

УДК 539.3.

ДВОСТОРОННІЙ ЗГИН ПЛАСТИНИ З ДВОМА СИМЕТРИЧНИМИ НАСКРІЗНИМИ ТРІЩИНАМИ ПО ДУЗІ КОЛА З УРАХУВАННЯМ КОНТАКТУ ЇХ БЕРЕГІВ

В.Божидарнік¹, докт. техн. наук;
В.Опанасович², канд. фіз.-мат. наук; П.Герасимчук¹

¹Луцький державний технічний університет

²Львівський національний університет імені Івана Франка

В роботі досліджено задачу про двосторонній згин пластини з двома симетричними тріщинами по дузі кола розподіленими згинальними моментами на нескінченності з урахуванням контакту їх берегів при наявній геометричній і фізичній симетрії задачі. В силу контакту берегів тріщини розв'язок задачі подано у вигляді розв'язку двох задач: плоскої задачі та згину (класична теорія). Використовуючи комплексні потенціали і методи теорії функцій комплексної змінної, розв'язок задачі зведений до задач лінійного спряження, на основі якого отримано рівняння для знаходження контактної зусилля між берегами тріщин. Записані явні вирази для комплексних потенціалів, контактних зусиль між берегами тріщин, коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів та проведено їх числовий аналіз, результати якого подано графічно.

V.Bozhydarnik, V.Opanasovych, P.Gerasymchuk

BILATERAL FLEXURE OF THE PLATE WITH TWO SYMMETRICAL THROUGH THE THICKNESS CIRCULAR ARC CRACKS WITH ACCOUNT OF THEIR EDGES CONTACT

On the ground of the two-dimensional problem of the theory of elasticity and of the classical theory of plate flexure bilateral flexure of the arc cracks with extrinsic symmetric load causing smooth contact of its edges along the whole length of one of its surfaces by moments applied at infinity has been investigated. With the use of the theory of the complex variable functions methods the solution of the problem has been brought to the problems of linear conjugation and their analytic solution has been built. Numerical analysis of contact pressure and moments-intensive factors are presented in the form of diagrams.

Пластинчасті елементи конструкцій широко використовуються в інженерній практиці внаслідок їхньої малої ваги. В процесі експлуатації в них можуть виникати тріщини, які є сильним концентратором напружень і спричиняють руйнування конструкції. Тому дослідження напружено-деформованого стану пластини з тріщинами за згину має велике практичне значення.

Вперше задачу про згин пластини з тріщиною по дузі кола, береги якої приходять у гладкий контакт по всій її довжині на одній із основ пластини, було поставлено і розв'язано в працях [1-3]. В роботі [4] досліджено напружено-деформований стан пластини за одностороннього згину з двома тріщинами по дузі кола з урахуванням контакту їх берегів, причому вектор розподілених згинальних моментів на нескінченності перпендикулярний до осі симетрії тріщин, яка проходить через їх середини. В даній роботі ця задача узагальнена на випадок двостороннього згину пластини розподіленими моментами на нескінченності при наявній геометричній і фізичній симетрії задачі.

Постановка задачі. Дослідимо двосторонній згин ізотропної пластини постійної товщини $2h$ рівномірно розподіленими моментами на нескінченності з двома рівними наскрізними тріщинами по дузі кола, причому зовнішнє навантаження і тріщини є симетричними відносно прямої, що проходить через середину дуг тріщин в її серединній площині. Береги тріщин вільні від зовнішнього навантаження, а під дією

згинальних моментів на нескінченності вони приходять у гладкий контакт на одній з основ пластини по лінії, а область контакту охоплює всю довжину тріщин.

В серединній площині пластини виберемо декартову систему координат $Ox\tilde{z}$ з початком у центрі кола радіуса R із координатною площиною Oxy в серединній площині пластини і віссю Ox , яка направлена по осі симетрії тріщин (див. рис. 5.1). Кінці тріщин позначимо через a_j і b_j ($j=1,2$), причому $a_1 = R e^{-i\varphi} = -a_2$, $b_1 = R e^{i\varphi} = -b_2$, де $i^2 = -1$, 2φ – кут розкриття тріщин. Лінію, де розміщені тріщини, позначимо через L , дугу a_1b_1 – через L_1 , а дугу a_2b_2 – через L_2 . Область всередині кола радіуса R позначимо через S^+ , зовні – через S^- , розподілені згинальні моменти на нескінченності – через M_x^∞ , M_y^∞ .

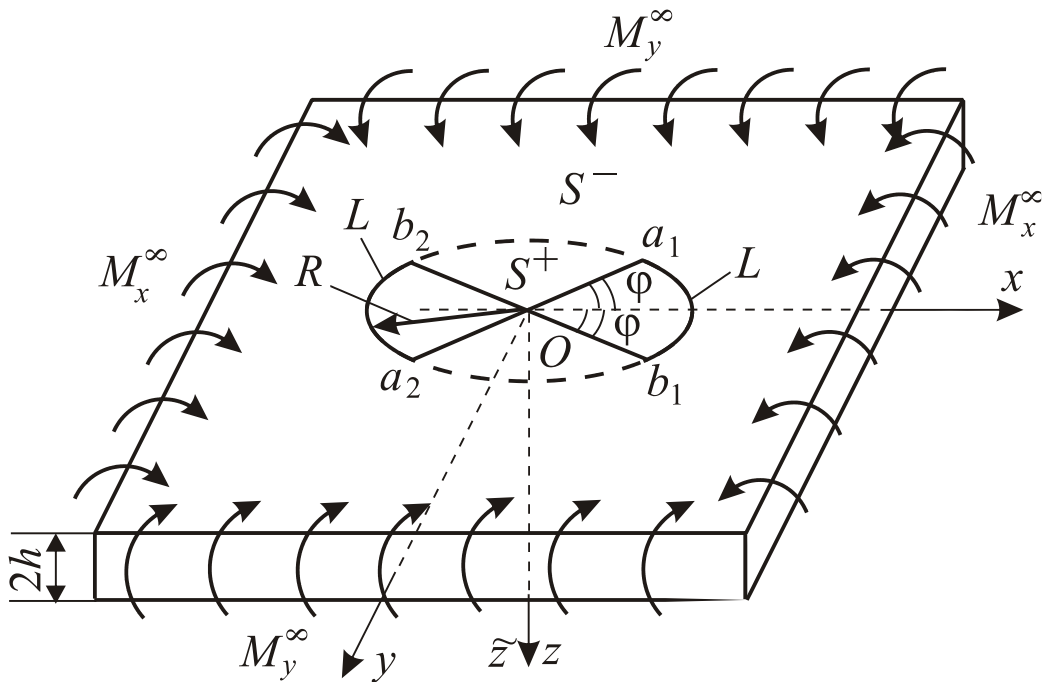


Рисунок 1 - Схема навантаження пластини та розміщення тріщин.

