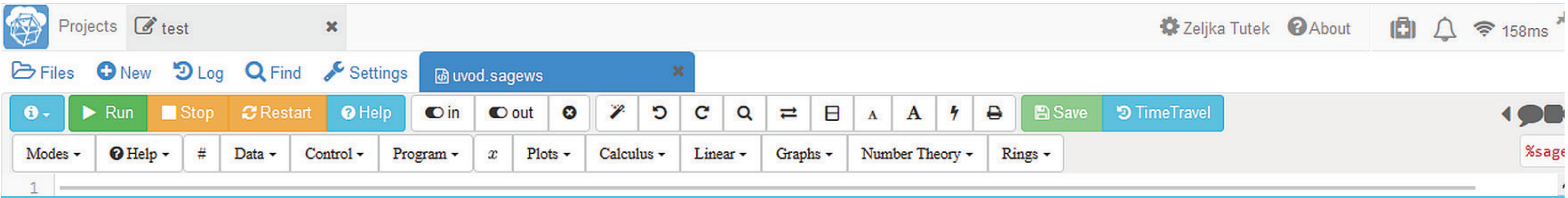


Matematički softver SageMath

SAŽETAK: Predstavljamo slobodni matematički softver SageMath. Deset primjera ilustrira načine korištenja za učenje matematike te potiče na njegovu samostalnu uporabu.

KLJUČNE RIJEČI: matematički softver, SageMath, SageMathCloud.

Math Software SageMath

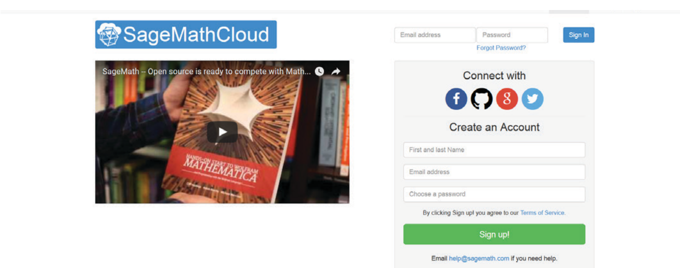
ABSTRACT: In this paper, we introduce free mathematical software SageMath with ten examples, which illustrate ways of using it for teaching math and encourage its use.

KEYWORDS: math software, SageMath, SageMathCloud.

1. UVOD

Prošlo je više od deset godina otkako je matematičar William Stein 2004. na Harvardu započeo s razvojem softvera Sage (William i dr, 2005) koji će, za razliku od skupih matematičkih programa (Mathematica, Maple, MATLAB, Magma i dr.) čija zatvorenost koda predstavlja i velika ograničenja u korištenju, biti otvoren i dostupan svima (Gray, 2008). Danas se koristi pod imenom SageMath , u inačici 7.2. Od 2014. je godine dostupan na SageMathCloud platformi i trenutno je najbolji izbor za matematički softver u nastavi.

Sučelje koje je napisano u programskom jeziku Python omogućava SageMathu kombiniran pristup stotinjku slobodnih programskih biblioteka: NumPy, SciPy, matplotlib, SymPy, Maxima, GAP, FLINT, PARI, Singular, R... za razna područja matematike: diferencijalni i integralni račun, linearnu algebru, diskretnu matematiku, algebru, logiku, geometriju i topologiju, teoriju brojeva, algebarsku geometriju, vjerojatnost, statistiku itd. U razvoj SageMath softvera uključeno je preko pet stotina istraživača, studenata i inženjera.



Slika 1. SageMathCloud platforma

2. SOFTWARE FOR ALGEBRA AND GEOMETRY EXPERIMENTATION

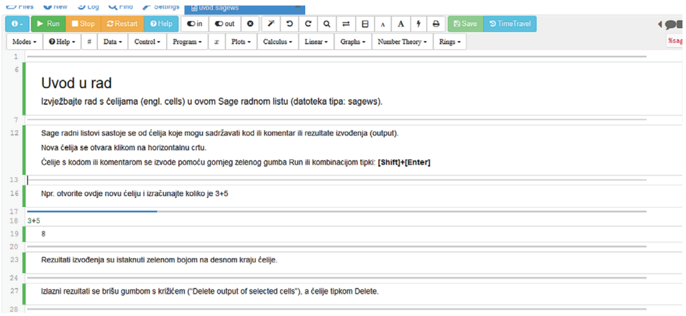
Od ak.god. 2015/16. SageMathCloud se koristi u sklopu dva nova izborna predmeta u prvom i drugom semestru preddiplomskog studija Geodetskog fakulteta. Njihov je cilj stjecanje vještine korištenja matematičkog softvera SageMath za simboličko i numeričko računanje te brže rješavanje složenijih problema. Na istom su mjestu dostupni grafički prikaz i ugrađene numeričke metode koji daju jasniji uvid u prirodu samog problema i njegovo rješenje, a studentima je zbog toga lako eksperimentirati u tom programu.

