educación Matemática en México. La información se obtuvo a partir del análisis de las hojas de trabajo de los estudiantes y de videograbaciones.

Diseño e implementación de la actividad

El propósito general de la actividad fue generar un ambiente de trabajo en el cual los estudiantes tuvieran instancias para conjeturar y enseguida validar sus conjeturas de manera individual y en colaboración con sus pares. Con la actividad, primero se buscó identificar la manera de validar de cada estudiante y, luego, determinar los cambios y/o alteraciones de sus validaciones en las distintas modalidades de trabajo del método de enseñanza de ACODESA. Como el objeto de estudio es el proceso de validación, la actividad fue diseñada para que los estudiantes dedicaran poco tiempo al proceso de conjetura –aspecto ya estudiado en Bustos y Zubieta (2015)–. La actividad propuesta constaba de un enunciado y cuatro preguntas, pero en este escrito (por razones de espacio) exponemos el análisis de las preguntas relacionadas con el contenido del área en figuras planas. El enunciado de la actividad es el siguiente:

Se sabe que un paralelogramo es un cuadrilátero en el cual sus lados opuestos son paralelos. Si eliges un paralelogramo cualquiera y trazas las diagonales respectivas se formarán cuatro triángulos, entonces:

a) ¿Qué puedes decir respecto a las áreas de los cuatro triángulos? Justifica de forma detallada tu respuesta sin olvidar el paralelogramo que elegiste.

b) Tus respuestas ¿son independientes del tipo de paralelogramos que elijas?, ¿por qué? Justifica de forma detallada tu respuesta.

Como se buscó trabajar la etapa preformal de la demostración, se utilizó la palabra *justificar* en lugar de *demostrar*. De esa manera, serían los propios estudiantes quienes decidirían lo que es justificar matemáticamente de acuerdo con su alcance conceptual.

La aplicación de la actividad se llevó a cabo en dos sesiones de dos horas cada una. En la primera, los estudiantes trabajaron en las etapas de trabajo individual, trabajo en equipo y discusión en grupo. En la segunda, se llevó a cabo la fase de institucionalización. Los estudiantes trabajaron en la etapa de autorreflexión fuera del horario de clases, entre ambas sesiones. Se solicitó a cada estudiante que utilizase bolígrafo de distinto color para cada una de las tres primeras etapas: negro para el trabajo individual, rojo para el trabajo en equipo y azul para la discusión en grupo. Lo anterior, con el propósito de identificar con mayor facilidad a qué momento del desarrollo de la actividad pertenecían los comentarios y/o correcciones registrados por cada estudiante en su hoja de trabajo. Así, resultaría más sencillo analizar las alteraciones en sus respuestas en las primeras tres etapas de ACODESA.

La conformación de equipos fue intencionada, es decir, el profesor a cargo del grupo participante ubicó en cada equipo a un estudiante de rendimiento destacado. De esta forma se evitó que dichos alumnos se concentraran en un único equipo. Además, los integrantes de rendimiento académico inferior tendrían la oportunidad de enriquecer sus respuestas, y en el momento de la discusión en grupo nos aseguraríamos una mayor participación.

Análisis y discusión de resultados

Para el análisis, primero nos centramos en los procedimientos escritos proporcionados por los estudiantes en cada una de las etapas de ACODESA. Luego, nuestra atención estuvo en los diálogos y la manera como cada estudiante presentó y/o defendió su propuesta de justificación durante las etapas de interacción social. Una vez obtenida una visión global del desempeño de cada estudiante, elegimos aquellos episodios de interés y representativos. De esta manera, seleccionamos a uno de los estudiantes y seguimos su manera de justificar a través de las distintas etapas de ACODESA.

A continuación exponemos lo hecho por Álex en las distintas etapas de la actividad. Los compañeros de equipo con quienes trabajó Álex fueron Tom y Ana. El análisis se presenta de acuerdo con las etapas de ACODESA. Primero exponemos lo realizado por cada estudiante en la fase de trabajo individual y luego hacemos el seguimiento de Álex, con el fin de exponer al lector la manera como evolucionó el alumno en la calidad de sus argumentos y en su manera de validar.

Etapa 1. Trabajo individual

La respuesta de Álex

Álex utilizó un cuadrado para elaborar su respuesta y su conjetura fue: *Las áreas de cada triángulo son iguales entre sí* (figura 2).

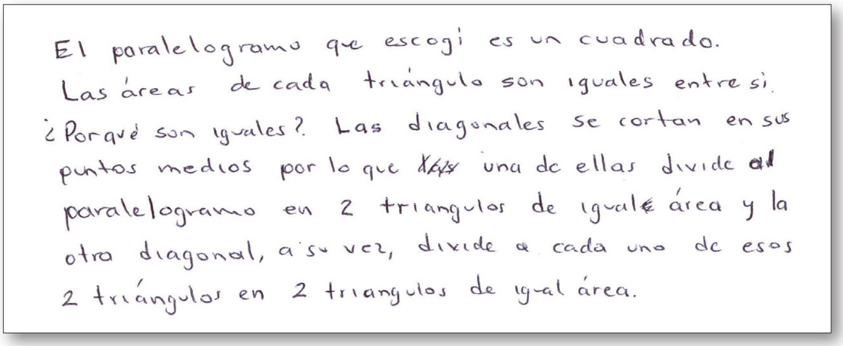

El paralelogramo que escogí es un cuadrado.
Las áreas de cada triángulo son iguales entre sí.
¿Porqué son iguales? Las diagonales se cortan en sus
puntos medios por lo que una de ellas divide al
paralelogramo en 2 triangulos de igual área y la
otra diagonal, a su vez, divide a cada uno de esos
2 triángulos en 2 triangulos de igual área.

