

УДК 621.793.927.7:669.018.25

**О.Шаблій, докт. фіз.-мат. наук; Ч.Пулька, докт. техн. наук;  
М.Михайлишин, канд. фіз.-мат. наук**

*Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя*

**ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАЛИШКОВИХ НАПРУЖЕНЬ, ДЕФОРМАЦІЙ  
ТА ПЕРЕМІЩЕНЬ ПРИ ІНДУКЦІЙНОМУ НАПЛАВЛЕННІ  
ТОНКИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ З УРАХУВАННЯМ  
КОМБІНОВАНОГО ЕКРАНУВАННЯ ТЕПЛОВИХ  
ТА ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ПОЛІВ**

*Запропоновано математичну модель для визначення полів залишкових напружень, деформацій та переміщень, які виникають у процесі індукційного наплавлення тонких сталевих дисків порошкоподібними твердими сплавами з використанням комбінованого екранування теплових та електромагнітних полів. Модель побудовано на основі припущення, що основними причинами виникнення полів залишкових напружень, деформацій та переміщень є різні механічні та теплофізичні характеристики основного і наплавлюваного металів і в процесі наплавлення здійснюється тільки пружне деформування. Використано рівняння теорії тонких пластин. Отримано аналітичні розв'язки, які дозволяють визначити залишкові переміщення, напруження та деформації при індукційному наплавленні тонких сталевих дисків в залежності від геометричних розмірів диска і наплавлюваного шару, а також механічних та теплофізичних їх характеристик.*

**O.Shabliy, Ch.Pulka, M.Mykhailyshyn**

**INVESTIGATION OF THE RESIDUAL STRESSES, DEFORMATIONS,  
DISPLACEMENTS UNDER INDUCTION SURFACING  
OF THE THIN CONSTRUCTION PARTS TAKING INTO ACCOUNT  
THE COMBINED SCREENING OF THE THERMAL  
AND ELECTROMAGNETIC FIELDS**

*Mathematic model for finding residual stresses fields, deformations and displacements appeared under induction surfacing of the thin steel disks by the powder-like hard alloys using the combined screening of the thermal and electromagnetic fields was proposed. The model is built basing on the assumption that the main reasons of the residual stress fields, deformations and displacement appearance are different mechanical and thermophysical characteristics of the basic and surfacing metals and the fact that while surfacing only elastic deformation is available. The equations of the thin plates theory are used. Analytical solvings, which made possible to identify the residual displacements, stresses and deformations under induction surfacing of thin steel disks depending on the geometric dimensions of the dish and surfacing layer, as well as the mechanical and thermal-physical characteristics, are obtained.*

Залишкові напруження і переміщення, які виникають після наплавлення тонких елементів конструкцій, зумовлені різними причинами. Перш за все це відмінність механічних і теплофізичних властивостей матеріалів основного і наплавлюваного металів, зокрема коефіцієнтів температурного розширення  $\alpha_T$ , і несиметричність процесу наплавлення відносно серединної площини диска.

Проблемам теоретичного визначення залишкових деформацій, переміщень і напружень, які виникають в результаті наплавлення кромки тонких пластин або зварювання, присвячено ряд досліджень [1-13]. Основною особливістю робіт [1, 4, 6] є те, що в них розглянуті прямокутні пластини з прямолінійною кромкою. В роботах [1, 4, 7] запропоновані числові методи розрахунків зварних деформацій і напружень на основі загальних фізичних співвідношень термопластичності і повзучості, при цьому не враховані згинаючі деформації в пластинах.

В роботі [2] запропоновано інженерну методику визначення осесиметричних залишкових напружень у круглому диску, зовнішня кромка якого наплавлена рівномірно по всій товщині і довжині.

Інженерна методика, яка базується на методі розділу тіла з залишковими напруженнями, запропонована в роботі [6] для визначення залишкових деформацій і напружень в довгій пластині з наплавленою кромкою. В ній не враховано різні механічні і теплофізичні властивості матеріалів основного і наплавленого металів. В роботі [5] вивчено механізм утворення залишкових напружень, деформацій і переміщень в пологій конічній оболонці за рахунок інтенсивного нагрівання її зовнішнього контуру. Для визначення полів залишкових напружень і переміщень використано деформаційну теорію пластичності і, зокрема, теорему про розвантаження у випадку, коли індуктор вільний від допоміжних засобів керування тепловим та електромагнітним полями. Результати можна використати для моделювання полів залишкових напружень і переміщень, які виникають після наплавлення контура деталей типу пологих конічних дисків. Ці дані неможливо використати для моделювання процесу наплавлення плоских дисків внаслідок ряду прийнятих припущень (постійності температури по товщині, плоского напруженого стану і неврахування неоднорідності конструкції в зоні наплавлення).

З цією метою, а саме – моделювання процесу наплавлення для визначення полів залишкових напружень, деформацій та переміщень, які виникають в процесі наплавлення тонких дисків і отримання виробів з заданими геометричними та експлуатаційними характеристиками з використанням нагрівальної системи ІТЕЕ (індуктор, тепловий та електромагнітний екрани), необхідно було розробити адекватну математичну модель яка описана нижче.

## **1 Постановка задачі індукційного нагрівання тонкостінних елементів конструкцій**

В процесі індукційного наплавлення робочої кромки тонких дисків стійкими проти спрацювання порошкоподібними твердими сплавами в готовій деталі виникають залишкові напруження та деформації. Їх виникнення зумовлене різними причинами. Першою і найважливішою є та, що матеріали основного і наплавленого металу мають різні механічні і теплофізичні властивості і, перш за все, коефіцієнт температурного розширення  $\alpha_t$  та несиметрія розташування наплавленого шару відносно серединної площини диска.

Другою важливою причиною є виникнення в процесі наплавлення незворотних, зокрема пластичних, деформацій, які теж спричиняють виникненню залишкових полів напружень і деформацій. Існують і інші причини, такі, як структурні перетворення, виникнення внутрішніх напружень в процесі кристалізації наплавленого металу тощо, але можна припустити, що перші дві є основними.

Для того, щоб створити адекватну математичну модель процесу, розглянемо спочатку особливості його протікання. Нагрівання системи «основний метал - шихта» здійснюється з допомогою двохвиткового кільцевого індуктора.

В результаті дії струмів Фуко, які виникають між основним металом і індуктором, метал нагрівається від початкової температури до температури плавлення шихти. Шихта розплавляється від поверхні основного металу за рахунок процесів теплопровідності. Після повного розплавлення шихти індуктор вимикають від джерела живлення і деталь остигає, причому остигання здійснюється, як правило, за рахунок конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем. На етапі нагрівання аж до повного розплавлення шихти можна вважати, що деформується тільки основний метал, оскільки в шихті або в розплаві не виникають напруження або деформації, які б впливали на процес деформування основного металу. Тому на цьому етапі можна розв'язувати задачу термопружності тільки для основного металу диска.

Після вимкнення індуктора починається охолодження системи «основний метал - розплав» і здійснюється процес кристалізації розплаву.

Процес кристалізації досить складний і починається він в тих точках розплаву, в яких здійснюється максимальна тепловіддача. Очевидно, що кристалізація починається на поверхні розплаву і в міру остигання поширюється вглиб його. Внаслідок фізичних процесів, що супроводжують кристалізацію (наприклад, зміна об'єму) в кристалізованому матеріалі виникають внутрішні напруження, якими на першому етапі будемо нехтувати. Шляхом термодифузії кристалізований метал розплаву з'єднується з основним металом за допомогою тонкого перехідного шару, а далі здійснюється спільне деформування системи «основний і наплавлений метал».

Оскільки процес кристалізації здійснюється в певному інтервалі температур, то існує деяка температура, починаючи з якої можна вважати, що кристалізований наплавлений шар стає твердим деформівним, пружним або пружно-пластичним тілом. Ця температура звичайно нижча від температури плавлення шихти, позначимо її надалі  $T_d$ . При моделюванні спільного деформування основного металу і наплавленого шару будемо нехтувати наявністю тонкого перехідного шару, теплофізичні і механічні властивості якого відрізняються від характеристик як основного металу, так і наплавленого шару. Між основним металом і наплавленим шаром будемо приймати наявність ідеального термомеханічного контакту.

Отже, на другому етапі можна вважати, що в початковий момент вільне від зовнішнього навантаження і нагріте до постійної температури  $T_d$  кільце наплавленого матеріалу з'єднується з диском основного металу, в якому існують початкові напруження і деформації, що виникли за рахунок попереднього індукційного нагрівання, причому температура диска в зоні з'єднання теж постійна і дорівнює  $T_d$ .

## **2 Математична модель деформування тонкостінних елементів конструкцій у процесі їх індукційного наплавлення**

Будемо вважати, що основними причинами виникнення залишкових напружень, деформацій та переміщень в диску і наплавленому шарі є відмінність коефіцієнтів температурного розширення і модулів Юнга основного і наплавленого металів та несиметрія розташування наплавленого шару відносно серединної площини диска.

Таке припущення виникло після зроблених замірів переміщень у наплавленому і ненаплавленому дисках, нагрітих за однаковими режимами. Результати, одержані згідно з математичною моделлю, побудованою з допомогою вказаного вище припущення, адекватні одержаним експериментальним даним: переміщення, одержані теоретично, добре узгоджуються з експериментальними. Теоретично доведена неможливість виникнення тріщин в наплавленому таким способом диску, що підтверджується експериментально.

