

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea in Fisica

**SISTEMI QUANTISTICI APERTI  
E DECOERENZA**

Relatrice:  
Prof.ssa  
Elisa Ercolessi

Presentata da:  
Chiara Bernardo

Anno Accademico  
2018/2019

# Abstract

L'elaborato analizza principalmente i sistemi quantistici aperti, cioè quei sistemi che scambiano energia e informazione con l'ambiente circostante. Particolare attenzione è dedicata al fenomeno della decoerenza o perdita di coerenza quantistica a cui i sistemi aperti sono soggetti, che si manifesta a causa dell'interazione. È approfondito il meccanismo della misura, che consiste anch'esso in un'interazione con l'ambiente circostante. La teoria della decoerenza afferma che tutti i sistemi fisici esistenti sono di per sé quantistici e che, in particolare nel caso dei sistemi macroscopici, la "classicità" emerge dall'interazione, poiché avviene la perdita di informazione della sovrapposizione di stati. Si può stimare la scala temporale in cui la perdita di coerenza quantistica si manifesta e si può vedere che per i sistemi macroscopici questa avviene molto velocemente. Si mostra anche che il processo è irreversibile, poiché determina un aumento di entropia. Si utilizza il fenomeno dell'entanglement quantistico per trattare le interazioni.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>1 Fondamenti della teoria</b>	<b>5</b>
1.1 Assiomi della meccanica quantistica . . . . .	5
1.2 Operatore densità . . . . .	8
1.3 Misura . . . . .	17
<b>2 Sistemi quantistici aperti</b>	<b>21</b>
2.1 Canali quantistici . . . . .	21
2.2 Interazione con l'ambiente e decoerenza . . . . .	26
2.3 Entropia e informazione . . . . .	27
<b>3 Evoluzione di un sistema aperto attraverso la master equation</b>	<b>30</b>
3.1 Master equation in approssimazione Markoviana . . . . .	30
3.2 Esempi . . . . .	33
<b>Conclusioni</b>	<b>37</b>

# Introduzione

La teoria esposta in questo elaborato si propone di rispondere ad un quesito particolarmente profondo, dato che non si limita ad essere una domanda di tipo fenomenologico poiché è anche di tipo interpretativo. Come sappiamo da quasi un secolo, la Meccanica Quantistica è una teoria che, seppure difficile da accettare poiché scardina dei concetti ritenuti da sempre fisicamente validi in quanto estremamente intuitivi, permette di spiegare una moltitudine di fenomeni incomprensibili con le sole teorie classiche. Proprio per questa ragione, il pragmatismo scientifico impone di accettare la fisica quantistica come teoria migliore fino ad oggi. Le teorie classiche, d'altra parte, risultano valide nei contesti in cui sono nate. La domanda che sorge spontanea è la seguente: come si discerne un contesto quantistico da uno perfettamente spiegabile con la fisica classica? Il discriminante che sovviene dopo una prima riflessione è il seguente: la teoria quantistica descrive il mondo microscopico e quella classica il mondo macroscopico. Questa soluzione ha delle fondamenta molto fragili, poiché è sufficiente che esista un oggetto macroscopico ben descritto dalla fisica quantistica a farla crollare. In effetti, come affermato in [6], esiste un oggetto macroscopico dotato di massa dell'ordine di una tonnellata, noto come barra criogenica di Weber, che può esser trattata come un oscillatore armonico quantistico. Dal momento che anche una teoria interpretativa, per quanto possibile, assume una certa validità scientifica se passa al vaglio dell'esperimento, il considerare come discriminante le dimensioni di un sistema è da scartare. A questo punto la domanda che sorge è: esiste un confine che separi contesti quantistici da contesti classici? Le due teorie sono o no sullo stesso piano logico, condizione in cui differiscono solo per i domini di applicazione? La questione appare estremamente ostica. Una possibile soluzione, che è quella accennata in questo elaborato, parte dall'assunto secondo cui un oggetto macroscopico non è mai perfettamente isolato dall'ambiente circostante. La chiave, quindi, risulta trovarsi nell'interazione tra sistemi e ambiente, cioè nello scambio di informazione tra i due sistemi. Adottare questa teoria, nota come *decoerenza* o perdita di coerenza quantistica, significa affermare che la Meccanica Quantistica è la teoria fondamentale descrivente la natura e che la fisica classica è una proprietà che emerge a causa dell'ineluttabile interazione del sistema considerato con l'ambiente circostante. La decoerenza, oltre a porre una gerarchia tra la teoria quantistica e quella classica, spiega perché il collasso dello stato quantistico durante il processo di misura, che è a sua volta una forma di interazione con l'ambiente

circostante, può avvenire solo in stati ben definiti, impropriamente detti classici nel senso che scompare l'informazione sulla sovrapposizione. Chiaramente la teoria ha bisogno di un formalismo matematico adeguato, attraverso il quale si possono definire nuove regole per descrivere i sistemi quantistici aperti. Entreremo quindi nell'universo dei sistemi quantistici aperti e cercheremo di capirne il comportamento. Utilizzeremo dei concetti chiave per la comprensione di questi, come il fenomeno dell'entanglement tra sistemi e il processo di misura, che sono alcune delle questioni più difficilmente concepibili, a causa del fatto che, a dispetto delle teorie classiche, non se ne può fare esperienza diretta.

# Capitolo 1

## Fondamenti della teoria

Al fine di indagare il fenomeno della decoerenza e tentare di comprendere come qualunque sistema, attraverso lo scambio di energia e di informazione con l'ambiente circostante, perda la coerenza quantistica e si avvii ad essere descritto in termini classici, riprendiamo la teoria riguardante i sistemi quantistici perfettamente isolati. Successivamente ci concentreremo sul meccanismo della misura.

### 1.1 Assiomi della meccanica quantistica

Il modello quantistico che descrive i sistemi isolati si basa su cinque assiomi, necessari a caratterizzare gli stati, le osservabili, il meccanismo della misura, la dinamica ed infine come descrivere sistemi composti. Per approfondimenti, si guardi [5].

**Assioma 1: Stati** Uno stato fornisce una descrizione completa di un sistema fisico. In meccanica quantistica esso è modellizzato attraverso il concetto di *raggio* in uno *spazio di Hilbert*. Uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  è uno spazio vettoriale sul campo complesso  $\mathbb{C}$ , *completo* (o di *Banach*) in cui è definito un *prodotto interno*. Sfruttando la notazione di Dirac, denoteremo un elemento di  $\mathcal{H}$  con  $|\psi\rangle$ . La completezza assicura che qualunque successione di Cauchy ammetta come limite un elemento dello spazio e si rivela molto utile, soprattutto nel caso di spazi infinito-dimensionali, quando si espandono le autofunzioni. Il prodotto interno prende ordinatamente due vettori di  $\mathcal{H}$ , come ad esempio  $|\phi\rangle$  e  $|\psi\rangle$  e associa loro un numero complesso  $\langle\phi|\psi\rangle$ . Indichiamo con  $\langle\psi|$  un elemento dello spazio duale di  $\mathcal{H}$ , che associa a un vettore di  $\mathcal{H}$  un numero complesso. Il prodotto interno ha le seguenti proprietà:

1. è *definito positivo*:  $\langle\psi|\psi\rangle > 0$  per  $|\psi\rangle \neq 0$  ;
2. è *lineare nella seconda entrata*:  $\langle\phi|(a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle) = a\langle\phi|\psi_1\rangle + b\langle\phi|\psi_2\rangle$ ;

3. è *antisimmetrico*:  $\langle \phi | \psi \rangle = \langle \psi | \phi \rangle^*$ , in cui il simbolo  $*$  indica il complesso coniugato.

Un *raggio* in uno spazio di Hilbert è una classe di equivalenza di elementi che differiscono per la moltiplicazione di uno scalare non nullo. Si scelgono i vettori normalizzati come rappresentanti, vale a dire quelli tali che:

$$\langle \psi | \psi \rangle = \|\psi\|^2 = 1. \quad (1.1)$$

La scelta segue dall'interpretazione probabilistica del vettore d'onda, secondo cui la sua norma al quadrato rappresenta la densità di probabilità dello stato sulle posizioni. La fase di un vettore risulta non avere rilevanza fisica perché non influisce sulla sua norma. Dato che gli stati di un sistema fisico sono definiti come elementi di uno spazio di Hilbert, vale il principio di *sovrapposizione*. Proprio a causa del principio di sovrapposizione degli stati, è sorta una domanda cruciale. I sistemi quantistici hanno la facoltà di possedere delle proprietà? Dal momento che, come vedremo, è la misura a definire lo stato del sistema, si è capito che non si può attribuire ad un sistema quantistico la facoltà di possedere delle proprietà. La teoria che esporremo tenta di stimare sotto quali condizioni sembra che un sistema di per sé quantistico assuma la facoltà di possedere delle proprietà, diventando descrivibile in termini classici.

**Assioma 2: Osservabili** Un'osservabile è una proprietà fisica di un sistema che può essere misurata. In meccanica quantistica a ciascuna osservabile è associato un *operatore autoaggiunto*. Un operatore, per esempio  $\mathbf{A}$ , è un'applicazione lineare tale che:

$$\mathbf{A} : |\psi\rangle \rightarrow \mathbf{A} |\psi\rangle. \quad (1.2)$$

L'aggiunto di  $\mathbf{A}$  è definito da:

$$\langle \psi | \mathbf{A} | \phi \rangle = \langle \mathbf{A}^\dagger \psi | \phi \rangle. \quad (1.3)$$

L'operatore si dice autoaggiunto se:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger. \quad (1.4)$$

Gli operatori autoaggiunti e limitati <sup>1</sup> di uno spazio  $\mathcal{H}$  possiedono una rappresentazione spettrale, vale a dire i suoi autostati formano una base ortogonale completa. Dunque si può esprimere un operatore autoaggiunto  $\mathbf{A}$  nel seguente modo:

$$\mathbf{A} = \sum_n a_n \mathbf{E}_n, \quad (1.5)$$

---

<sup>1</sup>Si dimostra che un operatore lineare è limitato se e solo se è continuo rispetto alla topologia su cui è definito.

in cui i coefficienti  $a_n$  sono gli autovalori relativi agli autostati di  $\mathbf{A}$ , e  $\mathbf{E}_n$  sono le proiezioni di  $\mathbf{A}$  sullo spazio ortonormale di autostati. Essi godono delle seguenti proprietà:

$$\mathbf{E}_n \mathbf{E}_m = \delta_{nm} \mathbf{E}_n, \quad \mathbf{E}_n^\dagger = \mathbf{E}_n. \quad (1.6)$$

Dalla definizione di  $\mathbf{E}_n$  la rappresentazione spettrale di  $\mathbf{A}$  si scrive:

$$\mathbf{A} = \sum_n |n\rangle a_n \langle n|, \quad (1.7)$$

in cui  $\{|n\rangle\}$  è la base ortonormale di autostati tale che  $\mathbf{A} |n\rangle = |n\rangle a_n$ .

**Assioma 3: Misura** Il processo di misura permette di acquisire informazioni sullo stato del sistema fisico osservato. Se si intende misurare l'osservabile  $\mathbf{A}$ , quello che accade è che il sistema collassa in un autostato di  $\mathbf{A}$  e l'osservatore ottiene l'autovalore corrispondente. Se lo stato quantistico del sistema, prima della misura, è  $|\psi\rangle$ , il valore  $a_n$  sarà ottenuto con probabilità:

$$Prob(a_n) = \|\mathbf{E}_n |\psi\rangle\|^2 = \langle \psi | \mathbf{E}_n^\dagger \mathbf{E}_n | \psi \rangle. \quad (1.8)$$

Il sistema immediatamente dopo la misura che ha dato come risultato  $a_n$ , si troverà nel seguente stato normalizzato:

$$\frac{\mathbf{E}_n |\psi\rangle}{\langle \psi | \mathbf{E}_n^\dagger \mathbf{E}_n | \psi \rangle}. \quad (1.9)$$

Ripetendo subito dopo la misura, si otterrà con certezza lo stesso valore,  $a_n$ . Se sono misurati sistemi preparati nello stesso modo, si può ottenere la distribuzione statistica dei risultati e valutare il valore di aspettazione:

$$\langle a \rangle = \sum_n a_n Prob(a_n) = \sum_n a_n \langle \psi | \mathbf{E}_n^\dagger \mathbf{E}_n | \psi \rangle = \langle \psi | \mathbf{A} | \psi \rangle. \quad (1.10)$$

**Assioma 4: Dinamica** La dinamica descrive l'evoluzione nel tempo dello stato del sistema fisico. L'equazione di Schrödinger determina l'evoluzione infinitesima del vettore di stato:

$$\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = -i\mathbf{H}(t) |\psi(t)\rangle \quad (1.11)$$

in cui abbiamo posto  $\hbar = 1$ .  $\mathbf{H}(t)$  è un operatore autoaggiunto chiamato operatore *hamiltoniano*. Nella rappresentazione di Schrödinger la dinamica è determinata attraverso operatori unitari  $\mathbf{U}$ , vale a dire che dato il vettore di stato al tempo  $t$ ,  $|\psi(t)\rangle$ , il vettore al tempo  $s$  successivo a  $t$  sarà dato da:

$$|\psi(s)\rangle = \mathbf{U}(s, t) |\psi(t)\rangle. \quad (1.12)$$

L'equazione di Schrödinger al primo ordine può essere approssimata da:

$$|\psi(t + dt)\rangle = \mathbf{I} - i\mathbf{H}(t)dt |\psi(t)\rangle. \quad (1.13)$$

L'operatore  $\mathbf{U}(t + dt, t) = \mathbf{I} - i\mathbf{H}(t)dt$  risulta unitario, ovvero  $\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U} = \mathbf{I}$ . Dato che il prodotto tra operatori unitari resta unitario, anche l'evoluzione dinamica su un tempo finito risulta unitaria. Se l'operatore hamiltoniano è indipendente dal tempo allora  $\mathbf{U}(s, t) = \exp[-i(s - t)\mathbf{H}]$ . Occorre sottolineare una cosa fondamentale, che nonostante segua dall'assioma precedente, non deve sfuggire: nel momento in cui avviene la misura, il vettore di stato di un sistema quantistico smette di essere soluzione dell'equazione di Schrödinger.