За рахунок контакту берегів тріщин розв’язок задачі подамо у вигляді розв’язків двох задач: плоскої задачі теорії пружності та задачі згину пластин за таких крайових умов

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^+ = \sigma_{rr}^- = -\frac{N_r}{2h}, \quad \sigma_{r\theta}^+ = \sigma_{r\theta}^- = 0, \quad \text{на } L, \\ M_r^+ = M_r^- = M_r, \quad P_r^+ = P_r^- = 0, \quad \text{на } L, \\ M_r = N_r h, \quad v_r^+ - v_r^- + h \left(\frac{\partial w^+}{\partial r} - \frac{\partial w^-}{\partial r} \right) = 0, \quad \text{на } L, \end{aligned} \quad (1)$$

де N_r – контактне зусилля між берегами тріщин; σ_{rr} і $\sigma_{r\theta}$ та v_r і v_θ – компоненти тензора напружень та компоненти вектора переміщень в полярній системі координат r і θ з полюсом в точці O і полярною віссю Ox для плоскої задачі; M_r і P_r – згинальний момент та узагальнена в сенсі Кірхгофа перерізувальна сила в тій же полярній системі координат; w – прогин пластини; тут значками “+” і “-” позначені граничні значення відповідних величин при прямуванні точки площини до лінії L із областей S^+ і S^- відповідно.

Побудова розв’язку задачі. Для побудови розв’язку плоскої задачі теорії пружності введемо комплексні потенціали $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$ та функцію $\Omega(z)$, тоді для визначення напружено-деформованого стану пластини будемо мати такі формули [5]

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} &= 4\operatorname{Re}\Phi(z), \\ \sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta} &= \Phi(z) - R^2 r^{-2} \Omega(R^2/\bar{z}) + f(r) \left(\overline{\Phi(z)} - \bar{z} \overline{\Phi'(z)} \right), \\ 2\mu r(v_r + iv_\theta) &= \bar{z} \left[\kappa\varphi(z) + \omega(R^2/\bar{z}) - zf(r)\overline{\Phi(z)} \right], \end{aligned} \quad (2)$$

де μ і ν – відповідно модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини; $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$; $z = x + iy$, x і y – координати точки, для якої знаходимо шукані величини; $r = |z|$, $f(r) = 1 - R^2 r^{-2}$, $\bar{\Phi}(R^2/z) = \overline{\Phi(R^2/\bar{z})}$,

$$\omega'(z) = \Omega(z) = -\bar{\Phi}(R^2/z) + R^2 z^{-1} \bar{\Phi}'(R^2/z) + R^2 z^{-2} \bar{\Psi}(R^2/z).$$

Якщо для функцій $\Phi(z)$ і $\Omega(z)$ мають місце розвинення

$$\Phi(z) = \begin{cases} \frac{a_1}{z^2} + \frac{a_2}{z^3} + \dots, & z \rightarrow \infty, \\ A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots, & z \rightarrow 0, \end{cases} \quad \Omega(z) = \begin{cases} B_0 + \frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z^2} + \dots, & z \rightarrow \infty, \\ b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots, & z \rightarrow 0, \end{cases} \quad (3)$$

то повинні виконуватись умови [5]

$$B_1 = 0, \quad B_0 = -\bar{A}_0, \quad (4)$$

де A_j , B_j , a_j , b_j – невідомі коефіцієнти.

Для розв'язку задачі згину пластини введемо комплексні потенціали $\Phi_3(z)$ і $\Psi_3(z)$ та функцію $\Omega_3(z)$ [6], в результаті будемо мати такі залежності

$$\begin{aligned} M_r + M_\theta &= 4\operatorname{Re}\Phi_3(z), \\ m(M_r + ic' + iP_r) &= \tilde{\kappa}\Phi_3(z) + R^2 r^{-2} \Omega_3(R^2/\bar{z}) - f(r) \left[\overline{\Phi_3(z)} - \bar{z} \overline{\Phi_3'(z)} \right], \\ r(\partial w/\partial r + i\partial w/\partial s) &= \bar{z} \left[\varphi_3(z) - \omega(R^2/\bar{z}) + zf(r)\overline{\Phi_3(z)} \right], \end{aligned} \quad (5)$$

де s – дугова координата, c' – дійсна стала,

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa} &= (3+\nu)/(1-\nu), \quad m = -[D(1-\nu)]^{-1}, \quad D = 2Eh^3/(3(1-\nu^2)), \\ \omega_3'(z) = \Omega_3(z) &= -\bar{\Phi}_3(R^2/z) + R^2 z^{-1} \bar{\Phi}_3'(R^2/z) + R^2 z^{-2} \bar{\Psi}_3(R^2/z). \end{aligned}$$

Функції $\Phi_3(z)$ і $\Omega_3(z)$ можна подати у вигляді [6]

$$\Phi_3(z) = \begin{cases} \Gamma + \frac{a'_1}{z^2} + \frac{a'_2}{z^3} + \dots, & z \rightarrow \infty, \\ A'_0 + A'_1 z + A'_2 z^2 + \dots, & z \rightarrow 0, \end{cases} \quad \Omega_3(z) = \begin{cases} B'_0 + \frac{B'_1}{z} + \frac{B'_2}{z^2} + \dots, & z \rightarrow \infty, \\ \frac{\Gamma'R^2}{z^2} + b'_0 + b'_1 z + \dots, & z \rightarrow 0, \end{cases} \quad (6)$$

де

$$\Gamma = nM, \quad \Gamma' = mM/2, \quad n = -[4D(1+\nu)]^{-1}, \quad B'_1 = 0, \quad B'_0 = -\bar{A}'_0. \quad (7)$$

A'_j , B'_j , a'_j , b'_j – невідомі коефіцієнти.