Використаємо рівняння теорії тонких пластин, в яких для розподілу деформацій по товщині пластин справедлива гіпотеза Кірхгофа-Лява. Тоді основні рівняння для вільного від силового навантаження кільцевого диску, віднесеного до циліндричної системи координат, в осесиметричному випадку наступні:

Рівняння рівноваги:

$$\frac{dN_1}{dr} = \frac{N_2 - N_1}{r}; \quad (1)$$

$$\frac{dM_1}{dr} = \frac{M_2 - M_1}{r}.$$

Геометричні співвідношення згідно з гіпотезою Кірхгофа-Лява будуть:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{10} + z\kappa_1; \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{20} + z\kappa_2; \quad -h/2 \leq z \leq h/2; \quad (2)$$

$$\varepsilon_{10} = \frac{dU}{dr}; \quad \varepsilon_{20} = \frac{U}{r}; \quad \kappa_1 = \frac{d\theta}{dr} \quad \kappa_2 = \frac{\theta}{r} \quad (3)$$

$$\frac{dw}{dr} = -\theta. \quad (4)$$

Фізичні залежності в кожній точці диска з основного матеріалу будуть:

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^{(1)} &= \frac{E_0}{1-\nu^2} [\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22} - \alpha_0(1+\nu)(T - T_0)]; \\ \sigma_{22}^{(1)} &= \frac{E_0}{1-\nu^2} [\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11} - \alpha_0(1+\nu)(T - T_0)].\end{aligned}\quad (5)$$

Фізичні залежності (в узагальнених напруженнях і деформаціях) без врахування наплавленого шару для довільного поперечного перерізу в припущенні, що

температура постійна по товщині, знайдені за формулами  $N_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{11}^{(1)} dz$ ,

$N_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{22}^{(1)} dz$ ,  $M_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{11}^{(1)} z dz$ ,  $M_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{22}^{(1)} z dz$  з використанням (5), такі:

$$\begin{aligned}N_1 &= \frac{E_0 h}{1-\nu^2} [\varepsilon_{10} + \nu\varepsilon_{20} - \alpha_0(1+\nu)(T - T_0)]; \\ N_2 &= \frac{E_0 h}{1-\nu^2} [\varepsilon_{20} + \nu\varepsilon_{10} - \alpha_0(1+\nu)(T - T_0)]; \\ M_1 &= \frac{E_0 h^3}{12(1-\nu^2)} (\kappa_1 + \nu\kappa_2); \\ M_2 &= \frac{E_0 h^3}{12(1-\nu^2)} (\kappa_2 + \nu\kappa_1).\end{aligned}\quad (6)$$

Тут  $E_0$ ,  $\alpha_0$  – модуль Юнга і коефіцієнт температурного розширення основного матеріалу,  $\nu$  – модуль Пуассона,  $T_0$  – початкова температура диска.

Вважаємо, що в довільний момент нагрівання або остигання температура в будь-якому перерізі постійна по товщині і диск вільно спертий по контуру внутрішнього отвору з радіусом  $r_1$ . Зовнішній радіус диска  $r_2$  (рис. 1). Тоді граничні умови в будь-який момент часу такі:

$$\begin{aligned}r = r_1; N_I = 0; & \quad M_I = 0; & \quad w = 0; \\ r = r_2; N_I = 0; & \quad M_I = 0.\end{aligned}\quad (7)$$

Знайдемо розв'язок задачі для першого етапу нагрівання, коли нагрівається тільки диск з основного металу, а наплавлений шар відсутній.

Зауважимо, що в даній моделі ми не розв'язуємо задачі теплопровідності, а будемо апроксимувати температурне поле в диску для цього моменту часу деякою залежністю, використовуючи експериментальні дані. Так, наприклад, залежність

$$\begin{aligned}T_1(r) &= T_{01} e^{-\frac{(r-r_3)}{\beta}}, & r_1 \leq r \leq r_3 \\ T_1(r) &= T_{01}, & r_3 \leq r \leq r_2\end{aligned}\quad (8)$$

дозволяє з достатньою точністю апроксимувати знайдений експериментальний закон розподілу температури в диску для цього моменту часу, коли наплавлений шар затвердне, тобто температура  $T_{01} = 700^\circ\text{C}$ , при коефіцієнті градієнтності  $\beta = 0,35$ .

Надалі врахуємо також, що добуток параметрів  $E_0\alpha_0$  для певних інтервалів зміни температур можна з незначною похибкою вважати сталою величиною. Наприклад, для сталі Ст3  $E_0\alpha_0 \approx 0,25$ , для порошкоподібного сплаву ПГ-С1 (сормайту)  $E_n\alpha_n \approx 0,3$ .

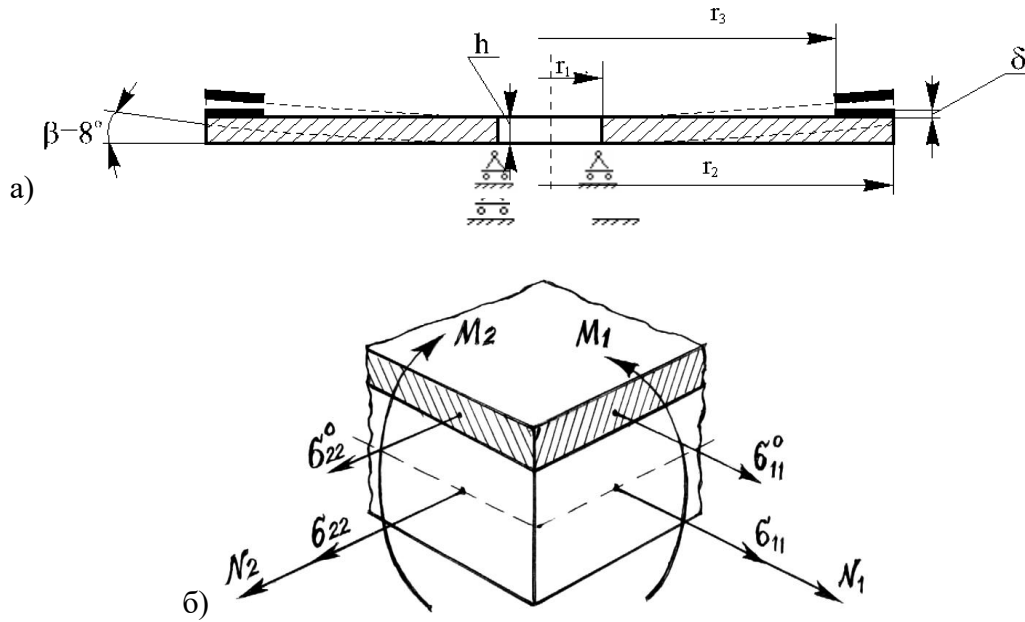


Рисунок 1 - Фрагмент диска до і після наплавлення – а); елемент диска в зоні наплавлення з позначеннями напружень, зусиль і моментів, які діють на нього – б).

Незалежними від температури для цих інтервалів будемо вважати також значення коефіцієнта Пуассона  $\nu$ . Ці факти значно полегшують розв'язок задачі.

Дійсно, тоді співвідношення (6) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{E_0 \alpha_0 h}{1 - \nu^2} [\alpha_0^{-1} \varepsilon_{10} + \nu \alpha_0^{-1} \varepsilon_{20} - (1 + \nu)(T - T_0)]; \\ N_2 &= \frac{E_0 \alpha_0 h}{1 - \nu^2} [\alpha_0^{-1} \varepsilon_{20} + \nu \alpha_0^{-1} \varepsilon_{10} - (1 + \nu)(T - T_0)]; \\ M_1 &= \frac{E_0 \alpha_0 h^3}{12(1 - \nu^2)} (\alpha_0^{-1} \kappa_1 + \nu \alpha_0^{-1} \kappa_2); \\ M_2 &= \frac{E_0 \alpha_0 h^3}{12(1 - \nu^2)} (\alpha_0^{-1} \kappa_2 + \nu \alpha_0^{-1} \kappa_1). \end{aligned} \quad (9)$$

Якщо ввести тепер функції  $\bar{U}$  і  $\bar{\theta}$  таким чином:

$$\alpha_0^{-1} \varepsilon_{10} = \frac{d\bar{U}}{dr}, \quad \alpha_0^{-1} \varepsilon_{20} = \frac{\bar{U}}{r}; \quad \alpha_0^{-1} \kappa_1 = \frac{d\bar{\theta}}{dr}, \quad \alpha_0^{-1} \kappa_2 = \frac{\bar{\theta}}{r},$$

то вирази (9) набувають вигляду

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{E_0 \alpha_0 h}{1 - \nu^2} \left[ \frac{d\bar{U}}{dr} + \nu \frac{\bar{U}}{r} - (1 + \nu)(T - T_0) \right]; \\ N_2 &= \frac{E_0 \alpha_0 h}{1 - \nu^2} \left[ \frac{\bar{U}}{r} + \nu \frac{d\bar{U}}{dr} - (1 + \nu)(T - T_0) \right]; \\ M_1 &= \frac{E_0 \alpha_0 h^3}{12(1 - \nu^2)} \left( \frac{d\bar{\theta}}{dr} + \nu \frac{\bar{\theta}}{r} \right); \\ M_2 &= \frac{E_0 \alpha_0 h^3}{12(1 - \nu^2)} \left( \frac{\bar{\theta}}{r} + \nu \frac{d\bar{\theta}}{dr} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Враховуючи тепер, що  $E_0 \alpha_0 = \text{const}$ , і підставивши ці вирази у рівняння рівноваги (1), отримаємо рівняння для визначення функцій  $\bar{U}$  і  $\bar{\theta}$ :

$$\frac{d^2 \bar{U}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{U}}{dr} - \frac{\bar{U}}{r^2} = (1 + \nu) \frac{dT_1^*}{dr};$$

$$\frac{d^2 \bar{\theta}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{\theta}}{dr} - \frac{\bar{\theta}}{r^2} = 0,$$
(11)

де позначено  $T_1^*(r) = T_1(r) - T_0$ .