Kako pristupiti SageMath softveru?

Ako se želi izvesti samo jedna SageMath naredba, najjednostavnije je to učiniti pomoću SageMathCell sučelja koje je dostupno na internetskoj adresi https://sagecell.sagemath.org/ .

Drugi je način pristupa korištenje oblaka preko spomenute SageMathCloud platforme kojoj se pristupa na internetskoj adresi https://sagemathcloud.org (slika 1) pomoću korisničkog računa za koji je potrebna samo elektronička adresa i lozinka. SageMath koristi sagews (Sage WorkSheet) datoteke koje sadrže više zasebnih ćelija s programskim kodom, izlaznim rezultatima te komentarima (slika 2).

Kao i za Jupyter Notebook , izvođenje koda i sve što je potrebno za rad nalazi se na jednom mjestu, u samo jednom prozoru internetskog preglednika. Radno okruženje je jednostavno, a upoznavanje njegovih osnovnih elementa ne traži više od jednog sata, što je velika prednost jer omogućuje brzo i lako uključivanje u nastavu, što matematički programi koji su ranije počeli s razvojem nemaju (prve inačice: Maple 1980, Matlab 1984, Mathematica 1986). Za pisanje komentara se, uz HTML ili Markdown, može koristiti i LaTeX . SageMathCloud uz SageMath podržava i pisanje koda u drugim programskim jezicima, na primjer: R, Javascript, Julia, Cyton itd. Uz video chat pruža i mogućnost suradnje na izradi istog sadržaja u realnom vremenu. Rad SageMathCloud platforme potpomaže i Google (Evans, 2015).



Slika 2. Sagews datoteka

Treći je način korištenja instalacija SageMath softvera na vlastito računalo koje je pod operacijskim sustavom Linux (više distribucija, npr. Ubuntu), Mac OS X ili Windows (uz npr. VirtualBox), slijedeći uputu dostupnu na http://doc.sagemath.org/html/en/installation/

3. OTKUD POČETI?

Nesumnjivo, treba početi od internetske stranice projekta . Uz SageMath službenu dokumentaciju postoji i velik broj video uputa na YouTubeu koje mogu biti posebno korisne na početku rada. William Stein vodi blog o SageMathu i u svojim člancima prati važne trenutke razvoja projekta. Od knjiga se preporučuju "Sage for Undergraduates" (Bard, 2015) i "Calcul mathématique avec Sage" [(Casamayou i dr, 2014) čiji su autori pripremili i prvi MOOC (Massive Open Online Course): "Une SAGE introduction au calcul formel" koji je održan početkom ove godine.

4. ZA ŠTO SE KORISTI SAGEMATH?

Što se sve može računati pomoću SageMatha može se sagledati pretraživanjem SageMath knjižnice [11] u kojoj je poduži popis svega što je dosada napisano i objavljeno o SageMathu.

U sljedećih deset primjera ilustrirat ću kako SageMath može biti koristan za učenje matematike.

4. ZAKLJUČAK

SageMath je moćan i svima dostupan programski alat. Primjeri, dostupni (Tutek, 2016) kao radni listovi tipa sagews, olakšat će prve korake onima koji SageMath zažele samostalno isprobati. A neke će tek podsjetiti na prošla vremena kad su za rješavanje ovakvih zadataka koristili samo olovku i papir.