З крайової умови

$$(\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta})^+ = (\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta})^-, \quad t \in L,$$

врахувавши (2), отримаємо задачу лінійного спряження

$$\left[\Phi(t) + \Omega(t) \right]^+ - \left[\Phi(t) + \Omega(t) \right]^- = 0, \quad t \in L,$$

розв'язавши яку, знаходимо

$$\Omega(z) = -\bar{A}_0 - \Phi(z), \quad (8)$$

де

$$A_0 = \Phi(0).$$

На основі крайової умови (1) можемо записати

$$(\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta})^+ + (\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta})^- = -\frac{N_r}{h}, \quad t \in L. \quad (9)$$

Якщо врахувати залежності (2) і (8), то (9) можемо подати у вигляді

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = -\frac{N_r}{2h} - \bar{A}_0, \quad t \in L. \quad (10)$$

З крайової умови

$$m(M_r + iP_r)^+ - m(M_r + iP_r)^- = 0, \quad t \in L,$$

беручи до уваги другу залежність (5), одержимо

$$(\tilde{\kappa}\Phi_3(t) - \Phi_3(t))^+ - (\tilde{\kappa}\Phi_3(t) - \Phi_3(t))^- = 0, \quad t \in L. \quad (11)$$

На основі розв'язку задачі лінійного спряження (11) матимемо

$$\Omega_3(z) = \tilde{\kappa}\Phi_3(z) - D'_0 + \frac{P}{2z^2}, \quad (12)$$

де

$$D'_0 = \tilde{\kappa}\tilde{\Gamma} + \bar{A}'_0, \quad A'_0 = \Phi_3(0), \quad P = -2\tilde{\Gamma}'R^2, \quad \tilde{\Gamma} = n(M_x^\infty + M_y^\infty), \quad \tilde{\Gamma} = -0.5m(M_y^\infty - M_x^\infty).$$

Крайову умову (1) можемо записати у такому вигляді

$$[M_r + iP_r]^+ + [M_r + iP_r]^- = 2M_r, \quad t \in L. \quad (13)$$

Якщо врахувати другу залежність (5) і (12), то з (13) отримаємо

$$\Phi_3^+(t) + \Phi_3^-(t) = \frac{m}{\tilde{\kappa}}\{M_r + ic(t)\} + \frac{D'_0}{\tilde{\kappa}} + \frac{P}{2\tilde{\kappa}t^2}, \quad t \in L, \quad (14)$$

де

$$c(t) = \begin{cases} c'_1, & t \in L_1, \\ c'_2, & t \in L_2. \end{cases} \quad (15)$$

З останньої крайової умови (1), яку перепишемо у вигляді

$$\frac{\partial v_r^+}{\partial \theta} - \frac{\partial v_r^-}{\partial \theta} + h \left(\frac{\partial^2 w^+}{\partial \theta \partial r} - \frac{\partial^2 w^-}{\partial \theta \partial r} \right) = 0, \quad t \in L,$$

прийнявши до уваги (5), (2), (8) і (12), одержимо

$$F^+(t) - F^-(t) = 0, \quad t \in L, \quad (16)$$

де

$$F(z) = B(z) - \bar{B} \left(\frac{R^2}{z} \right) + \beta \left\{ B_3(z) - \bar{B}_3 \left(\frac{R^2}{z} \right) \right\}, \quad \beta = \frac{2h(\tilde{\kappa}+1)\mu}{1+\kappa}, \quad (17)$$

$$B(z) = \Phi(z) - z\Phi'(z), \quad B_3(z) = \Phi_3(z) - z\Phi_3'(z).$$

Якщо розв'язати задачу лінійного спряження (16), то отримаємо

$$F(z) = -\bar{A}_0 + \beta(\tilde{\Gamma} - \bar{A}'_0). \quad (18)$$

На основі (18) можемо записати

$$F^+(t) + F^-(t) = 2(-\bar{A}_0 + \beta(\tilde{\Gamma} - A'_0)), \quad t \in L. \quad (19)$$

Врахувавши вираз для функції $F(z)$ (18), а також (10) і (14) та передостанню залежність (1), з (19) одержимо

$$\operatorname{Re} A_0 - 2\beta(\tilde{\Gamma} - \operatorname{Re} A'_0) = 0, \quad (20)$$

$$i \left(\frac{1}{h} + \frac{2m\beta h}{\tilde{\kappa}} \right) \frac{\partial N_r}{\partial \theta} + \frac{2\beta}{2\tilde{\kappa}} \left(\frac{P}{t^2} - \frac{\bar{P}}{\bar{t}^2} \right) + \frac{2\beta}{\tilde{\kappa}} i (\operatorname{Im} D'_0 + mc(t) - \tilde{\kappa} \operatorname{Im} A'_0) = 0, \quad t \in L. \quad (21)$$

Проінтегрувавши (21) по θ , одержимо вираз для контактного зусилля N_r між берегами тріщин

$$N_r = A + \tilde{c}(t)\theta - \frac{3}{2}\delta_1 \left(\frac{R^2}{t^2} + \frac{t^2}{R^2} \right), \quad t \in L, \quad (22)$$

де

$$\delta_1 = -\frac{\tilde{\Gamma}'\beta h}{2m\beta h^2 - \tilde{\kappa}}, \quad \tilde{c}(t) = -\frac{2\beta h(mc(t) - (1 + \tilde{\kappa})\text{Im } A'_0)}{2m\beta h^2 - \tilde{\kappa}}, \quad (23)$$

A – невідома дійсна стала.