**Assioma 5: Sistemi composti** Lo spazio di Hilbert di un sistema composto  $AB$  è dato dal prodotto tensoriale tra i due spazi di Hilbert corrispondenti ai sottosistemi  $A$  e  $B$ ,  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ . Il vettore di stato del sistema composto, quindi, sarà dato dal prodotto tensoriale tra i vettori di stato dei sottosistemi, per esempio  $|\psi_A\rangle \otimes |\varphi_B\rangle$ . Date  $\{|i\rangle_A\}$  e  $\{|\eta\rangle_B\}$ , basi ortonormali rispettivamente dello spazio di Hilbert di  $A$  e di  $B$ , allora  $|i, \eta\rangle_{AB} = |i\rangle_A \otimes |\eta\rangle_B$  è una base per  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , dove il prodotto interno su  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  è definito da:

$${}_{AB}\langle i, \eta | j, \mu \rangle_{AB} = \delta_{ij}\delta_{\eta\mu}. \quad (1.14)$$

L'operatore prodotto tensoriale  $\mathbf{M}_A \otimes \mathbf{N}_B$  è un operatore che applica  $\mathbf{M}_A$  agli elementi di  $\mathcal{H}_A$  e  $\mathbf{N}_B$  agli elementi di  $\mathcal{H}_B$  e la sua azione sulla base ortonormale  $|i, \eta\rangle_{AB}$  è definita nel seguente modo:

$$\mathbf{M}_A \otimes \mathbf{N}_B |i, \eta\rangle_{AB} = \mathbf{M}_A |i\rangle_A \otimes \mathbf{N}_B |\eta\rangle_B = \sum_{j, \mu} |j, \mu\rangle_{AB} (M_A)_{j,i} (N_B)_{\mu, \eta}. \quad (1.15)$$

## 1.2 Operatore densità

Come già specificato, i cinque assiomi riportati nella sezione precedente sono alla base della descrizione dei sistemi quantistici chiusi. Risulta possibile ridefinirli sfruttando l'*operatore densità* che, come vedremo, rappresenta l'insieme di tutti i possibili stati quantistici associati al sistema considerato. Formuleremo un nuovo modo per valutare il valore di aspettazione di un'osservabile, la probabilità di ottenere un certo valore effettuando una misura su una certa osservabile e l'evoluzione della dinamica del sistema. Infine definiremo l'*entanglement*, correlazione di tipo quantistico che, oltre a rappresentare uno dei fenomeni più affascinanti e controversi della teoria, si rivelerà molto utile nella misura di sistemi composti. I concetti riportati sono ampiamente trattati in [1] e [4].

**Qubit** Per prima cosa definiamo il *qubit*, oggetto che utilizzeremo per fare i successivi esempi. Il qubit rappresenta l'unità fondamentale dell'informazione quantistica ed è l'analogo del *bit* classico; quest'ultimo può assumere solo i valori  $\{0, 1\}$ . Il qubit rappresenta un sistema quantistico descritto da uno spazio di Hilbert a due dimensioni, in cui ciascun elemento può essere scritto come:

$$a|0\rangle + b|1\rangle. \quad (1.16)$$

I coefficienti  $a$  e  $b$  sono numeri complessi tali che  $|a|^2 + |b|^2 = 1$  e  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  rappresenta la base ortonormale dello spazio. Chiaramente il qubit differisce dal suo corrispondente classico a causa del fatto che si possono effettuare misure sul bit senza disturbarlo e che si può acquisire tutta l'informazione in esso contenuta. Al contrario, se il valore del qubit è inizialmente ignoto, una singola misura non sarà in grado di determinare i coefficienti  $a$  e  $b$  poiché, a causa della misura, il sistema sarà collassato in uno stato che non è necessariamente quello di partenza.

**Operatore densità** Consideriamo un insieme di stati,  $\{|\psi_i\rangle\}$ , e supponiamo che il sistema si trovi nello stato  $|\psi_i\rangle$  con probabilità  $p_i$ . L'operatore densità è così definito:

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle\psi_i|, \quad (1.17)$$

con  $0 < p_i \leq 1$ , ed ha le seguenti proprietà:

1.  $\rho$  è autoaggiunto:  $\rho = \rho^\dagger$ ;
2.  $\rho$  è positivo:  $\forall |\varphi\rangle, \langle\varphi|\rho|\varphi\rangle = \sum_i p_i \langle\varphi|\psi_i\rangle \langle\psi_i|\varphi\rangle = \sum_i p_i |\langle\varphi|\psi_i\rangle|^2 \geq 0$ ;
3.  $\text{tr}(\rho) = 1$ , ovvero  $\sum_i p_i = 1$ .

Diremo che ciascun  $|\psi_i\rangle$  è uno stato *puro*. Diversamente diremo che lo stato è *misto*. Se il sistema si trova in uno stato puro, per esempio  $|\psi_i\rangle$ , l'operatore densità si scrive  $\rho = |\psi_i\rangle \langle\psi_i|$  e rappresenta la proiezione sullo spazio unidimensionale generato da  $|\psi_i\rangle$ . Diremo che l'operatore densità rappresenta uno stato puro se vale la seguente proprietà:

$$\rho = \rho^2. \quad (1.18)$$

Se lo stato è misto, vale a dire che ci sono due o più termini nella somma (1.17), l'equazione (1.18) cessa di valere. Ora faremo uso di un esempio su un sistema composto da due qubit per capire come utilizzare l'operatore densità per valutare il valore di aspettazione di un'osservabile e la probabilità di ottenere un certo risultato effettuando una misura. Successivamente definiamo l'*operazione di traccia parziale* su un sistema composto da due sottosistemi, attraverso cui si può ottenere l'operatore densità di uno dei due, dato

quello del sistema composto. Infine generalizzeremo i risultati ottenuti per i due qubit ad un sistema generico, aggiungendo la descrizione dell'evoluzione di esso attraverso l'operatore densità. Consideriamo il sistema  $AB$  come composto da due qubit, in cui osserviamo soltanto  $A$ . Indichiamo con  $\{|0_A\rangle, |1_A\rangle\}$  e  $\{|0_B\rangle, |1_B\rangle\}$  le basi ortonormali degli spazi corrispondenti agli stati di  $A$  e di  $B$ . Consideriamo uno stato del sistema composto di questo tipo:

$$|\psi\rangle_{AB} = a |0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + b |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B. \quad (1.19)$$

In questo stato  $A$  e  $B$  sono *correlati*. Infatti, effettuando una misura su  $A$ , con probabilità  $|a|^2$  il sistema si prepara nello stato:

$$|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B. \quad (1.20)$$

Dunque ottenendo lo stato  $|0\rangle_A$  si è certi che  $B$  si trovi nello stato  $|0\rangle_B$ . Il discorso è analogo nel caso in cui si ottenga  $|1\rangle_A$ . Ora supponiamo di effettuare misurazioni su una generica osservabile relativa ad  $A$ , cioè applichiamo allo stato del sistema  $AB$  il seguente operatore tensoriale:

$$\mathbf{M}_A \otimes \mathbf{I}_B, \quad (1.21)$$

in cui  $\mathbf{M}_A$  è un operatore autoaggiunto agente su  $A$ , e  $\mathbf{I}_B$  l'operatore identità agente su  $B$ . Valutiamo il valore di aspettazione dell'osservabile associato all'operatore  $\mathbf{M}_A$ :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{M}_A \rangle &= \langle \varphi | \mathbf{M}_A | \varphi \rangle \\ &= (a^* \langle 00 | + b^* \langle 11 |) (\mathbf{M}_A \otimes \mathbf{I}_B) (a |00\rangle + b |11\rangle) \\ &= |a|^2 \langle 0 | \mathbf{M}_A | 0 \rangle + |b|^2 \langle 1 | \mathbf{M}_A | 1 \rangle. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Si può riscrivere così:

$$\langle \mathbf{M}_A \rangle = \text{tr}(\mathbf{M}_A \boldsymbol{\rho}_A), \quad (1.23)$$

in cui  $\text{tr}(\cdot)$  sta per traccia e  $\boldsymbol{\rho}_A = |a|^2 |0\rangle \langle 0| + |b|^2 |1\rangle \langle 1|$ . Dato che  $\langle \mathbf{M}_A \rangle$  è il valore di aspettazione di un generico osservabile, si può interpretare  $\boldsymbol{\rho}_A$  come descrivente un *ensemble* di stati quantistici possibili, ciascuno di essi associato ad una certa probabilità di presentarsi. Se consideriamo  $\mathbf{M}_A$  come la sua proiezione  $\mathbf{E}_A(a_n)$  sul corrispondente autostato dell'osservabile, otteniamo:

$$\text{Prob}(a_n) = p_0 \langle 0 | \mathbf{E}_A(a_n) | 0 \rangle + p_1 \langle 1 | \mathbf{E}_A(a_n) | 1 \rangle. \quad (1.24)$$

Inoltre da  $\boldsymbol{\rho}_{AB}$ , l'operatore densità del sistema composto  $AB$ , si può ottenere  $\boldsymbol{\rho}_A$ , attraverso l'operazione di traccia parziale:

$$\boldsymbol{\rho}_A = \text{tr}_B(\boldsymbol{\rho}_{AB}). \quad (1.25)$$

Infatti data la base ortonormale relativa al sistema composto  $AB$ ,  $\{|i, \eta\rangle_{AB}\} = |i\rangle_A \otimes |\eta\rangle_B$ , si definisce l'operazione di traccia parziale su  $B$  come un'applicazione lineare che manda

un operatore agente su  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , che indichiamo con  $\mathbf{M}_{AB}$ , in un operatore agente su  $\mathcal{H}_A$ ,  $\mathbf{M}_A$ , definita nel seguente modo:

$$tr_B \mathbf{M}_{AB} = \sum_{\eta} \langle \eta | \mathbf{M}_{AB} | \eta \rangle_B. \quad (1.26)$$

Generalizzando ad un sistema qualunque, si ottengono i seguenti risultati:

1. **stati**: a ciascun sistema quantistico isolato è associato uno spazio di Hilbert che corrisponde allo spazio degli stati. Il sistema è totalmente descritto dall'operatore densità  $\rho$ , un operatore autoaggiunto, positivo e con traccia uguale a 1; se il sistema è nello stato  $|\psi_i\rangle$ , con probabilità  $p_i$ , l'operatore densità corrispondente  $\rho_i$  e l'operatore densità associato al sistema sarà  $\sum_i p_i \rho_i$  ;
2. **misura**: le misure di una certa osservabile sono descritte da una collezione di operatori di misura  $\mathbf{E}_n$ , operatori di proiezione associati all'operatore autoaggiunto corrispondente all'osservabile,  $\mathbf{A}$ , con le proprietà descritte dalle equazioni (1.6); se lo stato è  $|\psi_i\rangle$ , la probabilità di ottenere un certo  $a_n$  sarà data da:

$$\begin{aligned} Prob(a_n|i) &= \langle \psi_i | \mathbf{E}_n^\dagger \mathbf{E}_n | \psi_i \rangle = \sum_j \langle j | \mathbf{E}_n^\dagger \mathbf{E}_n | \psi_i \rangle \langle \psi_i | j \rangle \\ &= tr(\mathbf{E}_n^\dagger \mathbf{E}_n | \psi_i \rangle \langle \psi_i |) = tr(\mathbf{E}_n^\dagger \mathbf{E}_n \rho_i). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Se il sistema si trova nello stato  $|\psi_i\rangle$  con probabilità  $p_i$ , allora la probabilità di ottenere un certo  $a_n$  sarà data da:

$$\begin{aligned} Prob(a_n) &= \sum_i Prob(a_n|i) p_i = \sum_i p_i tr(\mathbf{E}_n^\dagger \mathbf{E}_n | \psi_i \rangle \langle \psi_i |) \\ &= tr(\mathbf{E}_n^\dagger \mathbf{E}_n \rho). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Lo stato del sistema dopo che con una misurazione si è ottenuto  $a_n$  sarà:

$$\frac{\mathbf{E}_n \rho \mathbf{E}_n^\dagger}{tr(\mathbf{E}_n^\dagger \mathbf{E}_n \rho)}. \quad (1.29)$$