Fig. 2. Respuesta elaborada por Álex en el trabajo individual

En el cuerpo de la validación elaborada por Álex identificamos tres afirmaciones: *i*) «las diagonales se cortan en sus puntos medios», *ii*) «una de las diagonales divide al paralelogramo en dos triángulos de igual área» y *iii*) «la otra [segunda] diagonal divide a cada uno de los dos triángulos formados por la primera diagonal en otros dos triángulos de igual área». La primera afirmación corresponde a una propiedad de los paralelogramos, hecho por el cual consideramos innecesario que el estudiante explicitara su justificación. Sin embargo, las restantes aserciones tienen carácter de conclusión, pero Álex no proporcionó los argumentos que le permitieron pasar desde la primera a la segunda afirmación, y análogamente desde la segunda a la tercera. Probablemente, el estudiante se basó en las propiedades de la mediana de un triángulo para elaborar su justificación, porque la segunda diagonal pasa por el punto medio de las bases de los triángulos formados al trazar la primera diagonal (figura 3A) y por el vértice opuesto (de cada triángulo) a la base, es decir, la diagonal está compuesta por las medianas de cada triángulo (y en figura 3B). Entonces, al ser medianas dividirán a cada triángulo en dos triángulos de igual área y, como los dos primeros triángulos también tienen igual área, lo serán los cuatro triángulos formados con las dos diagonales.

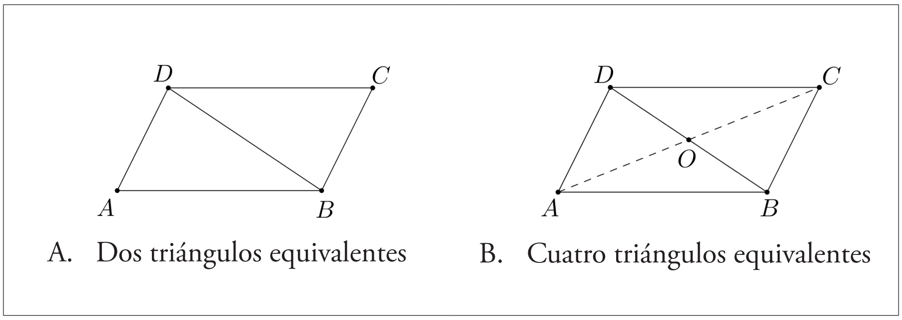
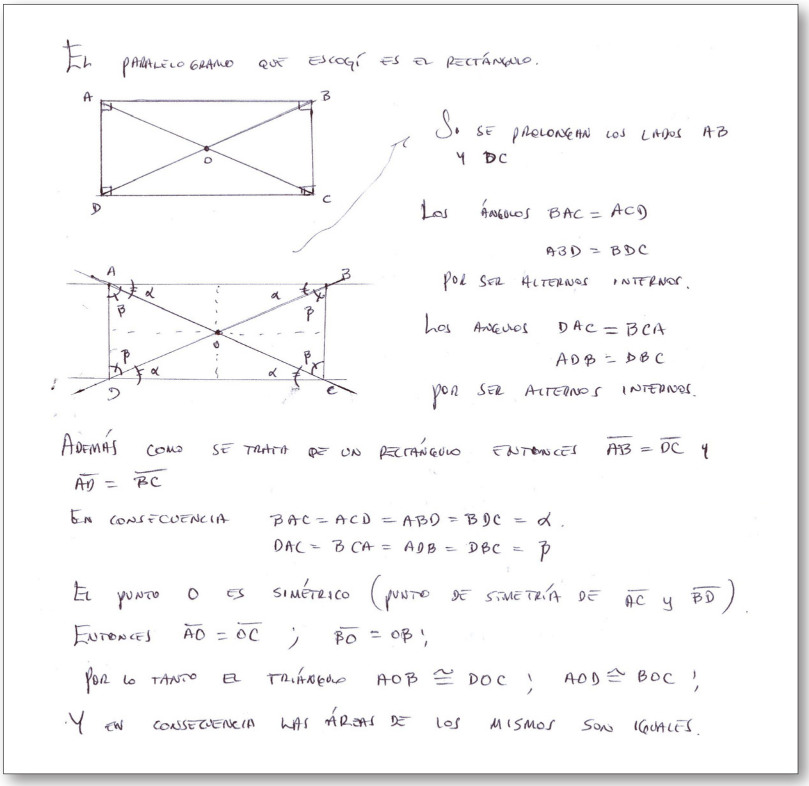


Fig. 3. Posible estrategia en la cual se basó Álex

Si asumimos que el estudiante basó su respuesta en lo anterior, estaríamos frente a una justificación por construcción, más pegada a la figura, a lo visual. Pese a lo anterior, Álex no explicitó mayores argumentos, su validación presenta características de un discurso descriptivo y aclaratorio, apoyada en un cuadrado (de acuerdo con su respuesta en la figura 2), caso particular de los paralelogramos. Identificamos la justificación proporcionada por Álex como una explicación, debido a que en la validación del estudiante no encontramos elementos, como terceros enunciados, por ejemplo, que permitan inferir que las reglas y conocimientos utilizados por él para elaborar la justificación son externos a su propia racionalidad.

La respuesta de Tom

La respuesta de Tom está basada en un rectángulo (figura 4). Tom explicitó su conjetura, pero inferimos que conjeturó lo siguiente: *Las áreas de los triángulos opuestos son iguales*.


El paralelogramo que escogí es el rectángulo.

Si se prolongan los lados AB y DC

Los ángulos BAC = ACD
ABD = BDC
por ser alternos internos.

Los ángulos DAC = BCA
ADB = DBC
por ser alternos internos.

Además como se trata de un rectángulo entonces $\overline{AB} = \overline{DC}$ y $\overline{AD} = \overline{BC}$

En consecuencia BAC = ACD = ABD = BDC = α.
DAC = BCA = ADB = DBC = β

El punto O es simétrico (punto de simetría de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$).

Entonces $\overline{AO} = \overline{OC}$; $\overline{BO}$ = OB ;

Por lo tanto el triángulo AOB ≅ DOC ; AOD ≅ BOC ;

Y en consecuencia las áreas de los mismos son iguales.