LITERATURA

- SageMath – internetska stranica projekta. http://www.sagemath.org/ (pristupljeno 20. svibnja 2016)
- SageMath dokumentacija. http://doc.sagemath.org/ (pristupljeno 20. svibnja 2016)
- SageMath Cloud – internetska stranica za prijavu. https://cloud.sagemath.org/ (pristupljeno 20. svibnja 2016)
- LaTeX – internetska stranica projekta. https://latex-project.org/ (pristupljeno 20. svibnja 2016)
- SageMath uputa za instalaciju. http://doc.sagemath.org/html/en/installation/ (pristupljeno 20. svibnja 2016)
- SageMathCell – internetsko sučelje. https://sagecell.sagemath.org/ (pristupljeno 20. svibnja 2016)
- Sage MOOC – internetska stranica za prijavu.
- https://www.fun-mooc.fr/courses/lille1/54003/session01/about (pristupljeno 20. svibnja 2016)
- Evans, W. 2015. The Struggle for Open Mathematics Software. Online Searcher, vol. 39 (2). str. 22-26.
- Jupyter – internetska stranica projekta. http://jupyter.org/ (pristupljeno 20. svibnja 2016)
- William, S. Sage: Open Source Mathematics software. http://sagemath.blogspot.com/ (pristupljeno 20. svibnja 2016)
- SageMath knjižnica. http://www.sagemath.org/library.html (pristupljeno 20. svibnja 2016)
- William, S; David, J. 2005. SAGE: System for Algebra and Geometry Experimentation. ACM SIGSAM Bulletin. vol. 39(2). str. 61-64.
- Gray, M. 2008. Sage: A New Mathematics Software System. Computing in Science & Engineering, vol. 10(6). str. 77-75.
- V. Bard, G. 2015. Sage for Undergraduates. AMS.
- » Casamayou, A; Cohen, N; Connan, G; Dumont, T; Fousse, L; Maltey, FMeulien, M; Mezzarobba, M; Pernet, C; M. Thiéry, N; Zimmermann, P. 2014. Calcul mathématique avec Sage. CreateSpace, https://hal.inria.fr/inria-00540485v2/document (pristupljeno 20. svibnja 2016)
- Tutek, Ž. 2016. 10 primjera u SageMath. http://www2.geof.unizg.hr/~zeljkat/s10.zip (pristupljeno 23. svibnja 2016)

AUTORI | AUTHORS

mr.sc. Željka Tutek, v.pred., Geodetski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, Kačićeva 26, 10000 Zagreb, e-mail: zeljkat@geof.hr

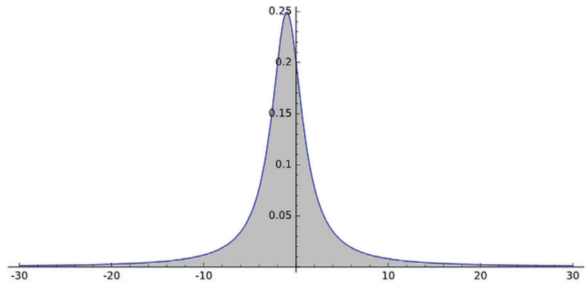
ZAD: Izračunajte nepravi integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+5}\, dx$. Čemu on odgovara? Nacrtajte!

```
t = var('t')
assume(t>0)
f(x) = 1/(x^2+2*x+5)
int = integral(f(x), x, -t, t); int.show()
limit(int,t=+infinity).show()
```

$$\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2}\pi$$

```
plot(f(x),xmin=-30,xmax=30,fill='axis')
```



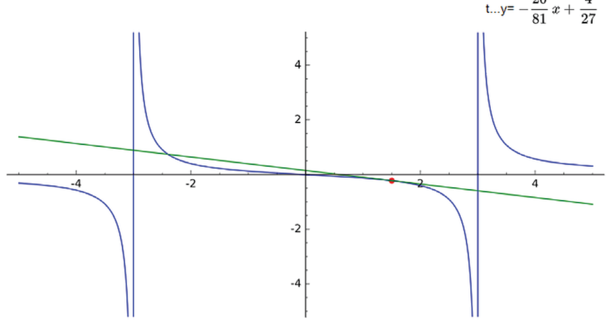
Rješenje: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+5}\, dx = \frac{1}{2}\pi$ odgovara površini između krivulje $y = \frac{1}{x^2+2x+5}$ i $x-$osi

ZAD: Za funkciju $f(x) = \frac{x}{x^2-9}$ nađite jednadžbu tangente u točki $x = 3/2$.

Nacrtajte točku (crveno), graf funkcije $y = f(x)$ (plavo), graf tangente (zeleno) za $x \in [-5,5]$ i $y \in [-5,5]$.