Загальний розв'язок системи рівнянь (11) має вигляд

$$\bar{U} = \bar{A}_1 r + \frac{\bar{A}_2}{r} + \frac{(1 + \nu)}{r} \int T_1^* r dr;$$

$$\bar{\theta} = \bar{B}_1 r + \frac{\bar{B}_2}{r}.$$
(12)

Підставляючи (12) у вирази для зусиль і моментів (10) та задовольняючи граничним умовам (7), будемо мати

$$\bar{U}^{(0)}(r) = \frac{\alpha_0}{r} \left[ \frac{r^2(1-\nu) + r_1^2(1+\nu)}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} T_1^* r dr + (1+\nu) \int_{r_1}^r T_1^* r dr \right];$$

$$\bar{\theta}^{(0)}(r) = 0; \quad w^{(0)}(r) = 0;$$

$$N_1^{(0)} = \frac{E_0 \alpha_0 h}{r^2} \left[ \frac{r^2 - r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} T_1^* r dr - \int_{r_1}^r T_1^* r dr \right];$$

$$N_2^{(0)} = \frac{E_0 \alpha_0 h}{r^2} \left[ \frac{r^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} T_1^* r dr + \int_{r_1}^r T_1^* r dr \right] - E_0 \alpha_0 h T_1^*(r);$$

$$M_1^{(0)} = 0; \quad M_2^{(0)} = 0.$$
(13)

Зауважимо, що якщо покласти в формулах (13)  $T_1^{(*)}(r)$  рівною деякій константі, то отримаємо  $N_1^{(0)} = N_2^{(0)} = 0$ , і, виходячи з формул (5), відповідно

$\sigma_{11}^{(0)} = \sigma_{22}^{(0)} = 0$ . Це означає, що якщо нагріти кільце до постійної по товщині і вздовж радіуса температури  $T_{10}$ , то точки диска отримують радіальне переміщення

$$\bar{U}^0(r) = \alpha_0 r (T_{10} - T_0),$$
(14)

і при цьому напруження у всіх точках диска відсутні.

На другому етапі вважаємо, що кільце з наплавлюваного матеріалу, нагріте до постійної температури  $T_\partial$ , з'єднується з диском з основного металу, який в зоні з'єднання  $r_3 \leq r \leq r_2$  теж нагрітий до постійної температури  $T_\partial$ . Розподіл температури в диску в момент з'єднання описується формулою (8), в якій  $T_{01} = T_\partial - T_0$ . Напружений і деформований стан в диску в цей момент описується формулами (13), оскільки внутрішні напруження в кільці в момент з'єднання відсутні. В результаті зміни температурного поля внаслідок остигання здійснюється деформування такої неоднорідної пластини – диска з основного металу і з'єданого з ним кільця з наплавлюваного матеріалу.

Отримаємо систему рівнянь для знаходження полів додаткових напружень і переміщень неоднорідної конструкції, які виникають в результаті зміни температурного поля при остиганні. Зауважимо, що при отриманні фізичних залежностей необхідно температурні деформації відраховувати від температури  $T_1(r)$ , яка була в конструкції на момент затверднення наплавлювального шару і його з'єднання з основним металом. Тоді фізичні залежності в основному металі і в наплавленому шарі будуть такими:

$$\sigma_{11} = \frac{E_0}{1 - \nu^2} [\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22} - \alpha_0 (1 + \nu) (T - T_1)];$$
(15)

$$\begin{aligned}\sigma_{22} &= \frac{E_0}{1-\nu^2} [\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11} - \alpha_0(1+\nu)(T - T_1)], \quad -h/2 \leq z \leq h/2, \\ \sigma_{22} &= \frac{E_H}{1-\nu^2} [\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22} - \alpha_H(1+\nu)(T - T_1)]; \\ \sigma_{11} &= \frac{E_H}{1-\nu^2} [\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22} - \alpha_H(1+\nu)(T - T_1)], \quad +h/2 \leq z \leq h/2 + \delta,\end{aligned}\tag{16}$$

де  $E_H$  і  $\alpha_H$  - модуль Юнга і коефіцієнт лінійного температурного розширення наплавленого матеріалу,  $T(r)$  - розподіл температури (постійної по товщині довільного перерізу) в довільний момент остигання. Вважається, що модулі Пуассона основного і наплавленого матеріалів однакові. Фізичні залежності (15), (16) справедливі в області наплавлення  $r_3 \leq r \leq r_2$ . В зоні  $r_1 \leq r \leq r_3$  справедливі залежності (15).

Інтегруючи фізичні залежності (15), (16) по товщині пластини у відповідності з відомими формулами переходу до зусиль і моментів

$$\begin{aligned}N_1^{(2)} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{11}^{(0)} dz + \int_{+\frac{h}{2}}^{\delta} \sigma_{11}^{(H)} dz, \quad N_2^{(2)} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{22}^{(0)} dz + \int_{+\frac{h}{2}}^{\delta} \sigma_{22}^{(H)} dz, \\ M_1^{(2)} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{11}^{(0)} z dz + \int_{+\frac{h}{2}}^{\delta} \sigma_{11}^{(H)} dz, \quad M_1^{(2)} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{22}^{(0)} z dz + \int_{+\frac{h}{2}}^{\delta} \sigma_{22}^{(H)} dz, \quad \text{а також}\end{aligned}$$

враховуючи, що співвідношення Кірхгофа-Лява (2) справедливі для всього пакету неоднорідної пластини, отримаємо наступні фізичні залежності в зоні  $r_3 \leq r \leq r_2$ .

$$\begin{aligned}N_1^{(2)} &= D_N^{(2)}(\varepsilon_{10} + \nu\varepsilon_{20}) + D_{NM}(\kappa_1 + \nu\kappa_2) - D_T^{(2)}T^*; \\ N_2^{(2)} &= D_N^{(2)}(\varepsilon_{20} + \nu\varepsilon_{10}) + D_{NM}(\kappa_2 + \nu\kappa_1) - D_T^{(2)}T^*; \\ M_1^{(2)} &= D_M^{(2)}(\kappa_1 + \nu\kappa_2) + D_{NM}(\varepsilon_{10} + \nu\varepsilon_{20}) - D_T^*T^*; \\ M_2^{(2)} &= D_M^{(2)}(\kappa_2 + \nu\kappa_1) + D_{NM}(\varepsilon_{20} + \nu\varepsilon_{10}) - D_T^{(2)}T^*.\end{aligned}\tag{17}$$

У формулах (17) введено позначення:

$$T^*(r) = T(r) - T_1(r);\tag{18}$$

$$D_N^{(2)} = \frac{E_0 h + E_H \delta}{1-\nu^2}; \quad D_{NM} = \frac{E_H \delta (h + \delta)}{2(1-\nu^2)}; \quad D_T^{(2)} = \frac{E_0 h \alpha_0 + E_H \delta \alpha_H}{1-\nu}\tag{19}$$

$$D_M^{(2)} = \frac{1}{1-\nu^2} \left\{ \frac{E_0 h^3}{12} + \frac{E_H \delta}{3} \left[ \delta^2 + \frac{3h}{2} \left( \delta + \frac{h}{2} \right) \right] \right\}; \quad D_T^* = D_{NM} \alpha_H (1 + \nu).$$

В області  $r_1 \leq r \leq r_3$  фізичні залежності мають вигляд:

$$\begin{aligned}N_1^{(1)} &= D_N^{(1)}(\varepsilon_{10} + \nu\varepsilon_{20}) - D_T^{(1)}T^*; \\ N_2^{(1)} &= D_N^{(1)}(\varepsilon_{20} + \nu\varepsilon_{10}) - D_T^{(1)}T^*; \\ M_1^{(1)} &= D_M^{(1)}(\kappa_1 + \nu\kappa_2); \\ M_2^{(1)} &= D_M^{(2)}(\kappa_2 + \nu\kappa_1),\end{aligned}\tag{20}$$

де позначено:

$$D_N^{(1)} = \frac{E_0 h}{1-\nu^2}; \quad D_M^{(1)} = \frac{E_0 h^3}{12(1-\nu^2)}; \quad D_T^{(1)} = \alpha_0(1+\nu)D_N^{(1)}.\tag{21}$$

Співвідношення (20) отримуються з (17) при  $\delta = 0$ .

Зауважимо, що в формулах (17)-(21) і надалі всі величини в області  $r_1 \leq r \leq r_3$  позначені індексом (1) і в області  $r_3 \leq r \leq r_2$  - індексом (2) відповідно.

Враховуючи фізичні залежності (17) і (20), можна отримати наступні рівняння в переміщеннях:

- в зоні  $r_1 \leq r \leq r_3$ :

$$\frac{d^2 U^{(1)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU^{(1)}}{dr} - \frac{U^{(1)}}{r^2} = D_U^{(1)} \frac{dT^*}{dr}; \quad (22)$$

$$\frac{d^2 \theta^{(1)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta^{(1)}}{dr} - \frac{\theta^{(1)}}{r^2} = 0;$$

- в зоні  $r_3 \leq r \leq r_2$

$$\frac{d^2 U^{(2)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU^{(2)}}{dr} - \frac{U^{(2)}}{r^2} = D_U^{(2)} \frac{dT^*}{dr}; \quad (23)$$

$$\frac{d^2 \theta^{(2)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta^{(2)}}{dr} - \frac{\theta^{(2)}}{r^2} = D_\theta \frac{dT^*}{dr},$$

де введено позначення:

$$D_U^{(1)} = D_T^{(1)} / D_N^{(1)}; \quad D_U^{(2)} = (D_T^{(2)} D_M^{(2)} - D_T^* D_{NM}) / \Delta; \quad (24)$$

$$D_\theta = (D_T^* D_N^{(2)} - D_T^{(2)} D_{NM}) / \Delta; \quad \Delta = D_N^{(2)} D_M^{(2)} - D_{NM}^{(2)}.$$

Загальний розв'язок системи рівнянь (22) і (23) записується аналогічно (12) з різними константами в різних областях.