Fig. 4. Validación elaborada por Tom en el trabajo individual

Tom trazó dos rectángulos en su hoja de respuesta, pero la figura que verdaderamente utilizó fue el rectángulo inferior de la figura 4. Prolongó las diagonales del rectángulo y los lados y ; luego justificó su conjetura por medio de ocho afirmaciones.

1. $\measuredangle BAC = \measuredangle ACD$ *y* $\measuredangle BAC = \measuredangle ACD$, por ser alternos internos.
2. $\measuredangle DAC = \measuredangle BCA$ y $\measuredangle DAC = \measuredangle BCA$, por ser alternos internos.
3. $\overline{AB} = \overline{DC}$ y $\overline{AD} = \overline{BC}$ (propiedad del rectángulo).
4. En consecuencia $\measuredangle BAC = \measuredangle ACD = \measuredangle ABD = \measuredangle BDC = \alpha$
   y $\measuredangle DAC = \measuredangle BCA = \measuredangle ADB = \measuredangle DBC = \beta$.
5. El punto 0 [intersección de las diagonales] es punto de simetría de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.
6. $\overline{AO} = \overline{OC}$ y $\overline{BO} = \overline{OB}$ [inferimos que el estudiante se equivocó al escribir la segunda igualdad, pues debía escribir $\overline{BO} = \overline{OD}$].
7. El triángulo $AOB \cong DOC$ y $AOD \cong BOC$.
8. En consecuencia, las áreas de estos [$\Delta AOB \cong \Delta DOC$ y $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ son iguales.

Tom utilizó como tercer enunciado la propiedad de ángulos entre paralelas para justificar las dos primeras afirmaciones. La tercera aserción corresponde a la aplicación de una propiedad de los lados opuestos de un paralelogramo, cuya justificación consideramos que no requiere explicitarse. Sin embargo, en la cuarta afirmación Tom no adujo, por ejemplo, por qué en el triángulo los ángulos y son iguales (denotados como en la figura 4), situación análoga para los ángulos basales de los otros tres triángulos. Para sostener dicha afirmación se requiere una justificación, porque no es una aplicación directa de alguna propiedad del rectángulo.

Tom justificó la igualdad de lados de los triángulos opuestos con las afirmaciones cinco y seis. La quinta afirmación no requiere justificación por tratarse de una propiedad de los paralelogramos. Las dos últimas afirmaciones tienen carácter de conclusión; en la séptima concluyó que los triángulos opuestos son congruentes. Aunque Tom no explicitó el criterio de congruencia utilizado, inferimos que pudo haber aplicado varios criterios posibles de congruencia, porque con las afirmaciones tres y seis disponía de las premisas para justificar la congruencia de lados de los triángulos opuestos, y con las afirmaciones uno, dos y cuatro la congruencia de ángulos. Entonces, para llegar a la afirmación siete, inferimos que el estudiante utilizó alguna de las afirmaciones anteriores y algún criterio de congruencia para apoyar su conclusión.

Para justificar la igualdad de áreas de los triángulos opuestos Tom utilizó como recurso la congruencia de triángulos. No obstante, se observan pasos innecesarios en el cuerpo de su validación, porque las afirmaciones tres, cinco y seis son suficientes para justificar la congruencia de triángulos. Tras justificar la congruencia de los triángulos opuestos, Tom tomó como premisa la conclusión anterior (séptima afirmación) y utilizó como tercer enunciado la propiedad [no explicitada] de equivalencia de áreas en figuras congruentes, para concluir en la octava afirmación que los triángulos opuestos tienen igual área. La validación proporcionada por Tom es una prueba del tipo de ejemplo genérico en el sentido de Balacheff (1987), debido a que utilizó un rectángulo como representante de la clase de los rectángulos, el cual abarca la validez de la conjetura solo para la clase de los rectángulos.

La respuesta de Ana

Ana elaboró su respuesta basándose en un paralelogramo cualquiera, un representante general de todos los paralelogramos. La estudiante dibujó un paralelogramo en un sistema de referencia de coordenadas cartesianas (figura 5) y definió cuatro triángulos; , , y , cada uno formado después de trazar las diagonales del paralelogramo. Ana no explicitó su conjetura, pero inferimos que conjeturó lo siguiente: *Las áreas de los cuatro triángulos (, , y) son iguales*.

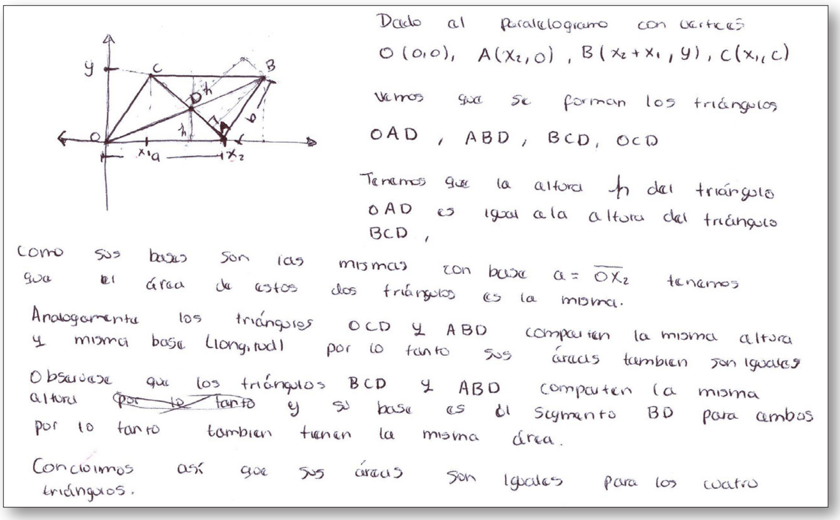

Dado al paralelogramo con vertices
O (0,0), A(X2,0), B(x2+x1, y), C(x1, c)
vemos que se forman los triángulos
OAD, ABD, BCD, OCD
Tenemos que la altura h del triángulo OAD es igual a la altura del triángulo BCD,
como sus bases son las mismas con base a = $\overline{OX_2}$ tenemos que el área de estos dos triángulos es la misma.
Analogamente los triángulos OCD y ABD comparten la misma altura y misma base (longitud) por lo tanto sus áreas tambien son iguales
Observese que los triángulos BCD y ABD comparten la misma altura ~~por lo tanto~~ y su base es el segmento BD para ambos por lo tanto tambien tienen la misma área.
Concluimos así que sus áreas son iguales para los cuatro triángulos.