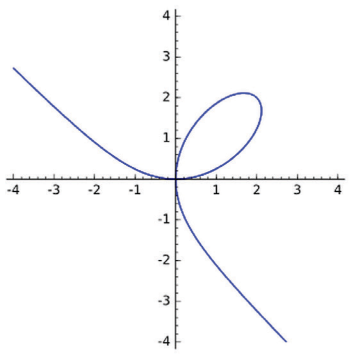
```
g(x) = x/(x^2-9)
dg(x) = derivative(g,x)
x0 = 3/2
tangenta(x) = dg(x0)*(x-x0) + g(x0); show('t...y=',tangenta(x))
g1 = plot(g,xmin=-5,xmax=5,ymin=-5,ymax=5)
g2 = plot(tangenta,xmin=-5,xmax=5,ymin=-5,ymax=5,color='green')
g3 = point((x0,g(x0)),color='red',size =30)
g1 + g2 + g3
```

t...y= $-\frac{20}{81}x+\frac{4}{27}$



ZAD Nacrtajte i nađite derivaciju funkcije $y = y(x)$ zadane implicitnom jednadžbom $x^3 + y^3 = 4xy$.

```
y = var('y')
implicit_plot(x^3+y^3==4*x*y , (x,-4,4) , (y,-4,4), axes=true, frame=false)
```




```
y = function('y',x)
d = derivative(x^3+y^3==4*x*y,x); d
solve(d, derivative(y,x))
```

```
3*y(x)^2*D[0](y)(x) + 3*x^2 == 4*x*D[0](y)(x) + 4*y(x)
[D[0](y)(x) == -(3*x^2 - 4*y(x))/(3*y(x)^2 - 4*x)]
```

Rješenje: $y'(x) = -\frac{3x^2-4y(x)}{3y(x)^2-4x}$

ZAD Odredite usmjerenu derivaciju funkcije $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 6x + 2$ u točki $(-2,3)$ u smjeru od $A(-2,3)$ do $B(0,1)$.

ako je $\vec{a}_0$ jedinični vektor u smjeru vektora $\vec{a}$, onda je usmjerena derivacija funkcije f u smjeru vektora $\vec{a}$ jednaka: $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}_0} = \nabla f \cdot \vec{a}_0$

```
f(x,y) = x^2 + x*y + y^2 - 6*x + 2; print ("f..."), f
gradf = f.gradient(); print ("grad f..."), gradf
print ("grad f u točki (-2,3)..."), gradf(-2,3)
rA = vector([-2,3]); rB = vector([0,1]); a = rB-rA;
a0 = a/a.norm(); print ("jedinični vektor..."), a0
print ("usmjerena derivacija u točki (-2,3) ..."), gradf(-2,3)*a0
```

```
f... (x, y) |--> x^2 + x*y + y^2 - 6*x + 2
grad f... (x, y) |--> (2*x + y - 6, x + 2*y)
grad f u točki (-2,3)... (-7, 4)
jedinični vektor... (1/2*sqrt(2), -1/2*sqrt(2))
usmjerena derivacija u točki (-2,3) ... -11/2*sqrt(2)
```

```
g1 = contour_plot(f(x,y),(x,-5,5),(y,-5,5),cmap = 'summer',contours=5,colorbar=True,labels=True)
g2 = arrow2d(rA,rB); g3 = plot_vector_field(gradf, (x,-5,5), (y,-5,5))
g1 + g2 + g3
```

Rješenje: $-\frac{11}{2}\sqrt{2}$

ZAD Riješite diferencijalnu jednadžbu $\frac{dy}{dx} = 5x + y - 5,\ x \in (-3,3)$ pa prikažite ono njeno rješenje za koje vrijedi $y(0) = 1$

```
y = function('y',x)
rj(x) = desolve(diff(y,x) -5*x - y + 5 ==0, y, [0,1]); expand(rj)
expand(derivative(rj,x))
```