Для визначення восьми постійних інтегрування використовуємо наступні граничні умови і умови неперервності при переході через контур  $r = r_3$ .

$$\begin{aligned} N_1^{(1)}(r_1) &= 0; & M_1^{(1)}(r_1) &= 0; \\ U^{(1)}(r_3) &= U^{(2)}(r_3); & \theta^{(1)}(r_3) &= \theta^{(2)}(r_3); \\ N_1^{(1)}(r_3) &= N_1^{(2)}(r_3); & M_1^{(1)}(r_3) &= M_1^{(2)}(r_3); \\ N_1^{(2)}(r_2) &= 0; & M_1^{(2)}(r_2) &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Визначаючи постійні інтегрування з умов (25) і опускаючи громіздкі перетворення, приведемо остаточні розв'язки для кожної із зон.

$$\begin{aligned} U^{(1)} &= \frac{(1-\nu)r^2 + (1+\nu)r_1^2}{(1+\nu)r_1^2 r} \left\{ \frac{a_2 r_1^2}{a_1 r_2^2} \left[ \tilde{C}_2 + D_U^{(2)} \frac{(1-\nu)r_3^2}{a_2} \int_{r_3}^{r_2} T^* r dr \right] + \right. \\ &+ D_U^{(1)} \left[ \frac{(1-\nu)r_3^2}{a_1} \int_{r_1}^{r_3} T^* r dr - \int_r^{r_3} T^* r dr \right] \left. \right\} + \frac{D_U^{(1)}(1-\nu)r}{(1+\nu)r_1^2} \int_{r_1}^r T^* r dr; \\ \theta^{(1)} &= \frac{(1-\nu)r^2 + (1+\nu)r_1^2}{(1+\nu)r} \frac{a_2}{a_1 r_2^2} \left[ \tilde{D}_2 + D_\theta \frac{(1-\nu)r_3^2}{a_2} \int_{r_3}^{r_2} T^* r dr \right]; \\ N_1^{(1)} &= D_N^{(1)}(1-\nu) \frac{r^2 - r_1^2}{r_1^2 r^2} \left\{ \frac{a_2 r_1^2}{a_1 r_2^2} \left[ \tilde{C}_2 + D_U^{(2)} \frac{(1-\nu)r_3^2}{a_2} \int_{r_3}^{r_2} T^* r dr \right] + \right. \\ &+ D_U^{(1)} \left[ \frac{(1-\nu)r_3^2}{a_1} \int_{r_1}^{r_3} T^* r dr - \int_r^{r_3} T^* r dr \right] \left. \right\} - D_T^{(1)} \frac{(1-\nu)}{r_1^2} \int_{r_1}^r T^* r dr; \\ N_2^{(1)} &= D_N^{(1)}(1-\nu) \frac{r^2 + r_1^2}{r_1^2 r^2} \left\{ \frac{a_2 r_1^2}{a_1 r_2^2} \left[ \tilde{C}_2 + D_U^{(2)} \frac{(1-\nu)r_3^2}{a_2} \int_{r_3}^{r_2} T^* r dr \right] + \right. \\ &+ D_U^{(1)} \left[ \frac{(1-\nu)r_3^2}{a_1} \int_{r_1}^{r_3} T^* r dr - \int_r^{r_3} T^* r dr \right] \left. \right\} - D_T^{(1)}(1-\nu) \left[ \frac{1}{r_1^2} \int_{r_3}^r T^* r dr + T^*(r) \right]; \end{aligned} \quad (26)$$



$$\begin{aligned}
 M_1^{(1)} &= D_M^{(1)}(1-\nu) \frac{r^2 - r_1^2}{r_1^2 r^2} \frac{a_2 r_1^2}{a_1 r_2^2} \left[ \tilde{D}_2 + D_\theta \frac{(1-\nu)r_3^2}{a_2} \int_{r_3}^{r_2} T^* r dr \right]; \\
 M_2^{(1)} &= D_M^{(1)}(1-\nu) \frac{r^2 + r_1^2}{r_1^2 r^2} \frac{a_2 r_1^2}{a_1 r_2^2} \left[ \tilde{D}_2 + D_\theta \frac{(1-\nu)r_3^2}{a_2} \int_{r_3}^{r_2} T^* r dr \right]; \\
 U^{(2)} &= \frac{(1-\nu)r^2 + (1+\nu)r_2^2}{(1+\nu)r_2^2 r} \left( \tilde{C}_2 + D_U^{(2)} \int_{r_3}^r T^* r dr \right) + D_U^{(2)} \frac{(1-\nu)r}{(1+\nu)r_2^2} \int_r^{r_2} T^* r dr; \\
 \theta^{(2)} &= \frac{(1-\nu)r^2 + (1+\nu)r_2^2}{(1+\nu)r_2^2 r} \left( \tilde{D}_2 + D_\theta \int_{r_3}^r T^* r dr \right) + D_\theta \frac{(1-\nu)r}{(1+\nu)r_2^2} \int_r^{r_2} T^* r dr; \\
 N_1^{(2)} &= (1-\nu) \frac{r^2 - r_2^2}{r_2^2 r^2} \left[ D_N^{(2)} \left( \tilde{C}_2 + D_U^{(2)} \int_{r_3}^r T^* r dr \right) + D_{NM} \left( \tilde{D}_2 + D_\theta \int_{r_3}^r T^* r dr \right) \right] + \\
 &+ D_T^{(2)} \frac{(1-\nu)}{r_2^2} \int_r^{r_2} T^* r dr; \\
 N_2^{(2)} &= (1-\nu) \frac{r^2 + r_2^2}{r_2^2 r^2} \left[ D_N^{(2)} \left( \tilde{C}_2 + D_U^{(2)} \int_{r_3}^r T^* r dr \right) + D_{NM} \left( \tilde{D}_2 + D_\theta \int_{r_3}^r T^* r dr \right) \right] + \\
 &+ D_T^{(2)} \frac{(1-\nu)}{r_2^2} \int_r^{r_2} T^* r dr - D_T^{(2)}(1-\nu)T^*(r); \\
 M_1^{(2)} &= (1-\nu) \frac{r^2 - r_2^2}{r_2^2 r^2} \left[ D_{NM} \left( \tilde{C}_2 + D_U^{(2)} \int_{r_3}^r T^* r dr \right) + D_M^{(2)} \left( \tilde{D}_2 + D_\theta \int_{r_3}^r T^* r dr \right) \right] + \\
 &+ D_T^* \frac{(1-\nu)}{r_2^2} \int_r^{r_2} T^* r dr; \\
 M_2^{(2)} &= (1-\nu) \frac{r^2 + r_2^2}{r_2^2 r^2} \left[ D_{NM} \left( \tilde{C}_2 + D_U^{(2)} \int_{r_3}^r T^* r dr \right) + D_M^{(2)} \left( \tilde{D}_2 + D_\theta \int_{r_3}^r T^* r dr \right) \right] + \\
 &+ D_T^* \frac{(1-\nu)}{r_2^2} \int_r^{r_2} T^* r dr - D_T^*(1-\nu)T^*(r);
 \end{aligned} \tag{27}$$

де позначено:

$$\begin{aligned}
 \tilde{C}_2 &= \frac{r_3^2}{\tilde{\Delta}} \left\{ 2\tilde{D}_M D_T^{(1)} r_2^2 \int_{r_1}^{r_3} T^* r dr + [a_1 (\tilde{D}_M D_T^{(2)} + \tilde{D}_{NM} D_T^*) - \right. \\
 &\left. - (1-\nu)(r_3^2 - r_1^2) (D_N^{(1)} D_U^{(2)} \tilde{D}_M + D_M^{(1)} D_\theta \tilde{D}_{NM}) \right] \int_{r_3}^{r_2} T^* r dr \Big\}; \\
 \tilde{D}_2 &= \frac{r_3^2}{\tilde{\Delta}} \left\{ 2\tilde{D}_{NM} D_T^{(1)} r_2^2 \int_{r_1}^{r_3} T^* r dr + [a_1 (\tilde{D}_{NM} D_T^{(2)} + \tilde{D}_N D_T^*) - \right. \\
 &\left. - (1-\nu)(r_3^2 - r_1^2) (D_N^{(1)} D_U^{(2)} \tilde{D}_{NM} + D_M^{(1)} D_\theta \tilde{D}_N) \right] \int_{r_3}^{r_2} T^* r dr \Big\}; \\
 \tilde{D}_N &= D_N^{(1)} a_2 (r_3^2 - r_1^2) - D_N^{(2)} a_2 (r_3^2 - r_2^2);
 \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} \tilde{D}_M &= D_M^{(1)} a_2 (r_3^2 - r_1^2) - D_M^{(2)} a_2 (r_3^2 - r_2^2); \\ \tilde{D}_{NM} &= D_{NM} a_1 (r_3^2 - r_2^2); \\ \tilde{\Delta} &= \tilde{D}_N \tilde{D}_M - \tilde{D}_{NM}^2. \end{aligned}$$