З умови однозначності прогину при обході контуру тріщини впливає, що

$$\text{Im } A'_0 = 0. \quad (24)$$

Так як досліджувана задача має геометричну і фізичну симетрію, то із (22) матимемо

$$\tilde{c}(t) = 0. \quad (25)$$

Врахувавши (24) і (25), з (23) одержимо

$$c(t) = 0. \quad (26)$$

На основі (15), беручи до уваги (26), можемо записати

$$c'_i = 0, (i = 1, 2). \quad (27)$$

Отже, контактне зусилля між берегами тріщин знайдемо за формулою

$$N_r = A - \frac{3}{2}\delta_1 \left(\frac{R^2}{t^2} + \frac{t^2}{R^2} \right), \quad t \in L. \quad (28)$$

Так як $M_r = N_r h$, $t \in L$, то, врахувавши (28), будемо мати

$$M_r = Ah - \frac{3}{2}\delta_1 h \left(\frac{R^2}{t^2} + \frac{t^2}{R^2} \right), \quad t \in L. \quad (29)$$

Підставляючи (29) у (14), одержимо задачу лінійного спряження для знаходження функції $\Phi_3(z)$

$$\Phi_3^+(t) + \Phi_3^-(t) = q_3 + \frac{q_4}{t^2} + q_5 t^2, \quad t \in L, \quad (30)$$

де

$$q_3 = \frac{mh}{\tilde{\kappa}} A + \frac{D'_0}{\tilde{\kappa}}, \quad q_4 = -\frac{3}{2} \frac{hm}{\tilde{\kappa}} \delta_1 R^2 + \frac{P}{2\tilde{\kappa}}, \quad q_5 = -\frac{3mh\delta_1}{2\tilde{\kappa}R^2}.$$

Розв'язуючи задачу лінійного спряження (30), знаходимо

$$\Phi_3(z) = \frac{1}{2\pi i X(z)} \int_L \frac{(q_3 + q_4/t^2 + q_5 t^2) X^+(t)}{t - z} dt + \frac{c_4 z^2 + c_3 z + c_2}{X(z)}, \quad (31)$$

де

$$X(z) = \sqrt{(z^2 - a_1^2)(z^2 - b_1^2)},$$

$c_i (i = 2, 4)$ – невідомі сталі.

На основі розвинення для функції $\Phi_3(z)$ (6) одержимо

$$c_4 = \tilde{\Gamma}, \quad c_3 = 0. \quad (32)$$

Знайшовши інтеграл, що входить у (31), можемо записати

$$\Phi_3(z) = \frac{1}{2} \left(q_3 + \frac{q_4}{z^2} + q_5 z^2 \right) + \frac{1}{2X(z)} \left\{ 2(c_4 z^2 + c_2) - q_3(z^2 + \gamma_{15}) + q_5(z^4 + \gamma_5 z^2 + \gamma_{17}) - q_4 \left(1 + \frac{\gamma_{00}}{z^2} \right) \right\}, \quad (33)$$

де

$$\gamma_{00} = -R^2, \quad \gamma_{15} = -R^2 \cos 2\varphi, \quad \gamma_{17} = 0.5R^4 \sin^2 2\varphi.$$

Так як

$$\Phi_3(0) = A'_0,$$

то виходячи з (33), матимемо

$$A'_0 = -\frac{1}{R^2} (c_2 - q_3 R^2 \sin^2 \varphi - q_4 \sin^2 \varphi - 0.25 q_5 R^4 \sin^2 2\varphi). \quad (34)$$

Враховавши (24), із (34) одержимо

$$\operatorname{Im} c_2 = 0, \quad (35)$$

тобто c_2 – дійсна стала.

Підставивши (28) у (10), прийдемо до такої задачі лінійного спряження для знаходження функції $\Phi(z)$

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = \delta_4 + \frac{3\delta_1}{4h} \left(\frac{R^2}{t^2} + \frac{t^2}{R^2} \right), \quad (36)$$

де

$$\delta_4 = -\bar{A}_0 - \frac{A}{2h}.$$

Розв'язавши задачу лінійного спряження (36) та враховавши розвинення для функції $\Phi(z)$ (3), одержимо

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i X(z)} \int_L \frac{\left[\delta_4 + \frac{3\delta_1}{4h} \left(\frac{R^2}{t^2} + \frac{t^2}{R^2} \right) \right] X^+(t)}{t - z} dt + \frac{c_1}{X(z)}, \quad (37)$$

де c_1 – невідома стала.

Після обчислення інтегралу у формулі (37) можемо записати

$$\begin{aligned} \Phi(z) = \frac{1}{2} \left\{ \delta_4 + \frac{3\delta_1}{4h} \left(\frac{R^2}{z^2} + \frac{z^2}{R^2} \right) \right\} - \frac{1}{2X(z)} \left\{ \delta_4 (z^2 - R^2 \cos 2\varphi) + \frac{3\delta_1}{4hR^2} (z^4 - R^2 \cos 2\varphi z^2 + \right. \\ \left. + \frac{R^4}{2} \sin^2 2\varphi) - \frac{3\delta_1 R^4}{4hz^2} + \frac{3\delta_1 R^2}{4h} - 2c_1 \right\}. \end{aligned} \quad (38)$$

Так як

$$A_0 = \Phi(0),$$

то на основі (38) одержимо

$$A_0 = \sin^2 \varphi \left\{ \delta_4 + \frac{3\delta_1}{4h} (1 + \cos^2 \varphi) \right\} - \frac{c_1}{R^2}. \quad (39)$$

Умова однозначності переміщень при обході контуру першої тріщини у плоскій задачі теорії пружності має вигляд

$$\int_{-\varphi}^{\varphi} (\Phi^+(t) - \Phi^-(t)) dt = 0. \quad (40)$$

Умову однозначності кутів повороту при обході контуру першої тріщини можемо записати так

$$\int_{-\varphi}^{\varphi} (\Phi_3^+(t) - \Phi_3^-(t)) dt = 0. \quad (41)$$

Якщо у залежності (40) підставити вираз для функції $\Phi(z)$ (38) і виділити уявну частину, то отримаємо

$$\operatorname{Im} A_0 \cdot R^2 \int_{-\varphi}^{\varphi} \rho(\theta, \varphi) d\theta + \operatorname{Im} c_1 \int_{-\varphi}^{\varphi} \frac{d\theta}{\rho(\theta, \varphi)} = 0, \quad (42)$$

де $\rho(\theta, \varphi) = \sqrt{\cos 2\theta - \cos 2\varphi}$.