Fig. 5. Validación elaborada por Ana en el trabajo individual

En el cuerpo de la validación confeccionada por Ana (figura 5) identificamos cinco afirmaciones:

– La altura del triángulo es igual a la altura del triángulo [h en el paralelogramo].
– Como sus bases son las mismas, con base [y en los triángulos y , respectivamente], las áreas de los dos triángulos [y] son iguales.
– Análogamente, los triángulos y comparten la misma altura y misma base (longitud) [lados y] por lo tanto sus áreas son iguales.
– Los triángulos y comparten la misma altura y su base es el segmento para ambos, por lo tanto, también tienen la misma área.
– Concluimos así que sus áreas son iguales para los cuatro triángulos.

En la primera afirmación, Ana no explicitó la propiedad o relación que le llevó a concluir que los triángulos opuestos tienen igual altura. Situación diferente para la primera parte de la segunda aserción, porque al tratarse de una propiedad de los paralelogramos no requiere ser justificada. A partir de lo anterior, la estudiante concluyó en los pasos dos y tres que los triángulos opuestos tienen igual área. En la cuarta afirmación identificamos un error (probablemente involuntario), ya que el segmento señalado por Ana como base de los triángulos y no corresponde al lado de los triángulos en el cual debería caer la altura desde el vértice (el lado correspondiente a esa altura debería ser o). Aunque Ana trató de validar la igualdad de áreas entre los triángulos adyacentes, por el error mencionado consideramos incorrecta esta parte de su justificación. No obstante, sí validó correctamente la igualdad de áreas en los triángulos opuestos, pese a no explicitar los argumentos en la primera afirmación. La validación de Ana es un intento de prueba intelectual de tipo experiencia mental, debido a que utilizó un representante general de los paralelogramos y basó sus argumentos en las propiedades (no todas explicitadas) relacionadas con el paralelogramo, descontextualizándolas de la representación.

En la etapa de trabajo individual observamos cómo los estudiantes conjeturaron (explícita o implícitamente) y luego validaron sus conjeturas. Identificamos tres formas distintas de validar: la explicación de Álex, el ejemplo genérico de Tom y la experiencia mental de Ana. En la siguiente etapa exponemos el proceso por el cual los estudiantes refinaron sus respuestas y consensuaron cuál era la conjetura y validación más adecuada para el enunciado de la actividad, proceso en el cual se observó la distribución de roles y cómo el nivel de argumentos matemáticos incide en la confección de una solución como equipo, donde cada integrante contribuyó de una u otra manera a la elaboración de la respuesta.

Etapa 2. Trabajo en equipo

El trabajo en equipo se inició con la intervención de Álex, quien leyó a sus compañeros el enunciado de la actividad. Enseguida fue Tom quien preguntó cómo son las áreas, lo cual dejó entrever la intención de Tom de escuchar las respuestas de sus compañeros. Ana fue la primera en responder y exponer a sus pares la justificación que había hecho, pero afirmó previamente que para ella los cuatro triángulos tendrían siempre igual área, tal como se observa en el siguiente diálogo.[1]

[10] Ana: Yo ahí sin... sin este... Sin previo a generalidad los cuatro tri.... las cuatro áreas son iguales, no importa cómo sean [las formas de los triángulos].

[11] Álex: Sí, yo también a eso llegué. O sea, primero lo hice con un cuadrado y dije que son iguales. Ahora, ¿por qué son iguales?

1. Todo el diálogo hace referencia a la figura 5.

[12] Ana: Comparten la misma altura [los triángulos y], como esos son paralelos [segmentos y], el punto en donde se intersecan [las diagonales] está en el centro [del rectángulo]. Comparten... estos triángulos opuestos [y] comparten la misma altura, y como comparten la misma base [segmentos y], en efecto, los triángulos opuestos tienen la misma área.

[13] Álex: Y son iguales [afirma lo señalado por Ana].

[14] Ana: Igual, análogamente con estos [triángulos y]. Ahora, si yo me voy con los triángulos este... que van continuos... al lado [triángulos adyacentes y]. Entonces... obviamente pues ya lo podemos ver aquí [señala la altura de los triángulos y], comparten la misma altura.

[15] Tom: Mmm... [comprensión].

[16] Ana: Que esta es la misma altura [señala altura correspondiente a y], y como estas bases son iguales [señala y].

[17] Álex: Sí, ese era el punto medio [punto].

[18] Ana: Tienen exactamente... tienen la misma, la misma área. Entonces no importa como sean los triángulos... van a ser iguales.

Observamos en [12] que Ana explicitó las justificaciones que no había escrito en su respuesta individual, como explicar que el punto de intersección de las diagonales es el centro de estas. Además, en [16] justificó por qué los triángulos adyacentes y (figura 5) tienen igual área. Por lo anterior inferimos que los errores encontrados en la validación confeccionada por la estudiante en el trabajo individual probablemente fueron errores de inatención. Además, en su discurso oral identificamos qué justifica cada una de sus afirmaciones, al apoyar sus argumentos en las propiedades y relaciones de la figura, la cual es representativa de cualquier paralelogramo (en un sentido genérico). La validación proporcionada por Ana en esta etapa es una prueba de tipo cálculo sobre los enunciados, validación próxima a una demostración.

El siguiente integrante en exponer fue Álex, quien se limitó a leer su respuesta escrita (figura 2) sin explicar ni aportar nuevos argumentos para sustentar de manera más sólida su validación. No obstante, cuando Álex solicitó [26] la aprobación de sus compañeros con respecto a su justificación, Ana manifestó no estar de acuerdo con su manera de hacerlo.

[26] Álex: ¿Entonces es lo mismo? [con relación a la validación de Ana].