Infine, il valore di aspettazione dell'osservabile associato all'operatore  $\mathbf{A}$  sarà dato da:

$$\langle \mathbf{A} \rangle = tr(\mathbf{A} \rho); \quad (1.30)$$

3. **dinamica**: l'evoluzione nel tempo di un sistema quantistico chiuso si ottiene a partire da operatori unitari  $\mathbf{U}$ ; se il sistema si trova nello stato  $|\psi_i\rangle$  con probabilità  $p_i$ , l'evoluzione dell'operatore densità sarà data da:

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \rightarrow \sum_i p_i \mathbf{U} |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U} \rho \mathbf{U}^\dagger. \quad (1.31)$$

**Sfera di Bloch** La *sfera di Bloch* è un modello geometrico attraverso cui è possibile visualizzare gli stati di un singolo qubit. L'operatore densità  $2 \times 2$  più generale associato ad un singolo qubit, può essere espanso nella base  $\{\mathbf{I}, \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\sigma}_3\}$  in cui  $\mathbf{I}$  è l'operatore identità, mentre  $\{\boldsymbol{\sigma}_i\}$  sono le *matrici di Pauli*<sup>2</sup>. Poiché le  $\{\boldsymbol{\sigma}_i\}$  sono a traccia nulla, affinché l'operatore densità abbia  $\text{tr}(\boldsymbol{\rho}) = 1$ , il coefficiente che moltiplica l'operatore identità dev'essere  $\frac{1}{2}$ :

$$\boldsymbol{\rho}(\vec{P}) = \frac{1}{2}(\mathbf{I} + \vec{P} \cdot \vec{\boldsymbol{\sigma}}) = \frac{1}{2}(\mathbf{I} + P_1\boldsymbol{\sigma}_1 + P_2\boldsymbol{\sigma}_2 + P_3\boldsymbol{\sigma}_3), \quad (1.32)$$

in cui  $P_i$  sono numeri reali. Calcolando il determinante si ottiene:

$$\det \boldsymbol{\rho} = \frac{1}{4}(1 - \vec{P}^2). \quad (1.33)$$

Affinché  $\boldsymbol{\rho}$  abbia autovalori non negativi, è necessario che  $\det \boldsymbol{\rho} \geq 0$  oppure  $\vec{P}^2 \leq 1$ . Risulta esserci una corrispondenza biunivoca tra gli operatori densità possibili per un singolo qubit e i punti di una *3-sfera* definita da  $0 \leq \vec{P} \leq 1$ , chiamata sfera di Bloch, in Figura 1.1. L'estremo della 3-sfera,  $|\vec{P}| = 1$ , che rappresenta una superficie sferica, è associato all'operatore densità con determinante nullo. Dalla condizione sulla traccia si evince che questo operatore debba avere autovalori 0 e 1, per cui l'operatore è associato ad uno stato puro.

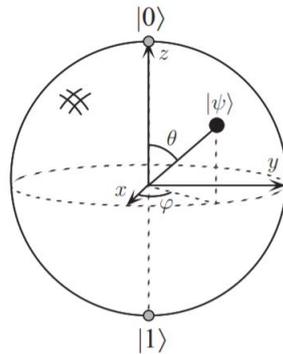


Figura 1.1: Rappresentazione grafica della Sfera di Bloch in cui sono rappresentati gli stati puri  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ , tratta da [1].

---

<sup>2</sup>Le matrici di Pauli sono tre matrici hermitiane e a traccia nulla:  $\boldsymbol{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

**Decomposizione di Schmidt** Lo stato di un sistema composto da due sottosistemi può essere espresso attraverso la *decomposizione di Schmidt*, strumento che si rivelerà molto utile. Ricordiamo che data la base ortonormale di  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  il vettore di stato si può scrivere nel seguente modo:

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i,\eta} \psi_{i\eta} |i\rangle_A \otimes |\eta\rangle_B \equiv \sum_i |i\rangle_A \otimes |\tilde{i}\rangle_B, \quad (1.34)$$

in cui  $\{|i\rangle_A\}$  e  $\{|\eta\rangle_B\}$  sono basi ortonormali rispettivamente per  $A$  e  $B$  e  $\{|\tilde{i}\rangle_B\}$  è stato definito come:

$$|\tilde{i}\rangle_B = \sum_{\eta} \psi_{i\eta} |\eta\rangle_B. \quad (1.35)$$

Non è assicurato che  $\{|\tilde{i}\rangle_B\}$  sia una base ortogonale o normalizzata. Ora supponiamo che  $\{|i\rangle_A\}$  sia la base in cui  $\rho_A$  è diagonale:

$$\rho_A = \sum_i p_i |i\rangle \langle i|. \quad (1.36)$$

Possiamo ottenere  $\rho_A$  anche attraverso l'operazione di traccia parziale,

$$\rho_A = tr_B(|\psi\rangle \langle \psi|) = tr_B\left(\sum_{i,j} |i\rangle \langle j| \otimes |\tilde{i}\rangle \langle \tilde{j}|\right) = \sum_{i,j} \langle \tilde{j} | \tilde{i} \rangle (|i\rangle \langle j|). \quad (1.37)$$

Confrontando le due espressioni per  $\rho_A$  vediamo che:

$${}_B \langle \tilde{j} | \tilde{i} \rangle = p_i \delta_{ij}; \quad (1.38)$$

da quest'ultima equazione segue che  $\{|\tilde{i}\rangle_B\}$  sono ortogonali. Normalizzando otteniamo:

$$|i'\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{p_i}} |\tilde{i}\rangle_B, \quad (1.39)$$

da cui la decomposizione di Schmidt dello stato:

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_i \sqrt{p_i} |i\rangle_A \otimes |i'\rangle_B. \quad (1.40)$$

Ciascuno stato puro di un sistema composto da due sottosistemi può essere espresso in questa forma. Utilizzando questa decomposizione, valutiamo  $\rho_B$  con l'operazione a traccia parziale su  $\mathcal{H}_A$ :

$$\rho_B = tr_A(|\psi\rangle \langle \psi|) = \sum_i p_i |i'\rangle \langle i'|. \quad (1.41)$$

Notiamo che  $\rho_A$  e  $\rho_B$  hanno lo stesso numero di autovalori non nulli.

**Entanglement** Chiamiamo *numero di Schmidt* il numero di autovalori non nulli di  $\rho_A$  (o  $\rho_B$ ), che è anche il numero di termini nella decomposizione di Schmidt. Definiamo *entangled* uno stato di un sistema composto da due sottosistemi, se il suo numero di Schmidt è maggiore di 1. Altrimenti lo stato si dice *separabile* e risulta essere il prodotto diretto tra due stati puri di  $\mathcal{H}_A$  e  $\mathcal{H}_B$ , ovvero:

$$|\psi\rangle_{AB} = |\varphi\rangle_A \otimes |\chi\rangle_B; \quad (1.42)$$

in più gli operatori densità relativi ad  $A$  e  $B$  sono entrambi puri. Quando lo stato è entangled, ciascun operatore densità rappresenta stati misti. Uno stato separabile non è detto che descriva due sottosistemi privi di correlazione, per cui è scorretto far coincidere gli stati non correlati con quelli separabili. Nel capitolo successivo mostreremo come distinguere le correlazioni classiche dall'entanglement.

**Stati di Bell e teletrasporto quantistico** Ora faremo un esempio di due qubit massimamente entangled, tratto da [1]. Definiamo gli *stati di Bell*, che rappresentano gli stati possibili della coppia dei due qubit dopo che questi sono entrati in contatto:

$$\begin{aligned} |00\rangle &\rightarrow |\beta_{00}\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \\ |01\rangle &\rightarrow |\beta_{01}\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}} \\ |10\rangle &\rightarrow |\beta_{10}\rangle = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}} \\ |11\rangle &\rightarrow |\beta_{11}\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}; \end{aligned} \quad (1.43)$$

la prima colonna rappresenta tutte le possibili combinazioni di stati della base ortonormale,  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ , della coppia prima dell'interazione. Supponiamo che lo stato della coppia di qubit sia  $|\beta_{00}\rangle$  e scriviamo l'operatore densità associato al sistema composto:

$$\rho_c = \frac{|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 11|}{2}. \quad (1.44)$$

Sulla base di quanto affermato nel paragrafo precedente, essendo i due qubit entangled, ci aspettiamo che l'operatore densità relativo a ciascun qubit rappresenti uno stato misto, mentre lo stato descritto da  $\rho_c$  è uno stato puro. Effettuando la traccia parziale su uno

dei due otteniamo:

$$\begin{aligned}
\rho_1 = \text{tr}_2(\rho_c) &= \frac{\text{tr}_2(|00\rangle\langle 00|) + \text{tr}_2(|11\rangle\langle 00|) + \text{tr}_2(|00\rangle\langle 11|) + \text{tr}_2(|11\rangle\langle 11|)}{2} \\
&= \frac{|0\rangle\langle 0| \langle 0|0\rangle + |1\rangle\langle 0| \langle 0|1\rangle + |0\rangle\langle 1| \langle 1|0\rangle + |1\rangle\langle 1| \langle 1|1\rangle}{2} \\
&= \frac{|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|}{2} \\
&= \frac{\mathbf{I}}{2}.
\end{aligned} \tag{1.45}$$

Per dimostrare che si tratta di uno stato misto utilizziamo la relazione (1.18). Infatti, calcolando la traccia di  $\rho_1^2$ , notiamo che non corrisponde a 1, ovvero  $\text{tr}((\mathbf{I}/2)^2) = 1/2 < 1$ . Occorre notare che si tratta di stati massimamente entangled, dal momento che, essendo l'operatore densità del singolo sistema pari a  $\mathbf{I}/2$ , è chiaro che si ha il massimo grado di ignoranza sullo stato del sottosistema poiché tutte le alternative sono equiprobabili. Come sottolineato in [2], l'emergere del fenomeno dell'entanglement dalla teoria quantistica ha portato i fisici a rivoluzionare completamente ciò che si riteneva così intuitivo da sembrare incontrovertibile, per quanto le convinzioni scientifiche non dovrebbero esserlo mai. L'idolo distrutto dalla teoria quantistica è il seguente: appare quasi evidente che se si conosce tutto di un sistema, si conoscerà automaticamente tutto anche delle sue parti. In fisica classica questo è assolutamente valido, in meccanica quantistica questo principio crolla. Infatti, come abbiamo appena visto, mentre l'operatore densità dello stato composto dei due qubit,  $\rho_c$ , rappresenta uno stato puro, l'operatore densità ridotto rappresenta uno stato misto. Questo significa che, ottenuto un certo risultato in seguito ad una misura effettuata sul sistema composto, il sottosistema singolo si troverà, in maniera equiprobabile, in due stati diversi. Come vedremo nel prossimo capitolo, è necessario notare che l'ignoranza dell'osservatore è di tipo classico poiché gli stati possibili sono ben definiti, cioè non sono una sovrapposizione di stati. Inoltre, come vedremo, si andrà a stabilire una correlazione classica tra i due qubit. Attraverso gli stati di Bell si può descrivere un fenomeno quantistico chiamato teletrasporto, fenomeno apparentemente problematico da un punto di vista fisico poiché potrebbe portare a pensare che l'entanglement, a cui sono soggetti i due qubit che restano in tal modo correlati anche se separati da distanze notevoli, permetta una comunicazione istantanea che violerebbe la relatività, per la quale nessuna comunicazione può avvenire ad una velocità maggiore di quella della luce. Vedremo che il fenomeno, per quanto controintuitivo, non viola la causalità. Supponiamo di avere la coppia di qubit, soggetti ad un'interazione descritta dagli stati di Bell, dunque resi entangled e successivamente separati notevolmente. Supponiamo che Alice si trovi in possesso del primo qubit, chiamato  $A$ , e che Bob, a distanza da Alice, sia in possesso del secondo qubit,  $B$ . Supponiamo che Alice voglia inviare a Bob un ulteriore qubit che si trova nella sovrapposizione  $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ . Il teletrasporto quantistico permette di trasformare lo stato ignoto del qubit  $B$  in  $|\psi\rangle$ .