Виділивши у (39) уявну частину, матимемо

$$\operatorname{Im} A_0 (1 + \sin^2 \varphi) + \operatorname{Im} \frac{c_1}{R^2} = 0. \quad (43)$$

Як видно з (43) і (42) система рівнянь для знаходження сталих $\operatorname{Im} A_0$ і $\operatorname{Im} c_1$ є однорідною, а тому

$$\operatorname{Im} A_0 = \operatorname{Im} c_1 = 0. \quad (44)$$

Введемо для зручності нові невідомі сталі

$$x_1 = \operatorname{Re} A_0, \quad x_2 = \operatorname{Re} A'_0, \quad x_3 = \frac{A}{R}, \quad x_4 = \frac{\operatorname{Re} c_1}{R^2}, \quad x_5 = \operatorname{Re} c_2, \quad (45)$$

для їх знаходження будемо мати таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^5 a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, 5}, \quad (46)$$

яка отримана на основі залежностей (20), (34), (39), а також при підстановці (38) у (40) та (33) у (41).

В системі рівнянь (46) введено позначення

$$\begin{aligned} a_{11} &= 2 \int_0^{\varphi} \rho(\theta, \varphi) d\varphi, \quad a_{13} = \frac{a_{11} R}{2h}, \quad a_{14} = 4 \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\rho(\theta, \varphi)}, \quad a_{21} = 1, \quad a_{22} = \beta, \quad b_2 = \beta \tilde{\Gamma}, \\ b_1 &= \frac{3\delta_1}{2h} \int_0^{\varphi} \frac{\cos 4\theta - \cos 2\varphi \cos 2\theta + 0.5 \sin^2 2\varphi - \cos 2\theta + 1}{\rho(\theta, \varphi)} d\theta, \\ a_{31} &= 1 + \sin^2 \varphi, \quad a_{33} = \frac{R}{2h} \sin^2 \varphi, \quad a_{34} = 1, \quad b_3 = \frac{3\delta_1}{4h} \sin^2 \varphi (1 + \cos^2 \varphi), \\ a_{42} &= \frac{a_{11} R^2}{\tilde{\kappa}}, \quad a_{43} = \frac{R^3 m h a_{11}}{\tilde{\kappa}}, \quad a_{45} = -a_{14}, \quad a_{55} = R^2, \quad a_{52} = 1 - \frac{\sin^2 \varphi}{\tilde{\kappa}}, \quad a_{53} = -\frac{\sin^2 \varphi m h R}{\tilde{\kappa}}, \\ b_4 &= -2 \int_0^{\varphi} \frac{1}{\rho(\theta, \varphi)} \left\{ \tilde{\Gamma} R^2 \rho^2(\theta, \varphi) + q_5 R^4 \left(\cos 4\theta - \cos 2\varphi \cos 2\theta + \frac{\sin^2 2\varphi}{2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - (q_4 + 2\tilde{\Gamma} R^2) \cos 2\theta + q_4 \right\} d\theta, \quad b_5 = \frac{(\tilde{\Gamma} R^2 + q_4) \sin^2 \varphi + 0.25 q_5 R^4 \sin^2 2\varphi}{R^2}, \end{aligned}$$

решта коефіцієнтів $a_{ij} = 0$.

Розв'язавши систему рівнянь (46) знайдемо невідомі сталі, а отже, визначимо комплексні потенціали $\Phi(z)$ (38) і $\Phi_3(z)$ (33).

Коефіцієнти інтенсивності моментів та зусиль знайдемо за формулами [7]

$$\begin{aligned} K_{13}^{\pm} - iK_{23}^{\pm} &= \pm i \frac{D(3+\nu)e^{\mp i\varphi}}{R\sqrt{2R \sin 2\varphi}} \left\{ 2(\tilde{\Gamma} R^2 e^{\pm 2i\varphi} + c_2) - q_3 (R^2 e^{\pm 2i\varphi} + \gamma_{15}) - q_5 \times \right. \\ &\quad \left. \times (R^4 e^{\pm 4i\varphi} + \gamma_{15} R^2 e^{\pm 2i\varphi} + \gamma_{17}) - q_4 (1 - e^{\mp 2i\varphi}) \right\}. \quad (47) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_1^{\pm} - iK_2^{\pm} &= \mp i \frac{2he^{\mp i\varphi}}{R\sqrt{2R \sin 2\varphi}} \left\{ 2c_1 - \delta_4 (R^2 e^{\pm 2i\varphi} + \gamma_{15}) - \frac{3\delta_1}{4R^2 h} (R^4 e^{\pm 4i\varphi} + \gamma_{15} R^2 e^{\pm 2i\varphi} + \gamma_{17}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3\delta_1 R^2}{4h} (1 - e^{\mp 2i\varphi}) \right\}, \quad (48) \end{aligned}$$

де верхні знаки “+” чи “-” відповідають вершині b_1 , нижні – вершині a_1 .

Наведемо розв'язок цієї задачі без врахування контакту берегів тріщин. На основі формул (5), повторивши подібні викладки, приходимо до таких виразів для функцій $\Phi_3(z)$ і $\Omega_3(z)$

$$\Phi_3(z) = \frac{1}{2} \left(r_0 + \frac{r_1}{z^2} \right) - \frac{1}{2X(z)} \left[r_0 (z^2 - R^2 \cos 2\varphi) - \frac{r_1 R^2}{z^2} + 2c_5 - 2\Gamma z^2 + r_1 \right],$$

$$\Omega_3(z) = \tilde{\kappa} \Phi_3(z) - \tilde{\kappa} \Gamma - \frac{P}{2z^2} - \tilde{A}'_0,$$

де c_5 – невідома стала,

$$\tilde{A}'_0 = \Phi_3(0), \quad r_1 = 0.5P/\tilde{\kappa}, \quad r_0 = \Gamma + \tilde{A}'_0/\tilde{\kappa}. \quad (49)$$

Беручи до уваги умову однозначності кутів повороту при обході контурів тріщин, а також (49), отримаємо систему рівнянь для знаходження невідомих сталих c_5 і \tilde{A}'_0

$$\tilde{A}'_0 a_{42} - c_5 a_{14} = b_7, \quad \tilde{A}'_0 a_{52} + c_5 R^{-2} = b_8,$$