[27] Ana: Sí, pero... o sea yo justifiqué por qué.

[28] Álex: Sí, la altura.

En este diálogo se evidencia la discrepancia que tienen los estudiantes con respecto al concepto de justificar en matemáticas. De la afirmación de Ana [27] inferimos que, para la estudiante, el significado de justificar en matemática es explicitar las razones matemáticas que sustentan las afirmaciones, manera que difiere de la de su par. En este episodio también se evidencia cómo Álex toma una postura de asimilación [28] frente al comentario de su compañera. Esto último es destacable, porque como se verá más adelante es Álex quien cambia más notoriamente su manera de justificar.

Tras el episodio anterior, la conversación entre los estudiantes estuvo centrada en la validación propuesta por Ana, quien respondió y aclaró las dudas –sobre su validación– formuladas por sus compañeros. Por ejemplo, Tom manifestó no estar convencido de la conjetura de Ana de que los cuatro triángulos tienen igual área, episodio evidenciado en el siguiente diálogo.[2]

[29] Tom: Sí, pero... bueno aquí este… [triángulo] [y] el opuesto [triángulo] es la misma área, y este [triángulo] con este [triángulo] tiene la misma área, ¿no?

[30] Ana: Y estos también [triángulos y] tienen la misma área.

[31] Tom: Mmm… [aprobación].

Hasta este momento, Álex y Tom habían manifestado estar convencidos de la igualdad de áreas de los cuatro triángulos en cualquier paralelogramo, conjetura formulada y validada por Ana. Luego, la conversación entre los estudiantes derivó en dilucidar por qué la justificación proporcionada por Ana es la más general.

[32] Tom: Es que yo hice un caso particular, tú también [se refiere a Álex] hiciste un caso particular ¿no?

[33] Álex: Sí.

[34] Tom: O sea, el cuadrado. Tú hiciste un cuadrado y yo hice un rectángulo.

[35] Álex: Sí, yo hice un cuadrado.

[36] Tom: Que son particularidades de un paralelogramo.

En este pasaje observamos que Álex y Tom entienden ([32] y [33]) que la justificación de Ana es más general que las propuestas por ellos, debido a que su compañera utilizó un paralelogramo general para elaborar su validación [37].

[37] Tom: Te repito, ella lo hizo más general porque lo hizo con un rombo [se refiere a un paralelogramo general] ¿no?, yo lo hice con un rectángulo.

[38] Álex: ¿Entonces pudiéramos usar el rombo [paralelogramo general]?

[39] Tom: Pues yo creo que sí.

En [38] Álex se percata de que la nueva justificación que deben confeccionar como equipo debe estar basada en un paralelogramo con características más generales para abarcar todos los paralelogramos, como el rombo utilizado por Ana, por ejemplo. Enseguida, los estudiantes se dedicaron a confeccionar una validación como equipo, donde Álex fue quien lideró el trabajo entre sus pares. Aunque los tres estudiantes consensuaron que la justificación de Ana era la más general, Álex no se limitó a reescribir la respuesta de su compañera, más bien redactó una nueva validación, y sus pares le emularon al escribir lo mismo en sus respectivas hojas de trabajo (figura 6).

2. Todo el diálogo hace referencia a la figura 5.

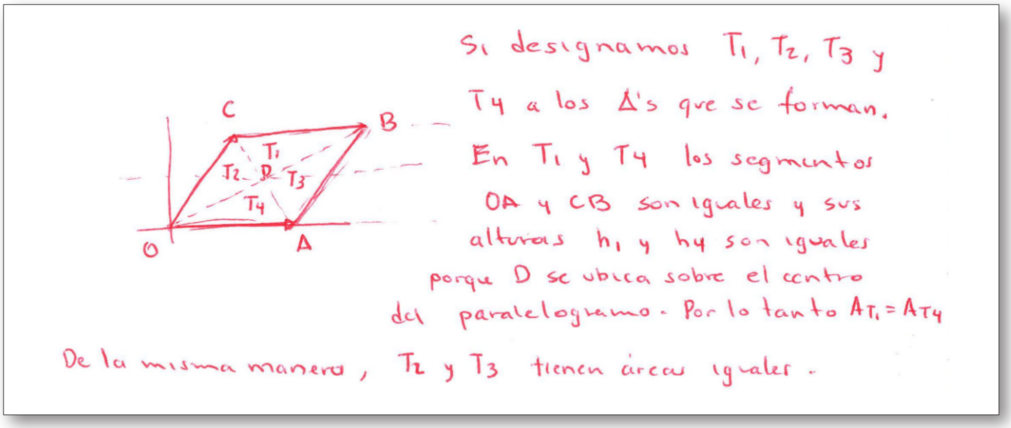


Fig. 6. Validación elaborada por Álex en el trabajo en equipo, similar a las confeccionadas por Tom y Ana en esta etapa

En la nueva validación confeccionada por Álex (figura 6) hay una notable mejora en comparación con la proporcionada en la etapa de trabajo individual (figura 2). Álex utilizó un paralelogramo general –un representante de todos los paralelogramos– y proporcionó argumentos basados en las propiedades y relaciones de la figura que le permiten sustentar sus afirmaciones. Propiedades enunciadas por sus compañeros en los distintos episodios observados durante el trabajo en equipo. Por lo anterior, la justificación proporcionada por Álex en esta etapa es una prueba intelectual de tipo experiencia mental.