Alice rende entangled  $A$ , e conseguentemente anche  $B$ , con il qubit che si trova nello stato  $|\psi\rangle$ , nel seguente modo:

$$|\psi_1\rangle = |\psi\rangle |\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha |0\rangle (|00\rangle + |11\rangle) + \beta |1\rangle (|00\rangle + |11\rangle)], \quad (1.46)$$

in cui i primi due qubit da sinistra appartengono ad Alice; in particolare il secondo è  $A$  ed il terzo appartiene a Bob,  $B$ . Successivamente Alice effettua una trasformazione sui suoi due qubit che nega il qubit  $A$  quando l'altro è nello stato  $|1\rangle$ , ottenendo:

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha |0\rangle (|00\rangle + |11\rangle) + \beta |1\rangle (|10\rangle + |01\rangle)]. \quad (1.47)$$

Poi effettua la seguente trasformazione sui suoi due qubit:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.48)$$

ottenendo:

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{2}[\alpha(|0\rangle + |1\rangle)(|00\rangle + |11\rangle) + \beta(|0\rangle - |1\rangle)(|10\rangle + |01\rangle)]. \quad (1.49)$$

Quest'ultimo stato si può riscrivere come segue:

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{2}[[|00\rangle (\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle) + |01\rangle (\alpha |1\rangle + \beta |0\rangle) + |10\rangle (\alpha |0\rangle - \beta |1\rangle) + |11\rangle (\alpha |1\rangle - \beta |0\rangle)]. \quad (1.50)$$

Si può quindi affermare che, se Alice fa una misura sui due qubit e la comunica a Bob, egli saprà in quale dei seguenti stati si trova il suo qubit:

$$\begin{aligned} |00\rangle &\rightarrow |\psi_{00}\rangle \equiv [\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle] \\ |01\rangle &\rightarrow |\psi_{01}\rangle \equiv [\alpha |1\rangle + \beta |0\rangle] \\ |10\rangle &\rightarrow |\psi_{10}\rangle \equiv [\alpha |0\rangle - \beta |1\rangle] \\ |11\rangle &\rightarrow |\psi_{11}\rangle \equiv [\alpha |1\rangle - \beta |0\rangle]. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Risulta sorprendente che, attraverso una comunicazione classica tra Alice e Bob, si possa inviare un certo stato a distanze notevoli. Inoltre, è proprio grazie alla necessità che avvenga una comunicazione classica affinché Bob sappia quale sia lo stato in cui si trova il suo qubit, che non viene violata la condizione per cui nessuna informazione può viaggiare a velocità maggiori di quella della luce.

### 1.3 Misura

Nella seguente sezione ci occuperemo del fenomeno della misura; prima ci soffermeremo sulla misura come proiezione ortogonale, successivamente generalizzeremo il concetto. La seguente trattazione si ispira a quanto illustrato da [4].

**Misure come proiezioni ortogonali** Vedremo un esempio di misura come proiezione ortogonale che fa uso, cioè, di proiettori ortogonali, come stabilito dall'assioma relativo alla misura. In più si sfrutterà la possibilità di rendere entangled un sistema con un contatore quantistico. La misura verrà effettuata sul contatore e, a causa della correlazione, darà informazioni sullo stato del sistema considerato. Si procede modificando l'hamiltoniana del sistema imperturbato accendendo un accoppiamento tra l'osservabile e una variabile caratteristica del contatore. Supponiamo che  $\{\mathbf{E}_a, a = 0, 1, 2, \dots, N - 1\}$  sia un insieme completo di proiettori ortogonali che soddisfano:

$$\mathbf{E}_a \mathbf{E}_b = \delta_{ab} \mathbf{E}_a, \mathbf{E}_a^\dagger = \mathbf{E}_a, \sum_a \mathbf{E}_a = \mathbf{I}. \quad (1.52)$$

Introduciamo un contatore N-dimensionale, di base ortonormale  $\{|a\rangle, a = 0, 1, 2, \dots, N - 1\}$  e accoppiando il sistema al contatore, effettuiamo la seguente trasformazione unitaria:

$$U = \sum_{a,b} \mathbf{E}_a \otimes |b + a\rangle \langle b|, \quad (1.53)$$

cioè il contatore avanza di  $a$  quando lo stato del sistema è soggetto a  $\mathbf{E}_a$ . L'unitarietà della trasformazione si verifica facilmente. La trasformazione agisce sullo stato del sistema composto, per esempio:

$$\mathbf{U} : |\psi\rangle = |\varphi\rangle_{\text{система}} \otimes |0\rangle_{\text{contatore}} \mapsto |\psi'\rangle = \sum_a \mathbf{E}_a |\varphi\rangle \otimes |a\rangle. \quad (1.54)$$

L'assioma relativo alla misura asserisce che:

$$Prob(a) = \langle \psi' | (\mathbf{I} \otimes |a\rangle \langle a|) | \psi' \rangle = \langle \varphi | \mathbf{E}_a^\dagger \mathbf{E}_a | \varphi \rangle, \quad (1.55)$$

e quando viene rilevato questo risultato si sa che il sistema si trova nello stato:

$$\frac{\mathbf{E}_a |\varphi\rangle}{\|\mathbf{E}_a |\varphi\rangle\|}. \quad (1.56)$$

Se la misura è effettuata ma il risultato è ignoto allora lo stato del sistema diventa:

$$\sum_a Prob(a) \frac{\mathbf{E}_a |\varphi\rangle \langle \varphi | \mathbf{E}_a}{\langle \varphi | \mathbf{E}_a | \varphi \rangle} = \sum_a \mathbf{E}_a |\varphi\rangle \langle \varphi | \mathbf{E}_a. \quad (1.57)$$

Se il sistema, diventato entangled con il contatore, prima della misura è descritto dall'operatore densità  $\rho$ , dopo la misura è descritto da:

$$\sum_a \mathbf{E}_a \rho \mathbf{E}_a. \quad (1.58)$$

Si è fatto uso delle proprietà degli operatori di proiezione ortogonale. Vediamo che, accoppiando il sistema al nostro contatore, se possiamo eseguire opportune trasformazioni unitarie che rendono entangled il sistema e il contatore, e se possiamo osservare il contatore nella sua base, allora abbiamo il potere di eseguire qualsiasi misura ortogonale concepibile sul sistema.

**Misure generalizzate** Ora discuteremo un meccanismo di misura generalizzato, in cui la misura non determina necessariamente una proiezione ortogonale. Supponiamo che il sistema considerato sia un singolo qubit  $A$  e che lo sia anche il contatore, che chiameremo qubit  $B$ . Essi diventano entangled nel seguente modo:

$$\mathbf{U} : (\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle)_A \otimes |0\rangle_B \mapsto \alpha |0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + \beta |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B. \quad (1.59)$$

Effettuare una misura sul contatore nella base  $\{|0\rangle, |1\rangle\}_B$  genererebbe una proiezione ortogonale, come già discusso; supponiamo invece di misurare il contatore nella base  $\{|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)\}$ . L'assioma relativo alla misura afferma che i risultati  $+$  e  $-$  si presentano con la stessa probabilità. Gli stati del sistema, subito dopo la misura, saranno:

$$\alpha |0\rangle \pm \beta |1\rangle. \quad (1.60)$$

Se  $|\alpha| \neq |\beta|$  i due stati non saranno ortogonali. Riscriviamo l'equazione (1.59) nella nuova base, in cui lo stato di  $A$  è indicato con  $|\psi\rangle_A$ :

$$\mathbf{U} : |\psi\rangle_A \otimes |0\rangle_B \mapsto \mathbf{M}_+ |\psi\rangle_A \otimes |+\rangle_B + \mathbf{M}_- |\psi\rangle_A \otimes |-\rangle_B, \quad (1.61)$$

in cui:

$$\mathbf{M}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.62)$$

Risulta evidente che rilevare il contatore in uno dei due stati,  $|\pm\rangle$ , prepara il sistema nello stato  $\mathbf{M}_\pm |\psi\rangle$ , a meno di un fattore di normalizzazione. Si può generalizzare a un contatore  $N$ -dimensionale che scegliamo di misurare nella base ortonormale  $\{|a\rangle, a = 0, \dots, N-1\}$ :

$$\mathbf{U} : |\psi\rangle_A \otimes |0\rangle_B \mapsto \sum_a \mathbf{M}_a |\psi\rangle_A \otimes |a\rangle_B. \quad (1.63)$$

L'unitarietà di  $\mathbf{U}$  ci assicura che la norma sia conservata; infatti:

$$1 = \left\| \sum_a \mathbf{M}_a |\psi\rangle \otimes |a\rangle \right\|^2 = \sum_{a,b} \langle \psi | \mathbf{M}_a^\dagger \mathbf{M}_b | \psi \rangle \langle a | b \rangle = \sum_a \langle \psi | \mathbf{M}_a^\dagger \mathbf{M}_a | \psi \rangle, \quad (1.64)$$

per ogni  $|\psi\rangle$ . Da quest'ultima equazione segue:

$$\sum_a \mathbf{M}_a^\dagger \mathbf{M}_a = \mathbf{I}. \quad (1.65)$$

L'ultima equazione, anche detta relazione di *completezza*, assicura che la somma tra le probabilità associate a ciascun possibile risultato dia 1, ma non assicura che gli stati che si possono ottenere siano ortogonali, né che la misura sia ripetibile<sup>3</sup>. Si deve notare che effettuare una misura ortogonale sul contatore nella base  $\{|a\rangle\}_B$  è equivalente ad effettuare una misura ortogonale sul sistema  $AB$  attraverso gli operatori di proiezione ortogonale  $\{\mathbf{I} \otimes |a\rangle\langle a|\}$ . Per questo è corretto affermare che una misura ortogonale sul sistema composto può generare una misura non ortogonale su  $A$ . Se, dopo aver ottenuto  $a$  ripetiamo la misura, la probabilità di ottenere  $b$  sarà data da:

$$Prob(b|a) = \frac{\|\mathbf{M}_b \mathbf{M}_a |\psi\rangle\|^2}{\|\mathbf{M}_a |\psi\rangle\|^2}. \quad (1.66)$$

Le due misure sono in accordo se  $Prob(b|a) = \delta_{ba}$ , soddisfatta per  $\mathbf{M}_b \mathbf{M}_a = \delta_{ba} \mathbf{M}_a$ , cosa che ci riporterebbe al caso della misura come proiezione ortogonale. Se definiamo l'operatore  $\mathbf{E}_a = \mathbf{M}_a^\dagger \mathbf{M}_a$  e calcoliamo la probabilità di ottenere  $a$  dato l'operatore densità  $\rho$  otteniamo:

$$Prob(a) = tr(\mathbf{E}_a \rho). \quad (1.67)$$

Risulta che gli operatori appena definiti abbiano le seguenti proprietà:

1. *autoaggiuntezza*:  $\mathbf{E}_a = \mathbf{E}_a^\dagger$ ;
2. *completezza*:  $\sum_a \mathbf{E}_a = \mathbf{I}$ ;
3. *positività*:  $\langle \psi | \mathbf{E}_a | \psi \rangle \geq 0, \forall |\psi\rangle$ .

Gli operatori appena definiti sono conosciuti come POVM, operatori di misura a valori positivi, e rappresentano una generalizzazione della PVM, misura proiettiva, cioè come proiezione ortogonale. Come abbiamo appena visto, gli operatori POVM possono essere sempre ottenuti a partire da misure ortogonali effettuate sul contatore. Per comprendere il significato di misura non ripetibile osserviamo che, dato  $\mathbf{E}_a$ , operatore autoaggiunto e non negativo, esso ha una radice positiva  $\sqrt{\mathbf{E}_a}$ . Se definiamo:

$$\mathbf{M}_a = \mathbf{U}_a \sqrt{\mathbf{E}_a}, \quad (1.68)$$

---

<sup>3</sup>Dall'assioma sulla misura, che fa uso di proiettori ortogonali, si deduce che la misura sia ripetibile poiché, ottenuto un certo risultato, effettuando la medesima misura successivamente si avrà lo stesso risultato, con certezza.