Інтегруючи рівняння (4) в кожній із зон і задовільняючи умову рівності нулю прогинів на контурі  $r = r_1$ , а також неперервність прогинів при переході через контур  $r = r_3$ , знайдемо наступні вирази для прогинів :

$$\begin{aligned} w^{(1)} &= \frac{1}{a_1 r_2^2} \left[ \frac{(1-\nu)(r_1^2 - r^2)}{2(1+\nu)} + r_1^2 \ln \frac{r_1}{r} \right] \left[ \tilde{D}_2 a_2 + D_\theta (1-\nu) r_3^2 \int_{r_3}^{r_2} T^* r dr \right]; \\ w^{(2)} &= \frac{(1-\nu)}{2a_1(1+\nu)r_2^2} \{ \tilde{D}_2 [a_2(r_1^2 - r_3^2) + a_1(r_3^2 - r^2)] + \\ &+ D_\theta [(1-\nu)r_3^2(r_1^2 - r_3^2) + a_1(r_3^2 - r^2)] \int_{r_3}^{r_2} T^* r dr \} + \\ &+ \frac{1}{a_1 R_2^2} \left\{ \tilde{D}_2 \left[ a_2 r_1^2 \ln \frac{r_1}{r_3} + a_1 r_2^2 \ln \frac{r_3}{r} \right] + \right. \\ &\left. + D_\theta \left[ (1-\nu) r_3^2 r_1^2 \ln \frac{r_1}{r_3} + a_1 r_2^2 \ln \frac{r_3}{r} \right] \int_{r_3}^{r_2} T^* r dr \right\} + D_\theta \int_{r_3}^r \left[ \frac{1}{r} \int_r^{r_2} T^* r dr \right] dr. \end{aligned} \quad (29)$$

Аналіз отриманих результатів показує, що якщо  $T^*(r) \cong 0$ , то всі розв'язки нульові. Це означає, що якщо  $T(r) = T_1(r)$ , то потрібно користуватися розв'язком (13), а розв'язки (26)-(29) при довільному  $T^*(r) = T(r) - T_1(r)$  характеризують додаткові зусилля, моменти і переміщення, що виникають в неоднорідній пластині за рахунок відхилення температурного поля від поля  $T_1(r)$ . Отже, розв'язок задачі при довільному кінцевому розподілі температури  $T(r)$  в деталі отримується в результаті сумування останніх двох розв'язків (13) і (26)–(29) відповідно.

В частковому випадку, коли нас цікавлять результати при повному остиганні деталі до температури  $T_0$ , в формулах (26)-(29) потрібно покласти  $T^*(r) = -T_1^*(r)$  (див. (18), (11)).

Отримаємо формули для обчислення напружень в довільній точці пластини. Напруження, що виникають на першому етапі нагрівання визначаються за формулами (5), в яких деформації обчислюються за формулами (2), де деформації і зміни кривин серединної площини знаходяться із співвідношень (6). Для моменту кінця першого етапу, коли  $T(r) = T_1(r)$ , розв'язуючи (6) відносно деформацій і зміни кривин серединної площини, отримаємо:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{10} &= \frac{1}{D_N^{(1)}(1-\nu^2)} (N_1^{(0)} - \nu N_2^{(0)}) + \frac{D_U^{(1)}}{1+\nu} T_1^*(r); \\ \varepsilon_{20} &= \frac{1}{D_N^{(1)}(1-\nu^2)} (N_2^{(0)} - \nu N_1^{(0)}) + \frac{D_U^{(1)}}{1+\nu} T_1^*(r); \\ \kappa_1 &= 0; \quad \kappa_2 = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Додаткові напруження, які виникають на другому етапі, знаходяться за формулами (15) в першій зоні  $r_1 \leq r \leq r_3$  і за формулами (15), (16) в другій зоні  $r_3 \leq r \leq r_2$ . Деформації і зміни кривин серединної площини пластинки визначаються у кожній зоні відповідно з залежностей (20). Розв'язуючи їх, знайдемо:

при  $r_1 \leq r \leq r_3$ :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{10} &= \frac{1}{D_N^{(1)}(1-\nu^2)}(N_1^{(1)} - \nu N_2^{(1)}) + \frac{D_U^{(1)}}{1+\nu} T_1^*(r); \\ \varepsilon_{20} &= \frac{1}{D_N^{(1)}(1-\nu^2)}(N_2^{(1)} - \nu N_1^{(1)}) + \frac{D_U^{(1)}}{1+\nu} T_1^*(r); \\ \kappa_1 &= \frac{1}{D_M^{(1)}(1-\nu^2)}(M_1^{(1)} - \nu M_2^{(1)}); \\ \kappa_2 &= \frac{1}{D_M^{(1)}(1-\nu^2)}(M_2^{(1)} - \nu M_1^{(1)}); \end{aligned} \quad (31)$$

при  $r_3 \leq r \leq r_2$ :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{10} &= \frac{1}{\Delta(1-\nu^2)}[D_M^{(2)}(N_1^{(2)} - \nu N_2^{(2)}) - D_{NM}(M_1^{(2)} - \nu M_2^{(2)})] + \frac{D_U^{(2)}}{1+\nu} T_1^*(r); \\ \varepsilon_{20} &= \frac{1}{\Delta(1-\nu^2)}[D_M^{(2)}(N_2^{(2)} - \nu N_1^{(2)}) - D_{NM}(M_2^{(2)} - \nu M_1^{(2)})] + \frac{D_U^{(2)}}{1+\nu} T_1^*(r); \\ \kappa_1 &= \frac{1}{\Delta(1-\nu^2)}[D_N^{(2)}(M_1^{(2)} - \nu M_2^{(2)}) - D_{NM}(N_1^{(2)} - \nu N_2^{(2)})] + \frac{D_\theta^{(2)}}{1+\nu} T_1^*(r); \\ \kappa_2 &= \frac{1}{\Delta(1-\nu^2)}[D_N^{(2)}(M_2^{(2)} - \nu M_1^{(2)}) - D_{NM}(N_2^{(2)} - \nu N_1^{(2)})] + \frac{D_\theta^{(2)}}{1+\nu} T_1^*(r). \end{aligned} \quad (32)$$

Якщо нас цікавлять додаткові напруження, переміщення і деформації, що виникають після повного остигання пластини в формулах (32), ми теж повинні покласти  $T^*(r) = -T_1^*(r)$ .

За отриманими формулами проведено обчислення при таких значеннях параметрів:

$$r_1 = 0,007\text{ м}; r_3 = 0,091\text{ м}; r_2 = 0,105\text{ м}; h = 0,003\text{ м}; \delta = 0,001\text{ м};$$

$$E_0 = 19,62 \cdot 10^{10} \text{ Па}; E_H = 14,71 \cdot 10^{10} \text{ Па}; \alpha_0 = 0,00001091 \frac{1}{^\circ\text{C}};$$

$$\alpha_i = 0,00001103 \frac{1}{^\circ\text{C}}; \nu = 0,3.$$

Розподіл температури по радіусу диска –  $T^*(r)$  в момент початку деформування системи основний і наплавлений метал як пружне тіло при різних значеннях  $\beta$  наведено на рис. 2.

Залишкові напруження  $\sigma_2$  по товщині ненаплавленої (в точках 1, 2, 3, 4) та наплавленої (в точках 5, 6, 7) частин диска при товщині наплавленого шару  $\delta = 1$  мм наведені на рис. 3, а при  $\delta = 1,5$  мм – на рис. 4. Як бачимо з рисунків, кільцеве напруження змінює знак при переході з основного металу в наплавлений шар. В зоні наплавлення основний метал в кільцевому напрямку перебуває в стані розтягу і стиску, а в наплавленому шарі діють кільцеві напруження розтягу. Максимальне кільцеве напруження  $\sigma_2$  виникає в наплавленому шарі безпосередньо біля межі з'єднання його з основним металом, тобто при переході з наплавлювальної поверхні диска в ненаплавлювальну і дорівнює  $\sigma_2 = 0,54\sigma_g^H$  при товщині наплавленого шару  $\delta = 1$  мм та  $0,517\sigma_g^H$  при  $\delta = 1,5$  мм, де  $\sigma_g^H$  – границя міцності наплавленого матеріалу, яка для матеріалу ПГ-С1 (сормайт)  $\sigma_g^H \cong 150$  МПа. При цьому виконуються умови міцності за критерієм найбільших нормальних напружень та за енергетичним критерієм Губера як для наплавленого, так і для основного металу, а це означає, що виникнення тріщин неможливе [12], що підтверджується також структурним аналізом наплавленого металу, структура якого на рисунку не показана.