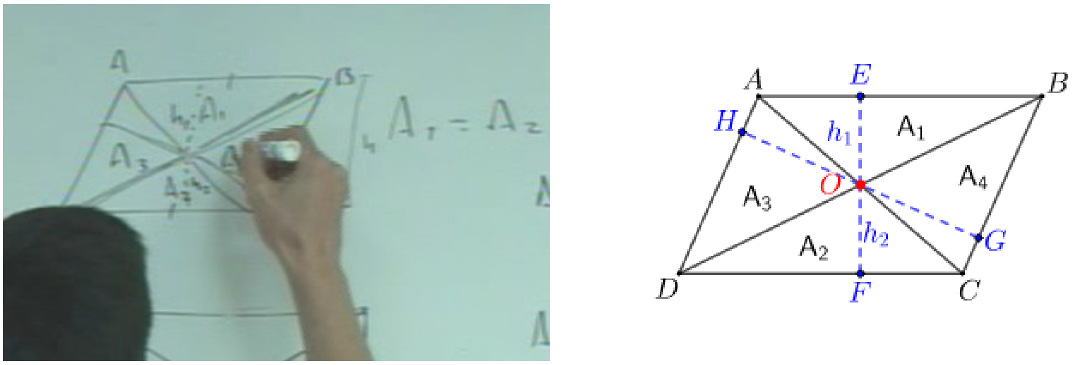
Álex solo justificó la igualdad de áreas de los triángulos opuestos, similar a lo observado en las nuevas validaciones de Tom y Ana. Probablemente por falta de tiempo, los estudiantes no llegaron a redactar la parte que justifica la igualdad de áreas en los triángulos adyacentes –parte explicada por Ana en [14]–, debido a que en el momento en que escribían sus respuestas los demás equipos habían terminado y estaban listos para iniciar la siguiente etapa, la discusión en grupo.

Etapa 3. Discusión en grupo

En esta etapa la discusión estuvo centrada en la aceptación de la conjetura y en la elaboración de su justificación, donde participaron estudiantes de todos los equipos; sin embargo, las intervenciones de los integrantes del equipo que aquí reportamos fueron mínimas. Como nuestro análisis está centrado en Álex, por razones de espacio solo exponemos el consenso logrado en esta etapa y las intervenciones finales de los estudiantes que elaboraron la validación consensuada por toda la clase.

Todos los estudiantes acordaron que los triángulos tendrían siempre igual área, y la estrategia para validar la conjetura fue similar a la explicada por Ana en [12]. La primera parte de la validación fue elaborada por Iván, quien justificó por qué los triángulos opuestos tienen igual área.[3]

3. Para facilitar la comprensión al lector de lo que el estudiante señaló durante su exposición, en el diálogo se hace referencia al romboide de la figura 7.



[40] Iván: …yo digo que el área 1 es $\overline{AB}$ por… esto [$\overline{OE}$] yo le llame h_1 sobre 2.

$$A_1 = \frac{\overline{AB} \bullet h_1}{2} \text{ ………}[\textit{Fórmula } 1]$$

Y el área 2 es $\overline{CD}$ por h_2 $[\overline{OF}]$ sobre 2.

$$A_2 = \frac{\overline{CD} \bullet h_2}{2} \text{ ………}[\textit{Fórmula } 2]$$

Entonces, por lo que dije anteriormente, por definición de paralelogramo los lados opuestos paralelos son iguales. Además, por lo que había argumentado, que la altura del paralelogramo [$\overline{EF}$] está pasando por el punto medio de... o sea, donde se cortan las diagonales. Por lo tanto, *más* forman , la altura del paralelogramo.

[41] Omar: Pero h_1 es igual a h_2, *¿no*, Iván?

[42] Iván: Sí.

[…]

… Entonces, bueno, partí de acá [Fórmula 1] y con base en esto [Datos hipótesis] dije:

$$A_1 = \frac{\overline{AB} \bullet h_1}{2} = \frac{\overline{CD} \bullet h_2}{2} = A_2$$

Entonces, con eso concluí que el área de este triángulo [*A0B*] es igual al área de este triángulo [*D0C*]. Y puse que por razonamiento análogo el área 3 es igual al área 4.

Fig. 7. Validación consensuada en la discusión en grupo

Enseguida, Onil mostró [43] a sus compañeros de clase cómo justificar la igualdad de áreas de los triángulos adyacentes (figura 7).

[43] Onil: O sea, como ya sabemos que las diagonales se cortan en el punto medio, este lado [*D0*] es igual a este [*0B*] y entonces tomé esos dos lados [*D0* y *0B*] como bases de esos dos triángulos [*CD0* y *CB0*]. Pero esos dos triángulos [*CD0* y *CB0*] tienen la misma altura y entonces tienen la misma área.

Como se comentó anteriormente, en la discusión en grupo no hubo una participación notoria de Álex, debido probablemente a que él y sus compañeros de equipo habían consensuado conclusiones similares en la fase anterior. No obstante, la manera más nítida que emplearon los estudiantes de otros equipos (Onil e Iván, por ejemplo) ayudó a otros a comprender mejor tanto la conjetura que estaba en discusión como su respectiva validación. Aunque algunos estudiantes no realizaron anotaciones en sus hojas de trabajo durante esta etapa (debido posiblemente a la falta de tiempo), sí vimos reflejado en sus justificaciones confeccionadas en la fase de autorreflexión los argumentos surgidos durante la discusión en grupo.

Etapa 4. Autorreflexión

En la justificación confeccionada por Álex en esta etapa (figura 8) identificamos la incorporación de los aportes surgidos durante el trabajo en equipo y de discusión en grupo. Álex utilizó un representante de todos los paralelogramos y esta vez justificó sus afirmaciones (tal como se lo manifestó Ana). En el cuerpo de la validación identificamos tres partes; la enunciación de las propiedades del paralelogramo, la justificación de la congruencia de los triángulos opuestos y la justificación de la igualdad de áreas de los triángulos adyacentes. Aunque Álex no explicitó qué criterio de congruencia utilizó (similar a Tom en la fase de trabajo individual), encasillamos su nueva validación como una prueba de tipo experiencia mental, porque además de utilizar un representante de todos los paralelogramos observamos la aplicación explícita de definiciones y propiedades de manera más simbólica.