<sup>4</sup>Segue dal fatto che presi due operatori  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , allora  $(\mathbf{AB})^\dagger = \mathbf{B}^\dagger \mathbf{A}^\dagger$ .

notiamo che rispetta  $\mathbf{M}_a^\dagger \mathbf{M}_a = \mathbf{E}_a$  in cui  $\mathbf{U}_a$  è un qualunque operatore unitario. L'equazione (1.68) rappresenta la *decomposizione polare* dell'operatore  $\mathbf{M}_a$ . Chiaramente,  $\{\mathbf{E}_a\}$ , formano un insieme di POVM. Questi assicurano che ciascun esito sia associato ad una probabilità ben definita, ma non danno informazioni sullo stato dopo la misura poiché, ottenuto  $a$ , lo stato sarebbe:

$$\mathbf{U}_a \left( \frac{\sqrt{\mathbf{E}_a} |\psi\rangle}{\|\sqrt{\mathbf{E}_a} |\psi\rangle\|} \right). \quad (1.69)$$

L'arbitrarietà è legata alla scelta di  $\mathbf{U}_a$ , dal momento che se ne può scegliere uno per ciascun esito  $a$ .

# Capitolo 2

## Sistemi quantistici aperti

L'assunto secondo cui i sistemi macroscopici non siano mai isolati dall'ambiente circostante ha permesso la formulazione della teoria della decoerenza. In questo capitolo ci occuperemo di capire cosa accade quando un sistema quantistico interagisce con l'ambiente circostante e inizieremo a notare come la "classicità" possa essere considerata una proprietà emergente del sistema dovuta, appunto, alla suddetta interazione. Mostreremo anche l'irreversibilità del processo. Prima però, concluderemo il discorso generale sui sistemi quantistici aperti.

### 2.1 Canali quantistici

Parafrasando quanto spiegato in [4], torniamo a parlare di un generico sistema composto  $AB$ , osservando solo  $B$ , contatore  $N$ -dimensionale. Nel capitolo precedente abbiamo già visto che effettuando una misura ortogonale sul sistema  $AB$ ,  $A$  non è necessariamente soggetto ad una proiezione ortogonale, ma in generale sarà soggetto ad una misura che fa uso di POVM. Ora ci poniamo il seguente quesito: se  $AB$  è soggetto ad una trasformazione unitaria, come descriviamo l'evoluzione del solo  $A$ ? In realtà, abbiamo già risposto alla domanda. Se la trasformazione a cui il sistema  $AB$  è della forma descritta dall'equazione (1.63), si nota che l'operatore densità di  $A$  prima dell'interazione con  $B$  è soggetto a:

$$\varepsilon(\rho) = \sum_a \mathbf{M}_a \rho \mathbf{M}_a^\dagger, \quad (2.1)$$

in cui  $\rho = |\psi\rangle_A \langle\psi|_A$  e gli operatori  $\{\mathbf{M}_a\}$  rispettano la relazione di completezza.  $\varepsilon$  risulta una mappa lineare ed è soprannominata *canale quantistico* o *superoperatore*, dal momento che agisce sull'operatore densità e non sui vettori. Ha le seguenti proprietà:

1. *linearità*:  $\varepsilon(\alpha\rho_1 + \beta\rho_2) = \alpha\varepsilon(\rho_1) + \beta\varepsilon(\rho_2)$ ;
2. *preserva l'autoaggiunzione*:  $\varepsilon(\rho) = \varepsilon(\rho)^\dagger$ ;

3. *preserva la positività*:  $\varepsilon(\rho) \geq 0$  ;
4. *preserva la traccia*:  $tr(\varepsilon(\rho)) = tr(\rho)$ .

Gli operatori  $\{\mathbf{M}_a\}$  sono detti *operatori di Kraus*. Ora riporteremo degli esempi, tratti da [1].

**Operazione di traccia parziale** Come sappiamo, dati due sistemi entangled  $A$  e  $B$ , attraverso l'operazione di traccia parziale su  $B$  effettuata sull'operatore densità del sistema  $AB$ , si ottiene l'operatore densità del singolo sistema  $A$ . Vedremo che questa operazione è un canale quantistico. Considerata la base ortonormale  $\{|a\rangle\}$  per  $\mathcal{H}_A$ , e la base ortonormale  $\{|b\rangle\}$  per  $\mathcal{H}_B$ , definiamo il seguente operatore  $\mathbf{M}_i : \mathcal{H}_{AB} \rightarrow \mathcal{H}_A$ :

$$\mathbf{M}_i(\lambda_b |a_b\rangle |b\rangle) \equiv \lambda_i |a_i\rangle. \quad (2.2)$$

Notiamo che  $\mathbf{M}_i$  è un operatore di Kraus attraverso cui si può scrivere il canale quantistico  $\varepsilon$  come nell'equazione (2.1). Notiamo che:

$$\varepsilon(\rho_A \otimes |b\rangle \langle b'|) = \rho_A \delta_{bb'} = tr_B(\rho_A \otimes |b\rangle \langle b'|). \quad (2.3)$$

Dalla linearità di  $\varepsilon$ , segue che  $\varepsilon = tr_B$ . Vedremo che, attraverso questo canale quantistico, si può ottenere l'operatore densità di un sistema aperto quando è reso entangled con l'ambiente; questa interazione, inoltre, risulterà nella perdita di coerenza quantistica e di informazione che verrà diffusa nell'ambiente e, per questo motivo, persa.

**Rappresentazione geometrica di un canale quantistico agente su un singolo qubit** Nel capitolo precedente abbiamo visto che gli stati possibili di un singolo qubit si possono rappresentare attraverso una *3-sfera*. Questo segue dal fatto che l'operatore densità si può scrivere come:

$$\rho(\vec{P}) = \frac{1}{2}(\mathbf{I} + \vec{P} \cdot \vec{\sigma}) = \frac{1}{2}(\mathbf{I} + P_1\sigma_1 + P_2\sigma_2 + P_3\sigma_3). \quad (2.4)$$

in cui  $\vec{P}$  è un vettore a 3 componenti reali e  $\vec{\sigma}$  sono le matrici di Pauli. In [1] è dimostrato che l'azione di un canale quantistico su uno stato di un qubit si riduce ad una *mappa affine* del tipo:

$$\vec{P} \rightarrow \vec{P}' = \mathbf{M}\vec{P} + \vec{C}, \quad (2.5)$$

in cui  $\mathbf{M}$  è una matrice reale 3x3 e  $\vec{C}$  è un vettore tridimensionale di componenti costanti. Considerando la decomposizione polare di  $\mathbf{M} = \mathbf{U}|\mathbf{M}|$ , in cui  $\mathbf{U}$  è una matrice unitaria, si può affermare che, essendo  $\mathbf{M}$  reale,  $|\mathbf{M}|$  è simmetrica. Inoltre si può assumere che anche  $\mathbf{U}$  sia una matrice reale e, poiché vale  $\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I}$ , in cui  $T$  rappresenta l'operazione di trasposizione, essa risulta una matrice ortogonale. Quindi si può scrivere  $\mathbf{M}$  come:

$$\mathbf{M} = \mathbf{O}\mathbf{S}, \quad (2.6)$$

in cui  $\mathbf{O}$  è una matrice ortogonale reale di determinante unitario e  $\mathbf{S}$  è una matrice simmetrica reale. Per questo motivo si possono considerare i canali quantistici agenti sulla sfera di Bloch come delle deformazioni lungo gli assi principali di  $\mathbf{S}$  seguiti da rotazioni, date da  $\mathbf{O}$  e traslazioni dovute a  $\vec{C}$ . Ne vedremo alcuni esempi.

**Canali quantistici di capovolgimento di bit e di fase** Il canale quantistico descrivente il capovolgimento di bit, che avviene con probabilità  $1 - p$ , trasforma lo stato  $|0\rangle$  nello stato  $|1\rangle$  e viceversa. Esso è descritto dai seguenti operatori di Kraus:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= \sqrt{p}\mathbf{I} = \sqrt{p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{E}_1 &= \sqrt{1-p}\boldsymbol{\sigma}_1 = \sqrt{1-p} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Andando a valutare  $\text{tr}(\boldsymbol{\rho}^2)$ , questo risulta uguale a  $\frac{1 + |\vec{P}|^2}{2}$ , in cui  $\vec{P}$  è il vettore che compare nell'equazione (2.4). Dalla Figura 2.1, si vede che la sfera di Bloch subisce una deformazione tale per cui il modulo del vettore  $\vec{P}$  non può crescere. Si può concludere che l'operatore densità soggetto al canale quantistico non rappresenta uno stato puro, poiché viene violata l'equazione (1.18). Il canale quantistico descrivente il capovolgimento di

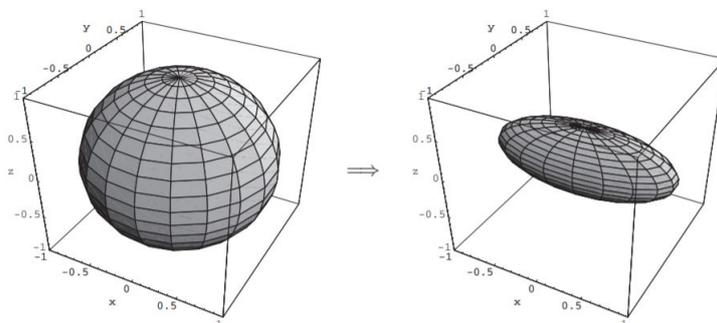


Figura 2.1: Effetto di un canale di capovolgimento di bit sulla sfera di Bloch, per  $p = 0.3$ .

fase è invece descritto dagli operatori:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= \sqrt{p}\mathbf{I} = \sqrt{p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{E}_1 &= \sqrt{1-p}\boldsymbol{\sigma}_3 = \sqrt{1-p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Essendo arbitraria la scelta degli operatori di Kraus, scegliamo la seguente rappresentazione:

$$\varepsilon(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{A}_0\boldsymbol{\rho}\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1\boldsymbol{\rho}\mathbf{A}_1, \tag{2.9}$$

in cui  $\mathbf{A}_0 = |0\rangle\langle 0|$  e  $\mathbf{A}_1 = |1\rangle\langle 1|$ , che equivale a fare una misura ortogonale sul qubit nella base  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  e non sapere il risultato. Si può verificare che  $\vec{P}$  è soggetto a:

$$(P_x, P_y, P_z) \rightarrow (0, 0, P_z). \quad (2.10)$$

In generale, come si vede in Figura 2.2, il piano  $xy$  subisce una contrazione. Si può anche

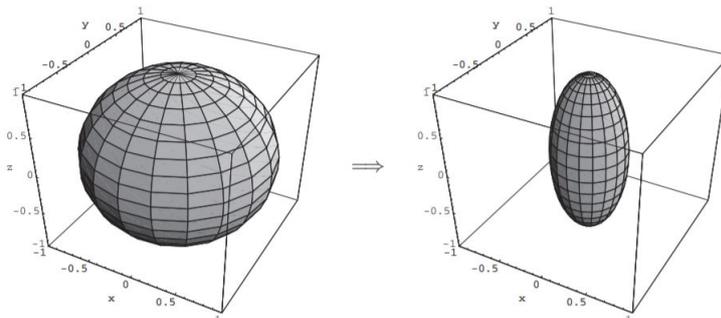


Figura 2.2: Effetto di un canale di capovolgimento di fase sulla sfera di Bloch, per  $p = 0.3$ .

effettuare una combinazione dei due canali quantistici appena discussi. Gli operatori di Kraus corrispondenti saranno:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= \sqrt{p}\mathbf{I} = \sqrt{p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{E}_1 &= \sqrt{1-p}\sigma_2 = \sqrt{1-p} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Per visualizzare gli effetti sulla Sfera di Bloch, si veda la Figura 2.3. Le immagini presenti in questo paragrafo sono state tratte da [1].