де

$$b_8 = (r_1 R^{-2} + \Gamma) \sin^2 \varphi, \quad b_7 = 2 \int_0^\varphi \left[\Gamma R^2 (\cos 2\theta + \cos 2\varphi) - 2r_1 \sin^2 \theta \right] / \rho(\theta, \varphi) d\theta.$$

Коефіцієнти інтенсивності моментів K_{j3}^σ для вершини b_1 в цьому випадку знайдемо за формулою [7]

$$K_{13}^\sigma - iK_{23}^\sigma = \frac{iD(3+\nu)}{b_1 \sqrt{2R \sin 2\varphi}} \left[2(\Gamma b_1^2 + c_5) - r_0 (b_1^2 + \gamma_{15}) - r_1 \left(1 - \frac{a_1^2}{R^2} \right) \right].$$

Числовий аналіз та висновки. Був проведений числовий аналіз задачі для коефіцієнта Пуассона матеріалу пластини $\nu = 0.3$, який подано на рис. 2-4.

При двосторонньому згині пластини згинальними моментами на нескінченності для певного кута розкриття тріщини φ існує два граничні значення відношення згинальних моментів на нескінченності μ_* і μ^* , де $\tilde{\mu} = M_y^\infty / M_x^\infty$, коли контакт берегів тріщин відбувається по всій довжині, причому μ_* визначається із рівняння $N_r(0) = 0$, а μ^* – із залежності $N_r(\varphi) = 0$. Якщо проробити відповідні викладки, то отримаємо

$$\mu_* = -\frac{x_{31} - 3\delta_1^*}{x_{32} - 3\delta_2^*}, \quad \mu^* = -\frac{x_{31} - 3\delta_1^* \cos 2\varphi}{x_{32} - 3\delta_2^* \cos 2\varphi},$$

де x_{jk} – розв'язки системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^5 a_{ij} x_{jk} = b_{ik}, \quad i = \overline{1,5}, \quad k = \overline{1,2},$$

де

$$\delta_1^* = -\delta_2^* = -\frac{3(1+\nu)}{8(3+2\nu)}, \quad b_{11}^* = 0.75\delta_1^*, \quad b_{22} = b_{21} = -\frac{3}{8},$$

$$b_{11} = -b_{12} = 2b_{11}^* \int_0^\varphi \frac{\cos 4\theta - \cos 2\varphi \cos 2\theta + 0.5 \sin^2 2\varphi + 2 \sin^2 \theta}{\rho(\theta, \varphi)} d\theta,$$

$$b_{31} = -b_{32} = b_{11}^* \sin^2 \varphi (1 + \cos^2 \varphi), \quad b_{5j} = (\Gamma_j + q_{4j}) \sin^2 \varphi + \frac{1}{4} q_{5j} \sin^2 2\varphi,$$

$$b_{4j} = -2 \int_0^\varphi \frac{1}{\rho(\theta, \varphi)} \left\{ \Gamma_j \rho^2(\theta, \varphi) + q_{5j} \left(\cos 4\theta - \cos 2\varphi \cos 2\theta + \frac{\sin^2 2\varphi}{2} \right) - \right.$$

$$\left. - (q_{4j} + 2\Gamma_j) \cos 2\theta + q_{4j} \right\} d\theta, \quad \Gamma_1 = \Gamma_2 = b_{22} (1-\nu), \quad q^* = \frac{3(1-\nu^2)}{32(3+2\nu)(3+\nu)}$$

$$q_{51} = -q_{52} = -9(1+\nu)q^*, \quad q_{41} = -q_{42} = (15+7\nu)q^*,$$

коефіцієнти a_{ij} такі самі як у системі рівнянь (46) за виключенням

$$a_{13} = 0.5a_{11}, \quad a_{22} = (1-\nu)^{-1}, \quad a_{33} = 0.5 \sin^2 \varphi, \quad a_{42} = \tilde{\kappa}^{-1} a_{11}, \quad a_{43} = -1.5(1+\nu)a_{11},$$

$$a_{53} = -1.5\tilde{\kappa}^{-1}(1+\nu)\sin^2 \varphi, \quad a_{55} = 1.$$

На рис. 2 дається графічна залежність μ_* і μ^* від кута розкриття тріщин φ .

Розподіл контактного зусилля між берегами тріщин для кута розкриття $\varphi = 60^\circ$ при різних значеннях $\tilde{\mu}$ подано на рис. 3. На основі якого можна зробити висновок, що контакт берегів тріщин для заданого кута їх розкриття φ буде проходити для всіх μ із нерівності $\mu^* \leq \tilde{\mu} \leq \mu_*$. При $\tilde{\mu} > \mu_*$ буде проходити відставання берегів тріщин поблизу точок $\theta=0$ і $\theta=\pi$, при $\tilde{\mu} < \mu^*$ буде проходити відставання берегів тріщин поблизу їх вершин. Ці закономірності мають місце для будь-якого кута розкриття тріщин φ .