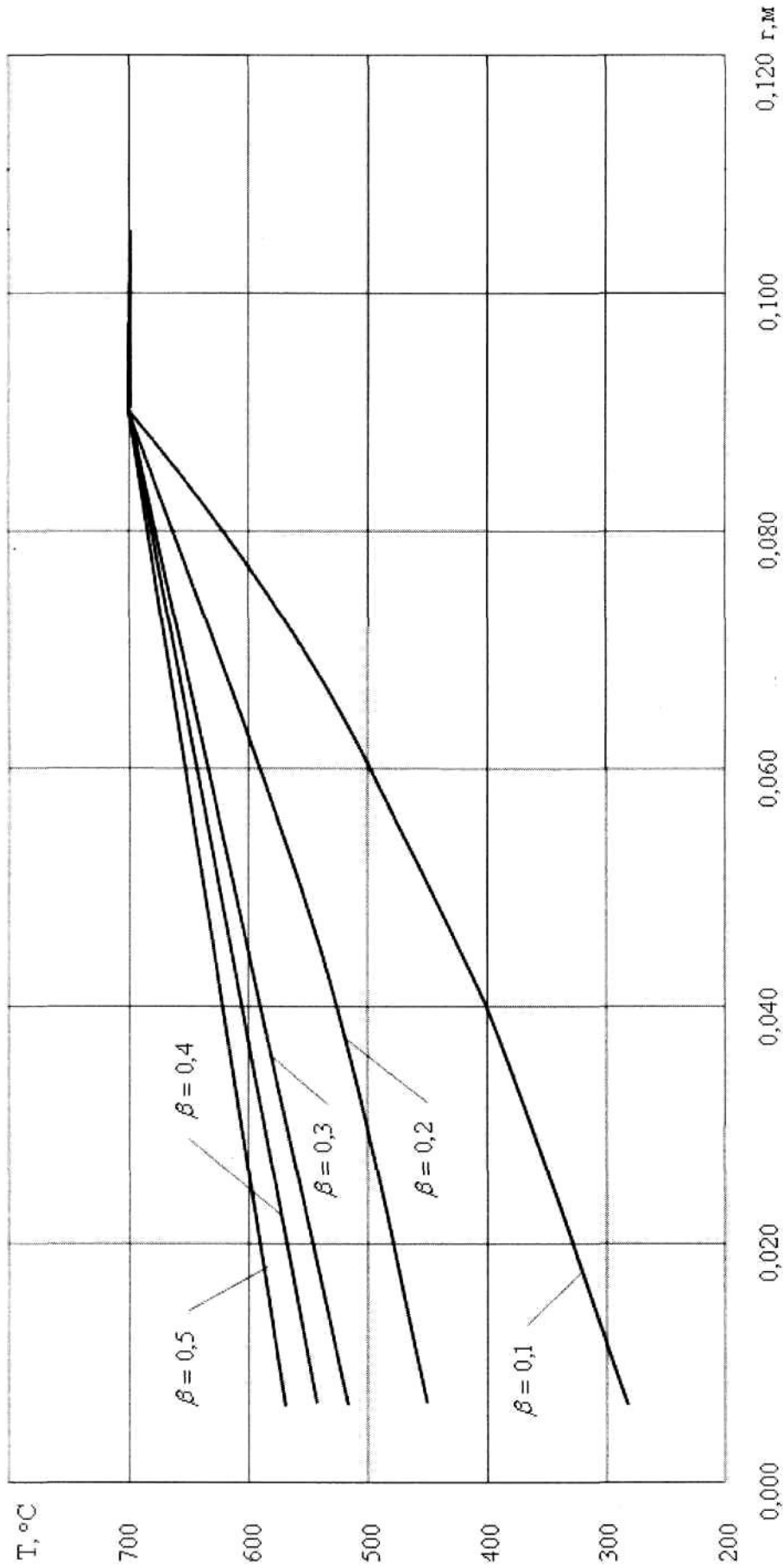


Рисунок 2 - Розподіл температури по радіусу диска в момент початку деформування системи основний і наплавлений метали як пружного тіла при різних значеннях коефіцієнта градієнтності  $\beta$ .

Таблиця 1 - Результати обчислення температури в момент затверднення наплавлюваного металу, залишкових кільцевих напружень, прогинів і переміщень в залежності від радіуса диска  $r$  і рівня градієнтності  $\beta$  при товщині наплавленого шару  $\delta = 1$  мм

$\beta$	$r$ (мм)	0,007	0,028	0,049	0,07	0,090125	0,091	0,091875	0,0945	0,098	0,1015	0,105
0,5	T	5,748E+02	5,995E+02	6,252E+02	6,520E+02	6,788E+02	6,800E+02	6,800E+02	6,800E+02	6,800E+02	6,800E+02	6,800E+02
	$\sigma_2 z=-h/2$	1,008E-01	5,352E-02	5,140E-02	5,088E-02	5,068E-02	4,836E-02	4,820E-02	4,820E-02	4,801E-02	4,784E-02	4,768E-02
	$\sigma_2 z=+h/2$	-1,681E-01	-8,932E-02	-8,579E-02	-8,491E-02	-8,458E-02	-7,888E-02	-7,864E-02	-7,864E-02	-7,836E-02	-7,810E-02	-7,787E-02
	$\sigma_2 z=h/2(H)$	-	-	-	-	-	4,148E-01	4,038E-01	3,905E-01	3,785E-01	3,677E-01	3,583E-01
	$\sigma_2 z=h/2+\delta$	-	-	-	-	-	3,825E-01	3,716E-01	3,583E-01	3,465E-01	3,358E-01	3,262E-01
	W	0,000E+00	2,110E-05	5,784E-05	1,126E-04	1,825E-04	1,894E-04	1,894E-04	1,998E-04	2,137E-04	2,279E-04	2,422E-04
	U	-1,803E-07	-2,818E-07	-4,585E-07	-6,428E-07	-8,217E-07	-8,295E-07	-8,361E-07	-8,560E-07	-8,826E-07	-9,095E-07	-9,365E-07
	T	5,512E+02	5,809E+02	6,122E+02	6,452E+02	6,785E+02	6,800E+02	6,800E+02	6,800E+02	6,800E+02	6,800E+02	6,800E+02
	$\sigma_2 z=-h/2$	1,204E-01	6,398E-02	6,145E-02	6,082E-02	6,058E-02	5,497E-02	5,460E-02	5,460E-02	5,417E-02	5,377E-02	5,342E-02
	$\sigma_2 z=+h/2$	-2,010E-01	-1,068E-01	-1,025E-01	-1,015E-01	-1,011E-01	-8,961E-02	-8,904E-02	-8,904E-02	-8,835E-02	-8,774E-02	-8,718E-02
	$\sigma_2 z=h/2(H)$	-	-	-	-	-	4,920E-01	4,786E-01	4,623E-01	4,478E-01	4,346E-01	4,222E-01
	$\sigma_2 z=h/2+\delta$	-	-	-	-	-	4,553E-01	4,421E-01	4,261E-01	4,118E-01	3,988E-01	3,865E-01
W	0,000E+00	2,342E-05	6,418E-05	1,250E-04	2,025E-04	2,101E-04	2,101E-04	2,216E-04	2,371E-04	2,527E-04	2,685E-04	
U	-2,156E-07	-3,368E-07	-5,481E-07	-7,685E-07	-9,975E-07	-9,975E-07	-9,975E-07	-1,016E-06	-1,040E-06	-1,065E-06	-1,090E-06	
T	5,139E+02	5,512E+02	5,912E+02	6,340E+02	6,780E+02	6,800E+02	6,800E+02	6,800E+02	6,800E+02	6,800E+02	6,800E+02	
$\sigma_2 z=-h/2$	1,523E-01	8,091E-02	7,771E-02	7,692E-02	7,661E-02	6,567E-02	6,567E-02	6,567E-02	6,413E-02	6,338E-02	6,269E-02	
$\sigma_2 z=+h/2$	-2,542E-01	-1,350E-01	-1,297E-01	-1,284E-01	-1,279E-01	-1,070E-01	-1,059E-01	-1,059E-01	-1,045E-01	-1,033E-01	-1,022E-01	
$\sigma_2 z=h/2(H)$	-	-	-	-	-	6,169E-01	5,996E-01	5,787E-01	5,599E-01	5,429E-01	5,272E-01	
$\sigma_2 z=h/2+\delta$	-	-	-	-	-	5,730E-01	5,562E-01	5,358E-01	5,175E-01	5,010E-01	4,858E-01	
W	0,000E+00	2,716E-05	7,445E-05	1,450E-04	2,393E-04	2,437E-04	2,437E-04	2,571E-04	2,749E-04	2,929E-04	3,110E-04	
U	-2,726E-07	-4,259E-07	-6,932E-07	-9,718E-07	-1,242E-06	-1,259E-06	-1,254E-06	-1,274E-06	-1,295E-06	-1,317E-06	-1,339E-06	
T	4,468E+02	4,963E+02	5,512E+02	6,122E+02	6,770E+02	6,800E+02	6,800E+02	6,800E+02	6,800E+02	6,800E+02	6,800E+02	
$\sigma_2 z=-h/2$	2,127E-01	1,130E-01	1,085E-01	1,074E-01	1,070E-01	8,594E-02	8,594E-02	8,461E-02	8,301E-02	8,157E-02	8,027E-02	
$\sigma_2 z=+h/2$	-3,550E-01	-1,886E-01	-1,811E-01	-1,793E-01	-1,785E-01	-1,399E-01	-1,378E-01	-1,378E-01	-1,352E-01	-1,329E-01	-1,308E-01	
$\sigma_2 z=h/2(H)$	-	-	-	-	-	8,536E-01	8,289E-01	7,991E-01	7,723E-01	7,482E-01	7,258E-01	
$\sigma_2 z=h/2+\delta$	-	-	-	-	-	7,962E-01	7,724E-01	7,436E-01	7,178E-01	6,945E-01	6,728E-01	
W	0,000E+00	3,426E-05	9,330E-05	1,829E-04	2,963E-04	3,074E-04	3,074E-04	3,242E-04	3,466E-04	3,690E-04	3,915E-04	
U	-3,807E-07	-5,948E-07	-9,680E-07	-1,357E-06	-1,735E-06	-1,751E-06	-1,751E-06	-1,763E-06	-1,778E-06	-1,794E-06	-1,811E-06	
T	2,936E+02	3,622E+02	4,468E+02	5,512E+02	6,741E+02	6,800E+02	6,800E+02	6,800E+02	6,800E+02	6,800E+02	6,800E+02	
$\sigma_2 z=-h/2$	3,702E-01	1,967E-01	1,889E-01	1,870E-01	1,862E-01	1,388E-01	1,359E-01	1,359E-01	1,323E-01	1,290E-01	1,261E-01	
$\sigma_2 z=+h/2$	-6,179E-01	-3,282E-01	-3,152E-01	-3,120E-01	-3,108E-01	-2,258E-01	-2,210E-01	-2,210E-01	-2,152E-01	-2,100E-01	-2,053E-01	
$\sigma_2 z=h/2(H)$	-	-	-	-	-	1,471E+00	1,427E+00	1,374E+00	1,327E+00	1,284E+00	1,244E+00	
$\sigma_2 z=h/2+\delta$	-	-	-	-	-	1,378E+00	1,336E+00	1,286E+00	1,240E+00	1,199E+00	1,161E+00	
W	0,000E+00	5,277E-05	1,446E-04	2,817E-04	4,564E-04	4,735E-04	4,735E-04	4,993E-04	5,334E-04	5,675E-04	6,016E-04	
U	-6,626E-07	-1,035E-06	-1,685E-06	-2,362E-06	-3,019E-06	-3,048E-06	-3,048E-06	-3,041E-06	-3,037E-06	-3,038E-06	-3,043E-06	