**Smorzamento di ampiezza** Supponiamo di avere un qubit nello stato quantistico  $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ , ovvero una sovrapposizione che ha il ruolo di esprimere la presenza di 1 fotone o di 0 fotoni. Facciamo interagire il qubit con l'ambiente. Supponendo che l'ambiente inizialmente non possieda fotoni, l'interazione avverrà grazie ad un beamsplitter che ha il ruolo di non modificare lo stato del qubit se si trova nello stato  $|0\rangle$  e di modificarlo in  $|0\rangle$  con probabilità  $\text{sen}^2\theta$  se questo si trova nello stato  $|1\rangle$ . Infatti, dopo l'interazione con l'ambiente lo stato sarà descritto da:

$$\mathbf{B}|0\rangle (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha|00\rangle + \beta(\cos\theta|01\rangle + \text{sen}\theta|10\rangle), \quad (2.12)$$

si veda [1]. Notiamo che  $\text{sen}^2\theta$  è la probabilità di emettere un fotone e che  $\cos^2\theta$  la probabilità di non emetterlo nel caso in cui il qubit si trova nello stato  $|1\rangle$ . Effettuando la traccia parziale sull'ambiente si ottiene:

$$\varepsilon(\rho) = \mathbf{E}_0\rho\mathbf{E}_0^\dagger + \mathbf{E}_1\rho\mathbf{E}_1^\dagger, \quad (2.13)$$

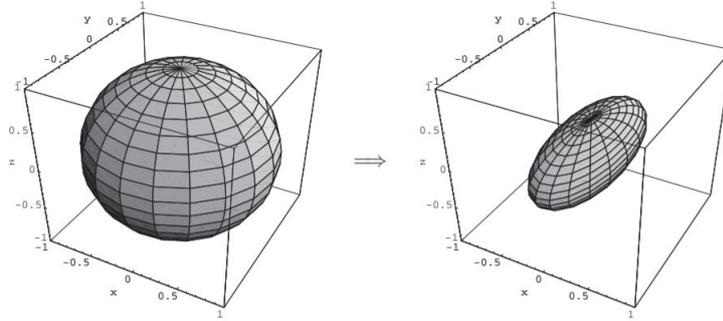


Figura 2.3: Effetto di un canale misto, di capovolgimento di fase e di bit sulla sfera di Bloch, per  $p = 0.3$ .

in cui  $\mathbf{E}_i = \langle i | \mathbf{B} | 0 \rangle$  sono:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} \end{pmatrix} \\ \mathbf{E}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.14}$$

con  $\gamma = \sin^2\theta$ . Combinando linearmente i due operatori, non si riesce ad ottenere l'identità. Questo accade perché, mentre  $\mathbf{E}_1$  trasforma lo stato  $|1\rangle$  nello stato  $|0\rangle$ , che equivale a disperdere un quanto di energia nell'ambiente,  $\mathbf{E}_0$  lascia lo stato  $|0\rangle$  invariato ma riduce l'ampiezza dello stato  $|1\rangle$ . Questo si può comprendere con la seguente considerazione fisica. Dal momento che non è stato disperso nell'ambiente, risulta più probabile che il sistema sia nello stato  $|0\rangle$ . Questo tipo di descrizione è molto importante poiché si utilizza per spiegare molti fenomeni fisici come, ad esempio, la dinamica di un atomo che emette spontaneamente un fotone.

**Assiomi rivisti per sistemi quantistici aperti** I risultati ottenuti per il sottosistema  $A$  del sistema composto  $AB$  si possono chiaramente generalizzare ad un qualunque sistema aperto:

1. **stati**: gli stati sono descritti da operatori densità;
2. **misura**: la misura è descritta da operatori POVM,  $\{\mathbf{E}_a\}$ , e un certo risultato  $a$  si presenta con probabilità  $\text{tr}(\mathbf{E}_a \rho)$ ;
3. **dinamica**: l'evoluzione nel tempo dello stato è descritta da canali quantistici.

## 2.2 Interazione con l'ambiente e decoerenza

Riprendiamo l'esempio portato nel paragrafo che tratta le misure generalizzate, facendo riferimento a quanto illustrato in [6]. Analizziamo il sistema composto da un singolo qubit  $A$ , facendo uso di un contatore, qubit  $B$ . Scegliamo la base ortonormale  $\{|0\rangle, |1\rangle\}_A$  per il sistema  $A$ , come nell'esempio, e la base  $\{|b_0\rangle, |b_1\rangle\}_B$  per il contatore  $B$ . Applichiamo loro la seguente trasformazione unitaria, rendendoli entangled:

$$\mathbf{U} : (\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle)_A \otimes |b_0\rangle_B \mapsto \alpha |0\rangle_A \otimes |b_0\rangle_B + \beta |1\rangle_A \otimes |b_1\rangle_B. \quad (2.15)$$

L'operatore densità corrispondente al vettore di stato finale composto,  $|\psi_c\rangle = \alpha |0\rangle_A \otimes |b_0\rangle_B + \beta |1\rangle_A \otimes |b_1\rangle_B$ , sarà:

$$\begin{aligned} \rho_c = |\psi_c\rangle \langle \psi_c| &= |\alpha|^2 |0\rangle \langle 0| |b_0\rangle \langle b_0| + \alpha\beta^* |0\rangle \langle 1| |b_0\rangle \langle b_1| + \\ &\alpha^*\beta |1\rangle \langle 0| |b_1\rangle \langle b_0| + |\beta|^2 |1\rangle \langle 1| |b_1\rangle \langle b_1|. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Risulta importante specificare che  $\rho_c$  rappresenta uno stato puro. Von Neumann postulò che avvenisse una riduzione non unitaria dell'operatore densità in grado di cancellare i termini fuori dalla diagonale, chiamato processo-1, per spiegare la scomparsa della sovrapposizione di stati, durante il meccanismo di misura. Egli, cioè, suppose che la trasformazione unitaria descritta dall'equazione di Schrödinger, non sia l'unica trasformazione a cui il sistema è sottoposto. L'operatore densità risultante, che chiameremo operatore densità *ridotto*, sarà quindi dato solo dai termini diagonali della  $\rho_c$ :

$$\rho_r = |\alpha|^2 |0\rangle \langle 0| |b_0\rangle \langle b_0| + |\beta|^2 |1\rangle \langle 1| |b_1\rangle \langle b_1|. \quad (2.17)$$

Questa riduzione permette di considerare gli elementi diagonali come probabilità in senso classico, poiché descriventi una correlazione di tipo classico. Infatti, con un operatore densità di questo tipo, gli stati del sistema risulteranno ignoti, prima della misura, ma ben definiti. In realtà, aggiungendo l'interazione con l'ambiente, considerato anch'esso un sistema quantistico, ci si accorge che non occorre postulare che avvenga il processo di riduzione, poiché è proprio questa interazione che determina la perdita di informazione, rappresentata dalla cancellazione dei termini non diagonali. Infatti, ammesso che lo stato iniziale dell'ambiente  $E$  sia  $|\varepsilon_0\rangle$ , si applica la seguente trasformazione, che lo rende entangled al sistema  $AB$ :

$$\mathbf{U}' : |\psi_c\rangle \otimes |\varepsilon_0\rangle \mapsto \alpha |0\rangle_A \otimes |b_0\rangle_B \otimes |\varepsilon_0\rangle + \beta |1\rangle_A \otimes |b_1\rangle_B \otimes |\varepsilon_1\rangle = |\varphi\rangle. \quad (2.18)$$

Presi due stati ortogonali di  $E$ ,  $|\varepsilon_0\rangle$  e  $|\varepsilon_1\rangle$ , si ottiene il seguente operatore densità per il sistema  $AB$ , attraverso l'operazione di traccia parziale su  $E$ , ovvero si ottiene il canale quantistico agente sul sistema aperto  $AB$ :

$$\begin{aligned} \rho_{AB} = \text{tr}_E(|\varphi\rangle \langle \varphi|) &= \sum_i \langle \varepsilon_i | \varphi \rangle \langle \varphi | \varepsilon_i \rangle \\ &= |\alpha|^2 |0\rangle \langle 0| |b_0\rangle \langle b_0| + |\beta|^2 |1\rangle \langle 1| |b_1\rangle \langle b_1| = \rho_r. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Risulta evidente che l'operatore densità ottenuto per il sistema  $AB$ , è proprio  $\rho_r$ . Questo processo viene chiamato perdita di coerenza quantistica o decoerenza.

## 2.3 Entropia e informazione

Vedremo come il processo di riduzione dell'operatore densità descritto nella sezione precedente è un processo irreversibile. La grandezza fisica che quantifica l'eventuale irreversibilità di un processo è l'*entropia*. Come vedremo, attraverso l'entropia è anche possibile quantificare il grado di "quantisticità" di un sistema, come esposto in [6]. Questa cosa ci permetterà anche di distinguere la correlazione quantistica, entanglement, da quella classica. L'entropia può essere considerata sotto due punti di vista, tra loro complementari. Quando associata ad una variabile casuale rappresenta da un lato la quantità di incertezza sulla variabile, prima di conoscere il suo valore, e dall'altro la quantità di *informazione* guadagnata dopo aver conosciuto il valore. Per approfondire la questione, si veda [1].

**Entropia di Shannon** L'entropia di Shannon è associata a variabili classiche, per esempio  $X$ , ed è funzione della distribuzione di probabilità di  $X$ ,  $p_1, \dots, p_n$ . La sua definizione è la seguente:

$$S(X) \equiv S(p_1, \dots, p_n) \equiv - \sum_x p_x \log p_x, \quad (2.20)$$

in cui  $\log$  rappresenta il logaritmo in base 2. Essa è misurata in bits. Nonostante  $\log 0$  non sia definito, concordiamo sul fatto che  $0 \log 0 \equiv 0$ , dal momento che un evento che accade con probabilità nulla non deve contribuire all'entropia. Per comprendere, intuitivamente, la ragione di questa definizione si può ragionare come segue. Supponiamo che  $I(E)$  sia l'informazione associata ad un certo evento; è ragionevole supporre che  $I(E)$  sia funzione della sola probabilità che si presenti  $E$ , per esempio  $p$ , vale a dire  $I(E) = I(p)$ , con  $p$  compresa tra 0 e 1. Inoltre è necessario che  $I(p)$  sia una funzione sufficientemente regolare. In più, se  $p$  e  $q$  sono le probabilità associate a due eventi statisticamente indipendenti, ha senso supporre che  $I(pq) = I(p) + I(q)$ , cioè l'informazione guadagnata quando due eventi indipendenti si presentano insieme è la somma delle informazioni ottenute quando i due eventi si presentano da soli. Tutte le proprietà appena citate sono soddisfatte dal logaritmo.

**Entropia di Von Neumann** L'entropia di Von Neumann generalizza quella di Shannon ai sistemi quantistici. Essa è definita a partire dall'operatore densità  $\rho$ , che sostituisce la distribuzione di probabilità classica:

$$S(\rho) \equiv -\text{tr}(\rho \log \rho), \quad (2.21)$$

in cui  $\log$  è nuovamente scelto in base 2. Se  $p_i$  sono gli autovalori di  $\rho$ , l'entropia diventa:

$$S(\rho) = - \sum_i p_i \log p_i, \quad (2.22)$$

e si assume nuovamente  $0 \log 0 \equiv 0$ . Dalla definizione si nota che l'entropia è non negativa ed è zero se e solo se lo stato è puro. Riprendiamo il sistema  $AB$  composto da due qubit, in cui al sistema  $A$  è associata la base ortonormale  $\{|0\rangle, |1\rangle\}_A$  e al sistema  $B$ , il contatore, la base  $\{|b_0\rangle, |b_1\rangle\}_B$ . Mostriamo che il processo di riduzione che coinvolge l'operatore densità del sistema composto, il quale avviene a causa dell'interazione con l'ambiente, è irreversibile. Infatti la riduzione di  $\rho_c$ , stato puro a entropia nulla, determina un operatore densità  $\rho_r$  che risulta misto se lo stato è entangled, come in questo caso. Come illustrato in [6]:

$$\Delta S = S(\rho_r) - S(\rho_c) = -(|\alpha|^2 \log |\alpha|^2 + |\beta|^2 \log |\beta|^2) > 0. \quad (2.23)$$

**Quantum discord** Ora definiamo il *quantum discord*, una grandezza che valuta la quantisticità di un sistema. Per farlo ci serviamo di nuove definizioni. Scriveremo come  $S(A|B)$  l'incertezza su  $A$  dopo aver ottenuto l'informazione contenuta in  $B$ , chiamata entropia condizionale e come  $S(A, B)$  l'entropia congiunta, ovvero l'entropia del sistema composto  $AB$ . Definiamo la *mutua informazione*,  $I(A : B)$ , che rappresenta l'informazione che i sistemi  $A$  e  $B$  hanno in comune, come:

$$I(A : B) \equiv S(A) + S(B) - S(A, B). \quad (2.24)$$

Se  $A$  e  $B$  sono statisticamente indipendenti, o non correlati, allora:

$$S(A, B) = S(A) + S(B), \quad (2.25)$$

da cui segue che  $I(A : B) = 0$ . D'altro canto, se  $A$  e  $B$  sono correlati classicamente, allora  $S(A, B) = S(A) = S(B) = I(A : B)$  e l'entropia condizionale  $S(A|B) = 0$ . La correlazione classica impone che, se si ha una completa conoscenza di uno, allora si conosce tutto anche dell'altro, come se  $A$  e  $B$  fossero copie identiche di un libro. Infatti, classicamente, l'entropia congiunta si può sempre esprimere come  $S(A, B) = S(B) + S(A|B)$ . Questa espressione suggerisce che l'informazione, in termini classici, si può sempre scrivere come:

$$J(A : B) = S(A) + S(B) - (S(B) + S(A|B)). \quad (2.26)$$

Volendo trasporre quest'ultima equazione in un'ottica quantistica, è necessario tenere a mente che la misura ridefinisce lo stato di un sistema. Quindi volendo esprimere l'entropia congiunta in funzione dell'entropia condizionale, è possibile farlo solo dopo

aver effettuato la misura di una certa osservabile su uno dei due sistemi, per esempio  $B$ , assumendo che quest'ultimo sia collassato nell'autostato  $|b_k\rangle$ :

$$S_{|b_k\rangle}(A, B) = (S(B) + S(A|B))_{|b_k\rangle}. \quad (2.27)$$

Come risulta chiaro,  $S_{|b_k\rangle}(A, B)$  esprime l'incertezza sul sistema composto  $AB$  dopo che  $B$  è collassato nell'autostato  $|b_k\rangle$  di una certa osservabile. Possiamo ora definire il quantum discord, utilizzando una definizione dipendente dalla base  $|b_k\rangle$ :

$$\delta_{|b_k\rangle}(A|B) = I - J = (S(B) + S(A|B))_{|b_k\rangle} - S(A, B). \quad (2.28)$$

Se esiste una base, per esempio  $|b_k\rangle$ , tale che:

$$\hat{\delta}(A|B) = \min_{\{|b_k\rangle\}} ((S(B) + S(A|B))_{|b_k\rangle} - S(A, B)) = 0, \quad (2.29)$$

si può affermare che  $A$  e  $B$  sono correlati classicamente, cioè non entangled. Se consideriamo lo stato  $\rho_c$ , si può mostrare che non esiste nessuna base in cui  $\hat{\delta}(A|B)$  si annulla. Se invece consideriamo lo stato  $\rho_r$ , si può mostrare che è proprio rispetto alla base  $\{|b_0\rangle, |b_1\rangle\}$  che  $\hat{\delta}(A|B)$  si annulla. Questo giustifica l'affermazione fatta in precedenza, secondo cui i sistemi  $A$  e  $B$ , dopo l'interazione con l'ambiente, diventano correlati classicamente tra loro.