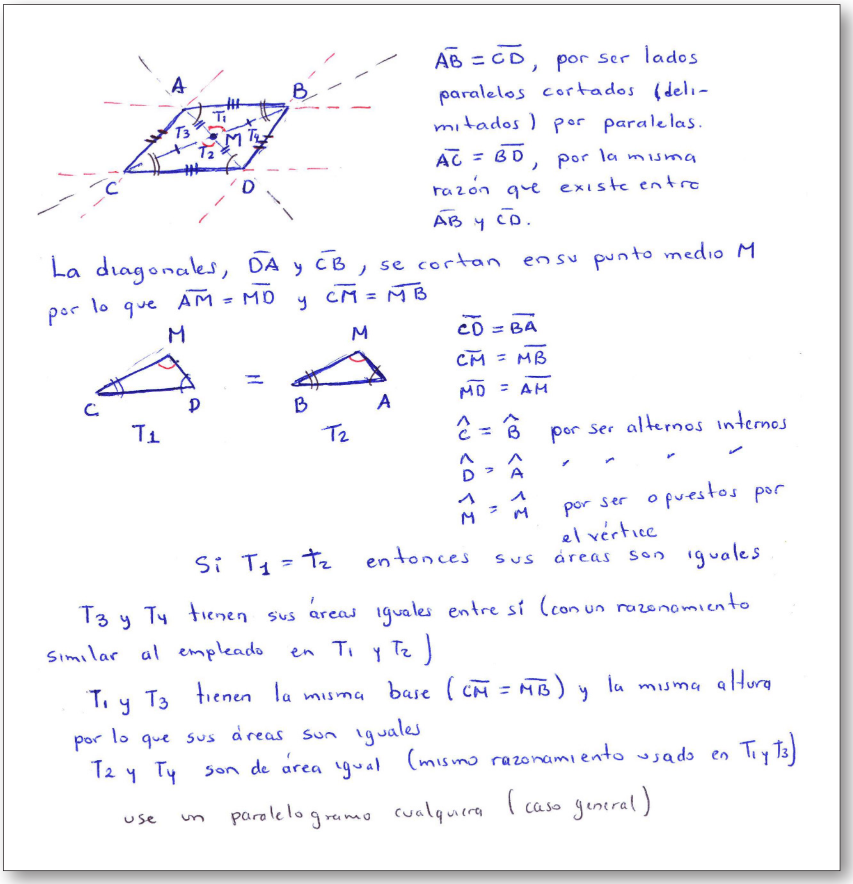


Fig. 8. Validación elaborada por Álex en la etapa de autorreflexión

CONCLUSIONES Y COMENTARIOS FINALES

El acercamiento teórico metodológico sobre la construcción de un aprendizaje sociocultural utilizado en nuestra experimentación (ACODESA) nos ha permitido mostrar la notoria evolución en la manera de justificar de Álex. Durante el desarrollo de la actividad observamos cómo en las etapas de trabajo en equipo y de debate se generó un ambiente en el cual los estudiantes tuvieron oportunidad de intercambiar puntos de vista y discutir en torno a sus argumentos, y a la vez de consensuar lo que para ellos fue la mejor justificación de la conjetura que estaba en discusión. El caso de Álex es uno de los más representativos en cuanto a cambios en su forma de validar, debido a que en la etapa de trabajo individual el estudiante elaboró una explicación para justificar que los cuatro triángulos tienen la misma área. Enseguida, durante el trabajo en equipo, a partir de la validación propuesta por Ana (figura 5) y consensuada posteriormente por Álex y Tom como la mejor forma para justificar la conjetura, Álex elaboró una prueba de tipo experiencia mental (figura 6). Es importante destacar que Álex no se limitó solamente a reproducir la justificación de Ana, ya que durante el desarrollo del trabajo en equipo observamos que él fue quien redactó con sus propias palabras la validación consensuada en su equipo.

En la tercera etapa no observamos cambios relevantes en la manera de justificar de Álex, no así en la fase de autorreflexión, donde el estudiante confeccionó una justificación en la cual incluyó y justificó propiedades que habían sido mencionadas en las etapas de trabajo en equipo y de debate, situación que lo llevó a reformular su validación y así lograr una prueba mejorada de tipo experiencia mental, justificación próxima a una demostración matemática (Balacheff, 1987). Es indiscutible el cambio en la manera de justificar de Álex entre la etapa de trabajo individual y la de autorreflexión, porque en las etapas de interacción, sobre todo en el trabajo en equipo, él reformuló y mejoró su forma de validar al explicitar las propiedades y terceros enunciados que fundamentan los pasajes de una proposición a otra.

En ningún momento de las diferentes etapas de ACODESA la validación tuvo carácter infalible para Álex y los demás estudiantes, lo que permitió que tanto la conjetura como su validación fueran objeto de cuestionamientos. A medida que se avanzó en las etapas de la actividad, la mayoría de los estudiantes reformularon sus respuestas, consecuencia sobre todo de que fueron ellos quienes actuaron como autoridad al consensuar la justificación apropiada para la conjetura. En las etapas de trabajo en equipo y de debate, los estudiantes desarrollaron la actividad en un ambiente que propició los procesos de conjetura y validación (Hitt et al., 2017), lo que generó oportunidades para que ellos mismos reformularan sus respuestas después de ver y entender las soluciones de sus compañeros. Desarrollar la actividad en las distintas modalidades de trabajo del método de enseñanza de ACODESA ayudó a los estudiantes a evolucionar, en el sentido de Brousseau (2002), en la calidad de los argumentos proporcionados para justificar sus aserciones durante la construcción de justificaciones.

El hecho de que los estudiantes tuvieran la oportunidad de intercambiar ideas o puntos de vista los ayudó no solo a mejorar sus validaciones, sino también a comprender el significado de justificar en el contexto de las matemáticas. Lo anterior lo observamos en el episodio en el que Ana dejó entrever a Álex que no estaba de acuerdo con su forma de justificar [27], situación que Álex aceptó y remedió posteriormente, al reformular su justificación. Probablemente Álex tenía los conocimientos para elaborar una validación similar o mejor que la de sus compañeros de equipo, pero quizá su noción de justificar en matemáticas influyó en el tipo de validación que confeccionó. Esto último tiene relación con la noción de demostración propuesta por Stylianides (2007), en la cual los conocimientos y reglas observados en cada equipo surgen a partir del alcance conceptual que manifiesta cada uno de sus integrantes. En la implementación de la actividad observamos que tanto la manera de elaborar una justificación como lo entendido por justificar matemáticamente cambió para algunos integrantes de la comunidad (equipo), tal como observamos en el trabajo de Álex.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alcock, L. y Weber, K. (2005). Proof validation in real analysis: Inferring and checking warrants. *Journal of Mathematical Behavior*, *24*(2), 125-134. http://doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.03.003

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(2), 147-176. http://doi.org/10.1007/BF00314724

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. En D. Pimm (Ed.), *Mathematics, Teachers and Children* (pp. 216-235). Londres: Hodder & Stoughton.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá: Una Empresa Docente.