Напруження віднесені до  $\sigma_r^0$  напл. металу = 150 МПа

Таблиця 2 - Результати обчислення температури в момент затверднення наплавлюваного металу, залишкових кільцевих напружень, прогинів і переміщень в залежності від радіуса диска  $r$  і рівня градієнтності  $\beta$  при товщині наплавленого шару  $\delta = 1,5$  мм

$\beta$	$r$ (мм)	0.007	0.028	0.049	0.07	0.090125	0.091	0.091875	0.0945	0.098	0.1015	0.105	
0.5	T	5.748E+02	5.995E+02	6.252E+02	6.520E+02	6.788E+02	6.800E+02	6.800E+02	6.800E+02	6.800E+02	6.800E+02	6.800E+02	
	$\sigma_2$ z=-h/2	1.589E-01	8.443E-02	8.108E-02	8.026E-02	7.994E-02	7.993E-02	6.956E-02	6.890E-02	6.810E-02	6.738E-02	6.674E-02	
	$\sigma_2$ z=+h/2	-2.507E-01	-1.332E-01	-1.279E-01	-1.266E-01	-1.261E-01	-1.261E-01	-1.078E-01	-1.068E-01	-1.057E-01	-1.046E-01	-1.037E-01	
	$\sigma_2$ z=h/2(h)	-	-	-	-	-	-	3.925E-01	3.821E-01	3.694E-01	3.580E-01	3.477E-01	
	$\sigma_2$ z=h/2+ $\delta$	-	-	-	-	-	-	3.249E-01	3.150E-01	3.031E-01	2.924E-01	2.827E-01	
	W	0.000E+00	2.818E-05	7.723E-05	1.504E-04	2.437E-04	2.483E-04	2.483E-04	2.529E-04	2.667E-04	2.852E-04	3.039E-04	3.228E-04
	U	-2.456E-07	-3.837E-07	-6.245E-07	-8.756E-07	-1.119E-06	-1.130E-06	-1.130E-06	-1.136E-06	-1.153E-06	-1.177E-06	-1.202E-06	-1.227E-06
	T	5.512E+02	5.809E+02	6.122E+02	6.452E+02	6.785E+02	6.800E+02	6.800E+02	6.800E+02	6.800E+02	6.800E+02	6.800E+02	6.800E+02
	$\sigma_2$ z=-h/2	1.900E-01	1.009E-01	9.693E-02	9.594E-02	9.556E-02	9.555E-02	7.999E-02	7.999E-02	7.900E-02	7.781E-02	7.674E-02	7.578E-02
	$\sigma_2$ z=+h/2	-2.997E-01	-1.592E-01	-1.529E-01	-1.513E-01	-1.508E-01	-1.507E-01	-1.238E-01	-1.238E-01	-1.223E-01	-1.206E-01	-1.190E-01	-1.176E-01
	$\sigma_2$ z=h/2(h)	-	-	-	-	-	-	4.656E-01	4.529E-01	4.375E-01	4.236E-01	4.111E-01	
	$\sigma_2$ z=h/2+ $\delta$	-	-	-	-	-	-	3.879E-01	3.761E-01	3.618E-01	3.490E-01	3.374E-01	
0.4	W	0.000E+00	3.170E-05	8.689E-05	1.692E-04	2.742E-04	2.793E-04	2.845E-04	3.000E-04	3.208E-04	3.417E-04	3.628E-04	
	U	-2.936E-07	-4.587E-07	-7.466E-07	-1.047E-06	-1.338E-06	-1.351E-06	-1.355E-06	-1.370E-06	-1.391E-06	-1.414E-06	-1.436E-06	
	T	5.139E+02	5.512E+02	5.912E+02	6.340E+02	6.780E+02	6.800E+02	6.800E+02	6.800E+02	6.800E+02	6.800E+02	6.800E+02	6.800E+02
	$\sigma_2$ z=-h/2	2.402E-01	1.276E-01	1.226E-01	1.213E-01	1.208E-01	1.208E-01	9.686E-02	9.536E-02	9.353E-02	9.189E-02	9.041E-02	
	$\sigma_2$ z=+h/2	-3.790E-01	-2.013E-01	-1.934E-01	-1.914E-01	-1.906E-01	-1.906E-01	-1.497E-01	-1.474E-01	-1.447E-01	-1.423E-01	-1.400E-01	
	$\sigma_2$ z=h/2(h)	-	-	-	-	-	-	5.840E-01	5.676E-01	5.477E-01	5.298E-01	5.137E-01	
	$\sigma_2$ z=h/2+ $\delta$	-	-	-	-	-	-	4.899E-01	4.750E-01	4.568E-01	4.405E-01	4.259E-01	
	W	0.000E+00	3.741E-05	1.025E-04	1.997E-04	3.235E-04	3.296E-04	3.357E-04	3.540E-04	3.784E-04	4.029E-04	4.275E-04	
	U	-3.713E-07	-5.801E-07	-9.441E-07	-1.324E-06	-1.692E-06	-1.708E-06	-1.711E-06	-1.722E-06	-1.739E-06	-1.756E-06	-1.776E-06	
	T	4.468E+02	4.963E+02	5.512E+02	6.122E+02	6.770E+02	6.800E+02	6.800E+02	6.800E+02	6.800E+02	6.800E+02	6.800E+02	6.800E+02
	$\sigma_2$ z=-h/2	3.355E-01	1.782E-01	1.712E-01	1.694E-01	1.688E-01	1.687E-01	1.288E-01	1.263E-01	1.233E-01	1.206E-01	1.181E-01	
	$\sigma_2$ z=+h/2	-5.293E-01	-2.812E-01	-2.700E-01	-2.673E-01	-2.662E-01	-2.662E-01	-1.987E-01	-1.950E-01	-1.904E-01	-1.863E-01	-1.826E-01	
$\sigma_2$ z=h/2(h)	-	-	-	-	-	-	8.082E-01	7.848E-01	7.565E-01	7.311E-01	7.082E-01		
$\sigma_2$ z=h/2+ $\delta$	-	-	-	-	-	-	6.833E-01	6.623E-01	6.369E-01	6.141E-01	5.935E-01		
0.2	W	0.000E+00	4.822E-05	1.322E-04	2.574E-04	4.170E-04	4.248E-04	4.327E-04	4.562E-04	4.876E-04	5.189E-04	5.502E-04	
	U	-5.165E-07	-8.101E-07	-1.318E-06	-1.848E-06	-2.363E-06	-2.385E-06	-2.386E-06	-2.389E-06	-2.396E-06	-2.406E-06	-2.419E-06	
	T	2.936E+02	3.622E+02	4.468E+02	5.512E+02	6.741E+02	6.800E+02	6.800E+02	6.800E+02	6.800E+02	6.800E+02	6.800E+02	6.800E+02
	$\sigma_2$ z=-h/2	5.840E-01	3.102E-01	2.979E-01	2.949E-01	2.938E-01	2.937E-01	2.123E-01	2.072E-01	2.010E-01	1.955E-01	1.905E-01	
	$\sigma_2$ z=+h/2	-9.212E-01	-4.894E-01	-4.700E-01	-4.652E-01	-4.634E-01	-4.633E-01	-3.268E-01	-3.190E-01	-3.096E-01	-3.012E-01	-2.936E-01	
	$\sigma_2$ z=h/2(h)	-	-	-	-	-	-	1.393E+00	1.352E+00	1.301E+00	1.256E+00	1.215E+00	
	$\sigma_2$ z=h/2+ $\delta$	-	-	-	-	-	-	1.188E+00	1.151E+00	1.107E+00	1.067E+00	1.031E+00	
	W	0.000E+00	7.642E-05	2.095E-04	4.079E-04	6.609E-04	6.733E-04	6.857E-04	7.229E-04	7.723E-04	8.213E-04	8.702E-04	
	U	-9.025E-07	-1.410E-06	-2.295E-06	-3.217E-06	-4.112E-06	-4.151E-06	-4.145E-06	-4.128E-06	-4.112E-06	-4.101E-06	-4.096E-06	

Напруження віднесені до  $\sigma_{II}$  напл. металу = 150 МПа

Аналізуючи результати, які наведені в табл. 1, 2, приходимо до висновку, що для здійснення наплавлення дисків, створюючи при цьому низький рівень залишкових напружень, необхідно використовувати температурне поле з низьким рівнем градієнтності по радіусу диска.

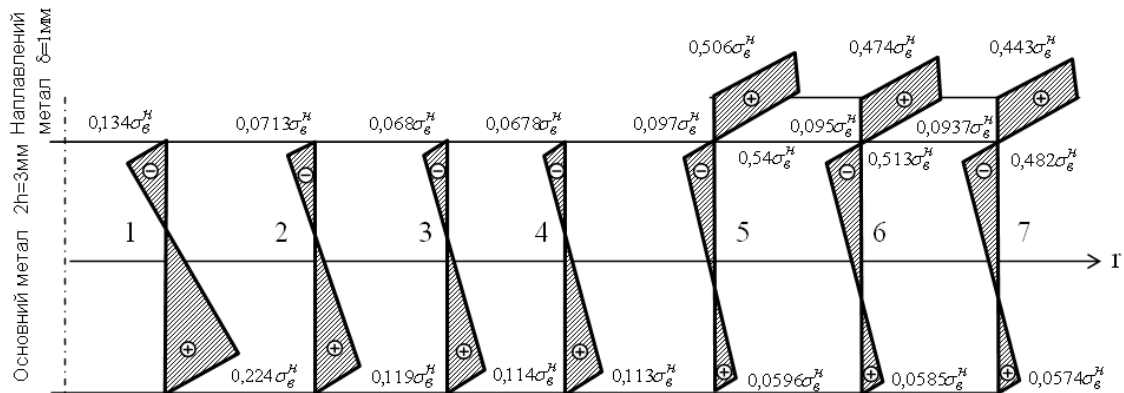


Рисунок 3 - Розподіл залишкових напружень  $\sigma_2$  по товщині ненаплавленої (у точках 1, 2, 3, 4) та наплавленої (в точках 5, 6, 7) частин диска при  $\delta = 0,001$  м,  $\beta = 0,35$ .