## Capitolo 3

# Evoluzione di un sistema aperto attraverso la master equation

In questo capitolo verrà esposta la *master equation*, attraverso cui si può conoscere l'evoluzione dell'operatore densità del sistema aperto, conoscendo il tipo di interazione con l'ambiente circostante. A partire da essa è possibile ottenere la scala temporale in cui avviene la decoerenza. Ricordiamo che, ad un istante fissato, si può ottenere l'operatore densità relativo ad un sistema aperto entangled con l'ambiente, anche attraverso l'operazione di traccia parziale sull'ambiente dell'operatore densità del sistema totale. Successivamente verrà esposto come applicare la master equation ad un oscillatore armonico smorzato e si cercherà di valutare il tasso di decoerenza per il sistema. Quanto illustrato è tratto da [4].

### 3.1 Master equation in approssimazione Markoviana

L'evoluzione dell'operatore densità di un sistema aperto, può essere descritta anche da un'equazione differenziale, l'analogo dell'equazione di Schrödinger per i sistemi aperti, solo nel caso in cui il sistema si può definire *Markoviano*, vale a dire *locale* nel tempo. Questo significa che, considerato il sistema quantistico aperto  $A$ , l'operatore densità in un istante molto vicino ad un tempo fissato  $t$ ,  $\rho_A(t + dt)$ , dev'essere completamente determinato da  $\rho_A(t)$ . Il fatto che il sistema totale, cioè la coppia sistema-ambiente  $AE$ , sia chiuso, segua l'equazione di Schrödinger e quindi sia locale nel tempo, non assicura che questo valga per il singolo sistema  $A$ . La questione sorge per i sistemi aperti a causa della dispersione dell'informazione nell'ambiente, la quale può, in linea di principio, tornare indietro. Si apre quindi la possibilità che  $\rho_A(t + dt)$  non sia completamente determinato da  $\rho_A(t)$ , cosa che si presenta se l'informazione, persa precedentemente, torna al sistema  $A$  nell'intervallo di tempo considerato. Chiaramente un sistema aperto puramente Markoviano non esiste, poiché non si può rimuovere la possibilità che l'informazione tor-

ni indietro. Tuttavia per alcuni sistemi aperti, può essere una buona approssimazione. Indichiamo con  $\Delta t_{amb}$ , il tempo che occorre affinché l'informazione sia completamente persa, o anche il tempo in cui l'ambiente 'dimentica' l'informazione ottenuta dal sistema. Trascorso questo tempo, non c'è possibilità che l'informazione torni al sistema. Fissiamo un certo intervallo di tempo, che indichiamo con  $\Delta t_{grande}$ . L'approssimazione Markoviana ha senso quando la scala temporale della dinamica del sistema considerato,  $\Delta t_{dinamica}$  è tale che:

$$\Delta t_{dinamica} \gg \Delta t_{grande} \gg \Delta t_{amb}. \quad (3.1)$$

Quest'approssimazione implica che dopo ciascun incremento infinitesimo  $dt$  nell'evoluzione del sistema totale,  $AE$ , lo stato dell'ambiente viene sostituito con uno non più entangled, in quell'istante, con il sistema  $A$ . Questo è il significato dell'affermazione secondo cui, dopo un certo tempo, l'ambiente dimentica l'informazione ricevuta.

**Superoperatore di Liouville** Come riportato nel Capitolo 1, l'evoluzione infinitesima del vettore d'onda relativo ad un sistema quantistico chiuso, approssimata al primo ordine, ponendo  $\hbar = 1$ , è data da:

$$|\psi(t + dt)\rangle = \mathbf{I} - i\mathbf{H}(t)dt |\psi(t)\rangle, \quad (3.2)$$

da cui si ottiene quella dell'operatore densità corrispondente:

$$\boldsymbol{\rho}(t + dt) = \boldsymbol{\rho}(t) - idt[\mathbf{H}, \boldsymbol{\rho}(t)]. \quad (3.3)$$

Nel caso di un sistema aperto, come abbiamo imparato nel Capitolo 2, l'evoluzione di  $\rho$  è descritta da un canale quantistico; nel caso infinitesimo avremo:

$$\boldsymbol{\rho}(t + dt) = \varepsilon_{dt}(\boldsymbol{\rho}(t + dt)). \quad (3.4)$$

Espandendo il canale quantistico  $\varepsilon_{dt}$  e fermandosi al primo ordine, si ottiene:

$$\varepsilon_{dt} = \mathbf{I} + dt\mathcal{L}, \quad (3.5)$$

in cui  $\mathcal{L}$  è chiamato *Superoperatore di Liouville*. Sostituendo la nuova espressione di  $\varepsilon_{dt}$  otteniamo:

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} = \mathcal{L}(\boldsymbol{\rho}). \quad (3.6)$$

La soluzione di quest'ultima equazione differenziale è la seguente, se  $\mathcal{L}$  è indipendente dal tempo:

$$\boldsymbol{\rho}(t) = e^{\mathcal{L}t}(\boldsymbol{\rho}(0)). \quad (3.7)$$

Il canale quantistico si può riscrivere in funzione degli operatori di Kraus; supponendo che  $\mathbf{M}_0 = \mathbf{I} + O(dt)$  e che i restanti  $\mathbf{M}_a$  con  $a = 1, 2, \dots$  siano dell'ordine di  $\sqrt{dt}$ , avremo:

$$\boldsymbol{\rho}(t + dt) = \varepsilon_{dt}(\boldsymbol{\rho}(t)) = \sum_a \mathbf{M}_a \boldsymbol{\rho}(t) \mathbf{M}_a^\dagger = \boldsymbol{\rho}(t) + O(dt). \quad (3.8)$$

Possiamo interpretare  $\mathbf{M}_a$  con  $a = 1, 2, \dots$ , come degli operatori che determinano dei salti quantistici che si presentano con probabilità  $O(dt)$  e  $\mathbf{M}_0$  come descrivente l'evoluzione del sistema se non avvengono dei salti. Si può scrivere:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_0 &= \mathbf{I} + (-i\mathbf{H} + \mathbf{K})dt \\ \mathbf{M}_a &= \sqrt{dt}\mathbf{L}_a, \quad a = 1, 2, \dots\end{aligned}\tag{3.9}$$

in cui  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{K}$  sono operatori autoaggiunti, e  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{L}_a$  sono di ordine zero nel tempo. L'operatore  $\mathbf{K}$  si può determinare attraverso la relazione di completezza degli operatori di Kraus, tenendo i termini al primo ordine:

$$\mathbf{I} = \sum_a \mathbf{M}_a^\dagger \mathbf{M}_a = \mathbf{I} + dt(2\mathbf{K} + \sum_a \mathbf{L}_a^\dagger \mathbf{L}_a) + \dots\tag{3.10}$$

oppure,

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2} \sum_a \mathbf{L}_a^\dagger \mathbf{L}_a.\tag{3.11}$$

Sostituendo nell'equazione 3.8 otteniamo la master equation, in cui  $\{a = 1, 2, \dots\}$ :

$$\frac{d\rho}{dt} = \mathcal{L}(\rho) = -i[\mathbf{H}, \rho] + \sum_a \mathbf{L}_a \rho \mathbf{L}_a^\dagger - \frac{1}{2} \mathbf{L}_a^\dagger \mathbf{L}_a \rho - \frac{1}{2} \rho \mathbf{L}_a^\dagger \mathbf{L}_a.\tag{3.12}$$

Il primo termine è hamiltoniano e determina l'evoluzione unitaria; il secondo termine invece, descrive le transizioni possibili a cui il sistema può essere soggetto a causa dell'interazione con l'ambiente. Nella rappresentazione di Heisenberg, in cui l'operatore densità è indipendente dal tempo, si può riscrivere la master equation a cui è soggetto un operatore, questa volta dipendente dal tempo, associato ad una certa osservabile. L'evoluzione dell'operatore si può scrivere come:

$$\mathbf{A}(t + dt) = \varepsilon_{dt}^*(\mathbf{A}(t)) = \sum_a \mathbf{M}_a^\dagger \mathbf{A}(t) \mathbf{M}_a,\tag{3.13}$$

da cui la master equation:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathcal{L}^*(\mathbf{A}) = i[\mathbf{H}, \mathbf{A}] + \sum_a \mathbf{L}_a^\dagger \mathbf{A} \mathbf{L}_a - \frac{1}{2} \mathbf{L}_a^\dagger \mathbf{L}_a \mathbf{A} - \frac{1}{2} \mathbf{A} \mathbf{L}_a^\dagger \mathbf{L}_a.\tag{3.14}$$

Si possono ridefinire gli operatori di Kraus effettuando una trasformazione unitaria, del tipo:

$$\mathbf{L}'_\mu = \sum_a V_{\mu a} \mathbf{L}_a,\tag{3.15}$$

in cui  $V_{\mu a}$  sono gli elementi di una matrice unitaria. In questo caso  $\mathbf{M}_0$  è stato lasciato invariato. La trasformazione unitaria determina solo un cambio di base che, chiaramente, non influenza la dinamica.

## 3.2 Esempi

Ora riportiamo degli esempi che ci daranno la percezione di quanto velocemente un sistema macroscopico perda la coerenza quantistica.

**Oscillatore armonico smorzato** Consideriamo come sistema aperto un oscillatore armonico, il quale viene accoppiato con l'ambiente attraverso il seguente operatore hamiltoniano:

$$\mathbf{H}_{int} = \sum_k g_k (\mathbf{a}\mathbf{b}_k^\dagger + \mathbf{a}^\dagger\mathbf{b}_k), \quad (3.16)$$

in cui  $\mathbf{a}$  è l'operatore di distruzione di un quanto dell'oscillatore,  $\mathbf{b}_k^\dagger$  è l'operatore di creazione di un fotone nel modo  $k$  e  $g_k$  è una costante di accoppiamento. Questi operatori sono definiti da:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger] = \mathbf{I}; \quad (3.17)$$

la loro azione sugli autostati ortogonali, indicati con  $\{|n\rangle\}$  è data da:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}|n\rangle &= |n-1\rangle\sqrt{n}, \\ \mathbf{a}^\dagger|n\rangle &= |n+1\rangle\sqrt{n+1}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Supponiamo che l'ambiente sia vicino allo zero assoluto, per cui dall'oscillatore non vengono assorbiti fotoni. Se quelli emessi non interagiscono con l'oscillatore si può considerare il sistema di tipo Markoviano. Definiamo un unico operatore  $\mathbf{L}$  nel seguente modo:

$$\mathbf{L} = \sqrt{\Gamma}\mathbf{a}, \quad (3.19)$$

in cui  $\Gamma = \sum_k \Gamma_k$  è il tasso di decadimento dell'oscillatore dal primo stato eccitato allo stato fondamentale e  $\Gamma_k$  è il tasso associato al modo  $k$ . Dal momento che, descrivere un oscillatore armonico nello stato eccitato  $n$  è analogo a descrivere  $n$  particelle non interagenti, il tasso di decadimento associato allo stato eccitato  $n$  nello stato  $n-1$  è  $n\Gamma$ . Scriviamo la master equation:

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[\mathbf{H}_0, \rho] + \Gamma(\mathbf{a}\rho\mathbf{a}^\dagger - \frac{1}{2}\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}\rho - \frac{1}{2}\rho\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}), \quad (3.20)$$

in cui  $\mathbf{H}_0 = \omega\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}$  è l'hamiltoniana dell'oscillatore. Questa equazione rappresenta lo smorzamento dovuto alle emissioni di fotoni. Passiamo alla rappresentazione di Heisenberg e scriviamo la master equation per l'operatore  $\mathbf{A}(t)$ :

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = i[\mathbf{H}_0, \mathbf{A}] + \Gamma(\mathbf{a}^\dagger\mathbf{A}\mathbf{a}^\dagger - \frac{1}{2}\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}\mathbf{A} - \frac{1}{2}\mathbf{A}\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}). \quad (3.21)$$

Per risolverla poniamo  $\mathbf{a}(t) = f(t)\mathbf{a}$ ; l'equazione diventa:

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt}\mathbf{a} &= i\omega f(t)[\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}, \mathbf{a}] + \Gamma f(t)(\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}) \\ &= (i\omega + \frac{\Gamma}{2})f(t)[\mathbf{a}^\dagger, \mathbf{a}]\mathbf{a} \Rightarrow \frac{df}{dt} = -(i\omega + \frac{\Gamma}{2})f(t).\end{aligned}\quad (3.22)$$

La soluzione è  $f(t) = e^{-i-\Gamma t/2}f(0)$ ; in conclusione la soluzione per  $\mathbf{a}(t)$  è:

$$\mathbf{a}(t) = e^{-i\omega t - \Gamma t/2}\mathbf{a}(0). \quad (3.23)$$

Il numero di occupazione dell'oscillatore, definito come  $\mathbf{n} = \mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}$ , decade, nella rappresentazione di Heisenberg, come:

$$\mathbf{n}(t) = e^{-\Gamma t}\mathbf{n}(0). \quad (3.24)$$

$\Gamma$  risulta essere il tasso di smorzamento dell'oscillatore. Interpretando lo stato eccitato  $n$  di un oscillatore come  $n$  particelle non interagenti, ciascuna con probabilità di decadere  $\Gamma$ , per unità di tempo, abbiamo ottenuto la legge di decadimento di una popolazione di particelle. Al fine di valutare il tasso di decoerenza, definiamo il seguente stato coerente:

$$|\alpha\rangle = e^{|\alpha|^2/2}e^{\alpha\mathbf{a}^\dagger}|0\rangle = e^{|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle; \quad (3.25)$$

Si può mostrare che  $|\alpha\rangle$  è l'autostato normalizzato di  $\mathbf{a}$  con autovalore  $\alpha$ . Dal momento che l'operatore  $\mathbf{a}$  non è autoaggiunto, due autostati coerenti con autovalori differenti,  $\alpha$  e  $\beta$ , non sono ortogonali. Infatti:

$$|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2}e^{-|\beta|^2}e^{2\text{Re}(\alpha^*\beta)} = e^{-|\alpha-\beta|^2}. \quad (3.26)$$

Si può mostrare, nella rappresentazione di Schrödinger, che uno stato inizialmente coerente resta coerente, con un'ampiezza di decadimento; infatti:

$$|\alpha\rangle \mapsto |\alpha e^{-\Gamma t/2}\rangle. \quad (3.27)$$

Consideriamo ora che lo stato iniziale dell'oscillatore sia una sovrapposizione di stati coerenti:

$$|\psi\rangle = N_{\alpha,\beta}(|\alpha\rangle + |\beta\rangle), \quad (3.28)$$

in cui  $N_{\alpha,\beta}$  è una costante di normalizzazione; oppure scriviamo l'operatore densità:

$$\rho = N_{\alpha,\beta}^2(|\alpha\rangle\langle\alpha| + |\alpha\rangle\langle\beta| + |\beta\rangle\langle\alpha| + |\beta\rangle\langle\beta|). \quad (3.29)$$

I termini fuori dalla diagonale decrescono esponenzialmente:

$$|\alpha\rangle\langle\beta| \rightarrow e^{i\phi(\alpha,\beta)}e^{\Gamma t|\alpha-\beta|^2/2}|\alpha e^{\Gamma t/2}\rangle\langle\beta e^{\Gamma t/2}|, \quad (3.30)$$

in cui  $e^{i\phi(\alpha,\beta)}$  è un fattore di fase. In conclusione, i termini non diagonali decadono esponenzialmente con il seguente tasso di decadimento:

$$\Gamma_{decoerenza} = \frac{1}{2}\Gamma|\alpha - \beta|^2; \quad (3.31)$$

Se  $|\alpha - \beta|^2 \gg 1$ , il tasso di decoerenza è molto maggiore del tasso di smorzamento. Il valore di aspettazione del numero di occupazione  $\mathbf{n}$  in uno stato coerente è dato da  $\langle \mathbf{n} \rangle = \langle \alpha | \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} | \alpha \rangle = |\alpha|^2$ . Se  $\alpha$  e  $\beta$  hanno dei moduli confrontabili ma fasi molto differenti,  $\Gamma_{decoerenza}$  è circa  $\Gamma \langle \mathbf{n} \rangle$ , che rappresenta il tasso di emissione di un singolo fotone. Questo tasso è più grande rispetto a quello di dissipazione, se  $n$  è grande<sup>1</sup>. Ora consideriamo un oscillatore entangled con un ambiente che si trova a temperatura  $T$ , non nulla. Vedremo che il tasso di decoerenza è ancora più grande e che, quindi, la decoerenza avviene incredibilmente veloce per i sistemi macroscopici. Il numero di occupazione termica dei fotoni, con frequenza confrontabile con quella dell'oscillatore, è  $n_\gamma$  è approssimabile a:

$$n_\gamma \approx \frac{T}{\hbar\omega}, \quad (3.32)$$

valida per  $T \gg \hbar\omega$ . Per un oscillatore con energia  $E = \hbar\omega n_{osc}$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma_{decoerenza}}{\Gamma_{smorzamento}} &\sim n_{osc} n_\gamma \sim \frac{E}{\hbar\omega} \frac{T}{\hbar\omega} \\ &\sim \frac{m\omega^2 x^2}{\hbar\omega} \frac{T}{\hbar\omega} \sim x^2 \frac{mT}{\hbar^2} \sim \frac{x^2}{\lambda_T^2}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

in cui abbiamo sostituito a  $E$  l'energia potenziale dell'oscillatore armonico e in cui  $\lambda_T$  è la lunghezza d'onda termica di De Broglie. Da quest'ultima uguaglianza si nota che il tasso di decoerenza per oggetti macroscopici è molto elevato e che quindi il processo avviene molto velocemente.

**Il gatto di Schrödinger** Supponiamo che il sistema considerato sia composto da un atomo, che per semplicità tratteremo come un qubit, e da un gatto. Lo stato dell'atomo, in generale, sarà una sovrapposizione degli stati di base ortonormali  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ ; lo stato del gatto, invece, lo descriviamo attraverso la base di stati  $\{|vivo\rangle, |morto\rangle\}$ . I due sistemi sono soggetti a entanglement, cioè lo stato di vita o di morte del gatto viene correlato allo stato del qubit; in particolare, se l'atomo si trova nello stato  $|0\rangle$ , il gatto sarà morto, se invece l'atomo si trova nello stato  $|1\rangle$  il gatto sarà vivo. Come può, realisticamente, uno stato dell'atomo determinare se il gatto vivrà oppure no? Può accadere se uno dei due stati dell'atomo può in qualche modo determinare la rottura di una fiala di veleno, letale per il gatto. Supponiamo ora di porre il sistema in una scatola chiusa. Il paradosso

<sup>1</sup>L'azione dell'operatore  $\mathbf{n}$  sugli autostati ortogonali  $\{|n\rangle\}$  è:  $\mathbf{n}|n\rangle = |n\rangle n$ ; quindi  $n$  è l'autovalore corrispondente.

consiste nel fatto che è proprio la misura a determinare il collasso in uno dei due stati dell'atomo e quindi la vita o la morte del gatto, motivo per cui appare corretto affermare che, prima di aprire la scatola, essendo l'atomo in una sovrapposizione di stati, allo stesso modo lo è il gatto, ovvero contemporaneamente vivo e morto. Quindi supposto che lo stato iniziale del sistema sia  $|\psi_i\rangle = |vivo\rangle |1\rangle$ , dopo un certo tempo, a scatola chiusa, lo stato del sistema composto sarà:

$$|\psi\rangle = [|vivo\rangle |1\rangle + |morto\rangle |0\rangle]/\sqrt{2}, \quad (3.34)$$

e l'operatore densità associato al sistema sarà:

$$\begin{aligned} \rho = |\psi\rangle \langle\psi| = \frac{1}{2} [ & |vivo\rangle \langle 1| |1\rangle \langle vivo| + |morto\rangle \langle 0| |0\rangle \langle morto| \\ & + |vivo\rangle \langle 0| |1\rangle \langle morto| + |morto\rangle \langle 1| |0\rangle \langle vivo| ]. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Come affermato in [1], la decoerenza gioca un ruolo fondamentale nel superamento del paradosso. Si deve considerare che il sistema atomo-gatto non potrà mai essere completamente isolato dall'ambiente circostante, quindi, l'informazione sulla sovrapposizione si disperderà nell'ambiente. Il fenomeno risulta in uno smorzamento che farà decrescere esponenzialmente i termini diagonali dell'operatore densità. In breve tempo, questi andranno a zero. In prima approssimazione infatti, il sistema atomo-gatto si può trattare come l'oscillatore armonico di cui abbiamo parlato nel paragrafo precedente. Per questo motivo, l'ignoranza dell'osservatore prima di aprire la scatola sarà di tipo classico, poiché lo stato del gatto non sarà mai in una sovrapposizione di stati neppure prima della misura, eccetto per un tempo brevissimo di decoerenza, ma sarà o vivo o morto.

# Conclusioni

Ripercorriamo i passi appena compiuti. Con l'obiettivo di spiegare il fenomeno della decoerenza, abbiamo ripreso brevemente i postulati della meccanica quantistica descrittivi dei sistemi perfettamente isolati, poi ridefiniti attraverso l'operatore densità. Questo strumento ci ha permesso di avere un formalismo adatto a descrivere i sistemi quantistici aperti, sistemi più realistici, in cui è contemplata la possibilità di scambiare energia e informazione con l'ambiente circostante e di cui abbiamo riportato i postulati. Abbiamo utilizzato il fenomeno dell'entanglement per descrivere le interazioni tra il sistema considerato e l'ambiente. Parallelamente ci siamo concentrati sul meccanismo della misura, generalizzandola rispetto alla misura come proiezione ortogonale. La teoria dei sistemi aperti tratta la misura come qualunque altra interazione con l'ambiente che determina la perdita di coerenza quantistica, in cui lo strumento di misura, così come l'ambiente, è considerato un sistema quantistico. Questa teoria, quindi, permette di sapere perché il collasso dello stato di un sistema quantistico può avvenire in stati ben definiti, seppure prima di conoscere il risultato della misura, ignoti. È risultato possibile anche stimare il tempo in cui la decoerenza si manifesta e in cui un oggetto quantistico interagente con l'ambiente, perde la possibilità di essere in una sovrapposizione di stati. Questo significa che, dopo un brevissimo tempo di decoerenza, la non conoscenza dell'osservatore assume un carattere classico poiché a tutte le alternative possibili sono associate probabilità classiche. È proprio questa considerazione che permette di affermare che la classicità emerge dall'interazione di sistemi di per sé quantistici, con l'ambiente. Quantitativamente, il tempo di decoerenza si può ottenere attraverso l'equazione differenziale che descrive l'evoluzione dell'operatore densità di un sistema aperto, la master equation per sistemi locali. Abbiamo visto, inoltre, che il fenomeno risulta irreversibile, cioè determina un aumento di entropia, se il sistema e l'ambiente sono entangled. Tuttavia, la teoria non spiega per quale motivo si ha esperienza di un solo risultato tra quelli possibili, domanda a cui, ad esempio, l'interpretazione a Molti Mondi, tenta di rispondere. Per approfondire la questione, si consulti [3].

# Bibliografia

- [1] Isaac L. Chaung, Michael A. Nielsen. Quantum computation and Quantum information, Cambridge University Press, 2010.
- [2] A. Friedman, L. Susskind. Meccanica quantistica, il minimo indispensabile per fare della (buona) fisica, Raffaello Cortina Editore, 2015.
- [3] Gian C. Ghirardi. Un'occhiata alle carte di Dio, Il Saggiatore, 1997.
- [4] J. Preskill. Quantum Information, California Institute of Technology, 2015.
- [5] R. Zucchini. Quantum Mechanics: Lecture Notes, 2019.
- [6] Wojciech H. Zurek. Decoherence and the transition from Quantum to Classical- Revisited, Los Alamos Science Numero 27, pagina 2, 2002.