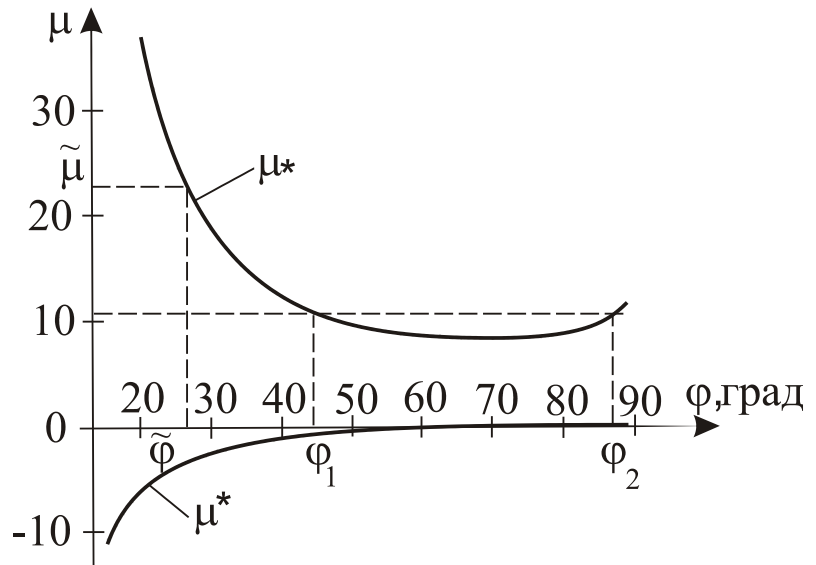
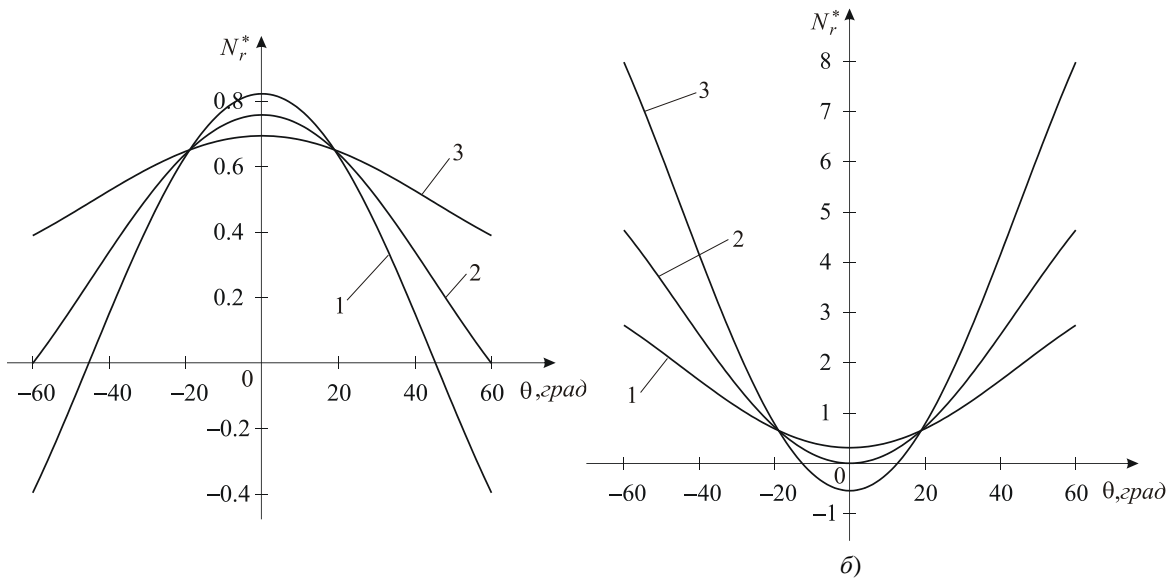


Рисунок 2 - Графічна залежність граничного значення $\tilde{\mu} = M_y^\infty / M_x^\infty$, коли контакт відбувається по всій довжині тріщин, від кута їх розкриття φ .

На основі рис. 2 для кожного кута розкриття тріщин φ можемо встановити межі зміни $\tilde{\mu}$, коли контакт буде відбуватися по всій довжині тріщин, і навпаки для кожного $\tilde{\mu}$ можемо визначити кути φ , коли контакт берегів тріщин відбувається по всій довжині тріщин. Для всіх $\tilde{\mu}$ із нерівності $0.04 < \tilde{\mu} < \mu_1 = 8.29$ береги тріщин завжди будуть контактувати незалежно від кута їх кута розкриття φ . Якщо для деякого $\tilde{\mu} > 25$ ($\tilde{\mu} < 0.04$) встановили кут $\tilde{\varphi}$ (див. рис. 2) і кут розкриття тріщин $\varphi < \tilde{\varphi}$ будемо мати контакт берегів тріщин по всій довжині, при $\varphi > \tilde{\varphi}$ будемо мати відставання берегів тріщин в околі точок $\theta=0$ і $\theta=\pi$ (в околі кінців тріщин). Для $\tilde{\mu}$ із нерівності $\mu_1 < \tilde{\mu} < 25$ таких кутів розкриття тріщин будемо мати два φ_1 і φ_2 і якщо кут розкриття тріщин відрізняється від φ_1 і φ_2 і $\varphi < \varphi_1$ чи $\varphi > \varphi_2$ будемо мати контакт берегів тріщин по всій довжині, при $\varphi > \varphi_1$ чи $\varphi < \varphi_2$ будемо мати відставання берегів тріщин в точках $\theta=0$ і $\theta=\pi$.

На рис. 4 дається графічна залежність приведених коефіцієнтів інтенсивності зусиль (КІЗ) і моментів (КІМ) в залежності від кута розкриття тріщин φ при різних значеннях $\tilde{\mu}$ без врахування і врахуванням контакту берегів тріщин. Як видно з цього рисунка, величина КІЗ і КІМ залежить від відношення моментів на нескінченності $\tilde{\mu}$. При $\tilde{\mu} = \mu^*$ (див. рис. 4а) і при $\tilde{\mu} = \mu_*$ (див. рис. 4в) в другому випадку КІЗ і КІМ у декілька разів більші. Крім того, КІМ без урахування контакту берегів є більші за КІМ з врахуванням контакту їх берегів.



Крива 1 – $\tilde{\mu} = -1$, крива 2 – $\tilde{\mu} = \mu^* \approx -0.245$,
 крива 3 – $\mu = 0.5$.
 Крива 1 – $\tilde{\mu} = 5$, крива 2 – $\tilde{\mu} = \mu_* \approx 8.62$,
 крива 3 – $\tilde{\mu} = 15$.

Рисунок 3 - Розподіл приведенного контактної зусилля $N_r^* = hN_r/M_x^\infty$ між берегами тріщин для $\varphi = 60^\circ$ при різних відношеннях згинних моментів $\tilde{\mu} = M_y^\infty/M_x^\infty$.