Barwell, R. (2013). Formal and informal language in mathematics classroom interaction: a dialogic perspective. En A. M. Lindmeier y A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the PME* (vol. 2, pp. 73-80). Alemania: PME. http://www.lettredelapreuve.org/pdf/PME37/Barwell.pdf

Brousseau, G. (2002). *Theory of didactical situations in mathematics*. Nueva York, Kluwer Academic. http://doi.org/10.1007/0-306-47211-2

Bustos, A. y Zubieta, G. (2015). Descubrimiento de conocimiento matemático mediante la reformulación de conjeturas falsas en un ambiente de pruebas y refutaciones. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(3), 117-136. http://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1630

Camacho, V., Sánchez, J. y Zubieta, G. (2014). Los estudiantes de ciencias, ¿pueden reconocer los argumentos lógicos involucrados en una demostración? *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(1), 117-138. http://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.983

Duval, R. (1999a). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* México, D.F.: Grupo Editorial Iberoamericano.

Duval, R. (1999b). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Santiago de Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. y Egret, M. (1993). Introduction a la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif. *Repères*, *12*, 114-140. http://www.univ-irem.fr/exemple/reperes/articles/12_article_82.pdf

Ellis, A. B. (2007). Connections between generalizing and justifying: Students' reasoning with linear relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 194-229.

Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the Learning of Mathematics*, *3*(2), 9-18.

Hanna, G. y Barbeau, E. (2002). What is a proof? En B. Baigrie (Ed.), *History of Modern Science and Mathematics* (vol. I, pp. 36-48). Nueva York: Charles Scribner's Sons.

Hitt, F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. En M. Baron, D. Guin y L. Trouche (Eds.), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage. Conception et usages, regards croisés* (pp. 65-88). París: Hermès.

Hitt, F. (2011). Construction of mathematical knowledge using graphic calculators (CAS) in the mathematics classroom. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *42*(6), 723-735. http://doi.org/10.1080/0020739X.2011.583364

Hitt, F. (2013). Théorie de l'activité, interactionnisme et socioconstructivisme. Quel cadre théorique autour des représentations dans la construction des connaissances mathématiques ? *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *18*, 9-27.

Hitt, F. y González-Martín, A. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. *Educational Studies in Mathematics*, *88*(2), 201-219. http://doi.org/10.1007/s10649-014-9578-7

Hitt, F. y Quiroz, S. (2017). Aprendizaje de las matemáticas a través de la modelación matemática en un medio sociocultural ligado a la teoría de la actividad. *Revista Colombiana de Educación*, *73*, 153-177. http://doi.org/10.17227/01203916.73rce151.175

Hitt, F., Saboya, M. y Cortés, C. (2017). Rupture or continuity: The arithmetic-algebraic thinking as an alternative in a modelling process in a paper and pencil and technology environment. *Educational Studies in Mathematics*, *94*(1), 97-116. http://doi.org/10.1007/s10649-016-9717-4

Lakatos, I. (1986). *Pruebas y refutaciones: La lógica del descubrimiento matemático*. En E. J. Worral y E. Zahar (Eds.) (2.ª ed.). Madrid: Alianza.

Legrand, M. (2001). Scientific debate in mathematics courses. En D. Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (pp. 127-135). Dordrecht: Springer.

Prusak, N., Hershkowitz, R. y Schwarz, B. (2013). Conceptual learning in a principled design problem solving environment. *Research in Mathematics Education*, *15*(3), 266-285. http://doi.org/10.1080/14794802.2013.836379

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(2), 132-150.

Selden, A. y Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education*, *34*(1), 4-36. http://doi.org/10.2307/30034698

Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 289-321. http://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6

Zazkis, D. y Villanueva, M. (2016). Student conceptions of what it means to base a proof on an informal argument. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *2*(3), 318-337. http://doi.org/10.1007/s40753-016-0032-3

Development and changes in the students' ways of mathematical justification when working in a sociocultural environment

Álvaro Sebastián Bustos Rubilar
Universidad de Valparaíso, Chile
alvaro.bustos@uv.cl

Gonzalo Zubieta Badillo
Cinvestav-IPN, México
gzubieta@cinvestav.mx

In this article we report how a sociocultural environment generated instances in which students improved their ways of mathematically justifying their conjecture. An environment promoting social interaction was generated through an activity which was implemented in a group of students. For this purpose, we used the ACODESA teaching method, where a task can be organized in five stages: individual work, teamwork, debate in a larger group, self-reflection, and institutionalization. The students were proposed an geometrics activity in which they had to mathematically justify the conjectures they had formulated. The organization of the activity in different stages allowed for the students' individual and collaborative work. In addition, it proved how the students' ways of justification changed between the former and the subsequent stages of ACODESA.

The main theoretical references used to support the study are related to the notion of demonstration in mathematics and to an educational environment of mathematics teaching. To identify the changes in the way students validation process, we used the typology of levels and types of proof developed by Balacheff.

This research is a case study. We introduce the case of a student who showed clear changes in his way of justifying the first and fourth stages of ACODESA. The students who participated were studying a master's degree in Mathematics Teaching in Mexico.

The results obtained show that the main changes in the way of justifying the conjecture under discussion took place in the social interaction stages during which students discussed and analyzed their justifications and those of their classmates. We observed that the validations provided by the students in a pre-formal stage are very similar to a mathematical demonstration.