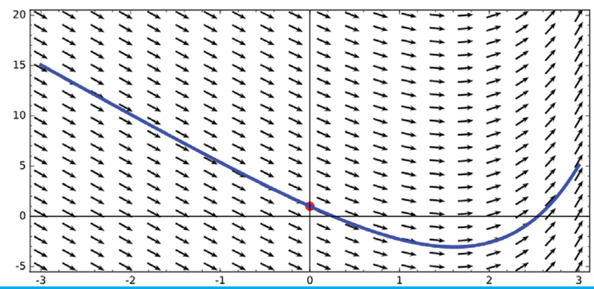
```
x |--> -5*x + e^x
x |--> e^x - 5
```

i provjera da nađeno rješenje rješava jednadžbu i da prolazi kroz točku $(0,1)$:

```
diff(rj,x)- 5*x - rj + 5
rj(0)
```

```
x |--> 0
1
```

```
g1 = plot_slope_field(derivative(rj1,x), (x,-3,3), (y,-5,20), headlength=4, headaxislength=3)
g2 = plot(rj1(x), xmin=-3, xmax=3, ymin=-5, ymax=20, thickness=3)
g3 = point((0,1), size=80, color='red')
g1 + g2 + g3
```



ZAD: Za matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ 0 & 16 \\ 7 & -5 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ i $C = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -7 & 2 \\ 3 & 8 & -10 & 10 \end{bmatrix}$.

riješite jednadžbu $3XA - B^T = C$. I provjerite rješenje!

```
A = matrix([[1,2,3,4],[0,1,1,1],[1,2,4,7],[0,1,1,2]]);
B = matrix([[-4,9],[0,16],[7,-5],[-2,-1]]);
C = matrix([[-2,-3,-7,2],[3,8,-10,10]]);
show('A=',A,',  det A=', det(A),',  B=',B, ',  C=',C)
X = 1/3*(C+transpose(B))*A^-1
show("X=",X)
```

A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, det A= 1 , B= $\begin{pmatrix} -4 & 9 \\ 0 & 16 \\ 7 & -5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, C= $\begin{pmatrix} -2 & -3 & -7 & 2 \\ 3 & 8 & -10 & 10 \end{pmatrix}$

X= $\begin{pmatrix} -5 & 7 & 3 & -4 \\ 21 & -38 & -17 & 38 \end{pmatrix}$

```
3*X*A-transpose(B)==C
```

```
True
```

ZAD Izračunajte $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ako je $\vec{F}(x,y,z) = 8x^2yz\,\vec{i} + 5z\,\vec{j} - 4xy\,\vec{k}$ i krivulja C zadana jednadžbom $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k},\ t \in [0,1]$.

to je krivuljni integral druge vrste tj. krivuljni integral vektorskog polja $\vec{F}$

```
t = var('t')
x(t)=t; y(t)=t^2; z(t)=t^3; r=vector([x(t),y(t),z(t)]); r
dr = r.diff(t); dr
```

```
(t, t^2, t^3)
(1, 2*t, 3*t^2)
```

```
F = vector([8*x^2*y*z, 5*z, -4*x*y]); F
F.dot_product(dr)
```

```
t |--> (8*t^7, 5*t^3, -4*t^3)
t |--> 8*t^7 - 12*t^5 + 10*t^4
```

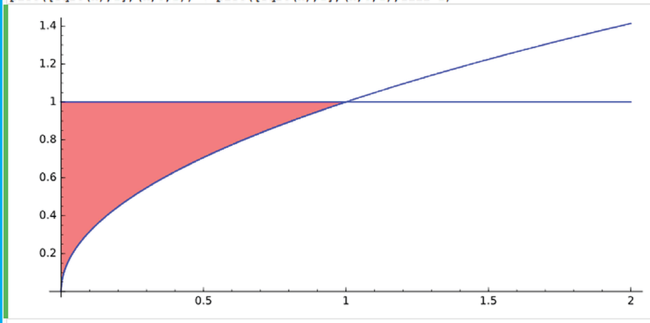
```
integral(F.dot_product(dr),t,0,1)
```

```
1
```

Rješenje: 1

ZAD Izračunajte integral $\iint_D (x^2+y)\,dP$ gdje je područje D omeđeno krivuljom $y=\sqrt{x}$ i pravcima $y=1,\ x=0.$

```
plot([sqrt(x),1],(x,0,2)) + plot([sqrt(x),1],(x,0,1),fill=1)
```



To je područje omeđeno u smjeru $y-$osi pravcima: $y=0,\ y=1.$

Poluparabola $y=\sqrt{x}$ odgovara u prvom kvadrantu $x=y^2$.