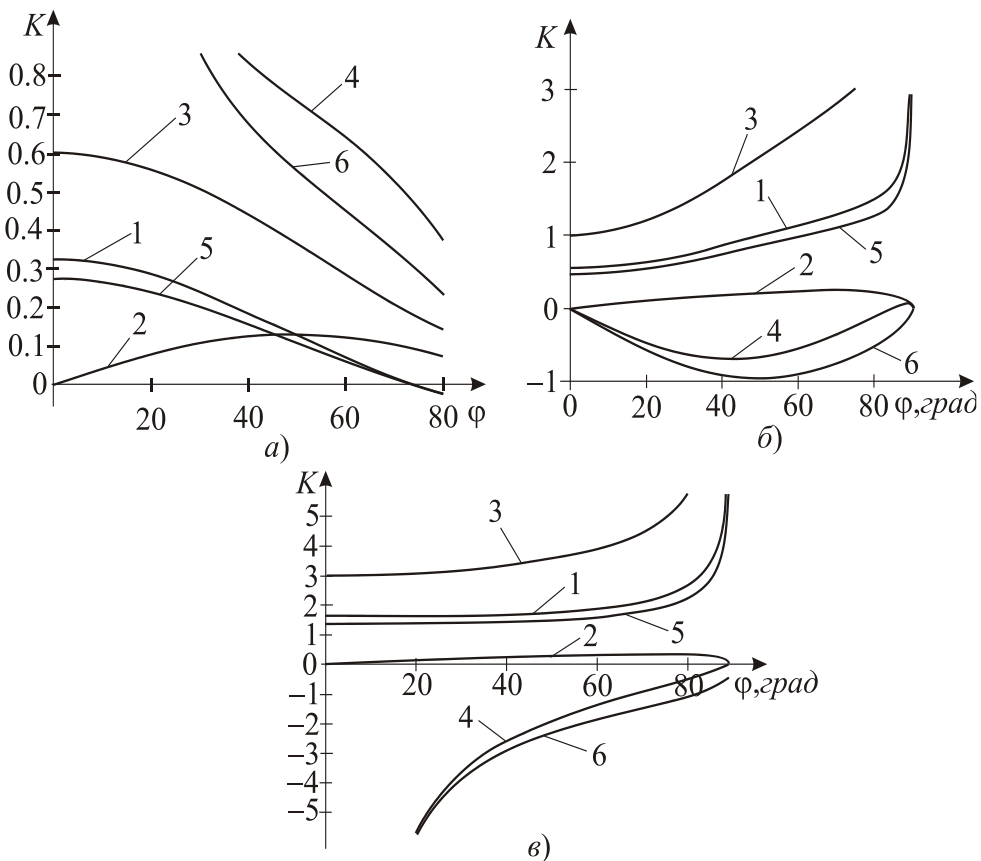


Рисунок 4 - Залежність приведених коефіцієнтів інтенсивності зусиль $K_i^* = K_i h / (M_x^\infty \sqrt{R\varphi})$ і моментів $K_{i3}^* = K_{i3} / (M_x^\infty \sqrt{R\varphi})$ від кута розкриття тріщини φ . Криві 1 і 2 відповідають K_1^* і K_2^* , криві 5 і 6 – K_{13}^* і K_{23}^* , криві 3 і 4 – $K_{13}^{\sigma*}$ і $K_{23}^{\sigma*}$ тільки при відсутності контакту берегів тріщин: а) отримано при $\tilde{\mu} = \mu^*$, б) при $\tilde{\mu} = 5$, в) при $\tilde{\mu} = \mu_*$.

Література

1. Герасимчук П.В., Божидарнік В.В., Опанасович В.К. Односторонній згин пластини з тріщиною по дузі кола з урахуванням контакту її берегів // Наукові нотатки Луцького технічного університету. – 2003. – С. 57-63.
2. Божидарнік В.В., Опанасович В.К., Герасимчук П.В. Двосторонній згин ізотропної пластини з наскрізною тріщиною по дузі кола з урахуванням контакту її берегів // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій. Під гол. ред. В. В. Панасюка. – Львів, Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України. – 2004. – С. 213-218.
3. Божидарнік В.В., Опанасович В. К., Герасимчук П.В. Двосторонній згин пластини з несиметричною наскрізною тріщиною по дузі кола з урахуванням контакту її берегів // Проблеми прочності. – 2006, № 5 (383). – С. 135-141.
4. Божидарнік В.В., Опанасович В. К., Герасимчук П.В. Згин пластини з двома рівними симетричними тріщинами по дузі кола з урахуванням контакту їх берегів // Механічна втома матеріалів. Праці 13-го міжнародного колоквиуму (МВМ-2006), 25-28 вересня 2006 р. Тернопіль (Україна): Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя, 2006. – С. 450-455. – 536 с.
5. Прусов И. А. Некоторые задачи термоупругости. – Минск, Изд-во Белорус. ун-та. – 1972. – 200 с.
6. Прусов И. А. Метод сопряжения в теории плит. – Минск, Изд-во Белорус. ун-та. – 1975. – 256 с.
7. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.

Одержано 05.05.2007 р.

УДК 667.64:678.026

А.Трапезон¹, докт.техн.наук; А.Букетов², канд.техн.наук

¹Інститут проблем міцності ім.Г.С.Писаренка НАНУ, м.Київ

²Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

ВПЛИВ ОБРОБКИ ЕПОКСИДНИХ КОМПОЗИЦІЙ ЗОВНІШНІМИ ПОЛЯМИ НА ЦИКЛІЧНУ МІЦНІСТЬ СИСТЕМИ “ОСНОВА (СТАЛЬ СТ.3) – ЗАХИСНЕ ПОКРИТТЯ”

Встановлено кореляцію між циклічною міцністю і адгезійними властивостями захисних покриттів залежно від технологічного процесу формування покриттів (варіантів ультрафіолетового опромінення та магнітної обробки композицій). Встановлено, що попереднє комплексне поетапне ультрафіолетове опромінення епоксидної смоли з наступною магнітною обробкою композиції забезпечує значне підвищення межі витривалості системи “основа - модифіковане покриття”.

A.Trapezon, A.Buketov

CYCLIC DURABILITY OF STEEL WITH THE MODIFIED EXTERNAL FIELDS BY EPOXY COMPOSITE COVERAGES IN THE CONDITIONS OF LOADINGS OF HIGH-FREQUENCY

The physical-mechanical properties of polymer-composite materials depend on quantitative composition as well as magnetic and chemical nature of fillers. As a result of investigations, it was discovered that adding dispersed particles of inorganic nature and ultra-violet modification to polymer composition allows to regulate structure and properties of compositional materials. Features of polymer-composites ingredients magnetic properties influence on protective coating adhesive resistance.