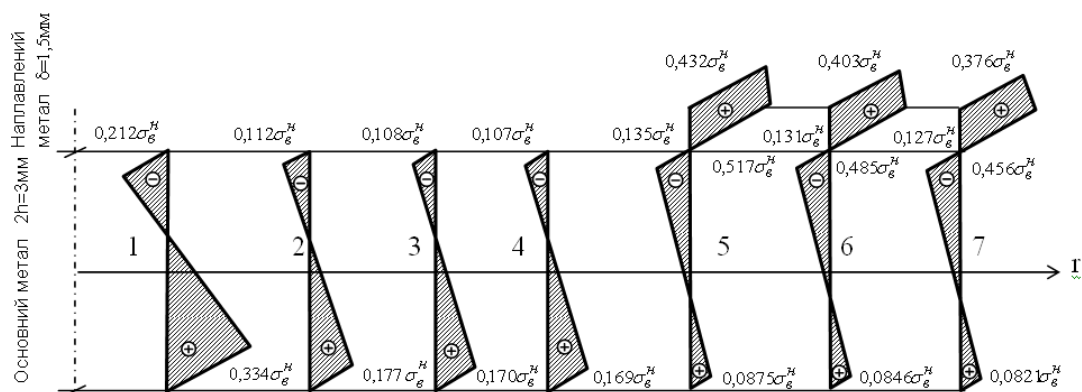


Рисунок 4 - Розподіл залишкових напружень  $\sigma_2$  по товщині ненаплавленої (у точках 1, 2, 3, 4) та наплавленої (в точках 5, 6, 7) частин диска при  $\delta = 0,0015$  м,  $\beta = 0,35$ .

Залишкові прогини при цьому також незначні і не перевищують  $w \leq 0,001$  м при  $\delta = 1$  мм і  $\delta = 1,5$  мм для всіх наведених значень  $\beta$ .

Значить, конструкція нагрівальної системи (ІТЕЕ), яка здійснює нагрівання з низьким рівнем градієнтності по радіусу диска, створює низький рівень залишкових напружень, які не перевищують допустимих, і дає можливість уникнути операції попереднього підігрівання деталі, яка використовується для зниження рівня залишкових напружень [12]. Це знижує також енергозатрати на здійснення операції наплавлення.

На рис. 5 показано залежність максимальних кільцевих напружень  $\sigma_2$  від товщини наплавленого шару. Як видно з рисунку, із збільшенням товщини наплавленого шару максимальні кільцеві напруження зменшуються.

Слід зауважити, що використання високоградієнтного нагрівання по радіусу диска приводить до створення поля залишкових напружень, частина яких перевищує допустимі. Для їх зниження необхідно здійснювати додаткову технологічну операцію (наприклад, відпал) [14].

В даній роботі побудовано математичну модель на основі припущення, що основними причинами виникнення полів залишкових напружень, деформацій та переміщень є різні механічні та теплофізичні характеристики основного та

наплавлюваного металу, а також несиметрія розташування наплавленого шару відносно серединної площини диска, і в процесі наплавлення здійснюється тільки пружне їх деформування. Вважається, що в наплавлюваній зоні пластина є двошаровою, а у вільній від наплавлення зоні – одношаровою.

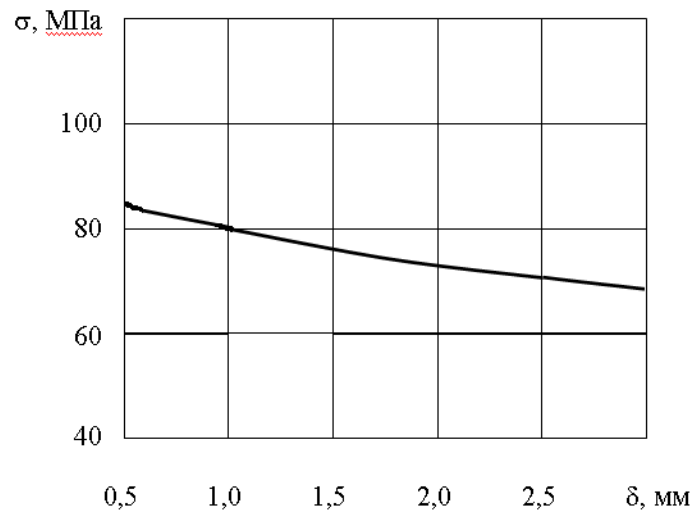


Рисунок 5 - Залежність максимальних кільцевих напружень в зоні наплавлення від товщини наплавленого шару при коефіцієнті градієнтності  $\beta = 0,35$ .

### Висновки

1. На основі експериментальних даних з визначення переміщень в наплавленому і ненаплавленому дисках, нагрітих за однаковими режимами, та наступним їх остиганням, показано, що основною причиною виникнення залишкових переміщень, а значить, і напружень, є відмінність теплофізичних і механічних властивостей основного і наплавленого металів та несиметрія розташування наплавленого шару відносно серединної площини диска.
2. Розроблено математичну модель та програмне забезпечення, які дозволяють визначати поля залишкових напружень, деформацій та переміщень, що виникають в процесі індукційного наплавлення тонких сталевих дисків в залежності від геометричних розмірів диска і наплавлюваного металу, а також їх механічних та теплофізичних характеристик.
3. З урахуванням факту, що для багатьох матеріалів в досить широкому діапазоні зміни температур добуток модуля пружності і коефіцієнта температурного розширення основного і наплавлюваного металу  $E \alpha_T \cong const$ , отримано спрощені розрахункові формули і побудовано відповідні алгоритми визначення залишкових напружень та переміщень.
4. Показано, що після наплавлення дисків із сталі Ст.3 порошковим сплавом на залізній основі ПГ-С1 (сормайт) з використанням нагрівальної системи ІТЕЕ, яка створює по радіусу диска низький рівень градієнтності температурного поля, та енергоощадного режиму нагрівання, розтягуюче кільцеве напруження в наплавленому шарі досягає максимальної величини на межі напавленої і ненапавленої зони безпосередньо біля межі з'єднання його з основним металом, наприклад, в досліджуваному випадку для  $\delta = 1$  мм воно дорівнює  $0,54 \sigma_a''$  при границі міцності наплавленого металу  $\sigma_a'' = 150$  МПа. При цьому виконуються умови міцності за критерієм найбільших нормальних напружень та за енергетичним критерієм Губера, і залишкові напруження не приводять до виникнення тріщин і втрати працездатності деталі.
5. Теоретично доведена неможливість виникнення тріщин у наплавленому таким способом диску також підтверджується експериментально і візуально.



6. Для здійснення наплавлення диска, створюючи при цьому низькі залишкові напруження, слід використовувати низькоградієнтні по радіусу диска температурні поля. Це дає можливість уникнути операції попереднього підігрівання або операції відпалу.

### **Література**

1. Великоиваненко Е.А., Махненко В.И. Численное решение плоской задачи теории неізотермического пластического течения применительно к сварочному нагреву // Физика и химия обработки материалов. – 1968. – № 4. – С. 81–96.
2. К определению остаточных напряжений первого рода в наплавленных дисках / В. А. Деев, В. И. Дроздов, Д. Т. Вадивасов и др. // Автомат. сварка. – 1971. – № 3. – С. 35-36.
3. Деев В.А., Дроздов В.И. Методика расчета остаточных напряжений в наплавленных деталях // Автомат. сварка. – 1972. – № 5. – С. 34-35.
4. Махненко В.И., Великоиваненко Е.А., Рыбаков А.А. Деформации в высокотемпературной зоне свариваемых тонких пластин // Автомат. сварка. – 1974. – № 5. – С. 31-35.
5. Шаблий О.Н., Михайлишин М.С. Определение полей остаточных перемещений, деформаций и напряжений, возникающих в результате наплавки тонкой пологой конической оболочки // Мат. методы и физикомехан. поля. – 1978. – № 7. – С. 90–95.
6. Жданов И.М., Фам Ван Тоан. Метод расчёта остаточных деформаций и напряжений в пластине с наплавленной кромкой // Автомат. сварка. – 1995. – № 10. – С. 15-21.
7. Сварные строительные конструкции: В 3т. Т. 1. Основы проектирования конструкций / Под ред. Л.М.Лобанова. – Киев: Наук. думка, 1993. – 416 с.
8. Прохоренко В.М., Гордиенко А.С. Метод расчета остаточных напряжений при сварочном нагреве круговой области // Автомат. сварка. – 1995. – № 10. – С. 13-14.
9. Махненко В.И., Кравцов Т.Г. Тепловые процессы при механизированной наплавке деталей типа круговых цилиндров. – Киев: Наукова думка, 1976. – 160 с.
10. Касаткин В.С., Прохоренко В.М., Чертов И.М. Напряжения и деформации при сварке. – К.: Вища шк. – Головное изд-во. – 1987, 246 с.
11. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Обобщенная термомеханика. – К.: Наукова думка, 1992. – 310 с.
12. Юзвенко Ю.А., Махненко В.И., Шекера В.М. и др. Образование трещин при наплавке высокохромистого чугуна на сталь // Автомат. сварка. – 1971. – № 9. – С. 15-19.
13. Ксендзык Г.В. Остаточные напряжения в прокатных валках, наплавленных износостойким чугуном // Автомат. сварка. – 1972. – № 5. – С. 30-33.
14. Лозинский М.Г. Промышленное применение индукционного нагрева. М.:Изд-во АН СССР, 1958. – 472 с.

*Одержано 12.04.2007 р.*