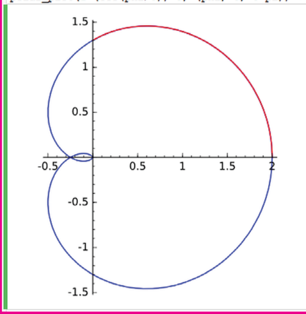
```
x,y = var('x,y')
integral (integral(x^2+y, (x,y^2,1)), (y,0,1))
integral (integral(x^2+y, (x,y^2,1)), (y,0,1)).n()
```

```
15/28
0.535714285714286
```

Rješenje: $\iint_D (x^2+y)\,dP = \frac{15}{28} \approx 0.54$

ZAD Približno izračunajte duljinu luka krivulje $r = 2\cos^3\frac{\varphi}{3}$ za $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

```
polar_plot(2*(cos(phi/3))^3, (phi, 0, 3*pi)) + polar_plot(2*(cos(phi/3))^3, (phi, 0, pi/2), color='red')
```



```
r,phi = var('r,phi')
r = 2*(cos(phi/3))^3
dr = r.diff(phi)
s = numerical_integral(sqrt(r^2+dr^2),0,pi/2); s
```

```
(2.869834432471555, 3.186156263791989e-14)
```

Rješenje: $s \approx 2.87$

ZAD Zadani su točke $A(2,0,3), B(0,1,-1)$ i $C(0,3,1)$.

a) Nađite točku D na pravcu $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}$ tako da obujam tetraedra bude jednak 12 jedinica za obujam.

b) Koliko je ravnina π kroz točke A, B i C udaljena od te točke D?

```
rA = vector([2,0,3]); rB = vector([0,1,-1]); rC = vector([0,3,1])
t,x,y,z = var('t x y z')
rD = vector([1+2*t, -1+t, 2*t])
AB = rB - rA; AC = rC - rA; AD = rD - rA;
V = 1/6*(AB.cross_product(AC)).dot_product(AD).abs(); print 'V=', V
s = solve(V==12,t,to_poly_solve=True,solution_dict=True); s
rD1 = rD(s[0]); rD1; rD2 = rD(s[1]); rD2
```

```
V= 1/6*abs(16*t - 2)
[{t: -35/8}, {t: 37/8}]
(-31/4, -43/8, -35/4)
(41/4, 29/8, 37/4)
```

Rješenje: $D_1 = (-31/4, -43/8, -35/4)$ i $D_2 = (41/4, 29/8, 37/4)$

Udaljenost ravnine π od točke D jednaka je visini v_D tetraedra pa se stoga može naći ovako: $v_D = \frac{3V}{B_{ABC}}$

```
AB = rB - rA; AC = rC - rA; n = AB.cross_product(AC)
V = 12; baza=n.norm()/2; print "B =", baza
vD = 3*V/baza; print("visina iz vrha D tetraedra je:"),vD,"≈",vD.n()
```

```
B = sqrt(33)
visina iz vrha D tetraedra je: 12/11*sqrt(33) ≈ 6.26679561440512
```

v_D se može naći i po formuli za udaljenost točke T_0 od ravnine π: $d(T_0,\pi) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

$\rightarrow v_D = d(D, \pi_{ABC})$ pa prvo nađemo nađemo jednadžbu ravnine π_{ABC}

```
n = AB.cross_product(AC)
r = vector([x, y, z]); AT = r - rA
print("jednadžba ravnine: " ), n.dot_product(AT)==0
```

```
jednadžba ravnine:  10*x + 4*y - 4*z - 8 == 0
```

i njenu udaljenost do točke D_1 i od točke D_2

```
r = rD1; AT = r - rA; a1 = n.dot_product(AT);
v1 = abs(a1)/norm(n); v1, v1.n()
r = rD2; AT = r - rA; a2 = n.dot_product(AT);
v2 = abs(a2)/norm(n); v2, v2.n()
```

```
(12/11*sqrt(33), 6.26679561440512)
(12/11*sqrt(33), 6.26679561440512)
```

Rješenje: udaljenost ravnine π od točke D je $\frac{12}{11}\sqrt{33} \approx 6.27$

EKSCENTAR OČAJNIČKI TRAŽI NOVE ČLANOVE !!!

Kao i u prvom broju, ponovno tražimo bilo koga da nam se pridruži, napiše bilo što, nacrta ili nešto treće. U protivnom će nam idući broj izgledati ovako...